

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO

LUCAS CAMPOS PIRES

**ALOCACÃO POR ORÇAMENTO DE RISCO: UMA
ABORDAGEM VIA FILTRO DE KALMAN**

SÃO PAULO

2021

LUCAS CAMPOS PIRES

**ALOCACÃO POR ORÇAMENTO DE RISCO: UMA
ABORDAGEM VIA FILTRO DE KALMAN**

Dissertação apresentada ao Programa de
Mestrado Profissional da Escola de Economia
de São Paulo da Fundação Getulio Vargas,
como requisito para a obtenção do título de
Mestre em Economia.

Área de concentração:
Engenharia Financeira.

Orientador:
Prof. Dr. Alessandro Martim Marques

SÃO PAULO

2021

Pires, Lucas Campos.

Alocação por orçamento de risco: uma abordagem via Filtro de Kalman / Lucas Campos Pires. - 2021.

56 f.

Orientador: Alessandro Martim Marques.

Dissertação (mestrado profissional MPFE) – Fundação Getulio Vargas, Escola de Economia de São Paulo.

1. Investimentos - Administração. 2. Avaliação de riscos. 3. Kalman, Filtragem de. 4. Alocação de Ativos. 5. Algoritmos Genéticos. I. Marques, Alessandro Martim. II. Dissertação (mestrado profissional MPFE) – Escola de Economia de São Paulo. III. Fundação Getulio Vargas. IV. Título.

CDU 336.767

Ficha Catalográfica elaborada por: Isabele Oliveira dos Santos Garcia CRB SP-010191/O

Biblioteca Karl A. Boedecker da Fundação Getulio Vargas - SP

LUCAS CAMPOS PIRES

ALOCÇÃO POR ORÇAMENTO DE RISCO: UMA ABORDAGEM VIA FILTRO DE KALMAN

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional da Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getulio Vargas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração:
Engenharia Financeira.

Data da Aprovação: / /

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alessandro Martim Marques
(Orientador)
EESP – FGV

Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa
Escola Politécnica – USP

**Prof. Dr. Gustavo Monteiro de
Athayde**
EESP – FGV

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, pelo incentivo, à Marina pelo companheirismo e aos colegas e professores do Mestrado em Engenharia Financeira pelo suporte mútuo. Agradeço também ao Fundo Garantidor de Créditos pelo apoio financeiro na realização do curso. Finalmente, agradeço à Fundação Getulio Vargas e ao Prof. Dr. Alessandro Martim Marques pela diligente orientação nesse trabalho.

RESUMO

Esse trabalho propõe uma metodologia para gestão de portfólio em que os ativos são alocados em termos de contribuição de risco – orçamento de risco. Ao contrário do *framework* tradicional, nenhuma estimativa de retorno dos ativos é necessária. Para estimar o orçamento de risco ótimo ao longo tempo, o filtro de Kalman foi utilizado. Devido a natureza numérica do problema de alocação por risco, é necessário utilização de otimizadores. Dado sua robustez frente a problemas não-lineares complexos foi utilizado o otimizador de Algoritmos Genéticos. Os resultados do trabalho indicam que a técnica proposta é capaz de superar a abordagem heurística de *Risk Parity*, em que o risco é igualmente distribuído entre todos os ativos do portfólio. Porém, os resultados dependem muito do conjunto de ativos pré-selecionados.

Palavras-chave: Orçamento de risco. Risk parity. Filtro de Kalman. Alocação por risco. Algoritmos genéticos.

ABSTRACT

The present dissertation proposes a methodology for portfolio management that allocates the assets in terms of their risk contribution – risk budgeting. Differently from the traditional framework, the technique does not rely on any estimates for the assets returns. The Kalman filter is used to obtain the optimal risk budget over time. The risk allocation problem does not have a closed form result; hence a numerical solution is necessary. Given its robustness in face of complex non-linear problems, we chose to use the Genetic Algorithm optimizer. The results of the study indicate that the proposed technique outperforms the Risk Parity heuristic approach in which the overall portfolio risk is equally distributed among the assets. However, the results are sensible to the set of assets previously selected.

Keywords: Risk budget. Risk parity Kalman filter. Risk-based allocation. Genetic algorithm.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Contribuição de risco: exemplo numérico.	20
Figura 2 – Filtro de Kalman: exemplo numérico.	23
Figura 3 – Exemplo de combinação binária entre dois indivíduos.	24
Figura 4 – Trajetória do orçamento de riscos – portfólio tipo 5	38
Figura 5 – Boxplot dos pesos dos ativos – portfólio tipo 5	39
Figura 6 – Retorno acumulado – portfólio tipo 5	40
Figura 7 – Retorno acumulado dos portfólios com <i>target</i> de volatilidade - tipo 5	42
Figura 8 – Alavancagem com <i>target</i> de volatilidade de 4% – portfólio tipo 5	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Exemplo numérico de alocação por risco.	20
Tabela 2	– Matriz de correlação dos ativos brasileiros	26
Tabela 3	– Estatísticas descritivas dos dados utilizados	28
Tabela 4	– Componentes dos portfólios	34
Tabela 5	– Valores médios de alocação para o portfólio tipo 1	34
Tabela 6	– Índice de Sharpe da simulação	35
Tabela 7	– Retorno acumulado ao ano da simulação	36
Tabela 8	– Volatilidade realizada da simulação	36
Tabela 9	– Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 5	37
Tabela 10	– Indicadores dos portfólios com <i>target</i> de volatilidade – portfólio tipo 5	41
Tabela 11	– Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 1	50
Tabela 12	– Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 2	50
Tabela 13	– Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 3	51
Tabela 14	– Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 4	51
Tabela 15	– Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 6	51
Tabela 16	– Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 7	52
Tabela 17	– Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 8	52
Tabela 18	– Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 9	52
Tabela 19	– Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 10	53
Tabela 20	– Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 11	53
Tabela 21	– Indicadores dos portfólios com <i>target</i> de volatilidade – portfólio tipo 1	54
Tabela 22	– Indicadores dos portfólios com <i>target</i> de volatilidade – portfólio tipo 2	54
Tabela 23	– Indicadores dos portfólios com <i>target</i> de volatilidade – portfólio tipo 3	54
Tabela 24	– Indicadores dos portfólios com <i>target</i> de volatilidade – portfólio tipo 4	54
Tabela 25	– Indicadores dos portfólios com <i>target</i> de volatilidade – portfólio tipo 6	55
Tabela 26	– Indicadores dos portfólios com <i>target</i> de volatilidade – portfólio tipo 7	55
Tabela 27	– Indicadores dos portfólios com <i>target</i> de volatilidade – portfólio tipo 8	55
Tabela 28	– Indicadores dos portfólios com <i>target</i> de volatilidade – portfólio tipo 9	55
Tabela 29	– Indicadores dos portfólios com <i>target</i> de volatilidade – portfólio tipo 10	56
Tabela 30	– Indicadores dos portfólios com <i>target</i> de volatilidade – portfólio tipo 10	56

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	12
2.1	Alocação por risco – risk parity e risk budget	12
2.2	Obtenção do orçamento de risco	14
2.3	Filtro de Kalman em finanças	14
2.4	Algoritmos Genéticos em finanças	15
3	FORMULAÇÃO PROPOSTA	17
3.1	Alocação por risco	17
3.1.1	Exemplo numérico	19
3.2	Filtro de Kalman	20
3.2.1	Exemplo numérico	22
3.3	Algoritmos Genéticos	23
4	METODOLOGIA	26
4.1	Dados	26
4.2	Simulação	28
4.2.1	Otimização <i>in-sample</i>	29
4.2.2	Obtenção do orçamento de risco	29
4.2.3	Alocação do portfólio	30
4.2.4	Aferição dos resultados	31
4.3	Incorporação da taxa livre de risco	31
5	RESULTADOS	33
5.1	Simulação com taxa livre de risco	40
6	CONCLUSÃO	44
	REFERÊNCIAS	46
	APÊNDICES	49
	APÊNDICE A DEMAIS RESULTADOS	50
A.1	Sem ativo livre de risco	50
A.2	Com ativo livre de risco	53

1 INTRODUÇÃO

Desde o trabalho seminal de Markowitz (1952), a construção otimizada de portfólios é foco de grande atenção na literatura. Os trabalhos iniciais formalizaram o problema de alocação em um arcabouço de otimização de média-variância, partindo de uma função utilidade, em que o investidor racional busca maximizar o retorno esperado para um determinado nível de risco. Essa solução tem uma série de limitações que já são bastante conhecidas e limitam sua adoção na prática. As dificuldades são oriundas da extrema sensibilidade do *framework* aos parâmetros – principalmente do retorno esperado – o que produz portfólios excessivamente concentrados e instáveis frente a pequenas variações nas estimativas. Em outras palavras, pequenas variações no retorno esperado geram portfólios completamente diferentes.

Ao longo do tempo, diversos autores sugeriram métodos para lidar com essas desvantagens, destacando-se o trabalho de Black e Litterman (1991), em que as estimativas para retorno esperado são obtidas, *grosso modo*, a partir da capitalização de mercado dos ativos. Esse método também permite que visões particulares do gestor em relação aos ativos sejam incorporadas nas estimativas. Outras alternativas, baseadas em abordagens heurísticas, não dependem dos retornos esperados – sendo assim, presumidas mais robustas. Dois exemplos dessa abordagem são os portfólios de mínima variância e de pesos iguais. No primeiro caso, basta estimar a estrutura de volatilidade e correlação, significativamente mais simples de computar do que o retorno esperado. Já a segunda não necessita de nenhum tipo de estimativa.

Na linha da abordagem de mínima variância, que não depende de estimativas para o retorno esperado, a partir dos anos 1990 surgiram outras metodologias empíricas na própria indústria de alocação de ativos (QIAN, 2005). Embora ainda sem um arcabouço técnico unificador, essas estratégias começaram a ser denominadas *Risk Parity*. Nas primeiras versões, bastante simples, o peso de um ativo no portfólio era inversamente proporcional à sua volatilidade em relação à volatilidade dos demais ativos. Progressivamente, a estrutura de correlação foi sendo incorporada à estratégia, mas apenas com o trabalho de Maillard, Roncalli e Teiletche (2010), o arcabouço teórico foi firmemente estabelecido. Com isso criou-se um *framework* que permite ao gestor quantificar quanto de risco cada ativo individualmente acrescenta ao portfólio.

