

1248

1199601149



INCERTEZA E INFORMAÇÃO NOS MODELOS ECONÔMICOS

2/

Banca examinadora

Prof. Orientador.....
Prof.....
Prof.....
Prof.....

A meus pais que sempre
apoiam todas as minhas
iniciativas de estudo.

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS DE SÃO PAULO

INCERTEZA E INFORMAÇÃO NOS MODELOS ECONÔMICOS

*Ciro Biderman**

Dissertação apresentada ao Curso de pós-graduação em Economia de Empresas da FGV/EAESP como requisito parcial para obtenção do título de mestre.

Orientador: Prof. Guillermo T. M. Butron

São Paulo
1996

* Bolsista do CNPQ e Pesquisador do CEBRAP.



Carlon

Escola de Administração de Empresas de São Paulo	
Data	Nº de Chamada
19-08	33
Tombo	B5852
1149/76	Dis. e.2

Biderman, Ciro. *Incerteza e Informação nos Modelos Econômicos*. São Paulo: EAESP/FGV, 1996. (Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Pós-Graduação da EAESP/FGV em Economia de Empresas)

Resumo: Discute-se como a assimetria de informações afeta os modelos de precificação de ativos e algumas das consequências para os testes de eficiência. No primeiro capítulo são apresentados dois modelos que partiram da hipótese que os agentes possuem informação completa sobre as variáveis econômicas: o CAPM e o Black-Scholes. No segundo capítulo procura-se verificar até que ponto é possível modelar a economia dadas estas imperfeições. Partindo de uma variação de Akerloff (1970), mostra-se que quando uma parte de posse de uma informação superior transaciona com outra, ocorre uma *falha* de mercado, a *seleção adversa*, podendo até gerar o colapso do mercado. O segundo modelo analisado, Bray (1989), mostra como as informações privilegiadas são incorporadas ao preço e o último modelo, Kyle (1985), analisa como a presença de um agente com informação privilegiada afeta a liquidez do mercado. O terceiro capítulo faz um teste para a eficiência do mercado de câmbio brasileiro. Apesar de não se poder negar a presença de cointegração entre as séries, não se pode aceitar a hipótese de eficiência semi-forte, ou seja, a hipótese de que o mercado futuro seria um estimador não viesado para o mercado à vista, o que pode ser interpretado como indicação de informação incompleta ou imperfeita.

Palavras-Chaves: Seleção Adversa - Eficiência de Mercado - Ativos Derivados - Assimetria de Informação - Agentes Financeiros - Economia Financeira.

Sumário

Índice de Figuras e Tabelas	II
Glossário e Siglas	III
Agradecimentos	V
Introdução	1
1. MODELOS DE PRECIFICAÇÃO WALRASIANOS	5
1.1 Conceitos Financeiros	6
1.2 A Análise Média-Variância e o Modelo CAPM	11
1.3 O modelo Black-Scholes	18
Apêndice A: Processos de Wiener	26
Apêndice B: O Lema de Ito	27
2. PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS COM ASSIMETRIA DE INFORMAÇÕES	29
2.1 Emissão Primária com Seleção Adversa	30
2.2 Os agentes do mercado e sua escolha sobre incerteza	35
2.3 Hipóteses: revisão e complemento	38
2.4 Resolvendo o modelo	38
2.5 O papel da informação	42
2.6 O problema de extração do sinal	44
2.7 Operações Múltiplas (Kyle)	47
2.8 Modelo Com Operações Sequenciais	54
3. TESTANDO A EFICIÊNCIA DE MERCADO	62
3.1 Revisão da Literatura	62
3.2 Eficiência de Mercado, Raízes Unitárias e Cointegração	66
3.3 Testes de Raiz Unitária	72
3.3.1 Teste de Raiz Unitária para o Dólar à Vista	78
3.3.2 Teste de Raiz Unitária para o Dólar Futuro	84
3.4 Testes de Cointegração	88
Conclusão	103
Referências Bibliográficas	110

Índice de Figuras e Tabelas

Figuras:

1.1: O modelo CAPM	12
2.1: Seleção Adversa em Emissão Primária.....	32
2.2: Representação Discreta para o Jogo de Kyle.....	51
3.1a: $\mu = -0.5$	67
3.1b: $\mu = 1.0$	67
3.2: Representação do Vetor de Cointegração como “Atrator”	72
3.3: Volume Financeiro de Contratos Futuros de Dólares	73
3.4: Logaritmo Natural do <i>Spot</i> e <i>Futuro</i> em função do Tempo	74
3.5: Autocorrelação e Autocorrelação Parcial para o Preço do <i>Spot</i>	75
3.6: Autocorrelação e Autocorrelação Parcial para o Preço do <i>Futuro</i>	75
3.7: Autocorrelação e Autocorrelação Parcial primeira diferença - <i>Spot</i>	75
3.8: Autocorrelação e Autocorrelação Parcial primeira diferença - <i>Futuro</i>	76
3.9: Ln do Câmbio à Vista e Primeira Diferença	76
3.10: Ln do Câmbio <i>Futuro</i> e Primeira Diferença.....	76
3.11: Autocorrelação para os Resíduos de (3.18) - Dólar à Vista.....	83
3.12: Autocorrelação para os Resíduos de (3.19) - Dólar à Vista.....	84
3.13: Autocorrelação para os Resíduos de (3.18) - Dólar Futuro	85
3.14: Análise da Série e da primeira Diferenças: <i>Spot</i>	93
3.15: Análise da Série e da primeira Diferença: <i>Futuro</i>	93
3.16: Vetor de Cointegração sem Restrições	96
3.17: Autovalores da Matriz no Modelo Irrestrito.....	97
3.18: Vetor de Cointegração Restrito	98
3.19: Autovalores da Matriz no Modelo Restrito	99

Tabelas:

3.1: Síntese de Resultados para Equação (3.15).....	86
3.2: Síntese de Resultados para Equação (3.18).....	86
3.3: Síntese de Resultados para Equação (3.19).....	87
3.4: Comparação com Resultados para outras Moedas	88
3.5: Resultados de Cointegração	94
3.6: Comparação de Resultados de Cointegração com outras Moedas	100
Valor de Mercado das CIAs abertas 1993 (%PIB).....	104
Fluxo líquido de títulos transnacionais	105

Glossário e Siglas

Como a economia é amplamente dominada pela língua inglesa, uma série de termos existe apenas na língua anglo-saxã. Nesta dissertação procura-se traduzir a maior parte deles sempre que possível. Foi dada preferência antes ao sentido que à tradução literal. Assim, por exemplo, *Market of Lemons* foi traduzido como Mercado de Abacaxis. As palavras em inglês aparecem sempre em itálico. O glossário abaixo apresenta os principais conceitos que normalmente são utilizados em inglês. Em seguida, apresentam-se as siglas mais importantes utilizadas no texto.

Glossário:

- *Adverse Selection*: Seleção Adversa.
- *Artificial Economy*: Economia Artificial.
- *Beliefs*: Crenças.
- *Call*: Opção de Compra.
- *Cheap Talk*: Conversa Barata
- *Depth*: Profundidade.
- *Drift*: Constante, intercepto.
- *Dummy*: Variável determinística.
- *Event Studies*: Estudo de Eventos.
- *Forward*: Termo.
- *Full Communications Equilibrium*: Equilíbrio de Informação Perfeita.
- *Hedger*: Agente que entra no mercado para garantir um determinado preço por estar envolvido direta ou indiretamente na produção.
- *Insider*: Detentor de informação privilegiada.
- *Market Maker*: Determina o preço de mercado.
- *Market of Lemons*: Mercado de Abacaxis.
- *Noise Trader*: Operador Irracional.
- *Order Flow*: Fluxo de Ordens.
- *Payoff*: Resultado, benefício.
- *Portfolio*: Carteira.
- *Private Information*: Informação Privilegiada/Informação Privada.
- *Put*: Opção de Venda.

- *Random Walk*: Passeio aleatório.
- *Resiliency*: Recuperação.
- *Return Predictability*: Previsibilidade do Retorno.
- *Short Sale*: Venda à Descoberto.
- *Spot*: Preço à Vista.
- *Spread*: Diferença entre preços ou taxas.
- *Swaps*: Derivativo que permite a troca de juros pré por pós-fixados, moedas, etc.
- *Tightness*: Firmeza.
- *Trend*: Tendência.

Siglas:

- ADF: Augmented Dickey-Fuller
- APT: Arbitrage Pricing Theory
- AR(p): Processo autorregressivo de ordem p
- Modelo Black e Scholes.
- BM&F: Bolsa de Mercadorias & Futuros.
- CAPM: Capital Asset Pricing Model.
- CARA: Constant Absolut Risk Aversion.
- Comissão de Valores Mobiliários.
- Dolar Canadense.
- EER: Equilíbrio de Expectativas Racionais.
- FS: Franco Suíço.
- HEM: Hipótese de Eficiência de Mercado.
- ICAPM: CAPM Intertemporal.
- Mercado Internacional de Moedas.
- LE: Libra Esterlina.
- MA: Marco Alemão.
- MQO: Mínimos Quadrados Ordinários.
- VAR(p): Vetor autorregressivo de ordem p
- YS: Yen Japonês.

Agradecimentos

A elaboração de uma dissertação de mestrado é um trabalho muito solitário. Isto não significa que a participação e ajuda de outras pessoas seja dispensável. Muito pelo contrário, o número de pessoas que participou direta ou indiretamente deste trabalho foi significativo. Correndo o inevitável risco de omissão, gostaria de agradecer a todos que colaboraram de alguma forma.

A primeira versão dos capítulos 1 e 2 foi apresentada em seminário no departamento de economia (PAE) em 1993. Agradeço a todos participantes deste seminário, especialmente Mauro Teixeira que leu com muita atenção, corrigindo inclusive erros de português. O professor Antonio Carlos Manfredini foi um dos primeiros a ler o projeto de dissertação e, além de participar da banca de qualificação, fez comentários extremamente coerentes, ajudando a reduzir o escopo do trabalho. O professor Yoshiaki Nakano também participou da qualificação e, apesar de afirmar que não entendia do assunto, seus comentários sempre atingiam o âmago do problema. Nesta fase do projeto, uma das pessoas mais importantes, sem sombra de dúvidas, foi o professor Luis Carlos Bresser Pereira. Na sua disciplina de metodologia o projeto foi apresentado e discutido. Seus comentários metodológicos serviram de orientação para todo o trabalho posterior.

José Marcio Rego sempre me apoiou. Luis Felipe Cozac leu toda a dissertação, sugerindo mudanças e apontando detalhes que fazem a diferença. Além

do mais, meus dois companheiros de pesquisa tiveram um papel fundamental no estímulo para terminar mais esta fase do aprendizado acadêmico.

A versão preliminar foi apresentada novamente em seminário no PAE, em fevereiro de 1996, muito mais concorrido que o primeiro. Agradeço a todos os participantes, especialmente Gesner de Oliveira que organizou o seminário, Maria Carolina Leme, com a qual conversei logo depois no CEBRAP e Samuel Pessoa. Aliás, Carolina, Samuel e Tomás Málaga, foram fundamentais no grupo de estudos que formamos, sem o qual eu não teria condições de realizar toda a parte econométrica da dissertação. Arthur Barrionuevo e Paulo Arvate, além da participação nos seminários, contribuíram em conversas no departamento. Às secretárias do departamento, Dalva e Joana. Paula Canto fez uma encadernação muito acima da média.

Tomás Málaga, meu orientador, esteve presente em todos os eventos citados acima: seminários, qualificação e grupo de estudos. Além disso, possibilitou a utilização do programa econométrico, ajudou na coleta de dados e sempre me deixou extramamente livre para trabalhar.

Introdução

O paradigma walrasiano (como sintetizado por Arrow e Debreu) predominou nas análises microeconômicas aproximadamente até a década de 80. A partir deste período, uma série de autores começam a questionar o modelo básico. Não que a teoria walrasiana tenha se tornado inútil, porém nota-se que ela é incompleta numa série de pontos. Em primeiro lugar, sabemos que a conexão lógica entre indivíduos racionais e competição perfeita só é válida quando a economia é grande o suficiente. Na vida real a economia nem sempre é suficientemente grande, especialmente quando incluímos a produção. Agentes em economias que não são perfeitamente competitivas podem (e devem) agir estrategicamente.

Uma outra simplificação da teoria tradicional é que ela pressupõe a existência de muitos mercados que não existem no mundo real. Por que eles não existem? Será que este fator deve ser incorporado ao modelo, ou pode ser considerado exógeno? A não existência de um mercado está ligada, via de regra, à informação e sua difusão. A formulação tradicional, ao negligenciar uma atenção explícita à informação, fornece pouco material para analisar instituições que se relacionam com informação assimétrica ou imperfeita. Além disto, não apresenta um pano de fundo para análise da utilização estratégica da informação.

O conceito de economia de mercado implícito na formulação de Arrow e Debreu é inconsistente com a economia industrial moderna, onde agentes obtêm informações para tomar decisões estratégicas. Os modelos de 'agente representativo'

são impotentes para estudar certas falhas de mercado. Um agente com informação privilegiada (“insider”) não pode ser tratado como um que não detém esta informação. Esta dissertação dá uma atenção explícita à informação, sua distribuição entre os agentes e, especialmente, sua utilização estratégica. A questão que se procura discutir é como a assimetria de informações afeta os modelos de precificação de ativos e algumas consequências para os testes de eficiência. Será que ao incluir este fato formalmente no modelo, as conclusões se alteram? E, caso a resposta seja positiva, será que esta alteração é significativa? O que ocorre com o volume de negociação e o preço do ativo?

A dissertação está estruturada da seguinte forma: No primeiro capítulo são apresentados alguns conceitos financeiros e os principais modelos walrasianos, que partiram da hipótese que os agentes econômicos possuem informação completa sobre as variáveis econômicas. No início dos anos 70, existia uma certa euforia com o modelo de Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966), conhecido na literatura por “CAPM” - *Capital Asset-Pricing Model*. No entanto, ainda na primeira metade da década, Black e Scholes (1973) apresentam um modelo alternativo. Merton (1973) inclui um elemento intertemporal no CAPM (o ICAPM) e Ross (1976), a partir de um modelo de arbitragem (APT) obtém o mesmo resultado que Black e Scholes. Paralelamente, Rubinstein (1976) e Lucas (1978) apresentam os primeiros modelos intertemporais de precificação de ativos baseados no consumo. Finalmente, Cox, Ingersol e Ross (1985) apresentam um modelo de precificação em equilíbrio geral. Este capítulo apresenta esta evolução nos modelos de precificação. No final do capítulo, dois apêndices discutem algumas definições de cálculo estocástico utilizadas na dissertação.

No segundo capítulo é introduzido o problema da assimetria de informações. A assimetria de informações está presente numa série de situações reais. O vendedor de um produto possui mais informação sobre o seu produto do que o comprador, ofertantes de emprego sabem mais sobre a sua capacidade que os contratantes, gerentes de empresas possuem maiores informações sobre o desempenho da empresa que os próprios investidores. Devemos verificar até que ponto se pode modelar a economia dadas estas imperfeições. Partindo de uma variação do modelo de Akerloff (1970) adaptado para o mercado de ações, mostra-se que quando uma parte de posse de uma informação superior transaciona com uma outra parte que não tem informação completa, ocorre uma *falha*¹ de mercado, a *seleção adversa*, podendo até gerar o colapso do mercado. Isto significa que as alocações deixam de ser "ótimas" (no sentido paretiano). O segundo modelo (Bray [1989]) mostra como as informações privilegiadas são incorporadas ao preço e o último modelo, Kyle (1985), analisa como a presença de um *insider* (agente com informação privilegiada) afeta a liquidez do mercado. Este capítulo traz alguns resultados não conclusivos. O estudo dos mercados imperfeitos ainda é um campo em aberto onde nem a terminologia está unificada.

O terceiro capítulo faz um teste para a eficiência do mercado de câmbio brasileiro. Inicialmente testa-se a hipótese de raiz unitária para as séries de câmbio à vista e futuro. Como veremos, este teste equivale à hipótese de eficiência fraca e não se pode negar esta hipótese de eficiência. A partir deste ponto, testa-se a existência de um vetor de cointegração válido entre as duas séries, seguindo o procedimento de

¹. Na realidade, os mercados financeiros também são falhos por outros motivos como custos de transação, externalidades e competição imperfeita. Nesta dissertação, a preocupação centra-se nas

Johansen (1988). Apesar de não se poder negar a presença de cointegração entre as séries, não se aceitou a hipótese de eficiência semi-forte, ou seja, a hipótese de que o mercado futuro seria um estimador não viesado para o mercado à vista. Isto pode ser interpretado como indicação de informação incompleta ou imperfeita.

Uma conclusão tenta avaliar o que pode ser extraído do que foi estudado. Assim, é feita uma análise comparativa de dados financeiros relevantes para o Brasil e alguns países selecionados e discute-se rapidamente a legislação existente.

Esta é uma tese de fronteira entre finanças e economia, duas áreas onde a fronteira é extremamente tênue. Espera-se que ela ajude os economistas a compreenderem o significado econômico de uma série de conceitos financeiros e que os financistas percebam que por trás dos conceitos utilizados existe uma lógica econômica.

1. MODELOS DE PRECIFICAÇÃO WALRASIANOS

Neste capítulo os principais modelos de precificação de ativos das décadas de 60 e 70 são apresentados. Apesar do corpo de pensamento utilizado estar contido nas idéias de Walras, estes modelos ganharam muito poder de explicação após o trabalho de Von Newman e Morgenstern (1947). Ao dar uma definição da função de utilidade permitindo a inclusão de incerteza, os autores abriram caminho importante para o tratamento deste problema. Pode-se dizer que a teoria financeira moderna começa com o desenvolvimento de modelos que permitiram explorar e testar algumas intuições anteriores². Os modelos walrasianos são apresentados neste capítulo para permitir a comparação com os modelos desenvolvidos no capítulo seguinte, além de introduzir conceitos fundamentais.

Na década de 50, o principal modelo que pretendia estudar o comportamento do preço de ativos financeiros estava nas teorias de “carteira”, principalmente nos trabalhos de Markowitz (1952), Tobin (1958) e Modigliani e Miller (1958). Entretanto, nenhum deles estende esta análise para construir uma teoria de equilíbrio de mercado. Partindo das teorias de “carteira” desenvolvidas anteriormente, Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966)³ desenvolvem um modelo que mostra a relação entre risco e retorno, o CAPM. O modelo analisa o equilíbrio de mercado sob

². Uma série de intuições como a hipótese de eficiência, associada ao conceito de raiz unitária podem ser encontradas no fenomenal trabalho de Bachelier (1900).

³. Arrow (1964) realiza uma análise mais elegante e genérica, porém sem o mesmo impacto que o CAPM. Isto deve-se à impossibilidade empírica de se tratar o modelo de Arrow-Debreu e à hipótese altamente restritiva de que existem tantos ativos quanto estados da natureza.

condições de risco, partindo das teorias da década anterior. Apesar de existirem evidências de imperfeições no modelo, o estudo das suas “anomalias” foi responsável pelas descobertas empíricas mais relevantes das décadas de 70 e 80.

Este capítulo está estruturado da seguinte forma: primeiro discute-se conceitos relevantes em finanças que serão utilizados no decorrer do texto. Em seguida, discute-se rapidamente a teoria de “carteira”, para introduzir o modelo CAPM. Na última seção é apresentado o modelo de Black e Scholes (1973). Dois apêndices no final do capítulo formalizam algumas definições de cálculo estocástico: processo de Wiener e o lema de Ito. A formalização é limitada ao escopo do trabalho.

1.1 Conceitos Financeiros

Um dos conceitos mais importantes para se compreender a teoria financeira moderna é o conceito de Eficiência de Mercado. A palavra eficiência tem uma série de sentidos em economia. Por exemplo, um mercado é eficiente no sentido paretiano se não é possível melhorar o bem estar de um indivíduo sem piorar o de outro. Para um mercado de ativos financeiros, o conceito de eficiência (Malkiel [1989]) pode ser definido como:

- **Hipótese de Eficiência de Mercado (HEM):** Um mercado de capitais é considerado eficiente quando ele reflete todas as informações relevantes na determinação do preço do ativo. Formalmente, um mercado é eficiente com relação a um conjunto de informações ϕ se é impossível realizar lucro econômico com base em ϕ .

Para se obter HEM são necessários diversas hipóteses subjacentes, em especial um conceito de equilíbrio. Com exceção desta última, as hipóteses de mercado eficiente podem ser resumidas em:

1. Todos os ativos têm um passivo limitado;
2. Não existem custos de transação, taxas ou problemas com a indivisibilidade dos ativos;
3. Existe um número suficientemente grande de investidores, nenhum forte demais, de maneira que qualquer investidor acredite ser capaz de comprar ou vender tanto quanto deseje de um determinado ativo;
4. Existe um mercado de crédito perfeito para emprestar ou tomar emprestado à mesma taxa de juros;
5. Existe um mercado para *venda à descoberto* ilimitado.

A primeira hipótese é coerente com as empresas capitalistas modernas em geral. A segunda hipótese é certamente falsa. Quando existem custos de transação, o preço de compra e de venda de um ativo é diferente (*bid-ask spread*). Neste caso, ao invés de trabalharmos com um “preço de equilíbrio” devemos trabalhar com um “intervalo de preços de equilíbrio”, onde o intervalo é definido pelos custos de transação. Roll (1984)⁴ propõe um ajuste para esta diferença. Um argumento semelhante pode ser adotado para hipótese 4, porém é necessário um certo cuidado, pois um mercado de crédito imperfeito pode implicar em não linearidade na oferta e demanda.

⁴ . Glisten e Milgrom (1985) justificam o *spread* entre compra e venda a partir da assimetria de informações.

As hipóteses 4 e 5 não são muito realistas para o Brasil, devido ao tamanho do mercado e outras imperfeições, mas são necessárias para que ocorra a transmissão de informações para os preços. Sem estas duas hipóteses, um indivíduo que tivesse uma informação que indicasse a compra de um ativo só poderia fazê-lo se tivesse dinheiro para tal. A hipótese 4 permite que ele tome dinheiro emprestado no mercado para realizar a operação. Analogamente, se a informação indicasse a venda, ele só poderia efetivá-la se possuísse o título. Para compreender a hipótese 5, devemos definir:

- **Venda à descoberto** (“*short-sale*”): a venda de um ativo para entrega futura sem a posse do mesmo. O contrato pode ter qualquer prazo e, geralmente, é feito via corretoras. Para encerrar sua posição, o vendedor deve comprar o título no final do contrato e entregá-lo ao comprador.

Portanto, a hipótese 5 permite que o detentor da informação privilegiada venda o ativo sem possuí-lo. Como já se disse, falta a hipótese de equilíbrio. A definição de eficiência foi feita em função do conjunto de informações ϕ . No entanto, não foi detalhado qual seria este conjunto. Assim, se tivermos um conjunto de informações $\phi_1 \subset \phi_2$, o mercado pode ser eficiente com relação a ϕ_1 e não ser com relação a ϕ_2 . Fama (1970)⁵ define três níveis de eficiência: fraca, forte e semi-forte. Cada nível está relacionado com a transmissão de informação via preços, correspondendo a um tipo de equilíbrio:

- **Eficiência Fraca**: os preços refletem todas as informações contidas na série histórica de preços. Logo, um investidor não pode realizar lucro econômico com base na análise da série de preços, ou seja, o que ficou conhecido como análise

técnica não teria sentido. Esta hipótese é também conhecida como Hipótese de Passeio Aleatório (vide capítulo 3);

- **Eficiência Semi-Forte:** esta hipótese sustenta que os preços refletem não apenas o que está implícito na série histórica como também todas as informações públicas disponíveis (balanços, investimentos, política de dividendos anunciada, etc.). Neste caso, a análise de balanços e resultados (análise fundamentalista) não permitiria a efetivação de lucro econômico;
- **Eficiência Forte:** todas as informações públicas e privilegiadas refletem-se no preço do ativo. Se o mercado for eficiente no sentido forte, um detentor de informação privilegiada (*insider*) não poderia realizar lucros anormais no mercado.

Neste capítulo, os modelos apresentados partem da hipótese de informação perfeita. No capítulo seguinte inclui-se agentes com informações privilegiadas. Na presença de assimetria de informações, os preços podem não refletir todas as informações disponíveis e o mercado pode funcionar fora do equilíbrio. Mesmo que o equilíbrio de longo prazo seja alcançável, a dinâmica de ajustamento pode se alterar.

Um outro conceito fundamental para entender algumas conclusões deste capítulo é *arbitragem sem risco* (de agora em diante, apenas *arbitragem*). A hipótese de que não é possível realizar lucro a partir de uma arbitragem sem risco é também uma hipótese de equilíbrio.

- **Possibilidade de arbitragem:** estratégia de negociação que garante um retorno positivo sem a possibilidade de retorno negativo e sem nenhum investimento líquido.

⁵ Malkiel (1989) coloca que H. Roberts teria feito esta categorização em 1967 num manuscrito da Universidade de Chicago: "Statistical versus clinical prediction of the Stock Market". Não tive acesso

Um exemplo simples seria tomar emprestado a uma taxa e aplicar o dinheiro a uma taxa superior. A existência de uma possibilidade de arbitragem é inconsistente com utilidade crescente em quantidade. A (hipótese de) ausência de arbitragem é equivalente à hipótese de lucro econômico zero na teoria da firma. Um exemplo numérico pode esclarecer melhor este conceito. Digamos que o ouro no Brasil esteja cotado a R\$10,00/g e que o dólar esteja R\$ 1,00. Se o ouro na C.M.X.⁶ estiver US\$ 9.80/g,⁷ na ausência de custos de transação, pode-se fazer um lucro sem risco de US\$ 0,20/g comprando o ouro na C.M.X. e vendendo-o no Brasil.

A não possibilidade de arbitragem é defendida com o seguinte argumento: numa situação como a descrita acima, os agentes vão aumentar a demanda por ouro nos EUA, aumentar a oferta de ouro no Brasil e aumentar a demanda por dólares no Brasil (para poder comprar ouro na C.M.X.). Estes três movimentos têm como efeito aumentar o preço do ouro nos EUA, diminuí-lo no Brasil e desvalorizar a moeda brasileira. Como todas estas operações são feitas no mercado paralelo, o ouro torna-se um bom instrumento de controle do mercado paralelo de dólar, especialmente porque o mercado americano não sofre muito impacto devido ao seu tamanho. Assim, um aumento no preço do ouro no Brasil gera uma elevação quase que automática no preço do dólar paralelo (e vice-versa).

Note que o argumento de não possibilidade de arbitragem pressupõe informação completa para o preço do ouro no Brasil e em N.Y. e também para o preço do dólar. Dito em outras palavras, supõe que todos os participantes do

ao texto.

⁶. Comodity Exchange, New York.

⁷. Na realidade, o ouro na C.M.X. é negociado em "onça-troys".

mercado sabem estes preços e têm acesso a estes mercados⁸. Se houvesse apenas um agente, pequeno, que tivesse acesso a estas informações, provavelmente ele poderia fazer um lucro neste mercado, sem alterar os preços das mercadorias. A ausência de arbitragem é equivalente à hipótese de eficiência forte. Um resultado importante (Dybvig e Ross [1985]) é que uma regra de preços linear (positiva) consistente é condição necessária e suficiente para ausência de arbitragem.

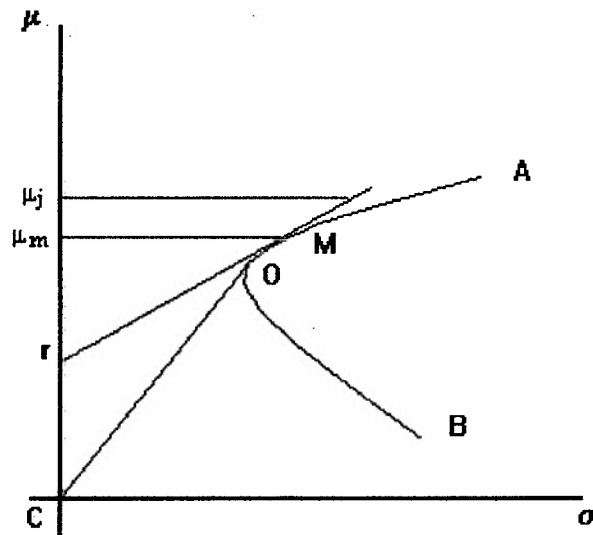
1.2 A Análise Média-Variância e o Modelo CAPM

O modelo de precificação desenvolvido por Sharpe, Lintner e Mossin (CAPM) é provavelmente um dos modelos mais populares de precificação de ativos. Apesar de existirem evidências de imperfeições no modelo, o estudo das suas “anomalias” foi responsável pelas descobertas empíricas mais relevantes das duas últimas décadas.

A hipótese que a incerteza sobre retornos futuros poderia ser descrita em termos de uma distribuição de probabilidades já aparece em Fisher (1906). No entanto, a teoria moderna de “carteira” começa com Markowitz (1952) que assume explicitamente que as preferências do investidor poderiam ser definidas em cima do valor esperado e da variância do retorno agregado de uma carteira, relacionando estes parâmetros com a composição da carteira e com a distribuição conjunta dos ativos que a compõe. Pela primeira vez, a análise marginalista foi utilizada para escolha da carteira ótima. A hipótese básica é que o investidor sempre deve preferir maior retorno para uma dada variância e menor variância para um dado retorno.

⁸. Na realidade, basta supor que os grandes agentes possuem estas informações.

Figura 1.1: O modelo CAPM



No diagrama acima, plotou-se o retorno médio (μ) contra o desvio padrão (σ).

A curva AMOB corresponde ao conjunto de carteiras que oferecem o menor desvio padrão para um dado retorno. A parte ascendente da curva (a partir de O) é chamada de fronteira eficiente⁹. O ponto C representa moeda (retorno e desvio padrão zero). Combinando moeda com a carteira O , os investidores são capazes de obter qualquer combinação de retorno e desvio padrão no segmento CO . O teorema da separação (Tobin [1958]) diz que a decisão da composição da carteira pode ser separada entre a escolha da carteira de mercado (O) e a decisão da quantidade de moeda.

O CAPM, a grosso modo, é uma aplicação do teorema da separação de Tobin. A hipótese de Sharpe (1964) e Lintner (1965) foi que existiria uma taxa livre de risco (r) à qual todos os agentes podem emprestar ou tomar emprestado. A principal conclusão do modelo é que, em equilíbrio, todos os investidores detêm a mesmo “carteira” de ativos de risco (M na figura). Logo, M deve ser a carteira de mercado

⁹. Dividindo AMOB em dois ramos (acima e abaixo de O), podemos sempre encontrar uma carteira acima de O com maior retorno para o mesmo desvio padrão do que no ramo abaixo de O .

para todos os ativos de risco. Para compreender a intuição dos autores, note que o investidor pode obter qualquer combinação (μ, σ) no segmento rM, combinando o ativo sem risco com a carteira M. Ora, esta reta está acima das carteiras possíveis representados pelo *locus* AMOB, quer dizer, uma combinação nesta reta sempre vai gerar maiores retornos para um dado desvio.

A consequência mais geral do CAPM é que o preço de equilíbrio implica numa eficiência média-variância no sentido de Markowitz (1952). Dada a eficiência de mercado, o estimador β (a covariância entre o retorno do título e o retorno do mercado dividida pela variância do retorno do mercado) é estatística suficiente para descrever o comportamento das taxas de retorno dos ativos financeiros. Mais especificamente, o retorno esperado de um ativo acima do retorno sem risco deve ser proporcional à covariância do retorno do título com o retorno da carteira de mercado. Com utilidade quadrática ou distribuição normal, pode-se demonstrar que a diferença entre o retorno do j-ésimo ativo arriscado e do ativo sem risco será dada por:

$$\mu_j - r = \beta_j(\mu_M - r) \quad (1.1)$$

O modelo de “carteira” de Markowitz, apesar de apresentar os conceitos mais importantes do CAPM, não teve tanto impacto na prática devido às suas estatísticas relativamente complicadas. O CAPM trouxe uma medida de risco muito eficiente. Antes dele, os profissionais de mercado tinham apenas uma idéia vaga a respeito de risco e diversificação. Mesmo com as evidências contrárias ao modelo, o mercado financeiro continua pensando risco em termos do índice β . Uma das principais críticas ao modelo está no artigo de Roll (1977). O autor argumenta que a carteira de mercado M nunca poderia ser encontrada empiricamente, portanto não seria possível calcular o índice β . Um outro ponto importante é que, enquanto uma teoria completa

de precificação de ativos trata a taxa de juros livre de risco como endógena, o CAPM não adiciona nada à teoria de determinação da taxa de juros.

