Nº 243

INTRODUÇÃO À INTEGRAÇÃO ESTOCÁSTICA

Paulo Klinger Monteiro

Junho de 1994

Introdução à integração estocástica

Paulo Klinger Monteiro

Maio,1994

1 Espaços de probabilidades e de medida

Para definirmos espaços de probabilidades ou mais geralmente de medida necessitamos definir σ-álgebras e medidas.Dado um conjunto $\Omega \neq \phi$ uma σ-álgebra de Ω é uma família $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A}$ implica $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
3. se $A_n \in \mathcal{A}$ para todo n natural então $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Definida a σ-álgebra $\mathcal{A}$,uma medida (em $\mathcal{A}$) é uma função $P : \mathcal{A} \to \Re_+ \cup \{\infty\}$ com as seguintes propriedades:

i) se $A_n \in \mathcal{A}$ para todo natural n e os $\{A_n\}$ são dois a dois disjuntos então $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

ii) $P(\phi) = 0$

Se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra e P é uma medida,chamamos ao terno $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de espaço de medida. Um espaço de probabilidades é um espaço de medida tal que $P(\Omega) = 1$.

Dado um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e uma sequência de variáveis aleatórias $X_n : \Omega \to \Re$,dizemos que X_n converge a X em probabilidade se para todo $\epsilon > 0$,$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$ [1] . Notação : $X_n \xrightarrow{P} X$. O limite em probabilidade,se houver,é unico.Dizemos que X_n converge a X quase certamente se existe $A \in \mathcal{A}$ de probabilidade zero,tal que para todo $w \in \Omega \setminus \mathcal{A}$, $\lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)$.Vale o seguinte:

Proposição 1 *1. Se $X_n \xrightarrow{P} X$ então existe uma subsequência $(X_{k_n})_n$ tal que $\lim_{n\to\infty} X_{k_n} = X$ q.c.*

2. se $\lim_{n\to\infty} X_{k_n} = X$ q.c. para alguma subsequência k_n então $X_n \xrightarrow{P} X$

---

[1] essa notação é uma forma abreviada de se escrever $P(\{w \in \Omega; |X_n(w) - X(w)| > \epsilon\}) = 0$

Demonstração. Para ilustrar a aplicação do teorema da convergência dominada vou demonstrar o segundo item.Seja $\epsilon > 0$ e $f_n = \chi_{|X_n - X| > \epsilon}$.Escolhendo $g = 1$ podemos aplicar o teorema da convergência dominada(ver Teor.1 abaixo) para obter $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = \lim_{n\to\infty} \int \chi_{|X_n - X| > \epsilon}(w)dP(w) = \int \lim_{n\to\infty} \chi_{|X_n - X| > \epsilon}(w)dP(w) = \int 0 dP = 0$

Definição 1 *Se $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ é um espaço de medida e $X : \Omega \to \Re$ dizemos que X é mensurável se para todo intervalo (a, b) de $\Re$,$X^{-1}(a, b) = \{w \in \Omega; a < X(w) < b\}$ pertencer à $\mathcal{A}$.*

Se X e Y são mensuráveis e $r \in \Re$ então $rX + Y$ é mensurável . Quando P é uma função de probabilidades preferimos dizer que X é uma variável aleatória em lugar de que X é mensurável . Voltando a falar de σ-álgebras notemos que se $\mathcal{F}$ é uma família de variáveis aleatórias existe $\tilde{\mathcal{A}} = \sigma(\mathcal{F})$ a menor σ-álgebra que torna toda função $X \in \mathcal{F}$ mensurável .Com efeito

$$\{\mathcal{C}; \mathcal{C} \text{ é } \sigma\text{-álgebra de } \Omega \text{ e toda } X \in \mathcal{F} \text{ é } \mathcal{C} \text{ mensurável }\}$$

é não vazia pois $\mathcal{A}$ é um elemento e

$$\tilde{\mathcal{A}} = \cap_{\mathcal{C}}\{\mathcal{C}; \mathcal{C} \text{ é } \sigma\text{-álgebra e todo } X \in \mathcal{F} \text{ é } \mathcal{C} \text{ mensurável }\} \subset \mathcal{A}$$

é uma σ-álgebra pois é intersecção de σ-álgebras .

Definição 2 *Uma sequência $(X_n)_n$ de variáveis aleatórias é de Cauchy em probabilidade se para todo $\epsilon, \delta > 0$ existe n_0 tal que para todo $n, m \geq n_0, P(|X_n - X_m| > \epsilon) < \delta$.*

Lema 1 *Toda sequência (X_n),de Cauchy em probabilidades, é convergente em probabilidade,ou seja existe variável aleatória X tal que $X_n \xrightarrow{P} X$.*

2 Variáveis aleatórias e a Integral de Lebesgue

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das funções mensuráveis e $\mathcal{M}_+$ o conjunto das funções mensuráveis não negativas. Em todo espaço de medida está definida uma função $I : \mathcal{M}_+ \to \Re_+ \cup \{\infty\}$ com as seguintes propriedades:

- $I(rf + g) = rI(f) + I(g)$ para todo $f, g \in \mathcal{M}_+, r \geq 0$

- se $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ e $f_n \in \mathcal{M}$ para todo n então $I(\sup_n f_n) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$
- $I(\chi_A) = P(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$

A função I é chamada de integral de Lebesgue e eu usarei no lugar de $I(f)$ a notação $\int f dP$ ou $\int_\Omega f(w)dP(w)$. O conjunto $L^1 = L^1(P) = \{f \in \mathcal{M}; \int |f|dP < \infty\}$ é chamado de conjunto das funções integráveis.Definimos também para $p > 0$ o conjunto $L^p = L^p(P) = \{f \in \mathcal{M}; \int |f|^p dP < \infty\}$ das funções p integráveis. Temos que se $f, g \in L^p(P)$ e $r \in \Re$ então $rf + g \in L^p(P)$.
O teorema a seguir é fundamental e é a razão principal da superioridade da integral de Lebesgue sobre a integral de Riemann.

Teorema 1 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue)
Se $f_n \in \mathcal{M}$ para todo n e $f \in \mathcal{M}$ são tais que

1. $f(w) = \lim_{n\to\infty} f_n(w)$ *q.c.*
2. $|f_n(w)| \leq g(w)$ *q.c. para todo n sendo $g \in L^1(P)$*

Então temos que $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(w)dP(w) = \int_\Omega f(w)dP(w)$.

No espaço euclidiano $\Re^n$ está definida a σ-álgebra dos boreleanos $\mathcal{B}^n$ que é a menor σ-álgebra do $\Re^n$ que contém para todo $a, b \in \Re^n$,os intervalos $\{x \in \Re^n; a_i < x_i < b_i, 1 \leq i \leq n\}$. Para as nossas necessidades é suficiente o leitor aceitar o seguinte

Teorema 2 *Existe uma medida, $\lambda : \mathcal{B}^n \to \Re_+ \cup \{\infty\}$ tal que $\lambda(\{x \in \Re^n; a_i \leq x_i \leq b_i$ para todo $i \leq n\}) = \Pi_{i=1}^n (b_i - a_i)$ para todo vetor $a, b \in \Re^n, a \leq b$ e tal que $\lambda(B + u) = \lambda(B)$ para todo boreleano B e vetor $u \in \Re^n$. Além disso para toda função contínua $f : [-1, 1]^n \to \Re$*

$$\int \chi_{[-1,1]^n}(x) f(x) d\lambda(x) = \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

Do lado direito da igualdade acima temos a integral de Riemann e do lado esquerdo a integral de Lebesgue.

3 Independência de variáveis aleatórias e de σ-álgebras .

Uma família $X_1, \ldots, X_n$ de variáveis aleatórias do espaço $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ é independente se para todos boreleanos $B_1, \ldots, B_n$ de $\Re$ temos

$$P(\cap_{i=1}^{n}\{w \in \Omega; X^i(w) \in B_i\}) = \Pi_{i=1}^{n} P(\{w \in \Omega; X^i(w) \in B_i\})$$

Mais geralmente a família $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ de σ-álgebras de Ω é independente se para todo $A_i \in \mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq n$

$$P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \Pi_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Exercício 1 *Justifique a expressão "Mais geralmente" dita acima*

Uma propriedade importante das variáveis aleatórias independentes é que se X, Y são independentes então $\int X(w)Y(w)dP(w) = \int X(w)dP(w) \times \int Y(w)dP(w)$.

4 Processos estocásticos

A distribuição de uma variável aleatória X é a função $F = F_X : \Re \rightarrow \Re$ definida por $F(x) = P(\{w \in \Omega; X(w) \leq x\})$. Temos que F é não decrescente,$F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$ e que F é contínua à direita.A média de uma variável aleatória $X \in L^1(P)$ é por definição $EX = \int_\Omega X dP$. Se $X^2 \in L^1(P)$ podemos definir a variância de X por $\int_\Omega (X - EX)^2 dP$. Assim temos que se X e Y são independentes então $E(XY) = E(X)E(Y)$ e $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$.A variável aleatória X tem distribuição normal de média μ e variância $\sigma^2 > 0$ se

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Um processo estocástico é uma família $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ de variáveis aleatórias $X_t : \Omega \rightarrow \Re$. Um movimento Browniano de média μ e variância σ^2(também chamado de processo de Wiener) é um processo estocástico $\{B_t\}_{t \geq 0}$ tal que

1. $B_0 = 0$

2. para todos $0 \leq t_0 < t_1, \ldots < t_n, n \geq 1$ $B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ são independentes

3. se $0 \leq s < t, B_t - B_s$ tem distribuição normal de média $(t-s)\mu$ e variância $(t-s)\sigma^2$

4. $t \to B_t(w)$ é contínua q.c. em $w \in \Omega$

Se tivermos $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ dizemos que o movimento Browniano é normalizado.

5 Martingalas e esperança condicional

Suponhamos que $X \in L^1(P)$ e $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra de Ω contida em $\mathcal{A}$. Existe então uma função $E(X|\mathcal{B}) : \Omega \to \Re, \mathcal{B}$ mensurável tal que para todo $B \in \mathcal{B}$,

$$\int_B E(X|\mathcal{B})(w)dP(w) = \int_B X(w)dP(w)$$

Essa função chama-se a esperança condicional de X dada σ-álgebra $\mathcal{B}$.Valem as seguintes propriedade:

1. $E(X|\mathcal{B})$ está bem definida a menos de um subconjunto $B \in \mathcal{B}$ de probabilidade nula.

2. $E(aX+bY|\mathcal{B})(w) = aE(X|\mathcal{B})(w)+bE(X|\mathcal{B})(w)$ para quase todo $w \in \Omega$

3. se $X \in \mathcal{M}_+$ então $E(X|\mathcal{B}) \in \mathcal{M}_+$

4. $E(1|\mathcal{B}) = 1$

5. se X é $\mathcal{B}$ mensurável então $E(X|\mathcal{B}) = X$ quase certamente.Mais geralmente $E(XY|\mathcal{B}) = XE(Y|\mathcal{B})$

6. Se X é independente de $\mathcal{B}$ e $X \in L^1$ então $E(X|\mathcal{B}) = EX$.

Um processo estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ é uma martingala com relação à filtração $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ se

1. $X_t \in L^1(P)$ para todo t

2. X_t é mensurável à $\mathcal{A}_t$

3. $E(X_t|\mathcal{A}_s) = X_s$ para todo $t \geq s$

Se no lugar da igualdade em (3) tivermos $E(X_t|\mathcal{A}_s) \geq X_s$ para todo $t \geq s$ dizemos que $(X_t)_t$ é uma sub-martingala.

