

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO

ROBERTO ANDREOTTI BODRA

**MODELO DE VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA COM SALTOS APLICADO A COMMODITIES
AGRÍCOLAS**

SÃO PAULO

2012

ROBERTO ANDREOTTI BODRA

**MODELO DE VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA COM SALTOS APLICADO A COMMODITIES
AGRÍCOLAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia da Fundação Getúlio Vargas/EESP, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Economia, linha de Finanças Quantitativas.

Orientador:

Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto

SÃO PAULO

2012

Bodra, Roberto Andreotti.

Modelo de volatilidade estocástica com saltos aplicado a commodities agrícolas / Roberto Andreotti Bodra. - 2012.

54 f.

Orientador: Afonso de Campos Pinto

Dissertação (MPFE) - Escola de Economia de São Paulo.

1. Produtos agrícolas. 2. Processo estocástico. 3. Economia agrícola. 4. Bolsa de mercadorias. 5. Mercado de opções. I. Pinto, Afonso de Campos. II. Dissertação (MPFE) - Escola de Economia de São Paulo. III. Título.

CDU 339.172

ROBERTO ANDREOTTI BODRA

**MODELO DE VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA COM SALTOS APLICADO A COMMODITIES
AGRÍCOLAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia da Fundação Getúlio Vargas/EESP, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Economia, linha de Finanças Quantitativas.

Data da Aprovação: ____/____/____

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto
(Orientador)
FGV - EESP

Prof. Dr. Ricardo Ratner Rochman
FGV - EESP

Prof. Dr. Marcos Eugênio da Silva
FEA - USP

Agradecimentos

Ao Afonso por toda a orientação e motivação dada durante todo o decorrer do curso.

Aos nove colegas de turma, Eitan, Flávio, Gabriel, Guilherme, Gustavo, Luciano, Naio, Pedro e Renato, pelo companheirismo que tornou o caminho do mestrado menos árduo.

Ao Bruno por sua boa vontade em compartilhar seu conhecimento.

À minha mãe, meus irmãos e à Lu, pela paciência e compreensão, e principalmente pelo apoio incondicional.

Resumo

Mensalmente são publicados relatórios pelo Departamento de Agricultura dos Estados Unidos (USDA) onde são divulgados dados de condições das safras, oferta e demanda globais, nível dos estoques, que servem como referência para todos os participantes do mercado de commodities agrícolas. Esse mercado apresenta uma volatilidade acentuada no período de divulgação dos relatórios.

Um modelo de volatilidade estocástica com saltos é utilizado para a dinâmica de preços de milho e de soja. Não existe um modelo 'ideal' para tal fim, cada um dos existentes têm suas vantagens e desvantagens. O modelo escolhido foi o de Oztukel e Wilmott (1998), que é um modelo de volatilidade estocástica empírica, incrementado com saltos determinísticos. Empiricamente foi demonstrado que um modelo de volatilidade estocástica pode ser bem ajustado ao mercado de commodities, e o processo de *jump-diffusion* pode representar bem os saltos que o mercado apresenta durante a divulgação dos relatórios.

As opções de commodities agrícolas que são negociadas em bolsa são do tipo americanas, então alguns métodos disponíveis poderiam ser utilizados para precificar opções seguindo a dinâmica do modelo proposto. Dado que o modelo escolhido é um modelo multi-fatores, então o método apropriado para a precificação é o proposto por Longstaff e Schwartz (2001) chamado de Monte Carlo por mínimos quadrados (LSM).

As opções precificadas pelo modelo são utilizadas em uma estratégia de hedge de uma posição física de milho e de soja, e a eficiência dessa estratégia é comparada com estratégias utilizando-se instrumentos disponíveis no mercado.

Palavras-chave: Produtos agrícolas, Processo estocástico, Economia agrícola, Bolsa de mercadorias, Mercado de opções

Abstract

The United States Department of Agriculture publishes every month reports with data on crop conditions, global supply and demand and inventory levels which serve as a reference for all participants in the agricultural commodities market. This market has a sharp volatility during the release of these reports.

A stochastic volatility model with jumps is used to the dynamics of prices of corn and soybean. There is not an ideal model for this purpose, each one presenting its advantages and disadvantages. The chosen model was the one from Oztukel and Wilmott (1998) which is an empirical stochastic volatility model, incremented with deterministic jumps. It has been show empirically that commodities market can be well fitted under stochastic volatility models and the jump-diffusion process can properly represent the jumps that the market faces during the release of the reports.

As the type of agricultural commodities options that are traded in the exchange are american, then some available methods could be used to price options under the proposed model dynamics. Given that the chosen model is multifactor, then the appropriate method for it is the one proposed by Longstaff and Schwartz (2001) called least squares Monte Carlo (LSM).

Options priced by the model are then used in a strategy to hedge a physical position of corn and soybean, and the efficiency of this strategy is compared against strategies with instruments available in the market.

Keywords: Agricultural commodities, Stochastic process, Agricultural market, Commodities exchange, Options market

Sumário

Lista de Figuras.....	9
Lista de Tabelas.....	10
1. Introdução.....	11
2. Revisão Bibliográfica	13
3. Conceitos Teóricos	18
3.1. Saltos	18
3.2. Volatilidade Estocástica	20
3.3. Análise empírica da volatilidade	21
3.4. Modelo proposto	24
3.5. Simulação de Monte Carlo para opções americanas	24
4. Aplicação	29
4.1. Características dos mercados de milho e soja	29
4.2. Ciclos: estimação e simulação	32
4.3. Estimação dos parâmetros	33
4.4. Precificação da opção	35
4.5. Simulação	36
4.6. Resultados	37
5. Conclusão	44
6. Referências bibliográficas	46
Anexo I – Salto determinístico na dinâmica do logaritmo do preço.....	49
Anexo II – PDF e CDF de cada período estimado	51

Lista de Figuras

Figura 1 – Exemplo de dez trajetórias para o preço de um ativo teórico.....	25
Figura 2 – Preço do milho em centavos de dólar por bushel (Fonte: Bloomberg, CEPEA).....	31
Figura 3 – Preço da soja em centavos de dólar por bushel (Fonte: Bloomberg, CEPEA).....	31
Figura 4 – Ciclos: Estimção dos Parâmetros e Simulação	32
Figura 5 – Exemplo de simulação para a volatilidade ao longo do tempo	35
Figura 6 – Milho Brasil: Resultado diário acumulado (valores em milhares de US\$)	39
Figura 7 – Soja Brasil: Resultado diário acumulado (valores em milhares de US\$).....	41
Figura 8 – Milho EUA: Resultado diário acumulado (valores em milhares de US\$)	42
Figura 9 – Soja EUA: Resultado diário acumulado (valores em milhares de US\$).....	43
Figura 10 – PDF e CDF Milho Período 1	51
Figura 11 – PDF e CDF Milho Período 2	51
Figura 12 – PDF e CDF Milho Período 3	52
Figura 13 – PDF e CDF Milho Período 4	52
Figura 14 – PDF e CDF Soja Período 1	53
Figura 15 – PDF e CDF Soja Período 2	53
Figura 16 – PDF e CDF Soja Período 3	54
Figura 17 – PDF e CDF Soja Período 4	54

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Preço do ativo em cada passo para as dez diferentes simulações	26
Tabela 2 - Valor do payoff no vencimento.....	26
Tabela 3 - Preço do ativo (X) e valor presente do fluxo de caixa (Y) no estado 2.....	27
Tabela 4 - Comparação do exercício ou não exercício da opção em determinado estado de tempo	27
Tabela 5 - Matriz de fluxos de caixa considerando exercício antecipado no estado 2.....	28
Tabela 6 - Matriz de fluxos de caixa completa.....	28
Tabela 7 - Produção e exportação globais estimadas para a safra 2012-2013 (Fonte: Bloomberg)	29
Tabela 8 - Parâmetros estimados dos saltos	33
Tabela 9 - Parâmetros estimados da volatilidade estocástica.....	34
Tabela 10 - Parâmetros estimados da correlação entre o preço e a volatilidade do ativo	34
Tabela 11 - Resultados da simulação para Milho Brasil (desvio-padrão em milhares de US\$).....	38
Tabela 12 - Resultados da simulação para Soja Brasil (desvio-padrão em milhares de US\$).....	40
Tabela 13 - Resultados da simulação para Milho EUA (desvio-padrão em milhares de US\$).....	41
Tabela 14 - Resultados da simulação para Soja EUA (desvio-padrão em milhares de US\$).....	43

1. Introdução

A coleta, análise e publicação de relatórios sobre informações do mercado de commodities agrícolas pelo Departamento de Agricultura dos Estados Unidos (USDA na sigla em inglês) é feita há 150 anos e tem um papel fundamental para esse mercado. Dados precisos sobre a situação e a perspectiva para as commodities agrícolas melhoram a eficiência da cadeia de produção e comercialização, ajudando todos os participantes do mercado como agricultores, agroindústrias e governos, a tomarem decisões mais informadas.

Os relatórios, que disponibilizam dados sobre as condições das safras, previsões de oferta e demanda globais, comércio e estoques, reduzem as disparidades de informações entre os participantes do mercado. São divulgados antes da abertura dos principais mercados de derivativos, geralmente entre os dias 8 e 12 de cada mês, sendo considerado uma referência por sua abrangência e objetividade.

As informações contidas nos relatórios são tão sensíveis ao mercado que, para evitar o lançamento prévio de seu conteúdo, o USDA “confina” as pessoas envolvidas na criação dos relatórios desde a noite do dia anterior até o horário da divulgação do relatório na manhã seguinte. As informações se tornam ainda mais relevantes quando as incertezas no mercado são grandes, como por exemplo em épocas de adversidades climáticas.

Dado que o mercado cria expectativas em torno da divulgação desses relatórios, os preços negociados das commodities agrícolas são impactados pela confirmação ou não confirmação dessas expectativas. A partir disso, e sabendo-se a data exata em que os relatórios irão impactar o mercado, é natural pensar em incorporar esse efeito à um modelo de precificação de contratos negociados sobre essas commodities.

Contratos futuros e de opções sobre commodities agrícolas têm apresentado um crescimento significativo no volume negociado nos últimos anos devido à demanda

global crescente¹ e a ampliação da disponibilidade de negociação eletrônica para esses produtos².

O objetivo principal deste trabalho é propor um modelo para a precificação de opções americanas que seja capaz de incorporar saltos determinísticos, que representem o efeito dos saltos nos preços das commodities causados pela divulgação dos relatórios, bem como incorporar uma volatilidade estocástica.

As opções são utilizadas posteriormente em uma estratégia de hedge para uma posição teórica de milho físico, e outra de soja física, tanto para o mercado brasileiro quanto para o mercado norte-americano. A eficiência da estratégia é comparada com a de outras estratégias utilizando-se instrumentos atualmente disponíveis no mercado.

O trabalho é dividido de tal forma que primeiro faz-se uma revisão sobre a literatura publicada sobre o mercado de commodities agrícolas e os efeitos nos seus preços causados pela divulgação dos relatórios. Revisa-se também a literatura sobre modelos de volatilidade estocástica, modelos de saltos e precificação de opções americanas.

Depois discute-se os conceitos teóricos empregados na utilização do modelo proposto, bem como explica-se o funcionamento do método utilizado para a precificação de opções seguindo a dinâmica do modelo.

Por fim o trabalho apresenta a estrutura proposta para a simulação da estratégia de hedge utilizando-se opções precificadas pelo modelo, a estimação dos parâmetros necessários e a comparação entre os resultados das estratégias de hedge.

¹ Dados do USDA mostram que nos últimos quinze anos o consumo doméstico global de milho aumentou 48% e o de soja 64%.

² Segundo dados do CME Group, a negociação eletrônica de futuros e opções representou 76% do total de negociações dos contratos negociados na bolsa de Chicago no terceiro trimestre de 2012, tanto para milho quanto para soja.

2. Revisão Bibliográfica

Este capítulo tem por objetivo revisar a literatura recente publicada sobre o mercado de commodities agrícolas e os efeitos observados nos preços em consequência da divulgação dos relatórios do USDA. Também revisa a literatura sobre o que foi publicado sobre modelos de volatilidade estocástica, a incorporação de saltos determinísticos e métodos para a precificação de opções americanas.

O impacto dos relatórios do USDA na volatilidade implícita dos mercados de milho e de soja foi estudado por Isengildina-Massa et al (2008) no período de 1985 a 2002. Concluíram que se os relatórios sanam as incertezas do mercado, a volatilidade implícita do mercado deve diminuir imediatamente após a divulgação dos mesmos. Um dos resultados apresentados é que a volatilidade implícita cai em média 3% para o milho e 4% para a soja. Outro resultado é que o impacto dos relatórios é crescente ao longo do período analisado.

Mckenzie e Singh (2011) analisaram a eficiência do hedge contra possíveis perdas decorrentes de grandes variações nos preços de commodities após a divulgação dos relatórios do USDA. O estudo mostra que de uma perspectiva de gestão de risco é extremamente importante o hedge para esses eventos. Posições de soja e milho não protegidas podem levar a grandes perdas comparando-se dias com eventos e não eventos. A eficiência do hedge é estatisticamente maior em dias de eventos.

Os modelos de volatilidade estocástica são utilizados para a precificação de derivativos, em especial opções. Esses modelos contornam uma das deficiências do modelo de Black e Scholes (1973), que assume que a volatilidade do ativo é constante ao longo do tempo, tratando-a o como um processo aleatório, dirigido por variáveis como o nível do preço do ativo, a tendência da volatilidade de reverter à uma média de longo prazo e a variância da própria volatilidade, entre outras.

Jackel (2004) cita diversos modelos de volatilidade estocástica, mas talvez o mais utilizado seja o modelo de Heston (1993) que desenvolveu o popular modelo conhecido

por seu nome, no qual a aleatoriedade da variância do processo varia conforme a raiz quadrada da variância do ativo.