Formalizando o que se disse até agora: Considere que cada investidor i ($i=1,\dots,m$) recebe uma fração z_{ij}^0 de cada ativo j ($j=1,\dots,n$). Considerando as hipóteses de eficiência de mercado e que os ativos não pagam dividendos, dada a taxa de juros livre de risco r , define-se:

- P_{j0} : valor inicial do ativo j
 P_{j1} : valor final do ativo j
 w_{jk} : covariância entre o valor final de j e k
 W_i, S_i^2 : valor esperado e variância da riqueza final do investidor
 $V_i(W_i, S_i^2)$: utilidade do investidor i com:
 $V_{i1} \equiv \partial V_i / \partial W_i > 0, V_{i2} \equiv \partial V_i / \partial S_i^2 < 0$

O problema do investidor é maximizar a sua utilidade. Ele pode decidir como realocar sua “carteira” inicial $z_i^0 \equiv (z_{i1}^0, z_{i2}^0, \dots, z_{in}^0)$ o que pode ser escrito como:

$$\max_{z_{ij}} V_i(W_i, S_i^2) \quad (1.2)$$

sujeito a:

$$W_i = \sum_{j=1}^n z_{ij} P_{j1} - (1+r) \sum_{j=1}^n (z_{ij} - z_{ij}^0) P_{j0} \quad (1.3)$$

$$S_i^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n z_{ij} z_{ik} w_{jk} \quad (1.4)$$

A restrição (1.3) indica que o valor da riqueza de i no final do período será a soma do valor do sua “carteira” menos (mais) o que i tomou emprestado (emprestou) à taxa r . A restrição (1.4) simplesmente pondera a variância do ativo pela sua porcentagem na carteira de i . As condições de primeira ordem para o investidor i e a primeira variável, z_{i1} , serão:

$$\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial z_{i1}} = \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial W_i} \frac{\partial W_i}{\partial z_{i1}} + \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial S_i^2} \frac{\partial S_i^2}{\partial z_{i1}} = 0 \quad (1.5)$$

Mas, de (1.3):

$$W_i = (z_{i1}P_{11} + \dots + z_{in}P_{n1}) - (1+r)(z_{i1}P_{10} - z_{i1}^0P_{10} + \dots + z_{in}P_{n0} - z_{in}^0P_{n0})$$

Portanto:

$$\frac{\partial W_i}{\partial z_{i1}} = P_{11} - (1+r)P_{10} \quad (1.6)$$

e de (1.4):

$$\begin{aligned} S_i^2 &= (z_{i1}z_{i1}w_{11} + \dots + z_{i1}z_{in}w_{1n}) + (z_{i2}z_{i1}w_{21} + \dots + z_{i2}z_{in}w_{2n}) + \\ &\quad + \dots + (z_{in}z_{i1}w_{n1} + \dots + z_{in}z_{in}w_{nn}) \\ &= z_{i1}^2w_{11} + z_{i1}(z_{i2}w_{12} + \dots + z_{in}w_{1n}) + z_{i2}z_{i1}w_{21} + z_{i2}(z_{i2}w_{22} + \dots + z_{in}w_{2n}) + \\ &\quad + \dots + z_{in}z_{i1}w_{n1} + z_{in}(z_{i2}w_{n2} + \dots + z_{in}w_{nn}) \end{aligned}$$

como $w_{ij} = w_{ji}$, teremos:

$$\begin{aligned} S_i^2 &= z_{i1}^2w_{11} + z_{i1}(2z_{i2}w_{12} + \dots + 2z_{in}w_{1n}) + z_{i2}(z_{i2}w_{22} + \dots + z_{in}w_{2n}) + \\ &\quad + \dots + z_{in}z_{i1}w_{n1} + z_{in}(z_{i2}w_{n2} + \dots + z_{in}w_{nn}) \end{aligned}$$

logo:

$$\frac{\partial S_i^2}{\partial z_{i1}} = 2z_{i1}w_{11} + 2(z_{i2}w_{12} + \dots + z_{in}w_{1n}) = 2 \sum_{k=1}^n z_{ik}w_{1k} \quad (1.7)$$

substituindo (1.6) e (1.7) em (1.5) teremos:

$$V_{i1}(P_{11} - (1+r)P_{10}) + 2V_{i2} \sum_{k=1}^n z_{ik}w_{1k} = 0 \quad (1.8)$$

Se a igualdade (1.8) vale para o primeiro ativo, deve valer para qualquer ativo j ($j=1, \dots, n$). Assim, existem n equações como (1.8). Chamando $\mathbf{P}_0 \equiv (P_{10}, \dots, P_{n0})$ o vetor de preços iniciais, $\mathbf{P}_1 \equiv (P_{11}, \dots, P_{n1})$ o vetor de preços finais, $\mathbf{z}_i \equiv (z_{i1}, \dots, z_{in})$ a carteira do investidor i (onde o negrito foi utilizado para destacar que se trata de um vetor) e Ω^* a matriz de variância covariância $\{w_{jk}\}$ as n equações do tipo (1.8) podem ser escritas:

$$\begin{aligned} V_{i1}(\mathbf{P}_1 - (1+r)\mathbf{P}_0) + 2V_{i2}\mathbf{z}_i\Omega^* &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{z}_i &= (V_{i1}/2V_{i2})\Omega^{*-1}(\mathbf{P}_1 - (1+r)\mathbf{P}_0) \end{aligned} \quad (1.9)$$

A equação (1.9) representa o teorema da separação de Tobin, onde a demanda por ativos de risco difere apenas por um múltiplo escalar. Esta formulação corresponde à de Lintner (1965). Entretanto, o CAPM geralmente é formulado em termos de taxa de retorno. Definindo $x_{ij} \equiv z_{ij} P_{j0}$, a quantidade investida no ativo j , $\mu_j \equiv (P_{j1}/P_{j0}) - 1$, a taxa de retorno do ativo j e $\sigma_{jk} \equiv w_{jk}/(P_{j0} P_{k0})$ a covariância entre a taxa de retorno j e a taxa de retorno k , segue que as restrições (1.3) e (1.4) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} W_i &= \sum_{j=1}^n (x_{ij}/P_{j0}) P_{j1} - (1+r) \sum_{j=0}^n x_{ij} - x_{ij}^0 = \sum_{j=1}^n x_{ij} (\mu_j + 1) - (1+r) \sum_{j=0}^n x_{ij} - x_{ij}^0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial W_i}{\partial x_{ij}} = (\mu_j + 1) - (1+r) = \mu_j - r \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$S_i^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{x_{ij}}{P_{j0}} \frac{x_{ik}}{P_{k0}} w_{jk} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ij} x_{ik} \sigma_{jk} \quad (1.11)$$

Como fica claro, (1.11) é igual (1.4) substituindo z por x e w por σ . Assim, a derivada dará o mesmo resultado que em (1.7). Logo, a condição de primeira ordem modificada implica que:

$$x_i = (V_{i1}/2V_{i2}) \Omega^{-1} (\mu - r \mathbf{1}_n) \quad (1.12)$$

Onde Ω é a matriz de variância-covariância para a taxa de retorno, μ o vetor de retornos μ_j ($j=1, \dots, n$) e $\mathbf{1}_n$ é um vetor de n unidades. A equação (1.12) é uma outra maneira de escrever o teorema da separação de Tobin. O parâmetro $(V_{i1}/2V_{i2})$ é o inverso do coeficiente de aversão ao risco, como fica claro em (1.13) abaixo. A carteira $\Omega^{-1}(\mu - r \mathbf{1}_n)$ corresponde ao ponto de tangência M na figura 1.1. Esta carteira pode ser dividida em duas: $\Omega^{-1}\mu$ e $\Omega^{-1}r \mathbf{1}_n$. A primeira é a solução para o problema de encontrar uma variância mínima para um dado retorno e a segunda solução para o problema de minimização global da variância. Como demonstra Merton (1972), todo

o *locus* AMOB(Figura 1.1) pode ser construído a partir destas duas carteiras. Somando sobre i ($i=1,\dots,m$) dos dois lados da equação (1.12)¹⁰ e considerando a matriz de variância-covariância não singular (ou seja, inversível) podemos escrever:

$$\mu - r1 = \theta_m V_m \Omega v_m \quad (1.13)$$

Onde θ_m é o coeficiente de aversão ao risco do mercado ($\theta_m \equiv \sum_i 2V_{i2}/V_{i1}$), V_m é o valor de mercado agregado para todos os ativos da carteira de mercado e v_m o vetor de proporções do mercado¹¹. Supondo erros gaussianos, o coeficiente de aversão ao risco pode ser eliminado pré multiplicando (1.13) por v_m e resolvendo para:

$$\theta_m = (\mu_m - r) / \sigma_m^2 \quad (1.14)$$

onde μ_m e σ_m^2 denotam o retorno esperado e a variância da carteira de mercado. Como se enfatizou, esta carteira não pode ser encontrada. Na prática utiliza-se uma carteira representativa, por exemplo o Ibovespa. O j -ésimo elemento de μ , em (1.13), é proporcional à σ_{jm} com σ_{jm} o elemento jm da matriz Ω (ou seja, a covariância entre a carteira j e a carteira m). Assim, substituindo (1.14) em (1.13) temos que:

$$\mu_j - r = \beta_j (\mu_m - r) \quad (1.15)$$

onde $\beta_j \equiv \sigma_{jm}/\sigma_m^2$ é resultado da regressão por mínimos quadrados do retorno carteira de mercado contra a carteira j . É fácil verificar a partir da figura 1.1, por semelhança de triângulos, que $\mu_j - r$ é proporcional a $\mu_m - r$. Uma maneira de testar o CAPM consiste em estimar a seguinte equação:

$$\mu_j = \alpha_j + \beta_j \mu_m + \varepsilon_j \quad (1.16)$$

Com $\varepsilon_j \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma_j^2)$. Assim, um teste comum nos artigos da década de 70 era encontrar “coeficientes beta” em (1.15) e testar a hipótese $\alpha_j = (1 - \beta_j)r$. Esta

¹⁰ Isto implica considerar que existe um agente representativo comportando-se como a média do mercado. Note em (1.14) que se utiliza parâmetros de uma amostra, no caso a carteira de mercado. Um outro tratamento à agregação será dado no capítulo 2.

¹¹ Lembre-se que, por definição, a carteira de mercado é aquela que minimiza risco.

restrição e a existência de um prêmio ao risco positivo na carteira de mercado eram as grandes previsões empíricas do CAPM. As questões empíricas implícitas nos modelos apresentados serão rediscutidas no terceiro capítulo.

1.3 O modelo *Black-Scholes*

Apesar de representar um passo muito importante, os modelos dos anos 60 apresentavam certas limitações. Em especial, destaca-se a impossibilidade de determinar a carteira de mercado, as restrições sobre a função de utilidade e a suposição de agentes representativos uniformes. Uma série de esforços foram feitos na década de 70 para melhorá-los. Os exemplos de maior destaque na literatura são os resultados de Merton (1973a) com o ICAPM (CAPM Intertemporal), Ross (1976) com o seu modelo de arbitragem (APT) e Black e Scholes (1973).

Talvez o único modelo capaz de competir em popularidade com o CAPM seja o de Black e Scholes (de agora em diante B&S). Além da elegância, os autores deram um tratamento muito cuidadoso ao fato dos preços seguirem processos estocásticos. Uma grande vantagem sobre o CAPM é que não é necessário assumir uma função de utilidade específica para os agentes¹². É importante destacar que tanto o APT de Ross como o ICAPM de Merton¹³ são consistentes com o resultado de B&S.

O artigo clássico de Black e Scholes apresentava uma fórmula para a precificação de opções¹⁴. Opções são negociadas há muito tempo na história. No

¹² Na realidade, isto não significa que o modelo tenha hipóteses fracas.

¹³ O ICAPM se aproxima de B&S por se tratar de um modelo de difusão. Merton (1973b) chega no mesmo resultado que B&S.

¹⁴ Apesar dos autores resolverem apenas o caso de opções, a equação fundamental de B&S permite calcular o preço de qualquer ativo derivado, mudando apenas as condições iniciais e de contorno. As ações de uma empresa, por exemplo, podem ser consideradas como um derivativo dos ativos fixos da mesma.

entanto, justamente no ano do lançamento do artigo, 1973, a bolsa de Chicago fundou a primeira bolsa de opções: *The Chicago Board Options Exchange*, um mercado centralizado para negociação de opções de compra das principais ações negociadas naquele momento. Uma opção de compra (venda) dá a seu titular o direito de comprar (vender) um título por um determinado valor numa data determinada (data de exercício)¹⁵. Opções são um exemplo de ativo derivado.

Para compreender o modelo de B&S, apresenta-se inicialmente o modelo binomial. Suponha que uma ação siga uma distribuição binomial: num pequeno intervalo de tempo Δt , o preço da ação S pode subir para S_s ($s > 1$) com probabilidade p , ou cair para S_i ($i < 1$) com probabilidade $1-p$. Considere a existência de uma *opção de compra*¹⁶ de valor f com preço de exercício igual a S^{17} e $T - t_0 = \Delta t$. Montando-se uma carteira composta pela venda de uma unidade da opção de compra e de α unidades da ação, o valor desta carteira em T será:

$$\begin{cases} \alpha S_s - S(s-1) & \text{probabilidade: } p \\ \alpha S_i & \text{probabilidade: } 1-p \end{cases}$$

Isto porque no caso do preço da ação subir para S_s , o valor da opção será $S_s - S$, ou seja, o valor da ação menos o preço de exercício. Por outro lado, se o preço da ação cair para S_i , a opção de compra não terá valor e o valor da carteira é idêntico ao valor da proporção de ações que o investidor detém. Pode-se encontrar um α que

¹⁵. Refere-se a opções 'europeias'. Uma opção 'americana' pode ser exercida em qualquer data até a data de exercício.

¹⁶. Uma opção de compra é um ativo derivado que dá ao comprador o direito (mas não a obrigação) de comprar o ativo (do qual ele se derivou) por um certo preço de exercício (Se) em uma certa data futura (T).

¹⁷. Este preço de exercício não precisa ser obrigatoriamente igual ao preço da ação. Sem perda de generalidade, pode-se considerar $e = 1$, onde o preço de exercício é dado por Se , com e assumindo qualquer valor acima de zero.

garanta um valor constante da nossa carteira independente do estado da natureza.

Para isto, basta igualar o valor da nossa carteira em qualquer estado da natureza:

$$\alpha S_i = \alpha S_s - S(s-1) \Leftrightarrow \alpha S(s-i) = S(s-1) \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{s-1}{s-i}}$$

Assim, escolhendo α apropriado, pode-se eliminar o termo aleatório (p), montando uma carteira sem risco, sabendo as duas possibilidades de variação da ação, (dada pelos parâmetros i e s). Considerando-se a possibilidade da ação assumir infinitos valores¹⁸ (em outras palavras, existem infinitos Estados da Natureza) porém respondendo a uma determinada distribuição de probabilidades, é possível montar uma carteira sem risco composta da venda de uma unidade da opção e compra de α ações. Antes de deduzir o modelo propriamente, vamos fazer uma revisão das hipóteses básicas do modelo de B&S (Hull [1990]):

1. O preço da ação segue um processo de Ito com μ e σ constantes.
2. Não existem limitações para vendas à descoberto.
3. Não existem custos de transação e todos os ativos são perfeitamente divisíveis.
4. Não existem dividendos durante a existência do ativo derivado¹⁹.
5. Não existem oportunidades de arbitragem.
6. A negociação dos ativos é contínua.
7. A taxa de juros livre de risco é constante e igual para qualquer data de vencimento.

Além disto, as taxas ativas e passivas são também iguais.²⁰

¹⁸ Pode-se demonstrar que o modelo binomial para o comportamento de preços da ação equivale ao movimento browniano geométrico ao repetir-se o processo indefinidamente e para Δt tendendo a zero.

¹⁹ Se o ativo derivado possui um mecanismo de compensação dos dividendos, como no Brasil, já é suficiente.

²⁰ Na realidade, basta supor que as taxas de juros ativas e passivas são iguais para alguns grandes agentes.

Uma variação de preços segue um *Processo de Ito*²¹, como na hipótese 1 acima se ela é dada por:

$$dS = \mu S dt + \sigma S W(t) \quad (1.17)$$

Onde dS é a variação no preço da ação num pequeno intervalo de tempo dt . O parâmetro μ é o retorno esperado da ação por unidade de tempo enquanto σ é a volatilidade (os desvios do retorno esperado) da ação e $W(t)$ um processo de Wiener. Estes parâmetros são considerados constantes no tempo²². Um processo de Wiener é um caso particular de um processo estocástico de Markov. No apêndice A este processo será discutido com mais detalhes.

Um exemplo pode ajudar a compreender melhor como funciona o movimento de variação das ações descrito em (1.17), partindo dos seguintes parâmetros:

$$S = \text{R\$}100,00$$

$$\mu = 1\% \text{ ao dia}^{23}$$

$$\sigma = 1\%$$

$$\Delta t = 1 \text{ dia}^{24}$$

E considerando uma versão discreta com $W(t) = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$ ²⁵, $\varepsilon \sim \text{i.i.d.}, N(0,1)$. Da maneira como foi definido, ε terá média 0, porém seu valor pode ser qualquer valor real entre $\pm\infty$. Isto significa que, na média, o preço da ação varia em 1% ao dia. Porém, o que ocorre com o termo estocástico? Se $\varepsilon = -1$ naquele dia, o preço da ação no final do dia será R\$100,00, ou seja, $\Delta S = 0$. Assim, a ação pode cair ou subir de preço no dia, de acordo com termo estocástico. Como o número é retirado de uma *distribuição normal padronizada*, a probabilidade de ε estar no intervalo $[-1,0;-0,5]$ é

²¹. A esse respeito veja Cox e Miller (1965)

²². Se μ e σ forem funções conhecidas de t e S , a formulação de B&S continua válida.

²³. Na realidade, um dia seria um tempo muito longo, já que pretende-se trabalhar com o tempo contínuo. Utiliza-se este período por questões didáticas.

²⁴ Substituindo dt por Δt , já que num exemplo deste tipo não podemos trabalhar com infinitésimos

menor do que a probabilidade associada ao intervalo $[-0,5;1,0]$ e é igual à associada ao intervalo $[0,5;1,0]$ ²⁶

Por que se considera este tipo de “movimento” e não um outro? Para esclarecer melhor este ponto, considere (por absurdo) que a variação de preços segue um outro tipo de movimento, digamos,

$$\Delta S = \mu \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (1.17')$$

Supondo que uma empresa possui duas ações diferentes, porém com os mesmos benefícios²⁷. O primeiro tipo de ações (tipo A) está sendo negociada a R\$50,00 enquanto as do tipo B estão sendo negociadas a R\$100,00. Se o processo for do tipo (1.17') e $\mu = 1$ por dia, no final do dia, a ação do tipo A deve valer R\$51,00 enquanto a do tipo B deve valer R\$101,00. Ou seja, seria muito mais vantajoso comprar, no início do dia, 2 ações do tipo A ao invés de uma do tipo B. Assim, ninguém compraria ações do tipo B, o que é uma inconsistência. O mesmo tipo de argumento justifica a inclusão do termo S no segundo argumento do lado direito da equação (1.17). Em outras palavras, o termo S colocado nos dois argumentos da equação (1.17) garante uma variação percentual para o preço da ação e não uma variação absoluta.

Assim sendo, apesar de ser arbitrário o tipo de movimento seguido pelo preço da ação, pode-se notar que é coerente com o observado na prática. Isto já havia sido verificado muito antes do trabalho de B&S²⁸. O grande trunfo do modelo é colocar

²⁵ No apêndice A ficará mais claro porque substituímos $W(t)$ por $\varepsilon\sqrt{\Delta t}$.

²⁶ Uma série de autores questionaram a distribuição de probabilidades associada ao evento. Veja, por exemplo, Jarrow e Rudd (1982).

²⁷ Para quem está habituado com a nomenclatura brasileira, compara-se, por exemplo, uma ação PNA com uma PNB. Ambas são *Preferenciais Nominativas*, porém, por algum motivo, são de tipos diferentes.

²⁸ Bachelier (1900).

este fato dentro de um modelo de precificação de ativos. A idéia de Black e Scholes foi montar uma carteira constituída de: venda de uma unidade do ativo derivado e a compra de df/dS ações. O valor desta carteira em qualquer instante de tempo será:

$$\pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (1.18)$$

A variação $d\pi$ do valor da carteira no tempo pode ser encontrada diferenciando totalmente (1.18):

$$d\pi = -df + \frac{\partial f}{\partial S} dS \quad (1.19)$$

Se os preços do título S seguem um *processo de Ito*, podemos utilizar (B.6) (apêndice B) para encontrar df :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma SW(t) \quad (1.20)$$

assim, substituindo (1.17) e (1.20) em (1.19) tem-se:

$$d\pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt \quad (1.21)$$

Assim, eliminou-se o termo estocástico $W(t)$ da nossa carteira. Ora, se a nossa carteira não possui termos aleatórios, isto significa que ela é uma carteira sem risco. Note que a carteira não depende nem mesmo do retorno esperado da ação. Tem-se então as bases para derivar o seguinte lema:

Lema 1.1 Se as hipóteses 3,5 e 7 são válidas, tem-se que $d\pi = \pi r dt$.

Demonstração: Digamos que isto não ocorresse, que a variação percentual do valor da nossa carteira fosse maior que a taxa de juros (ou seja, $d\pi/\pi > r dt$). Neste caso, uma pessoa poderia tomar emprestado um valor equivalente ao valor da carteira a uma taxa r e com este dinheiro comprar a carteira π . Depois de decorrido um período de tempo dt , restituiria o valor emprestado acrescido dos juros do período.

Porém, a sua carteira se valorizou mais do que o que ele deve ao banco. Isto contradiz a hipótese 5. O mesmo raciocínio pode ser aplicado no caso inverso

$$(d\pi/\pi < \pi r dt).$$

Substituindo as equações (1.18) e (1.21) no lema 1.1, tem-se que:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (1.22)$$

A equação diferencial de B&S indicada em (1.22) é a equação que deve ser satisfeita por um ativo derivado. Com ela pode-se encontrar o valor de qualquer ativo derivado, desde que as 7 hipóteses colocadas acima sejam satisfeitas. Um ativo derivado é um ativo financeiro cujo valor depende do valor de um outro ativo (do qual ele derivou). Os exemplos mais comuns são *opções de compra e de venda*, *futuros*, *swaps*, etc. Entretanto, a própria ação de uma empresa pode ser considerada como um ativo derivado do valor dos ativos fixos da empresa (ou seja, da sua capacidade de gerar fluxo de caixa), graças à responsabilidade limitada. Assim, o modelo serve também para avaliar ações.

As hipóteses do modelo foram relaxadas por uma série de autores. Cox e Ross (1976) mudaram a primeira hipótese, alterando o processo estocástico da ação. Hull e White (1987) relaxaram a mesma hipótese, permitindo que a volatilidade fosse uma variável estocástica, e assim por diante. O importante é que as conclusões mostraram que não existe um efeito significativo no preço dos ativos com estas alterações. Na realidade, a hipótese mais forte do modelo é aquela que garante o equilíbrio de mercado (hipótese 5). Os próximos capítulos estão preocupados justamente com esta hipótese. A partir de agora, vai-se verificar o que acontece quando se abandona a hipótese de informação perfeita implícita na hipótese 5.

Uma extensão importante do modelo é analisá-lo em equilíbrio geral. Como deve ter ficado claro, toda a análise foi realizada em equilíbrio parcial. Uma das abordagens mais elegantes pode ser encontrada em Cox, Ingersoll e Ross (1985). Partindo do ICAPM de Merton (1973) e de Lucas (1978), os autores desenvolvem um modelo de equilíbrio geral para examinar o comportamento dos preços de ativos, obtendo uma equação diferencial que deve ser satisfeita (simultaneamente) pelos ativos financeiros. A solução desta equação gera o preço de equilíbrio de qualquer ativo em função de variáveis reais da economia como tecnologia de produção, número de indivíduos, preferências, etc. No modelo B&S, assim como no CAPM, a taxa de juros é dada exogenamente. Em equilíbrio geral, a taxa de juros é simplesmente mais um ativo que pode ter seu preço definido simultaneamente ao preço de outros ativos. Os modelos de equilíbrio geral para a precificação de ativos não tiveram muito sucesso na prática. Um dos problemas é a dificuldade de se utilizar um modelo muito complexo.

Uma das forças de retórica de B&S foi que ele chegou a resultados fortes, partindo de hipóteses aparentemente fracas. No modelo, existem dois ativos e incontáveis estados da natureza e, como a incerteza é eliminada, os mercados são completos. Ora, para se ter um mercado completo é necessário um certo número de ativos e o modelo supõe que todos estes ativos existem. O modelo também foi muito criticado por considerar o preço do ativo (S) como exógeno. Além do mais, não se discute o quanto e em que sentido o resultado é robusto, o que é muito bem discutido em Kreps (1982).

Apêndice A: Processos de Wiener

Este apêndice apresenta o processo de Wiener utilizado na formulação de B&S e que também será usado na análise empírica. A exposição segue Hamilton (1994), mas encontra-se em qualquer livro de cálculo estocástico. Um processo de Wiener pode ser compreendido como uma versão contínua de um passeio aleatório. Considere o seguinte passeio aleatório:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (\text{A.1})$$

$\varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } N(0,1)$. Se o processo começa em $y_0 = 0$ a partir de A1 tem-se que:

$$y_t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t \Rightarrow y_t \sim N(0, t)$$

e
$$y_s - y_t = \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \dots + \varepsilon_s \Rightarrow y_s - y_t \sim N(0, s - t)$$

Note que $y_s - y_t$ é independente das variações entre as datas q e r para qualquer data $t < s < r < q$. Considere a diferença $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ que por definição é $\sim N(0,1)$.

Suponha que ε_t pudesse ser dividido de tal maneira que:

$$\varepsilon_t = e_{1t} + e_{2t}$$

Com e_{1t} e e_{2t} escolhidos de tal maneira que:

$$y_{t-(1/2)} - y_{t-1} = e_{1t}$$

$$y_t - y_{t-(1/2)} = e_{2t}$$

O processo descrito em (A.1) não se alterou em nada, quer dizer:

$$y_t - y_{t-1} = e_{1t} + e_{2t} \sim N(0,1)$$

Por um raciocínio análogo, poderíamos particionar ε_t em N sub-períodos de tal maneira que:

$$y_t - y_{t-1} = e_{1t} + e_{2t} + \dots + e_{Nt}$$

Com $e_{it} \sim \text{i.i.d. } N(0, 1/N)$. Um processo de Wiener, também chamado de Movimento Browniano, pode ser encontrado para o limite com $N \rightarrow \infty$ no processo acima. Quando N vai para o infinito, obtem-se um processo contínuo no tempo, cujo

valor na data t é $W(t)$. Um processo contínuo no tempo é uma variável aleatória que assume um valor para qualquer número real não negativo t . Note a diferença para um processo discreto que é definido apenas para t inteiro. É possível demonstrar que $W(\cdot)$ é uma função estocástica, contínua no tempo com probabilidade 1. Mais formalmente:

Definição: Um processo de Wiener $W(\cdot)$ é um processo estocástico contínuo no tempo, associando para cada data $t \in [0,1]$ com o escalar $W(t)$ tal que:

- (a) $W(0) = 0$;
- (b) Para qualquer data $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq 1$, as variações $[W(t_2) - W(t_1)]$, $[W(t_3) - W(t_2)]$, ..., $[W(t_k) - W(t_{k-1})]$ são variáveis gaussianas independentes com $[W(s) - W(t)] \sim N(0, s-t)$;
- (c) $W(t)$ é contínuo em t com probabilidade 1.

Na definição acima simplifica-se $W(\cdot)$ como uma função mapeando $t \in [0,1]$ em \mathbb{R} . Outros processos podem ser gerados a partir de um processo de Wiener. Por exemplo, o processo:

$$Z(t) = \sigma W(t)$$

se distribui normalmente $\sim N(0, \sigma^2 t)$. Este tipo de processo é descrito como movimento Browniano com variância σ^2 .

Apêndice B: O Lema de Ito

Neste apêndice, é apresentado o lema de Ito. Uma prova completa e rigorosa do lema está fora do escopo desta dissertação, porém optou-se por apresentar o lema como uma extensão natural do cálculo diferencial não estocástico. Considere uma função f dependente de apenas uma variável estocástica S e de outras variáveis determinísticas. Suponha que S siga um processo de Ito como em (1.17):

$$dS = a(S,t)dt + b(S,t)W(t) \quad (\text{B.1})$$

$$f = f[S,t] \quad (\text{B.2})$$

Com $W(t)$ o processo de Wiener descrito no apêndice A. Expandindo (B.2) em série de Taylor, obtém-se:

$$f = f_0 + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \Delta S^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial t} \Delta S \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Delta t^2 \quad (\text{B.3})$$

Note na expansão acima que, a partir do quarto termo do lado direito, todos os termos estão multiplicados por um componente de ordem maior que Δt . Considerando uma versão discreta para (B.1), omitindo os argumentos da função b , tem-se que:

$$\Delta S = a\Delta t + bW(t) \quad (\text{B.4})$$

Com $W(t)$ conforme exposto no apêndice. Pode-se demonstrar que $E[\Delta S^2] \rightarrow b^2 \Delta t$. Assim, ao tomar-se o limite com Δt tendendo a zero e desconsiderando termos de ordem superior a Δt , o desenvolvimento em série de Taylor pode ser escrito como:

$$f = f_0 + \frac{\partial f}{\partial S} (a\Delta t) + \frac{\partial f}{\partial S} (bW(t)) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} b^2 \Delta t \quad (\text{B.5})$$

Supondo que $\Delta t \rightarrow 0$, $f \rightarrow f_0$ (ou seja, $f - f_0 \rightarrow df$) pode-se rearranjar (B.5) obtendo:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} bW(t) \quad (\text{B.6})$$

Ito demonstra que f e S seguem o mesmo processo de Wiener, quer dizer, $W(t)$ em (B.6) é o mesmo de (B.1). (B.6) relaciona o diferencial de uma função de um termos estocástico com o próprio termo e variáveis determinísticas.

2. PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS COM ASSIMETRIA DE INFORMAÇÕES

No capítulo anterior foi feito um apanhado das principais teorias de precificação de ativos que predominaram até o final da década de 70. Estes modelos continuam úteis até hoje. No entanto, nenhum deles fornece um tratamento explícito à informação. Este capítulo explora justamente o tratamento da informação. Na primeira seção é apresentado um modelo simples, baseado em Akerloff (1970). A idéia é aproveitar o modelo para o mercado de automóveis usados e aplicá-lo ao mercado primário de ações. Quer dizer, assim como o vendedor de um carro usado sabe mais a respeito do seu carro do que o comprador, uma empresa que lança ações no mercado sabe mais a respeito da sua empresa do que os compradores potenciais. Este modelo traz uma boa intuição sobre um problema básico no mercado financeiro que é a *Seleção Adversa*.

Na seção 2 é desenvolvido um modelo de precificação para o mercado futuro baseado em Bray (1989), que coloca explicitamente a chegada de informação. Supõe-se uma função de utilidade específica para os agentes econômicos, com diferentes níveis de aversão ao risco. Nesta seção apresentam-se os agentes participantes deste mercado e discute-se seus objetivos. Na seção seguinte é apresentado o Equilíbrio de Expectativas Racionais (EER).