Inicialmente essa metodologia foi utilizada para criar portfólios em que a contribuição de risco de todos os ativos é igual – *Equal Risk Contribution* – *ERC*. Esses portfólios têm propriedades *out-of-sample* bastante interessantes, com uma diversificação bem efetiva. No entanto, essa abordagem é criticada por ser praticamente passiva, uma vez que a única

atuação do gestor se daria na escolha do conjunto de ativos. Adicionalmente, nada garante que equalizar o risco entre os ativos produza portfólios que tenham o melhor desempenho por alguma métrica escolhida.

Nesse sentido, algumas alternativas surgiram para auxiliar a alocação de risco entre os ativos que não necessariamente as iguale. No entanto, pouco se explorou em obter-se o que seria o orçamento otimizado de risco. Assim, esse trabalho busca inserir nesse *framework* o filtro de Kalman para a obtenção do orçamento ótimo de risco e do portfólio subjacente para uma alocação estratégica, comparando com outras abordagens comuns da literatura. Evidentemente o orçamento de risco que maximiza alguma métrica de desempenho do portfólio é distinto a cada período de tempo. O objetivo do filtro de Kalman, portanto, é estabilizar esse orçamento, mas permitindo alguma variação ao longo do tempo que leve em consideração mudanças estruturais nos prêmios de risco.

Como não há fórmula fechada para obtenção dos pesos financeiros dos ativos, dado um orçamento de risco desejado, essa alocação precisa ser realizada via otimização numérica. Esse trabalho utilizará como otimizador o método de algoritmos genéticos, dado sua robustez frente a otimizações complexas com mínimos locais.

As simulações serão realizadas na perspectiva de um investidor local, sobretudo na definição da taxa livre de risco e da moeda em que os retornos são denominados. Porém, como mostrado na literatura, a alocação por risco é potencializada na presença de ativos heterogêneos – em termos de nível de volatilidade e correlação. Assim, ativos *offshore* também serão incorporados nos portfólios.

Além da introdução, essa dissertação apresenta cinco capítulos. No segundo capítulo desenvolve-se a revisão bibliográfica. A fundamentação teórica dos principais conceitos e ferramentas utilizadas no trabalho é feita no capítulo 3. O capítulo 4 apresenta os dados utilizados e a metodologia para obtenção dos portfólios. No capítulo 5 são apresentados os resultados das simulações. Finalmente, o capítulo 6 exhibe as conclusões, bem como sugestões de possíveis trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica dessa dissertação foi organizada em três temas. O primeiro tema é endereçado nas duas primeiras seções, núcleo do trabalho, em que apresentamos as principais referências do *framework* de alocação por risco, bem como métodos para obtenção do orçamento de risco. Depois, avaliamos trabalhos prévios em que o filtro de Kalman é aplicado em finanças. Finalmente, exploramos brevemente aplicações em áreas correlatas para algoritmos genéticos.

2.1 Alocação por risco – risk parity e risk budget

Maillard, Roncalli e Teiletche (2010) traz a formulação básica de distribuir o risco do portfólio – quantificado em termos de volatilidade – entre os diversos ativos que o compõem. Os autores utilizam essa abordagem para igualar a contribuição de risco entre os ativos, compondo o portfólio ERC – *Equal Risk Contribution*. O trabalho também traz propriedades teóricas e empíricas do portfólio ERC, comparando com outras duas abordagens heurísticas: o portfólio de mínima variância e o portfólio de pesos iguais. O bom desempenho desse tipo de técnica de alocação depende de uma boa seleção prévia das classes de ativos, em termos de heterogeneidade tanto de volatilidade quanto de correlação. Isso porque nenhum objetivo de desempenho é definido na montagem do portfólio.

As metodologias de *Risk Parity* são criticadas por serem estratégias que se confundem com técnicas passivas de investimento. Muito em virtude de não incorporarem retornos esperados ou métricas de desempenho. Para endereçar algumas dessas restrições, Roncalli (2014) expande o *framework* ao considerar medidas de risco que são diretamente afetadas pelo retorno esperado, tais como *Value at Risk* – *VaR* – e *Expected Shortfall*. No entanto, é necessário que a medida de risco adotada seja coerente e convexa (ARTZNER et al., 1999). Aqui vale um comentário adicional sobre o *VaR* como medida de risco. Regra geral o *VaR* não é uma medida de risco coerente, dado que não respeita a propriedade de subaditividade. Porém, para distribuições conjuntas normalmente distribuídas e probabilidade de excedência inferior a cinquenta por cento, a subaditividade é verificada, o que permite, nesse caso, a utilização do *VaR* na alocação de risco.

Em contraponto as críticas de abordagem passiva, Lindberg (2009) mostra que quando os *drifts* são positivos, a solução ótima do portfólio contínuo de Markowitz é dada pela equalização de quantidades relacionadas à sua contribuição de risco. Além disso, Qian (2006) mostra que a contribuição de risco não é apenas uma abstração matemática, mas possui significado econômico, sendo portanto um bom preditor da contribuição das perdas

no portfólio, contribuindo assim para a performance geral. Nesse trabalho, o *framework* é estendido para incorporar retornos não normais, através da expansão de Cornish-Fisher, para medidas de VaR.

Meucci, Santangelo e Deguest (2015) propõem uma decomposição de risco alternativa à construção por meio da contribuição marginal. Os autores alegam que essas contribuições são espúrias, ao incorporar simultaneamente o efeito de diversos fatores latentes. Assim, propõem uma alternativa baseada no número efetivo de apostas ao analisar a contribuição de risco originada em fatores não correlacionados. Roncalli e Weisang (2015) também seguem a linha fatorial ao expor a relação entre fatores de risco e a contribuição dos ativos. No entanto, diferente da abordagem tradicional, esse problema é matematicamente mais complexo, dado que podem existir múltiplas soluções para o problema e a existência do portfólio de orçamento de risco sequer é garantida na presença de restrições de fronteira.

A abordagem *Risk Parity* pode ser considerada um caso específico da abordagem de orçamento de risco – *Risk Budgeting (RB)* – em que esse é distribuído igualmente. Mas em muitos casos o alocador pode não querer gerenciar a exposição de risco de maneira uniforme. Bruder e Roncalli (2012) mostra as propriedades do portfólio construído utilizando orçamento de risco e apresenta as dificuldades técnicas para obter-se uma solução única, nos casos em que o orçamento de risco é zerado. No entanto, o trabalho mostra como, a partir de um orçamento de risco, pode-se chegar aos pesos dos ativos no portfólio. Porém, não explora a definição do orçamento de risco em si. Haugh, Iyengar e Song (2017) ampliam ainda mais o *framework* ao propor uma abordagem generalizada de orçamento de risco – *generalized risk budgeting (GRB)*. A otimização de portfólio GRB insere um perfil ótimo de risco-retorno ao dividir os ativos em partições cujos membros possuem o mesmo retorno esperado.

Kapsos, Christofides e Rustem (2018) introduzem o conceito de orçamento de risco robusto, que modifica o *framework* tradicional ao incorporar incerteza nas estimativas de entrada – matriz de covariância. O trabalho mostra que o problema continua tratável, mesmo com adição de erros no estimador. A introdução de incerteza melhora o desempenho do método, em termos de retorno ajustado ao risco.

Watari (2017) aplica a alocação de risco ao mercado brasileiro, ao propor a construção de portfólios de ações via alocação de risco sobre os cinco fatores de estilo da abordagem de Fama e French. O trabalho explora tanto a construção dos portfólios de estilo, quanto a estratégia de alocação por risco.

2.2 Obtenção do orçamento de risco

Boa parte da literatura apresentada até aqui explora majoritariamente métodos para obtenção de portfólios a partir de um orçamento de risco dado. Lembrando que a alocação de ERC também tem um orçamento de risco implícito, que iguala as contribuições. No entanto, poucos trabalhos exploram métodos sistematizados para a obtenção do orçamento em si, sendo sua definição uma discricionariedade do gestor.

Lee e Lam (2001) incorporam no *framework* de orçamento de risco o conceito de risco de informação, derivado da avaliação do *tracking error* do portfólio, isto é, a incerteza do retorno excedente – também denominado alfa do portfólio.

Kouwenberg (2017) traz uma aplicação de *risk budget* na gestão dos ativos de empresas de seguro europeias, com o objetivo de otimizar sua gestão de capital. O trabalho traz uma formulação analítica em que a alocação ótima busca maximizar o retorno esperado do seu capital próprio, sujeito a limitação dos requisitos prudenciais de requerimento de capital de solvência.

2.3 Filtro de Kalman em finanças

Este método, desenvolvido por Rudolf Kalman (KALMAN, 1960), busca utilizar medições de grandezas contaminadas com ruído para estimar os valores reais de variáveis latentes, que não são diretamente observadas. Inicialmente, foi utilizado em aplicações de engenharia, por exemplo no cálculo de trajetórias no Projeto Apollo (GREWAL; ANDREWS, 2010). Em finanças, as aplicações são geralmente relacionadas a transformações de modelos com coeficientes invariantes no tempo em modelos de coeficientes dinâmicos (WELLS, 2013).

Talvez a aplicação mais clássica do filtro de Kalman em finanças é a estimativa dinâmica do impacto do risco sistemático no retorno de ações individuais – beta de mercado, no modelo CAPM. Gastaldi e Nardecchia (2003) aplica o método para índices industriais do mercado de ações italiano entre 1991-2001. A correta estimativa desse parâmetro é fundamental para *hedge* de portfólio ou criação de exposições sintéticas.

Na área de finanças quantitativas, Rigatos (2017) utiliza o filtro de Kalman na resolução do problema de estimação de estados nos modelos de equações diferenciais parciais, tal qual a equação de Black-Scholes. Essa abordagem é aplicada na detecção de erros de apreamento de opções no mercado de energia elétrica. Devido à peculiaridade desse mercado, a formulação tradicional é modificada para incorporar o efeito de *jumps* e mudanças no processo de difusão com a adição de um termo integral. Esse modelo integro-diferencial é transformado em um modelo de espaço de estados linear, de forma canônica, que possa ser estimado por filtro de Kalman.