A abordagem tradicional para a volatilidade estocástica, que é a de se obter um modelo tratável e então calibrar seus parâmetros, é contrastada por Oztukel e Wilmott (1998) que examinam dados reais do mercado para modelar o comportamento da volatilidade. O modelo estocástico é construído de tal forma que o *drift*, a variância, a média de longo prazo e a dispersão da volatilidade sejam compatíveis com dados históricos. A partir disso pode-se, por exemplo, determinar a evolução da volatilidade a partir do valor atual conhecido para a distribuição de longo prazo. Examinam dados empíricos de volatilidade para achar o melhor modelo com funções independentes do tempo que descrevam o *drift* e a volatilidade da volatilidade. Dessa maneira, a volatilidade da volatilidade é obtida examinando-se as variações diárias da volatilidade, afinal a aleatoriedade da volatilidade é observada no curto prazo. Mas para o *drift*, olham em um horizonte de tempo mais longo e estimam uma distribuição de estado estacionário para a volatilidade: o *drift* só causa algum efeito em horizontes mais longos. A equação estocástica diferencial do modelo pode ser usada de diversas maneiras, sendo uma delas em um modelo de dois fatores para a precificação de opções, o qual será aplicado aqui neste trabalho.

Outra alternativa ao modelo de Black e Scholes (1973) é o modelo de *jump-diffusion*, que permite grandes variações no preço do ativo em intervalos de tempo curtos. Em um processo puro de *jump*, cada preço é quase igual ao preço anterior, mas ocasionalmente existe uma probabilidade pequena, mas não zero, de que o preço será significativamente diferente ao anterior.

Muitos trabalhos disponíveis neste campo modelam o salto como uma ocorrência aleatória. Podemos citar o artigo de Merton (1976) que estende o modelo de Black e Scholes (1973) com um processo de Poisson para capturar as variações de preço anormais, onde a distribuição assumida para o tamanho dos saltos é gaussiana. Kou (2002) estende o modelo de Merton adotando uma distribuição exponencial dupla para

os saltos. Em ambos os modelos uma distribuição para a frequência dos saltos é assumida, ou seja, o exato momento da ocorrência dos saltos não é conhecido.

Cont et al (2005) consideram o problema de hedge para um derivativo em um mercado onde os preços dos ativos têm saltos, fazendo a negociação do ativo base e de opções. Uma expressão geral para a estratégia de hedge que minimiza a variância do erro de hedge é proposta. A fórmula é então aplicada para calcular o *hedge ratio* de opções europeias em vários modelos com saltos, levando para expressões que são facilmente calculadas.

Já Tankov e Voltchkova (2009) mostram que os modelos de *jump-diffusion* são ferramentas essenciais e fáceis de aplicar para a precificação e gestão de risco de opções, já que produzem uma descrição adequada do movimento dos preços dos ativos-base e dos riscos do mercado. Introduzem vários modelos de saltos e discutem métodos de transformada de Fourier para a precificação de opções europeias e equações integro-diferenciais para opções com barreira e americanas. Discutem também quais os métodos existentes para calibragem e *hedging*.

Alguns artigos modelam os saltos para eventos conhecidos, principalmente para o mercado de ações. Abraham e Taylor (1997) discutem as diferenças entre eventos programados e não programados e o seu impacto nos preços. Propõem um modelo de *jump-diffusion* com um termo adicional para o evento programado para levar em conta ambos os tipos de eventos. Concluem que esse modelo de eventos se mostra útil principalmente no caso de opções com vencimento curto e fora do dinheiro.

O efeito de saltos na presença de eventos também foi estudado por Dubinsky e Johannes (2006), onde desenvolvem dois modelos para modelar o comportamento dos preços de ações em períodos de divulgação de resultados, um com volatilidade difusiva constante e outro com volatilidade estocástica, ambos com saltos determinísticos.

A importância de se incorporar dentro de um modelo de precificação de opções ambos os componentes da volatilidade estocástica e de *jump-diffusion* é demonstrada pelos resultados empíricos obtidos por Sepp (2003). Ele aplica a transformada de Fourier

para precificar opções usando diversos modelos. Os modelos considerados são: *jump-diffusion*, difusão com volatilidade estocástica, *jump-diffusion* com volatilidade estocástica, *jump-diffusion* com volatilidade estocástica e intensidade do *jump*. Os resultados obtidos utilizando opções da DAX mostram que para se conseguir um bom ajuste para o mercado de opções básicas (*vanilla*), tanto a volatilidade estocástica quanto os saltos devem ser considerados.

A primeira abordagem para se desenvolver um método para precificar opções americanas sob processos de volatilidade estocástica com saltos foi feita por Bates (1996). Utilizando dados do mercado de opções de câmbio do marco alemão, o modelo é calibrado e sua consistência testada com dados do mercado futuro e das volatilidades implícitas das opções. Uma das deficiências do modelo é a instabilidade dos parâmetros, principalmente quanto à estrutura a termo das volatilidades. O modelo pode explicar o excesso de assimetria para o curto prazo, e os saltos tiram alguma pressão da volatilidade da volatilidade e da reversão à média.

Hilliard e Reis (1999) usam dados dos mercados futuro e de opções de soja para testar opções fora da amostra e fazer uma comparação entre o modelo de difusão de Black (1976) e o modelo de volatilidade estocástica com *jump-diffusion* de Bates (1996). O resultado mostra que o modelo de Bates (1996) tem um desempenho consideravelmente melhor do que o de Black (1976). O modelo de Bates (1996) pode explicar o viés que ocorre ao se precificar as opções de soja usando o modelo de Black (1976). Ambos os parâmetros de tamanho e frequência do salto são consistentemente positivos: a distribuição dos preços é mais positivamente assimétrica e leptocúrtica do que uma normal, o que pode explicar a sobrevalorização das *puts* fora do dinheiro e a subvalorização das *calls* fora do dinheiro.

Ignorar a estrutura a termo da volatilidade e os efeitos dos saltos podem levar a erros graves na precificação de opções, conforme demonstram Koekebakker e Lien (2004). Os autores desenvolvem um modelo para precificação de opções incorporando aspectos da dinâmica do mercado futuro de commodities. Estendem o modelo de Bates (1996) incluindo efeitos sazonais e de diferentes vencimentos na especificação

da volatilidade, calibrando o modelo com dados de 11 anos de opções de trigo usando mínimos quadrados não-lineares.

Longstaff e Schwartz (2001) apresentam um método de simulação de Monte Carlo para precificar opções americanas sob o argumento de que técnicas de diferenças finitas ou binomiais tornam-se impraticáveis para modelos de múltiplos fatores, como os de volatilidade estocástica e *jump-diffusion*. Esse método, também conhecido como LSM (*least squares* Monte Carlo, ou Monte Carlo por mínimos quadrados), combina a simulação das trajetórias do ativo, desde o início até seu vencimento, com o valor presente dos fluxos de caixa de cada trajetória, comparando-se o benefício de se exercer ou não a opção em determinado instante.

Buscando explorar os impactos decorrentes das divulgações dos relatórios do USDA, esta dissertação alia ambos os conceitos de volatilidade estocástica e de *jump-diffusion* para precificar opções de milho e de soja nos mercados brasileiro e norte-americano. Dado que a divulgação do relatório é um evento conhecido, são incorporados saltos determinísticos ao modelo de volatilidade estocástica de Oztukel e Wilmott (1998). Como as opções negociadas no mercado são americanas, o método utilizado nesta dissertação é o de Longstaff e Schwartz (2001).

3. Conceitos Teóricos

Antes de discorrer sobre o modelo proposto nesta dissertação, é interessante expor alguns conceitos teóricos utilizados. Este capítulo discute a análise empírica da volatilidade e a incorporação de saltos determinísticos, já que ambos servirão de parâmetros para o modelo em si. Discute também o método de Monte Carlo por mínimos quadrados que servirá para a precificação das opções americanas de commodities agrícolas.

3.1. Saltos

A derivação de Black e Scholes (1973) supõe que um dado ativo de preço S , em t , segue um processo estocástico do tipo:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_1 \quad (1)$$

onde μ é o *drift* instantâneo (determinístico) dos retornos dos preços do ativo, σ a volatilidade do ativo e dW_1 um processo de Wiener.

Em processos desse tipo, onde a trajetória do ativo é contínua como em um modelo de difusão, o preço se comporta como um Movimento Browniano e a probabilidade de que esse preço se mova por grandes quantidades em um período curto de tempo é pequena. Entretanto, observa-se frequentemente no mercado que a trajetória dos preços é descontínua, devido à presença de saltos nos preços.

Alguns modelos foram desenvolvidos para tratar esse aspecto e são conhecidos como modelos de *jump-diffusion*, sendo o modelo de Merton (1976) o mais conhecido. É uma extensão ao Movimento Browniano do modelo de Black e Scholes (parte da difusão), adicionando a parte do salto que é dirigida por um processo de Poisson com frequência especificada por uma intensidade λ .

Como os relatórios do USDA são divulgados em datas conhecidas, precisamos modelar a dinâmica do preço do ativo com a ocorrência de eventos em períodos determinísticos, portanto o modelo de Merton (1976) não nos serviria dado que a frequência dos saltos nesse modelo é aleatória.

Sejam $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ as datas conhecidas de divulgação dos relatórios do USDA. Introduzindo a dinâmica de um salto determinístico ao movimento browniano descrito na equação (1), temos:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_1 + I\{t = s_j\}U_j \quad (2)$$

sendo $I\{t = s_j\}$ uma função indicadora igual a 1 se t coincidir com a data do evento s_j , e igual a 0 caso contrário, onde $j = 1, 2, \dots, n$.

A magnitude do salto observado na data s_j é dada por U_j . Assumimos que a distribuição das magnitudes U_j será estimada a partir de dados históricos de saltos observados em datas prévias, onde μ_j é a média desta distribuição e σ_j o desvio-padrão da distribuição³.

A fim de se facilitar o somatório dos retornos ao longo do tempo, o processo é descrito em função do logaritmo do preço do ativo. Conforme demonstrado em Linnell (2012) e no Anexo I, temos:

$$d(\log S) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_1 + \sum_{j=0}^N Y_j \quad (3)$$

com Y_j sendo obtido a partir da relação $U_j = \exp\{Y_j\} - 1$ e N a quantidade de vezes em que os saltos ocorrem, ou para a aplicação deste trabalho, quantos relatórios serão divulgados até o vencimento do derivativo.

³ No capítulo 4 e no Anexo II mostramos que a distribuição que melhor se adequa aos dados históricos dos saltos observados é a distribuição Normal.

3.2. Volatilidade Estocástica

Conforme observa-se no mercado, a volatilidade não se comporta como a assumida no modelo de Black e Scholes (1973): ela não é constante ao longo do prazo do derivativo e nem mesmo diretamente observável. O modelo não consegue explicar algumas características do mercado como diferentes volatilidades implícitas para diferentes vencimentos e diferentes preços de exercício. Assumir que a volatilidade segue um processo estocástico ao invés de modelá-la como uma constante torna a precificação do derivativo mais precisa.

Um modelo de volatilidade estocástica requer então que, além da suposição utilizada para o preço do ativo, assumamos que a dinâmica da volatilidade satisfaça:

$$d\sigma = \alpha(S, \sigma, t) dt + \beta(S, \sigma, t) dW_2 \quad (4)$$

A escolha das funções $\alpha(S, \sigma, t)$ e $\beta(S, \sigma, t)$ é fundamental para a evolução da volatilidade, e assim para a precificação de derivativos. Uma das maneiras mais comuns de se fazer isso é escolher α e β de tal forma que o modelo precifique corretamente opções negociadas no mercado. Esse método geralmente funciona para modelos que são tratáveis e apresentam soluções fechadas para opções básicas (as do tipo *vanilla*).

O termo dW_2 representa um outro processo de Wiener e tem correlação ρ com dW_1 , o termo de aleatoriedade do preço do ativo.

O modelo introduzido por Heston (1993) talvez seja o modelo de volatilidade estocástica mais popular. Apresenta a seguinte equação diferencial estocástica (EDE) para a variância V :

$$dV = \theta(\omega - V) dt + \xi \sqrt{V} dW_2 \quad (5)$$

sendo θ a velocidade com que a variância reverte à sua média de longo prazo ω , e ξ a volatilidade da volatilidade. A aleatoriedade do processo da variância é correlacionada com a aleatoriedade do processo do preço por ρ .

Bastando a calibragem dos parâmetros do modelo com as opções negociadas no mercado, este modelo se torna popular pois apresenta soluções fechadas para a precificação de opções europeias. No entanto, como esta dissertação trata de opções de commodities agrícolas do tipo americana, devemos proceder com outro modelo, conforme detalhado a seguir.

3.3. Análise empírica da volatilidade

O modelo de volatilidade estocástica empírica apresentado em Oztukel e Wilmott (1998) ajusta as funções do *drift* e da variância para dados históricos. A volatilidade é modelada isoladamente, assumindo que ela não depende do nível do preço do ativo e do tempo. O processo estocástico da volatilidade é dado por:

$$d\sigma = \alpha(\sigma)dt + \beta(\sigma) dW_2 \quad (6)$$

onde o *drift* $\alpha(\sigma)$ e a volatilidade $\beta(\sigma)$ são ambas funções da volatilidade σ . O processo é similar ao apresentado na equação (4) mas a principal suposição aqui é que os termos são independentes do preço do ativo e do tempo. A vantagem disso é a de tornar o modelo muito mais simples, e também de reduzir o escopo contra possíveis erros de modelagem.

Para se estimar a volatilidade da volatilidade, assume-se que a função de volatilidade $\beta(\sigma)$ é da forma:

$$\beta(\sigma) = \phi \sigma^\gamma \quad (7)$$

onde ϕ e γ são constantes a serem determinadas. A suposição para que essa função tenha essa forma simplificada serve para reduzir o problema para que se tenha que encontrar apenas dois parâmetros.