As sub-martingalas satisfazem a uma desigualdade muito útil:

Proposição 2 (A desigualdade das martingalas) *Suponhamos que (X_n) seja uma sub-martingala com relação à filtração $\mathcal{A}_n = \sigma\{X_1, \ldots, X_n\}$.Isto é $E(|X_n|) < \infty$ e $E(X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n) \geq X_n$ $n \in N$.Então*

1.

$$P(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon} E|X_n| \quad \textit{para todo } \epsilon > 0, n \in N$$

2. Se além disso $E|X_n|^p < \infty$ para algum $p \geq 1$ e para todo n então $P(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^p} E|X_n|^p$

Demonstração: Seja $A_k = \cap_{j<k}[X_i \leq \lambda] \cap [X_k > \lambda]$ para k entre 1 e n e $A = [\max_{1 \leq k \leq n} X_k > \lambda]$.Temos que A é uma união disjunta dos A_k. Portanto

$$\lambda P(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda P(A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} E(X_k \chi_{A_k})$$

Como A é mensurável com relação à $X_1, \ldots, X_k$ temos

$$EX_n^+ \geq \sum_{k=1}^{n} E(X_n^+ \chi_{A_k}) = \sum_{k=1}^{n} EE(X_n^+ \chi_{A_k}|X_1, \ldots, X_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E\chi_{A_k} E(X_n^+|X_1, \ldots, X_k) =$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} E\chi_{A_k} E(X_n|X_1, \ldots, X_k) \geq \sum_{k=1}^{n} E(\chi_{A_k} X_k)$$

Disto terminamos a demonstração da primeira parte.Para a segunda parte usamos a primeira parte e que $|X_n|^p$ é uma sub-martingala para $p \geq 1$. A proposição anterior possui uma generalização muito importante para processos estocásticos separáveis.

Definição 3 *Um processo estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ é separável se existe um conjunto enumerável $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ que é denso em $[0,\infty)$ e um subconjunto N de Ω de medida nula tal que se J é um intervalo aberto de $\Re_+$*

$$\cap_{t\in J}\{w \in \Omega \setminus N; X(t,w) \in F\} = \cap_{n:t_n\in J}\{w \in \Omega \setminus N; X(t_n,w) \in F\}$$

para todo subconjunto fechado $F \subset \Re$.

A generalização prometida é a seguinte:

Proposição 3 *Se $(X_t)_{t\geq 0}$ for uma sub-martingala separável então*

$$P(\max_{0\leq s\leq t} |X_s| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon} E|X_t|$$

Além disso se $E|X_s|^p < \infty$ para algum $p \geq 1$ e todo $s \leq t$ então

$$P(\max_{0\leq s\leq t} |X_s| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^p} E|X_t|^p$$

Não demonstrarei esta proposição .

6 Integral estocástica

Suponhamos dado um movimento Browniano padronizado $(B_t)_{t\geq 0}$ no espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.Seja $(\mathcal{A}_t)_t$ uma família crescente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{A}$ tal que $\{B_s; s \leq t\}$ são $\mathcal{A}_t$ mensuráveis e tal que $\sigma(B_{s+t} - B_t; s \geq 0)$, a menor σ-álgebra que torna $\{B_{s+t} - B_t; s \geq 0\}$ mensuráveis ,é independente de $\mathcal{A}_t$ para todo t.

Inicialmente definiremos a integral estocástica para funções degrau.Suponha então que $f : \Re_+ \times \Omega \to \Re$ e existam $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = T$ tais que $f(t,w) = f_i(w)$ se $t_i \leq t < t_{i+1}, 0 \leq i \leq n, w \in \Omega$,sendo que f_i é $\mathcal{A}_{t_i}$ mensurável .Definimos então para $w \in \Omega$

$$\int_0^T f(t)dB_t(w) = \sum_{i=0}^{n} f_i(w)(B_{t_{i+1}}(w) - B_{t_i}(w))$$

A variável aleatória $\int_0^T f(t)dB_t$ acima definida é a integral estocástica da função degrau f com relação ao movimento Browniano $(B_t)_t$.

A classe de funções degrau é pequena demais.Nosso objetivo é o de extender a integral acima ao seu fecho em probabilidades.

É facil de se verificar que a integral estocástica é linear nas funções degrau.

Lema 2 *Se f é uma função degrau tal que $f(t) \in L^2(P)$ para todo t então*

$$E\int_0^T f(t)dB_t = 0 \text{ e } E(\int_0^T f(t)dB_t)^2 = E\int_0^T f^2(t)dt$$

Demonstração. Para demonstrarmos a primeira igualdade notemos primeiramente que $E|f_i| \leq 1 + \int_{|f_i|\geq 1}|f_i|dP \leq 1 + \int_{|f_i|\geq 1}|f_i|^2dP \leq 1 + E|f_i|^2 < \infty$.Também vale que $E|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| < \infty$. Logo usando as propriedades 5 e 6 da esperança condicional e o item 3 da definição do movimento Browniano:

$$E\int_0^T f(t)dB_t = E\sum_{i=0}^n f_i(w)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \sum_{i=0}^n E(f_i(w)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})) =$$

$$\sum_{i=0}^n E(E(f_i(w)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})|\mathcal{A}_{t_i})) = \sum_{i=0}^n E(f_i(w))E(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = 0$$

Demonstremos agora a segunda igualdade.Vale a seguinte identidade:

$$(\int_0^T f(t)dB_t)^2 = (\sum_{i=0}^n f_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))^2 =$$

$$2\sum_{0\leq i<j\leq n} f_if_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \sum_{i=0}^n f_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$$

Precisamos verificar que cada parcela é integrável.Temos que $Ef_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 < \infty$ por independência. Logo

$$2E|f_if_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})| \leq E|f_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})|^2 + E|f_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})|^2 < \infty$$

Podemos então calcular

$$E(\int_0^T f(t)dB_t)^2 = \sum_{0\leq i<j\leq n} 2Ef_if_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \sum_{i=0}^n Ef_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 =$$

$$= \sum_{0\leq i<j\leq n} 2Ef_if_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})E(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \sum_{i=0}^n Ef_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^n Ef_i^2E(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 = \sum_{i=0}^n Ef_i^2(t_{i+1} - t_i) = E\int_0^T f^2(t)dt$$

Definição 4 *Um processo estocástico definido em $(\Omega, \mathcal{A}, P), (f_t)_t$ é não antecipativo com relação à filtração $(\mathcal{A}_t)_t$ se*

1. *$(f_t)_t$ for separável*

2. *$(t, w) \to f(t, w)$ é mensurável com relação a $\sigma(\mathcal{B}^1 \times \mathcal{A})$* [2]

3. *$(f_t)_t$ é adaptado: f_t é $\mathcal{A}_t$ mensurável para todo t*

Definimos então $L^2_\Omega = L^2_\Omega[0, T]$ como o conjunto dos processos estocásticos não -antecipativos $(f_t)_t$ tais que:

$$\text{para todo } T > 0 \quad P(\{w; \int_0^T |f(t,w)|^2 dt < \infty\}) = 1$$

e definimos $M^2_\Omega = \{f \in L^2_\Omega; \int_\Omega \int_0^T |f(t,w)|^2 dt dP(w) < \infty \text{ para todo } T > 0\}$.
O próximo lema é fundamental para passarmos ao limite em probabilidades.

Lema 3 *Para toda função degrau $f \in L^2_\Omega$ e todo $\epsilon > 0, \delta > 0$*

$$P(|\int_0^T f(t) dB_t| > \epsilon) \leq P(\int_0^T f^2(t) dt > \delta) + \delta/\epsilon^2$$

Demonstração. Seja

$$f_\delta(t) = f(t) \quad \text{se } t_k \leq t < t_{k+1} \text{ e } \sum_{i=0}^{k} f^2(t_i)(t_{i+1} - t_i) \leq \delta$$

$$f(t) = 0 \quad \text{se } t_k \leq t < t_{k+1} \text{ e } \sum_{i=0}^{k} f^2(t_i)(t_{i+1} - t_i) > \delta$$

Como $P(|\int_0^T f(t) dB_t| > \epsilon) \leq P(|\int_0^T f(t)_\delta dB_t| > \epsilon) + P(\int_0^T f(t)^2(w) dt > \delta)$
Pela desiguladade de Tchebishev(i.e. $P(X \geq \delta) \leq EX^2/\delta^2$) vem

$$P(\{w; |\int_0^T f(t)(w) dB_t| > \epsilon\}) \leq \frac{E(\int_0^T f_\delta(t) dB_t(w))^2}{\epsilon^2} + P(\{w; \int_0^T f^2(t)(w) dt > \delta\})$$

Finalmente notemos que f_δ é uma função degrau pois $\{w; \sum_{i=0}^k f^2(t_i)(t_{i+1} - t_i) \leq \delta\}$ é $\mathcal{A}_{t_k}$ mensurável .Portanto $E(\int_0^T f_\delta(t) dB_t)^2 = E \int_0^T f_\delta^2(t) dt \leq \delta$ o que termina a demonstração .
A proposição a seguir é a base para a extensão da integral de Ito a L^2_Ω.

[2] $\sigma(\mathcal{B}^1 \times \mathcal{A})$ é a menor σ-álgebra de $\Re \times \Omega$ que contém $\{B \times A; B \in \mathcal{B}^1, A \in \mathcal{A}\}$

Proposição 4 *Para toda $f \in L^2_\Omega$ e $T > 0$ existe uma sequência $f_n \in L^2_\Omega$ de funções degrau tais que*

$$\int_0^T |f_n(t) - f(t)|^2 dt \overset{q.c.}{\to} 0$$

Além disso se $f \in M^2_\Omega, E\int_0^T |f_n(t) - f(t)|^2 dt \to 0$.

Não demonstrarei essa proposição pois sua demonstração é relativamente longa e não necessitaremos dela nada além da existência de tal sequência .

Passamos agora a extender a integral de Ito para L^2_Ω.Seja então $f \in L^2_\Omega$ e $f_n \in L^2_\Omega$ uma sequência de funções degrau dadas pela proposição anterior.A sequência $(\int_0^T f_n(t)dB_t)_n$ é de Cauchy em probabilidades pois se $\epsilon > 0$

$$P(\{w \in \Omega; |\int(f_n(t,w) - f_m(t,w))dB_t(w)| > \epsilon\})$$

$$\leq P(\{w; \int |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt > \delta\}) + \delta/\epsilon^2$$

Existe então $\int_0^T f(t)dB_t$ limite em probabilidade de $\int_0^T f_n(t)dB_t$.Este limite é unico e independe da sequência de funções degrau utilizadas.Chamamos $\int_0^T f(t)dB_t$ de integral estocástica(ou integral de Itô) de f com relação ao movimento Browniano (B_t).O teorema a seguir é imediato e não será demonstrado:

Teorema 3 *Se $f_1, f_2 \in L^2_\Omega$ e $r_1, r_2 \in \Re$ então $r_1 f_1 + r_2 f_2 \in L^2_\Omega$ e*

$$\int_0^T (r_1 f_1(t) + r_2 f_2(t))dB_t = r_1 \int_0^T f_1(t)dB_t + r_2 \int_0^T f_2(t)dB_t$$

O próximo teorema nos permite calcular a média e a variância da integral de Ito.

Teorema 4 *Se $f \in M^2_\Omega$ então*

$$E\int_0^T f(t)dB_t = 0 \text{ e } E(\int_0^T f(t)dB_t)^2 = E\int_0^T f^2(t)dt$$

Demonstração. Se $f_n \in L^2_\Omega$ são funções degrau tais que $\int_0^T (f_n(t) - f(t))^2 dt \overset{q.c.}{\to} 0$.Vale $E\int_0^T f_n(t)dB_t = 0$ para todo n. Também $E(\int f_n(t)dB_t)^2 = E\int f_n^2(t)dt$.

Temos então que $\lim_{n\to\infty} E(\int f_n(t)dB_t)^2 = E\int f^2(t)dt$. Como $E(\int f_n(t)dB_t - \int f_m(t)dB_t)^2 = E\int |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt \to 0$ vale portanto

$$E(\int f_n(t)dB_t - \int f(t)dB_t)^2 \to 0 \text{ e } E(\int f(t)dB_t)^2 = \lim_{n\to\infty} E(\int f_n(t)dB_t)^2 = E\int f^2(t)dt$$

Passarei a considerar as propriedades da integral de Ito $I_t = \int_0^t f(s)dB_s$ como função de $t \in [0,T]$. Os próximos lemas são para demonstrar que $(I_t)_t$ é uma martingala.