Chu et al. (2019) trazem uma aplicação de seleção *online* de portfólio de ações, combinando estratégias divergentes – *momentum* e reversão a média – mas que tendem a coexistir no mercado. A conhecida não estacionariedade dos preços traz algumas dificuldades na modelagem tradicional, assim os autores utilizam uma versão modificada do filtro de Kalman, com a introdução de *wavelets*. Wavelets são funções que transformam o domínio de uma série de dados, do tempo para frequência (OLIVEIRA, 2007).

Uma limitação bastante conhecida, e já mencionada, no *framework* de média variância é sua alta sensibilidade aos parâmetros de entrada, que produz portfólios completamente distintos a partir de pequenas variações. Na gestão prática de ativos, essa característica aumenta muito a necessidade de balanceamento do portfólio. O excesso de *turnover* impacta o desempenho através do custo de transação. DiLellio (2015) utiliza uma abordagem que combina o *framework* de otimização de média variância com a literatura de fatores (FAMA; FRENCH, 1993), utilizando para isso o filtro de Kalman. Essa abordagem híbrida supera em termos de risco-retorno a metodologia tradicional pura, principalmente por reduzir o *turnover* do portfólio.

2.4 Algoritmos Genéticos em finanças

O método de algoritmos genéticos é inspirado no modelo evolucionário de seleção natural de Darwin. Uma série de problemas computacionais envolvem a busca de soluções através de inúmeros possíveis conjuntos de candidatos. Essas possibilidades são avaliadas simultaneamente e uma estratégia inteligente de seleção define a nova população a ser testada (DRAKE; MARKS, 2002). John Holland, na década de 1960 desenvolveu o primeiro algoritmo inspirado na seleção natural para a resolução de problemas complexos.

Pereira (2000) traz um review de diversas aplicações de algoritmos genéticos em finanças, como predição de retornos (LEINWEBER; ARNOTT, 1995), otimização de portfólio (LORASCHI; TETTAMANZI, 1996) e descobrimento e otimização de regras de *trading* (NEELY; WELLER; DITTMAR, 1997). São destacadas as vantagens do método frente a outras classes de otimizadores em lidar com problemas que possuem as seguintes propriedades:

- amplo espaço de busca por soluções,
- presença de múltiplos ótimos locais,
- função objetivo não diferenciável,
- função objetivo com descontinuidades,
- dados não lineares,

- dados com ruídos,
- dados não estacionários.

Metawa, K. e Elhoseny (2017) apresenta o desenvolvimento de um modelo inteligente, multi-objetivo, de concessão de crédito bancário baseado em algoritmos genéticos, em ambientes de restrição crédito – *credit crunch*. Durante a construção do portfólio de crédito o modelo busca maximizar o lucro do banco e minimizar sua probabilidade de falência, através de uma regra dinâmica de *hedge*.

Usualmente, a otimização de portfólio utiliza a volatilidade como medida de risco da carteira. No entanto, existem uma série de outras alternativas. Chang, Yang e Chang (2009) utiliza algoritmos genéticos na otimização de portfólio com outras medidas de risco: semi-variância, desvio médio absoluto e variância com assimetria – *skewness*.

3 FORMULAÇÃO PROPOSTA

Nesse capítulo apresentaremos a formulação e notação matemática do *framework* utilizado ao longo dessa dissertação. Assim como na revisão bibliográfica, o capítulo está estruturado nos três núcleos que sustentam o trabalho: alocação por risco, filtro de Kalman e algoritmos genéticos. Na seção de alocação por risco apresentaremos as ferramentas para transitar entre alocação financeira e alocação por risco. Isto é, como obter o peso financeiro dos ativos no portfólio, dado um orçamento de risco e vice versa. Para fins de didáticos, nesse momento, não nos preocuparemos em como se obtém o orçamento de risco desejado, considerando ele como dado. Podendo vir, por exemplo, da discricionariedade do gestor do portfólio. Ao longo do trabalho iremos apresentar a técnica para obter o orçamento de risco em si.

3.1 Alocação por risco

Existem diversas métricas para quantificar o risco de um portfólio – volatilidade, *Value at Risk*, *Expected Shortfal*. Inicialmente vamos partir de uma função genérica

$$R = f(\mathbf{x}, \mu, \Sigma, \dots) , \quad (3.1)$$

que pode ter como argumentos, entre outras entradas, o vetor de pesos de cada ativo \mathbf{x} , o vetor de retornos esperados μ e a matriz de covariância dos retornos Σ .

Ao derivar parcialmente o risco total do portfólio em relação ao peso do ativo i , obtemos

$$c_i = \frac{\partial R(\mathbf{x}, \mu, \Sigma, \dots)}{\partial x_i} , \quad (3.2)$$

em que c_i é a contribuição marginal do ativo i . Em outras palavras, quantas unidades de risco na medida R são adicionadas ao portfólio a cada incremento marginal no peso do ativo i . Assim, para obter a contribuição total de risco C_i correspondente ao ativo i , basta multiplicar a contribuição marginal pelo peso do ativo no portfólio.

$$C_i = x_i c_i . \quad (3.3)$$

Para medidas de risco coerentes, tal como a volatilidade, o risco total do portfólio é dado pelo somatório das contribuições individuais (ARTZNER et al., 1999), ou seja,

$$R = \sum_{i=1}^N C_i . \quad (3.4)$$

É importante frisar que a contribuição de risco de um ativo no portfólio não é dada simplesmente pelo seu risco individual, mas pela composição entre seu próprio risco e as interações com os demais ativos do portfólio.

Assim, o orçamento de risco é dado por

$$\mathbf{B} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T = \frac{\mathbf{C}}{R}, \quad (3.5)$$

em que \mathbf{B} é um vetor das b_i contribuições de risco dadas em termos percentuais.

Nesse trabalho, focaremos na volatilidade como medida de risco. Embora a metodologia possa ser facilmente expandida para outras medidas de risco coerentes e deriváveis, como por exemplo o *Expected Shortfall*. Assim:

$$R(x, \Sigma) = \sigma(x, \Sigma) = \sqrt{x^T \Sigma x}. \quad (3.6)$$

Derivando a volatilidade, obtemos a contribuição marginal e total para cada ativo i do portfólio, respectivamente:

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{\partial R(x, \Sigma)}{\partial x_i} = \frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x^T \Sigma x}}, \\ C_i &= x_i \frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x^T \Sigma x}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

É possível verificar que a volatilidade respeita a propriedade definida na equação (3.4), que estabelece que o risco consolidado do portfólio é a somatório das contribuições totais individuais:

$$R = \sum_{i=1}^N x_i \frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x^T \Sigma x}} = \frac{x^T \Sigma x}{\sqrt{x^T \Sigma x}} = \sqrt{x^T \Sigma x} = \sigma(x, \Sigma). \quad (3.8)$$

Finalmente, podemos sintetizar o problema de alocação por risco, como a solução do seguinte problema matemático:

$$x^* = \left\{ x \in [\text{lb}, \text{ub}]^N : \sum_{i=1}^N x_i = 1, \quad b_i^* = x_i \frac{(\Sigma x)_i}{(x^T \Sigma x)} \right\} \quad (3.9)$$

em que b_i^* é o orçamento de risco desejado, x^* é o portfólio otimizado e lb e ub são os limites inferiores e superiores de alocação para cada ativo. Nesse trabalho, bem como na maior parte da literatura revisada, não será permitida venda a descoberto, assim $\text{lb} = \mathbf{0}$ e $\text{ub} = \mathbf{1}$. Ao relaxar a restrição de venda a descoberto, o problema de obter uma carteira a partir de um orçamento de risco passa a não ter solução única. Assim, seria necessário a otimização com múltiplos objetivos, o que acabaria implicando na reinserção de outros tipos de entrada no modelo, justamente o que a metodologia tenta evitar. Além disso, nesse trabalho, o objetivo de desempenho já é calculado previamente, na obtenção do orçamento otimizado de risco.

Na formulação lógica apresentada, parte-se de um determinado portfólio e se obtém a respectiva distribuição de risco. Nesse sentido, a formulação possui solução fechada. Para o caminho inverso isso não se verifica. Isto é, não há solução analítica fechada para calcular os pesos dos ativos a partir de uma distribuição de risco desejada. Portanto, a solução para o problema estabelecido em (3.9) só é obtida via otimização numérica do tipo:

$$\mathbf{x}^* = \arg \min \sum_{i=1}^N (b_i^* - b_i)^2 \quad (3.10)$$

$$s.a. \quad \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \quad e \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1} \quad .$$

3.1.1 Exemplo numérico

A alocação por risco nem sempre é totalmente intuitiva, uma vez que envolve não linearidades e interações entre os ativos. Para ilustrar o *framework*, vamos apresentar um exemplo numérico com três ativos – A, B e C – com volatilidades $\sigma_A = 0,2$, $\sigma_B = 0,3$ e $\sigma_C = 0,15$. A matriz de correlação é:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,6 & 0,3 \\ 0,6 & 1,0 & -0,5 \\ 0,3 & -0,5 & 1,0 \end{pmatrix}$$