Das equações (6) e (7) tem-se que o quadrado da variação diária da volatilidade é dado por:

$$(d\sigma)^2 = \phi^2 \sigma^{2\gamma} dt \nu^2 \quad (8)$$

onde ν é uma variável aleatória Normal padronizada.

Da série histórica da volatilidade pode-se facilmente calcular a série de $d\sigma$, e então a série de $(d\sigma)^2$. Usando a esperança, o logaritmo natural de (8) ficaria:

$$\ln(E[(d\sigma)^2]) = a + b \ln(\sigma) \quad (9)$$

onde $a = \ln(\phi^2 dt)$ e $b = 2\gamma$. Então se a forma assumida em (7) for verdadeira, podemos esperar que um gráfico de $\ln(E[(d\sigma)^2])$ contra $\ln(\sigma)$ resulte em uma linha reta com inclinação igual a b e intercepto com o eixo das ordenadas igual a a .

Para se ajustar a reta aos dados, separa-se σ em vários blocos e calcula-se a média de $(d\sigma)^2$ para cada σ em seu respectivo bloco. Isso nos dá uma estimativa da dependência de $E[(d\sigma)^2]$ em σ . O ajuste da reta é feito por uma regressão de mínimos quadrados.

Portanto, temos um modelo onde a volatilidade da volatilidade é consistente com os dados empíricos. Substituindo-se a equação (7) em (6) temos:

$$d\sigma = \alpha(\sigma)dt + \phi \sigma^\gamma dW_2 \quad (10)$$

Falta ainda encontrar o *drift* da volatilidade $\alpha(\sigma)$. Para isso determina-se a função densidade de probabilidade do estado estacionário de σ e a partir dela deduz-se a função *drift*. A equação que governa a função densidade de probabilidade de σ é a equação de Fokker-Planck (ou equação a termo de Kolmogorov):

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} (\beta(\sigma)^2 P) - \frac{\partial}{\partial \sigma} (\alpha(\sigma) P) \quad (11)$$

onde $P(\sigma, t)$ é a função densidade de probabilidade de σ e aqui as variáveis σ e t denotam as variáveis a termo. Supondo que a distribuição do estado estacionário de σ , P_∞ , de alguma forma é conhecida, deve então satisfazer:

$$\frac{d}{d\sigma} (\alpha(\sigma)P_\infty) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\sigma^2} (\beta(\sigma)^2 P_\infty) \quad (12)$$

o que é simplesmente uma versão de estado estacionário da equação de Fokker-Planck. Integrando essa equação temos:

$$\alpha(\sigma) = \frac{1}{2P_\infty} \frac{d}{d\sigma} (\beta(\sigma)^2 P_\infty) + \frac{c}{P_\infty} \quad (13)$$

A constante da integração é zero, o que pode ser observado examinando-se o comportamento de α para valores grandes e pequenos de σ .

Para acharmos o termo do *drift* basta agora que tenhamos P_∞ . Assumindo que todos os parâmetros são independentes do tempo, podemos determinar então a função densidade de probabilidade do estado estacionário usando a propriedade ergódica de uma trajetória aleatória. Isso significa que a distribuição da volatilidade obtida a partir de uma única e longa trajetória será a mesma obtida a partir do último dado de várias trajetórias separadas.

Encontra-se P_∞ plotando a frequência da distribuição de σ pelos blocos de σ , ou seja, quantas observações pertencem a cada bloco. Assumindo que P_∞ tem uma distribuição lognormal:

$$P_\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}g\sigma} e^{-\left(\frac{1}{2g^2}\right)\left(\log\left(\frac{\sigma}{\sigma_b}\right)\right)^2} \quad (14)$$

onde $\log(\sigma_b)$ representa a média da distribuição de $\log(\sigma)$ e g descreve a dispersão da distribuição em torno da média. Obtemos então o *drift* da volatilidade:

$$\alpha(\sigma) = \phi^2 \sigma^{2\gamma-1} \left(\gamma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2g^2} \log\left(\frac{\sigma}{\sigma_b}\right) \right) \quad (15)$$

Das equações (10) e (15) temos a equação final do modelo:

$$d\sigma = \phi^2 \sigma^{2\gamma-1} \left(\gamma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2g^2} \log\left(\frac{\sigma}{\sigma_b}\right) \right) dt + \phi \sigma^\gamma dW_2 \quad (16)$$

que pode ser utilizada em um modelo de dois fatores (preço do ativo e volatilidade) para a precificação de opções. O único problema é que estimamos a partir dos dados o

drift real e não o *drift* livre de risco, mas, conforme aponta Wilmott (2006), a questão se isso é realmente necessário é discutível.

3.4. Modelo proposto

Combinando as duas dinâmicas, a do preço com saltos determinísticos dada por (2), e a da volatilidade estocástica dada por (16), temos o modelo de dois fatores que foi utilizado nesta dissertação para a precificação das opções:

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + \sigma S dW_1 + I\{t = s_j\}U_j \\ d\sigma &= \phi^2 \sigma^{2\gamma-1} \left(\gamma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2g^2} \log\left(\frac{\sigma}{\sigma_b}\right) \right) dt + \phi \sigma^\gamma dW_2 \\ \langle dW_1 dW_2 \rangle &= \rho \end{aligned}$$

ou seja, os incrementos aleatórios dW_1 e dW_2 apresentam correlação ρ . A estimação desse parâmetro será discutida no próximo capítulo. Como mencionado no item 3.1, o processo de evolução do preço do ativo é, na prática, descrito em função do seu logaritmo (vide equação (3)).

O método para se precificar opções americanas utilizando esse modelo é explicado a seguir.

3.5. Simulação de Monte Carlo para opções americanas

Como o intuito desta dissertação é utilizar o modelo proposto para precificar opções americanas de commodities agrícolas, devemos trabalhar com um método que comporte tanto as simulações estocásticas dos fatores quanto a possibilidade do exercício antecipado da opção.

O método proposto por Longstaff e Schwartz (2001) combina a simulação das trajetórias do preço do ativo, desde a data inicial até o vencimento, com o valor

presente dos fluxos de caixa ao longo das trajetórias, utilizando uma simples regressão dos preços para avaliar a cada passo o benefício de se exercer a opção naquele momento.

No que segue, implementamos um exemplo numérico para explicar o método em questão.

Considere uma *put* americana com preço de exercício $K = 100$, cujo ativo-base tem volatilidade $\sigma = 20\%$ e preço inicial $S_0 = 100$. A taxa livre de risco é $r = 5\%$.

O primeiro passo do método consiste em simular N realizações para a trajetória do ativo-base desde o início até o vencimento, utilizando passos com tamanho δt . A Figura 1 mostra um exemplo de dez simulações para o preço teórico de uma commodity com três passos desde o início até o vencimento:

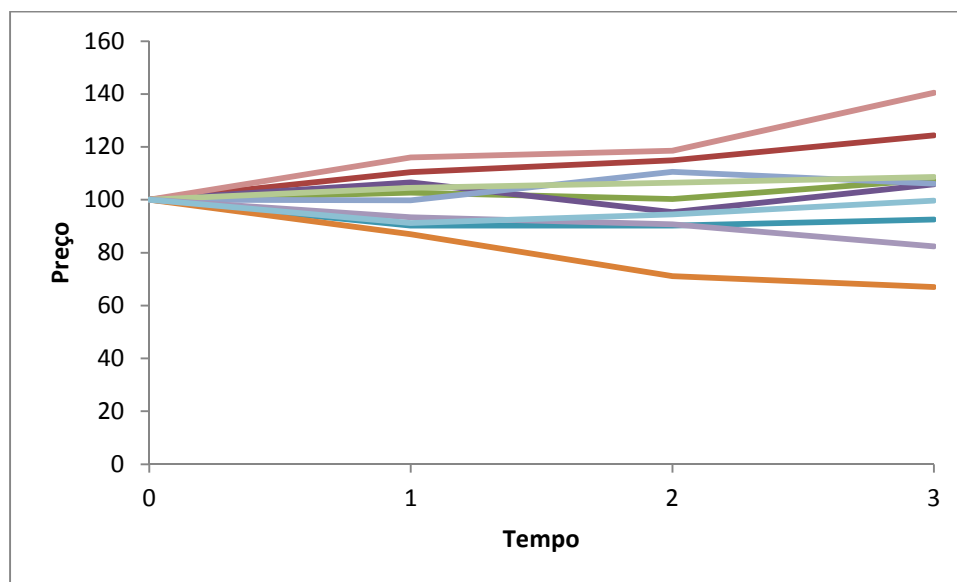


Figura 1 – Exemplo de dez trajetórias para o preço de um ativo teórico

Os preços em cada um dos três passos, ou estados do tempo, para as dez diferentes simulações são mostrados na Tabela 1. Por exemplo, o preço simulado do ativo na trajetória de número 4, durante o estado de tempo 1, é igual a 90,28:

Tempo\Sim	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
1	110,47	102,65	106,62	90,28	87,02	99,74	116,06	104,54	93,43	91,25
2	114,91	100,31	95,34	90,18	71,05	110,62	118,56	106,47	90,66	94,47
3	124,37	107,61	105,88	92,47	67,03	106,11	140,52	108,67	82,35	99,71

Tabela 1 - Preço do ativo em cada passo para as dez diferentes simulações

A seguir calcula-se o *payoff* no vencimento para cada uma das trajetórias. No caso da *put* temos que o *payoff* é dado por $\max\{K - S, 0\}$, conforme demonstrado na Tabela 2:

Simulação	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Payoff	-	-	-	7,53	32,97	-	-	-	17,65	0,29

Tabela 2 - Valor do payoff no vencimento

Neste caso temos quatro trajetórias que fazem com que a opção termine dentro do dinheiro. Para calcular o preço de uma opção europeia bastaria trazer a valor presente a média de todos os dez *payoffs*.

O cálculo acima demonstra o exercício da opção apenas para o vencimento, mas essa opção poderia ter sido exercida anteriormente, já que estamos falando de uma opção americana. Retrocedemos então para o estado do tempo 2 e avaliamos novamente o benefício do exercício, apenas para as opções que estejam dentro do dinheiro no estado atual: no estado 2, as trajetórias de número 3, 4, 5, 9 e 10 apresentam valores do ativo-base que fazem com que a opção esteja dentro do dinheiro. Essa técnica aumenta consideravelmente a eficiência do algoritmo e reduz o tempo computacional gasto.

Usando a notação de Longstaff e Schwartz, X é o preço do ativo no estado 2 e Y o valor presente no estado 2 do fluxo de caixa a receber no vencimento se a opção não for exercida no estado atual. Como indicado na Tabela 3, $Y = 7,16$ para a trajetória 4 significa o fluxo de caixa a receber no vencimento (igual a 7,53) descontado a valor presente pela taxa livre de risco para o período 2.

t = 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y			-	7,16	31,37				16,79	0,28
X			95,34	90,18	71,05				90,66	94,47

Tabela 3 - Preço do ativo (X) e valor presente do fluxo de caixa (Y) no estado 2

Os autores propõem uma regressão de Y em uma constante, X e X^2 , a fim de se estimar o fluxo de caixa esperado do não exercício da opção, condicional ao preço do ativo no estado 2. Temos para o exemplo:

$$E[Y | X] = -0,0613X^2 + 8,8744X - 289,9$$

Utilizando essa função condicional, obtemos o fluxo de caixa esperado se a opção não for exercida no estado atual. No caso da trajetória 4, se a opção não fosse exercida no estado de tempo 2, o fluxo de caixa esperado para o vencimento seria de 11,88 (que é o resultado da expressão acima para $X = 90,18$).

Podemos então comparar o valor de se exercer a opção imediatamente ou mantê-la até o próximo estado de tempo. Conforme demonstrado na Tabela 4, nas trajetórias de número três e dez, o melhor seria exercê-las agora (estado do tempo 2):

t = 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
exercício			4,66	9,82	28,95				9,34	5,53
não exerc.			-	11,88	31,18				10,81	1,40

Tabela 4 - Comparação do exercício ou não exercício da opção em determinado estado de tempo

O próximo passo consiste em construir uma matriz de fluxos de caixa, que representa a situação ótima de exercício (assumindo que não exercemos em nenhum momento antes do estado atual). A Tabela 5 abaixo nos mostra que, no caso das trajetórias três e dez, como a opção teria sido exercida no estado 2, o seu fluxo de caixa no vencimento é zero.

Tempo\Sim	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	-	-	4,66	-	-	-	-	-	-	5,53
3	-	-	-	7,53	32,97	-	-	-	17,65	-

Tabela 5 - Matriz de fluxos de caixa considerando exercício antecipado no estado 2

Esse processo é repetido até o primeiro estado de tempo até completar a matriz de fluxos de caixa. A matriz completa é mostrada na Tabela 6 abaixo:

Tempo\Sim	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	-	-	9,72	12,98	0,26	-	-	6,57	8,75
2	-	-	4,66	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabela 6 - Matriz de fluxos de caixa completa

O preço da opção americana será então a média de todos os fluxos de caixa descontados à valor presente, sendo o do exemplo igual a 3,83.

A partir desse método, podemos então precificar opções americanas em um modelo de dois fatores conforme o proposto no item 3.4: um modelo que efetua a simulação da trajetória do preço do ativo incluindo saltos determinísticos bem como a simulação da trajetória da volatilidade do ativo.

Para cada uma das commodities estudadas, milho e soja, trabalhamos com a dinâmica exposta acima, cujos parâmetros foram estimados conforme explicado no próximo capítulo.

4. Aplicação

Neste capítulo discutimos o funcionamento dos mercados físicos de milho e de soja e como as séries históricas de preços foram construídas para utilização nas simulações. A partir do entendimento dos períodos de safra das commodities, definimos como são divididos os ciclos que foram simulados. Esses ciclos são divididos em períodos de estimação e períodos de simulação, ambos também tratados neste capítulo.