Lema 4 *Se $f \in L^2_\Omega[\alpha,T]$ e ζ é limitada,$\mathcal{A}_\alpha$ mensurável então $\zeta f \in L^2_\Omega[\alpha,T]$ e*

$$\int_\alpha^T \zeta f(t)dB_t = \zeta \int_\alpha^T f(t)dB_t$$

Demonstração. É claro que $\zeta f \in L^2_\Omega[\alpha,T]$.Se f é uma função degrau a relação acima segue da definição de integral. O caso geral segue por aproximação .

Teorema 5 *Se $f \in M^2_\Omega[\alpha,T]$ então*

$$E(\int_\alpha^T f(t)dB_t|\mathcal{A}_\alpha) = 0$$

$$E(|\int_\alpha^T f(t)dB_t|^2|\mathcal{A}_\alpha) = E(\int_\alpha^T f^2(t)dt|\mathcal{A}_\alpha) = \int_\alpha^T E[f^2(t)|\mathcal{A}_\alpha]dt$$

Demonstração. Seja ζ limitada,$\mathcal{A}_\alpha$ mensurável . Então $\zeta f \in M^2_\Omega[\alpha,T]$ e $E(\int_\alpha^T \zeta f(t)dB_t) = 0$. Logo pelo lema anterior $E(\zeta\int_\alpha^T f(t)dB_t) = 0$ e portanto $E\{\zeta E[\int_\alpha^T f(t)dB_t|\mathcal{A}_\alpha]\} = 0$ para todo ζ demonstrando que $E\{\int_\alpha^T f(t)dB_t|\mathcal{A}_\alpha\} = 0$. A segunda parte do teorema tem demonstração análoga.

Teorema 6 *Se $f \in M^2_\Omega[0,T]$ então $I_t = \int_0^t f(s)dB_s$ é uma martingala.*

Demonstração. Sejam $0 \le t' < t \le T$. Então de $I_t = I_{t'} + \int_{t'}^t f(s)dB_s$ vem

$$E(I_t|\mathcal{A}_{t'}) = I_{t'} + E(\int_{t'}^t f(s)dB_s|\mathcal{A}_{t'}) = I_{t'}$$

A integral de Ito como definida pode não ser contínua em função de t.Mas no entanto sempre pode ser modificada num conjunto de medida zero e ser então contínua quase certamente. Inicialmente precisamos da seguinte definição :

Definição 5 *Dois processos estocásticos,X e Y,são equivalentes se*

$$P(X(t) \neq X'(t)) = 0 \quad \textit{para todo } t \geq 0$$

Nesse caso X' é dito uma versão de X.

Teorema 7 *A integral de Ito possui uma versão contínua.*

Demonstração. Suponha que $f \in M_\Omega^2$ e f_n é uma sequência de funções degrau tal que

$$E\int_0^T (f(t) - f_n(t))^2 dt \to 0$$

Notemos que $I_n(t) = \int_0^t f_n(s)dB_s, 0 \leq t \leq T$ são contínuas e $I_n(t) - I_m(t)$ é uma martingala. Portanto pela desigualdade das martingalas

$$P(\sup_{0\leq t\leq T} |I_n(t) - I_m(t)| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}E|\int_0^T (f_m(s) - f_n(s))dB_s|^2 =$$

$$\frac{1}{\epsilon^2}E\int_0^T (f_m(s) - f_n(s))^2 ds \to 0$$

Para $\epsilon = 1/2^k$ existe n_k suficientemente grande para que

$$P(\sup_{0\leq t\leq T} |I_{n_k}(t) - I_m(t)| > 1/2^k) < 1/k^2 \text{ se } m \geq n_k$$

Sem perda de generalidade n_k cresce com k. Logo

$$P(\sup_{0\leq t\leq T} |I_{n_k}(t) - I_{n_{k+1}}(t)| > 1/2^k) < 1/k^2$$

e portanto,como $\sum_k 1/k^2 <, \infty$,pelo lema de Borel-Cantelli

$$P(\sup_{0\leq t\leq T} |I_{n_k}(t) - I_{n_{k+1}}(t)| > 1/2^k \text{ infinitas vezes }) = 0$$

Ou seja para quase todo w,$|I_{n_k}(t)(w) - I_{n_{k+1}}(t)(w)| \leq 1/2^k$,$0 \leq t \leq T$ Logo com probabilidade um,$I_{n_k}(t)$ converge uniformemente para uma função contínua $J(t)$. Como $\int_0^t f_n(s)dB_s \to \int_0^t f(s)dB_s$ segue-se $J(t) = \int_0^t f(s)dB_s$ qtp. Suponhamos agora que $f \in L_\Omega^2[0,T]$ e definamos $f_N(t) = f(t)$ se $\int_0^t f^2(s)ds \leq N$ e $f_N(t) = 0$ caso contrário. É claro que $f_N \in M_\Omega^2[0,T]$ .Seja $J_N(t) = \int_0^t f_N(s)dB_s$ uma versão contínua. E $\Omega_N = \{w; \int_0^T f^2(t)(w)dt <$

$N\}$. Se $w \in \Omega_N$ e $M > N, f_N(t) = f_M(t)$ para $t \in [0,T]$. Temos então $J_M(t) = J_N(t)$ se $0 \leq t \leq T$. Logo $\tilde{J}(t) = \lim_{M\to\infty} J_M(t)$ é contínua em t quase certamente $w \in \Omega_N$.Como $P(\Omega_N) \to 1, (\tilde{J}(t))_t$ é um processo contínuo. E de $P(\int_0^t |f(s) - f_m(s)|^2 ds > 0) = P(\int_0^t f^2(s)ds > N) \to 0$ vem $J_M(t) \xrightarrow{P} \int_0^t f(s)dB_s = I_t$

A partir de agora sempre usaremos a versão contínua da integral de Ito. Vale também o teorema a seguir,demonstrado anteriormente para funções degrau.

Teorema 8 *Se $f \in L^2_\Omega, \epsilon > 0, \delta > 0$ então*

$$P(|\int f(t)dB_t| > \epsilon) \leq P(\int f^2(t)dt > \delta) + \delta/\epsilon^2$$

Demonstração.:Definamos $\chi_\delta(z) = \chi_{(-\infty,\delta]}(z)$ e $f_\delta(t) = f(t) \cdot \chi_\delta(\int_0^t f^2(s)ds)$. Vale então

$$P(\sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t f(s)dB_s| > \epsilon) \leq$$

$$\leq P(\sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t f(s)dB_s - \int_0^t f_\delta(s)dB_s| > 0) + P(\sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t f_\delta(s)dB_s| > \epsilon)$$

Como $\int_0^t f_\delta(s)dB_s$ é uma martingala temos pela desigualdade das martingalas que:

$$P(\sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t f_\delta(s)dB_s| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} E|\int_0^T f_\delta(s)dB_s|^2 = \frac{1}{\epsilon^2} E|\int_0^T f_\delta(s)^2 ds \leq \frac{\delta}{\epsilon^2}$$

Consideremos agora a primeira parcela. No conjunto $\Omega_\delta = \{w \in \Omega; \int_0^T f^2(s)ds \leq \delta\}$ as funções $f(t)$ e $f_\delta(t)$ coincidem. Portanto para $t \in [0,T]$

$$\int_0^t f(s)dB_s = \int_0^t f_\delta(s)dB_s \quad q.c.\ w \in \Omega$$

Como os processos são continuos temos então

$$\int_0^t f(s)dB_s = \int_0^t f_\delta(s)dB_s \quad \text{para todo } t \in [0,T]\ q.c.\ w \in \Omega_\delta$$

Assim a primeira parcela é menor do que ou igual a $P(\Omega_\delta^c) = P(\int_0^T f^2(s)ds > \delta)$ terminando a demonstração .

O próximo teorema mostra que a integral estocástica possui uma importante propriedade de continuidade:

Teorema 9 *Se $f, f_n \in L^2_\Omega$ e $\int |f_n(t) - f(t)|^2 dt \xrightarrow{P} 0$ então $\int f_n(t) dB_t \xrightarrow{P} \int f(t) dB_t$.*

Demonstração.Seja $\epsilon > 0, \rho > 0$ temos

$$P(|\int_0^T f_n(t) - f(t)|dB_t| > \epsilon) \leq P(\int_0^T (f_n(t) - f(t))^2 dt > \epsilon^2\rho) + \rho$$

Logo por hipótese,a primeira parcela do membro direito da desigualdade anterior tende a zero.Fazendo $\rho \rightarrow 0$ terminamos a demonstração .
Algumas integrais fáceis de calcular:

1. $\int_0^T dB_t = B_T$
2. $\int_0^T B_t dB_t = \frac{1}{2}B_T^2 - T/2$.
3. $\int_0^T f(t)dB_t = -\int_0^T f'(t)B_t dt + f(T)B_T$ se $f : \Re_+ \rightarrow \Re$ é contínuamente diferenciável.

A integral em (1) é imediata. Para calcular (2) seja $f_n(t, w) = B_{Tk/n}(w)$ se $k/n \leq t/T < (k+1)/n, 0 \leq k \leq n-1$. É claro que f_n é uma função degrau.Logo

$$\int f_n(t) dB_t = \sum_{k=0}^{n-1} B_{\frac{Tk}{n}}(B_{\frac{T(k+1)}{n}} - B_{\frac{Tk}{n}}) =$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(B_{\frac{T(k+1)}{n}} - B_{\frac{Tk}{n}})^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(B^2_{\frac{T(k+1)}{n}} - B^2_{\frac{Tk}{n}}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(B_{\frac{T(k+1)}{n}} - B_{\frac{Tk}{n}})^2 + \frac{1}{2}B_T^2$$

A variável aleatória $Z = \sum_{k=0}^{n-1}(B_{\frac{T(k+1)}{n}} - B_{\frac{Tk}{n}})^2$ tem média T e variância $\frac{2T^2}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2T^2}{n^2}$.Temos então que $Z \xrightarrow{q.c.} T$ e portanto que $\int B_t dB_t = \frac{1}{2}B_T^2 - T/2$.Para calcular (3) seja $f_n(t, w) = f(k/n)$ $k/n \leq t/T < (k+1)/n$.Logo

$$\int f_n(t) dB_t = \sum_{k=0}^{n-1} f(Tk/n)(B_{\frac{T(k+1)}{n}} - B_{\frac{Tk}{n}}) = \sum_{k=0}^{n-1} f(Tk/n)B_{\frac{T(k+1)}{n}} - \sum_{k=0}^{n-1} f(Tk/n)B_{\frac{Tk}{n}} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(f(Tk/n) - f(\frac{T(k+1)}{n}))B_{\frac{T(k+1)}{n}} + \sum_{k=0}^{n-1}(f(\frac{T(k+1)}{n})B_{\frac{T(k+1)}{n}} - f(Tk/n)B_{\frac{Tk}{n}}) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{Tf'(\zeta_{kn})}{n} B_{\frac{T(k+1)}{n}} + f(T)B_T$$

onde $\zeta_{kn} \in (Tk/n, T(k+1)/n)$.Como $t \to B_t(w)$ é quase certamente contínua temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Tf'(\zeta_{kn})}{n} B_{\frac{T(k+1)}{n}}(w) = \int_0^T f'(t)B_t(w)dt \quad \text{quase certamente}$$

Isto termina a verificação de (3).