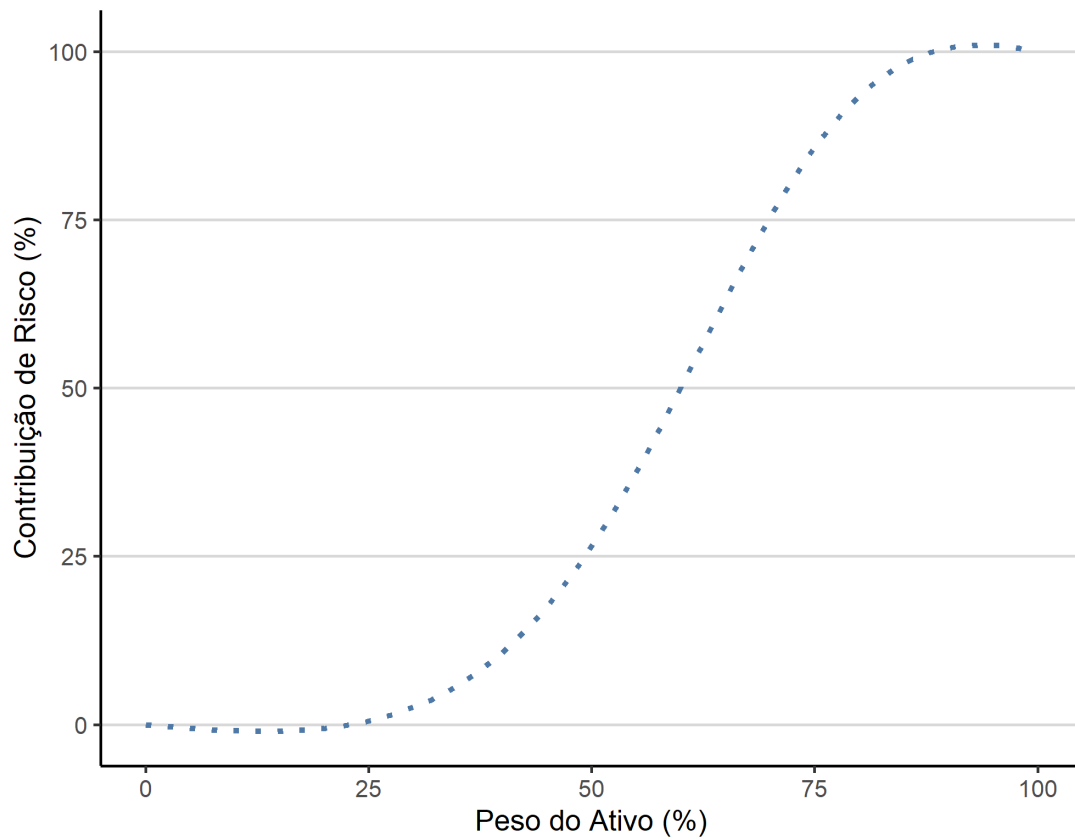
Para esse conjunto de ativos, apresentamos na Tabela 1 a comparação entre as alocações de pesos iguais (*equal weight*), de igual contribuição de risco (ERC) e uma alocação arbitrária de orçamento de risco (RB). Na tabela, x é o peso financeiro do ativo, C a contribuição em unidades de risco (volatilidade) e B a contribuição percentual. O total da coluna C é a volatilidade do portfólio. Note que a alocação de pesos iguais, apesar de ser aparentemente diversificada, concentra mais de 95% do risco total do portfólio nos ativos A e B. No portfólio ERC, como o risco é igualmente distribuído, o ativo C passa a receber mais peso, dado que tanto sua menor volatilidade, quanto sua baixa correlação com os outros ativos reduzem a sua contribuição de risco.

Considere agora um portfólio com os mesmos ativos e alocação inicial de: $x_A = 0,5$, $x_B = 0,5$ e $x_C = 0$. Note na Figura 1 o que acontece ao aumentarmos progressivamente a alocação no ativo C, retirando o peso proporcionalmente nos ativos A e B. Como o ativo C tem correlação baixa, ou mesmo negativa, com os demais, ao entrar no portfólio ele inicialmente reduz o risco geral, assim sua contribuição proporcional é negativa. Apenas quando seu peso atinge cerca de 25% do peso geral do portfólio é que sua contribuição de risco passa a ser positiva. Verificamos assim que a contribuição de risco possui não linearidades que dependem do ponto de operação geral do portfólio, isto é, de como os demais pesos estão distribuídos.

Tabela 1 – Exemplo numérico de alocação por risco.

Ativo	Equal Weight			ERC			Risk Budget		
	x	C	B	x	C	B	x	C	B
A	33,3%	6,4%	43,0%	20,4%	3,9%	33,3%	26,0%	5,0%	40,0%
B	33,3%	7,8%	52,4%	25,3%	3,9%	33,3%	27,2%	5,0%	40,0%
C	33,3%	0,7%	4,6%	54,3%	3,9%	33,3%	46,8%	2,5%	20,0%
Total	100,0%	14,8%	100,0%	100,0%	11,7%	100,0%	100,0%	12,6%	100,0%

Figura 1 – Contribuição de risco: exemplo numérico.



3.2 Filtro de Kalman

A formulação utilizada para o filtro de Kalman apresentada nessa seção foi adaptada da metodologia de Welch e Bishop (2001).

O orçamento de risco ótimo b^* , para cada ativo i , a cada mês t , é modelado como uma variável aleatória, conforme processo definido abaixo. Essa formulação também é conhecida como modelo de nível local na literatura de filtro de Kalman, em que a variável observada é composta por uma média e um ruído. Sendo assim, o objetivo do filtro é eliminar o ruído do sinal. Os subscritos i foram omitidos por simplicidade, mas cada ativo

possui um processo independente e idêntico.

$$\begin{aligned} b_t^* &= \mu_t + v_t , \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + w_t . \end{aligned} \quad (3.11)$$

em que a média μ_t segue um passeio aleatório, v_t e w_t são variáveis gaussianas independentes e aleatórias com média zero e desvio padrão constante R e Q respectivamente. No contexto de filtro de Kalman, a primeira equação é denominada equação de observação, já que b_t^* é o que de fato observamos mensalmente. A segunda é denominada equação de estados, uma vez que a variável de interesse, μ_t , é latente, isto é, não observada.

Na seção de metodologia explicaremos em detalhes a técnica para *observar* b_t^* – Seção 4.2.1. A predição para b_{t+1}^* é que será utilizada como saída do filtro de Kalman na alocação do portfólio, na resolução do problema post na equação 3.10. Como v_{t+1} tem média zero, na prática, é a estimativa para μ_{t+1} que será utilizada.

A cada iteração o algoritmo do filtro de Kalman define duas estimativas de erro:

$$\begin{aligned} e_t^- &= \mu_t - \hat{\mu}_t^- , \\ e_t &= \mu_t - \hat{\mu}_t . \end{aligned} \quad (3.12)$$

nas quais e_t^- representa o erro *a priori*, isto é com a informação disponível anterior ao período t , e_t é o erro *a posteriori*, incorporando a medição de b_t^* e, finalmente, $\hat{\mu}$ é a estimativa para a média ótima do orçamento. Dado que temos duas estimativas para o erro, também temos, analogamente, duas estimativas para as suas covariâncias,

$$\begin{aligned} P_t^- &= E[e_t^- e_t^{-T}] , \\ P_t &= E[e_t e_t^T] . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Na nossa metodologia os orçamentos de risco são variáveis independentes, isto é, os modelos são uni-variados, portanto as covariâncias são apenas variâncias.

Na derivação das equações do filtro de Kalman, o objetivo é computar uma estimativa *a posteriori* do estado latente $\hat{\mu}_t$ que seja uma combinação linear da estimativa *a priori* $\hat{\mu}_t^-$ e a diferença ponderada entre a medida observada b_t^* e a estimativa *a priori*, conforme:

$$\hat{\mu}_t = \hat{\mu}_t^- + K_t(b_t^* - \hat{\mu}_t^-) , \quad (3.14)$$

na qual K_t é o chamado ganho de Kalman. Pode ser demonstrado que o K_t que minimiza a variância *a posteriori* do erro é dado por:

$$K_t = \frac{P_t^-}{P_t^- + R} . \quad (3.15)$$

O filtro de Kalman atualiza suas estimativas para os estados como um processo realimentado. Esse processo pode ser dividido em duas etapas: atualização no tempo e

atualização na medida. A primeira etapa é responsável por projetar para o tempo futuro o estado atual e a estimativa da variância do erro para o obter a estimativa *a priori* – esta é também chamada etapa de predição. Formalmente temos:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_t^- &= \hat{\mu}_{t-1}^- , \\ P_t^- &= P_{t-1} + Q .\end{aligned}\tag{3.16}$$

Já a etapa de atualização de medida é responsável pela realimentação, incorporando a nova informação disponível para obter uma estimativa *a posteriori* melhorada – sendo também chamada de etapa de correção. Formalizando:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_t &= \hat{\mu}_t^- + K_t(b_t^* - \hat{\mu}_t^-) , \\ P_t &= (1 - K_t)P_t^- .\end{aligned}\tag{3.17}$$

Pela formulação apresentada nas equações (3.16) e (3.17), podemos verificar que o filtro de Kalman é do tipo *one-sided*, isto é, utiliza apenas dados do passado e, diferente de filtros *two-sided*¹, pode portanto ser usado para análises em tempo real. No entanto, isso só é estritamente verdadeiro se os valores das variâncias Q e R são conhecidos e constantes. Na prática isso raramente se observa. Assim, é necessário um otimizador externo adjacente ao processo iterativo de atualização do filtro para estimar essas variáveis. No pacote utilizado para a linguagem R ² as variâncias são estimadas através de máxima verossimilhança.

O processo de otimização da variância utiliza dados de todo o processo. Para isso, é essencial dispormos de um volume mínimo de dados para a estimativa inicial. Além disso, a estimativa pode variar de acordo com a quantidade de dados disponíveis. Dessa maneira, embora a formulação do filtro seja do tipo *one-sided* a estimação das variâncias não o é. Portanto, é recomendável que a toda a formulação, incluindo a estimativa da variância, seja iterativa, garantindo que apenas a informação disponível no tempo t seja utilizada.