A seção 4 resolve o modelo, aplicando a definição de Expectativas Racionais. A técnica para resolver este tipo de modelo é inicialmente supor informação perfeita e

depois incluir agentes com informação privilegiada. O resultado com informação perfeita, chamado de *full communications equilibrium* por Radner (1979) e *artificial economy* por Grossman (1978), permite encontrar o resultado com informação imperfeita. No final da seção 5 discute-se a informação contida no preço dos futuros. A seção 6 coloca o problema de sinalização e discute o equilíbrio de expectativas racionais. Um aspecto muito interessante em teoria dos jogos é a existência de uma série de equilíbrios. Assim, deve-se discutir como se chega ao equilíbrio ao invés de partir de uma hipótese de equilíbrio dada *a priori*.

As seções 7 e 8 apresentam o último modelo do capítulo, o modelo de Kyle (1985). Trata-se de um modelo dinâmico, com a presença de agentes com informação privilegiada em operações sequenciais. A partir deste modelo, é examinado o conteúdo informacional dos preços de um ativo e as consequências sobre a liquidez do mercado.

2.1 Emissão Primária com Seleção Adversa

Suponha que você comprou um carro por R\$ 10.000,00 e assim que o tirou da loja mudou de opinião. Você pensou que estaria melhor com o carro, mas notou que ainda dirigia muito mal e, portanto, era melhor primeiro aprender a dirigir. Ou mesmo, você se irritou de tal maneira com o trânsito que imediatamente resolveu que seria mais útil vender o carro e andar de ônibus.

O valor de venda do seu carro recém comprado deveria ser R\$ 10.000,00 ou algum valor muito próximo a este. No entanto, o valor deste carro no mercado de carros usados será de, no máximo, (digamos) R\$ 8.000,00. Por que? O que ocorre?

neste mercado que não permite um preço justo para o mercado de automóveis usados?

O grande problema é que o comprador de um carro usado sabe menos sobre a sua qualidade do que o vendedor. Digamos que existam dois tipos de automóveis no mercado de segunda mão: os de boa e os de má qualidade. Se houvesse informação perfeita haveriam dois mercados, um para os automóveis de alta qualidade e outro para aqueles de baixa. No entanto, por tudo que já se disse a informação não é perfeita.

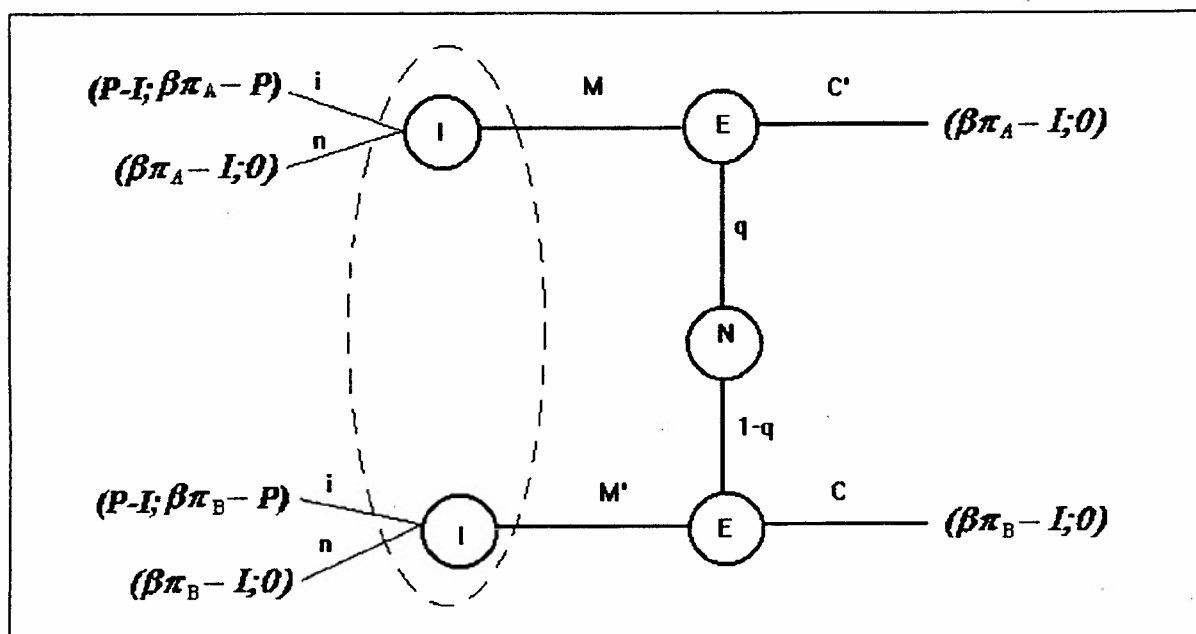
A idéia da seção é aplicar esta intuição de Akerloff para o mercado de carros usados e aplicá-lo para uma emissão primária de ações. Quando uma firma decide captar recursos no mercado de capitais, o vendedor (os administradores da firma) possui mais informações a respeito da mesma do que os compradores (bancos, investidores institucionais, corretoras, etc.). Para facilitar o raciocínio, supõe-se que a firma está captando recursos para um projeto específico. Para realizar este projeto, ela necessita realizar um investimento de valor I , que é gasto no primeiro período. Existem apenas dois tipos de projeto, um que gera um valor π_A no período seguinte (projeto tipo A) e outro que gera um valor π_B ²⁹ (projeto tipo B). É possível emprestar ou tomar emprestado à taxa de juros r (tanto para a empresa como para os investidores). Não existe oportunidade de arbitragem.

A estrutura do jogo é a seguinte: primeiro, a natureza define se o projeto é do tipo A (com probabilidade q) ou B. A empresa, sabendo a decisão da natureza, decide

²⁹ . Podemos interpretar π_i como o valor presente por ação de todos os fluxos futuros da firma.

se financia o projeto no (M)ercado ou (C)apta o dinheiro junto aos bancos³⁰, à taxa r . Se a empresa financia o projeto no mercado, os investidores, sem saber o tipo do projeto, decidem se (i)nvestem ou (n)ão na empresa. Se investirem, pagarão P agora para receber π_i ($i=A,B$) no período seguinte³¹. Caso não invistam, a empresa capta o dinheiro junto aos bancos. O retorno da empresa, a valor presente, será $P-I$, se conseguir captar os recursos no mercado e $\beta\pi_i - I$ ($i=A,B$) onde $\beta=1/(1+r)$ se captar os recursos em banco. O *payoff* do investidor será zero se não comprar a ação ou $\beta\pi_i - P$ ($i=A,B$), caso decida comprá-la. Os *payoffs* do jogo e a distribuição de probabilidades da natureza são conhecimento comum.

Figura 2.1: Seleção Adversa em Emissão Primária.



³⁰ . Na realidade pode-se dar uma outra alternativa para a empresa: não realizar o projeto. Como se exige que o projeto gere lucro econômico positivo, esta ação alternativa não será considerada.

³¹ . Supondo que a empresa distribui todos os lucros do projeto para estes investidores que imediatamente não têm mais nenhum vínculo com a mesma. Isto simplifica muito o problema. Uma alternativa mais realista seria supor que a empresa iria gerar um fluxo de caixa infinito, caindo num problema recursivo.

Teorema 2.1: Se $\beta\pi_A > \beta\pi_B \geq I$, existe um equilíbrio de Nash em estratégia simples em que os projetos do tipo A são financiados pelos bancos e os projetos do tipo B são financiados no mercado de ações a um preço $P = \beta\pi_B$.

Demonstração: Como os investidores não sabem o tipo da empresa, o preço máximo que aceitariam pagar seria $q(\pi_A - P) + (1-q)(\pi_B - P)$. Neste nível de preços, a empresa A realizaria um *payoff* maior captando o dinheiro junto aos bancos. Assim, as empresas com projetos do tipo A saem do mercado. Como os compradores sabem deste fato, eles antecipam que só haverão projetos do tipo B no mercado, pagando um preço máximo de $\beta\pi_B$. As empresas que desenvolvem projetos do tipo B devem captar no mercado ao preço máximo, caso contrário seria melhor captar dinheiro junto aos bancos.

Se não houvesse assimetria de informações, os compradores estariam dispostos a pagar um máximo de $\beta\pi_A$ por projetos de alto retorno e $\beta\pi_B$ por projetos de baixo retorno. A assimetria de informações “expulsa” os projetos mais lucrativos do mercado, ficando apenas os “*abacaxis*” no mercado. Este processo de “expulsão” dos bens de qualidade superior pelos de qualidade baixa ficou conhecido na literatura como *Seleção Adversa*. A *Seleção Adversa* ocorre quando produtos de qualidade variada são negociados e alguns agentes possuem informações privilegiadas sobre outros. O preço de mercado reflete a qualidade média dos bens negociados. Em outras palavras, os bens de alta qualidade subsidiam os de baixa. Na presença de *Seleção Adversa* pode não haver equilíbrio walrasiano e, em geral, quando ele existe é ineficiente.

Se a empresa com projetos do tipo A tivesse como sinalizar para os compradores o seu tipo, ela poderia colocar suas ações no mercado a um preço π_A . O grande problema é que não adianta a empresa simplesmente dizer: o meu projeto é do tipo A, pois tanto as empresas com projetos do tipo A como do tipo B diriam a mesma coisa. Em linguagem de teoria dos jogos, não adianta realizar um *cheap talk* (conversa barata). No entanto, se houvesse alguma maneira da empresa mandar algum sinal que garantisse ao comprador que o seu projeto é do tipo A, seria factível um equilíbrio em que A não sai do mercado. Por exemplo, uma auditoria confiável poderia dizer o tipo do projeto. Este equilíbrio só seria possível se o custo da auditoria não fosse maior do que o aumento de lucro ao captar o dinheiro no mercado e não via bancos. Da maneira como foi formulado o jogo, o custo da auditoria deveria se zero.

O problema de *Seleção Adversa* ocorre tanto nos mercados primários como nos mercados secundários. No mercado primário, um exemplo clássico é o de racionamento de crédito de Stiglitz e Weiss (1981), onde os detentores de projetos menos arriscados são expulsos pelos detentores de projetos mais arriscados.

A existência de agentes com informação privilegiada (*insiders*) faz com que o preço das ações seja mais baixo que num mercado perfeito, como no exemplo dos carros usados. Em outras palavras, a existência de agentes mais informados nos mercados primários e secundários aumenta o custo de capital da empresa. O problema da seleção adversa nos mercados primários e secundários é um dos principais argumentos para a proibição da operação de *insiders*. Esta proibição, no entanto, faz com que os mercados financeiros não sejam informativamente eficientes.

2.2 Os agentes do mercado e sua escolha sobre incerteza

Este modelo analisa o mercado a termo³². O contrato a termo é um dos ativos derivados mais simples disponíveis no mercado. Trata-se de um acordo para comprar ou vender um ativo em uma certa data futura (T) por um certo preço (F). Seu preço inicial é zero. Em T , compradores e vendedores pagam ou recebem a diferença entre F e S_T (o preço do ativo em T).

A função econômica deste tipo de mercado é o financiamento, repartição de risco e transmissão da informação. Como ocorre esta transmissão? Se alguém possui alguma informação sobre o mercado (que todos os outros operadores não possuem) deve utilizar esta informação para realizar lucros. Este processo acabará por transmitir ao preço do futuro a informação privilegiada, pois enquanto houver margem para lucro, o informado continuará a comprar ou vender os contratos futuros. Note que este tipo de argumento vai contra os argumentos da seção anterior.

Nos mercados futuros em geral existem dois tipos de participantes. Os *Hedgers* e os especuladores. Os primeiros estão preocupados em garantir um preço (de compra ou de venda) por estarem envolvidos direta ou indiretamente na produção do bem transacionado. São considerados *Hedgers* no mercado de ouro, por exemplo, as fundidoras, as mineradoras e as joalharias. Os especuladores não têm relação direta com a produção ou o comércio dos bens transacionados. O seu interesse é apenas realizar lucros.

³². Pode-se demonstrar que o mercado a termo é equivalente ao mercado futuro. Portanto, o nosso modelo valerá também para este outro mercado.

Supondo que tanto *Hedgers* como especuladores possuem funções de utilidade do tipo CARA³³, onde a única variável relevante é a riqueza (\tilde{R}). A utilidade do iésimo agente do mercado é dada por³⁴:

$$U_i(\tilde{R}_i) = -\exp(-k_i \tilde{R}_i), \quad k_i > 0 \quad (2.1)$$

Onde $\exp(\cdot)$ é a função exponencial e $k_i = -U''/U'$ é o coeficiente absoluto de aversão ao risco. Apesar dos especuladores neste modelo também serem considerados avessos ao risco, eles podem ser considerados menos avessos, definindo um k menor para os especuladores que para os *Hedgers*.

A riqueza (\tilde{R}_i) é uma variável aleatória pois não se sabe o preço da mercadoria no futuro. Portanto, deve-se substituir (2.1) pelo seu valor esperado. Ao considerar que o preço da nossa mercadoria segue o processo estocástico dado pela equação (1.17), pode-se demonstrar que ele segue uma distribuição normal. Como a única variável não determinística da riqueza é o preço à vista em T , a riqueza dos participantes deste mercado em T também seguirá uma distribuição normal. Seja $\tilde{R}_i \sim N(E[\tilde{R}_i], \text{var}[\tilde{R}_i])$ ³⁵, pode-se deduzir a utilidade esperada dos participantes do mercado. Passando o "operador esperança" sobre (2.1), obtem-se:

$$E[U_i(\tilde{R}_i)] = E[-\exp(-k_i \tilde{R}_i)] = -\exp\left[-k_i(E[\tilde{R}_i]) - \frac{1}{2}k_i \text{var}[\tilde{R}_i]\right] \quad (2.2)$$

Se o iésimo especulador compra x_i contratos a termo, sua riqueza em T será:

$$\tilde{R}_i = (\tilde{S}_T - F)x_i + R_{i0} \exp(rT) \quad (2.3)$$

³³. As funções do tipo CARA, ou Constant Absolut Risk Aversion, representam uma classe de funções muito utilizada na economia. Sua forma geral é: $U(x) = -k^{-1}\exp(-kx)$, com $k > 0$. O grande defeito desta classe de funções de utilidade é que a aversão ao risco não depende da riqueza inicial.

³⁴. Isto segue Bray (1989), com duas modificações: ela usa o mercado futuro e os juros simples. Nesta análise utiliza-se mercado a termo e capitalização contínua.

³⁵. Quando se diz que $Y \sim N(a, b)$ significa que Y segue uma distribuição normal com média a e variância b .

onde, \tilde{R}_i é a riqueza do especulador em $t=T$;
 \tilde{S}_T o preço da mercadoria no mercado à vista em $t=T$;
 F é o preço futuro em $t=0$;
 R_{i0} é a riqueza inicial (em $t=0$) do especulador;
 r é a taxa livre de risco.

Se o i ésimo *hedger* vende z_i contratos a termo, sua riqueza em T será:

$$\tilde{R}_i = \tilde{S}_T (y_i - z_i)_i + Fz_i + [R_{i0} - C(y_i)] \exp(rT) \quad (2.4)$$

onde, R_{i0} é a riqueza inicial (em $t=0$) do *Hedger*;

y_i é a produção do i ésimo *Hedger*;

$C(y_i)$ é o custo de produção do *Hedger*.

Considera-se apenas um tipo de *Hedger*, o produtor. As fundidoras, por exemplo, também podem são *Hedgers*, mas são compradores de ouro e, portanto devem se proteger contra alta no preço do ouro. Considerando-se uma fundidora, a sua riqueza em T dependeria do preço de uma maneira diferente. Por simplicidade, a análise será limitada a estes dois participantes: especuladores e produtores. Supõe-se adicionalmente que o custo de produção é dado por:

$$C(y_i) = \frac{1}{2} c y_i^2 \text{ com } c > 0 \quad (2.5)$$

É importante também destacar que um produtor que não venda toda a sua produção futura também está especulando no mercado. Além disto, a produção é determinística no sentido de que não há incerteza quanto à produção futura. Pelas definições acima, a compra "especulativa" do i ésimo *Hedger* será: $x_i = y_i - z_i$. Levando este fato em consideração e substituindo (2.5) em (2.4) tem-se:

$$\tilde{R}_i = \tilde{S}_T x_i + F(y_i - x_i) + [R_{i0} - \frac{1}{2} c y_i^2] \exp(rT) \quad (2.4')$$

2.3 Hipóteses: revisão e complemento

Antes de passar para resolução do problema, será feita uma revisão das suposições realizadas até agora, adicionando algumas, em especial uma hipótese fundamental, a hipótese sobre o equilíbrio. As hipóteses realizadas até agora são:

1. Mercado Eficiente.
2. Todos os participantes do mercado possuem o mesmo tipo de função de utilidade, dada por (2.1), variando apenas a sua aversão ao risco.
3. A função custo é igual para todos os produtores e é dada por (2.5).
4. A produção é determinística.
5. A demanda em T é aleatória e é dada por: $D = \tilde{a} + bS_T$, onde \tilde{a} é uma variável aleatória tal que $\tilde{a} \sim N(E[\tilde{a}], \text{var}[\tilde{a}])$.
6. Existe um equilíbrio com expectativas racionais (EER).
7. Existe um número finito de produtores (m) e de especuladores ($n-m$).

O EER para um mercado de ativos possui quatro partes. (1) Cada agente forma o seu sistema de crenças dentro do seu conjunto de informações. (2) Os agentes maximizam o valor esperado da sua utilidade (agentes racionais). (3) Os preços do mercado à vista e do futuro equilibram estes mercados. (4) Os agentes possuem expectativas racionais, ou seja, o seu sistema de crenças formado em (1) é correto.

2.4 Resolvendo o modelo

A parte (1) da definição será trabalhada mais adiante, pois deve-se fazer suposições alternativas a respeito do conjunto de informações de cada agente. A parte

(2) da definição implica que os agentes estão maximizando (2.2). Para maximizar (2.2), basta maximizar o argumento do exponencial, ou seja:

$$\max_{R_i} \left\{ -\exp \left[-k_i \left(E[\tilde{R}_i] - \frac{1}{2} k_i \text{var}[\tilde{R}_i] \right) \right] \right\} = \max_R \left\{ E[\tilde{R}_i] - \frac{1}{2} k_i \text{var}[\tilde{R}_i] \right\}$$

Passando o operador esperança sobre (2.3) obtém-se:

$$E[\tilde{R}_i] = (\mu - F)x_i + R_{i0} \exp(rT) \quad (2.6)$$

$$\text{var}[\tilde{R}_i] = \sigma^2 x_i^2 \quad (2.7)$$

(2.6) e (2.7) implicam que:

$$E[\tilde{R}_i] - \frac{1}{2} k_i \text{var}[\tilde{R}_i] = (\mu - F)x_i + W_{i0} \exp(rT) - \frac{1}{2} k_i \sigma^2 x_i^2 \quad (2.8)$$

O especulador vai adquirir uma quantidade x_i que maximize (2.8), logo as condições de primeira ordem implicam que:

$$\mu - F - k_i \sigma^2 x_i = 0 \rightarrow x_i = \frac{\mu - F}{k_i \sigma^2} \quad (2.9)$$

Passando o operador esperança sobre (2.4'):

$$E[\tilde{R}_i] = \mu x_i + F(y_i - x_i) + \left[R_{i0} - \frac{1}{2} c y_i^2 \right] \exp(rT) \quad (2.10)$$

$$\text{var}[\tilde{R}_i] = \sigma^2 x_i^2 \quad (2.11)$$

O que significa que o produtor escolherá y_i e x_i que maximizem:

$$\mu x_i + F(y_i - x_i) + \left[R_{i0} - \frac{1}{2} c y_i^2 \right] \exp(rT) - \frac{1}{2} k_i \sigma^2 x_i^2 \quad (2.12)$$

A condição sobre x_i é idêntica à (2.9). A condição de primeira ordem sobre y_i implica:

$$F - c y_i \exp(rT) = 0 \Rightarrow y_i = F c^{-1} [\exp(rT)]^1 \quad (2.13)$$

A equação (2.9) implica que especuladores e produtores (já que a solução é idêntica para o produtor) comprarão futuros quando $\mu > F$, ou seja quando o valor esperado do ativo no mercado à vista for maior que o preço futuro. Estas compras serão inversamente proporcionais ao coeficiente de aversão ao risco e à volatilidade do ativo. De (2.13) vê-se que o produtor decide a sua produção de acordo com o

preço do mercado futuro, quer dizer, estes mercados devem ser resolvidos simultaneamente. Além disto, devido à classe de funções de utilidade que se escolheu, a riqueza inicial não altera as decisões de compra de futuros nem a de produção.

Passando para a terceira parte da definição de equilíbrio com expectativas racionais. Para que o mercado a termo esteja equilibrado, é necessário que:

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^m y_i \quad (2.14)$$

Ou seja, tudo o que foi vendido no mercado futuro foi também produzido.³⁶

Substituindo (2.9) e (2.13) em (2.14):

$$\sum_{i=1}^n \frac{\mu - F}{k_i \sigma^2} = \sum_{i=1}^m F c^{-1} \exp(-rT) = m c^{-1} F \exp(-rT) \quad (2.15)$$

O mercado à vista também deve estar em equilíbrio. Partindo da hipótese 5, condição necessária para que o mercado à vista esteja em equilíbrio é:

$$\sum y_i = D \Rightarrow \tilde{a} - b \tilde{S}_T = m c^{-1} F \exp(-rT) \quad (2.16)$$

A equação (2.15) pode ser rescrita:

$$F \left(m c^{-1} \sigma^2 \exp(-rT) + \sum_{i=1}^n k_i^{-1} \right) = \mu \sum_{i=1}^n k_i^{-1} \quad (2.15')$$

$$\text{Seja: } \phi \equiv m c^{-1} \sigma^2 \exp(-rT) \left(\sum_{i=1}^n k_i^{-1} \right)^{-1} + 1 \quad (2.17)$$

$$\text{temos: } F = \phi^{-1} \mu \quad (2.18)$$

E substituindo (2.18) em (2.16):

$$\tilde{S}_T = b^{-1} \tilde{a} - b^{-1} m c^{-1} \phi^{-1} \mu \exp(-rT) \quad (2.19)$$

$$E[\tilde{S}_T] = b^{-1} E[\tilde{a}] - b^{-1} m c^{-1} \phi^{-1} \mu \exp(-rT) \quad (2.20)$$

$$\text{var}[\tilde{S}_T] = b^{-2} \text{var}[\tilde{a}] \quad (2.21)$$

³⁶. Esta condição não é verificada na prática. O volume negociado no futuro é em alguns casos maior que a produção. Isto é possível, pois os ajustes raramente implicam na entrega física da mercadoria.

A quarta parte da definição do EER diz que os agentes fazem previsão perfeita. Esta condição implica:

$$E[\tilde{S}_T] = \mu \quad (2.22)$$

$$\text{var}[\tilde{S}_T] = \sigma^2 \quad (2.23)$$

Aplicando (2.22) em (2.20) e multiplicando dos dois lados por ϕ :

$$E[S_T](b\phi + mc^{-1}\exp(-rT)) = \phi E[\tilde{a}] \quad (2.24)$$

$$\text{Seja: } \theta \equiv b\phi + mc^{-1}\exp(-rT) \quad (2.25)$$

$$\text{tem-se: } E[\tilde{S}_T] = \theta^{-1}\phi E[\tilde{a}] \quad (2.26)$$

Podemos então encontrar o equilíbrio para o mercado à vista e futuro compatível com expectativas racionais. (2.20) em (2.19) resulta em:

$$\tilde{S}_T = b^{-1}\tilde{a} + E[\tilde{S}_T] - b^{-1}E[\tilde{a}] \quad (2.19')$$

Substituindo (2.26) em (2.19):

$$\tilde{S}_T = b^{-1}\tilde{a} - b^{-1}E[\tilde{a}] + \phi\theta^{-1}E[\tilde{a}] \quad (2.27)$$

Por outro lado, (2.26) em (2.19) implica que:

$$\tilde{a} - b\tilde{S}_T = -b\phi\theta^{-1}E[\tilde{a}] + E[\tilde{a}] \quad (2.19'')$$

substituindo a definição de θ (2.25) e (2.19'') em (2.16) obtem-se:

$$F = \theta^{-1}E[\tilde{a}] \quad (2.28)$$

Finalmente, (2.26) e (2.28) implicam:

$$F = \phi^{-1}E[\tilde{S}_T] \quad (2.29)$$

A partir de (2.28) pode-se ver que o preço no mercado à termo é menor do que o valor esperado do preço do mercado à vista. Se os agentes fossem indiferentes ao risco, eles estariam preocupados apenas em maximizar o valor esperado da sua riqueza. Isto implicaria que $F = E[S_T]$. Comparando este resultado com o obtido em (2.29), pode-se definir $(\phi-1)$ como o prêmio ao risco (λ). Portanto, $\lambda F + F = E[S_T]$. Isto significa que os especuladores vão receber um prêmio λ por assumir o risco de

variações aleatórias na demanda, já que por suposição os especuladores são menos avessos ao risco. Um produtor poderia ser um comprador líquido de contratos futuros, pois apesar de ter um coeficiente de aversão ao risco menor que dos especuladores, ele poderia ter este coeficiente maior do que a maioria dos seus "colegas"³⁷.

2.5 O papel da informação

Inicialmente considera-se que não existe assimetria de informações quando os agentes tomam a decisão de compra de futuros e produção da mercadoria, quer dizer, em $t=0$, todos os agentes observam o mesmo sinal. O sinal observado dá indicações sobre a demanda em T . Seja:

$$\tilde{\alpha} \equiv \tilde{I} + \varepsilon \quad (2.30)$$

Onde $\tilde{I} \sim N(E[\tilde{\alpha}], \text{var}[\tilde{\alpha}])$ e $\varepsilon \sim N(0, \text{var}[\varepsilon])$. Em $t=0$, os agentes observam $\tilde{I} = I$. (2.26) e (2.21) devem ser alterado para incluir o conjunto de informações:

$$E[\tilde{S}_T / I, F]^{38} = (\theta^*)^{-1} \phi^* E[\tilde{\alpha} / I, F] = (\theta^*)^{-1} \phi^* I \quad (2.26')$$

$$\text{var}[\tilde{S}_T / I, F] = b^{-2} \text{var}[\tilde{\alpha} / I, F] = b^{-2} \text{var}[\varepsilon] \quad (2.21')$$

onde

$$\phi^* = mc^{-1} b^{-2} \text{var}[\tilde{\alpha} / I, F] \left(\sum_{i=1}^n k_i^{-1} \right) \quad (2.17')$$

$$\theta^* = b\phi^* + mc^{-1} \exp(-rT) \quad (2.25')$$

³⁷. Na verdade, o prêmio ao risco fica com o comprador líquido de contratos futuros pois o nosso *Hedger* está preocupado em proteger apenas diminuições de preços. Considerando-se os dois tipos de *Hedger*, o prêmio ao risco seria do comprador ou do vendedor de acordo com o volume operado por cada um dos tipos. Por exemplo, no mercado futuro de câmbio no Brasil, em geral, o prêmio ao risco deveria ficar com os compradores, visto que o volume de agentes preocupados com uma queda na taxa de câmbio (exportadores) é maior do que daqueles que estão preocupados com uma elevação desta taxa (importadores). O inverso ocorre quando o país apresenta uma balança comercial negativa.

³⁸. $E[X/I]$ é o valor esperado de X , dado o vetor de informações I e $\text{var}[x/I]$ a variância condicional.

Se I é observado, ele deixa de ser uma variável aleatória. Assim, o valor esperado condicional e a variância condicional de \tilde{a} podem ser expressos por:

$$E[\tilde{a}/I, F] = I \quad (2.31)$$

$$\text{var}[\tilde{a}/I, F] = \text{var}[\varepsilon] \quad (2.32)$$

Incorporando (2.31) e (2.32) em (2.21), (2.26) e em (2.28) obtem-se:

$$\text{var}[\tilde{S}_T/I, F] = b^{-2}\text{var}[\varepsilon] \quad (2.21')$$

$$E[\tilde{S}_T/I, F] = I(\theta^*)^{-1}\phi^* \quad (2.26')$$

$$F = (\theta^*)^{-1}I \quad (2.28')$$

Isto significa que I pode ser deduzido a partir do preço do mercado futuro. O que ocorre quando o sinal I só é observado por alguns agentes (os *insiders*)? Os outros agentes podem deduzir I através de F e, portanto o equilíbrio será exatamente o mesmo. Formalmente, temos que $E[S_T/I] = E[S_T/F]$. Isto no entanto pressupõe que o preço no mercado futuro é um transmissor perfeito de informação. Para que o preço futuro seja um perfeito transmissor de informação, é necessário que o mapeamento dos sinais nos preços seja inversível, o que ficou conhecido na literatura como o *problema de extração de sinal*. Quer dizer, a função que leva dos sinais aos preços não pode levar a dois preços diferentes para o mesmo sinal.

As conclusões do modelo são contraditórias com as da seção anterior. O que aconteceria se os *insiders* fossem proibidos de entrar no mercado? Neste caso, o sinal não seria incorporado ao preço futuro e a variância do preço à vista em T seria maior. Quer dizer, o resultado indica que é desejável que os *insiders* entrem no mercado. Por outro lado, a existência de *insiders* faz com que as pessoas reduzam o preço do futuro, por um efeito do tipo *mercado de abacaxis*.

2.6 O problema de extração do sinal

Para resolver o modelo acima, foi utilizada uma hipótese sobre as expectativas. No entanto, não foi provada a existência de um equilíbrio em expectativas racionais, em geral. Na verdade, podem haver casos em que o sistema de crenças formado na parte 1 da definição não é consistente. Ou melhor, não existe um equilíbrio que garanta esta consistência.

Este exemplo é uma versão modificada de Kreps (1977) conforme proposto por Bray (1989). É uma pequena modificação do modelo desenvolvido nas seções anteriores. Para simplificar, trabalha-se com apenas um fazendeiro e um especulador, que maximizam sua utilidade esperada. O especulador acredita que o preço à vista em T será $\tilde{S}_T \sim N(\mu, \sigma^2)$. Considera-se adicionalmente taxa de juros zero e coeficiente absoluto de aversão ao risco igual a um para ambos os agentes. Isto implica que a demanda por contratos futuros do especulador e do fazendeiro serão dadas por (vide equação 2.9):

$$x_e = \frac{1}{\sigma^2} (\mu - F) \quad (2.33)$$

$$x_f = \frac{1}{\sigma^2} (\mu - F) \quad (2.34)$$

O fazendeiro possui uma função de custo $C(y) = sy + \frac{1}{2}y^2$ e as mesmas crenças iniciais que o especulador sobre o valor final do ativo. Como se modificou a equação (2.5), a equação (2.13) não é mais válida. A maximização de utilidade para o fazendeiro implica:

$$y = F - s \quad (2.35)$$

Equilíbrio no mercado de futuros implica, portanto:

$$\frac{2}{\sigma^2} (\mu - F) = F - s \quad (2.36)$$

A demanda no mercado à vista é:

$$D(\tilde{S}_T) = \tilde{a} - \tilde{S}_T \quad (2.37)$$

onde $\tilde{a} \sim N(E[\tilde{a}], 1)$. O equilíbrio do mercado à vista implica que:

$$\tilde{a} - \tilde{S}_T = F - s \quad (2.38)$$

Passando o operador esperança sobre (2.38) e rearranjando os termos:

$$E[\tilde{S}_T] = E[\tilde{a}] - F + s \quad (2.39)$$

$$\text{var}[\tilde{S}_T] = \text{var}[\tilde{a}] = 1 \quad (2.40)$$

A quarta parte da definição de EER implica que $\mu = E[\tilde{S}_T]$ e $\text{var}[\tilde{S}_T] = 1$.

Assim, substituindo (2.39) em (2.36):

$$2(E[\tilde{a}] - F + s - F) = F - s \Rightarrow F = \frac{1}{5}(2E[\tilde{a}] + 3s) \quad (2.41)$$

E, finalmente, substituindo (2.39) em (2.41):

$$E[\tilde{S}_T] = \frac{1}{5}(3E[\tilde{a}] + 2s) \quad (2.42)$$

Agora a assimetria de informações é incluída de uma maneira muito simples.