A partir dos parâmetros estimados, precificamos as opções americanas de commodities usando o modelo proposto nesta dissertação. Prosseguimos então com a simulação de uma estratégia de hedge com opções (futuro sintético) precificadas pelo modelo e comparamos sua eficiência com estratégias de mercado.

4.1. Características dos mercados de milho e soja

A Tabela 7 mostra o percentual dos cinco maiores produtores e exportadores globais para os mercados de milho e de soja. Ambos os mercados apresentam um calendário de safra anual, também mostrado na tabela.

MILHO	Produção	Exportação	Calendário
EUA	33%	33%	Set-Ago
China	24%	0%	Out-Set
Brasil	8%	18%	Mar-Fev
Argentina	3%	20%	Mar-Fev
Ucrânia	3%	14%	Out-Set

SOJA	Produção	Exportação	Calendário
Brasil	31%	39%	Out-Set
EUA	29%	36%	Set-Ago
Argentina	21%	12%	Out-Set
China	5%	0%	Out-Set
India	4%	0%	Out-Set

Tabela 7 - Produção e exportação globais estimadas para a safra 2012-2013 (Fonte: Bloomberg)

Dessa forma, os futuros na bolsa de Chicago (CME) são negociados com os seguintes vencimentos: Milho (Dezembro - Março - Maio - Julho - Setembro) e Soja (Novembro - Janeiro - Março - Maio - Julho - Agosto - Setembro). Dentre esses contratos negociados no mercado, os que têm maior liquidez são geralmente os que têm o

vencimento mais próximo, os contratos chamados de *nearby*. Isso até a data do *first notice* (aproximadamente 15 dias antes do vencimento) quando os participantes do mercado começam a rolar a posição para o vencimento seguinte.

Para a construção da série histórica de preços dos contratos futuros, adotou-se a regra de rolagem do contrato *nearby* relativo à data do *first notice*, ou seja, o preço refere-se ao contrato futuro com o vencimento mais próximo e a partir da data do *first notice* desse contrato, passa a valer o preço do contrato com o próximo vencimento.

De forma similar, para a negociação de opções, a maior liquidez geralmente se dá nos contratos onde o ativo-base é o contrato futuro *nearby*, com a diferença que o vencimento das séries de opções ocorre na última sexta-feira antes da data do *first notice* do contrato futuro (geralmente entre os dias 20 e 25 do mês anterior ao vencimento). As opções podem ser exercidas a qualquer momento antes de seu vencimento, ou seja, são americanas.

Como referência para o preço *spot* do milho (commodity física) no mercado brasileiro, podemos utilizar o indicador do CEPEA (Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada da ESALQ/USP) região Campinas, cotado em R\$/60kg (ticker Bloomberg: BAINCORN Index). Para o mercado norte-americano temos como referência o indicador do USDA para a região de Louisiana, cotado em US\$/bushel (ticker Bloomberg: CORNLA2Y Index).

Já para o preço *spot* da soja no mercado brasileiro, usamos o indicador do CEPEA região Paranaguá, cotado em R\$/60kg (ticker Bloomberg: BASMSBPA Index). No mercado norte-americano temos o indicador do USDA região Louisiana, cotado em US\$/bushel (ticker Bloomberg: SOYBLA1Y Index).

As Figuras 2 e 3 abaixo mostram as séries históricas de preço dos contratos futuros e do mercado *spot* (tanto Brasil quanto EUA) para ambas as commodities.

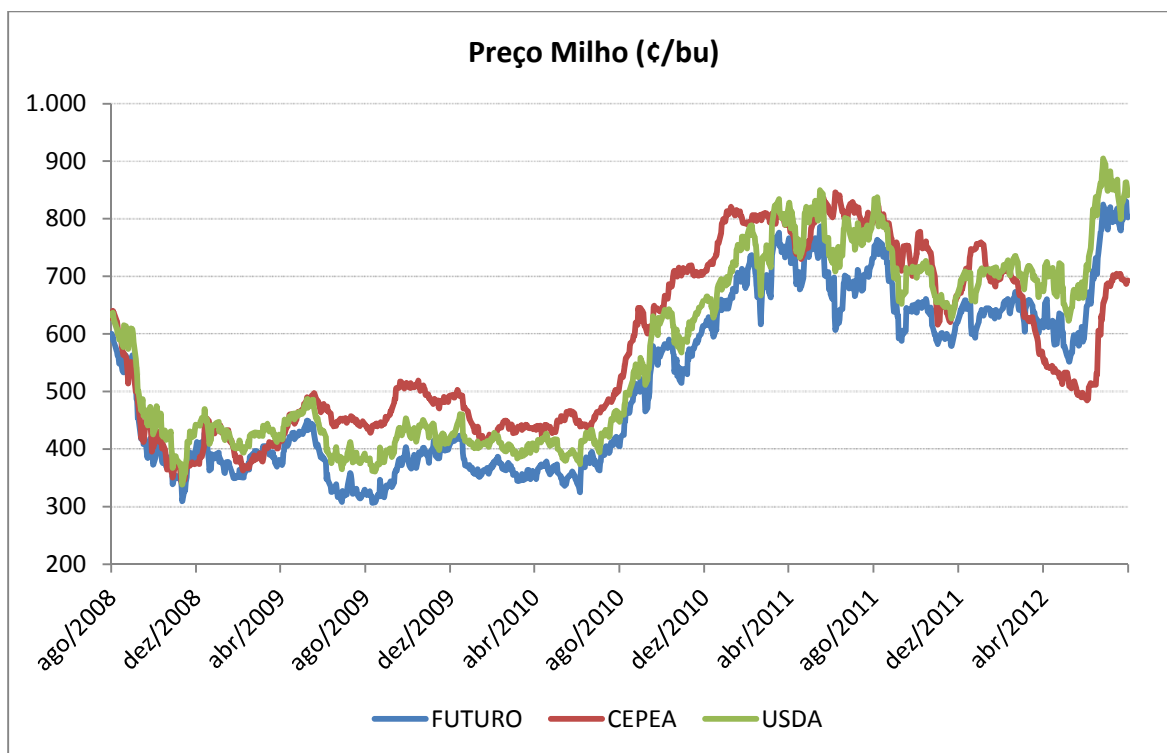


Figura 2 – Preço do milho em centavos de dólar por bushel (Fonte: Bloomberg, CEPEA)

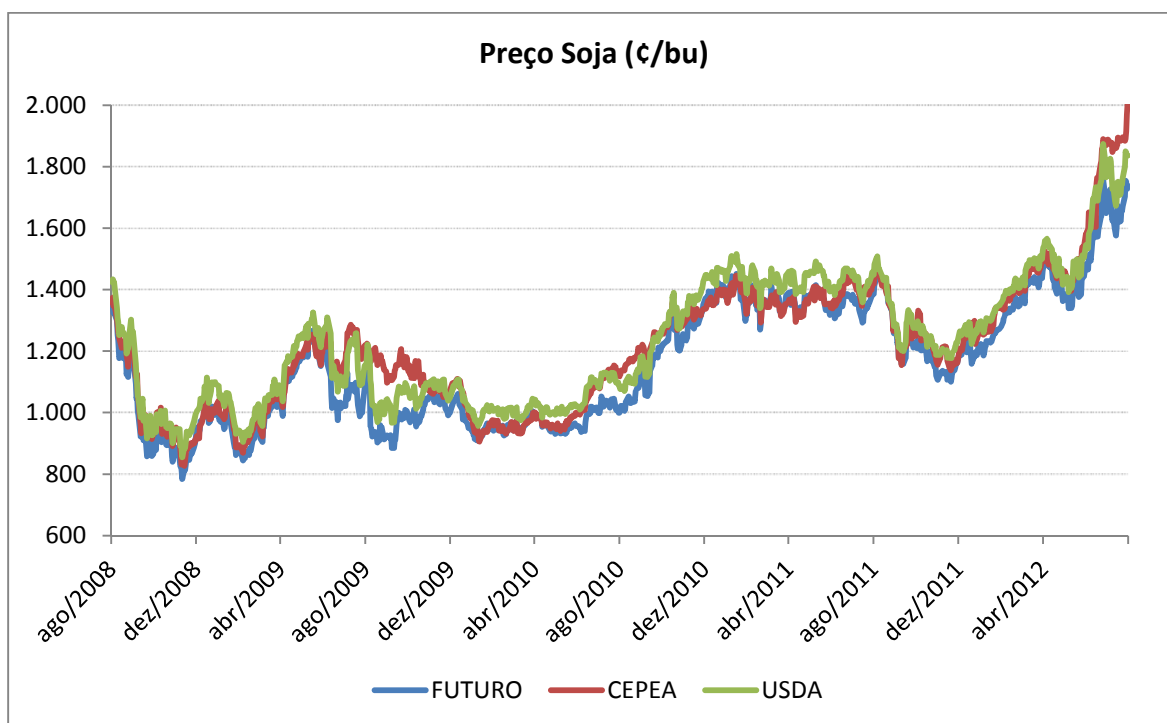


Figura 3 – Preço da soja em centavos de dólar por bushel (Fonte: Bloomberg, CEPEA)

4.2. Ciclos: estimação e simulação

Dados os calendários anuais de safra e os vencimentos negociados na bolsa, os períodos estudados foram determinados como indo de Setembro a Agosto. Um total de quatro períodos foi simulado para o modelo: Setembro 2008 a Agosto 2009, Setembro 2009 a Agosto 2010, Setembro 2010 a Agosto 2011 e Setembro 2011 a Agosto 2012.

Para a realização das simulações é necessário a estimação dos parâmetros do modelo, mais especificamente os parâmetros do salto e da volatilidade estocástica. Definiu-se como período de estimação dos parâmetros um intervalo de cinco anos anteriores ao início do período de cada simulação. Dessa forma criamos um ciclo que compreende um período de cinco anos para estimação dos parâmetros seguido por um período de um ano para simulação do modelo. O esquema dos ciclos é demonstrado na Figura 4 abaixo:

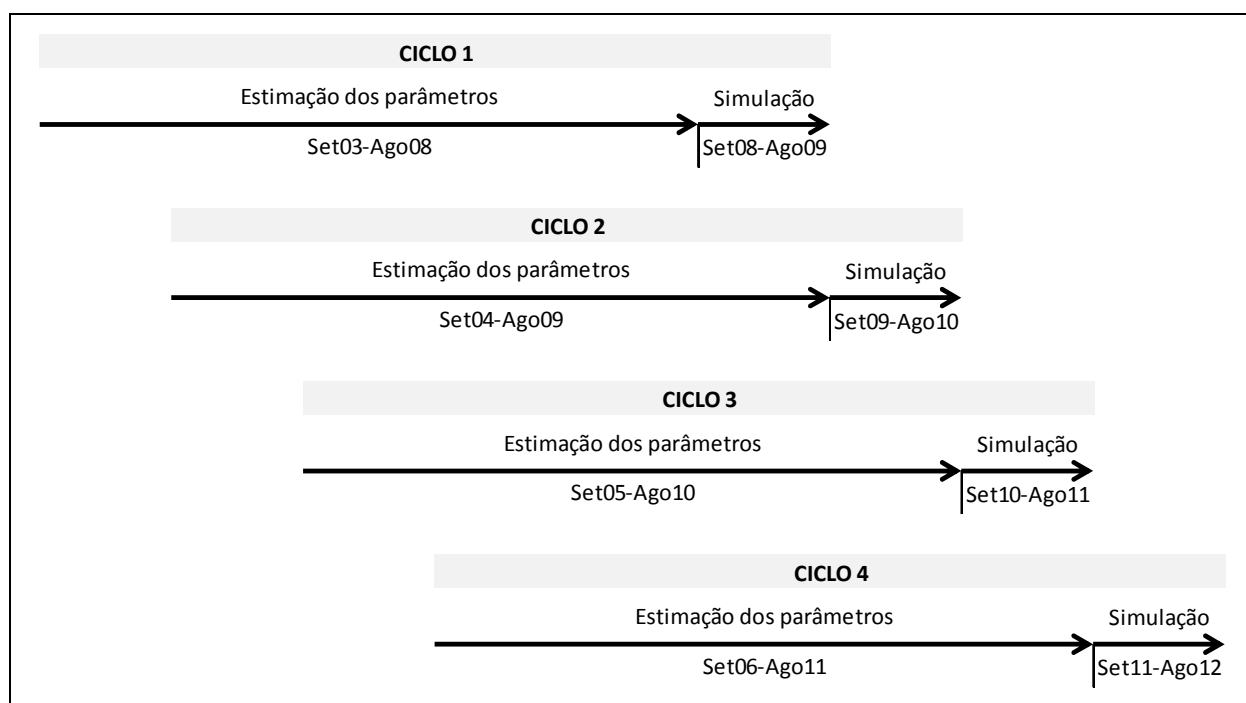


Figura 4 – Ciclos: Estimação dos Parâmetros e Simulação

4.3. Estimação dos parâmetros

Iniciamos a estimação com a parte dos saltos. Os parâmetros necessários são a média μ_j e o desvio-padrão σ_j dos saltos conforme a dinâmica da equação (2).

Inicialmente criamos uma série apenas com os retornos dos preços relativos às datas de divulgação dos relatórios:

$$ret_j = \ln\left(\frac{P_{Rj}}{P_{Rj-1}}\right) \quad (17)$$

onde P_{Rj} é o preço de fechamento do ativo na data de divulgação j do relatório e P_{Rj-1} o preço de fechamento na data anterior, $j-1$ (data de não divulgação).

Ajustamos a curva de distribuição para cada período analisado⁴, onde cada período compreende cinco anos de dados (conforme explicado na seção anterior). Para cada período individual, como também para o conjunto inteiro dos quatro períodos, o melhor ajuste disponível foi o de uma curva Normal⁵. As figuras apresentadas no Anexo II mostram os resultados da ferramenta para cada período: a função densidade de probabilidade (PDF na sigla em inglês) e a função de distribuição cumulativa (CDF na sigla em inglês).