3.2.1 Exemplo numérico

Considere a variável aleatória X_t , cuja distribuição possui média variante no tempo dada pela seguinte regra:

$$X_t \sim \begin{cases} \mathcal{N}(0, 1) & \text{if } t \leq 100 , \\ \mathcal{N}(5, 1) & \text{if } t > 100 . \end{cases}\tag{3.18}$$

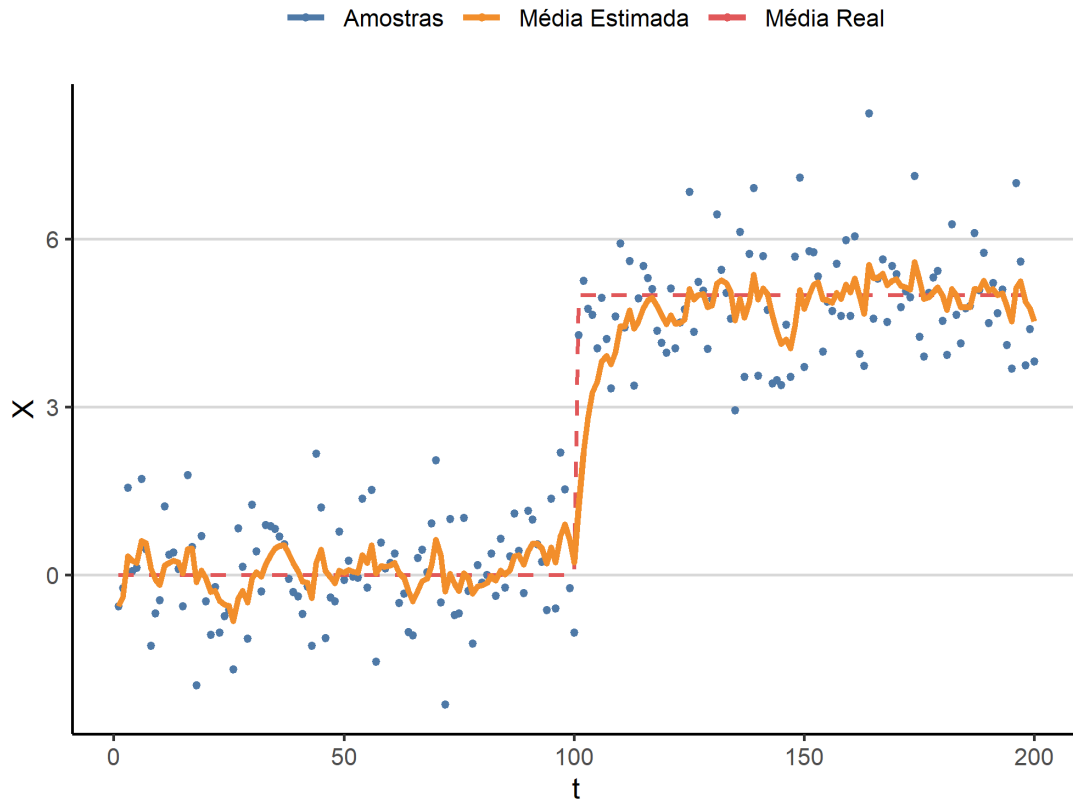
Vamos gerar uma trajetória aleatória para X_t e estimar seus parâmetros utilizando o filtro de Kalman. A Figura 2 exibe os resultados da simulação, com os pontos aleatórios gerados, bem como a média real da variável e a média estimada por Kalman. Note que o

¹ Um exemplo bastante conhecido de filtro do tipo *two-sided* é o filtro de Hodrick-Prescott (HP).

² KFAS – <https://cran.r-project.org/web/packages/KFAS/index.html>

filtro responde rápido à quebra estrutural em $t = 100$ e oscila constantemente em torno da média real. A estimativa obtida para o desvio padrão foi de 1,009. Note também que a primeira estimativa do filtro de Kalman para a média é igual ao primeiro ponto simulado. É necessário existir uma amostra mínima para observarmos a convergência para a média real.

Figura 2 – Filtro de Kalman: exemplo numérico.



3.3 Algoritmos Genéticos

De acordo com Pereira (2000), usualmente os otimizadores baseados em algoritmos genéticos são organizados em torno de três características:

- representação binária,
- função objetivo e
- operações genéticas.

Inicialmente os membros da população, isto é, os candidatos a solução devem ser representados sob a forma de vetores digitais, ou seja, binários. Essa representação vale mesmo quando a solução do problema pertence ao universo dos números reais ou inteiros.

Para problemas multivariados, os indivíduos são representados por conjuntos de vetores binários, isto é, matrizes binárias.

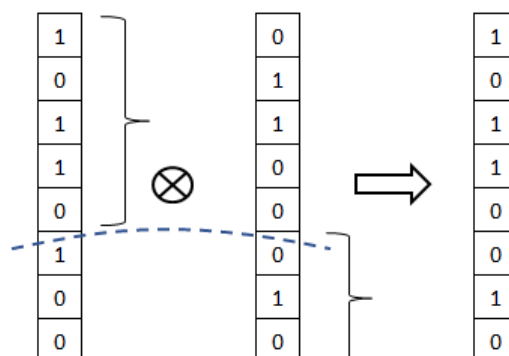
O segundo componente do processo é a função objetivo, que além de conter obrigatoriamente o propósito principal da otimização pode incorporar restrições, através de penalizações na variável de desempenho. Nesse trabalho, utilizamos algoritmos genéticos em duas etapas da metodologia, com objetivos distintos. Assim, a função objetivo será apresentada nas seções correspondentes.

As duas características apresentadas acima são comuns ou tem algum paralelo em qualquer algoritmo de otimização. O que diferencia o otimizador de algoritmos genéticos são as operações genéticas. É através dessas operações genéticas/biológicas que uma população inicial de candidatos a solução gerada aleatoriamente evolui ao longo das gerações até uma população final com solução ótima ou próxima à ótima. O processo de atualização dos candidatos pode ser separado em operações de seleção, recombinação e mutação.

A etapa de seleção determina quais candidatos a solução podem participar das etapas de recombinação e mutação. Usualmente os métodos de seleção são do tipos probabilísticos em que os indivíduos com melhor performance na função objetivo possuem maior probabilidade de serem selecionados. Alguns métodos processam a seleção comparando os candidatos dois a dois, sorteados aleatoriamente. Além disso, na presença de elitismo, os indivíduos com melhor desempenho na população são transferidos sem alteração de uma geração para a próxima.

Na recombinação, os candidatos selecionados na etapa anterior devido ao seu desempenho superior são combinados binariamente entre si, dando origem a novos indivíduos – vide exemplo da Figura 3. O cruzamento entre os candidatos mais promissores procura garantir que a busca pela solução ideal não seja totalmente aleatória, mas concentrada nas regiões mais promissoras do espaço de soluções. Alguns aspectos desse subprocesso, no entanto, continuam aleatórios, tais como a probabilidade de ocorrer o cruzamento e qual região do vetor binário será intercambiada.

Figura 3 – Exemplo de combinação binária entre dois indivíduos.



Finalmente, a etapa de mutação introduz aleatoriamente material genético inédito na população. Diferente da recombinação que direciona a população para as regiões com os indivíduos de melhor performance, a mutação amplia aleatoriamente o espaço de busca. Essa característica é fundamental para que o algoritmo não fique preso em ótimos locais.

Apesar de existirem inúmeras metodologias, o algoritmo básico dos otimizadores genéticos pode ser resumido pelas etapas abaixo:

1. Determinar o espaço apropriado das representações binárias.
2. Gerar aleatoriamente a primeira população.
3. Calcular a performance de cada indivíduo.
4. Selecionar parte da população.
5. Aplicar a recombinação entre os indivíduos da população restrita.
6. Aplicar a mutação na população restrita.
7. Verificar se algum critério de parada está satisfeito, senão retornar à etapa 3.

O otimizador de algoritmos genéticos será utilizado, principalmente, na resolução do problema posto na equação 3.10. A alocação por risco apresenta não-linearidades, mínimos e máximos locais e é fortemente endógena, dificultando a convergência em otimizadores tradicionais. Como essas propriedades, representa o típico problema em que a utilização do otimizador de algoritmos genéticos é recomendada.

4 METODOLOGIA

Nesse capítulo vamos apresentar a metodologia utilizada para avaliar o desempenho dos portfólios sintetizados a partir das técnicas expostas anteriormente. Primeiro, apresentaremos os dados utilizados. Depois, todas as etapas que compõem o processo de síntese e simulação dos portfólios.

4.1 Dados

Para avaliar a metodologia, simulamos o desempenho de um portfólio multi classes de ativo do ponto de vista de um investidor brasileiro. Assim, todos os retornos serão denominados em moeda nacional, bem como dos índices – *benchmarks* – de comparação, ou seja incluem a variação cambial respectiva. Apesar da perspectiva do investidor nacional, não ficamos limitados aos ativos locais, justamente para aumentar a heterogeneidade do conjunto de ativos. Já que, como vimos no capítulo 2, a alocação por risco não tem grande potencialidade nos casos em que os ativos tem características bastante parecidas em termos de correlação e volatilidade. É fato bastante conhecido que os ativos de mercados emergentes são bastante correlacionados, limitando o ganho de diversificação quando o conjunto de ativos é restrito aos instrumentos locais. Para ilustrar esse fato, a Tabela 2 apresenta a matriz de correlação de Pearson entre os ativos brasileiros, calculada a partir dos retornos diários. Note que para os instrumentos arriscados, IBrX, IMA-B e IRF-M, as correlações estão todas acima de 40%. Isso considerando toda a amostra. Sabemos que em momentos de crise as correlações dos ativos aumentam, o que reduz bastante os benefícios de diversificação.

Para compor os portfólios foram utilizados os retornos diários e mensais de setembro de 2003 a outubro de 2020 dos seguintes índices representativos de classes de ativos – todos ponderados por capitalização de mercado:

- **IMA-B:** Índice ANBIMA de preços de mercado que representa a evolução de uma carteira de títulos públicos federais brasileiros indexados ao IPCA. Composição

Tabela 2 – Matriz de correlação dos ativos brasileiros

	DI	IBX	IMAB	IRFM
DI	1	-	-	-
IBrX	0,076	1	-	-
IMA-B	0,138	0,512	1	-
IRF-M	0,317	0,404	0,784	1

atualizada mensalmente.