Para demonstrarmos a fórmula de Ito(abaixo) necessitamos do

Teorema 10 *Suponhamos que $a_i, b_i \in L^2_\Omega$ e que X_1, X_2 são processos estocásticos tais que $0 \le t_1 \le t_2 \le T$*

$$X_i(t_2) - X_i(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a_i(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} b_i(t)dB_t \quad \textit{quase certamente}$$

Então o processo estocástico $Y = X_1X_2$ é tal que

$$Y_{t_2} - Y_{t_1} = \int_{t_1}^{t_2} (X_1a_2(t) + X_2a_1(t))dt + \int_{t_1}^{t_2} (X_1b_2(t) + X_2b_1(t))dB_t + \int_{t_1}^{t_2} b_2(t)b_1(t)dt$$

Demonstração.Suponhamos primeiramente que $a_i, b_i, i = 1,2$ são processos estocásticos independentes do tempo.Então nesse caso $X_i = a_it + b_iB_t$

$$\int_{t_1}^{t_2} X_1a_2(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} X_1b_2(t)dB_t + \int_{t_1}^{t_2} X_2a_1(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} X_2b_1(t)dB_t + \int_{t_1}^{t_2} b_2b_1(t)dt =$$

$$a_2\int_{t_1}^{t_2} [a_1t + b_1B_t]dt + b_2\int_{t_1}^{t_2} [a_1t + b_1B_t]dB_t +$$

$$+a_1\int_{t_1}^{t_2} [a_2t + b_2B_t]dt + b_1\int_{t_1}^{t_2} [a_2t + b_2B_t]dB_t + b_1b_2(t_2 - t_1) =$$

$$= a_1a_2(t_2^2 - t_1^2) + (a_2b_1 + a_1b_2)\int_{t_1}^{t_2} B_tdt + (b_2a_1 + a_2b_1)\int_{t_1}^{t_2} tdB_t + 2b_1b_2\int_{t_1}^{t_2} B_tdB_t + b_1b_2(t_2 - t_1) =$$

$$= a_1a_2(t_2^2 - t_1^2) + (a_2b_1 + a_1b_2)[\int_{t_1}^{t_2} B_tdt + \int_{t_1}^{t_2} tdB_t] + b_1b_2(B_{t_2}^2 - B_{t_1}^2) =$$

$$= a_1a_2(t_2^2 - t_1^2) + (a_2b_1 + a_1b_2)(t_2B_{t_2} - t_1B_{t_1}) + b_1b_2(B_{t_2}^2 - B_{t_1}^2) =$$

$$= (a_1t_2 + b_1B_{t_2})(a_2t_2 + b_2B_{t_2}) - (a_1t_1 + b_1B_{t_1})(a_2t_1 + b_2B_{t_1})$$

Suponhamos agora que a_i, b_i são funções degrau com intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_k$. A fórmula de Itô vale então em cada um desses intervalos.Vale portanto para quaisquer $t_1, t_2 \in [0,T]$. Façamos agora o caso geral.Sejam então a_{in}, b_{in} sequências de funções degrau não-antecipativas tais que

$$\int_0^T |a_{in}(t) - a_i(t)|dt \xrightarrow{q.c.} 0 \quad \text{e} \quad \int_0^T |b_{in}(t) - b_i(t)|^2 dt \xrightarrow{q.c.} 0$$

Definamos $\zeta_{in}(t) = \zeta_i(0) + \int_0^t a_{in}(s)ds + \int_0^t b_{in}(s)dB_s$. Como $\zeta_{in} - \zeta$ é uma martingala separável temos pela desigualdade das martingalas que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\zeta_{in}(t) - \zeta(t)| \xrightarrow{P} 0$$

Existe então uma subsequência ζ_{in} que converge uniformemente para ζ,quase certamente.É claro então que

$$\int_0^t \zeta_{in}(t)b_{jn}(t)dB_t \xrightarrow{P} \int_0^t \zeta_i(t)b_j(t)dB_t$$

É claro também que

$$\int_0^t \zeta_{in}(t)a_{jn}(t)dB_t \xrightarrow{P} \int_0^t \zeta_i(t)a_j(t)dB_t \text{ e } \int_0^t b_{1n}(s)b_{2n}(s)ds \rightarrow \int_0^t b_1(s)b_2(s)ds$$

Isto conclui a demonstração .

Uma maneira mais fácil de se memorizar o teorema anterior é obtida com o conceito de diferencial.Se

$$\zeta(t_2) - \zeta(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} b(s)dB_s \;\; 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$$

dizemos que a diferencial de ζ é $d\zeta(t) = a(t)dt + b(t)dB_t$. O teorema anterior pode ser reescrito assim:

$$d(\zeta_1\zeta_2)(t) = \zeta_1(t)d\zeta_2(t) + \zeta_2(t)d\zeta_1(t) + b_1(t)b_2(t)dt$$

Note que a diferencial do produto é analoga à diferencial de um produto do cálculo com o termo adicional b_1b_2dt.

Passemos agora a demonstrar a fórmula de Ito enunciada abaixo.

Teorema 11 (a fórmula de Ito) *Seja* (X_t) *um processo estocástico tal que* $dX_t = a(t)dt + b(t)dB_t$ *onde* $a, b \in L^2_\Omega$ *e seja* $f : \Re \times [0,\infty) \to \Re$ *com todas as derivadas até a segunda ordem contínuas.Então o processo estocástico* $Y_t = f(X_t, t)$ *é tal que*

$$Y_v - Y_u = \int_u^v [\frac{\partial f}{\partial t}(X_t,t) + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t,t)a(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t,t)b^2(t)]dt + \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(X_t,t)dB_t$$

ou seja a diferencial estocástica do processo é

$$dY_t = [\frac{\partial f}{\partial t}(X_t,t) + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t,t)a(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t,t)b^2(t)]dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t,t)dB_t$$

Demonstração. A demonstração será longa e a dividirei em várias etapas. Primeiramente demonstrarei que

$$d(B_t)^m = mB_t^{m-1}dB_t + \frac{m(m-1)}{2}B_t^{m-2}dt$$

para todo $m \in N$.Isto faremos por indução .Facilmente verificamos que a relação acima vale para $m = 1, 2$.Suponhamos a relação válida para m e demonstremos que vale para $m + 1$.Calculando $d(B_t)^{m+1}$ temos

$$d(B_t)^{m+1} = d(B_t^m B_t) = B_t^m dB_t + B_t d(B_t)^m + mB_t^{m-1}dt =$$

$$B_t^m dB_t + mB_t^m dB_t + \frac{m(m-1)}{2}B_t^{m-1}dt + mB_t^{m-1}dt =$$

$$= (m+1)B_t^m dB_t + \frac{m(m+1)}{2}B_t^{m-1}dt$$

terminando a indução .Disto temos imediatamente que para toda função polinomial Q em uma variável

$$d(Q(B_t)) = Q'(B_t)dB_t + \frac{Q''(B_t)}{2}dt$$

Passemos agora a considerar funções da forma $G(x,t) = Q(x)g(t)$,Q um polinômio em x e g duas vezes diferenciável.Então

$$d(G(B_t,t)) = d(Q(B_t)g(t)) = g(t)d(Q(B_t)) + Q(B_t)dg(t) + Q'(B_t) \times 0 =$$

$$g(t)[Q'(B_t)dB_t + \frac{Q''(B_t)}{2}dt] + Q(B_t)g'(t)dt = g(t)Q'(B_t)dB_t + (\frac{g(t)Q''(B_t)}{2} + Q(B_t)g'(t))dt$$

Reescrevendo vem

$$G(B_{t_2},t_2)-G(B_{t_1},t_1)=\int_{t_1}^{t_2}[G_t+\frac{1}{2}G_{xx}]dt+\int_{t_1}^{t_2}G_x dB_t$$

A fórmula acima é então válida para $G=\sum_{i=1}^{m}f_i(x)g_i(t)$,$f_i$ poliniômial e g_i contínuamente diferenciável.Pelo teorema de Stone-Weierstrass toda $f:[t_1,t_2]\times\Re\rightarrow\Re$,duas vezes continuamente diferenciavel é limite uniforme nos compactos de funções da forma $G=\sum_{i=1}^{m}f_i(x)g_i(t)$, com a convergência uniforme de todas as derivadas até a segunda ordem.Temos então

$$G_n(B_{t_2},t_2)-G_n(B_{t_1},t_1)=\int_{t_1}^{t_2}[\frac{\partial G_n}{\partial t}(B_t,t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G_n}{\partial x^2}(B_t,t)]dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial G_n}{\partial x}(B_t,t)dB_t$$

A convergência uniforme implica que

$$P-\lim_{n\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}[\frac{\partial G_n}{\partial t}(B_t,t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G_n}{\partial x^2}(B_t,t)]dt=\int_{t_1}^{t_2}[\frac{\partial G}{\partial t}(B_t,t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(B_t,t)]dt$$

(lembre-se de que $t\rightarrow B_t(w)$ é contínua quase-certamente e que portanto $\{B_t(w);t_1\leq t\leq t_2\}$ é um conjunto compacto q.c.)
Temos também que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}|\frac{\partial G_n}{\partial x}(B_t,t)dB_t-\frac{\partial G}{\partial x}(B_t,t)|^2dt=0\quad q.c.$$

Vale então que $\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial G_n}{\partial x}(B_t,t)dB_t\xrightarrow{P}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial G}{\partial x}(B_t,t)dB_t$ E portanto vale a fórmula de Ito para o processo estocástico B_t. Para extendermos o resultado a qualquer processo estocástico notemos primeiramente que a fórmula vale se $Y_t=G(\xi_1+a_1t+b_1B_t,t)$ se ξ_1,a_1,b_1 são $\mathcal{A}_{t_1}$ mensuráveis .A demonstração segue os mesmos passos anteriores a partir da verificação de que,se $\tilde{\xi}(t)=\xi_1+a_1t+b_1B_t$

$$d(\tilde{\xi}(t))^m=m\tilde{\xi}(t)^{m-1}[a_1dt+b_1dB_t]+\frac{m(m-1)}{2}(\tilde{\xi}(t))^{m-2}b_1^2dt$$

Esses detalhes estão ao alcance de qualquer leitor que entendeu a primeira parte desta demonstração . O próximo passo é notar que se $a(t),b(t)$ são funções degrau a mesma fórmula será valida. Isto porque a fórmula é valida em cada intervalo onde $a(t),b(t)$ são constantes no tempo. Sejam agora

$a(t), b(t)$ funções não -antecipativas de L^2_Ω e $a_n, b_n \in L^2_\Omega$ sequência de funções degrau tais que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |a_n(t) - a(t)|dt = 0 \text{ e } \int_0^T |b_n(t) - b(t)|^2 dt \xrightarrow{P} 0 \quad \text{q.c.}$$

Definamos $\xi_n(t) = \xi(0) + \int_0^t a_n(s)ds + \int_0^t b_n(s)dB_s$ .Vale que $\sup_{0\le t\le T} |\xi_n(t) - \xi(t)| \xrightarrow{P} 0$ e portanto que converge q.c. numa subsequência k_n , que para simplificar a notação ,consideraremos $k_n = n$.Vale então que

$$\int_0^T |\frac{\partial G}{\partial x}(\xi_n(t), t)b_n(t) - \frac{\partial G}{\partial x}(\xi(t), t)b(t) \xrightarrow{P} 0$$

e portanto que

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial G}{\partial x}(\xi_n(t), t)b_n(t)dB_t \xrightarrow{P} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial G}{\partial x}(\xi(t), t)b(t)dB_t$$

Finalmente da convergência uniforme obtemos que :

$$P - \lim_{n\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} [\frac{\partial G}{\partial t}(\xi_n(t), t) + \frac{\partial G}{\partial x}(\xi_n(t), t)a_n(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\xi_n(t), t)b_n^2(t)]dt =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [\frac{\partial G}{\partial t}(\xi(t), t) + \frac{\partial G}{\partial x}(\xi(t), t)a(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\xi(t), t)b^2(t)]dt$$

Com isto terminamos a demonstração do lema de Ito.

Exercício 2 *Demonstre a seguinte extensão do lema de Ito:*

Teorema 12 *Se $dX_i(t) = a_i(t)dt + b_i(t)dB_t$ $1 \le i \le m$ e $f : \Re^m \times \Re_+ \to \Re$ tem todas as derivadas até a segunda ordem contínuas então o processo estocástico $Y_t = f(X_1(t), \ldots, X_m(t), t)$ tem a diferencial estocástica:*

$$dY_t = [\frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t, t)a_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_t, t)b_i(t)b_j(t)]dt + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t, t)b_i(t)dB_t$$

7 A fórmula de Black-Scholes

O primeiro cálculo bem sucedido do preço de um ativo derivado foi feito por Black e Scholes. O conceito fundamental usado por eles foi o de arbitragem.

Suponhamos então que temos uma opção européia com vencimento no tempo T e preço de exercício K.Suponhamos ainda um ativo sem risco com preço $\beta_t = e^{rt}, r \geq 0$ e uma ação cujo preço S_t tem distribuição log-normal: $S_t = S_0 e^{\alpha t + \sigma B_t}$.Pela fórmula de Ito

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\alpha + \sigma^2/2)dt + \sigma dB_t$$

O valor da opção no instante T é $Y_T = \max\{S_T - K, 0\}$. Queremos calcular $Y_t, 0 \leq t < T$ numa economia sem custos de transação .