Ainda com o auxílio do MATLAB extraímos a média e o desvio-padrão para cada período e com isso temos os parâmetros do salto necessários para se rodar o modelo. Os parâmetros extraídos são apresentados na Tabela 8:

MILHO	μ_j	σ_j
PERÍODO 1	0,0032	2,75%
PERÍODO 2	0,0021	3,14%
PERÍODO 3	0,0054	3,43%
PERÍODO 4	0,0055	3,44%

SOJA	μ_j	σ_j
PERÍODO 1	0,0014	2,47%
PERÍODO 2	0,0016	2,58%
PERÍODO 3	0,0029	2,52%
PERÍODO 4	0,0054	2,63%

Tabela 8 - Parâmetros estimados dos saltos

⁴ Com o auxílio de ferramenta estatística disponível no software MATLAB (dfttool).

⁵ Foram testadas as distribuições Exponencial, Logística, Log-Normal, Normal e Univariada com Escala t.

Já os parâmetros da dinâmica da volatilidade estocástica, $\phi, \gamma, \sigma_b, g$, são obtidos pelo modelo de Oztuk e Wilmott conforme detalhado no capítulo anterior. Usando ainda o mesmo intervalo de cinco anos para cada período, os parâmetros foram estimados e os resultados são mostrados na Tabela 9 abaixo:

MILHO	ϕ	γ	σ_b	g
PERÍODO 1	0,4297	1,3181	0,0785	0,2453
PERÍODO 2	0,1956	1,0605	0,0866	0,3081
PERÍODO 3	0,2734	1,1984	0,0912	0,2797
PERÍODO 4	0,2261	1,1245	0,0984	0,2354

SOJA	ϕ	γ	σ_b	g
PERÍODO 1	0,2621	1,1680	0,0753	0,3297
PERÍODO 2	0,6872	1,4875	0,0776	0,3290
PERÍODO 3	0,6092	1,4390	0,0742	0,3382
PERÍODO 4	0,5672	1,3948	0,0753	0,3428

Tabela 9 - Parâmetros estimados da volatilidade estocástica

O último parâmetro necessário para se rodar o modelo é a correlação ρ entre os incrementos aleatórios das equações estocásticas do preço e da volatilidade. Essa correlação foi estimada como a correlação linear entre o log-retorno dos preços do ativo e a volatilidade do ativo, sendo esta última calculada pelo método de médias móveis exponencialmente ponderadas, ou EWMA, com grau de decaimento exponencial de 0,94. A tabela 10 mostra os valores obtidos:

MILHO	ρ
PERÍODO 1	0,0186
PERÍODO 2	-0,0348
PERÍODO 3	-0,0272
PERÍODO 4	-0,0332

SOJA	ρ
PERÍODO 1	-0,1329
PERÍODO 2	-0,0939
PERÍODO 3	-0,0756
PERÍODO 4	-0,0809

Tabela 10 - Parâmetros estimados da correlação entre o preço e a volatilidade do ativo

Interessante notar a baixa correlação, próxima à zero, obtida entre os incrementos dW_1 e dW_2 para ambas as commodities e em todos os períodos estimados.

4.4. Precificação da opção

Para calcular o preço da opção usando o modelo proposto, devemos primeiro simular a volatilidade do ativo. A trajetória da volatilidade é simulada para cada dia desde o dia em que se quer precificar a opção até o seu vencimento.

Seja $dW_2 = e_2 \sqrt{dt}$. O incremento aleatório e_2 , conforme sugerido por Press et al (2007), pode ser obtido por:

$$e_2 = (\sum_{i=1}^{12} \psi_i) - 6 \quad (18)$$

onde ψ_i são variáveis aleatórias independentes, retiradas de uma distribuição uniforme de zero a um. Essa distribuição tem média zero, desvio-padrão igual a um e terceiro momento igual à zero, sendo uma boa aproximação à distribuição Normal.

Usando esse incremento aleatório na equação final do modelo de Oztuk e Wilmott, e com os parâmetros já estimados, conseguimos simular a trajetória da volatilidade ao longo do tempo. A Figura 5 mostra um exemplo de cinco simulações diferentes para o comportamento da volatilidade com $\sigma_0 = 28,5\%$, $t = 42$ dias:

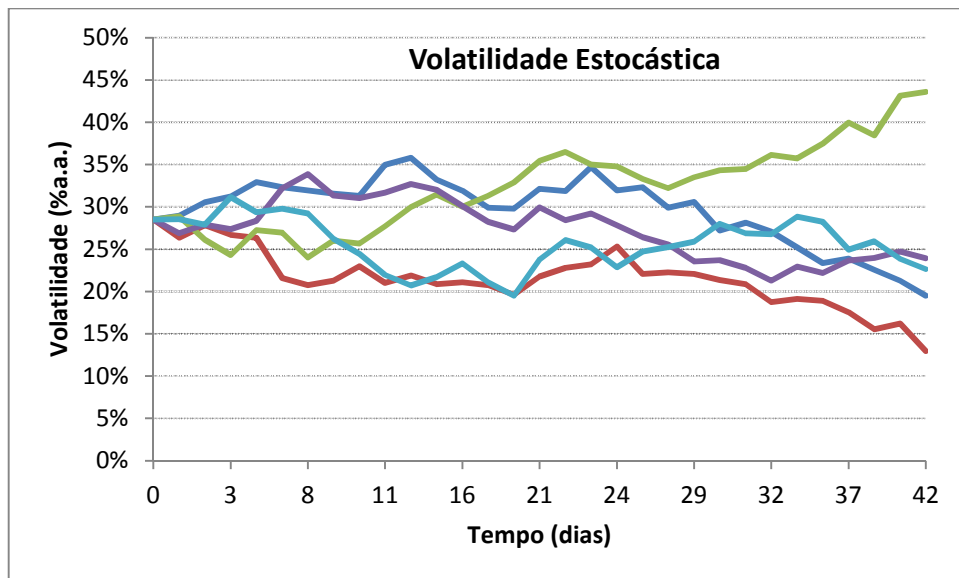


Figura 5 – Exemplo de simulação para a volatilidade ao longo do tempo

O próximo passo consiste em simular a trajetória do preço do ativo a partir da volatilidade calculada no passo anterior. Dado que temos uma correlação ρ entre o preço e a volatilidade do ativo, previamente estimada conforme explicado na seção anterior, obtemos o incremento aleatório e_1 para o preço:

$$e_1 = \rho e_2 + \sqrt{1 - \rho^2} [(\sum_{i=1}^{12} \psi_i) - 6] \quad (19)$$

onde $dW_1 = e_1 \sqrt{dt}$. A partir desse incremento aleatório e da trajetória da volatilidade, incluímos os saltos determinísticos conforme a equação (3) para obtermos a trajetória do ativo ao longo do tempo.

Para isso verificamos se cada dia da trajetória simulada coincide com alguma data de divulgação dos relatórios do USDA. Caso positivo, um salto aleatório (com distribuição com parâmetros estimados anteriormente) é considerado para a simulação do preço.

De posse da “trajetória final” do ativo, que considera tanto a volatilidade estocástica quanto os saltos determinísticos, podemos então fazer a precificação da opção americana pelo método de Longstaff-Schwartz. Utilizando o algoritmo em VBA fornecido em Wilmott (2006) conseguimos calcular os preços e os deltas das opções de compra e opções de venda para cada commodity.

4.5. Simulação

Aptos a precificar as opções utilizando o modelo proposto, podemos agora analisar algumas estratégias de hedge para verificar sua performance.

Consideremos o problema de uma empresa que precisa comprar determinado volume de uma commodity física. Contra possíveis movimentos adversos do mercado ao longo do ano-safra, o ideal é que essa empresa faça o hedge dessa posição através de instrumentos derivativos disponíveis no mercado. O objetivo das simulações será comparar a eficiência desse hedge utilizando-se diferentes estratégias.

Um total de três estratégias de hedge foram analisadas:

- a) Venda de futuro
- b) Venda de futuro sintético usando opções disponíveis no mercado
- c) Venda de futuro sintético usando opções precificadas pelo modelo

O futuro sintético consiste na venda de uma *call* e na compra de uma *put*, ambas com mesmo preço de exercício e data de vencimento, a fim de se garantir o preço *forward* do ativo-base. Os instrumentos testados foram os futuros e opções negociados na CME (Chicago Mercantile Exchange) por apresentarem excelente liquidez⁶.

As simulações foram feitas com uma quantidade teórica fixada de 400 contratos (o equivalente a aproximadamente 50.000 toneladas) para cada commodity. O hedge foi estudado tanto para o mercado físico brasileiro quanto para o mercado físico norte-americano. Todas as simulações foram feitas usando-se preços em dólar norte-americano (os preços físicos para o mercado brasileiro podem ser obtidos diretamente nesta moeda a partir do próprio site da ESALQ-CEPEA).

No caso do futuro sintético, as opções foram escolhidas de tal forma que, no início de cada período de simulação e durante cada rolagem, elas estivessem no dinheiro, ou seja, o preço de exercício delas era próximo ao preço do ativo-base. A rolagem das opções se deu nas respectivas datas de vencimento.

A frequência escolhida para rebalanceamento da estratégia foi semanal, a fim de se diminuir custos de transação para o caso prático.

4.6. Resultados

Para se constatar a eficiência das estratégias em cada período, duas medidas diferentes foram adotadas. A primeira é o desvio-padrão (DP) da exposição financeira diária. A exposição financeira compreende a exposição decorrente da posição física

⁶ De acordo com documento divulgado pela própria bolsa, o volume médio diário negociado no ano de 2011 foi de 313.511 contratos futuros de milho, 179.142 contratos futuros de soja, 112.591 contratos de opções de milho e 52.389 contratos de opções de soja.

mais a exposição decorrente da posição de hedge. O ideal é que essa exposição financeira seja a mínima possível, significando que a estratégia de hedge replica bem a posição física.

A segunda medida adotada é a eficiência do hedge (EH). Conforme proposto por McKenzie e Singh (2011), uma forma de se medir essa eficiência se dá através da redução percentual na variância da posição com hedge relativa à posição sem hedge:

$$EH = 1 - \frac{VAR_H}{VAR_F} \quad (20)$$

onde VAR_H é a variância da exposição financeira da posição com hedge e VAR_F a variância da exposição financeira da posição física (ou sem hedge) durante o período considerado.

A Tabela 11 a seguir mostra os resultados para o milho físico negociado no mercado brasileiro, para cada período bem como para o período total (quatro períodos em sequência):

MILHO BRASIL		Sem Hedge	Hedge com Futuros	Hedge com Opções (mercado)	Hedge com Opções (modelo)
PERÍODO 1	DP	\$1.202	\$306	\$309	\$337
	EH	-	93,5%	93,4%	92,2%
PERÍODO 2	DP	\$569	\$245	\$256	\$255
	EH	-	81,4%	79,8%	80,0%
PERÍODO 3	DP	\$1.601	\$575	\$691	\$591
	EH	-	87,1%	81,4%	86,4%
PERÍODO 4	DP	\$1.806	\$389	\$469	\$404
	EH	-	95,4%	93,2%	95,0%
TOTAL	DP	\$2.959	\$398	\$463	\$415
	EH	-	98,2%	97,5%	98,0%

Tabela 11 - Resultados da simulação para Milho Brasil (desvio-padrão em milhares de US\$)

A interpretação dos resultados acima se dá da seguinte forma: para a posição teórica de 400 contratos físicos, o desvio-padrão da exposição financeira dessa posição para o

período 1 é de US\$1.202.000, isto é, se a empresa tivesse comprado essa posição e a tivesse mantido durante o período sem fazer hedge algum, sua exposição financeira apresentaria um desvio-padrão acima de um milhão de dólares. Já no caso do hedge usando futuro sintético (opções) com o delta do modelo, o desvio-padrão dessa exposição seria reduzido para US\$337.000. A eficiência do hedge para esse período usando as opções precificadas pelo modelo foi de 92,2%. Para os quatro períodos em sequência foi de 98,0%.

Olhando-se para todos os períodos simulados em sequência (TOTAL), observamos que a melhor estratégia de hedge é a com futuros, seguida pela estratégia do modelo proposto. Uma das razões para se optar pela estratégia com as opções em detrimento da estratégia com futuros é o fluxo de caixa necessário para se tomar tal posição no mercado, já que no caso de se montar uma estratégia de futuro sintético, onde vende-se uma *call* e compra-se uma *put*, o custo seria próximo a zero.