Digamos que existam dois tipos de clima, um bom e um ruim. O fazendeiro observa o

clima, porém o especulador não. Se o tempo for bom, $E[\tilde{a}] = \frac{5}{4}$ e $s = \frac{1}{6}$. Se é ruim,

$E[\tilde{a}] = 1$ e $s = \frac{1}{3}$. Substituindo estes valores em (2.41), percebe-se que $F = \frac{3}{5}$ em

qualquer tempo. Assim, o especulador não consegue inferir o clima a partir do preço no mercado futuro. Substituindo os mesmos valores em (2.42), pode-se verificar que o valor à vista esperado muda de acordo com o clima. Ora, se o especulador decide a sua compra em função do preço futuro, a sua demanda por contratos futuros deverá ser a mesma, independente do clima. O fazendeiro, por outro lado, terá um excesso de demanda por contratos futuros:

$$x_t - y = (E[\tilde{S}_T] - F) - (F - s) = E[\tilde{a}] + 2s - 3F$$

Assim, o excesso de demanda por futuros do fazendeiro será de $\frac{19}{12}$ em bom tempo e de $\frac{5}{3}$ com clima ruim. Isto implica que a demanda do especulador é independente do clima, enquanto a do fazendeiro não é. Portanto, é impossível que este mercado se equilibre.

O grande problema aqui está no mapeamento das crenças em crenças corretas, essencial para o equilíbrio em expectativas racionais. Este é um problema típico de modelos com expectativas. Em termos formais, o EER colocado na seção 3 existe se ele for o ponto fixo deste mapeamento. Teoremas de ponto fixo colocam certas condições sobre as quais ele existe ou não. Uma das condições é a continuidade do mapeamento. Assimetria de informações gera uma descontinuidade neste mapeamento. Por isto, modelos com informação imperfeita, muitas vezes não possuem equilíbrio. Em outros termos, este é um problema de extração de sinal.

O problema da existência pode ser abordado de duas maneiras diferentes: teoremas de existência e contra-exemplos de não existência. Neste caso, ilustra-se o segundo tipo de abordagem. Basta negar a existência com um exemplo que ela perde sua validade. A segunda forma de atacar o problema é muito mais complexa. Deve-se provar uma afirmação geral. A afirmação, *todos os gansos são brancos* é negada pela simples existência de um ganso negro. Porém, este exemplo de não-existência para os mercados futuros não é robusto. Uma pequena variação nos parâmetros seria suficiente para recuperar o equilíbrio. Quer dizer, se os preços não fossem exatamente iguais, mas tivessem uma ínfima diferença, já seria suficiente para recuperar o equilíbrio (a pequena diferença já seria suficiente para os especuladores inferirem o

clima). Radner (1982) montou um exemplo muito mais robusto, no qual pequenas variações nos preços não eram suficientes para fornecer as informações da parte informada para os preços futuros.

2.7 Operações Múltiplas (Kyle)

Até agora avançou-se de um modelo extremamente simples, com hipóteses não muito realistas para um modelo mais próximo da realidade. No entanto, a conclusão do modelo anterior indica que os agentes sem informações privilegiadas podem deduzir toda a informação a partir do preço do ativo. Por outro lado, foi mostrado no início do capítulo que a seleção adversa ‘expulsa’ os projetos bons do mercado. Nesta seção é introduzido um modelo com *insider* onde nem toda a informação passa para os preços.

Um aspecto muito importante a ser analisado nestes modelos de *Insider* é como o mercado se comporta. Isto implica no conceito de liquidez e profundidade dos mercados em questão. Quanto maior forem estas medidas, menor será a chance do *insider* realizar lucro nestes mercados. Sob a hipótese de eficiência informativa forte, o governo não deveria regulamentar estes mercados. A necessidade de regulamentação só faz sentido com o relaxamento desta hipótese. O conceito de eficiência apresentado no capítulo 1 não é suficiente para compreender um mercado complexo com assimetria de informações como são os mercados modernos. Necessita-se de mais alguns conceitos:

- **Firmeza (*tightness*):** Custo de mudança de posição (comprada ou vendida) no curtíssimo prazo.

- **Profundidade (*depth*):** Tamanho de uma ordem capaz de alterar o preço do ativo um dado montante.
- **Recuperação (*resiliency*):** Velocidade com que os preços retornam para o equilíbrio após um choque aleatório.

Black (1971) coloca que um mercado é líquido quando quase qualquer quantidade pode ser comprada ou vendida imediatamente. Além disso, deve ser um mercado eficiente no sentido que uma pequena quantidade pode ser comprada ou vendida (aproximadamente) pelos preços correntes imediatamente ou uma grande quantidade pode ser vendida, no longo prazo, também a preços correntes. Esta definição de liquidez implica num mercado infinitamente firme, não infinitamente profundo e com o suficiente poder de recuperação.

O modelo apresentado nesta seção, baseado em Kyle (1985) supõe que o mercado é líquido no sentido de Black e eficiente no sentido semi-forte do termo. Preocupa-se com quatro aspectos fundamentais: (1) a velocidade com que as informações são incorporadas aos preços; (2) o valor da informação para o *insider*; (3) o efeito da existência de um *insider* para a volatilidade dos preços e (4) o que determina a liquidez num mercado especulativo. Começa-se com um modelo com apenas uma operação e depois generaliza-se o modelo para N operações num mesmo dia. O jogo possui três jogadores:

- **(N)oise Traders:** realiza compras ou vendas aleatórias. Cumpre o papel da natureza em jogos, logo não tem estratégia nem *payoff*³⁹.

³⁹ . A presença do *Noise Trader* é importante neste modelo, pois inclui a existência de agentes não racionais (no sentido de não maximizar alguma função de utilidade) no mercado. Nos mercados de ações existem muitas vezes agentes operando de maneira aleatória (as viúvas americanas ou os dentistas belgas são os estereótipos mais comuns).

- **(I)nsiders:** possuem informação privilegiada e a utilizam estrategicamente no mercado. Por hipótese são neutros ao risco.
- **(M)arket Makers:** Definem o preço de mercado a partir do *fluxo de ordens* (*order flow*) que corresponde à quantidade total demandada ou ofertada por N e I.

Kyle parte da hipótese que os *market makers* estão em concorrência perfeita e que os *insiders* são monopolistas. No jogo em um estágio, I e N decidem **simultaneamente** quanto vão transacionar no dia. Em seguida, M define o preço de mercado e transaciona a quantidade que equilibra o mercado, após observar a quantidade **conjunta** colocada por I e N. M **não consegue observar separadamente** as quantidades transacionadas por *insiders* e *noises*.

A quantidade transacionada pelos ‘noise traders’ (\tilde{u}) se distribui normalmente com média zero e desvio padrão σ_u^2 : $\tilde{u} \sim N(0, \sigma_u^2)$. O valor de liquidação do ativo (\tilde{v}) também se distribui normalmente com média p_0 e desvio padrão Σ_0 , independente da quantidade transacionada por N: $\tilde{v} \sim N(p_0, \Sigma_0)$. Estas duas distribuições são conhecimento comum. O *insider* decide a quantidade transacionada (\tilde{x}) em função de sua informação privilegiada: $\tilde{v} = v$. M define o preço $\tilde{p} = P(\tilde{x} + \tilde{u})$ ofertando ou demandando a quantidade que equilibra o mercado. O lucro do *insider* será denominado por $\tilde{\pi} = (\tilde{v} - \tilde{p})\tilde{x} = \tilde{\pi}(\tilde{v}, \tilde{p})$ e I deve escolher x de acordo com o valor de liquidação: $\tilde{x} = X(\tilde{v})$.

Existe uma série de suposições neste modelo que se acaba de descrever. O *insider* deve ser monopolista, já que se infinitos agentes tivessem a informação ela deixaria de ser privilegiada. M em concorrência perfeita para o Brasil é uma hipótese heróica. Uma outra hipótese é que M observa apenas a soma das quantidades e define

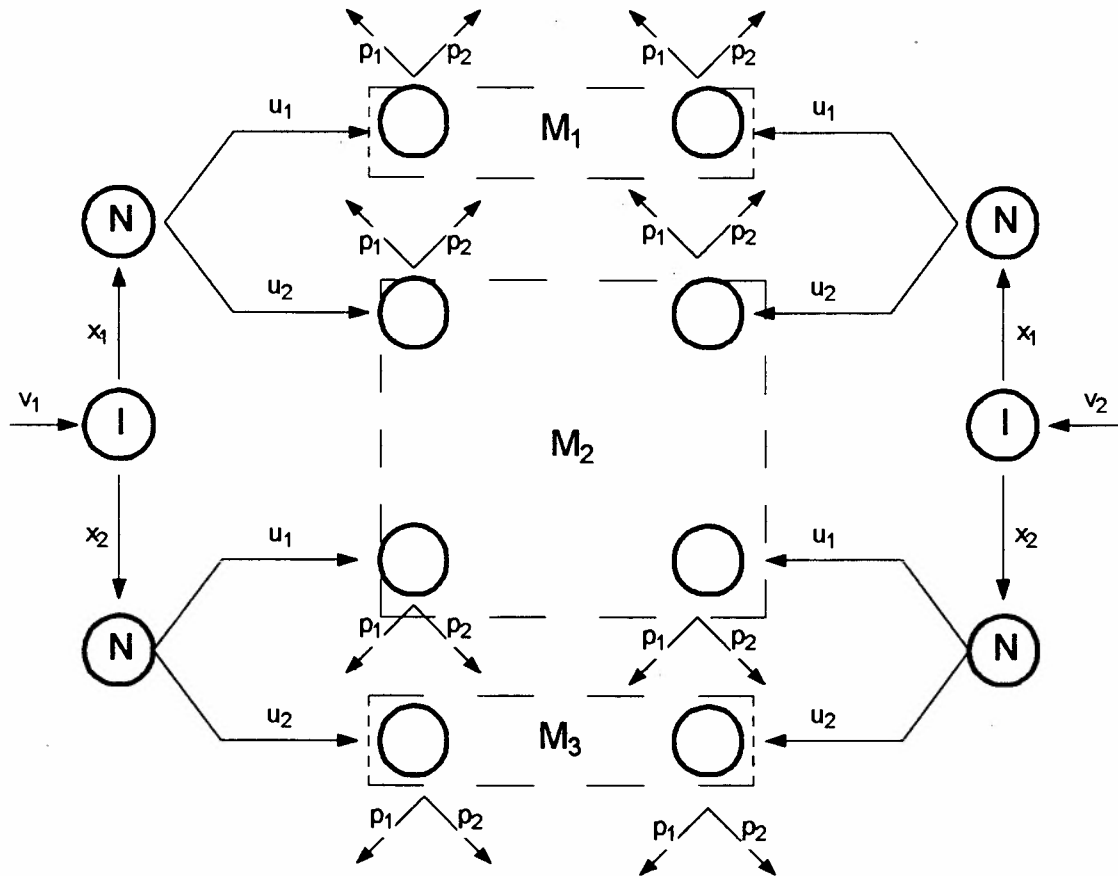
o preço. Considerando M como bancos e corretoras, N deveria operar através deles. I, se não for banco ou corretora, idem. No entanto, imagine um mercado onde bancos e corretoras têm pouco contato durante o pregão, ou melhor, as informações transmitidas intra market makers são parciais. Pela manhã eles tomam decisões para os seus fundos administrados (Anexo IV, fundos mútuos, etc.) em função das ordens recebidas e das suas análises fundamentalistas. Durante o dia eles recebem novas informações. As telas dos computadores das mesas de operação disparam todas as ordens de compra e venda, além de outras informações e eles podem repensar as suas estratégias em função das ordens recebidas dos clientes e das informações parciais recebidas dos outros bancos. Assim, o modelo é coerente com a realidade de alguns mercados de ativos.

A figura abaixo tenta ilustrar o jogo para um caso discreto. Digamos que existam apenas dois valores possíveis de liquidação: v_1 e v_2 . O *insider* recebe a informação do valor correto de liquidação e decide a quantidade transacionada entre duas alternativas: x_1 ou x_2 . Em seguida N decide quanto transacionar: u_1 ou u_2 , onde $x_1 + u_2 = x_2 + u_1$. Note que não está indicado nenhum conjunto de informações para N. Observando a figura, pode-se concluir que N observa tanto v como x . Acontece que neste jogo, o papel de N é apenas gerar ruído. Assim, é indiferente pensar se N tem ou não uma informação, já que ele não toma decisões estratégicas⁴⁰. Finalmente M define o preço p_1 ou p_2 . Vamos nos ater aos conjuntos de informações de M: M_1 , M_2 e

⁴⁰ Glosten e Milgrom (1985) incluem um 'jogador irracional' que cumpre exatamente o mesmo papel que o *noise trader* no modelo acima. O fato de se utilizar uma terminologia diferente para um mesmo caso deve-se em parte ao fato que este assunto ainda não está padronizado na literatura.

M_3 . M não sabe se o valor de liquidação será v_1 ou v_2 nem se I jogou x_1 e N u_2 ou se I jogou x_2 e N u_1 . No entanto, é possível distinguir se I e N jogaram 1 ou 2⁴¹.

Figura 2.2: Representação Discreta para o Jogo de Kyle



A ilustração acima, apesar das limitações quando se passa de um caso contínuo para um caso discreto, fornece algumas intuições sobre o problema. Apesar de nunca saber de qual lado da figura ele está (ou seja, qual o valor efetivo de v), M consegue saber em que altura ele está. No caso discreto, se ele estiver em M_1 ou M_3 , ele sabe exatamente a quantidade transacionada por I . No caso contínuo ele nunca consegue saber a quantidade exata transacionada por I (como em M_2). No entanto, ele

⁴¹ Para simplificar imagine que 1 significa compra e 2 venda. M consegue identificar um mercado totalmente comprador de um totalmente vendedor, mas num mercado intermediário ele não consegue saber se o *insider* está comprando ou vendendo seus ativos.

é capaz de estimar esta quantidade a partir do conjunto de informações em que se encontra. Quer dizer, dado que ele está em M_i , qual a probabilidade de I ter jogado x_i .

Definição: (X^*, P^*) são considerados equilíbrio do jogo descrito anteriormente se são satisfeitas as seguintes condições:

(1) Maximização de Lucros⁴²:

$$E\{\tilde{\pi}(X^*, P^*) / \tilde{v} = v\} \geq E\{\tilde{\pi}(X', P^*) / \tilde{v} = v\} \quad (2.43)$$

(2) Eficiência de Mercado

$$\tilde{p}(X, P) = E\{\tilde{v} / \tilde{x} + \tilde{u}\} \quad (2.44)$$

Teorema 2.2: Dada uma regra de precificação linear, existe um único equilíbrio satisfazendo as condições (2.43) e (2.44) dado por:

$$(a) x^*(\tilde{v}) = \beta(\tilde{v} - p_0) \text{ e } (b) P^*(\tilde{x} + \tilde{u}) = p_0 + \lambda(\tilde{x} + \tilde{u}) \quad (2.45)$$

onde $\beta = (\sigma_u^2 / \Sigma_0)^{1/2}$ e $\lambda = (1/2)(\sigma_u^2 / \Sigma_0)^{-1/2}$

$$\textbf{Demonstração:} \text{ Seja (a) } P(\tilde{y}) = \mu + \lambda y \text{ e (b) } X(v) = \alpha + \beta v, \quad (2.46)$$

onde $\tilde{y} = \tilde{x} + \tilde{u}$. O lucro de I será:

$$\tilde{\pi} = (\tilde{v} - \tilde{p})\tilde{x} \Rightarrow E\{\tilde{\pi} / \tilde{v} = v\} = (v - \mu - \lambda E\{\tilde{u}\} - \lambda \tilde{x})\tilde{x} = (v - \mu - \lambda \tilde{x})\tilde{x} \quad (2.47)$$

Aplicando as condições de primeira ordem sobre (2.47):

$$\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial \tilde{x}} = v - \mu - 2\lambda \tilde{x} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial \tilde{x}} = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} = \frac{(v - \mu)}{2\lambda} \quad (2.48)$$

As condições de segunda ordem por sua vez implicam que:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\pi}}{\partial \tilde{x}^2} = -2\lambda \Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{\pi}}{\partial \tilde{x}^2} < 0 \Leftrightarrow \lambda > 0 \quad (2.49)$$

Aplicando a condição de primeira ordem (2.48) sobre (2.46b), tem-se que:

$$\alpha + \beta v = (v - \mu) / 2\lambda \Rightarrow \alpha = -\mu / 2\lambda \text{ e } \beta = 1 / 2\lambda \quad (2.50)$$

Logo, pela condição de segunda ordem (2.49), $\beta > 0$. Substituindo (2.46a) em

(2.44):

$$\mu + \lambda y = E\{\tilde{v} / \alpha + \beta \tilde{v} + \tilde{u} = \tilde{y}\} \quad (2.51)$$

Pelo teorema da projeção temos que:

$$E\{\tilde{v} / \tilde{y}(\tilde{v})\} = E\{\tilde{v}\} + \frac{\text{cov}(\tilde{v}, \tilde{y})}{\text{var}(\tilde{y})} [\tilde{y} - E\{\tilde{y}\}]$$

Oque, para o nosso caso, implica que:

$$\begin{cases} E\{\tilde{v}\} = p_0 \\ \text{cov}(\tilde{v}, \tilde{y}) = \beta \text{cov}(\tilde{v}, \tilde{v}) + \text{cov}(\tilde{v}, \tilde{u}) = \beta \Sigma_0 \\ \text{var}(\tilde{y}) = \beta^2 \text{var}(\tilde{v}) + \text{var}(\tilde{u}) = \beta^2 \Sigma_0 + \sigma_u^2 \\ E\{\tilde{y}\} = \alpha + \beta E\{\tilde{v}\} + E\{\tilde{u}\} = \alpha + \beta p_0 \end{cases}$$

Substituindo no teorema da projeção, implica que:

$$\begin{aligned} E\{\tilde{v} / \alpha + \beta \tilde{v} + \tilde{u} = \tilde{y}\} &= p_0 + \frac{\beta \Sigma_0}{\beta^2 \Sigma_0 + \sigma_u^2} [\tilde{y} - (\alpha + \beta p_0)] \\ &= p_0 - \frac{\beta \Sigma_0 (\alpha + \beta p_0)}{\beta^2 \Sigma_0 + \sigma_u^2} + \frac{\beta \Sigma_0}{\beta^2 \Sigma_0 + \sigma_u^2} y \end{aligned} \quad (2.52)$$

Comparando (2.51) com (2.52), temos que:

$$\lambda = \frac{\beta \Sigma_0}{\beta^2 \Sigma_0 + \sigma_u^2} \quad e \quad \mu - p_0 = -\lambda (\alpha + \beta p_0) \quad (2.53)$$

Substituindo (2.50) em (2.53):

$$\mu - p_0 = -\lambda \left(\frac{-\mu}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} p_0 \right) \Rightarrow \mu - p_0 = \frac{\mu - p_0}{2}$$

dado $\lambda > 0$, a única solução para equação acima é a trivial:

$$\alpha = -\beta p_0, \mu = p_0 \quad (2.54)$$

Além do mais, (2.54) em (2.46) implica que:

$$\begin{aligned} P(y) &= \mu + \lambda y = p_0 + \lambda (\tilde{x} + \tilde{u}) \\ X(v) &= \alpha + \beta v = -\beta p_0 + \beta v = \beta (v - p_0) \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. Resta provar que β e λ satisfazem a definição do teorema 2.2:

⁴² O til sobre a variável indica que se trata de uma variável aleatória. Num abuso de notação, as

$$\beta = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2} \left[\frac{\beta^2 \Sigma_0 + \sigma_u^2}{\beta \Sigma_0} \right] \Rightarrow 2\beta^2 \Sigma_0 = \beta^2 \Sigma_0 + \sigma_u^2 \Rightarrow \beta^2 = \frac{\sigma_u^2}{\Sigma_0} \Rightarrow \beta = \left(\frac{\sigma_u^2}{\Sigma_0} \right)^{1/2}$$

$$\text{Como } 1/\beta = 2\lambda \text{ segue que } 2\lambda = \left[\left(\frac{\sigma_u^2}{\Sigma_0} \right)^{1/2} \right]^{-1} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_u^2}{\Sigma_0} \right)^{-1/2} \quad \text{CQD}$$

Note que $\text{cov}(\tilde{v}, \tilde{p}) = \lambda \text{cov}(\tilde{v}, \tilde{x}) + \lambda \text{cov}(\tilde{v}, \tilde{u}) = \lambda \beta \text{var}(\tilde{v}) = (1/2)\Sigma_0$. Isto significa que metade da informação do *insider* é incorporada ao preço e a volatilidade de p não é afetada por σ_u^2 . A profundidade do mercado é dada por $1/\lambda$, logo é proporcional a $2(\sigma_u^2/\Sigma_0)^{1/2}$. Ou seja, os Market Makers diminuem a liquidez do mercado para se proteger da presença de insiders. O lucro do *insider* será:

$$\left[v - \mu - \lambda \frac{1}{2\lambda} (v - p_0) \right] \frac{1}{2\lambda} (v - p_0) = \frac{1}{4\lambda} (v - p_0)^2$$

O lucro do *insider* é proporcional à profundidade do mercado. Como um aumento de Noise Traders traz quatro vezes mais insiders, um aumento do ruído não desestabiliza o mercado, ou seja, este modelo não dá margem a bolhas especulativas.

2.8 Modelo Com Operações Sequenciais

Modificando o modelo anterior para permitir que sejam realizadas N operações durante o pregão, o que se aproxima mais da realidade. As operações começam em $t=0$ e terminam em $t=1$:

$$0=t_0 < t_1 < \dots < t_N=1$$

O jogo é estruturado da seguinte forma: Em t_0 , I observa v e define se altera seu estoque inicial de títulos. A variável x_n indica o estoque de títulos em poder de I após n operações e u_n o estoque em poder de N em n : $\tilde{u}_n = u_{n-1} + \varepsilon_n$. \tilde{v} é definido

como anteriormente. M, após verificar os estoques totais (e não individualmente) de N e I define o preço:

$$\tilde{p}_n = P_n(\tilde{x}_1 + \tilde{u}_1, \dots, \tilde{x}_n + \tilde{u}_n) \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.55)$$

Quer dizer, I deve definir N estoques, que será representado pelo vetor $X \equiv (x_1, \dots, x_N)$ que é a **estratégia de negociação** de I. É importante destacar que a decisão de I em n influencia seu lucro em n, n+1, n+2, ..., N. M, por sua vez, deve definir uma **regra de preços**, que consiste em N preços (um para cada período): $P \equiv (P_1, \dots, P_N)$. Define-se o lucro do *insider* em n como:

$$\pi_n \equiv \sum_{k=n}^N (\tilde{v} - \tilde{p}_k) \tilde{x}_k \quad (2.56)$$

A definição de lucro implica que ele corresponde à soma simples do lucro presente com todos os lucros futuros. Assim, podemos redefinir as condições de equilíbrio como X^*, P^* tal que:

(1) Maximização de Lucro:

$$E\{\pi_n(X^*, P^*) / \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n-1}, v\} \geq E\{\pi_n(X', P^*) / \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n-1}, v\}, \forall X' \neq X^* \quad (2.57)$$

(2) Eficiência de Mercado:

$$\tilde{p}_n = E\{\tilde{v} / \tilde{x}_1 + \tilde{u}_1, \dots, \tilde{x}_n + \tilde{u}_n\} \quad (2.58)$$

Em (2.57) a esperança condicional mostra que quando I toma a decisão em n, já conhece p_1, \dots, p_{n-1} , além de v. Analogamente, quando M toma a decisão em n, conhece todos os fluxos anteriores. Uma regra de preços linear é definida como:

$$\tilde{p}_n \equiv p_{n-1} + \lambda_n(\Delta \tilde{x}_n + \Delta \tilde{u}_n) + h \quad (2.59)$$

Teorema 2.3: Dada a regra de preços linear (2.59), existe apenas uma estratégia de preços que garante o equilíbrio dada por:

$$\Delta \tilde{x}_n = \beta_n(\tilde{v} - \tilde{p}_n) \Delta t_n \quad (2.60)$$

$$\Delta \tilde{p}_n = \lambda_n(\Delta \tilde{x}_n + \Delta \tilde{u}_n) \quad (2.61)$$

$$\Sigma_n = \text{var}(\tilde{v} / \Delta \tilde{x}_1 + \Delta \tilde{u}_1, \dots, \Delta \tilde{x}_n + \Delta \tilde{u}_n) \quad (2.62)$$

$$E\{\pi_n(X^*, P^*) / p_1, \dots, p_{n-1}, v\} = \alpha_{n-1}(v - p_{n-1})^2 + \delta_{n-1} \quad (2.63)$$

onde (2.60) à (2.63) são a única solução para o sistema de equações a diferenças dado por:

$$\alpha_{n-1} = \frac{1}{4\lambda_n(1 - \alpha_n\lambda_n)} \quad (2.64)$$

$$\delta_{n-1} = \delta_n + \alpha_n\lambda_n^2\sigma_u^2\Delta t_n \quad (2.65)$$

$$\beta_n\Delta t_n = \frac{1 - 2\alpha_n\lambda_n}{2\lambda_n(1 - \alpha_n\lambda_n)} \quad (2.66)$$

$$\lambda_n = \beta_n\Sigma_n / \sigma_u^2 \quad (2.67)$$

$$\Sigma_n = (1 - \beta_n\lambda_n\Delta t_n)\Sigma_{n-1} \quad (2.68)$$

$$\text{sujeito a } \alpha_N = \delta_N = 0$$

O problema do *insider* em n pode ser tratado como um problema recursivo.

Torna-se necessário este tratamento, pois a decisão de um período influencia o resultado dos períodos seguintes. A sua função valor pode ser escrita como:

$$\pi_n = \max_{\Delta x_n} E\{(v - \tilde{p}_n)\Delta x_n + \pi_{n+1}\} \quad (2.69)$$

A interpretação é que I deve maximizar o lucro imediato mais os lucros seguintes ($n+1, \dots, N$). A maneira como se define o lucro, permite que (2.69) seja escrita desta forma. Note que a variável de decisão é a variação do estoque. De (2.63) pode-se induzir:

$$E\{\pi_{n+1}(X^*, P^*) / p_1, \dots, p_n, v\} = \alpha_n(v - p_n)^2 + \delta_n \quad (2.70)$$

Portanto, podemos reescrever (2.69) como:

$$\pi_n = \max_{\Delta x_n} E\{(v - \tilde{p}_n)\Delta x_n + \alpha_n(v - \tilde{p}_n)^2 + \delta_n / p_1, \dots, p_{n-1}, v\} \quad (2.71)$$

Substituindo (2.59) em (2.71) temos que:

$$\begin{aligned}
\pi_n &= \max_{\Delta x_n} E\{(v - p_{n-1} - \lambda_n(\Delta \tilde{x}_n + \Delta \tilde{u}_n) - h)\Delta x_n + \\
&\quad + \alpha_n(v - p_{n-1} - \lambda_n(\Delta \tilde{x}_n + \Delta \tilde{u}_n) - h)^2 + \delta_n / I_n\} = \\
&= E\{(v - p_{n-1} - \lambda_n \Delta \tilde{x}_n - h)\Delta \tilde{x}_n + \Delta \tilde{u}_n \Delta \tilde{x}_n + \alpha_n[(v - p_{n-1} - \lambda_n \Delta \tilde{x}_n - h)^2 - \\
&\quad - \lambda_n \Delta \tilde{u}_n(v - p_{n-1} - \lambda_n \Delta \tilde{x}_n - h)^2 + \lambda_n^2 \Delta u_n^2] + \delta_n / I_n\}
\end{aligned}$$

onde I_n representa o conjunto de informações do *insider* em n : $I_n \equiv \{p_1, \dots, p_{n-1}, v\}$.
Acontece que $\tilde{u}_n = \tilde{u}_{n-1} + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \sim N(0, \sigma_u^2)$; logo:

$$E\{\Delta u_n\} = 0 \quad E\{(\Delta u_n)^2\} = \sigma_u^2 \Delta t_n$$

Assim, passando o operador esperança sobre a função valor acima, obteremos:

$$\begin{aligned}
\pi_n &= \max_{\Delta x_n} \{(v - p_{n-1} - \lambda_n \Delta \tilde{x}_n - h)\Delta \tilde{x}_n + \alpha_n(v - p_{n-1} - \lambda_n \Delta \tilde{x}_n - h)^2 \\
&\quad + \alpha_n \lambda_n^2 \sigma_u^2 \Delta t_n + \delta_n\}
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Assim o problema se reduz à maximização de uma função quadrática. As condições de primeira ordem para (2.72) implicam que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\pi}_n}{\partial \Delta \tilde{x}_n} &= (v - p_{n-1} - h) - 2\lambda_n \Delta \tilde{x}_n - 2\alpha_n \lambda_n (v - p_{n-1} - h) + 2\alpha_n \lambda_n^2 \Delta \tilde{x}_n \\
\Rightarrow \frac{\partial \tilde{\pi}_n}{\partial \Delta \tilde{x}_n} &= 0 \Leftrightarrow (v - p_{n-1} - h)(1 - 2\alpha_n \lambda_n) = 2\lambda_n \Delta \tilde{x}_n (1 - \alpha_n \lambda_n) \\
\Rightarrow \Delta \tilde{x}_n &= \frac{1 - 2\alpha_n \lambda_n}{2\lambda_n (1 - \alpha_n \lambda_n)} (v - p_{n-1} - h)
\end{aligned} \tag{2.73}$$

e as condições de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\pi}_n}{\partial (\Delta \tilde{x}_n)^2} = -2\lambda_n (1 - \alpha_n \lambda_n) \Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{\pi}_n}{\partial (\Delta \tilde{x}_n)^2} < 0 \Leftrightarrow (1 - \alpha_n \lambda_n) > 0 \tag{2.74}$$

Supondo válida a condição de segunda ordem (2.74) e substituindo (2.73) em (2.66) teremos:

$$\Delta x_n = \beta_n (v - p_{n-1} - h) \Delta t_n \tag{2.75}$$

A condição de eficiência de mercado implica que:

$$E\{\Delta \tilde{p}_n / M_n\} = 0 \tag{2.76}$$

onde M_n é o conjunto de informações dos Market Makers em n :

$$M_n = \{\Delta x_1 + \Delta u_1, \dots, \Delta x_{n-1} + \Delta u_{n-1}\} \tag{2.77}$$

Mas de (2.61) temos que:

$$E\{\Delta\tilde{p}_n / M_n\} = E\{\lambda_n(\Delta\tilde{x}_n + \Delta\tilde{u}_n) + h / M_n\} \quad (2.78)$$

e de (2.73):

$$E\{\lambda_n \Delta\tilde{x}_n / M_n\} = E\left\{\lambda_n \frac{1 - 2\alpha_n \lambda_n}{2\lambda_n(1 - \alpha_n \lambda_n)} (\tilde{v} - p_{n-1} - h) / M_n\right\}$$

Como $E\{\tilde{v} / M_n\} = p_{n-1}$ temos que:

$$E\{\lambda_n \Delta\tilde{x}_n / M_n\} = \frac{-h(1 - 2\alpha_n \lambda_n)}{2\lambda_n(1 - \alpha_n \lambda_n)} \Rightarrow E\{\Delta\tilde{p}_n / M_n\} = \frac{h}{2(1 - \alpha_n \lambda_n)} \quad (2.79)$$

Dada a condição de segunda ordem, (2.79) e a condição de eficiência (2.76)

implicam que $h = 0$, provando que Δp_n e Δx_n têm a forma recursiva proposta em (2.60) e (2.61). Além disso, passando o operador esperança sobre (2.72) e substituindo a forma recursiva (2.60) com $h = 0$:

$$\begin{aligned} E\{\pi_n / I_n\} &= (v - p_{n-1} - \lambda_n \beta_n (v - p_{n-1}) \Delta t_n) \beta_n (v - p_{n-1}) \Delta t_n + \\ &\quad \alpha_n (v - p_{n-1} - \lambda_n \beta_n (v - p_{n-1}) \Delta t_n)^2 + \alpha_n \lambda_n^2 \sigma_u^2 \Delta t_n + \delta_n \\ &= (1 - \lambda_n \beta_n \Delta t_n) [\beta_n \Delta t_n + \alpha_n - \alpha_n \lambda_n \beta_n \Delta t_n] (v - p_{n-1})^2 + \alpha_n \lambda_n^2 \sigma_u^2 \Delta t_n + \delta_n \end{aligned}$$

Para que (2.63) seja válido é necessário que:

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= (1 - \lambda_n \beta_n \Delta t_n) (\beta_n \Delta t_n (1 - \alpha_n \lambda_n) + \alpha_n) \\ \Rightarrow \alpha_{n-1} &= \left(1 - \lambda_n \frac{1 - 2\alpha_n \lambda_n}{2\lambda_n(1 - \alpha_n \lambda_n)}\right) \left(\frac{1 - 2\alpha_n \lambda_n}{2\lambda_n(1 - \alpha_n \lambda_n)} (1 - \alpha_n \lambda_n) + \alpha_n\right) = \frac{1}{4\lambda_n(1 - \alpha_n \lambda_n)} \end{aligned}$$

Foi realizado o primeiro passo da demonstração, ou seja, a partir da condição de maximização de lucros, demonstrou-se que a estratégia de negociação (2.60) e a regra de preços (2.61) são coerentes. O *insider* deve definir se “guarda” a sua informação para o futuro ou antecipa suas transações em função de α_n . Este parâmetro funciona como uma medida do valor da informação no futuro. Assim, se α_n é alto, vale a pena trocar operações no mercado agora para operar no futuro. Simultaneamente demonstrou-se que o equilíbrio linear é recursivo ($h=0$). Para que o equilíbrio seja sequencialmente racional no sentido de Krep e Wilson (1982), deve-se

demonstrar que as expectativas são coerentes com o teorema de Bayes. A partir da Eficiência de Mercado, temos que:

$$\tilde{p}_n - \tilde{p}_{n-1} = E\{\tilde{v} - p_{n-1} / \Delta\tilde{x}_n + \Delta\tilde{u}_n\} \quad (2.80)$$

já que dado $p_{n-1}, \Delta\tilde{x}_1 + \Delta\tilde{u}_1, \dots, \Delta\tilde{x}_{n-1} + \Delta\tilde{u}_{n-1}$ não adicionam nenhuma informação.