Definição 6 *Uma estratégia de compra e venda é um par* (a, b),*onde* $a \in M_\Omega^2, b \in L_\Omega^2$ *é tal que* $\int_0^T b_t^2 e^{rt} dt < \infty$ *q.c.* .*Ela é auto-financiavel se para* $0 \leq t \leq T$

$$a_t S_t + b_t \beta_t = a_0 S_0 + b_0 \beta_0 + \int_0^t a_s dB_s + \int_0^t b_s r e^{rs} ds$$

Se (a, b) é auto-financiável e $a_T S_T + b_T \beta_T = Y_T$ então $a_0 S_0 + b_0 \beta_0$ é o preço da opção . É claro então que $Y_t = a_t S_t + b_t \beta_t$ pelos mesmos motivos.Para calcular Y_t suporemos que $Y_t = f(S_t, t), f$ duas vezes diferenciável se $t < T$. Se a resposta obtida realmente for duas vezes diferenciável estaremos justificados. Pelo lema de Ito obtemos $(\mu = \alpha + \sigma^2/2)$

$$dY_t = (\mu \frac{\partial f}{\partial x}(S_t, t) S_t + \frac{\partial f}{\partial t}(S_t, t) S_t + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(S_t, t) S_t^2) dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial x}(S_t, t) S_t dB_t$$

Queremos encontrar (a, b) auto-financiável tal que $a_t S_t + b_t \beta_t = Y_t$.Nesse caso teríamos

$$dY_t = a_t dS_t + b_t d\beta_t = (a_t \mu s_t + b_t \beta_t r)dt + a_t \sigma S_t dB_t$$

Para isto ser possivel temos que $a_t \sigma S_t = \sigma \frac{\partial f}{\partial x}(S_t, t) S_t$ e portanto $a_t = \sigma \frac{\partial f}{\partial x}(S_t, t)$. Disto , pela definição de (a, b) obtemos $b_t = \beta_t^{-1}(Y_t - a_t S_T) = \beta_t^{-1}(f(S_t, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(S_t, t) S_t)$. Substituindo e igualando os coeficientes em dt nas equações acima vem:

$$-rf(S_t, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(S_t, t) + r \frac{\partial f}{\partial x}(S_t, t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(S_t, t) = 0$$

Ou seja é suficiente que f satisfaça a equação a derivadas parciais:

$$-rf(x,t)+\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)+r\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)+\frac{\sigma^2x^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)=0$$

com a condição de fronteira $f(x,T)=\max\{x-K,0\}$.Inicialmente façamos a seguinte transformação: $h(x,t)=e^{-rt}f(x,t)$.Com isto a equação acima simplifica para

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)+r\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)+\frac{\sigma^2x^2}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)=0$$

com a condição de fronteira $h(x,T)=e^{-rT}\max\{x-K,0\}$.Procurando soluções da forma $\psi(x)\phi(t)$ obtemos

$$-\frac{\phi'(t)}{\phi(t)}=A=rx\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}+\frac{\sigma^2x^2}{2}\frac{\psi''(x)}{\psi(x)}$$

suja solução é $\phi(t)=ke^{-At},\psi(x)=c_1x^\alpha+c_2x^\beta$ onde α,β resolvem a equação $u(u-1)\sigma^2/2+ru=A$.Uma solução mais geral será então $F(x,t)=e^{rt}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-A_nt}(c_{1n}x^{\alpha_n}+c_{2n}x^{\beta_n})$.Como $f(x,t)$ não é diferenciavel não será possivel escolher os coeficientes (A_n) para que $F(x,T)=f(x,T)$.Isto não implica que não existe solução mais sim que F não é a solução geral. Pelo momento nos contentaremos em dizer que

$$f(x,t)=\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-s^2/2}ds-\frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z-\sigma\sqrt{T-t}}e^{-s^2/2}ds$$

sendo $z=\frac{\log(x/K)}{\sigma\sqrt{T-t}}+(r+\sigma^2/2)\sqrt{T-t}$ é a solução que procuramos . Podemos ver pela forma de f que o método de variáveis separáveis é pouco promissor nesse caso.Por outro lado podemos simplesmente substituir o membro direito da igualdade acima na equação a derivadas parciais para verificar que é a solução .

8 A solução de Feynman-Kac

A fórmula de Feynman-Kac permite resolver equações diferenciais parciais do tipo obtido acima como o valor esperado de certo processo estocástico.Uma

formulação sem dúvida de maior conteúdo econômico. Uma outra utilidade dessa formulação é a possibilidade de se usar o método de Monte-Carlo para sua resolução numérica.

Consideremos a equação

$$-r(x,t)f(x,t)+\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)+r(x,t)x\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)+\frac{\sigma^2(x,t)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)=0$$

com condição de fronteira $f(x,t)=g(x)$ para g contínua.Esse tipo de equação acima surge quando no lugar de termos o preço final $Y_T=\max\{S_T-K,0\}$ temos $Y_T=g(S_T)$, a taxa de juros r e a variância σ mais gerais do que na fórmula de Black-Scholes.

Seja então Z_s^{xt} o processo estocástico definido por $Z_s^{xt}=x$ se $s\leq t$ e

$$dZ_s^{xt}=r(Z_s^{xt},s)Z_s^{xt}ds+\sigma(Z_s^{xt},s)dB_s \quad s>t$$

(nota: a existência de soluções para equações diferenciais estocásticas não será examinada aqui .Basta dizer que existe em condições gerais)

Teorema 13 *Se r,σ,g tem módulo limitado superiormente por um polinômio em (x,t) o preço do ativo derivado cujo valor final é $Y_T=g(S_T)$ será $Y_t=f(S_t,t)$ onde f é dada por*

$$f(x,t)=E(e^{-\int_t^T r(Z_s^{xt},s)ds}g(Z_s^{xt}))$$

satisfaz a $f(x,T)=g(x)$ e resolve:

$$-r(x,t)f(x,t)+\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)+r(x,t)x\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)+\frac{\sigma^2(x,t)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)=0$$

Por exemplo,para a fórmula de Black-Scholes temos $r(Z_s^{xt},s)=\alpha+\sigma^2/2$ e $Z_T^{xt}=S_{T-t}$.O leitor deve verificar,como exercício que realmente se obtem a fórmula de Black-Scholes nesse caso.

Verifiquemos a fórmula de Feynman-Kac supondo que exista uma solução $f(x,t)$ da equação acima. Definamos os processos $Z_s=\int_t^s r(X_\tau,\tau)d\tau$, $Y_s=f(x,t)$ para $s\leq t$ e $Y_s=f(X_s,s)e^{-Z_s}$ se $s\geq t$, onde $X_s=Z_s^{xt}$. Temos que $dZ_s=r(X_s,s)ds$ e

$$df(X_s,s)=[\frac{\partial f}{\partial t}(X_s,s)+\frac{\partial f}{\partial x}(X_s,s)r(X_s,s)+\frac{\partial^2 f}{2\partial x^2}(X_s,s)\sigma(X_s,s)]ds+\frac{\partial f}{\partial x}(X_s,s)dB_s$$

Pela fórmula de Ito vem

$$dY_s = [\frac{\partial f}{\partial t}(X_s, s) + \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s)r(X_s, s) + \frac{\partial^2 f}{2\partial x^2}(X_s, s)\sigma^2(X_s, s)]e^{-Z_s}ds -$$

$$-f(X_s, s)e^{-Z_s}r(X_s, s)ds + \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s)e^{-Z_s}dB_s + \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) \times 0dt =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s)e^{-Z_s}dB_s$$

E portanto

$$Y_T - f(x,t) = \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s)e^{-Z_s}dB_s$$

$$EY_T = f(x,t) + E\int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s)e^{-Z_s}\sigma(X_s, s)dB_s = f(x,t)$$

Acima usamos que a integral estocástica é uma martingala.Finalmente temos

$$f(x,t) = E[f(X_T, T)e^{-\int_t^T r(X_\tau,\tau)d\tau}] = E[e^{-\int_t^T r(X_\tau,\tau)d\tau}g(X_T)]$$

Terminando a verificação .

9 O teorema e a fórmula de Girsanov

Comecemos com uma definição .

Definição 7 *Uma medida de probabilidade Q em $(\Omega, \mathcal{A})$ é equivalente à P se $P(A) = 0$ se e somente se $Q(A) = 0$*

Uma medida Q equivalente à P é uma medida de martingala equivalente para $(X_t)_t$ se $(X_t)_t$ for uma martingala com respeito à Q e se $\int_\Omega (\frac{dQ}{dP})^2 dP(w) < \infty$,sendo dQ/dP a derivada de Radon-Nykodin de Q que existe conforme o teorema a seguir:

Teorema 14 (Radon-Nykodin) *Se as medidas de probabilidades são equivalentes existe então $\frac{dQ}{dP} = g : \Omega \to \Re_{++}$ mensurável tal que $Q(A) = \int_A g(w)dP(w)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.Em particular $g \in L^1(P)$.*

Não demonstraremos o teorema de Radon-Nykodin. Uma versão do teorema de Girsanov é a seguinte:

Teorema 15 *Seja (X_t) um processo estocástico da forma*

$$X_t = x + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \; 0 \leq t \leq T$$

onde $\mu \in L^1_\Omega, \sigma \in L^2_\Omega$. Suponhamos que $(m_t)_t \in L^1_\Omega$ e que existe $\theta \in L^2_\Omega, Ee^{\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds} < \infty$, tal que $\sigma_t\theta_t = \mu_t - m_t \; 0 \leq t \leq T$. Então existe uma medida de probabilidade Q equivalente à P tal que $\hat{B}_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds \; 0 \leq t \leq T$ é um movimento Browniano padronizado em $(\Omega, \mathcal{A}, Q)$. O processo (X_t) pode ser escrito da forma

$$X_t = x + \int_0^t m_s ds + \int_0^t \sigma_s d\hat{B}_s \; 0 \leq t \leq T$$

Além disso,para toda variável aleatória $Z, E_Q(|Z|) < \infty$ vale $E_Q(Z) = E_P(Z\xi_T)$ onde

$$\xi_t = e^{(-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds)} \quad 0 \leq t \leq T$$

Ou seja,o processo de deslocamento de (X_t) pode ser alterado,continuando (X_t) a ser uma integral estocástica.

Exemplo. Suponhamos que $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$ e que existe $\phi \in L^2_\Omega$ tal que $\sigma_t\phi_t = \mu_t$ e que $E\exp[\int_0^T \phi_t^2 dt < \infty]$ e $E\exp[-\int_0^T \phi_t dB_t - \int_0^T \phi_t^2 dt] < \infty$. Então existe uma medida de martingala equivalente.Com efeito: a medida equivalente é a derivada de Radon-Nykodin

$$\xi_T = \exp(-\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds)$$

dada pelo teorema de Girsanov com $m_t = 0$.

Definição 8 *Um processo estocástico é um processo de Ito se puder se escrito da forma*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB_s \; 0 \leq t \leq T$$

onde $b \in L^1_\Omega, \sigma \in L^2_\Omega$.