Através da Figura 6 abaixo, conseguimos visualizar a variabilidade do resultado da posição sem hedge contra o resultado da posição com hedge via opções do modelo:

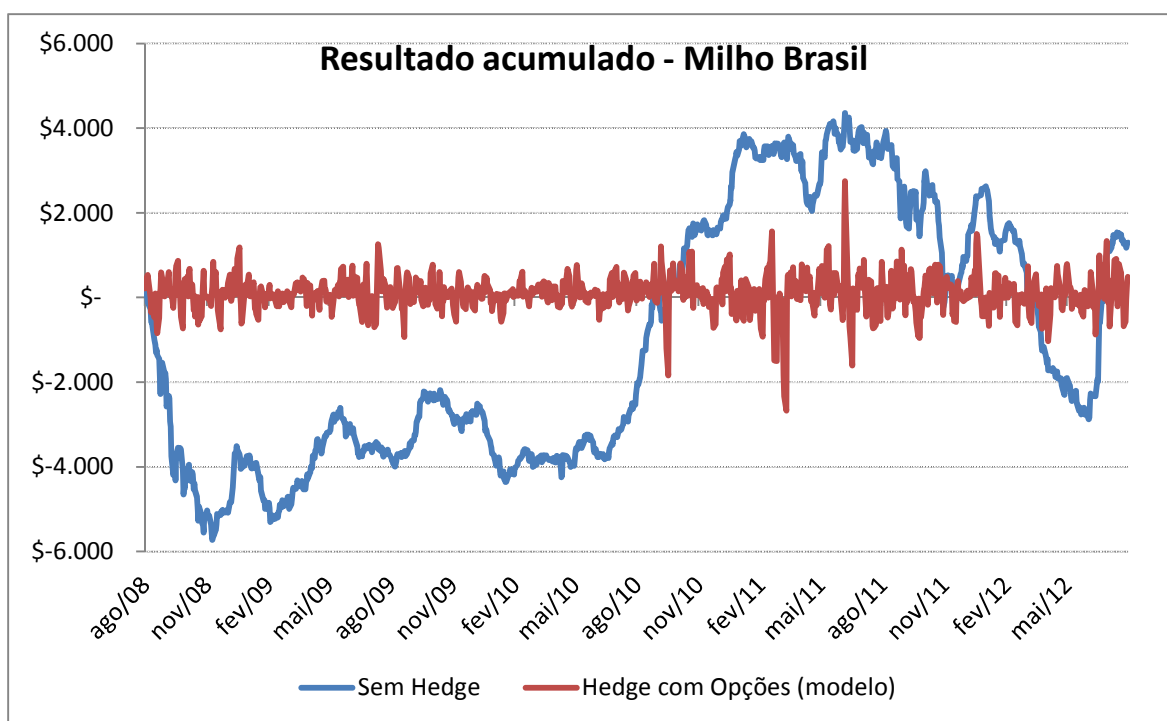


Figura 6 – Milho Brasil: Resultado diário acumulado (valores em milhares de US\$)

Claramente se observa a importância do hedge, que elimina os resultados indesejados dos movimentos adversos do mercado. Note que o objetivo aqui é ter o resultado acumulado o mais próximo de zero, já que estamos tentando estabelecer uma posição protegida contra movimentos indesejados.

O mesmo foi observado para o mercado brasileiro da soja: a estratégia com opções usando o delta do modelo foi superior a estratégia com opções usando o delta do mercado analisando-se os quatro períodos em sequência. A eficiência do hedge do modelo foi de 97,5%, conforme observamos na Tabela 12:

SOJA BRASIL		Sem Hedge	Hedge com Futuros	Hedge com Opções (mercado)	Hedge com Opções (modelo)
PERÍODO 1	DP	\$2.665	\$514	\$963	\$689
	EH	-	96,3%	86,9%	93,3%
PERÍODO 2	DP	\$1.707	\$544	\$911	\$655
	EH	-	89,9%	71,5%	85,3%
PERÍODO 3	DP	\$1.516	\$402	\$628	\$512
	EH	-	93,0%	82,8%	88,6%
PERÍODO 4	DP	\$4.236	\$672	\$766	\$801
	EH	-	97,5%	96,7%	96,4%
TOTAL	DP	\$4.270	\$542	\$827	\$674
	EH	-	98,4%	96,3%	97,5%

Tabela 12 - Resultados da simulação para Soja Brasil (desvio-padrão em milhares de US\$)

A Figura 7 a seguir mostra o resultado diário acumulado da estratégia com opções do modelo para o mercado brasileiro de soja, comparado com a estratégia sem hedge algum:

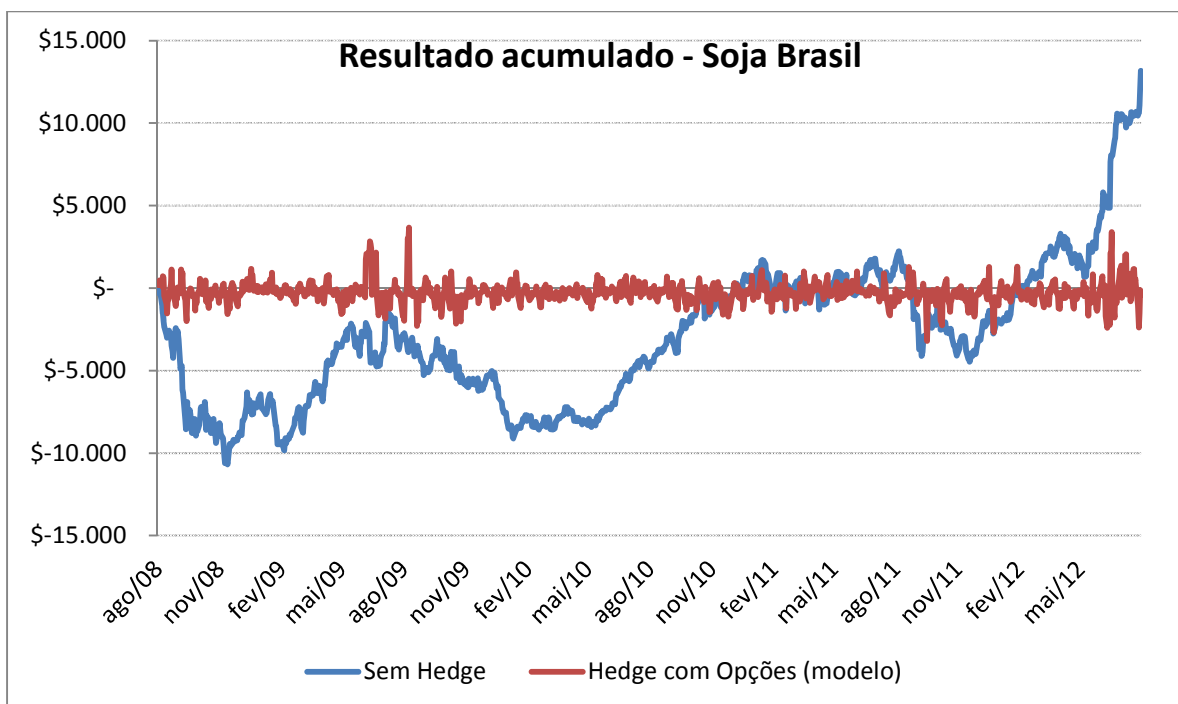


Figura 7 – Soja Brasil: Resultado diário acumulado (valores em milhares de US\$)

Resultados semelhantes aos observados para o mercado brasileiro foram obtidos para o mercado norte-americano, tanto para milho quanto para soja. No caso do milho, os dados são apresentados na Tabela 13 abaixo:

MILHO EUA		Sem Hedge	Hedge com Futuros	Hedge com Opções (mercado)	Hedge com Opções (modelo)
PERÍODO 1	DP	\$1.233	\$107	\$132	\$162
	EH	-	99,2%	98,9%	98,3%
PERÍODO 2	DP	\$422	\$97	\$134	\$118
	EH	-	94,7%	89,9%	92,2%
PERÍODO 3	DP	\$1.969	\$211	\$355	\$259
	EH	-	98,9%	96,7%	98,3%
PERÍODO 4	DP	\$1.293	\$180	\$468	\$256
	EH	-	98,1%	86,9%	96,1%
TOTAL	DP	\$3.138	\$157	\$309	\$208
	EH	-	99,8%	99,0%	99,6%

Tabela 13 - Resultados da simulação para Milho EUA (desvio-padrão em milhares de US\$)

Novamente a estratégia com opções usando o delta do modelo foi superior à estratégia com o delta de mercado, ficando a eficiência bem próxima a da estratégia com futuros.

Como era esperado, a eficiência do hedge para o mercado norte-americano é superior ao do mercado brasileiro, já que estamos utilizando instrumentos negociados na bolsa americana. A eficiência nesse caso foi de 99,6%.

A Figura 8 mostra o resultado acumulado da estratégia para o milho negociado no mercado norte-americano:

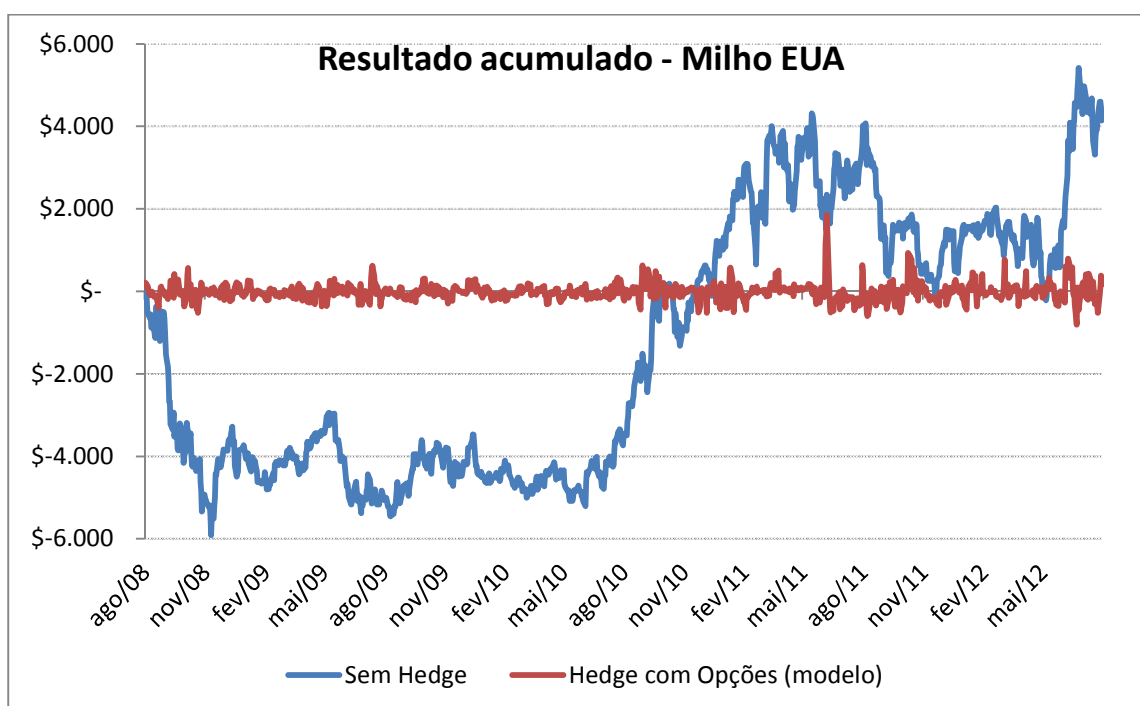


Figura 8 – Milho EUA: Resultado diário acumulado (valores em milhares de US\$)

No caso da soja para o mercado norte-americano, resultados semelhantes foram observados: a estratégia com opções usando delta do modelo teve desempenho superior à estratégia com opções usando delta do mercado, e novamente como esperado, a estratégia também teve uma eficiência de hedge maior quando comparada com o mercado físico brasileiro. Os resultados são apresentados na Tabela 14 a seguir.

SOJA EUA		Sem Hedge	Hedge com Futuros	Hedge com Opções (mercado)	Hedge com Opções (modelo)
PERÍODO 1	DP	\$2.640	\$327	\$832	\$507
	EH	-	98,5%	90,1%	96,3%
PERÍODO 2	DP	\$964	\$258	\$737	\$364
	EH	-	92,9%	41,6%	85,8%
PERÍODO 3	DP	\$2.271	\$235	\$501	\$316
	EH	-	98,9%	95,1%	98,1%
PERÍODO 4	DP	\$3.561	\$252	\$415	\$444
	EH	-	99,5%	98,6%	98,4%
TOTAL	DP	\$4.179	\$272	\$644	\$414
	EH	-	99,6%	97,6%	99,0%

Tabela 14 - Resultados da simulação para Soja EUA (desvio-padrão em milhares de US\$)

A Figura 9 mostra o resultado acumulado da estratégia para a soja negociada no mercado norte-americano. Consta-se mais uma vez a importância do hedge.

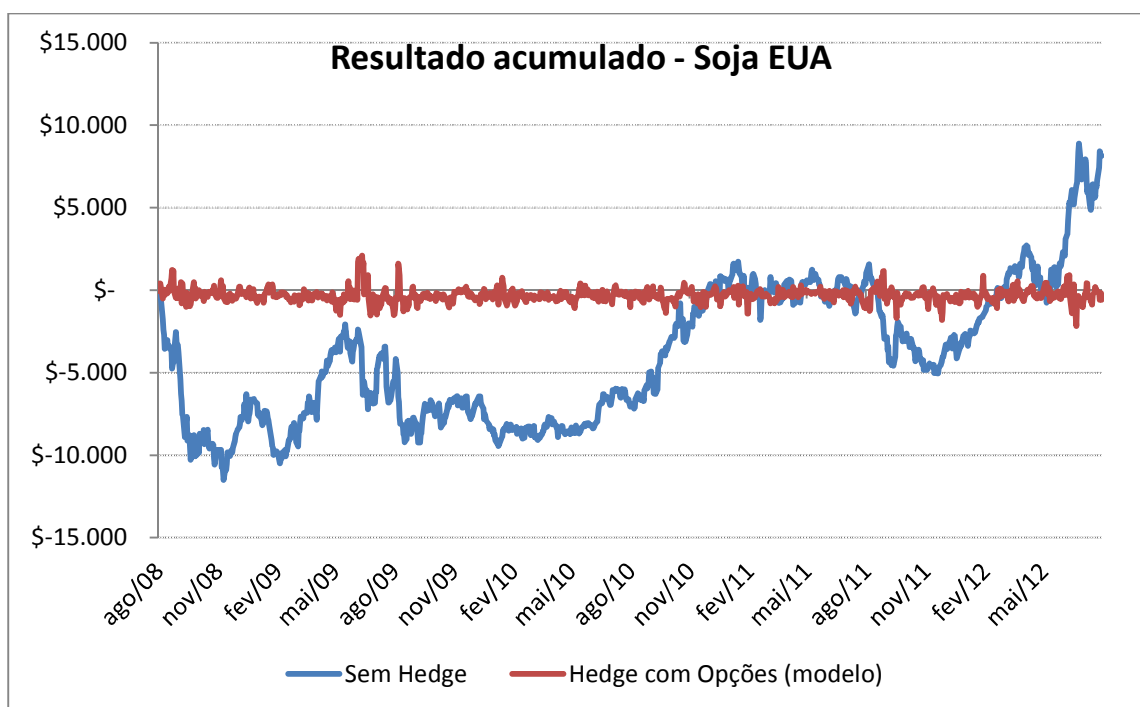


Figura 9 – Soja EUA: Resultado diário acumulado (valores em milhares de US\$)

5. Conclusão

O objetivo desta dissertação foi propor um modelo que pudesse precificar opções americanas de commodities, incorporando na dinâmica do ativo ambos os efeitos da volatilidade estocástica e dos saltos determinísticos nos preços decorrentes da divulgação dos relatórios do USDA. As opções precificadas pelo modelo foram utilizadas em uma estratégia de hedge para uma posição teórica de milho físico, e outra de soja física, tanto para o mercado brasileiro quanto para o mercado norte-americano.