- **IRF-M:** Índice ANBIMA de preços de mercado que representa a evolução de uma carteira de títulos públicos federais brasileiros com taxas prefixadas, com ou sem cupom. Composição atualizada mensalmente.
- **IBrX:** Índice da bolsa de valores de São Paulo que representa a evolução de uma carteira composta pelas suas cem ações mais negociadas – em número de negócios e volume financeiro – nos últimos doze meses. Composição atualizada quadrimensalmente.
- **SP500:** Índice do mercado de ações americano que representa a evolução de uma carteira composta pelas 500 maiores companhias listadas nas bolsas de valores dos Estados Unidos. Composição atualizada trimestralmente. Inclui variação cambial do dólar americano em relação ao real brasileiro.
- **DAX:** Índice da bolsa de valores de Frankfurt, representando a evolução das trinta maiores empresas alemãs. Composição atualizada trimestralmente. Inclui variação cambial do euro em relação ao real brasileiro.
- **LEGA:** *Bloomberg Barclays Global-Aggregate Total Return Index Value Unhedged USD*. Índice do mercado de dívida *investment grade* global – vinte e quatro moedas locais. São considerados títulos prefixados públicos, corporativos e securitizados, de países desenvolvidos e emergentes. O índice original é denominado em dólares americanos, mas os retornos incorporam a variação cambial das outras jurisdições. Composição atualizada mensalmente. Inclui variação cambial do dólar americano em relação ao real brasileiro.
- **LGTR:** *Bloomberg Barclays Global Agg Treasuries Total Return Index Value Unhedged USD*. Índice do mercado de dívida soberana *investment grade* americana. Composição atualizada mensalmente. Inclui variação cambial do dólar americano em relação ao real brasileiro.
- **BCOM:** *Bloomberg Commodity Index*. Índice diversificado de preços físicos de *commodities*, obtidos a partir dos contratos futuros. O peso de cada componente não excede 15% e é calculado a partir de dados de liquidez e produção. Composição atualizada anualmente. Nesse caso, não foi incluída a variação cambial.
- **XAU:** Preço do ouro *spot* em relação ao dólar, líquido de variação cambial.

Além dos índices listados acima, elegíveis aos portfólios, foi utilizada a taxa DI – depósitos interbancários – como taxa livre de risco.

Tabela 3 – Estatísticas descritivas dos dados utilizados

Índice	Média	Mediana	Volatilidade	Mínimo	Máximo	Skewness
IMA-B	14,01	15,45	6,87	-6,97	7,14	-0,37
IRF-M	12,31	13,65	3,07	-1,85	4,74	0,00
IBrX	15,58	13,66	22,53	-30,09	18,34	-0,71
SP500	12,33	9,80	16,39	-14,45	18,76	0,14
DAX	13,48	17,72	20,00	-17,27	14,33	-0,47
LEGA	8,92	5,31	14,87	-9,10	15,49	0,61
LGTR	8,79	4,43	15,49	-8,89	15,63	0,66
BCOM	-1,70	2,01	16,24	-21,34	12,99	-0,59
XAU	10,76	6,29	17,11	-16,89	13,01	-0,04
Taxa DI	10,52	10,31	1,08	0,16	1,65	0,07

A Tabela 3 apresenta as estatísticas descritivas dos retornos dos dados utilizados. As estatísticas foram calculadas a partir dos retornos mensais. Para facilitar a interpretação, as estatísticas de média, mediana e volatilidade foram anualizadas. Todos os dados apresentados estão em percentuais e são de setembro de 2003 a outubro de 2020. O ativo com maior volatilidade no período analisado é o índice de ações brasileiro, com cerca de 23% ao ano. Como estamos tratando com retornos mensais, nem todos os ativos apresentam assimetria negativa, que usualmente caracteriza retornos financeiros de frequência diária. Destaca-se também o forte retorno da taxa livre de risco brasileira, que superou os ativos de renda fixa *offshore*, mesmo com a incorporação da valorização do dólar em relação ao real, que foi de cerca de 4,1% ao ano no período.

4.2 Simulação

Para avaliarmos o desempenho do método proposto em relação ao seu *benchmark* natural, o portfólio ERC (*Equal Risk Contribution*), optamos por realizar uma simulação histórica com os ativos apresentados anteriormente. A simulação é realizada em quatro etapas, que são repetidas a cada iteração:

1. otimização *in-sample*,
2. estimativa do orçamento de risco,
3. alocação do portfólio e
4. aferição dos resultados.

A matriz de covariância foi estimada a partir dos retornos mensais dos ativos, utilizando a metodologia EWMA – *exponential weighted moving average*. Essa metodologia

utiliza o produto vetorial dos retornos dos ativos centrados em zero. A matriz de covariância é estimada mensalmente, através de:

$$\Sigma_t = \lambda \Sigma_{t-1} + (1 - \lambda) \mathbf{r}_t \mathbf{r}_t^T, \quad (4.1)$$

em que Σ é a matriz de covariância, \mathbf{r} é o vetor de retorno dos ativos no mês t e λ o parâmetro de suavização. Nesse trabalho utilizamos $\lambda = 0,94$. Os retornos dos doze primeiros meses são utilizados para estabilizar a estimativa da matriz. Assim, o restante da simulação inicia após esse período.

4.2.1 Otimização *in-sample*

Na primeira etapa da simulação, obtemos a alocação ótima que maximiza o índice de Sharpe realizado em um dado mês. Diferente das demais etapas, aqui utilizamos os dados diários dos ativos. O portfólio ótimo é obtido através da seguinte otimização:

$$\mathbf{w}^* = \arg \max S_p,$$

$$S_p = \frac{\mu(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_f)}{\sigma(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_f)}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{Y}_t \mathbf{w}_t^T,$$

$$\text{s.a.} \quad \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{w} \leq \mathbf{1},$$

em que \mathbf{w} é o vetor com o peso percentual dos ativos no portfólio, S_p o índice de Sharpe, μ o operador média, σ o operador desvio padrão, \mathbf{r}_p o vetor de retornos do portfólio, \mathbf{r}_f o vetor de retornos da taxa livre de risco e \mathbf{Y}_t a matriz de retornos diários dos ativos.

Após a otimização, o portfólio ótimo \mathbf{x}^* é transformado no orçamento instantâneo percentual de risco \mathbf{B}_t , a partir da estimativa da matriz de covariância Σ_{t-1} e da formulação apresentada na Seção 3.1 – equações (3.5) e (3.7). A matriz de covariância utiliza os dados disponíveis até o mês anterior ao da otimização. O orçamento de risco é então armazenado para as etapas posteriores na matriz \mathbf{B} , em que as linhas representam os meses e as colunas os ativos. Importante ressaltar que a matriz de covariância não é utilizada ao longo da otimização. Durante a otimização, apenas os dados daquele mês são considerados.

4.2.2 Obtenção do orçamento de risco

O orçamento de risco ótimo que será utilizado na montagem do portfólio é obtido a partir da matriz \mathbf{B} , que contém os resultados da otimização *in-sample* mês a mês. Aplicamos o filtro de Kalman em cada coluna da matriz, que representa o orçamento ótimo

para cada ativo ao longo dos meses. O filtro é aplicado de maneira independente em cada ativo. Assim, o orçamento de risco ótimo que será utilizado na montagem do portfólio é dado pela estimativa *a priori* do filtro para o próximo mês, \mathbf{b}_{t+1}^* .

Importante ressaltar que a soma de cada uma das linhas da matriz \mathbf{B} , por construção, vale um. No entanto, como o filtro é aplicado de maneira independente em cada um dos ativos, não necessariamente a soma das estimativas para o próximo período totalizará o mesmo valor um. Assim, é necessário que as estimativas sejam normalizadas antes da alocação, simplesmente dividindo a estimativa de cada ativo pela soma de todas as estimativas.

4.2.3 Alocação do portfólio

Com as estimativas do orçamento de risco ótimo para $t + 1$ obtidas pelo filtro de Kalman, mais a matriz de covariância Σ_t , partimos para a obtenção efetiva dos pesos financeiros do portfólio. Como já amplamente discutido, não existe solução de forma fechada para obtenção desses pesos. Portanto, vamos mais uma vez lançar mão de uma otimização numérica com a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t^* &= \arg \min || \mathbf{b}_{t+1}^* - \mathbf{b}_t || , \\ \mathbf{b}_t &= [b_{t,1} \dots b_{t,N}]^T , \\ b_{t,i} &= x_{t,i} \frac{(\Sigma_t \mathbf{x}_t^*)_i}{\mathbf{x}_t^{*T} \Sigma \mathbf{x}_t^*} , \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\text{s.a.} \quad \mathbf{1}^T \mathbf{x}_t^* = 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \mathbf{x}_t^* \leq 1 .$$

A otimização acima busca minimizar o erro quadrático agregado entre o orçamento de risco objetivo, \mathbf{b}_{t+1}^* , e o obtido pela decomposição de risco do portfólio dado pelo peso dos ativos \mathbf{x}_t^* , sujeitos a restrição de venda a descoberto e, consequentemente, alavancagem. O portfólio resultante é do tipo *full invested*, isto é todo o capital é alocado.

A mesma formulação é utilizada para obter os portfólios do tipo ERC, que servirão como benchmark natural da metodologia. Nesse caso, $\mathbf{b}_{t+1}^* = [1/N \dots 1/N]^T$, em que N é o número de ativos elegíveis ao portfólio. Ou seja, o orçamento de risco *target* é distribuído igualitariamente. Adicionalmente, produzimos um terceiro tipo de portfólio, o portfólio de pesos financeiros iguais que, evidentemente, não necessita de otimização.

4.2.4 Aferição dos resultados

Finalmente, obtemos o retorno do portfólio ótimo no mês subsequente – *out-of-sample* – através da multiplicação do vetor de pesos calculados pelo vetor de retorno dos ativos em $t + 1$, conforme equação abaixo.

$$r_{p,t+1} = \mathbf{r}_{t+1}^T \mathbf{x}_t^* . \quad (4.4)$$

O processo é repetido por todo o horizonte de simulação, incluindo a aferição para os métodos alternativos que serão utilizados como base de comparação – pesos iguais e equalização de risco. O conjunto dos retornos obtidos é avaliado em termos de risco e retorno pelas métricas usuais de aferição de desempenho de portfólios. Esses resultados serão discutidos em detalhes no próximo capítulo.