Definindo $\tilde{y} = \Delta\tilde{x}_n + \Delta\tilde{u}_n$ tem-se:

$$\begin{cases} E\{\tilde{y}\} = E\{\Delta\tilde{x}_n\} = \beta_n E\{\tilde{v} - p_{n-1}\} \Delta t_n = 0 \\ \text{var}\{\tilde{y}\} = \beta_n^2 \Delta t_n^2 \text{var}\{\tilde{v}\} + \text{var}\{\tilde{u}_n\} = \beta_n^2 \Delta t_n^2 \Sigma_{n-1} + \sigma_u^2 \Delta t_n \\ \text{cov}\{\tilde{v} - p_{n-1}, \tilde{y}\} = \beta_n \Delta t_n \text{var}\{\tilde{v}\} = \beta_n \Delta t_n \Sigma_{n-1} \end{cases}$$

Então, pelo teorema da projeção:

$$E\{\tilde{v} - p_{n-1} / \tilde{y}\} = \frac{\beta_n \Delta t_n \Sigma_{n-1}}{\beta_n^2 \Delta t_n^2 \Sigma_{n-1} + \sigma_u^2 \Delta t_n} \tilde{y}$$

Mas, a eficiência de mercado como definida em (2.80) e a regra de preços (2.61) implicam que $E\{\tilde{v} - p_{n-1} / \tilde{y}\} = \lambda_n \tilde{y}$. Logo:

$$\lambda_n = \frac{\beta_n \Sigma_{n-1}}{\beta_n^2 \Delta t_n \Sigma_{n-1} + \sigma_u^2} \quad (2.81)$$

Substituindo (2.81) em (2.67):

$$\frac{\beta_n \Sigma_n}{\sigma_u^2} = \frac{\beta_n \Sigma_{n-1}}{\beta_n^2 \Delta t_n \Sigma_{n-1} + \sigma_u^2} \Leftrightarrow \Sigma_n = \frac{\sigma_u^2 \Sigma_{n-1}}{\beta_n^2 \Delta t_n \Sigma_{n-1} + \sigma_u^2} \quad (2.82)$$

e (2.81) no lado direito de (2.68):

$$\left(1 - \beta_n \frac{\beta_n \Sigma_{n-1} \Delta t_n}{\beta_n^2 \Delta t_n \Sigma_{n-1} + \sigma_u^2}\right) \Sigma_{n-1} = \frac{\sigma_u^2 \Sigma_{n-1}}{\beta_n^2 \Delta t_n \Sigma_{n-1} + \sigma_u^2}$$

Logo, (2.81) e (2.82) são equivalentes a (2.67) e (2.68) e podem ser derivados a partir das expectativas. Em outras palavras, (2.67) e (2.68) são coerentes com a regra de Bayes, logo o equilíbrio é sequencialmente racional. Restaria ainda demonstrar que esta solução é única. Esta demonstração exige muita álgebra e não

traz grandes *insights* sobre o problema. A intuição é a seguinte: juntando (2.67) e (2.68) e simplificando, encontra-se:

$$(1 - \lambda_n^2 \sigma_u^2 \Delta t_n / \Sigma_n)(1 - \alpha_n \lambda_n) = 1/2 \quad (2.83)$$

Dados α_n e Σ_n não negativos, esta é uma equação de terceiro grau, com três raízes. Nem a raiz mais alta nem a mais baixa satisfazem as condições de segunda ordem, o que significa que a raiz do meio é única. Dadas as condições de contorno: $\alpha_N = \delta_N = 0$, podemos encontrar uma família de soluções para o sistema de equações diferenciais apresentado no teorema 2.3 parametrizado por Σ_N . Pode-se demonstrar que existe apenas um valor final Σ_N , tal que o valor inicial Σ_0 é obtido no último passo de uma interação retroativa.

Ao considerar múltiplos estágios, os principais resultados do modelo com apenas um estágio se mantêm. Os *market makers* revêm suas decisões a cada rodada, porém nem toda informação do *insider* está incorporada ao preço no final do período. Isto pode ser verificado a partir de (2.68), onde é claro que Σ_n decai monotonicamente, porém teremos $\Sigma_n > 0$, logo nem toda a informação é repassada para os preços. O *insider* adota uma estratégia de negociação, podendo concentrar sua negociação no início do dia ou no final de acordo com a profundidade do mercado e também de acordo com a sua informação. O mesmo ocorre para os *market makers* que devem decidir uma regra de preços. Se σ_u dobra, λ_n cai pela metade; α_n , δ_n e β_n dobram e Σ_n permanece inalterado. Quer dizer, aumentando o volume de negociação dos *noise traders*, aumenta a profundidade do mercado e os lucros do *insider*, pois menor será a quantidade de informação repassada para os preços via negociação do *insider*. Os lucros do *insider* são proporcionais a $(\Sigma_0 \sigma_u^2)^{1/2}$.

O modelo apresentado nesta seção aborda os dois aspectos discutidos nos modelos anteriores. De fato, o *insider* diminui a liquidez de mercado, porém **parte** da sua informação se transmite para o preço. A grande diferença para o modelo anterior é que nem toda a informação é transmitida. A grande dificuldade do regulador é incentivar a entrada do maior número de agentes no mercado e fazer circular o maior número de informações possíveis com um mercado “honesto”, no sentido que não existe possibilidade de lucros ou prejuízos anormais⁴³. Uma alternativa é distribuir a informação não apenas via preços, mas por outras instituições fora do mercado.

⁴³ É claro que o que significa “anormal” é bastante subjetivo, dado inclusive por padrões culturais.

3. TESTANDO A EFICIÊNCIA DE MERCADO

Os testes de eficiência de mercado são muito antigos na literatura. A hipótese de eficiência tem consequências sobre o comércio internacional, políticas de estabilização, etc. (Turnovsky [1979]). Provavelmente, nenhuma outra hipótese em economia ou finanças foi testada tão intensamente. Estes testes sofreram diversas modificações com o passar do tempo. Fama (1991), além de apresentar uma excelente resenha sobre o tema, dá uma idéia da alteração de enfoque. Os avanços da econometria na análise de séries de tempo, mais especificamente a análise de cointegração, representaram um passo importante no estudo dos mercados financeiros. O grande problema dos testes de eficiência é que deve-se testar conjuntamente o modelo e a eficiência, sendo impossível verificar quais dos dois fatores falharam. No entanto, os testes de eficiência fornecem uma boa intuição sobre o comportamento dos ativos financeiros, sendo úteis para a análise financeira.

3.1 Revisão da Literatura

Para se testar a eficiência de mercado, deve-se definir o que é um mercado eficiente. Como foi visto no capítulo 1, as definições de eficiência estão relacionadas com a transmissão de informação via preços. Fama (1970) divide os testes de eficiência de mercado entre eficiência forte, semi-forte e fraca. Em Fama (1991), ele propõe uma classificação alternativa: testes da previsibilidade do retorno (*return*

predictability), estudo de eventos (*event studies*) e testes de informação privada (*private information*).

Os testes de eficiência fraca procuram verificar se os retornos passados são uma boa previsão para o retorno futuro. A classificação *previsibilidade do retorno* amplia o conceito ao incluir outras variáveis instrumentais como dividendos pagos, *dummies* sazonais, etc. Os testes de eficiência semi-forte estão preocupados com a velocidade que informações públicas se refletem no preço dos títulos. Os testes de eficiência forte, por sua vez, querem saber se existe alguma informação privada que não se transmite para os preços. Ou seja, um mercado é eficiente no sentido forte apenas se ele reflete todas as informações disponíveis **imediatamente** no preço do ativo.

A hipótese de eficiência forte, no entanto, só pode se verificar se não existirem custos de transação (Grossman e Stiglitz (1980)). Jensen (1978) propõe que os preços reflitam as informações até o ponto em que o benefício marginal de obtê-las seja igual ao seu custo⁴⁴. Como no mundo real existem custos de transação, a hipótese de eficiência forte, em princípio, é falsa. Do ponto de vista estatístico, é uma hipótese não testável.

Um resultado importante dos testes mais recentes de eficiência fraca é que apenas uma pequena parcela da variância diária, semanal ou mensal dos retornos é previsível, mas uma parcela muito maior pode ser prevista para a variância nos retornos de 2 a 10 anos. French e Roll (1986) examinaram a relação entre a variância em N períodos e a variância diária (N variando entre dois dias e seis meses),

⁴⁴. Num mercado eficiente, com agentes financeiros em concorrência perfeita, a corretagem é igual ao custo de obtenção da informação.

rejeitando os testes anteriores de eficiência a partir da hipótese de retornos constantes. Após corrigir o efeito do *spread* entre preço de compra e preço de venda (*bid-ask spread*, vide Roll [1984]) conclui-se que o erro nos preços possui um efeito trivial na diferença entre a variância nos horários de negociação e nos horários sem negociação.

Summers (1986) apresenta um modelo em que o elemento autorregressivo de ordem 1, μ em (3.1) abaixo, é menor mas próximo de 1. Assim, em testes de curto prazo qualquer mudança de preços parece permanente. Porém, no longo prazo, o modelo prevê uma autocorrelação negativa elevada. Fama e French (1988), trabalhando com o período 1926-1985, encontraram autocorrelações entre -0,25 e -0,4 para retornos entre 3 e 5 anos, mas muito próximas de zero para variações diárias, semanais ou mensais. Porém, mesmo num período de 60 anos, a amostra é muito pequena, resultando em testes sem muito poder. Os autores enfatizam que suas conclusões não garantem a existência de bolhas irracionais como no modelo de Summers. Uma outra dificuldade ao se testar a eficiência de mercado é que confunde-se bolhas irracionais com variações de preço racionais, decorrentes de um choque sobre o retorno esperado.

Apesar de enfrentar uma série de problemas, os testes de eficiência mudaram certas idéias sobre o comportamento do retorno entre os títulos e no tempo, tendo inclusive repercussões sobre as práticas de mercado. Um teste muito utilizado nos artigos pré 70 consistia em regredir o valor do mercado a termo (ou futuro) com relação ao seu valor à vista na data de vencimento do termo: $F_t = \alpha + \beta S_{t+1}$, onde F_t é o preço do termo em t com exercício em $t+1$ e S_t o valor do títulos à vista em t . A

hipótese (conjunta) de eficiência forte é $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. O problema deste tipo de teste é que ele não leva em conta a não estacionariedade das séries.

Em geral, supõe-se que o comportamento da série de preços dos ativos é dada por:

$$S_t = \mu S_{t-1} + \alpha_t, \quad (3.1)$$

Onde μ é um termo determinístico, indicando o retorno esperado do título e α_t um erro estocástico $\sim N(0, \sigma^2)$, i.i.d.⁴⁵. Se tirarmos o logaritmo de (1), teremos que:

$$s_t = s_{t-1} + \delta + \varepsilon_t \quad (3.2)$$

Onde $s_t = \ln(S_t)$, $\delta = \ln(\mu)$ e ε_t um erro estocástico i.i.d. Como para pequenas variações, o lado esquerdo da equação acima tende para a taxa de variação de S_t : $(S_t - S_{t-1})/S_t$. Como já se viu no modelo de Black & Scholes do capítulo 1, o retorno dos títulos deve seguir um “passeio aleatório” com tendência δ . Elam e Dixon (1988) mostraram que as séries de preço financeiras geralmente possuem raiz unitária⁴⁶ e, portanto, o teste F padrão não poderia ser utilizado. Note que o fato dos preços seguirem um passeio aleatório com tendência já implica numa eficiência fraca. Isto porque não é possível prever o valor da ação a partir da série histórica, visto que ela é não estacionária. A próxima seção apresenta como a econometria trata as séries não estacionárias, com especial atenção para os testes de eficiência de mercado.

⁴⁵. A hipótese de ruídos Gaussianos pode ser relaxada, impondo-se apenas quarto momento finito. Além do mais, nada impede que exista um processo ARMA(p,q) sobre α_t , ou seja, $\alpha_t = \Psi(L)u_t$ com $\Psi(L)$ definindo o processo, L o operador defasagem: $Lz_t = z_{t-1}$.

⁴⁶. Nelsson e Plosser (1982) mostram que para muitas séries macroeconômicas não pode-se rejeitar a hipótese de raiz unitária. Na realidade, não existe um teste inequívoco de raiz unitária. Vide Hamilton (1994).

3.2 Eficiência de Mercado, Raízes Unitárias e Cointegração

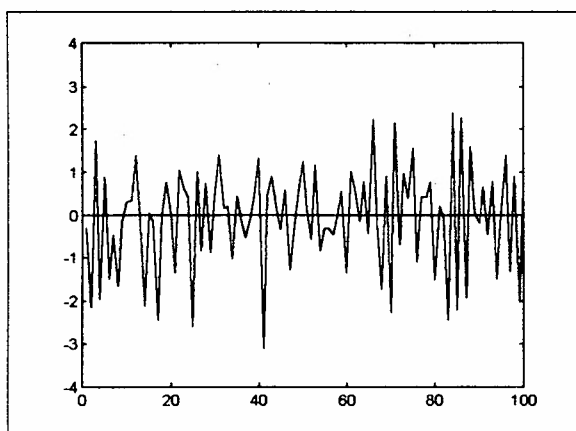
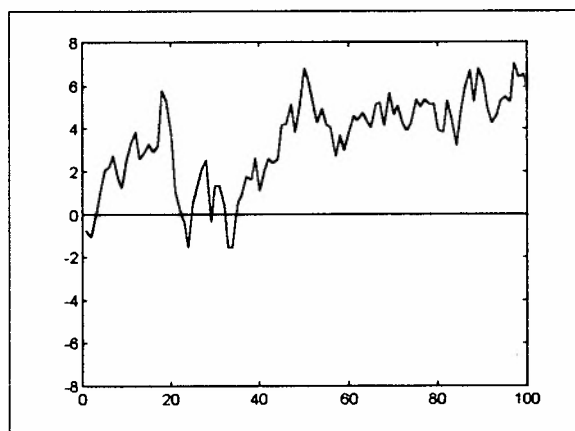
A econometria de séries de tempo desenvolveu-se rapidamente desde a última década, especialmente na análise de processos não estacionários. Uma importante mudança nas bases estatísticas da econometria ocorreu no início dos anos 80, quando Granger (1981) propôs pela primeira vez uma relação entre cointegração e o modelo de correção de erros. Cointegração consegue associar componentes de longo prazo de um grupo de séries de tempo. Esta associação pode ser usada para analisar algumas formas de equilíbrio e introduzir estes equilíbrio dentro dos modelos de séries de tempo. Ao se incluir processos integrados, além dos estacionários, houve uma expansão significativa da base analítica.

Engle e Granger (1990) conceituam cointegração de maneira muito intuitiva. Lembre-se primeiro do exemplo de arbitragem do capítulo 1. O preço do ouro em São Paulo deve ser o mesmo que em Nova Iorque (fora custos de transação e conversão entre as moedas). Assim, no diagrama com os dois preços, a linha de 45° deveria funcionar como um “atrator” dos pares ordenados. Quer dizer, se os preços se descolarem desta linha, deve existir um mecanismo que os traga de volta. Devido a incertezas, rigidez de preços, etc., os preços podem não retornar imediatamente para o “atrator”.

Suponha que existem apenas dois tipos de séries econômicas: as de memória curta e as de memória longa. Num sistema de memória curta, um choque sobre a economia perde efeito após poucos períodos, enquanto no sistema de memória longa ele tem efeito permanente. Formalmente, se s_t é correlacionado com os choques ε_t por:

$$s_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j} \quad (3.3)$$

Então para um choque de memória curta, $a_j \rightarrow 0$ quando j aumenta, o que não ocorre para memória longa. Substituindo a equação (1) em (3), é fácil verificar que $a_j = \mu^j$. Se $|\mu| < 1$, a_j tende a zero para grandes valores de j e a série é denominada $S_t \sim I(0)$ (Integrada de ordem zero). Quando $\mu = 1$, (ou seja, $a_j \neq 0$ para qualquer j) a série possui uma raiz unitária e denomina-se $S_t \sim I(1)$. Na simplificação acima, $I(0)$ significa memória curta e $I(1)$ memória longa. Na realidade, as séries podem ser integradas em ordens superiores: $I(2), I(3), \dots, I(d)$. Uma série $I(d)$ é uma série que precisa ser diferenciada d vezes para obter estacionariedade. A denominação vem do cálculo, pois se a série foi diferenciada d vezes, para recuperar a série original deveríamos integrá-la o mesmo número de vezes. As figuras 3.1 a e b mostram duas simulações da equação (1) para $S_0 = 0$, $\mu = -0,5$ e $\mu = 1$:

Figura 3.1a: $\mu = -0.5$ Figura 3.1b: $\mu = 1.0$ 

Como se pode ver, as flutuações são muito mais óbvias numa série $I(0)$ e estas séries retornam sempre para o valor médio (no caso zero). Para a série $I(1)$ não existe nenhum valor definido para o qual ela seja atraída. O que há de tão especial no valor 1

para μ ? Como é possível notar a diferença entre 1 e 0,999? Uma dificuldade sempre presente na análise empírica de series de tempo econômicas é a determinação da ordem de integração da série. Muitas variáveis estão num caso de fronteira tornando-se quase impossível distinguir entre uma série fortemente autorregressiva $I(0)$ de uma $I(1)$. A identificação de raiz unitária é longe de simples e aparentemente não é possível afirmar que uma série possui raiz unitária, mas apenas negar a hipótese nula de não existência.

Considere um processo gaussiano autorregressivo de ordem 1 [AR(1)]⁴⁷:

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t \quad (3.4)$$

onde u_t - i.i.d. $N(0, \sigma^2)$ e $y_0 = 0$. A estimação por Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) de ρ será:

$$\rho_T = \frac{\sum_{t=1}^T y_{t-1} y_t}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2} \quad (3.5)^{48}$$

Pode-se demonstrar que quando ρ é menor que 1 em valor absoluto teremos:

$$\sqrt{T}(\rho_T - \rho) \xrightarrow{L} N(0, (1 - \rho^2)) \quad (3.6)$$

onde \xrightarrow{L} significa tendência em lei ou em distribuição. É fácil de verificar que se (3.6) valesse também para o caso $\rho = 1$, a distribuição iria colapsar para o ponto de massa zero. Para obter uma distribuição não degenerada para o caso de raiz unitária, multiplica-se ρ_T por T ao invés de \sqrt{T} . Quer dizer, o coeficiente de raiz unitária converge a uma taxa mais alta (T) do que o coeficiente de uma regressão estacionária. Quando o processo verdadeiro é uma raiz unitária, ao se multiplicar

⁴⁷ Isto segue Hamilton (1994)

⁴⁸ Para diferenciar o estimador do valor real, utiliza-se a mesma letra com o subscrito T , indicando o tamanho da amostra a partir da qual ele foi estimado.

$(\rho_T - 1)$ por T é possível obter uma distribuição assintótica utilizável. No entanto esta distribuição não é gaussiana. A distribuição específica será apresentada mais adiante.

Uma série de artigos recentes como Blough (1992) argumentam que a questão não tem resposta para uma base finita de dados. Por exemplo, suponha uma amostra retirada de um processo que segue um passeio aleatório sem tendência:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \text{ modelo verdadeiro (raiz unitária)} \quad (3.7)$$

Considere distinguir o processo acima do seguinte processo:

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \quad |\phi| < 1 \text{ modelo falso (estacionário)} \quad (3.8)$$

A previsão s períodos adiante e o erro quadrático minimizado para o modelo verdadeiro será, respectivamente:

$$\begin{aligned} E(y_{t+s/t}) &= y_t \\ E[y_{t+s} - E(y_{t+s/t})]^2 &= s\sigma^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

A previsão correspondente para o modelo falso será:

$$\begin{aligned} E(y_{t+s/t}) &= \phi^s y_t \\ E[y_{t+s} - E(y_{t+s/t})]^2 &= (1 + \phi^2 + \phi^4 + \dots + \phi^{2(s-1)})\sigma^2 \end{aligned}$$

Sempre pode-se encontrar ϕ suficientemente próximo de um, de tal maneira que não seja possível distinguir entre o verdadeiro modelo e o falso. Mais formalmente, a função de máxima verossimilhança para um processo gaussiano é contínua nos parâmetros. Assim, dada qualquer amostra de tamanho T finito e os infinitésimos δ e ε , para qualquer especificação de raiz unitária com $\rho = 1$, existe uma especificação alternativa $\rho > 1$ tal que a probabilidade do valor da função de máxima verossimilhança implícita na raiz unitária diferir δ daquela implícita no processo estacionário é menor do que ε (qualquer ε, δ). Analogamente, pode-se mostrar que um processo altamente autorregressivo pode ser interpretado como um processo de raiz unitária. Mesmo porque uma série estacionária diferenciada também é estacionária.

Coloca-se então a questão: por que utilizar uma técnica de raiz unitária se pode-se sempre optar por uma representação alternativa. O primeiro ponto é o tradicional *trade-off* entre eficiência e consistência. Se uma restrição é verdadeira, maior será a eficiência de seus estimadores e mais acuradas serão as previsões quando a restrição for imposta. No entanto, se ela for falsa, os estimadores não serão consistentes, independente do tamanho da amostra. Uma maneira de tratar esta questão é analisar o modelo com e sem restrição (no caso a raiz unitária).

Antes de se passar para a análise da distribuição e teste de hipóteses, Verifica-se o que ocorre numa regressão com séries não estacionárias. Uma boa maneira de verificar os problemas decorrentes desta regressão é o caso da “regressão espúria”. Imagine duas séries que não têm nenhuma correlação. Por exemplo, o preço do pão na Sibéria e o número de ratos na cidade de São Paulo. Digamos que ambas sigam um processo com raiz unitária:

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t-1} + u_t \\ x_t &= x_{t-1} + v_t \end{aligned} \quad (3.10)$$

Com $u_t \sim N(0, \sigma_u^2)$ e $v_t \sim N(0, \sigma_v^2)$ independentes. Imagine agora a regressão:

$$y_t = \beta x_t + \varepsilon_t \quad (3.11)$$

Com $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Se substituirmos a hipótese $\beta = 0$ em (3.10), teremos que:

$$y_t = \varepsilon_t \quad (3.12)$$

O que seria contraditório com (3.10). Assim, pode-se encontrar correlações entre séries que não têm (ou não deveriam ter) nenhuma correlação. O tratamento deste tipo de problema com as correlações entre séries integradas é a preocupação das teorias de cointegração. Existem algumas regras simples para combinações lineares de séries integradas (Engle e Granger (1990)):

- (a) se $s_t \sim I(0)$, $a + bs_t$ é $I(0)$
 se $s_t \sim I(1)$, $a + bs_t$ é $I(1)$
- (b) se $s_t, f_t \sim I(0)$, $as_t + bf_t$ é $I(0)$,
- (c) se $s_t \sim I(1)$, $f_t \sim I(0)$, $as_t + bf_t$ é $I(1)$
- porém, **nem sempre:**
- (d) se $s_t, f_t \sim I(1)$, $as_t + bf_t$ é $I(1)$

Definição 3.1: Se s_t e f_t são $I(1)$, mas existe uma combinação linear:

$$z_t = m + as_t + bf_t$$

com $z_t \sim I(0)$ e com média zero, s_t e f_t são ditas cointegradas de ordem 1.

Quando existe evidência de cointegração entre as variáveis, é possível encontrar um “atrator”. Imagine a seguinte construção:

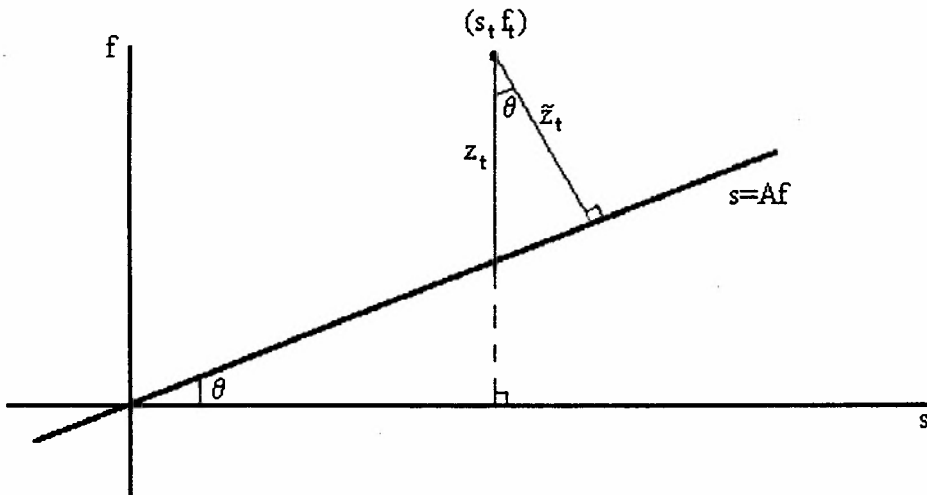
$$\left. \begin{aligned} s_t &= AW_t + \tilde{s}_t \\ f_t &= W_t + \tilde{f}_t \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

onde $W_t \sim I(1)$, $\tilde{s}_t, \tilde{f}_t \sim I(0)$. Segue da regra (c) que $x_t, y_t \sim I(1)$, porém:

$$z_t = s_t - Af_t = \tilde{s}_t - A\tilde{f}_t$$

é $I(0)$ por (b) e tem média zero. Logo s_t e f_t são cointegradas de ordem 1. A linha $s = Af$ no diagrama abaixo extraído de Engle e Granger (1990) corresponde a um “atrator” para as séries s_t e f_t . Se $\tilde{z}_t = \cos\theta \cdot z_t$, então \tilde{z}_t é $I(0)$ e haverá uma tendência dos pontos de circular em torno da linha $s = Af$. Então, cointegração é condição suficiente para a existência de um “atrator” que por sua vez corresponde a certos tipos de equilíbrio que existem na economia.

Figura 3.2: Representação do Vetor de Cointegração como “Atrator”



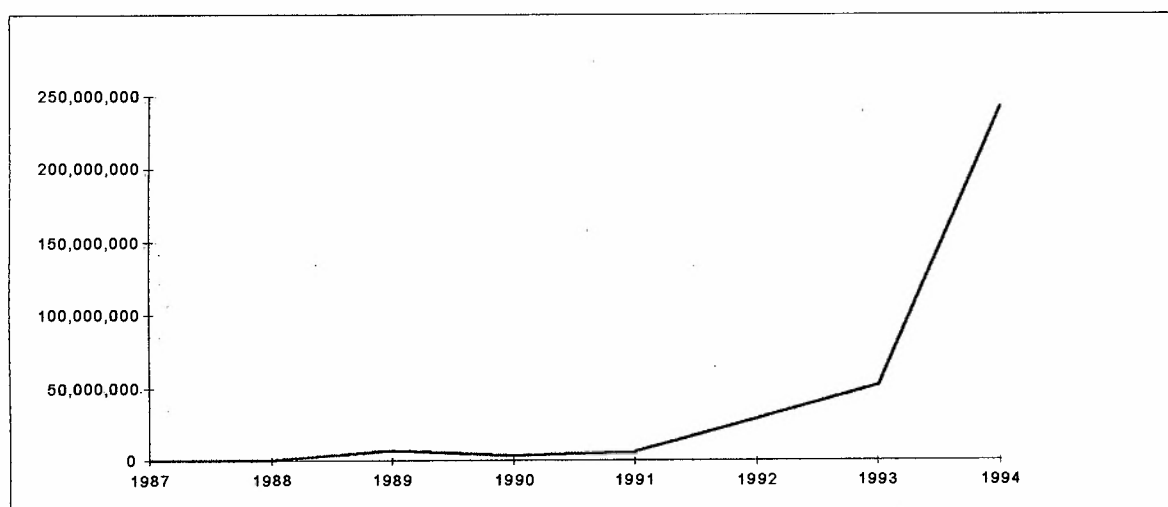
A hipótese de eficiência de mercado sugere que as séries de preços futuros e à vista caminham juntas. Se duas variáveis cointegram, elas caminham juntas. Se as séries não cointegram, elas desviam entre si sem limites, o que é contrário à hipótese de eficiência. Mais do que isto, se as séries cointegram, existe uma relação estável no longo prazo. A existência de cointegração entre estes dois preços garante uma condição necessária, mas não suficiente, para eficiência de mercado (Hakkio e Rush [1989]). A eficiência de mercado implica que o preço *futuro* não subestima nem superestima consistentemente o preço à vista. Logo, para se testar a hipótese de eficiência não basta encontrar um vetor de cointegração válido. Deve-se impor restrições sobre este vetor para testar a hipótese corretamente.

3.3 Testes de Raiz Unitária

Antes de verificar se uma série cointegra com outra, é necessário verificar se ambas as séries apresentam raiz unitária, ou seja são $I(1)$. Nesta seção vamos verificar se a cotação oficial do dólar comercial à vista (de agora em diante, *spot*) e a cotação

do dólar no mercado futuro negociado na BM&F⁴⁹ (de agora em diante *futuro*) apresentam raiz unitária. A BM&F começou suas atividades apenas em 31 de janeiro de 1986, mas hoje em dia é a bolsa de mercadorias e futuros mais importante do país. Apesar das negociações no mercado futuro de dólar terem iniciado em 1986, apenas a partir de abril de 1988 é que se tem uma negociação mais intensa. Como se pode observar na figura 3.3, o volume de negociação no mercado *futuro* de câmbio só é significativo para a nossa escala a partir de 1988. Em 1994, o total de negócios atingiu 242.820.019 milhares de dólares. A nossa amostra vai de 29/04/88 à 30/11/95⁵⁰⁻⁵¹. Trabalharemos com dados de fim de período não justapostos.