Teorema 16 (Girsanov) *Seja (X_t) um processo de Ito e $\phi \in L^2_\Omega$. Definamos*

$$\zeta_s^t(\phi) = \int_s^t \phi(u)dB_u - \frac{1}{2}\int_s^t \phi(u)^2 du$$

$$\tilde{B}(t) = B(t) - \int_0^t \phi(s)ds \ e \ \tilde{P}(A) = \int_A e^{\zeta_0^T(\phi)dP}, \ A \in \mathcal{A}$$

Se $\tilde{P}(\Omega) = 1$ então $\tilde{B}$ é um movimento Browniano em $(\Omega, \mathcal{A}, \tilde{P})$ adaptado à $\tilde{B}$ e

$$X_t - X_s = \int_0^t (b_u + \sigma_u \phi_u)du + \int_0^t \sigma_u dB_u$$

Teorema 17 *Se $f \in L^2_\Omega$ e existe $a > 0$ tal que $Ee^{af_t^2} < \infty$ $0 \le t \le T$.Então*

$$Ee^{\int_{t_1}^{t_2} f(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} f^2(s)ds} = 1 \quad se\ 0 \le t \le T$$

Lema 5 *Se $Ee^{\lambda \int_0^T f_s^2 ds} < \infty$ para algum $\lambda > 1$ então vale $Eg = 1$ onde $g = e^{\int_{t_1}^{t_2} f(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} f^2(s)ds}$.*

Demonstração.Seja $(f_m) \in L^2_\Omega$ tal que $\int_0^T |f_m(t) - f(t)|^2 dt \xrightarrow{P} 0$ e $\int_0^T f_m^2(t)dt \le \int_0^T f^2(t)dt$.Sem perda de generalidade f_m é limitada para cada m. Mostremos que

$$Ee^{2\int_{t_1}^{t_2} f_m(t)dB_t} \le c'_m \quad \text{para todo } 0 \le t \le T$$

Para isto note que $Ee^{\gamma|B_t|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\gamma|x| - |x|^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}dx = e^{\gamma^2 t/2}$. Seja $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = T$ tal que $\max_{0 \le j \le n-1}(t_{j+1}^n - t_j^n) \to 0$.Então

$$|\int_{t_1}^{t_2} f_m(t)dB_t| = |\lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n-1} f_m(t_l^n)(B_{t_{l+1}^n} - B_{t_l^n})| \le c_m \liminf_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n-1} |B_{t_{l+1}^n} - B_{t_l^n}|$$

Pelo lema de Fatou

$$E\exp(2\int_{t_1}^{t_2} f_m(t)dB_t) \le E\liminf_{n\to\infty} \exp(2c_m \sum_{l=0}^{n-1} |B_{t_{l+1}^n} - B_{t_l^n}|) \le$$

$$\liminf_{n\to\infty} E\exp(2c_m \sum_{l=0}^{n-1} |B_{t_{l+1}^n} - B_{t_l^n}|) = \liminf_{n\to\infty} \Pi_{l=0}^{n-1} Ee^{2c_m|B_{t_{l+1}^n} - B_{t_l^n}|} =$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \Pi_{l=0}^{n-1} E e^{2c_m^2(t_{l+1}^n - t_l^n)} = e^{2c_m^2(t_2-t_1)}$$

A fórmula de Ito aplicada a $e^{\int_{t_1}^{t} f_m(t)dB_t - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t} f_m^2(t)ds}$ resulta em

$$e^{\int_{t_1}^{t_2} f_m(t)dB_t - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} f_m^2(t)ds} - 1 =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [\frac{-f_m^2(t)}{2} e^{\int_{t_1}^{t_2} f_m(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t} f_m^2(s)ds} + \frac{1}{2} e^{\int_{t_1}^{t_2} f_m(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t} f_m^2(s)ds} f_m^2(t)]dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} e^{\int_{t_1}^{t_2} f_m(t)dB_t - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} f_m^2(t)ds} f_m(t)dB_t =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} e^{\int_{t_1}^{t_2} f_m(t)dB_t - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} f_m^2(t)ds} f_m(t)dB_t$$

Seja $h(t)$ o integrando na ultima integral.É claro que $E\int_{t_1}^{t_2} h^2(t)dt < \infty$ pois f_m é limitada. Temos então que $E\int_{t_1}^{t_2} h(t)dB_t = 0$ .Logo

$$Ee^{\int_{t_1}^{t_2} f_m(t)dB_t - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} f_m^2(t)dt} - 1 = 0$$

10 Outros processos estocásticos

A integração estocástica foi generalizada para processos estocásticos diferentes do movimento Browniano. Podemos ter por exemplo uma martingala no lugar de (B_t). Nesta seção falarei brevemente sobre integração estocática de processos de Poisson. Primeiramente necessito definir processos pontuais.

Seja $(X, \mathcal{B}_X)$ um espaço mensurável e M o conjunto das medidas com valores em $\mathcal{N}^+ = \mathcal{N} \cup \{\infty\}$ em $(X, \mathcal{B}_X)$ e $\mathcal{B}_M$ a menor σ-álgebra em M que torna todas as funções $\Theta_B : M \to \mathcal{N}^+$,$\Theta(\mu) = \mu(B)$,$\mathcal{B}_M$ mensuráveis para todo $B \in \mathcal{B}_X$.

Definição 9 *Uma variável aleatória $\mu : \Omega \to M$ definida no espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que seja mensurável é uma medida aleatória de Poisson se*

1. *Para todo $B \in \mathcal{B}_X, w \to \mu(w)(B)$ tem distribuição de Poisson: $P(\mu(B) = n) = \lambda(B)^n e^{-\lambda(B)}/n!, \lambda(B) = E\mu(B)$*
2. *Se $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}_X$ são dois a dois disjuntos então $\mu(B_1), \ldots, \mu(B_n)$ são independentes.*

10.1 Processos pontuais de Poisson

Seja $(X, \mathcal{B}_X)$ um espaço mensurável . Uma função pontual em X é $p : D_p \to X, D_p \subset (0, \infty)$ é enumerável. Dada p está definida uma medida $N_p(dtdx)$ em $(0, \infty) \times X$ tal que

$$N_p((0,t] \times B) = \#(0,t] \cap p^{-1}(B) \quad B \in \mathcal{B}_X$$

A σ-álgebra $\mathcal{B}(\Pi_X)$ é a menor σ-álgebra com relação à qual $p \to N_p((0,t] \times U)$ é mensurável para todo $U \in \mathcal{B}_X$.

Definição 10 *Um processo pontual p em X é uma variável aleatória à valores* $(\Pi_X, \mathcal{B}(\Pi_X))$

Um processo pontual é estacionário se para todo $t > 0$ p e $\theta_t p$ tem a mesma distribuição , sendo que $\theta_t p$ tem domínio $D_{\theta_t p} = \{s \in (0, \infty); s + t \in D_p\}$ e $(\theta_t p)(s) = p(s + t)$. Um processo pontual é de Poisson se $N_p(dtdx)$ for uma medida de Poisson em $(0, \infty) \times X$. Um processo de Poisson é estacionário se e somente se

$$n_p(dtdx) = E(N_p(dtdx)) \quad \text{é da forma} \quad n_p(dtdx) = dtn(dx)$$

para alguma medida $n(dx)$ em $(X, \mathcal{B}_X)$.Chamamos $n(dx)$ de medida característica.

10.2 A integral estocástica para processos pontuais.

Um processo pontual $p = (p(t))$ definido em $(X, \mathcal{B}_X)$ é $(\mathcal{A}_t)_t$ adaptado se para todo $t > 0$,$U \in \mathcal{B}_X, N_p(t, U) = \sum_{s \in D_p, s \le t} \chi_U(p(s))$ é $\mathcal{A}_t$ mensurável . Ele é σ-finito se existe $U_n \in \mathcal{B}_X, n \ge 1$ tal que $U_n \uparrow X$ e $E[N_p(t, U_n)] < \infty$ para todo $t > 0, n \ge 1$. Se um processo pontual é adaptado,σ-finito e $EN_p(t, U) < \infty$ existe então um processo,$\hat{N}_p$,crescente, adaptado,natural (i.e. $E \int_0^t M_s d\hat{N}_p(s, U) = E \int_0^t M_{s-} d\hat{N}_p(s, U)$ para toda martingala limitada) e tal que

$$\tilde{N}(t, U) = N_p(t, U) - \hat{N}_p(t, U)$$

é uma martingala.

Definição 11 *Um processo pontual adaptado,p,em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ é de classe QE com relação à filtração $(\mathcal{A}_t)_t$ se for σ-finito e existir $\hat{N}_p = (\hat{N}_p(t, U))$ tal que*

1. *$t \to \hat{N}_p(t,U)$ é contínuo,adaptado,crescente para todo $U \in \mathcal{B}_X, EN_p(t,U) < \infty$ para todo t*

2. *para todo t e q.t. $w \in \Omega, U \to \hat{N}_p(t,U)$ é uma medida σ-finita em $(X, \mathcal{B}_X)$*

3. *$t \to \tilde{N}_p(t,U) - \hat{N}_p(t,U)$ é uma martingala com relação à $(\mathcal{A}_t)_t$*

A função $\hat{N}$ é chamada de compensador de p.

Definição 12 *Um processo pontual p é de Poisson adaptado se*

$$\{N_p(t+h,U) - N_p(t,U)\}_{h>0, U \in \mathcal{B}_X} \text{ é independente de } \mathcal{A}_t$$

Um processo de Poisson é QE se e somente se $t \to E(N_p(t,U))$ é contínua. Neste caso o compensador é dado por $\hat{N}_p(t,U) = E[N_p(t,U)]$. Em particular um processo pontual de Poisson estacionário é de classe QE com compensador $\hat{N}_p = tn(U)$ onde $n(dx)$ é a medida característica de p.

A integral estocástica é definida então da seguinte maneira:

$$\int_0^{t+} \int_X f(s,x,\cdot) dN_p(s,x) = \sum_{s \leq t, s \in D_p} f(s, p(s), \cdot)$$

Para terminarmos um exemplo.

Exemplo(Processos de Lévy)

Seja $(X_t)_t$ um processo estocástico,contínuo à direita com incrementos independentes.Seja $\mathcal{A}_t = \sigma\{X_s; s \leq t\}$. Definamos $D_p = \{t > 0; X_t \neq X_{t-}\}$ e para $t \in D_p$ seja $p(t) = X_t - X_{t-}$. Temos então que p define um processo pontual de Poisson estacionário em $X = \Re \setminus \{0\}$. O teorema de Lévy-Ito diz que existe um movimento Browniano (B_t) tal que

$$X_t = X_0 + aB_t + bt + \int_0^{t+} \int_{\Re \setminus \{0\}} x\chi_{|x| \geq 1} dN_p(s,x) + \int_0^{t+} \int_{\Re \setminus \{0\}} x\chi_{|x|<1} d\tilde{N}_p(s,x)$$

Neste caso o compensador $\hat{N}_p$ é da forma $dsn(dx)$.

REFERÊNCIAS

1. D.Duffie,"Dynamic asset pricing theory",1992,Princeton University Press

2. A. Freedman,"Stochastic differential equations and applications",vol.I,1975, Academic Press,Nova Iorque

3. N. Ikeda e Sh. Watanabe,Stochastic differential equations and diffusion processes,2ª,1989, North-Holland Mathematical Library v.24, North-Holland