4.3 Incorporação da taxa livre de risco

Até o momento, a taxa livre de risco foi utilizada apenas no cálculo do índice de Sharpe durante a otimização *in-sample*, não sendo como ativo elegível para alocação. Isso por um motivo bastante simples. Toda a metodologia reside na alocação de risco entre os ativos. Como a taxa, por definição, não possui risco, sua alocação fica inviável. No entanto, essa característica acaba não sendo exclusividade da alocação por risco. No *framework* de Markowitz, a taxa livre de risco somente é adicionada após a obtenção do portfólio ótimo, sendo este composto apenas pelos ativos arriscados. Assim, o investidor, de acordo com o seu grau de aversão ao risco, tem a possibilidade de alocar seus recursos entre a taxa livre e o portfólio arriscado ótimo. Essa composição dá origem à *Capital Market Line* – CML (SHARPE, 1964).

Usando a CML como inspiração, a taxa livre de risco pode ser incorporada no nosso *framework* para, por exemplo, nivelar a volatilidade desejada para o portfólio final. Este portfólio final é dado pela combinação linear entre a taxa livre de risco e o portfólio obtido pelo orçamento de risco ótimo,

$$w_t = \alpha r_f + (1 - \alpha) \mathbf{x}_t^* , \quad (4.5)$$

em que α é a parcela dos recursos alocada no ativo livre de risco – r_f .

É trivial demonstrar que, para um dado nível de volatilidade desejado σ^* , α é obtido através de

$$\alpha = \frac{\sigma_t - \sigma^*}{\sigma_t} , \quad (4.6)$$

$$\sigma_t = \mathbf{x}_t^{*T} \Sigma_t \mathbf{x}_t^* ,$$

em que σ_t é a volatilidade estimada do portfólio alocado no final do mês t , que será carregado até o final do mês $t + 1$. Importante ressaltar que essa abordagem permite inclusive alavancagem, se $\alpha < 0$, característica que pode ser desejável caso o gestor do portfólio tenha interesse em tomar mais risco, uma vez que a volatilidade do portfólio ótimo é endógena à solução do problema.

5 RESULTADOS

Nesse capítulo vamos apresentar os resultados de diversas simulações, seguindo a metodologia apresentada no capítulo 4. Inicialmente serão apresentados os resultados dos *backtests* sem considerar a taxa livre de risco como ativo elegível. Posteriormente, vamos adicionar a taxa livre de risco a uma das simulações para ilustrar como a metodologia é capaz de adicionar um *target* de volatilidade, ao permitir sub e sobre alavancagem em relação à alocação original.

Validar metodologias em finanças aplicadas é sempre desafiador, dado a natureza fortemente estocástica dos processos, em que a razão sinal ruído é baixíssima. Kahn (1990) ressalta que ao realizar um teste em que determinada estratégia superou seu *benchmark* não prova que tal método realmente adicionou valor. O resultado obtido pode ter sido simplesmente efeito de sorte. Sabendo das limitações da abordagem de *backtests*, Arnott, Harvey e Markowitz (2019) traz algumas recomendações, na forma de um protocolo de testes, para aumentar a robustez das conclusões. Embora esse protocolo tenha sido pensado para lidar com os desafios e potencialidades que a utilização de *machine learning* adicionam, algumas das recomendações podem ser observadas.

Nesse sentido, em vez de realizar apenas uma única simulação com apenas um conjunto de ativos, optamos por realizar múltiplos testes, variando o repertório de instrumentos elegíveis. Além de aumentar a confiabilidade nos resultados obtidos, essa abordagem também nos permite avaliar uma característica que pode ser considerada uma limitação do método de alocação ERC, em que o desempenho do portfólio obtido depende muito da pré-seleção dos ativos (MAILLARD; RONCALLI; TEILETCHE, 2010).

Todos os resultados apresentados desconsideram custos de transação. Como o objetivo da simulação é comparar o método de alocação de portfólio por orçamento de risco em relação a seus pares e não em termos absolutos, acreditamos que essa limitação não prejudica as conclusões obtidas. Vale ressaltar que mesmo o portfólio do tipo *Equal Weight* apresenta custos de transação, uma vez que os pesos variam em função da diferença dos retornos relativos entre os ativos. Assim, mensalmente o portfólio deveria ser rebalanceado para retornar aos pesos originais.

A Tabela 4 exibe a composição dos onze portfólios testados. Do primeiro ao oitavo portfólio, a quantidade de ativos é incrementada progressivamente. Os últimos três portfólios trazem variações dos portfólios iniciais. Note que o portfólio um é composto por apenas dois ativos, um índice de renda fixa e um índice de renda variável. Pela sua simplicidade, vamos inicialmente nos concentrar nesse portfólio para avaliar as propriedades da alocação sugerida pelos métodos testados.

Tabela 4 – Componentes dos portfólios

Ativos	Portfólios										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
IMA-B		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
IRF-M	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
IBrX	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
SP500					X	X	X	X	X	X	X
DAX						X	X	X			X
LEGA								X			
LGTR							X	X			
BCOM				X	X	X	X	X			
XAU			X	X	X	X	X	X		X	X

Tabela 5 – Valores médios de alocação para o portfólio tipo 1

Portfólio	IRF-M		IBrX	
	Peso	Risco	Peso	Risco
EW	50,00	6,70	50,00	93,30
ERC	86,21	50,00	13,79	50,00
RB	91,85	70,23	8,15	29,77

A Tabela 5 apresenta os valores percentuais médios de alocação para os portfólios do tipo 1, tanto em termos de peso financeiro quanto de risco. No período, a volatilidade média foi de 3,03% a.a. para o IRF-M e 20,1% a.a. para o IBrX. O portfólio *Equal Weight*, por definição, aloca metade dos recursos em cada ativo. No entanto, como a volatilidade da renda varável é maior, essa concentra cerca de 93% do risco médio do portfólio. Para equalizar o risco, que é o objetivo do portfólio ERC, o índice de renda fixa (IRF-M) recebe, em média, aproximadamente 86% dos recursos. Finalmente, a metodologia proposta nesse trabalho, com o objetivo de maximizar o índice de Sharpe, aloca mais do que a metade do risco no ativo de renda fixa – aproximadamente 70% em média –, o que eleva o peso médio desse ativo no portfólio para cerca de 92%.

Os resultados de índice de Sharpe, retorno acumulado e volatilidade da simulação para todos os portfólios avaliados são apresentados nas Tabelas 6, 7 e 8, respectivamente. Todas as estatísticas foram calculadas a partir dos retornos mensais e posteriormente anualizadas. A metodologia proposta – RB – superou as abordagens alternativas em termos de retorno ajustado ao risco, medido pelo índice de Sharpe, para todos os portfólios. Na mesma linha, a abordagem ERC dominou a EW no período avaliado. A dominância da abordagem proposta fica mais evidente ao analisar tanto o retorno acumulado, quanto a volatilidade observada. Com exceção do portfólio tipo 9, em que o maior valor de retorno acumulado foi obtido pela abordagem *Equal Weight*, a metodologia RB superou as duas

Tabela 6 – Índice de Sharpe da simulação

Portfólio	Sharpe		
	EW	ERC	RB
1	0,06	0,38	0,49
2	0,18	0,43	0,47
3	0,06	0,32	0,35
4	-0,26	-0,04	0,09
5	0,04	0,54	0,80
6	0,19	0,50	0,65
7	0,30	0,55	0,59
8	0,39	0,50	0,63
9	0,64	1,02	1,11
10	0,45	0,90	1,01
11	0,64	0,93	1,02

alternativas. Já para a volatilidade observada, apenas em dois casos – portfólios do tipo 7 e do tipo 8 – a abordagem RB produziu resultados piores (maiores) do que a abordagem ERC. Em relação a volatilidade, destaca-se também a dispersão de valores apresentada na abordagem EW. Nesse sentido, tanto o método proposto quanto a abordagem ERC apresentaram resultados mais controlados e consistentes.

A Tabela 6 deixa evidente a importância de uma boa pré-seleção de ativos para a melhor performance da abordagem de *Equal Risk Contribution*. Note, por exemplo, os portfólios do tipo 2 e 3. O portfólio tipo 3 contempla o portfólio tipo 2 e adiciona à este apenas o ativo Ouro – XAU. Ao adicionar esse ativo o índice de Sharpe decaiu de 0,43 para 0,32. Infelizmente, a metodologia proposta nesse trabalho foi incapaz de superar essa limitação, apresentando comportamento semelhante. Embora a alocação proposta tenha dominado seus pares, o índice de Sharpe obtido variou bastante, conforme o conjunto de ativos disponíveis, com mínimo de 0,09 para o portfólio tipo 4 e máximo de 1,11 para o portfólio tipo 9.

Em média, a alocação de portfólio via orçamento de risco aumentou o índice de Sharpe em 19,4% em relação à metodologia ERC, sempre que essa apresentou índice positivo. O maior ganho percentual por essa métrica se deu no portfólio tipo 5, com aumento de 47,5%. Assim, vamos selecionar esse portfólio para analisarmos os resultados de maneira mais completa e detalhada. Os resultados detalhados para os demais portfólios podem ser encontrados no Apêndice A.

A Tabela 9 apresenta uma série de indicadores, além dos já apresentados, dos três métodos testados para o portfólio do tipo 5. Como já explicitado, a metodologia proposta superou seus pares tanto em termos de retorno médio, quanto em volatilidade. Além disso, destaca-se o *drawdown* bem mais controlado, com valor máximo de 3,5%, frente

Tabela 7 – Retorno acumulado ao ano da simulação

Portfólio	CAGR		
	EW	ERC	RB
1	9,24	11,11	11,29
2	10,54	11,58	11,59
3	9,41	11,03	11,08
4	6,30	8,84	9,62
5	9,31	11,83	12,90
6	10,55	11,67	12,46
7	11,19	11,69	11,95
8	11,71	11,34	12,07
9	14,07	13,85	14,00
10	12,47	13,51	13,79
11	14,83	13,69	13,82

Tabela 8 – Volatilidade realizada da simulação

Portfólio	Volatilidade		
	EW	ERC	RB
1	11,16	4,88	4,01
2	9,19	5,41	4,84
3	8,91	5,73	5,25
4	9,01	5,77	5,42
5	7,26	4,42	4,16
6	7,42	4,56	4,54
7	6,34	4,02	4,25
8	5,99	3,83	4,14
9	7,19	4,16	3,91
10	6,88	4,34	4,09
11	8,23	4,38	4,10

a significativos 10,7% do método *Equal Weight*. Outro ponto de destaque é a assimetria – *skewnewss* – obtida. É um fato bastante conhecido que a distribuição de retornos dos ativos financeiros usualmente possui assimetria negativa, isso é, são mais comuns retornos negativos de grande magnitude. Tanto a metodologia EW, quanto a ERC produziram retornos com assimetria negativa – -0,52 e -0,16, respectivamente. Já para o método proposto, a assimetria foi de 0,01, marginalmente positiva. No período, a taxa livre de risco acumulou 160,7% de rentabilidade, equivalente a 9,25% ano ano.