Os resultados mostram que a incorporação da volatilidade estocástica e dos saltos determinísticos melhoram o desempenho em relação à uma estratégia com opções que siga o modelo praticado pelo mercado, para ambas as commodities e em ambas as localidades.

O modelo proposto também pode servir como alternativa à utilização de contratos futuros para o hedge da posição física. A eficiência da estratégia com o modelo proposto é próxima à eficiência da estratégia com futuros, tendo a vantagem de o custo para se montar tal posição com opções ser menor. Outra vantagem que podemos citar é o fluxo de caixa necessário para ajustes diários dos contratos futuros, algo que se torna desnecessário com a utilização das opções.

Outro resultado encontrado é que a eficiência da estratégia é maior para o mercado norte-americano, em comparação ao mercado brasileiro. Esse resultado era esperado pois utilizamos para o estudo instrumentos negociados na bolsa americana. Apesar do Brasil ser um dos maiores produtores e exportadores de milho e de soja do mundo, o volume de instrumentos derivativos sobre essas commodities negociado na bolsa local representa aproximadamente 0,1% do volume negociado na CME. O desenvolvimento do mercado de derivativos local poderia ser benéfico para o cenário agrícola brasileiro.

Como sugestão de trabalho futuro, podemos citar o estudo de estratégias de hedge com a dinâmica do modelo proposto, envolvendo opções de commodities com

vencimento semanal, criadas no ano passado pela CME. O volume negociado dessas opções vem aumentando significativamente. Por apresentarem um vencimento mais curto, o prêmio negociado por elas é menor e portanto o custo do hedge seria menor.

Uma extensão ao trabalho seria o estudo da frequência do rebalanceamento da estratégia. Ao invés de se utilizar um período semanal fixo para tal fim, como foi o caso deste trabalho, poderiam ser feitos estudos sobre outras frequências ou até mesmo o hedge por bandas de delta.

Outros trabalhos que poderiam ser relacionados ao modelo poderiam desenvolver estratégias de *trading* aproveitando o comportamento do mercado em função da divulgação dos relatórios.

Conclui-se que o hedge é extremamente importante para aqueles que negociam a commodity física. A dinâmica dos preços das commodities agrícolas é bem peculiar pois pode ser afetada por uma intempérie climática, pela demanda global de uma commodity em detrimento de outra, por sazonalidades, entre outros diversos fatores. A utilização de modelos que comportem tal dinâmica pode servir como uma ferramenta útil no gerenciamento de risco dessas posições.

6. Referências bibliográficas

ABRAHAM, A.; TAYLOR, W. An Event Option Pricing Model with Scheduled and Unscheduled Announcement Effects. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, v. 8, p. 151-162, 1997.

ADJEMIAN, M. Emergence and Impact of USDA's WASDE Report, *Amber Waves*, v. 10, 2012.

BATES, D. Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options, *The Review of Financial Studies*, v.9, p. 69-107, 1996.

BLACK, F. The pricing of commodity contracts, *Journal of Financial Economics*, v. 3, p. 167-179, 1976.

BLACK, F.; SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, v. 81, p. 637-654, 1973.

CME Group. Annual Leading Products Guide 2011, disponível em www.cmegroup.com

CONT, R.; TANKOV, P.; VOLTCHKOVA, E. Hedging with Options in Models with Jumps, *Proceedings of the 2005 Abel Symposium in Honor of Kiyosi Itô*, p. 197-218, 2005.

DUBINSKY, A.; JOHANNES, M. Earnings announcements and equity options, *Columbia University*, 2006.

HESTON, S. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options, *Review of Financial Studies*, v. 6, p. 327-343, 1993.

HILLIARD, J.; REIS, J. Jump Processes in Commodity Futures Prices and Options Pricing, *American Journal of Agricultural Economics*, v. 81, p. 273-286, 1999.

GATHERAL, J. The Volatility Surface A Pratictioner's Guide, John Wiley and Sons, 208 p., 2006.

ISENGILDINA-MASSA, O.; IRWIN, S.; GOOD, D.; GOMEZ, J. The Impact of WASDE Reports on Implied Volatility in Corn and Soybean Markets, *Agribusiness*, vol. 24, p. 473-490, 2008.

JACKEL, P. Stochastic volatility models: Past, Present and Future, *The Best of Wilmott I: Incorporating the Quantitative Finance Review*, 2004.

KOEKEBAKKER, S.; LIEN, G. Volatility and Price Jumps in Agricultural Futures Prices – Evidence from Wheat Options, *American Journal of Agricultural Economics*, v. 86, p. 1018-1031, 2004.

KOU, S. A jump diffusion model for option pricing, *Management Science*, v. 48, p. 1086-1101, 2002.

LINNELL, G. Option Pricing with Events at Deterministic Times, Working paper, 2012.

LONGSTAFF, F.; SCHWARTZ, E. Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach, *The Review of Financial Studies*, v. 14, p. 113-147, 2001.

LONDON, J. Modeling Derivatives in C++, John Wiley and Sons, 768 p., 2005.

MCKENZIE, A.; SINGH, N. Hedging Effectiveness around U.S. Department of Agriculture Crop Reports, *Journal of Agricultural and Applied Economics*, v. 43, p. 77-94, 2011.

MERTON, R. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics*, v. 3, p. 125-144, 1976.

OZTUKEL, A.; WILMOTT, P. Uncertain Parameters, an Empirical Stochastic Volatility Model and Confidence Limits, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, v. 1, p. 175-189, 1998.

PRESS, W.; TEUKOLSKY, S.; VETTERLING, W.; FLANNERY, B. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing, Third Edition, Cambridge University Press, 1256 p., 2007.

SEPP, A. Fourier Transform for Option Pricing under Affine Jump-Diffusions: an Overview, SSRN eLibrary, 2003.

TANKOV, P.; VOLTCHKOVA, E. Jump-diffusion Models: a Practitioner's Guide, *Banque et Marchés*, v. 99, 2009.

WILMOTT, P. Paul Wilmott on Quantitative Finance, Second Edition, John Wiley and Sons, 1500 p., 2006.

Anexo I – Salto determinístico na dinâmica do logaritmo do preço

O processo de evolução do preço do ativo é descrito em função do seu logaritmo, a fim de se facilitar o somatório dos retornos ao longo do tempo. No que segue abaixo, mostramos a solução da equação da dinâmica do preço (acrescida de saltos determinísticos) para obtermos a dinâmica do logaritmo do preço.

Introduzindo a dinâmica do salto determinístico ao modelo com movimento browniano geométrico:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t + I\{t = s_j\}U_j$$

A solução dessa equação é:

$$X_t = \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dW_s + \int_0^t I\{t = s_j\}U_j ds$$

$$X_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{j:s \leq t} U_j$$

Aqui utilizamos o conceito da exponencial de Doléans-Dade: sendo X_t um processo de Lévy, existe um único processo càdlàg Z_t tal que:

$$dZ_t = Z_t - dX_t$$

$$Z_0 = z$$

Z é dado por:

$$Z_t = z \exp \left\{ X_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right\} \prod_{0 \leq s \leq t} (1 + \Delta X_s) \exp \{-\Delta X_s\}$$

Ao utilizarmos esse conceito na solução da equação do movimento browniano geométrico com o salto determinístico, temos:

$$Z_t = z \exp \left\{ X_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right\} \prod_{0 \leq s \leq t} (1 + U_j) \exp \{-U_j\}$$

$$Z_t = z \exp \left\{ \mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t + \sum_{j:s \leq t} U_j - \sum_{j:s \leq t} U_j \right\} \prod_{0 \leq s \leq t} (1 + U_j)$$

$$Z_t = z \exp \left\{ \mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right\} \prod_{0 \leq s \leq t} (1 + U_j)$$

Se fizermos $U_j = \exp\{Y_j\} - 1$, podemos reescrever esta última equação como:

$$Z_t = z \exp \left\{ \mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right\} \prod_{0 \leq s \leq t} \exp\{Y_j\}$$

$$Z_t = z \exp \left\{ \mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right\} \exp \left\{ \sum_{0 \leq s \leq t} Y_j \right\}$$

$$Z_t = z \exp \left\{ \mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t + \sum_{0 \leq s \leq t} Y_j \right\}$$

Assumindo que Y_j tenha uma distribuição Normal, temos agora um meio para modelar ativos com eventos acontecendo em períodos determinísticos.

Reescrevendo a equação com S_T no lugar de Z_t (indicando que este é o processo do preço do ativo S), e fixando z como S_t , sendo T o vencimento de uma opção e N_T^d o número de saltos que ocorrem entre t e T :

$$S_T = S_t \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma (W_T - W_t) + \sum_{j=1}^{N_T^d} Y_j \right)$$

Anexo II – PDF e CDF de cada período estimado

Mostramos a seguir as funções densidade de probabilidade (PDF) e de distribuição cumulativa (CDF) dos dados históricos dos saltos observados de ambas as commodities e para cada período analisado, obtidas através do programa MATLAB. A distribuição que melhor se adequou aos dados observados foi a distribuição Normal.