ENSAIOS ECONÔMICOS DA EPGE

100. JUROS, PREÇOS E DÍVIDA PÚBLICA - VOL. I: ASPECTOS TEÓRICOS - Marco Antonio C. Martins e Clovis de Faro - 1987 (esgotado)
101. JUROS, PREÇOS E DÍVIDA PÚBLICA - VOL. II: A ECONOMIA BRASILEIRA - 1971/85 - Antonio Salazar P. Brandão, Marco Antonio C. Martins e Clovis de Faro - 1987 (esgotado)
102. MACROECONOMIA KALECKIANA - Rubens Penha Cysne - 1987 (esgotado)
103. O PREÇO DO DÓLAR NO MERCADO PARALELO, O SUBFATURAMENTO DE EXPORTAÇÕES E O SUBFATURAMENTO DE IMPORTAÇÕES - Fernando de Holanda Barbosa, Rubens Penha Cysne e Marcos Costa Holanda - 1987 (esgotado)
104. BRASILIAN EXPERIENCE WITH EXTERNAL DEBT AND PROSPECTS FOR GROWTH - Fernando de Holanda Barbosa and Manuel Sanches de La Cal - 1987 (esgotado)
105. KEYNES NA SEDIÇÃO DA ESCOLHA PÚBLICA - Antonio Maria da Silveira - 1987 (esgotado)
106. O TEOREMA DE FROBENIUS-PERRON - Carlos Ivan Simonsen Leal - 1987 (esgotado)
107. POPULAÇÃO BRASILEIRA - Jessé Montelo - 1987 (esgotado)
108. MACROECONOMIA - CAPÍTULO VI: "DEMANDA POR MOEDA E A CURVA LM" - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - 1987 (esgotado)
109. MACROECONOMIA - CAPÍTULO VII: "DEMANDA AGREGADA E A CURVA IS" - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - 1987 (esgotado)
110. MACROECONOMIA - MODELOS DE EQUILÍBRIO AGREGATIVO A CURTO PRAZO - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - 1987 (esgotado)
111. THE BAYESIAN FOUNDATIONS OF SOLUTIONS CONCEPTS OF GAMES - Sérgio Ribeiro da Costa Werlang e Tommy Chin-Chiu Tan - 1987 (esgotado)
112. PREÇOS LÍQUIDOS (PREÇOS DE VALOR ADICIONADO) E SEUS DETERMINANTES; DE PRODUTOS SELECIONADOS, NO PERÍODO 1980/1° SEMESTRE/1986 - Raul Ekerman - 1987 (esgotado)
113. EMPRÉSTIMOS BANCÁRIOS E SALDO-MÉDIO: O CASO DE PRESTAÇÕES - Clovis de Faro - 1988 (esgotado)
114. A DINÂMICA DA INFLAÇÃO - Mario Henrique Simonsen - 1988 (esgotado)
115. UNCERTAINTY AVERSIONS AND THE OPTMAL CHOISE OF PORTFOLIO - James Dow e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1998 (esgotado)
116. O CICLO ECONÔMICO - Mario Henrique Simonsen - 1988 (esgotado)
117. FOREIGN CAPITAL AND ECONOMIC GROWTH - THE BRASILIAN CASE STUDY - Mario Henrique Simonsen - 1988 (esgotado)
118. COMMON KNOWLEDGE - Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1988 (esgotado)
119. OS FUNDAMENTOS DA ANÁLISE MACROECONÔMICA - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - 1988 (esgotado)

120. CAPÍTULO XII - EXPECTATIVAS RACIONAIS - Mario Henrique Simonsen - 1988 (esgotado)

121. A OFERTA AGREGADA E O MERCADO DE TRABALHO - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - 1988 (esgotado)

122. INÉRCIA INFLACIONÁRIA E INFLAÇÃO INERCIAL - Mario Henrique Simonsen - 1988 (esgotado)

123. MODELOS DO HOMEM: ECONOMIA E ADMINISTRAÇÃO - Antonio Maria da Silveira - 1988 (esgotado)

124. UNDERINVOINCING OF EXPORTS, OVERINVOINCING OF IMPORTS, AND THE DOLLAR PREMIUN ON THE BLACK MARKET - Fernando de Holanda Barbosa, Rubens Penha Cysne e Marcos Costa Holanda - 1988 (esgotado)

125. O REINO MÁGICO DO CHOQUE HETERODOXO - Fernando de Holanda Barbosa, Antonio Salazar Pessoa Brandão e Clovis de Faro - 1988 (esgotado)

126. PLANO CRUZADO: CONCEPÇÃO E O ERRO DE POLÍTICA FISCAL - Rubens Penha Cysne - 1988 (esgotado)

127. TAXA DE JUROS FLUTUANTE VERSUS CORREÇÃO MONETÁRIA DAS PRESTAÇÕES: UMA COMPARAÇÃO NO CASO DO SAC E INFLAÇÃO CONSTANTE - Clovis de Faro - 1988 (esgotado)

128. CAPÍTULO II - MONETARY CORRECTION AND REAL INTEREST ACCOUNTING - Rubens Penha Cysne - 1988 (esgotado)

129. CAPÍTULO III - INCOME AND DEMAND POLICIES IN BRAZIL - Rubens Penha Cysne - 1988 (esgotado)

130. CAPÍTULO IV - BRAZILIAN ECONOMY IN THE EIGHTIES AND THE DEBT CRISIS - Rubens Penha Cysne - 1988 (esgotado)

131. THE BRAZILIAN AGRICULTURAL POLICY EXPERIENCE: RATIONALE AND FUTURE DIRECTIONS - Antonio Salazar Pessoa Brandão - 1988 (esgotado)

132. MORATÓRIA INTERNA, DÍVIDA PÚBLICA E JUROS REAIS - Maria Silvia Bastos Marques e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1988 (esgotado)

133. CAPÍTULO IX - TEORIA DO CRESCIMENTO ECONÔMICO - Mario Henrique Simonsen - 1988 (esgotado)

134. CONGELAMENTO COM ABONO SALARIAL GERANDO EXCESSO DE DEMANDA - Joaquim Vieira Ferreira Levy e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1988 (esgotado)

135. AS ORIGENS E CONSEQUÊNCIAS DA INFLAÇÃO NA AMÉRICA LATINA - Fernando de Holanda Barbosa - 1988 (esgotado)

136. A CONTA-CORRENTE DO GOVERNO - 1970/1988 - Mario Henrique Simonsen - 1989 (esgotado)

137. A REVIEW ON THE THEORY OF COMMOW KNOWLEDGE - Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1989 (esgotado)

138. MACROECONOMIA - Fernando de Holanda Barbosa - 1989 (esgotado)

139. TEORIA DO BALANÇO DE PAGAMENTOS: UMA ABORDAGEM SIMPLIFICADA - João Luiz Tenreiro Barroso - 1989 (esgotado)

140. CONTABILIDADE COM JUROS REAIS - Rubens Penha Cysne - 1989 (esgotado)

141. CREDIT RATIONING AND THE PERMANENT INCOME HYPOTHESIS - Vicente Madrigal, Tommy Tan, Daniel Vicent, Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1989 (esgotado)

142. A AMAZÔNIA BRASILEIRA - Ney Coe de Oliveira - 1989 (esgotado)

143. DESÁGIO DAS LFTs E A PROBABILIDADE IMPLÍCITA DE MORATÓRIA - Maria Silvia Bastos Marques e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1989 (esgotado)

144. THE LDC DEBT PROBLEM: A GAME-THEORETICAL ANALISYS - Mario Henrique Simonsen e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1989 (esgotado)

145. ANÁLISE CONVEXA NO Rn - Mario Henrique Simonsen - 1989 (esgotado)

146. A CONTROVÉRSIA MONETARISTA NO HEMISFÉRIO NORTE - Fernando de Holanda Barbosa - 1989 (esgotado)

147. FISCAL REFORM AND STABILIZATION: THE BRAZILIAN EXPERIENCE - Fernando de Holanda Barbosa, Antonio Salazar Pessoa Brandão e Clovis de Faro - 1989 (esgotado)

148. RETORNOS EM EDUCAÇÃO NO BRASIL: 1976/1986 - Carlos Ivan Simonsen Leal e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang,- 1989 (esgotado)

149. PREFERENCES, COMMON KNOWLEDGE AND SPECULATIVE TRADE - James Dow, Vicente Madrigal e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1990 (esgotado)

150. EDUCAÇÃO E DISTRIBUIÇÃO DE RENDA - Carlos Ivan Simonsen Leal e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1990 (esgotado)

151. OBSERVAÇÕES A MARGEM DO TRABALHO "A AMAZÔNIA BRASILEIRA" - Ney Coe de Oliveira - 1990 (esgotado)

152. PLANO COLLOR: UM GOLPE DE MESTRE CONTRA A INFLAÇÃO? - Fernando de Holanda Barbosa - 1990 (esgotado)

153. O EFEITO DA TAXA DE JUROS E DA INCERTEZA SOBRE A CURVA DE PHILLIPS DA ECONOMIA BRASILEIRA - Ricardo de Oliveira Cavalcanti - 1990 (esgotado)

154. PLANO COLLOR: CONTRA A FACTUALIDADE E SUGESTÕES SOBRE A CONDUÇÃO DA POLÍTICA MONETÁRIA-FISCAL - Rubens Penha Cysne - 1990 (esgotado)

155. DEPÓSITOS DO TESOURO: NO BANCO CENTRAL OU NOS BANCOS COMERCIAIS? - Rubens Penha Cysne - 1990 (esgotado)

156. SISTEMA FINANCEIRO DE HABITAÇÃO: A QUESTÃO DO DESEQUILÍBRIO DO FCVS - Clovis de Faro - 1990 (esgotado)

157. COMPLEMENTO DO FASCÍCULO Nº 151 DOS "ENSAIOS ECONÔMICOS" (A AMAZÔNIA BRASILEIRA) - Ney Coe de Oliveira - 1990 (esgotado)

158. POLÍTICA MONETÁRIA ÓTIMA NO COMBATE A INFLAÇÃO - Fernando de Holanda Barbosa - 1990 (esgotado)

159. TEORIA DOS JOGOS - CONCEITOS BÁSICOS - Mario Henrique Simonsen - 1990 (esgotado)

160. O MERCADO ABERTO BRASILEIRO: ANÁLISE DOS PROCEDIMENTOS OPERACIONAIS - Fernando de Holanda Barbosa - 1990 (esgotado)
161. A RELAÇÃO ARBITRAGEM ENTRE A ORTN CAMBIAL E A ORTN MONETÁRIA - Luiz Guilherme Schymura de Oliveira - 1990 (esgotado)
162. SUBADDITIVE PROBABILITIES AND PORTFOLIO INERTIA - Mario Henrique Simonsen e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1990 (esgotado)
163. MACROECONOMIA COM M4 - Carlos Ivan Simonsen Leal e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1990 (esgotado)
164. A RE-EXAMINATION OF SOLOW'S GROWTH MODEL WITH APPLICATIONS TO CAPITAL MOVEMENTS - Neantro Saavedra Rivano - 1990 (esgotado)
165. THE PUBLIC CHOICE SEDITION: VARIATIONS ON THE THEME OF SCIENTIFIC WARFARE - Antonio Maria da Silveira - 1990 (esgotado)
166. THE PUBLIC CHOPICE PERSPECTIVE AND KNIGHT'S INSTITUTIONALIST BENT - Antonio Maria da Silveira - 1990 (esgotado)
167. THE INDETERMINATION OF SENIOR - Antonio Maria da Silveira - 1990 (esgotado)
168. JAPANESE DIRECT INVESTMENT IN BRAZIL - Neantro Saavedra Rivano - 1990 (esgotado)
169. A CARTEIRA DE AÇÕES DA CORRETORA: UMA ANÁLISE ECONÔMICA - Luiz Guilherme Schymura de Oliveira - 1991 (esgotado)
170. PLANO COLLOR: OS PRIMEIROS NOVE MESES - Clovis de Faro - 1991 (esgotado)
171. PERCALÇOS DA INDEXAÇÃO EX-ANTE - Clovis de Faro - 1991 (esgotado)
172. NOVE PONTOS SOBRE O PLANO COLLOR II - Rubens Penha Cysne - 1991 (esgotado)
173. A DINÂMICA DA HIPERINFLAÇÃO - Fernando de Holanda Barbosa, Waldyr Muniz Oliva e Elvia Mureb Sallum - 1991 (esgotado)
174. LOCAL CONCAVIFIABILITY OF PREFERENCES AND DETERMINACY OF EQUILIBRIUM - Mario Rui Páscoa e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - maio de 1991 (esgotado)
175. A CONTABILIDADE DOS AGREGADOS MONETÁRIOS NO BRASIL - Carlos Ivan Simonsen Leal e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - maio de 1991 (esgotado)
176. HOMOTHETIC PREFERENCES - James Dow e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1991 (esgotado)
177. BARREIRAS A ENTRADA NAS INDÚSTRIAS: O PAPEL DA FIRMA PIONEIRA - Luiz Guilherme Schymura de Oliveira - 1991 (esgotado)
178. POUPANÇA E CRESCIMENTO ECONÔMICO - CASO BRASILEIRO - Mario Henrique Simonsen - agosto 1991 (esgotado)
179. EXCESS VOLATILITY OF STOCK PRICES AND KNIGHTIAN UNCERTAINTY - James Dow e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1991 (esgotado)
180. BRAZIL - CONDITIONS FOR RECOVERY - Mario Henrique Simonsen - 1991 (esgotado)

181. THE BRAZILIAN EXPERIENCE WITH ECONOMY POLICY REFORMS AND PROSPECTS FOR THE FUTURE - Fernando de Holanda Barbosa - Dezembro de 1991 (esgotado)