Figura 3.3: Volume Financeiro de Contratos Futuros de Dólares



A figura 3.4 apresenta o logaritmo natural das duas séries. Como se pode ver, elas aparentemente caminham juntas. Uma dificuldade na análise destas séries é o

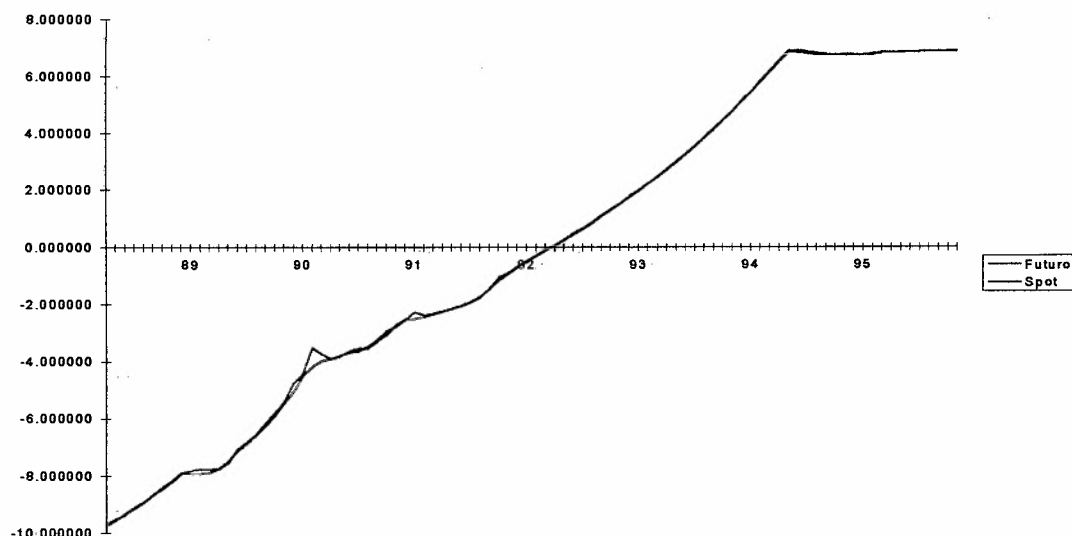
⁴⁹ Atual Bolsa de Mercadorias e de Futuros, antiga Bolsa Mercantil e de Futuros.

⁵⁰ Para se ter uma idéia, no período excluído da amostra, em diversos meses não houve nenhum negócio no último dia do mês. Assim, a cotação teria que ser substituída pela cotação de outra data, distorcendo a série.

⁵¹ Um dos problemas com a análise de cointegração é o número de observações necessárias. Em geral são utilizadas mais de 100 observações.

grande número de planos econômicos no período, introduzindo um tipo de não estacionariedade que não pode ser removida através de diferenciação.

Figura 3.4: Logarítmo Natural do *Spot* e *Futuro* em função do Tempo



As funções de autocorrelação e autocorrelação parcial das séries, juntamente com duas linhas de \pm dois desvios padrão podem ser observadas nas figuras 3.5 e 3.6 e não são contraditórias com a hipótese de raiz unitária. O grande problema é que estas mesmas funções quando estimadas para as séries diferenciadas (figuras 3.7 e 3.8) também não indicam estacionariedade. Isto poderia estar relacionado com problemas econômicos como colocado anteriormente. Por outro lado, as séries poderiam ser $I(2)$. Está completamente fora do escopo desta dissertação tratar de séries $I(2)$. Uma última alternativa seria que esta aparente não estacionariedade estaria ocorrendo devido a presença de outros elementos autoregressivos de baixa frequência. Isto poderá ser verificado a partir da análise dos resíduos do nosso modelo final.

Figura 3.5: Autocorrelação e Autocorrelação Parcial para o Preço do *Spot*

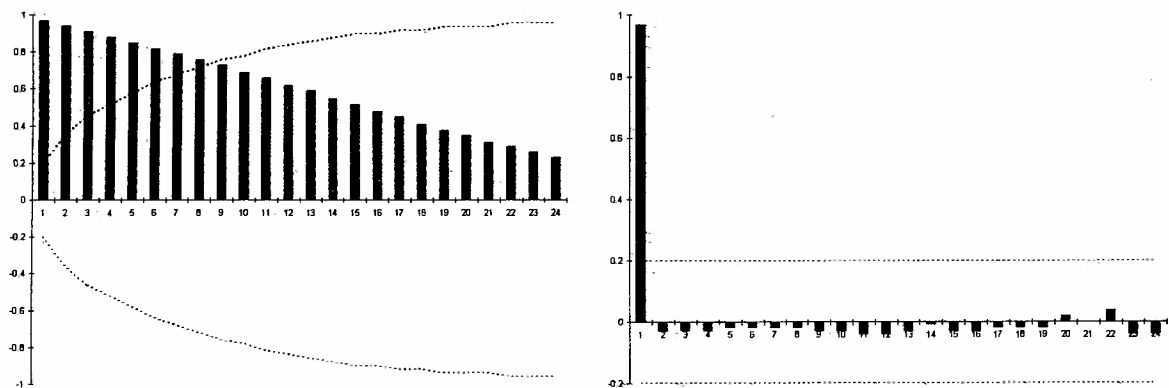


Figura 3.6: Autocorrelação e Autocorrelação Parcial para o Preço do *Futuro*

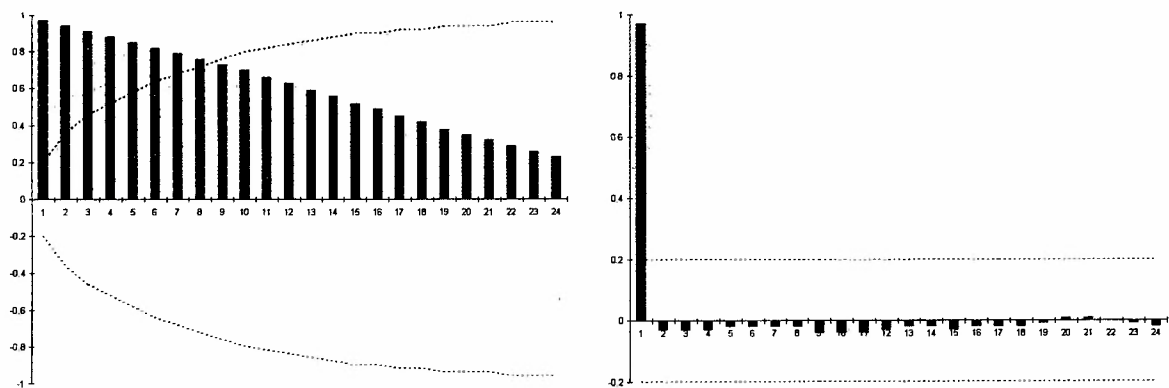


Figura 3.7: Autocorrelação e Autocorrelação Parcial para a primeira diferença *Spot*

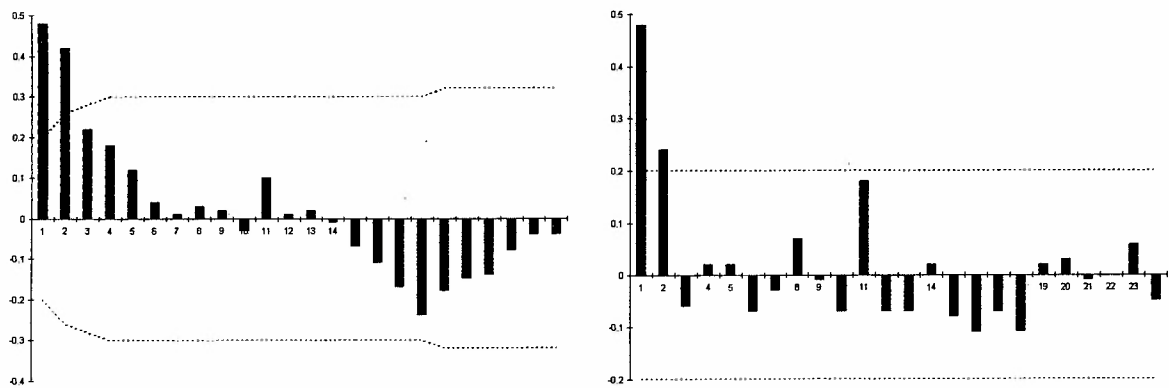


Figura 3.8: Autocorrelação e Autocorrelação Parcial para a primeira diferença *Futuro*

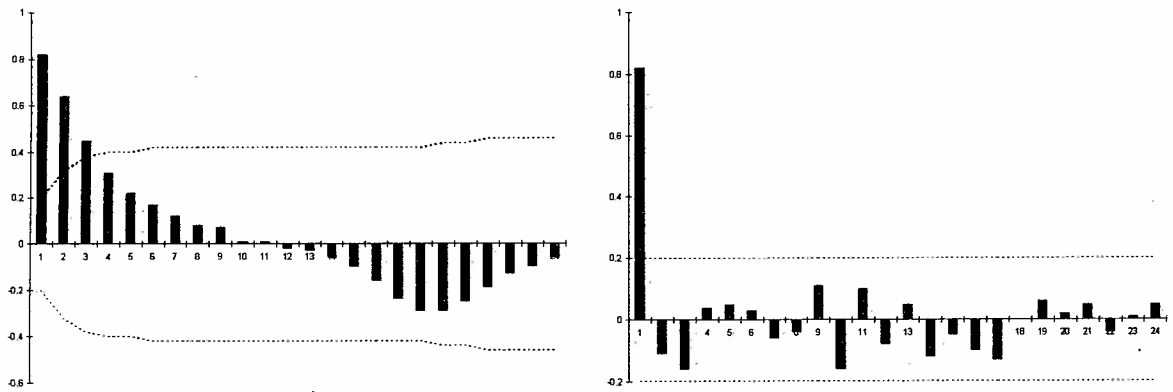


Figura 3.9: Ln do Câmbio à Vista e Primeira Diferença

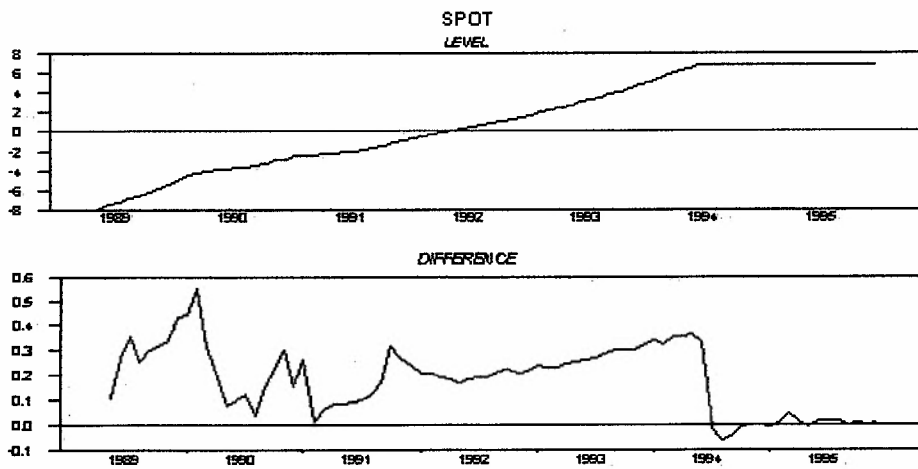
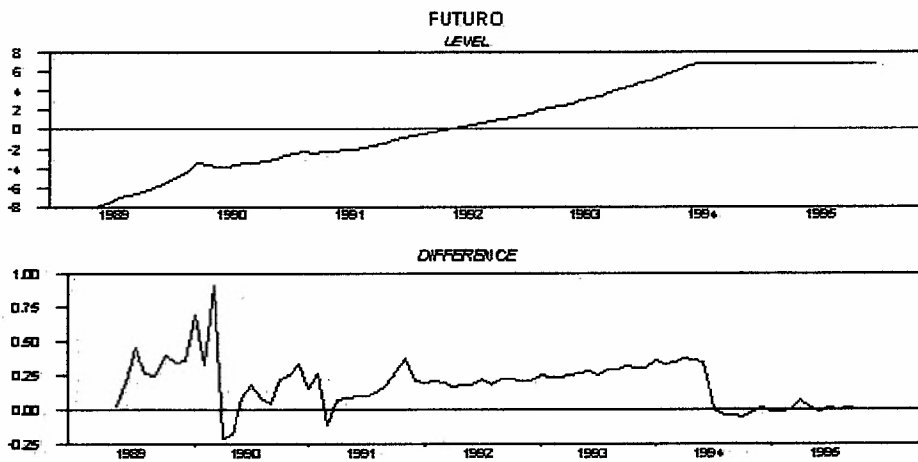


Figura 3.10: Ln do Câmbio *Futuro* e Primeira Diferença



A hipótese de raiz unitária será testada a partir do conjunto de testes proposto por Dickey e Fuller (1979), conhecidos na literatura como testes de Dickey e Fuller Aumentado (ADF). A abordagem dos autores procura controlar a correlação serial incluindo termos autorregressivos de maior ordem na regressão. Suponha que os dados tenham sido gerados realmente por um processo AR(p):

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) y_t = \varepsilon_t \quad (3.14)$$

Onde L é o operador defasagem ($L^p z_t = z_{t-p}$) e $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ i.i.d. e quarto momento finito, $t = 1, 2, \dots$. A equação (3.14) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$y_t = \rho y_{t-1} + \xi_1 \Delta y_{t-1} + \xi_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \xi_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \quad (3.15)$$

Sob a hipótese de uma raiz unitária, a equação (3.15) pode ser escrita como:

$$(1 - \xi_1 L - \xi_2 L^2 - \dots - \xi_{p-1} L^{p-1}) \Delta y_t = \varepsilon_t \quad (3.16)$$

Ora, se todas as outras raízes do polinômio entre parênteses no lado esquerdo da equação (3.16) acima estão fora do círculo unitário, isto significa que podemos invertê-lo. Chamando de $\Psi(L)$ o inverso do polinômio podemos rescrever (3.16) como:

$$\Delta y_t = \Psi(L) \varepsilon_t \quad (3.17)$$

Hamilton (1994) mostra (passo a passo) que isto significa que podemos tratar Δy_t de acordo com a proposição 17.3 (páginas 505/506). A partir desta proposição, pode-se demonstrar que os parâmetros auto regressivos (ξ_i , $i = 1, 2, \dots, p-1$) de uma regressão (3.15) seguem uma distribuição gaussiana. No entanto o parâmetro ρ segue distribuições não padronizadas, mas que podem ser aproximadas, assintoticamente, por funcionais sobre o browniano. Dickey e Fuller (1981) fizeram simulações Monte Carlo para encontrar estas distribuições. Assim, pode-se realizar testes de hipótese mesmo para os parâmetros de termos não estacionários estimados por MQO.

É importante notar que estas distribuições se alteram de acordo com a regressão estimada. Ao invés de (3.15) poderia ser estimado um modelo com uma constante:

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \xi_1 \Delta y_{t-1} + \xi_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \xi_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \quad (3.18)$$

ou ainda, poderia ser incluída uma tendência temporal:

$$y_t = \alpha + \delta t + \rho y_{t-1} + \xi_1 \Delta y_{t-1} + \xi_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \xi_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \quad (3.19)$$

De acordo com as hipóteses sobre o modelo verdadeiro e com a regressão estimada, tem-se diferentes distribuições. A seguir, cada um dos casos será testado para o logaritmo natural do preço à vista e futuro do dólar.

3.3.1 Teste de Raiz Unitária para o Dólar à Vista

Começando com o caso mais simples, estima-se a equação (3.15) supondo que ela é verdadeira. O estimador de mínimos quadrados para ρ (ρ_T) e o teste t usual terão a seguinte distribuição assintótica:

$$T(\lambda / \sigma)(\rho_T - 1) \xrightarrow{L} \frac{(1/2)\{[W(1)]^2 - 1\}}{\int_0^1 [W(r)]^2 dr}, \quad (3.20)$$

onde $(\lambda/\sigma) = (1 - \xi_1 - \xi_2 - \dots - \xi_{p-1})^{-1}$ e $W(\cdot)$ o browniano conforme definido no capítulo 1, apêndice A. O t de student pode ser estimado por MQO sem correções e sua distribuição assintótica é dada por:

$$t \xrightarrow{L} \frac{(1/2)\{[W(1)]^2 - 1\}}{\left\{ \int_0^1 [W(r)]^2 dr \right\}^{1/2}} \quad (3.21)$$

Para estimar (3.15) precisa-se de um palpite para p, o número de elementos autorregressivos. Um palpite inicial seria colocar 12 defasagens, já que os dados são

mensais. Estimando (3.15) com 12 defasagens ($p=13$), encontra-se o seguinte resultado⁵²:

$$\begin{aligned}
 s_t = & 0.9937s_{t-1} + 0.3937\Delta s_{t-1} + 0.2716\Delta s_{t-2} - 0.0755\Delta s_{t-3} + 0.0658\Delta s_{t-4} + \\
 & (.0036) \quad (.1117) \quad (.1163) \quad (.1196) \quad (.1197) \\
 & 0.1001\Delta s_{t-5} - 0.0630\Delta s_{t-6} - 0.0396\Delta s_{t-7} + 0.1369\Delta s_{t-8} - 0.0128\Delta s_{t-9} - \\
 & (.1183) \quad (.1188) \quad (.1187) \quad (.1182) \quad (.1192) \\
 & 0.1088\Delta s_{t-10} + 0.2550\Delta s_{t-11} + 0.0163\Delta s_{t-12} \\
 & (.1187) \quad (.1151) \quad (.1091)
 \end{aligned}$$

Onde s_t é o valor contemporâneo do dólar à vista, s_{t-i} o valor defasado i vezes e Δs_{t-i} a diferença do preço à vista defasado i vezes. Em parênteses o desvio padrão dos estimadores. Nesta análise utilizou-se $t = 1989:IV$ à $1995:XII$, já que os dados de $1988:III$ à $1989:III$ foram utilizados para as defasagens. Assim, o número efetivo de observações foi 79. Para esta estimativa, o teste ρ de Dickey-Fuller aumentado será:

$$\frac{79 \cdot (0.9937 - 1)}{1 - .3937 - .2716 + .0755 - .0658 - .1001 + .0630 + .0396 - .1369 + .0128 + .1088 - .2550 - .0163} = -8.25$$

A distribuição (3.20) está tabelada, por exemplo em Hamilton (1994) página 762. Tomando esta tabela, por interpolação linear, obtém-se o valor para uma amostra de 79 observações com 1% de significância: -13.1; com 2.5%: -10.4 e com 5%: 7.8. Como $-8.25 < -7.8$, a hipótese nula que o \ln do câmbio à vista possui uma raiz unitária é recusada ao nível de 5%, porém pode-se aceitá-la ao nível de 2.5%. O teste t ADF apresenta a distribuição (3.21) com os seguintes valores críticos para a nossa amostra (Hamilton, pg. 763): 1%: -2.61; 2.5%: -2.24 e 5%: -1.95. Para a nossa estimativa teremos:

$$(.9937 - 1) / (.0036) = -1.75 > -1.95$$

⁵² Todas as regressões para os testes de raiz unitária foram feitas através do programa SCA Statistical System ©. Os procedimentos utilizados pelo programa podem ser encontrados em Liu e Hudak (1986).

Logo aceitou-se a hipótese nula com 5% de significância. A hipótese que são necessárias apenas doze defasagens pode ser testada pelo teste t convencional⁵³ que, para a nossa amostra (78 graus de liberdade), apresenta um valor crítico de 1.99. O valor estimado será:

$$0.0163/0.1091 = 0.15$$

Como $0.15 < 1.99$ aceita-se a hipótese nula que são necessários apenas 12 defasagens. Reestimando a regressão com 11 defasagens, o valor estimado para a décima primeira defasagem foi 0.2610, com desvio padrão 0.1046, portanto o t calculado é 2.5. Logo recusa-se a hipótese nula de que são necessários apenas 11 defasagens. Portanto, doze defasagens parece ser uma boa aproximação para p-1. Além do mais, todos os estimadores dos termos autorregressivos estão fora do círculo unitário.

Se estimamos o modelo (sempre por mínimos quadrados) com a regressão indicada em (3.18), supondo $\alpha=0$, a distribuição assintótica de ρ_T e de t será:

$$T(\lambda / \sigma)(\rho_T - 1) \xrightarrow{L} \frac{(1/2) \{ [W(1)]^2 - 1 \} - W(1) \cdot \int_0^1 W(r) dr}{\left\{ \int_0^1 [W(r)]^2 dr - \left[\int_0^1 [W(r)] dr \right]^2 \right\}}, \quad (3.22)$$

com (λ/σ) e $W(\cdot)$ conforme definidos anteriormente e

$$t \xrightarrow{L} \frac{(1/2) \{ [W(1)]^2 - 1 \} - W(1) \cdot \int_0^1 W(r) dr}{\left\{ \int_0^1 [W(r)]^2 dr - \left[\int_0^1 [W(r)] dr \right]^2 \right\}^{1/2}} \quad (3.23)$$

Estimando a regressão (3.18) encontramos:

⁵³ Lembre-se que os estimadores dos coeficientes autorregressivos seguem uma distribuição gaussiana.

$$\begin{aligned}
s_t = & 0.0877 + 0.9916s_{t-1} + 0.3481\Delta s_{t-1} + 0.2331\Delta s_{t-2} - 0.0930\Delta s_{t-3} + \\
& (.0427) \quad (.0036) \quad (.1111) \quad (.1149) \quad (.1169) \\
& 0.0476\Delta s_{t-4} + 0.0722\Delta s_{t-5} - 0.0830\Delta s_{t-6} - 0.0616\Delta s_{t-7} + 0.1005\Delta s_{t-8} - \\
& (.1170) \quad (.1161) \quad (.1161) \quad (.1161) \quad (.1162) \\
& 0.0369\Delta s_{t-9} - 0.1305\Delta s_{t-10} + 0.2088\Delta s_{t-11} - 0.0457\Delta s_{t-12} \\
& (.1168) \quad (.1161) \quad (.1144) \quad (.1105)
\end{aligned}$$

O teste ρ ADF será:

$$\frac{79.(0.9916 - 1)}{1 - .3481 - .2331 + .0930 - .0476 - .0722 + .0830 + .0616 - .1055 + .0369 + .1305 - .2088 + .0457} = -1.52$$

Portanto, o valor obtido para r está muito acima do valor crítico tabulado para 5% de significância: -13.5 e aceitamos a hipótese nula de raiz unitária. O teste t para a mesma hipótese é:

$$(0.9916 - 1) / 0.0036 = -2.33$$

Que é maior que o valor crítico tabulado de -2.91 para 5% de significância.

Logo, aceita-se a hipótese nula também para o teste t . A hipótese de que apenas 12 defasagens é suficiente também é aceita. Neste caso, a hipótese de que apenas 11 defasagens seriam suficientes não pode ser recusada com 5% de significância, mas pode ser recusada com 2%, o que nos leva a manter como razoável a inclusão de 12 defasagens. Deve-se ainda testar a hipótese conjunta $\alpha = 0$ e $\rho = 1$. Isto pode ser feito através do teste F , calculado da seguinte forma:

$$F_T = (2S_u^2)^{-1}[(T-1)S_0^2 - (T-3)S_u^2] \quad (3.24)$$

onde S_u é o desvio padrão dos resíduos na regressão estimada e S_0 é dado por:

$$S_0^2 = (T-1)^{-1} \sum_{t=2}^T (s_t - s_{t-1})^2$$

Dickey e Fuller (1981) apresentam a distribuição assintótica do teste F acima para a regressão (3.18) com $\alpha=0$. Para a nossa regressão, temos que:

$$S_u^2 = 0.0196737; \quad S_0^2 = 0.0523822$$

$$\Rightarrow F_T = \frac{78 \times 0.0523822 - 76 \times 0.0196737}{2 \times 0.0196737} = 65.84$$

Assim recusa-se a hipótese nula para qualquer nível de significância e não se pode confirmar a hipótese conjunta $\alpha = 0$ e $\rho = 1$. Se $\alpha \neq 0$, isto significa que ρ estimado converge para uma distribuição gaussiana. Logo, o teste t deve ser comparado com as tabelas normais para t e, portanto, deve-se recusar a hipótese nula de raiz unitária para 5% de significância, aceitando apenas para 2%. Finalmente, ao estimar a regressão (3.19), obtem-se os seguintes resultados:

$$s_t = -1.1691 + 0.8509s_{t-1} + 0.0294t + 0.3955\Delta s_{t-1} + 0.3394\Delta s_{t-2} +$$

$$(.4565) \quad (.0510) \quad (.0106) \quad (.1075) \quad (.1163)$$

$$0.0150\Delta s_{t-3} + 0.1420\Delta s_{t-4} + 0.1778\Delta s_{t-5} + 0.0190\Delta s_{t-6} + 0.0138\Delta s_{t-7} +$$

$$(.1183) \quad (.1169) \quad (.1173) \quad (.1169) \quad (.1142)$$

$$0.1793\Delta s_{t-8} + 0.0523\Delta s_{t-9} - 0.0640\Delta s_{t-10} + 0.2883\Delta s_{t-11} + 0.0895\Delta s_{t-12}$$

$$(.1141) \quad (.1161) \quad (.1135) \quad (.1129) \quad (.1163)$$

O teste ρ de raiz unitária:

$$\frac{79(0.8509 - 1)}{1 - .3955 - .3394 - .0150 - .1420 - .1778 - .0190 - .0138 - .1793 - .0523 + .0640 - .2883 - .0895} = 18.18$$

Ou seja, aceita-se o teste ρ de Dickey-Fuller aumentado para qualquer significância. O teste t será:

$$(0.8509 - 1)/(0.051) = -2.92$$

Como $-2.92 > -3.47$, o valor crítico para t, aceita-se também por este teste a hipótese (nula) de raiz unitária. Resta ainda verificar duas hipóteses conjuntas: $\rho = 1$, $\alpha = 0$ e $\delta = 0$ e $\rho = 1$ e $\delta = 0$ com α irrestrito em (3.19). As estatísticas para a primeira e a segunda hipótese serão dadas, respectivamente por (Dickey e Fuller[1981]):

$$F_T = (3S_u^2)^{-1}[(T-1)S_0^2 - (T-4)S_u^2]$$

$$F_T = (2S_u^2)^{-1} \{ (T-1)[S_0^2 - (y_0 - y_1)^2] - (T-4)S_u^2 \} \quad (3.25)$$

onde

$$y_0 = (T-1)^{-1} \sum_{t=2}^T s_t; \quad y_1 = (T-1)^{-1} \sum_{t=2}^T y_{t-1}$$

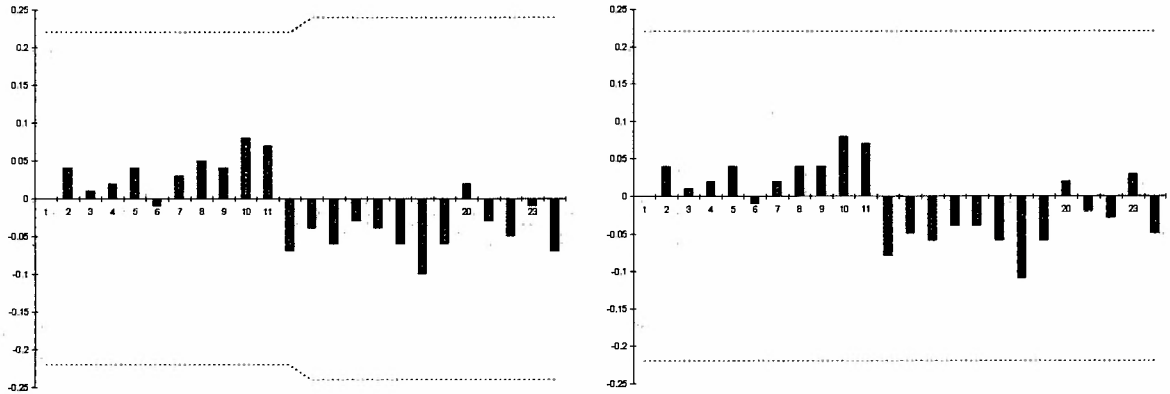
Logo:

$$S_u^2 = 0.0179427; \quad S_0^2 = 0.0523822$$

$$F_T = \frac{78 \times 0.0523822 - 75 \times 0.0179427}{3 \times 0.0179427} = 50.90$$

O que nos leva a refutar a hipótese $\rho = 1$, $\alpha = 0$ e $\delta = 0$.

Figura 3.11: Autocorrelação e Autocorrelação Parcial para os Resíduos da Regressão (3.18) - Dólar à Vista



A estatística F para a segunda hipótese, com α irrestrito, será:

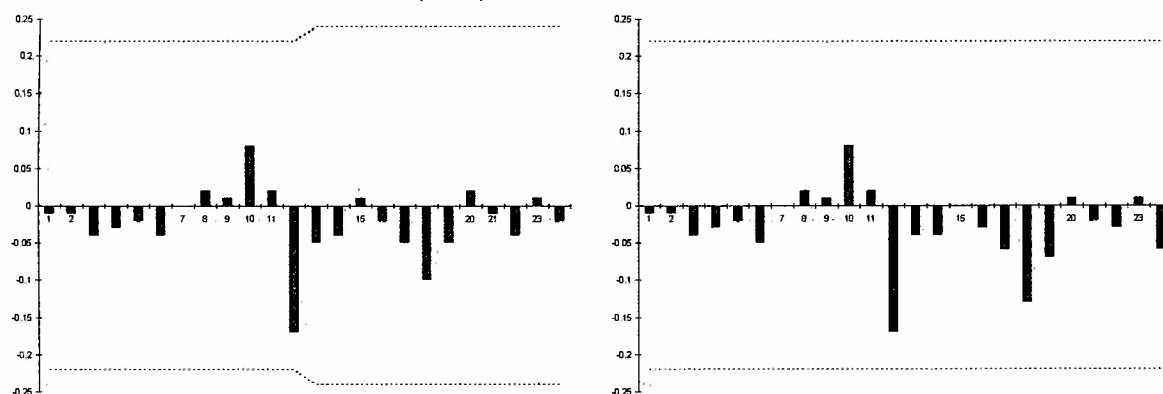
$$y_0 = 1.199125; \quad y_1 = 1.014669$$

$$F_T = \frac{78 \times (0.0523822 - 0.0340240) - 75 \times 0.0179427}{2 \times 0.0179427} = 2.40$$

Como 2.40 é menor que 6.60, o valor tabelado para a hipótese nula com $\rho=1$ e $\delta=0$, notamos que o teste F de Dickey e Fuller aumentado é consistente com a especificação de raiz unitária. Além do mais, pode-se aceitar que são necessárias 12 defasagens e recusar a hipótese de apenas 11 defasagens. Apesar de se ter recusado a hipótese nula em alguns testes (com 5% de significância), aparentemente a especificação de raiz unitária é boa para a série de preços do dólar à vista. Além do mais, a função de autocorrelação e autocorrelação parcial para os resíduos das

regressões (3.18) e (3.19) como pode-se verificar nas figuras abaixo indicam que os resíduos são estacionários, o que reforça nossa conclusão.