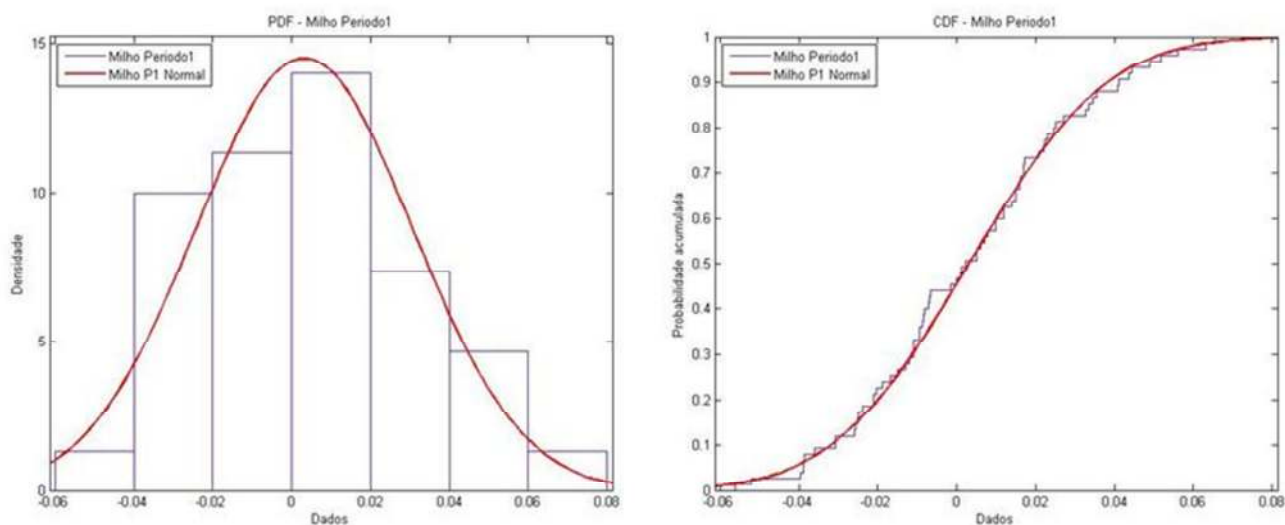


Figura 10 – PDF e CDF Milho Período 1

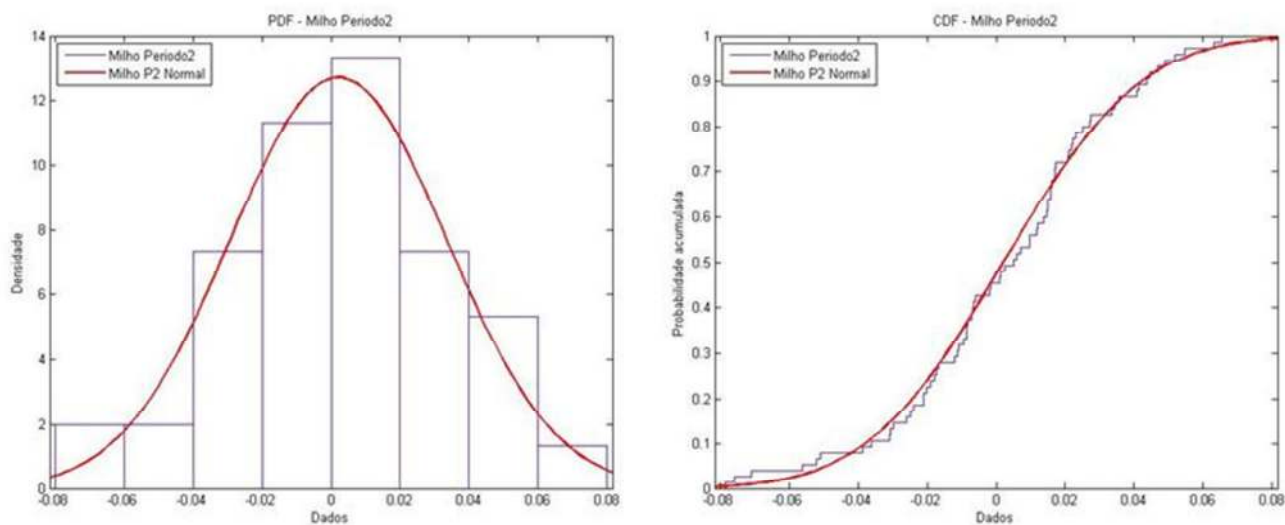


Figura 11 – PDF e CDF Milho Período 2

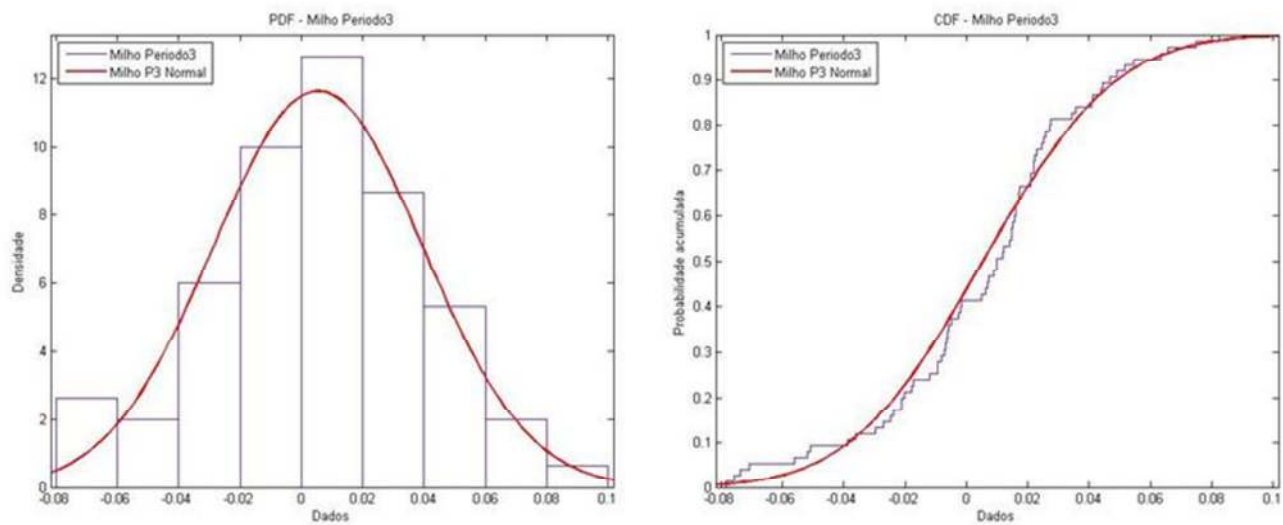


Figura 12 – PDF e CDF Milho Período 3

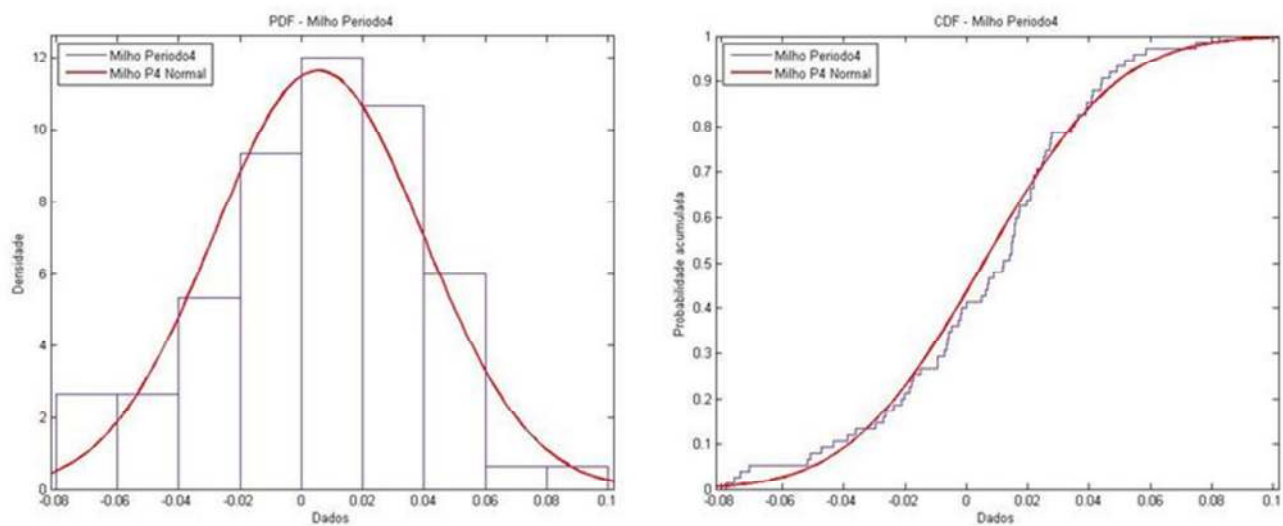


Figura 13 – PDF e CDF Milho Período 4

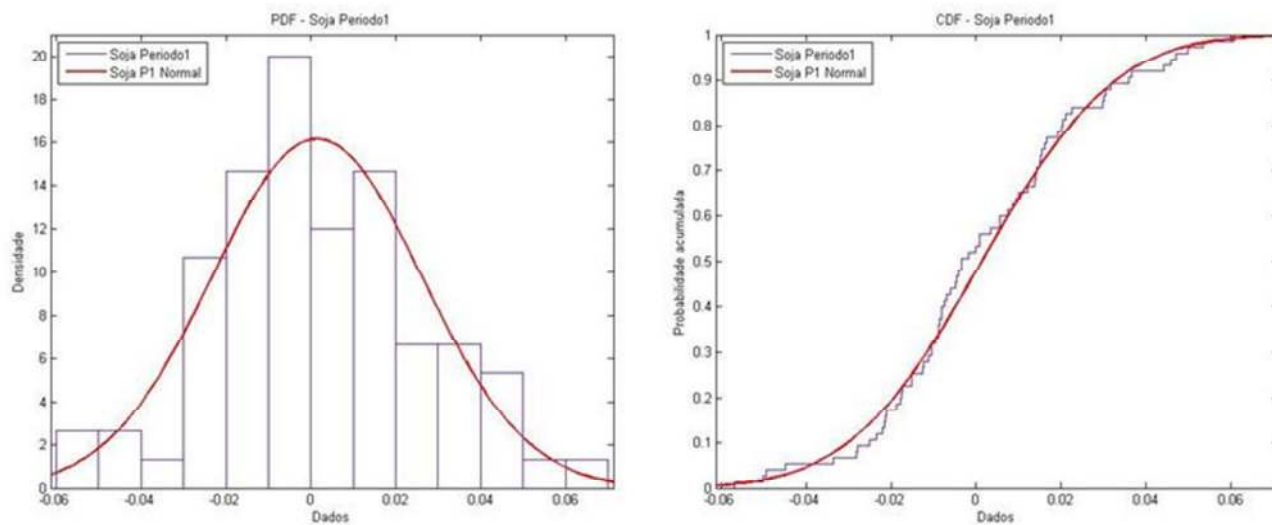


Figura 14 – PDF e CDF Soja Período 1

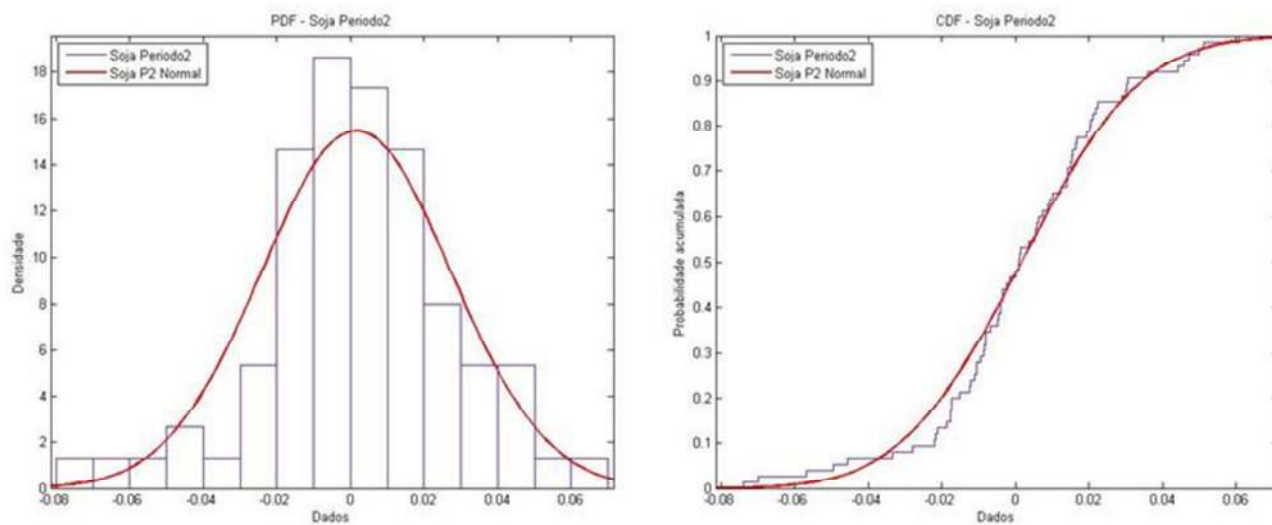


Figura 15 – PDF e CDF Soja Período 2

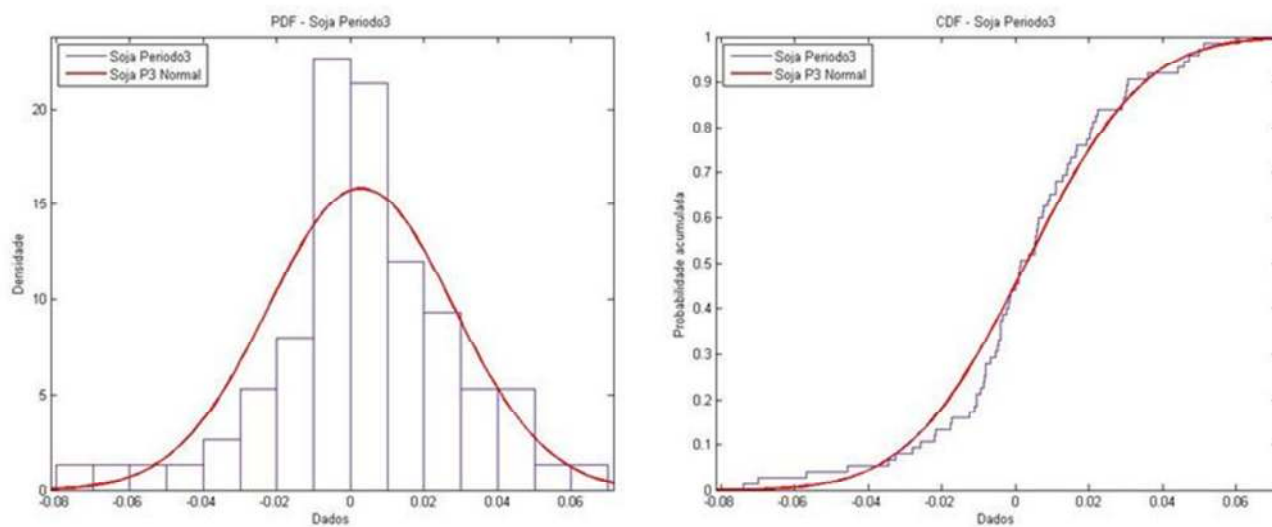


Figura 16 – PDF e CDF Soja Período 3

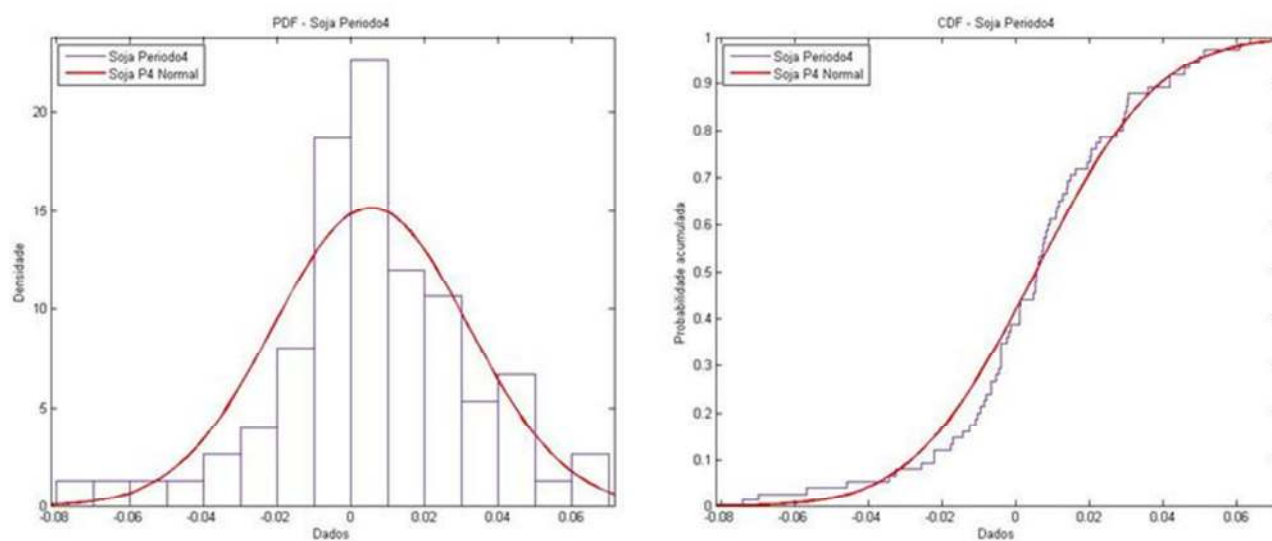


Figura 17 – PDF e CDF Soja Período 4