182. MACRODINÂMICA: OS SISTEMAS DINÂMICOS NA MACROECONOMIA - Fernando de Holanda Barbosa - Dezembro de 1991 (esgotado)

183. A EFICIÊNCIA DA INTERVENÇÃO DO ESTADO NA ECONOMIA - Fernando de Holanda Barbosa - Dezembro de 1991 (esgotado)

184. ASPECTOS ECONÔMICOS DAS EMPRESAS ESTATAIS NO BRASIL: TELECOMUNICAÇÕES, ELETRICIDADE - Fernando de Holanda Barbosa, Manuel Jeremias Leite Caldas, Mario Jorge Pina e Hélio Lechuga Arteiro - Dezembro de 1991 (esgotado)

185. THE EX-ANTE NON-OPTIMALITY OF THE DEMPSTER-SCHAFER UPDATING RULE FOR AMBIGUOUS BELIEFS - Sérgio Ribeiro da Costa Werlang e James Dow - Fevereiro de 1992 (esgotado)

186. NASH EQUILIBRIUM UNDER KNIGHTIAN UNCERTAINTY: BREAKING DOWN BACKWARD INDUCTION - James Dow e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Fevereiro de 1992 (esgotado)

187. REFORMA DO SISTEMA FINANCEIRO NO BRASIL E "CENTRAL BANKING" NA ALEMANHA E NA ÁUSTRIA - Rubens Penha Cysne - Fevereiro de 1992 (esgotado)

188. A INDETERMINAÇÃO DE SENIOR: ENSAIOS NORMATIVOS - Antonio Maria da Silveira - Março de 1992 (esgotado)

189. REFORMA TRIBUTÁRIA - Mario Henrique Simonsen - Março de 1992 (esgotado)

190. HIPERINFLAÇÃO E O REGIME DAS POLÍTICAS MONETÁRIA-FISCAL - Fernando de Holanda Barbosa e Elvia Mureb Sallum - Março de 1992 (esgotado)

191. A CONSTITUIÇÃO, OS JUROS E A ECONOMIA - Clovis de Faro - Abril de 1992 (esgotado)

192. APLICABILIDADE DE TEORIAS: MICROECONOMIA E ESTRATÉGIA EMPRESARIAL - Antonio Maria da Silveira - Maio de 1992 (esgotado)

193. INFLAÇÃO E CIDADANIA - Fernando de Holanda Barbosa - Julho de 1992

194. A INDEXAÇÃO DOS ATIVOS FINANCEIROS: A EXPERIÊNCIA BRASILEIRA - Fernando de Holanda Barbosa - Agosto de 1992

195. A INFLAÇÃO E CREDIBILIDADE - Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Agosto de 1992

196. A RESPOSTA JAPONESA AOS CHOQUES DE OFERTA. 1973/1981 - Fernando Antonio Hadba - Agosto de 1992

197. UM MODELO GERAL DE NEGOCIAÇÃO EM UM MERCADO DE CAPITAIS EM QUE NÃO EXISTEM INVESTIDORES IRRACIONAIS - Luiz Guilherme Schymura de Oliveira - Setembro de 1992

198. SISTEMA FINANCEIRO DE HABITAÇÃO: A NECESSIDADE DE REFORMA - Clovis de Faro - Setembro de 1992

199. BRASIL: BASES PARA A RETOMADA DE DESENVOLVIMENTO - Rubens Penha Cysne - Outubro de 1992

200. A VISÃO TEÓRICA SOBRE MODELOS PREVIDENCIÁRIOS: O CASO BRASILEIRO - Luiz Guilherme Schymura de Oliveira - Outubro de 1992

201. HIPERINFLAÇÃO: CÂMBIO, MOEDA E ÂNCORAS NOMINAIS - Fernando de Holanda Barbosa - Novembro de 1992 - (esgotado)

202. PREVIDÊNCIA SOCIAL: CIDADANIA E PROVISÃO - Clovis de Faro - Novembro de 1992

203. OS BANCOS ESTADUAIS E O DESCONTROLE FISCAL: ALGUNS ASPECTOS - Sérgio Ribeiro da Costa Werlang e Armínio Fraga Neto - Novembro de 1992 - (esgotado)

204. TEORIAS ECONÔMICAS: A MEIA-VERDADE TEMPORÁRIA - Antonio Maria da Silveira - Dezembro de 1992

205. THE RICARDIAN VICE AND THE INDETERMINATION OF SENIOR - Antonio Maria da Silveira - Dezembro de 1992

206. HIPERINFLAÇÃO E A FORMA FUNCIONAL DA EQUAÇÃO DE DEMANDA DE MOEDA - Fernando de Holanda Barbosa - Janeiro de 1993

207 REFORMA FINANCEIRA - ASPECTOS GERAIS E ANÁLISE DO PROJETO DA LEI COMPLEMENTAR - Rubens Penha Cysne - fevereiro de 1993.

208. ABUSO ECONÔMICO E O CASO DA LEI 8.002 - Luiz Guilherme Schymura de Oliveira e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - fevereiro de 1993.

209. ELEMENTOS DE UMA ESTRATÉGIA PARA O DESENVOLVIMENTO DA AGRICULTURA BRASILEIRA - Antonio Salazar Pessoa Brandão e Eliseu Alves - Fevereiro de 1993

210. PREVIDÊNCIA SOCIAL PÚBLICA: A EXPERIÊNCIA BRASILEIRA - Hélio Portocarrero de Castro, Luiz Guilherme Schymura de Oliveira, Renato Fragelli Cardoso e Uriel de Magalhães - Março de 1993.

211. OS SISTEMAS PREVIDENCIÁRIOS E UMA PROPOSTA PARA A REFORMULACAO DO MODELO BRASILEIRO - Helio Portocarrero de Castro, Luiz Guilherme Schymura de Oliveira, Renato Fragelli Cardoso e Uriel de Magalhães - Março de 1993. (esgotado)

212. THE INDETERMINATION OF SENIOR (OR THE INDETERMINATION OF WAGNER) AND SCHMOLLER AS A SOCIAL ECONOMIST - Antonio Maria da Silveira - Março de 1993.

213. NASH EQUILIBRIUM UNDER KNIGHTIAN UNCERTAINTY: BREAKING DOWN BACKWARD INDUCTION (Extensively Revised Version) - James Dow e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Abril de 1993 .

214. ON THE DIFFERENTIABILITY OF THE CONSUMER DEMAND FUNCTION - Paulo Klinger Monteiro, Mário Rui Páscoa e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Maio de 1993 (esgotado).

215. DETERMINAÇÃO DE PREÇOS DE ATIVOS, ARBITRAGEM, MERCADO A TERMO E MERCADO FUTURO - Sérgio Ribeiro da Costa Werlang e Flávio Auler - Agosto de 1993 (esgotado).

216. SISTEMA MONETÁRIO VERSÃO REVISADA - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - Agosto de 1993 (esgotado).

217. CAIXAS DE CONVERSÃO - Fernando Antônio Hadba - Agosto de 1993.
218. A ECONOMIA BRASILEIRA NO PERÍODO MILITAR - Rubens Penha Cysne - Agosto de 1993 (esgotado).
219. IMPÔSTO INFLACIONÁRIO E TRANSFERÊNCIAS INFLACIONÁRIAS - Rubens Penha Cysne - Agosto de 1993 (esgotado).
220. PREVISÕES DE M1 COM DADOS MENSAIS - Rubens Penha Cysne e João Victor Issler - Setembro de 1993.
221. TOPOLOGIA E CÁLCULO NO Rn - Rubens Penha Cysne e Humberto Moreira - Setembro de 1993.
222. EMPRÉSTIMOS DE MÉDIO E LONGO PRAZOS E INFLAÇÃO: A QUESTÃO DA INDEXAÇÃO - Clovis de Faro - Outubro de 1993.
223. ESTUDOS SOBRE A INDETERMINAÇÃO DE SENIOR, vol. 1 - Nelson H. Barbosa, Fábio N.P. Freitas, Carlos F.L.R. Lopes, Marcos B. Monteiro, Antonio Maria da Silveira (Coordenador) e Matias Vernengo - Outubro de 1993. (esgotado)
224. A SUBSTITUIÇÃO DE MOEDA NO BRASIL: A MOEDA INDEXADA - Fernando de Holanda Barbosa e Pedro Luiz Valls Pereira - Novembro de 1993.
225. FINANCIAL INTEGRATION AND PUBLIC FINANCIAL INSTITUTIONS - Walter Novaes e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Novembro de 1993.
226. LAWS OF LARGE NUMBERS FOR NON-ADDITIVE PROBABILITIES - James Dow e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Dezembro de 1993.
227. A ECONOMIA BRASILEIRA NO PERÍODO MILITAR - VERSÃO REVISADA - Rubens Penha Cysne - Janeiro de 1994. (esgotado)
228. THE IMPACT OF PUBLIC CAPITAL AND PUBLIC INVESTMENT ON ECONOMIC GROWTH: AN EMPIRICAL INVESTIGATION - Pedro Cavalcanti Ferreira - Fevereiro de 1994.
229. FROM THE BRAZILIAN PAY AS YOU GO PENSION SYSTEM TO CAPITALIZATION: BAILING OUT THE GOVERNMENT - José Luiz de Carvalho e Clóvis de Faro - Fevereiro de 1994.
230. ESTUDOS SOBRE A INDETERMINAÇÃO DE SENIOR - vol. II - Brena Paula Magno Fernandez, Maria Tereza Garcia Duarte, Sergio Grumbach, Antonio Maria da Silveira (Coordenador) - Fevereiro de 1994. (esgotado)
231. ESTABILIZAÇÃO DE PREÇOS AGRÍCOLAS NO BRASIL: AVALIAÇÃO E PERSPECTIVAS - Clovis de Faro e José Luiz Carvalho - Março de 1994.
232. ESTIMATING SECTORAL CYCLES USING COINTEGRATION AND COMMON FEATURES - Robert F. Engle e João Victor Issler - Março de 1994
233. COMMON CYCLES IN MACROECONOMIC AGGREGATES - João Victor Issler e Farshid Vahid - Abril de 1994.
234. BANDAS DE CÂMBIO: TEORIA, EVIDÊNCIA EMPÍRICA E SUA POSSÍVEL APLICAÇÃO NO BRASIL - Aloisio Pessoa de Araújo e Cypriano Lopes Feijó Filho - Abril de 1994.

235. O HEDGE DA DÍVIDA EXTERNA BRASILEIRA - Aloisio Pessoa de Araújo, Túlio Luz Barbosa, Amélia de Fátima F. Semblano e Maria Haydée Morales - Abril de 1994.

236. TESTING THE EXTERNALITIES HYPOTHESIS OF ENDOGENOUS GROWTH USING COINTEGRATION - Pedro Cavalcanti Ferreira e João Victor Issler - Abril de 1994.

237. THE BRAZILIAN SOCIAL SECURITY PROGRAM: DIAGNOSIS AND PROPOSAL FOR REFORM - Renato Fragelli; Uriel de Magalhães; Helio Portocarrero e Luiz Guilherme Schymura - Maio de 1994.

238. REGIMES COMPLEMENTARES DE PREVIDÊNCIA - Hélio de Oliveira Portocarrero de Castro, Luiz Guilherme Schymura de Oliveira, Renato Fragelli Cardoso, Sérgio Ribeiro da Costa Werlang e Uriel de Magalhães - Maio de 1994.

239. PUBLIC EXPENDITURES, TAXATION AND WELFARE MEASUREMENT - Pedro Cavalcanti Ferreira - Maio de 1994.

240. A NOTE ON POLICY, THE COMPOSITION OF PUBLIC EXPENDITURES AND ECONOMIC GROWTH - Pedro Cavalcanti Ferreira - Maio de 1994.

241. INFLAÇÃO E O PLANO FHC - Rubens Penha Cysne - Maio de 1994.

242. INFLATIONARY BIAS AND STATE OWNED FINANCIAL INSTITUTIONS - Walter Novaes Filho e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Junho de 1994.

243. INTRODUÇÃO À INTEGRAÇÃO ESTOCÁSTICA - Paulo Klinger Monteiro - Junho de 1994.