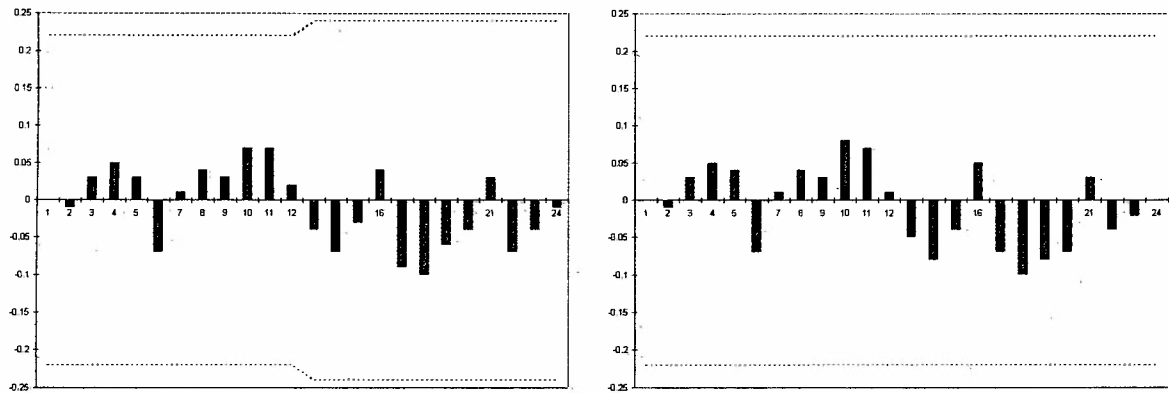
Figura 3.12: Autocorrelação e Autocorrelação Parcial para os Resíduos da Regressão (3.19) - Dólar à Vista



3.3.2 Teste de Raiz Unitária para o Dólar Futuro

Todos os testes realizados para o dólar à vista (*spot*) foram realizados para o dólar futuro e estão sumarizados nas tabelas 3.1; 3.2 e 3.3 abaixo, juntamente com os resultados descritos anteriormente para o *spot*. O comportamento do dólar futuro não é muito diferente do observado para o dólar à vista, com uma diferença fundamental. No caso do dólar futuro, o parâmetro estimado para o primeiro parâmetro da série diferenciada (ξ_1) é próximo de 1 nas três regressões estimadas. Na primeira regressão o valor estimado foi 0.9732 (0.1116), com o desvio padrão em parênteses, na segunda 0.9248 (0.1119) e na terceira 0.9101 (0.1080). Isto reforça o primeiro palpite de que a nossa série poderia ser $I(2)$. Como já se colocou, esta hipótese não será testada nesta tese. Por outro lado, as figuras abaixo indicam que os resíduos são estacionários.

Figura 3.13: Autocorrelação e Autocorrelação Parcial para os Resíduos da Regressão (3.18) - Dólar Futuro



Como se pode ver nas tabelas abaixo, a hipótese de raiz unitária é aceita na maior parte dos testes realizados. É muito difícil com base na teoria supor qual seria a regressão ideal a ser utilizada. Por um lado, poderia se pensar que a moeda é um ativo que não rende juros, portanto a sua taxa de retorno deveria ser zero. Isto faria sentido apenas se a taxa de inflação no Brasil e nos EUA fosse a mesma. Com taxas diferentes, a constante na regressão (3.18) pode ter qualquer valor. Por outro lado, a tendência temporal poderia superar a constante (registrando o efeito inflacionário). No caso do dólar à vista, conseguimos aceitar o teste F pelo menos para um caso. Assim, para o *spot*, a hipótese de raiz unitária é robusta à mudanças na regressão estimada. Apenas na regressão 2, recusamos $\alpha=0$ e aceitamos a hipótese de raiz unitária (com $\alpha \neq 0$) apenas com 2% de significância. O mesmo ocorre com o *futuro*.

De qualquer maneira, é muito difícil afirmar se uma série é ou não $I(1)$. A discussão do último parágrafo afasta-se do principal objetivo dos testes de raiz unitária: encontrar uma representação com parcimônia gerando uma aproximação razoável do processo verdadeiro e não verificar se o processo verdadeiro é literalmente $I(1)$. Neste sentido, os testes de Dickey e Fuller aumentado realizados para as duas séries de preço indica que a representação de raiz unitária pode ser boa

para ambas. Em especial, preocupa-se em testar se as séries cointegram e para isto precisa-se antes de tudo verificar se as séries são I(1). Estes resultados permitem ir adiante e testar o vetor de cointegração entre as duas séries. O número de defasagens, além de ter sentido econômico (já que os dados são mensais), demonstrou-se consistente. Assim pode-se partir para a análise de cointegração utilizando este número de defasagens.

Tabela 3.1: Síntese de Resultados para Equação (3.15)

Regressão Estimada:						
$y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^{12} \xi_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad y_t = s_t, f_t \quad t = -12, -11, \dots, 79$						
SPOT				FUTURO		
Parâmetro	H ₀	Teste	Resultado	Parâmetro	Teste	Resultado
$\rho_T = 0.9937$ (.0036)	$\rho = 1$	$\rho_{ADF} = -8.25$	aceita 2.5%	$\rho_T = 0.9973$ (.0017)	$\rho_{ADF} = -6.71$	aceita
		$t_{ADF} = -1.75$	aceita		$t_{ADF} = -1.59$	aceita
$\xi_{12}^T = 0.0163$ (.1091)	$\xi_{12} = 0$	$t = 0.15$	aceita	$\xi_{12}^T = 0.0023$ (.1028)	$t = 0.02$	aceita
$\xi_{11}^T = 0.2610$ (.1046)	$\xi_{11} \neq 0$	$t = 2.5$	aceita	$\xi_{11}^T = 0.1996$ (.0997)	$t = 2.00$	aceita

Tabela 3.2: Síntese de Resultados para Equação (3.18)

Regressão Estimada:						
$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^{12} \xi_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad y_t = s_t, f_t \quad t = -12, -11, \dots, 79$						
SPOT				FUTURO		
Parâmetro	H ₀	Teste	Resultado	Parâmetro	Teste	Resultado
$\rho_T = 0.9916$ (.0036)	$\alpha = 0, \rho = 1$	$\rho_{ADF} = -1.52$	aceita	$\rho_T = 0.9962$ (.0017)	$\rho_{ADF} = -1.36$	aceita
		$t_{ADF} = -2.33$	aceita		$t_{ADF} = -2.24$	aceita
		$F_{ADF} = 65.84$	rejeita		$F_{ADF} = 560$	rejeita
	$\alpha \neq 0, \rho = 1$	$t = -2.33$	aceita 2%		$t = -2.24$	aceita 2%
$\xi_{12}^T = -.0457$ (.1105)	$\xi_{12} = 0$	$t = -0.41$	aceita	$\xi_{12}^T = 0.0596$ (.1048)	$t = -0.59$	aceita
$\xi_{11}^T = 0.1963$ (.1079)	$\xi_{11} \neq 0$	$t = 1.82$	aceita 10%	$\xi_{11}^T = 0.1361$ (.1026)	$t = 1.33$	aceita 20%

Tabela 3.3: Síntese de Resultados para Equação (3.19)

Regressão Estimada:						
$y_t = \alpha + \delta + \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^{12} \xi_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad y_t = s_t, f_t \quad t = -12, -11, \dots, 79$						
SPOT				FUTURO		
Parâmetro	H ₀	Teste	Resultado	Parâmetro	Teste	Resultado
$\rho_T = 0.8509$ (.0510)	$\rho=1$	$\rho_{ADF} = 18.18$	aceita	$\rho_T = 0.9266$ (.0280)	$\rho_{ADF} = 17.74$	aceita
		$t_{ADF} = -2.92$	aceita		$t_{ADF} = -2.62$	aceita
	$\alpha=0; \rho=1; \delta=0$	$F_{ADF} = 50.90$	rejeita		$F_{ADF} = 405$	rejeita
	$\alpha \neq 0; \rho=1; \delta=0$	$F_{ADF} = -2.40$	aceita		$F_{ADF} = 270$	rejeita
$\xi_{12}^T = 0.0895$ (.1163)	$\xi_{12}=0$	$t = 0.77$	aceita	$\xi_{12}^T = 0.0594$ (.1116)	$t = 0.53$	aceita
$\xi_{11}^T = 0.3046$ (.1116)	$\xi_{11} \neq 0$	$t = 2.73$	aceita	$\xi_{11}^T = 0.2433$ (.0250)	$t = 2.26$	aceita

Notas: ρ_T : estimador de ρ ; ξ_i^T : estimador de ξ_i ; o subscrito _{ADF} indica que a distribuição assintótica é ADF, mesmo que o estimador seja igual ao de MQO; resultado “aceita” significa que a hipótese nula foi aceita a um nível de significância de 5% ou superior; resultado “rejeita” indica que a hipótese foi rejeitada para qualquer nível de significância; níveis intermediários de significância são apresentados após a palavra “aceita”. Atenção: a hipótese testada para ξ_{11}^T difere das outras, portanto aceitar a hipótese a 10% é pior do que a 5, o contrário ocorrendo nos outros casos; valores críticos em Hamilton (1994) e Banarjee et all (1993).

Dos dez testes realizados, a hipótese de raiz unitária é rejeitada em apenas duas vezes para o *spot* e 3 para o *futuro*. A série de preços do câmbio futuro parece menos ajustada à especificação, porém não pode-se dizer que é inconsistente. Admitir que as duas séries seguem um caminho aleatório implica numa eficiência no sentido fraco. Este resultado era já esperado. Mesmo porque uma boa parte das séries econômicas não rejeitam esta hipótese. Seria preocupante se este mercado não fosse eficiente no sentido fraco no longo prazo. Resta saber se os mercados são eficientes no sentido semi-forte.

A tabela abaixo apresenta os resultados obtidos por Lai e Lai (1991) para o logaritmo das séries de preços mensais do *futuro* e à vista das moedas: Libra Esterlina

(LE), Marco Alemão (MA), Franco Suíço (FS), Dólar Canadense (DC) e Yen Japonês (YJ) no Mercado Internacional de Moedas (IMM) em Chicago. Os autores apresentam apenas um teste comparável com os realizados: a equação (3.18) com $\alpha=0^{54}$. Repete-se na última linha, o resultado obtido anteriormente para o dólar negociado na BM&F (US):

Tabela 3.4: Comparação com Resultados para outras Moedas

Moeda	p	T	$t_T Spot$	$t_T Futuro$	t10%	t5%	t1%
US	13	79	-2.33	-2.24	-2.59	-2.91	-3.55
LE	5	194	-1.72	-1.71	-2.57	-2.88	-3.46
MA			-1.45	-1.57			
FS			-2.13	-2.18			
DC			-1.67	-1.58			
YJ			-1.10	-1.03			

Notas: Na tabela acima, t_T representa o valor estimado por MQO para t e $tX\%$ o valor crítico calculado com $X\%$ de significância

Os resultados obtidos por Lai e Lai não diferem muito dos nossos. Apesar dos valores de t se apresentarem mais elevados na nossa estimativa, a hipótese de raiz unitária não pode ser rejeitada a 5% de significância.

3.4 Testes de Cointegração

Aceitando a hipótese da presença de uma raiz unitária nas duas séries estudadas, pode-se estudar a relação entre as duas séries. Se houver uma relação de equilíbrio entre as séries, pode-se encontrar um vetor de cointegração válido para elas e testar hipóteses sobre este vetor. Considere um vetor $y_t \equiv (y_{1t}, \dots, y_{nt})^{55}$, a

⁵⁴ Lai e Lai, além deste teste realizam um teste (também do tipo t) de Philips Perron. Tanto ADF como Philips-Perron são repetidos para 3 defasagens com as variáveis em nível e diferenciadas.

⁵⁵ A partir de agora, sempre que uma variável aparecer em negrito, significa que se trata de um vetor e não de um escalar.

representação de um VAR(p) para este vetor pode ser dada de maneira análoga a (3.18):

$$\Delta \mathbf{y}_t = \xi_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \xi_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \xi_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} + \alpha + \xi_0 \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.25)$$

$$E(\varepsilon_t) = 0, E(\varepsilon_t \varepsilon_\tau') = \begin{cases} \Omega & t = \tau \\ 0 & t \neq \tau \end{cases}$$

Suponha que cada variável individualmente, y_{it} , seja $I(1)$, porém existem r combinações lineares em \mathbf{y}_t que são $I(0)$, ou seja, r vetores de cointegração. Isto implica que ξ_0 pode ser escrito como:

$$\xi_0 = -\mathbf{A}\mathbf{B}', \quad (3.26)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz $(n \times r)$ e \mathbf{B}' $(r \times n)$. Numa amostra de $T+p$ observações, com ε_t gaussiana, o *log-likelihood* para $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_T)$ condicionado a $(\mathbf{y}_{-p+1}, \mathbf{y}_{-p+2}, \dots, \mathbf{y}_0)$, é dado por:

$$L(\Omega, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p-1}, \alpha, \xi_0) = (-Tn/2)\log(2p) - (T/2)\log |\Omega| - (1/2) \sum \left[(\Delta \mathbf{y}_t - \xi_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} - \xi_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2} - \dots - \xi_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} - \alpha - \xi_0 \mathbf{y}_{t-1})' \times \Omega^{-1} (\Delta \mathbf{y}_t - \xi_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} - \xi_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2} - \dots - \xi_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} - \alpha - \xi_0 \mathbf{y}_{t-1}) \right] \quad (3.27)$$

O algoritmo de Johansen permite encontrar $(\Omega, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p-1}, \alpha, \xi_0)$, de forma a maximizar (3.27) sujeito à restrição que ξ_0 possa ser escrito como em (3.26). Note que a condição (3.26) para existência de cointegração implica que existem r vetores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ tais que $\mathbf{b}_i \mathbf{y}_t$ é estacionário para qualquer i . Se estes vetores existirem, qualquer combinação linear deles também será um vetor de cointegração. Assim, costuma-se normalizar os vetores impondo, por exemplo, $b_{11}=1$. Utilizando-se uma abordagem ao problema de cointegração como a de Engle e Granger (1987)⁵⁶, os

⁵⁶ Duarte, Sanvicente e Clini (1992), a partir do trabalho de Chowdhury (1991), testam se o mercado à vista cointegra com o mercado a termo para três ações: Paranapanema, Petrobrás e Sharp. Os autores utilizam o procedimento de Engle-Granger mas, corretamente, não testam hipóteses sobre o vetor de cointegração.

resultados dependem da decisão de normalização que é por definição arbitrária. Neste sentido, o procedimento de Engle-Granger não permite uma inferência estatística forte com relação ao vetor de cointegração, o que pode ser feito a partir do procedimento de Johansen. O valor maximizado da função (3.27) sujeito à restrição (3.26), é dado por:

$$L^* = -(T/2) \sum_{i=1}^r \log(1-\lambda_i) \quad (3.28)$$

onde λ_i é o autovalor da matriz de variância-covariância entre os resíduos calculados a partir do método proposto por Johansen, ordenados de maneira decrescente: $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r$. Quando não se realiza nenhuma restrição sobre o vetor de cointegração, o máximo irrestrito da função será dado por:

$$L^* = -(T/2) \sum_{i=1}^n \log(1-\lambda_i) \quad (3.28')$$

Como a hipótese de que existem apenas r vetores implica $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_n = 0$, o teste da hipótese que existem r vetores de cointegração (quer dizer, $n-r$ raízes unitárias) (H_r) pode ser baseado no dobro da diferença entre (3.28) e (3.28'):

$$T^* = -T \sum_{i=r+1}^n \log(1-\lambda_i), r=0,1,\dots,n-1. \quad (3.29)$$

T^* é conhecido como a estatística de traço. Ela compara H_r com a alternativa de existirem n vetores cointegrados. Uma outra forma de testar a hipótese de cointegração seria testar a hipótese nula de r vetores cointegrados contra a hipótese de $r+1$ vetores. Neste caso, deveríamos utilizar a estatística:

$$\lambda_{\max} = -T \log(1-\lambda_{r+1}) \quad (3.30)$$

Ambas as estatísticas possuem distribuições não padronizadas. Além do mais estas distribuições se alteram conforme incluímos variáveis determinísticas como uma

tendência ou um intercepto. Considerando um VAR(p) genérico com tendência e intercepto:

$$\Delta \mathbf{y}_t = \xi_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \xi_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \xi_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} + \mathbf{AB}' \mathbf{y}_{t-1} + \alpha + \delta t + \varepsilon_t \quad (3.31)$$

Vamos decompor δ e α em:

$$\delta = \mathbf{A} \delta_1 + \mathbf{A}_\perp \delta_2 \quad (3.32)$$

$$\alpha = \mathbf{A} \alpha_1 + \mathbf{A}_\perp \alpha_2 \quad (3.33)$$

onde \mathbf{A}_\perp é uma matriz ($n \times n-r$) ortogonal a \mathbf{A} . Pode-se então rescrever (3.31) utilizando (3.32) e (3.33):

$$\Delta \mathbf{y}_t = \xi_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \xi_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \xi_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} + \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \alpha_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} \mathbf{y}_{t-1}^* + \mathbf{A}_\perp \alpha_2 + \mathbf{A}_\perp \delta_2 t + \varepsilon_t \quad (3.34)$$

onde $\mathbf{y}_{t-1}^* = (\mathbf{y}_{t-1}', 1, t)$

A partir de (3.34) pode-se separar os componentes determinísticos entre aqueles que fazem parte do espaço de cointegração (α_1 e δ_1) daqueles que aparecem na regressão, mas não pertencem ao espaço vetorial de cointegração (α_2 e δ_2). Pode-se definir cinco casos, de acordo com as hipóteses sobre os termos determinísticos.

Caso 1: $\alpha=0$, $\delta=0$. Nenhum termo determinístico. É um caso que deve ser utilizado com bastante atenção, já que um intercepto geralmente é necessário devido a unidade de medida das variáveis.

Caso 2: $\alpha_2=0$, $\delta=0$, α_1 irrestrito. Neste caso o modelo não permite tendências lineares. O único componente determinístico é o intercepto no vetor de cointegração.

Caso 3: $\delta=0$, $\alpha_1=0$, α_2 irrestrito. O modelo permite uma tendência linear via α_2 , mas assume-se que não há tendência nas relações de cointegração.

Caso 4: $\delta_2=0$, α_1 , α_2 , δ_1 irrestritos. Ao restringirmos δ_2 a zero, o modelo não permite tendências quadráticas. Porém, como $\delta_1 \neq 0$, o espaço de cointegração possui

uma tendência linear, o que significa que o modelo permite variáveis estacionárias em tendência ('*trend stationary*'). Esta estacionariedade pode se manifestar em uma das variáveis ou em uma relação de equilíbrio.

Caso 5: Nenhuma restrição. Com parâmetros irrestritos, o modelo permite tendências lineares na série diferenciadas, logo, uma tendência quadrática na variável em nível. Uma tendência quadrática é muito raro de ocorrer nas séries econômicas, além de ser muito difícil a sua interpretação. Assim, se for aceito este modelo, muitas vezes é recomendável retestá-lo com mais informações como, por exemplo, o crescimento da população.

Onde partiu-se do caso mais restrito para o menos restrito. Infelizmente, não são apenas as tendências que afetam a distribuição assintótica. A inclusão de praticamente qualquer *dummy* altera esta distribuição. No nosso caso, vamos estudar a seguinte relação entre preços à vista (S_t) e futuro (F_t):

$$\ln(S_t) = \alpha + \beta \ln(F_{t-1,t}) + \varepsilon_t \quad (3.35)$$

onde S_t é o preço à vista do dólar em t , $F_{t-1,t}$ é a cotação do câmbio futuro em $t-1$, com vencimento em t e ε_t um erro gaussiano. Como viu-se na seção 3, os logaritmos destes preços podem ser considerados não estacionários. Assim, para fazer inferências sobre uma relação de equilíbrio entre estas duas séries, deve-se encontrar um vetor de cointegração entre eles. Note que (3.35) pode ser escrito como:

$$s_t - \alpha - \beta f_{t-1,t} = \varepsilon_t \quad (3.35')$$

onde simplesmente utilizou-se o minúsculo para identificar as variáveis logaritmizadas. As figuras 3.10 e 3.11 abaixo analisam as duas séries. O gráfico do primeiro quadrante mostra a série diferenciada comparando-a com o valor estimado pela cointegração. O segundo gráfico dá uma idéia comparativa com a distribuição

normal e os gráficos dos quadrantes inferiores dão uma idéia do comportamento dos resíduos.

Figura 3.14: Análise da Série e da primeira Diferença: *Spot*

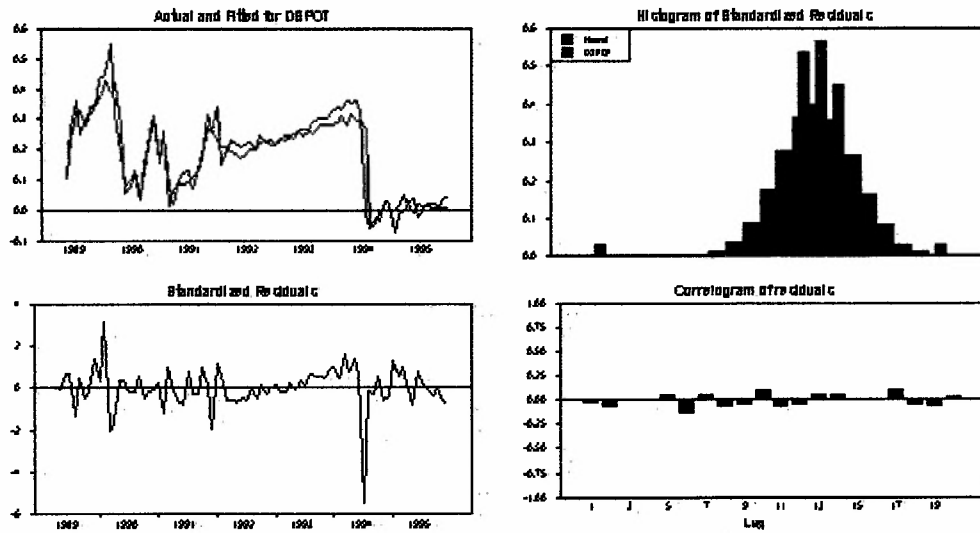
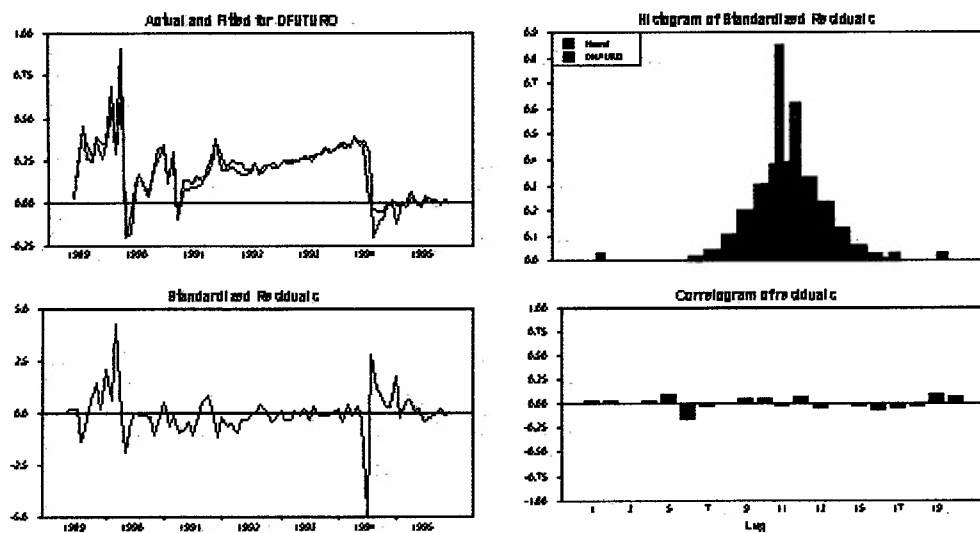


Figura 3.15: Análise da Série e da primeira Diferença: *Futuro*



A equação (3.35) pode também ser escrita na forma vetorial:

$$(s_t \ f_{t-1,t} \ 1) \times (1 \ -\beta \ -\alpha)' = \varepsilon_t \quad (3.36)$$

Basta chamar $y_t = (s_t, f_{t-1,t}, 1)$ e $B = (1 - \beta - \alpha)$ para verificar a relação entre (3.36) e (3.25). Deve-se então testar a hipótese de existência de apenas um vetor de cointegração válido. Testando os cinco modelos apresentados acima para a nossa série⁵⁷, encontra-se o seguinte resultado:

Tabela 3.5: Resultados de Cointegração

Modelo	r = 0		r = 1	
	T*	T* 90%	T*	T* 90%
1	49.133	10.347	0.686	2.980
2	20.079	17.794	3.067	7.503
3	16.297	13.308	2.339	2.706
4	19.892	22.946	4.582	10.558
5	14.639	15.941	3.363	2.706

O princípio para se testar a hipótese conjunta da ordem de r e a presença de termos determinísticos é discutida em Johansen (1992). No nosso caso, se o mercado for eficiente, deve-se ter um intercepto zero no vetor de cointegração. Assim, existe uma premissa econômica para se aceitar o modelo 3. No entanto o modelo 3 não permite que a hipótese de eficiência seja testada.

Na Tabela 3.5 nota-se que a hipótese de não cointegração ($r=0$) é recusada nos modelos 1, 2 e 3 e não é rejeitada para $r=1$. No entanto, os modelos 4 e 5 não recusam a hipótese de não cointegração nem aceitam a hipótese de apenas um vetor cointegrado. Partindo do modelo 4 ou 5, não se poderia afirmar que as séries cointegram. O modelo 5, não tem muito sentido econômico. O modelo 4 também não é muito simples de se justificar economicamente. O que poderia significar uma tendência no vetor de cointegração ao invés de uma constante? Além do mais não temos evidências empíricas que a tendência seja diferente de zero nos testes de raiz

⁵⁷ Os testes foram realizados com o programa CATS in RATS©. Procedimentos em Hansen e

unitária para nenhuma das variáveis. Se duas variáveis não apresentam uma tendência, uma combinação linear das duas também não deve apresentar. Logo, não existem motivos teóricos nem evidências empíricas que sustentem os modelos 4 e 5.

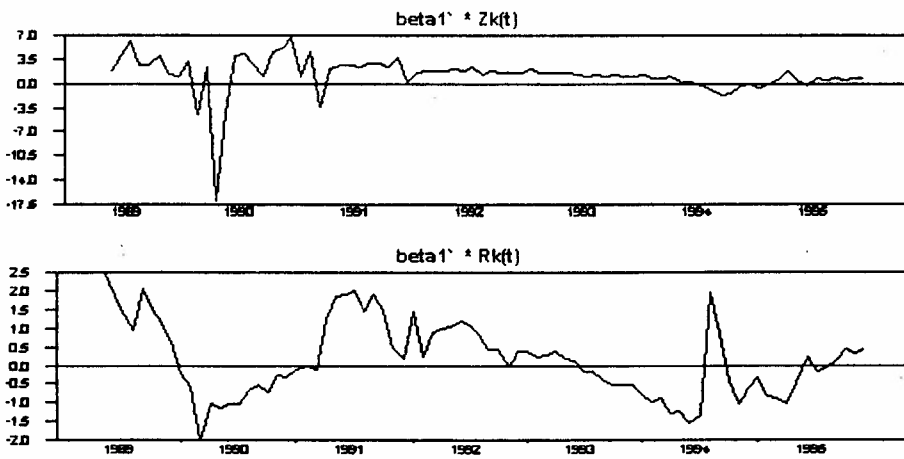
Deve-se aproveitar o conhecimento adquirido na teoria desenvolvida nos capítulos anteriores para tentar realizar algumas hipóteses sobre o modelo mais adequado. O CAPM nos diz muito pouco sobre as relações autorregressivas presentes num modelo deste tipo. No entanto, ele mostra a relação entre dois ativos de risco, o que não pode ser derivado imediatamente de B&S. Assim, raiz unitária nas séries é consistente com B&S e o caso 2 apresentado acima é consistente com o CAPM. Isto porque como o mercado futuro pode ser considerado um substituto perfeito para o mercado à vista, é natural considerar que suas taxas de retorno devem ser iguais.

Os modelos do capítulo 2 também fornecem informações sobre o modelo ideal a ser utilizado. O modelo apresentado nas seções 2.2 à 2.5 conclui que o mercado futuro é um previsor perfeito para o mercado à vista. Esta seria mais uma maneira de utilizar o modelo 2 como base para os nossos testes.

Apesar da estatística apresentada na tabela 3.5 rejeitar a existência de cointegração para o modelo 4, λ_{\max} contradiz a conclusão a partir do traço. O valor encontrado para esta estatística com $r=0$ e $r=1$, respectivamente, foi 15.31 e 4.58 para valores críticos correspondentes: 12.89 e 4.58. Isto significa que para esta estatística pode-se aceitar a hipótese de apenas um vetor cointegrado. O resultado do teste de λ_{\max} para o modelo dois foi: 17.01 e 3.07 para valores críticos: 10.29 e 7.50. Assim a hipótese de que existe apenas um vetor cointegrado não parece ruim.

A figura 3.16 apresenta o primeiro vetor de cointegração para as nossas séries. A diferença entre o primeiro e o segundo gráfico é que o primeiro apresenta o desequilíbrio atual como função de todas as dinâmicas de curto prazo, enquanto o gráfico de baixo apresenta o desequilíbrio “limpo” dos efeitos de curto prazo. Note que o primeiro gráfico parece estacionário e o segundo não. Isto pode ser mais uma indicação que as nossas séries sejam $I(2)$, apesar dos testes formais não refutarem que elas seriam $I(1)$.

Figura 3.16: Vetor de Cointegração sem Restrições



É interessante olhar os autovalores da matriz:

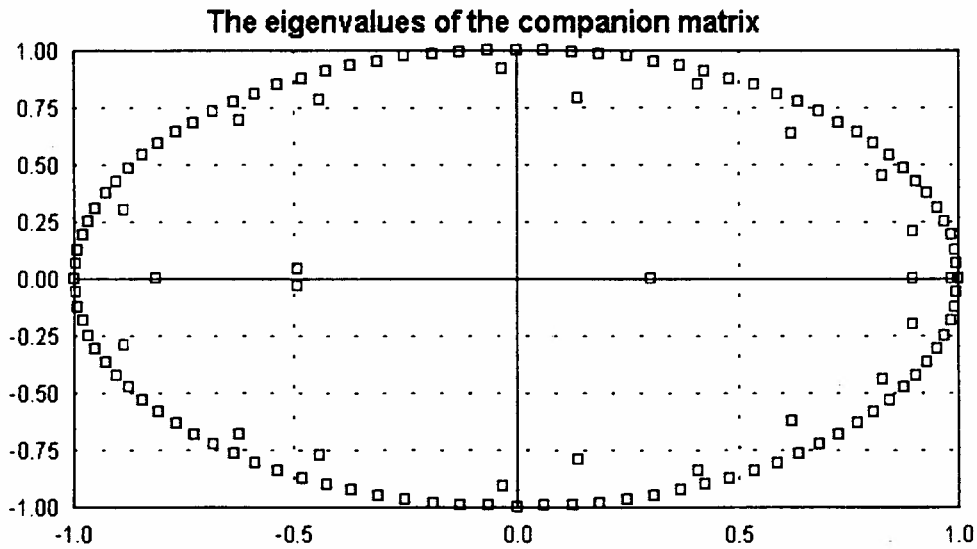
$$E = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & \dots & E_{k-1} & E_k \\ I_p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_p & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Onde E_i vem do VAR em nível:

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \dots + A_k y_{t-k} + \mu + \varepsilon_t \quad (3.38)$$

A figura abaixo apresenta os autovalores. Realmente, temos apenas um autovalor realmente próximo de 1, o que reforça a hipótese de apenas um vetor cointegrado válido. No entanto, uma série de autovalores estão próximos do círculo unitário, como fica claro na figura.

Figura 3.17: Autovalores da Matriz no Modelo Irrestrito



Aceitando que existe apenas um vetor de cointegração válido para as séries, apesar das indicações de relações não estacionárias de segunda ordem., pode-se normalizar o primeiro elemento do vetor cointegrado já com r restrito a 1. O resultado de longo prazo para o modelo 2 e para o modelo 4, respectivamente, é:

$$s_t = 1.008f_t - 0.084 \text{ (modelo 2)}$$

$$s_t = 1.052f_t - 0.009 \text{ (modelo 4)}$$

sendo que na primeira equação -0.084 representa a constante e -0.009 na segunda representa uma tendência. As estimativas com $\beta=1$ para os modelos 2 e 4 foram:

$$s_t = f_t - 0.252 \text{ (modelo 2)}$$

$$s_t = f_t - 0.002 \text{ (modelo 4)}$$

Vale a pena verificar o comportamento do vetor de cointegração após todas as restrições impostas: $r=1$, $\alpha=0$ e $\beta=0$. A figura 3.18 mostra que os problemas apresentados anteriormente se mantêm, ou seja, a evidência de relações de ordem 2 permanece. Observando a figura seguinte, nota-se que esta evidência se acentua no modelo restrito. Note-se uma segunda raiz unitária extremamente próxima do círculo unitário em 3.19. Isto também poderia estar ligado a um erro na definição do *rank*. Quer dizer, aceitamos a hipótese de $r=1$, quando na realidade o *rank* correto seria 2. Como temos apenas duas variáveis ($n=2$), admitir $r=2$ implica dizer que as séries são estacionárias, o que contradiz os testes da seção 3.3.

Figura 3.18: Vetor de Cointegração Restrito

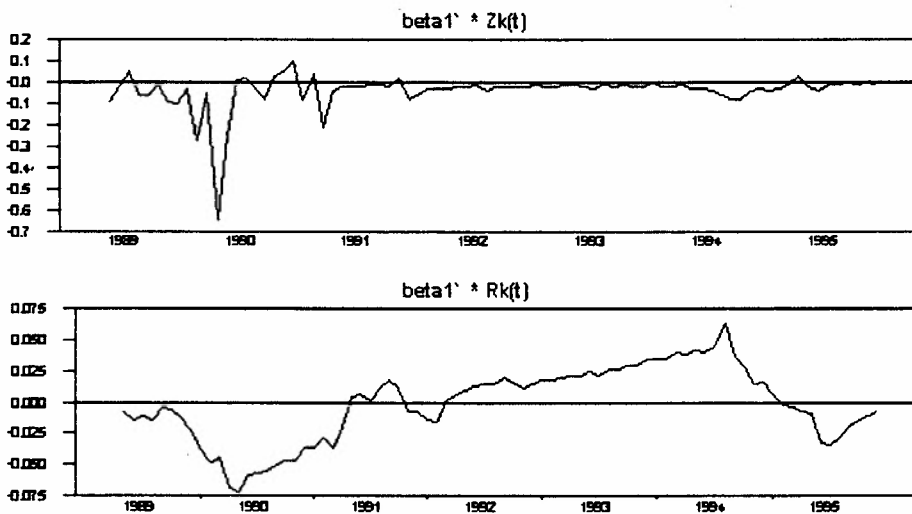
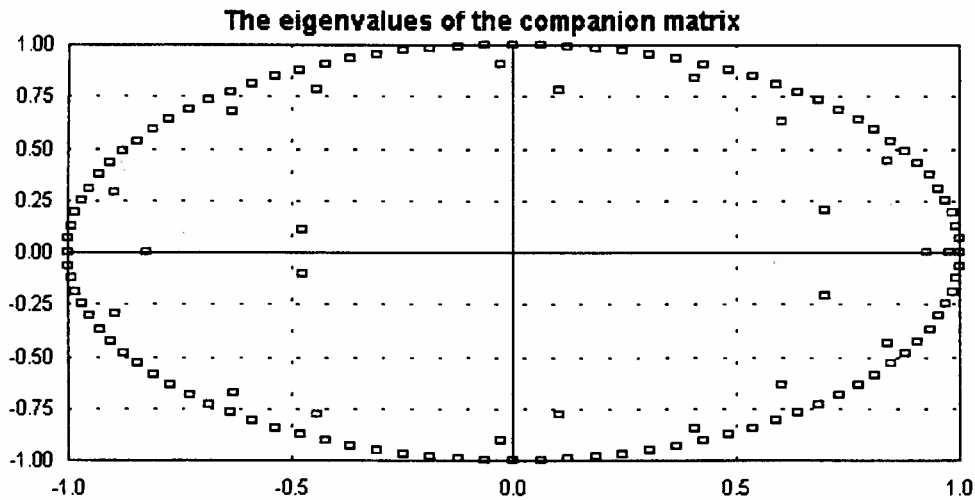


Figura 3.19: Autovalores da Matriz no Modelo Restrito



A eficiência semi-forte implica que s_t e f_t cointegram e que $\beta=1$ e $\alpha=0$ em (3.36). Logo, o teste de eficiência é um teste de restrições lineares sobre o vetor de cointegração. Impondo primeiro apenas uma restrição, $\beta=1$, e depois a restrição conjunta, $\beta=1$ e $\alpha=0$, chegamos aos resultados sumarizados na tabela 3.6. Johansen (1991) mostrou que teste de 'likelihood' para este tipo de hipótese tem uma distribuição χ^2 com graus de liberdade iguais ao número de restrições testadas. A tabela apresenta também uma comparação com os resultados obtidos por Lai e Lai (1991).

Tabela 3.6: Comparação de Resultados de Cointegração com outras Moedas

Modelo	Moeda	Parâmetros $B=(1,-\beta,-\alpha)$	T* $H_0: r=0$	Teste de Hipóteses $H_0: \beta=1$ $H_0: \beta=1, \alpha=0$	
2	USD	(1, -1.008, 0.084)	20.08	13.15	13.94
	LE	(1, -1.002, -0.001)	36.75	0.623	15.47
	MA	(1, -0.998, -0.005)	60.63	2.292	36.74
	FS	(1, -0.997, 0.007)	28.06	1.427	28.78
	DC	(1, -1.001, -0.001)	73.17	2.571	37.64
	YJ	(1, -0.994, 0.034)	33.15	2.571	5.13
4	USD	(1, -1.052, 0.009)	19.89	1.99	12.17

Notas: os valores críticos para T* tabulados em Hansen e Juscelius (1995) são dados por 17.794 (90%), 19.993 (95%) e 24.735 (99%) para o modelo 2 e 22.946 (90%), 25.468 (95%) e 30.651 (99%) para o modelo 4. O teste $\beta=1$ com α irrestrito apresenta uma distribuição $\chi^2(1)$ com os seguintes valores críticos: 2.71 (10%), 3.84 (5%) e 6.63 (1%). O teste $\beta=1, \alpha=0$ apresenta uma distribuição $\chi^2(2)$ com valores críticos 4.61 (10%), 5.99 (5%) e 9.21 (1%).

Comparando estes resultados com os obtidos por Lai e Lai, nota-se que para as outras moedas negociadas em Chicago a evidência de cointegração é mais forte que no nosso caso. Apesar disso, pode-se aceitar a hipótese de cointegração com 95% de significância, enquanto esta evidência é aceita com 99% de significância para todas as outras moedas. No entanto, a hipótese $\beta=1$ não é aceita no nosso estudo nem com 1% de significância, ao contrário do resultado encontrado para as outras moedas, onde ela é aceita mesmo com 10% de significância. Finalmente a hipótese conjunta é recusada tanto para as nossas séries como para as séries de Lai e Lai, com exceção do Yen japonês onde ela é aceita com 5% de significância. Quando se utiliza o modelo 4, a hipótese de cointegração é aceita apenas com 75% de significância para a estatística do traço. Por outro lado, a hipótese $\beta=1$ é aceita com 10% de significância. No entanto, lembre-se que o modelo 4 não faz sentido teórico nem empírico.

Se a hipótese $\beta=1$ e $\alpha \neq 0$ é aceita, significa que o mercado futuro pode explicar movimentos do mercado à vista, mas o preço do futuro é um estimador viesado para o preço futuro do mercado à vista. Os nossos resultados não aceitam a hipótese

conjunta $\beta=1$ e $\alpha=0$ em nenhum modelo testado, assim como em Lai e Lai (1991). Além do mais, nem a primeira hipótese com α irrestrito pode ser aceita para o modelo 2. A hipótese de cointegração é aceita com menos força para a BM&F do que para a bolsa de Chicago. Esta evidência pode ser interpretada como uma violação da hipótese de eficiência de mercado, da condição de prêmio ao risco zero ou ambos.

Na realidade, a hipótese de prêmio ao risco zero e eficiência de mercado deve ser separada em duas hipóteses testáveis. Lewis (1989) coloca que o viés encontrado para o mercado futuro, como previsor do mercado à vista é consistente com a hipótese de que o mercado está aprendendo racionalmente o processo de formação de preços no mercado de câmbio. No seu estudo, metade dos erros de previsão podem ser explicados por erros bayesianos. O grande problema dos resultados encontrados para o Brasil é que o mercado futuro não é capaz de explicar nem os movimentos do mercado à vista, ao contrário da evidência para a bolsa de Chicago. Esta conclusão dá uma indicação de ineficiência no mercado brasileiro de câmbio mais forte do que nos outros países. Mesmo que se considerasse um prêmio ao risco positivo, a hipótese $\beta=1$ com α irrestrito deveria ser aceita.

As conclusões em cima do modelo estimado indicam que existe um problema de eficiência no mercado de câmbio. Porém, como foi apontado diversas vezes, aparentemente as séries podem ser consideradas $I(2)$. Assim, uma extensão natural dos testes realizados, seria testar as hipóteses num modelo de ordem de integração superior. Uma outra limitação do nosso modelo é a base de dados reduzida. Este problema só pode ser solucionado com o tempo. Finalmente um caminho para pesquisas futuras seria incluir outras variáveis no modelo. Por exemplo, pode-se incluir a variação da taxa de juros. O primeiro teste seria verificar se a taxa de juros

pode ser considerada exógena com relação às nossas séries de preço. Aceitando-se esta hipótese, a taxa de juros pode funcionar como uma *dummy* para os planos econômicos, já que a sua variação é muito alta quando um plano é lançado.

Uma outra idéia seria incluir o volume de operações. No modelo formulado no capítulo 2 (seções 2.7 e 2.8), viu-se que os Market Makers definem o preço em função do *fluxo de ordens*. Assim, o volume no mercado futuro e ou no mercado à vista poderia influenciar o nível de preços. Nada impede que esta(s) variáve(l)(is) seja(m) endógena(s). Neste caso, teríamos 2 (ou 3) vetores cointegrados. Se conseguirmos aceitar a hipótese de eficiência com um modelo deste tipo, implica que o modelo de Kyle (1991) explica bem o mercado de câmbio brasileiro. A grande dificuldade de se utilizar Kyle é que o sistema apresentado no teorema 2.3 deve ser determinado simultaneamente. Assim é difícil definir o que seria um teste de eficiência neste modelo.

Apesar das limitações acima, este teste fornece alguma intuição sobre o mercado de câmbio brasileiro. As estatísticas apresentadas apresentam valores razoáveis, apesar de destoarem um pouco dos dados encontrados para outras moedas. Assim, pode-se aceitar que as diferenças encontradas devem-se a diferenças nos mercados estudados e não a problemas na amostra ou na metodologia.

Conclusão

A proposta desta dissertação foi verificar do ponto de vista teórico e empírico, o que ocorre com os modelos de precificação de ativos na presença de assimetria de informações. No capítulo 1 foram apresentados modelos consagrados aos quais não foi dado um tratamento consistente à informação. No capítulo 2, a informação foi incluída. A pergunta que se coloca é se há ganhos ao incluir a informação ou apenas complicamos sobremaneira os nossos modelos. Acredito que existe um ganho significativo em dar um tratamento específico à informação.

Uma forma de tentar dimensionar este problema é através do tamanho do mercado de capitais. A capitalização das bolsas de valores brasileiras como porcentagem do PIB em 1993 era menor do que a maioria dos países em desenvolvimento, como pode-se observar na amostra da tabela 1.1. Também é menor do que o observado para os países desenvolvidos. Este problema poderia ser explicado parcialmente pela imperfeição da informação. Como se viu no capítulo 2, o detentor de informação privilegiada pode realizar lucros monopolísticos e diminuir a liquidez do mercado, pois as instituições financeiras diminuem o volume de negociação para se proteger desta assimetria. Por outro lado, quando o *insider* entra no mercado, sua informação se transmite para os preços (ao menos parcialmente), o que deveria ser desejável.

Valor de Mercado das CIAs abertas 1993 (%PIB)

América Latina		Leste Asiático		Países Desenvolv.	
Argentina	26%	Coreia	44%	Alemanha	29%
Brasil	20%	Hong Kong	450%	EUA	71%
Chile	108%	Malasia	274%	Japão	70%
México	57%	Taiwan	88%	Reino Unido	163%

Fonte: The Guide to World Equity Markets 94/95 - Euromoney Books

Uma outra maneira de dimensionar o problema é considerar o fluxo de capitais internacionais. Investimentos transnacionais existem há muito tempo⁵⁸, mas o fim da convertibilidade do dólar em 1971, a abolição dos controles de câmbio pelo governo Thatcher em 1979 e, mais recentemente, as grandes privatizações alteraram as características deste mercado. Assim, a partir da década de 80 este tipo de recurso passou a ser fundamental para os países. Em termos brutos, a aquisição de ações transnacionais, *Cross-border Equities* sempre se concentrou nos mercados desenvolvidos. No entanto, olhando-se o fluxo líquido que mede o total de dinheiro novo alocado em cada país, a situação muda um pouco de figura. Sabe-se que os chamados mercados emergentes têm competido cada vez mais intensamente com os mercados desenvolvidos por capital. Apesar de ser um mercado extremamente volátil, sem realizar um estudo muito profundo, nota-se, por exemplo, que a participação dos países emergentes no total deste mercado passou de menos que 8% em 86 para mais de 30% em 93.

⁵⁸ . Para citar apenas um exemplo, as cruzadas do século XII foram financiadas com capital italiano (Genova e Veneza) e holandês (Amsterdã).

Fluxo líquido de títulos transnacionais

	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Mercados	36.73	3.30	28.17	65.53	-12.60	81.20	29.59	97.20
Desenvolvidos								
Estados Unidos	19.11	16.47	-1.39	11.42	-14.61	11.02	-4.20	21.10
Europa	33.38	29.67	22.75	47.11	15.29	23.35	24.83	56.10
Japão	-15.76	-42.84	6.81	7.00	-13.28	46.83	8.96	20.00
Mercados	3.34	5.88	3.47	10.07	13.16	15.78	22.45	52.00
Emergentes								
Leste Asiático	3.43	6.03	2.45	3.36	3.89	4.73	10.95	30.00
América Latina	0.20	0.43	0.72	6.98	9.89	11.15	9.64	20.00
Outros	-0.29	-0.58	0.30	-0.27	-0.62	-0.10	1.86	2.00
Resto do Mundo	1.91	7.25	1.21	11.01	2.62	3.64	1.12	10.00
Total Global	41.98	16.43	32.85	86.61	3.18	100.62	53.16	159.20

Fonte: Baring Securities Cross Border Analysis

É claro que estes números apenas dimensionam o problema de maneira muito grotesca. No entanto, não é o fato de que a informação eventualmente não representasse um problema de grande magnitude que ela deveria ser deixada de lado. Mais do que isto. O fato de um modelo com informação incompleta conseguir resultados que, em alguns casos se aproximam dos resultados walrasianos, não significa que devemos abandoná-los. Pensar a economia levando em consideração estas limitações da teoria já representa uma forma nova de ver o mundo. Assim como o fato de que a teoria da relatividade apresenta resultados muito semelhantes aos da mecânica newtoniana para velocidades baixas, não torna a mecânica newtoniana um caso particular da teoria da relatividade. São maneiras diferentes de ver o mundo. Especialmente num mundo em que a Informação parece ter importância crescente.

Como o fluxo de informação nos mercados brasileiros pode influenciar na vinda de capitais? Um fato é que a América Latina concorre com a Ásia enquanto o Brasil concorre com os outros países latino-americanos, especialmente Argentina, Chile e México. O investidor estrangeiro tem receios de investir fora do seu país

devido a problemas institucionais. Um fator que deve ser relevante é a assimetria de informações. É claro que não é bom investir num país onde não existem regras claras quanto às informações privilegiadas, a não ser que se tenha acesso a estas informações. Isto significa que um país com sérios problemas na difusão da informação, pode verificar um aumento nos investimentos especulativos em detrimento de investimentos permanentes⁵⁹.

No Brasil existe uma legislação específica para o uso de informação privilegiada. Rezam os artigos 10º e 11º da Instrução CVM 31/84 que:

“É vedado aos administradores e acionistas controladores de companhia aberta valer-se de informação à qual tenham acesso privilegiado, relativa a ato ou fato relevante ainda não divulgado ao mercado, para obter, para si ou para outrem, vantagem mediante negociações com valores mobiliários.

É vedada a negociação com valores mobiliários realizada por quem quer que, em virtude de seu cargo, função ou posição, tenha conhecimento de informação relativa a ato ou fato relevante antes de sua comunicação e divulgação ao mercado.

A mesma vedação aplica-se a quem quer que tenha conhecimento de informação referente a ato ou fato relevante, sabendo que se trata de informação privilegiada ainda não divulgada ao mercado.”⁶⁰

A Comissão de Valores Mobiliários (CVM) foi criada para regulamentar os mercados de valores mobiliários e a sua legislação tenta coibir abusos como o uso de

⁵⁹ Um investidor que entra no mercado apenas devido a uma informação privilegiada, está apenas especulando.

⁶⁰ “Política de Difusão de Informação e Acompanhamento de Mercado”. Encarte publicado pela Bolsa de Valores de São Paulo - BOVESPA

informação privilegiada. Além dos artigos citados acima, as Instruções da CVM procuram regulamentar o mercado com especial atenção para a difusão da informação. Por exemplo, as empresas negociadas em bolsas de valores são obrigadas a remeter uma série de informações à CVM, às Bolsas e ao público⁶¹. É claro que o direito de Confidencialidade é garantido para decisões estratégicas da empresa cuja divulgação antecipada poderia representar em prejuízo para a companhia.⁶²

As Bolsas de Valores e de Mercadorias também têm uma preocupação com o fluxo de informação entre os agentes financeiros e procuram monitorar os mercados durante o pregão e fora dele. Além disso, mantém os agentes informados através de publicações, boletins, esclarecimentos ao mercado, etc.

Não se trata aqui de discutir se a legislação é pertinente ou não. A apresentação acima apenas mostrou que existe legislação e instituições no Brasil que estão preocupadas, entre outras coisas, com a questão da informação. No entanto, encontrou-se evidências de ineficiência no mercado de câmbio brasileiro. O mercado de câmbio não foi escolhido por acaso. A estabilidade do câmbio tem sido um dos grandes desafios de política econômica. Uma das hipóteses poderia ser que a legislação não é eficiente. Apesar de não ter nenhuma condição de responder a esta questão, não parece ser este o problema. Uma outra hipótese poderia ser ineficiência da CVM como órgão fiscalizador. Sem um estudo profundo, parece-me que esta

⁶¹ Demonstrações financeiras, estatutos, atas, etc. Vide Art. 16 Instr. CVM 60/87 para uma listagem completa.

⁶² Vide especialmente art. 157 parag. 5º, da Lei 6404/76 e art. 4º da Instr. CVM 31/84.

hipótese pode fazer sentido. Pode ser que realmente a CVM não esteja equipada para fiscalizar este tipo de crime⁶³.

No entanto, acho que a eventual ineficácia da CVM para fiscalizar o fluxo de informações privilegiadas não é suficiente para explicar algumas distorções observadas nos mercados financeiros. Os agentes com informações privilegiadas no mercado de câmbio são funcionários do governo federal (Banco Central, Ministério da Fazenda e do Planejamento, especialmente). Se por um lado existe toda uma legislação regulamentando a informação privilegiada, não existe nenhuma legislação que proíba um ex-funcionário do alto escalão do governo de trabalhar no mercado financeiro imediatamente após a sua saída do governo.

Relendo o último parágrafo, parece-me que eu estou falando uma banalidade: existem privilégios nesse país e o governo não consegue fiscalizar. A informação privilegiada é apenas mais um entre inúmeros casos. Mas pretendo chamar a atenção para o fato que não se pode tratar os assuntos de maneira simplista. O fato de existir uma boa lei para a informação privilegiada pode não significar absolutamente nada em termos do fluxo de informações. Esta questão deve ter uma análise muito mais cuidadosa.

Além do mais, o objetivo de se estudar o papel da informação na economia, não se restringe a este tipo de análise. Nesta dissertação, verificamos como o equilíbrio pode se alterar na presença de um agente com informação privilegiada. Assim, conseguindo-se evidências de que o modelo discutido nas seções 2.7 e 2.8 se aplica ao Brasil (como foi sugerido no final do capítulo 3), implica que pode-se

⁶³ Por exemplo, a resolução 1.199 do CMN sujeita o mercado futuro à CVM. Nos Estados Unidos, por exemplo, existe um órgão apenas para este tipo de mercado.

encontrar um modelo de precificação superior onde o fato de existirem agentes com informação privilegiada é levado em conta e contabilizado independente de saber exatamente quando este agente entrará no mercado. A presença do volume de negociação como variável endógena num modelo de precificação, por exemplo, pode ser explicada pela assimetria de informação. O modelo nos permite testar hipóteses e aumentar a nossa compreensão da realidade.

Referências Bibliográficas

- Akerloff, G. A. (1970). "The Market for Lemons: Quality Uncertainty and the Market Mechanism". *The Quarterly Journal of Economics*. 84:488-500.
- Arrow, K.J. (1964) "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing". *Review of Economic Studies*. 31:91-106
- Bachelier, L. (1900). "Théorie de la Speculation". *Annales de L'Ecole normale Supérieure*, 17: 21-86. versão traduzida in Boness (1967)
- Banerjee, A., J. Dolado, J. W. Galbraith e D. F. Hendry (1993). . *Co-integration, Error Correction, and the Econometric analysis of non-stationary data*. Oxford: Oxford university Press
- Bhattacharya, S. e G. Constandinides (org.) (1989). . *Financial Markets and Incomplete Information*. vol. 2. Rowman and Littlefield.
- Black, F. (1971). "Towards a Fully Automated Exchange, Part I". *Financial Analysts Journal*. 27:29-34
- Black, F. and M. Scholes (1973). "The pricing of options and corporate liabilities". *Journal of Political Economy*. 81:637-659.
- Blough, S. R. (1992). "The Relationship between Power and Level for Generic Unit Root Tests in Finite Samples". *Journal of Applied Econometrics*. 7:295-308
- Boness, A. J. (1967). . *The Random Character of Stock Market Prices*. Cambridge, Mass: MIT Press
- Bray, M. (1989). "Rational Expectations, Information and Asset Markets". in *Hahn (1989)*.. 243-77
- Cass, D. e K. Shell (1983). "Do sunspot matter?". *Journal of Political Economics*. 91:193-227.
- Chowdhury, A. R. (1991). "Futures Markets Efficiency: Evidence from Cointegration Tests". *The Journal of Futures Markets*. vol 11. 5:557-589.
- Cootner, P. H. (ed.) (1964). . *The Random Character of Stock Market Prices*. MIT Press, Cambridge, Mass.
- Copeland, T. E. e J. F. Weston (1989). . *Financial Theory and Corporate Finance*. 3a Edição. Massachusetts: Addison-Wesley, Reading.
- Cox, D. R. and H. D. Miller (1965). . *The Theory of Stochastic Processes*. London: Chapman & Hall.
- Cox, J. C. e M. Rubinstein (1985). . *Option Markets*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

- Cox, J. C. e S. A. Ross (1976). "The valuation of options dos alternative stochastic process". *Journal of Financial Economics*. 3:145-160.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross (1985). "An intertemporal general equilibrium model of assets prices". *Econometrica*. 53:363-384.
- Diamond, P. (1967). "The role of a Stock Market in a general equilibrium model with technological uncertainty". *American Economic Review*. 57:759-776.
- Diamond, P. and J. Stiglitz (1974). "Increases in risk and in risk return". *Journal of Economic Theory*. 8:337-360.
- Dickey, D. A. e W. A. Fuller (1979). "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root". *Journal of the American Statistical Association*. 74:427-31
- Dickey, D. A. e W. A. Fuller (1981). "Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with Unit Root". *Econometrica*. 49:1057-72
- Duarte, A. R., A. Z. Sanvicente e P. E. Clini (1992). "Efficiency of stock forward markets in Brazil: Results from cointegration tests". *Anais XII Encontro Nacional de Econometria*.
- Duffie, D. (1987). "Stochastic Equilibria with incomplete financial markets". *Journal of Economic Theory*. 41:405-416.
- Dybvig, P e S. A. Ross (1985). "Yes, the APT is Testable". *Journal of Finance*. 40(4):1173-88
- Eatwell, J., M. Milgate e P. Newman (1989). . *The New Palgrave: Finance*. Macmillan Press Ltd: London, edição de 1994
- Elam, E. e B. L. Dixon (1988). "Examining the Validity of a Test of Future Markets Efficiency". *Journal of Futures Markets*. 8:365-372
- Engle, R. F. e C. W. J. Granger (1987). "Co-integration and error correction: Representation, Estimation and Testing". *Econometrica*. vol 55,2:251-276
- Engle, R. F. e C. W. J. Granger (1990). . *Long-Run Economic Relationships*. Oxford: Oxford university Press
- Fama, E. F. (1970). "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work". *Journal of Finance*. 25:383-417
- Fama, E. F. (1991). "Efficient capital markets: II". *Journal of Finance*. vol.46,5:1575-1619
- Fama, E. F. e K. R. French (1988). "Permanent and temporary components of stock prices". *Journal of Political Economy*. 84:427-448
- Fisher, I. (1906). . *The Nature of Capital and Income*. New York: Macmillan (versão de 1981)
- French, K. R. e R. Roll (1986). "Stock Return variances: The Arrival of Information and the Reaction of Traders". *Journal of Financial Economics*. 17:5-26

- Friedman, J. W. (1991). . *Game Theory with applications to economy*.. 2a edição. Oxford University Press, Inc.
- Fundenberg, D. e J. Tirole (1991). . *Game Theory*. MIT press, Inc.
- Glosten, L.R. e P. R. Milgrom (1985). "Bid, Ask and Transaction Prices in a Specialist Market with Heterogeneously Informed Traders". *Journal of Financial Economics*. 14: 71-100
- Granger, C. W. J. (1981). "Some Properties of Time Series Data and their Use in Econometric Model Specification". *Journal of Econometrics*. 16:121-30
- Grossman, S. J. e J. E. Stiglitz (1980). "On the impossibility of informationally efficient markets". *American Economic Review* 71:222-227.
- Hahn, F. (org.) (1989). . *The Economics of Missing Markets, Information and Games*. Claredon Press.
- Hakkio, C. S. e M. Rush (1989). "Market Efficiency and Cointegration: An application to the Deutschemark Exchange". *Journal of International Money and Finance*. 8:75-85
- Hamilton, J. D. (1994). . *Time Series Analysis*. Princeton, N.J.: Princeton University Press
- Hansen, H. e K. Juselius (1995). . *CATS in RATS - Cointegration Analysis of Time Series*. Illinois: Estima
- Hicks, J. R. (1934). "Application of Mathematical Methods to the Theory of Risk". *Econometrica*. 2, Abril: 194-5
- Hull, J. C. (1990). . *Options, Futures and other Derivative Securities*.. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Hull, J. C. e A. White (1987). "The pricing of options on assets with stochastic volatilities". *Journal of Finance*. 42:281-300.
- Jarrow, R. e A. Rudd (1982). "Approximate option valuation for arbitrary stochastic process". *Journal of Financial Economics*. Vol. 10 (November 1982):347-369.
- Jensen, M. C. (1978). "Some anomalous evidence regarding market efficiency". *Journal of Financial Economics*. 6:95-101
- Johansen, S. (1988). "Statistical Analysis of Cointegration Vectors". *Journal of Economic Dynamics and Control*. 12:231-54
- Johansen, S. (1991). "Estimation and Hypothesis Testing of Cointegrating Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models". *Econometrica*. 59: 1551-80
- Johansen, S. (1992). "Determination of the Cointegration Rank in the presence of Linear Trend". *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. 54:383-97
- Johansen, S. e Juselius, K. (1992). "Testing Structural Hypothesis in a Multivariate Cointegration Analysis of the PPP and the UIP for UK.". *Journal of Econometrics*. 53:211-244

- Kreps, D. M. (1977). "A Note on Fulfilled Expectations Equilibria". *Journal of Economic Theory*. 14:32-43
- Kreps, D. M. (1982). "Multiperiod Securities and efficient allocation of risk: a comment on the Black-Scholes option price model". in J.M. Call (ed.), *The Economics of information and Uncertainty*. Chicago: NBER.
- Kreps, D. M. (1989). "Out of equilibrium beliefs and out of equilibrium behavior". in Hahn (1989). pg. 7-45
- Kreps, D. M. (1990). . *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton: Princeton University Press.
- Kreps, D. M. e R. Wilson (1982). "Sequential Equilibria". *Econometrica*. 50: 863-94
- Kyle, A. (1985). "Continuous Auction and Insider Trading". *Econometrica*. 53:1335-1355.
- Lai, K.S. e M. Lai (1991) "A Cointegration Test for Market Efficiency". *The Journal of Futures Markets*. 11-5:567-75
- Lang, L. H. P., R. H. Litzenberger e V. Madrigal (1992). "Testing Financial Markets Equities under Asymmetric Information". *Journal of Political Economy*. nr. 2
- Lewis, K. K. (1989). "Changing Beliefs and Systematic Rational Forecast Errors with Evidence from Foreign Exchange". *American Economic Review*. 79:621-36
- Lintner, J. (1965) "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets". *Review of Economic and Statistics*. 47:13-37.
- Liu, L-M e G. B. Hudak (1986) *The SCA Statistical System - Reference Manual for Forecasting and Time Series Analysis*. Em colaboração com G.E.P. Box, M.E. Muller e G.C. Tiao. Illinois: S.C.A. - P.O. Box 625
- Lucas, R. E. Jr. (1978). "Asset Prices in an Exchange Economy". *Econometrica*. 46:1426-46
- Machina, M. (1982). "Expected Utility analyses without the independence axiom". *Econometrica*. 21:503-546
- Malkiel, B. G. (1989). "Efficient Market Hypothesis". . in Eatwell, J., M. Milgate e P. Newman (1989)
- Markowitz, H. (1952). "Portfolio Selection". *Journal of Finance*. 7, Março: 77-91
- Merton, R C. (1972). "An analytic derivation of the efficient portfolio frontier". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 7(4): 1851-72
- Merton, R. C (1973). "An Intertemporal Capital Assets Pricing Model". *Econometrica*. 41:867-887
- Merton, R.C. (1973b) "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science*. 4: 141-83
- Modigliani F. e M. Miller (1958). "The cost of Capital, Corporation Finance and the theory of investment". *American Economic Review*. 48:261-297

- Modigliani F. e M. Miller (1977). "The Determination of Financial Structure: the Incentive Signaling Approach". *Bell Journal of economics and Management Science*. 77:373-390
- Mossin, J. (1966) "Equilibrium in a Capital Asset Markets". *Econometrica*. 34:768-83.
- Nelsson, C. R. e C. I. Plosser (1982). "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Some Evidence and Implications". *Journal of Monetary Economics*. 10:139-62
- Roll, R. (1977). "A Critique of the Asset Pricing Theory's Test; Part I: On Past and Potential Testability of the Theory". *Journal of Financial Economics*. 4(2): 129-76
- Roll, R. (1984). "A simple implicit measure of the bid/ask spread in an efficient market". *Journal of Finance*. 35:1073-1103
- Ross, S. A. (1976). "The arbitrage theory of capital assets pricing". *Journal of Economic Theory*. 13:343-362
- Ross, S. A. (1981). "Some stronger measures of risk in the small and in the large". *Econometrica*. 49:621-638
- Ross, S. A. (1987). . "Finance". in Eatwell, J., M. Milgate e P. Newman (1989)
- Rothschild, M. e J. Stiglitz (1970). "Increasing risk I: a definition". *Journal of Economic Theory*. 2:315-329
- Schwartz, R. A. (1988). . *Equity Markets*. Harper & Row.
- Sharpe, W.F. (1964) "Capital Asset Prices: a Theory of Markets". *Econometrica*. 34:768-83
- Stiglitz, J. e A. Weiss, (1981). "Credit Rationing in Markets with Imperfect Information". *American Economic Review*. 71:393-410
- Strong, N. e M. Walker (1989). . *Information and Capital Markets*. Basil Blackwell.
- Summers, L. H. (1986). "Does the stock market rationally reflect fundamental values?". *Journal of Finance*. 41:591-601
- Turnovsky, S. J. (1979). "Futures Markets, Private Storage, and Price Stabilization". *Journal of Public Economics*. 12:301-327
- Von Neuman, J. e O. Morgenstern (1947). *Theory of games and economic behavior*. segunda edição, Princeton: Princeton University.