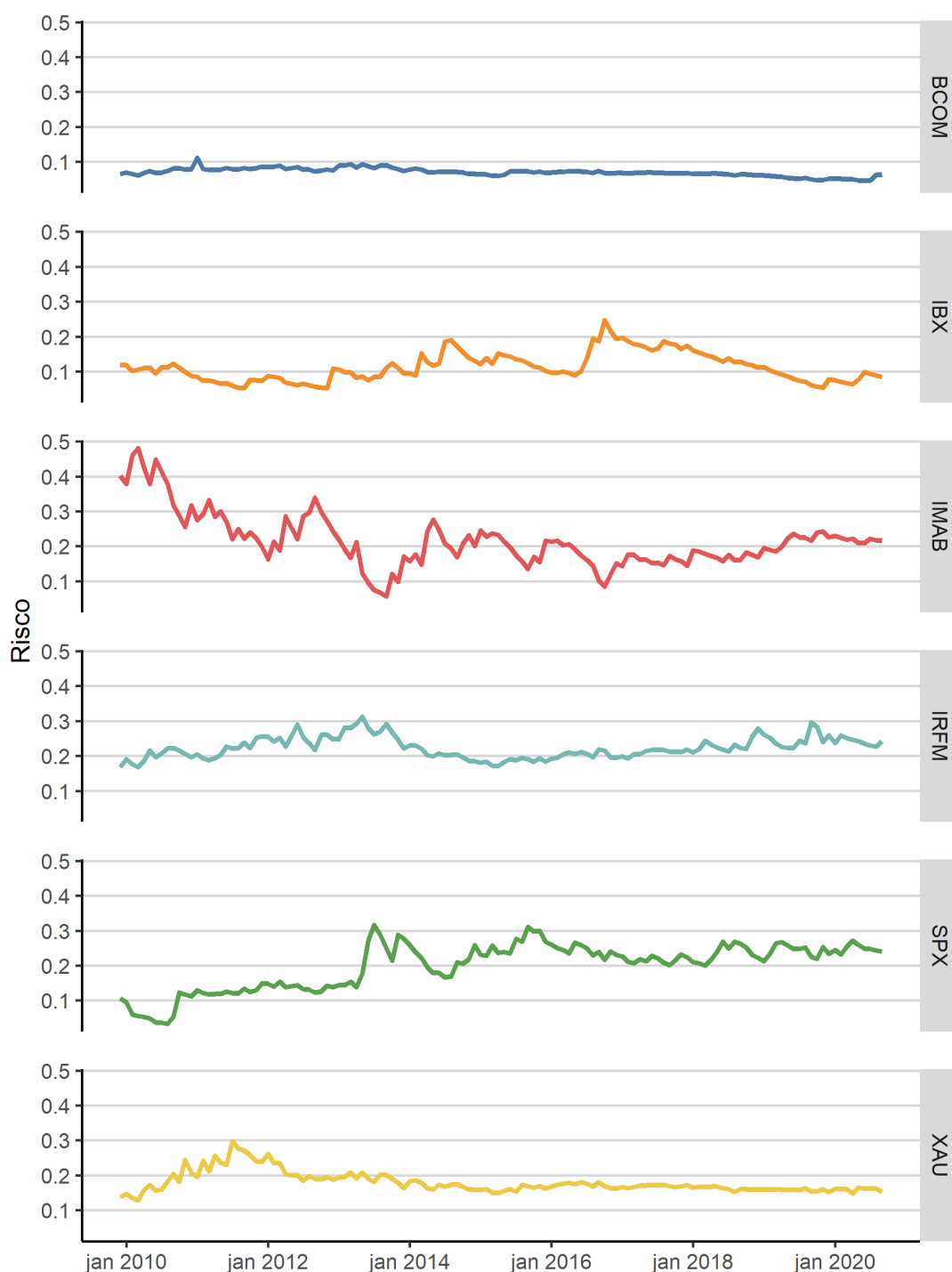
A Figura 4 apresenta a trajetória do orçamento de risco para todos os ativos, ao longo do período da simulação. Em outras palavras, mostra a saída obtida pelo filtro de Kalman. Como desejado, o comportamento traz a dinâmica desejada, porém com uma certa estabilidade. O portfólio é composto por seis ativos, portanto a alocação neutra

Tabela 9 – Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 5

Indicador	EW	ERC	RB
Média Mensal Anualizada (%)	9,19	11,33	12,28
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	7,26	4,42	4,16
Índice de Sharpe Anualizado	0,04	0,54	0,80
Retorno / Risco Anualizado	1,27	2,56	2,95
Máximo <i>Drawdown</i> (%)	10,70	4,85	3,50
VaR 95% - <i>ex-post</i> (%)	-2,48	-1,20	-0,93
<i>Expected Shortfall</i> 95% - <i>ex-post</i> (%)	-3,98	-1,74	-1,42
Retorno Acumulado (%)	162,18	235,61	272,15
CAGR (%)	9,31	11,83	12,90
<i>Skewness</i>	-0,52	-0,16	0,01
<i>Kurtosis</i>	1,57	0,58	0,33

implica em cerca de 16,7% de risco para cada ativo. Vemos que desde o início da simulação a metodologia já desvia da alocação igualitária de risco, aumentando o peso em IMA-B, IRF-M e SPX e reduzindo a alocação em *commodities* (BCOM), IBrX e Ouro (XAU). No entanto, a alocação em SPX, por exemplo, inicia abaixo do ponto de neutralidade, sendo incrementada progressivamente. Destaca-se também a alocação em renda fixa indexada a inflação (IMA-B) que chega a concentrar quase 50% do risco do portfólio no começo do período, mas vai sendo reduzida, embora em média permaneça acima do ponto de neutralidade.

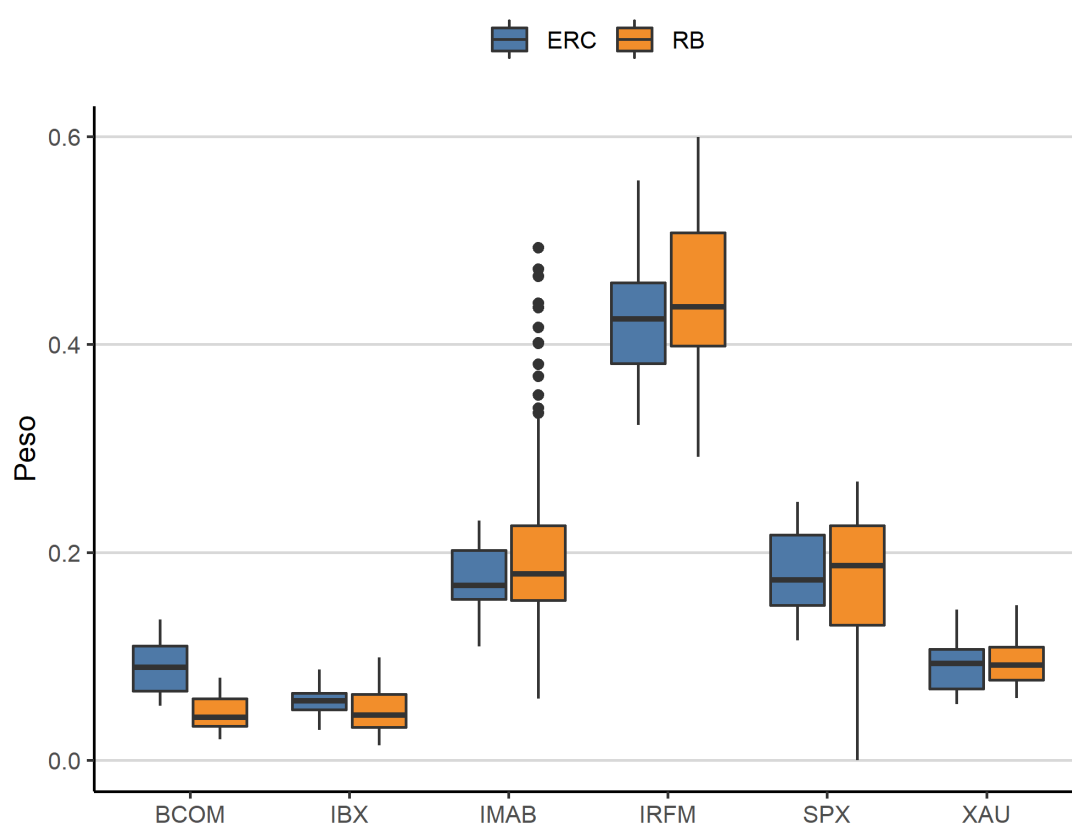
Figura 4 – Trajetória do orçamento de riscos – portfólio tipo 5



A Figura 5 exibe o boxplot comparativo entre as alocação ERC e RB, mas agora em termos de peso financeiro. Como esperado, os ativos que em média receberam maior alocação de risco também recebem maior peso financeiro. No entanto, como já exploramos intensivamente ao longo desse trabalho, a relação não é linear. Isso fica evidente ao analisar os ativos IMA-B e IRF-M. Vimos na Figura 4 que eles possuem alocações médias de risco parecidas, porém, como o ativo IMA-B é mais arriscado, isso se traduz em uma menor alocação financeira. Outra propriedade interessante para o portfólio ERC é que alocações

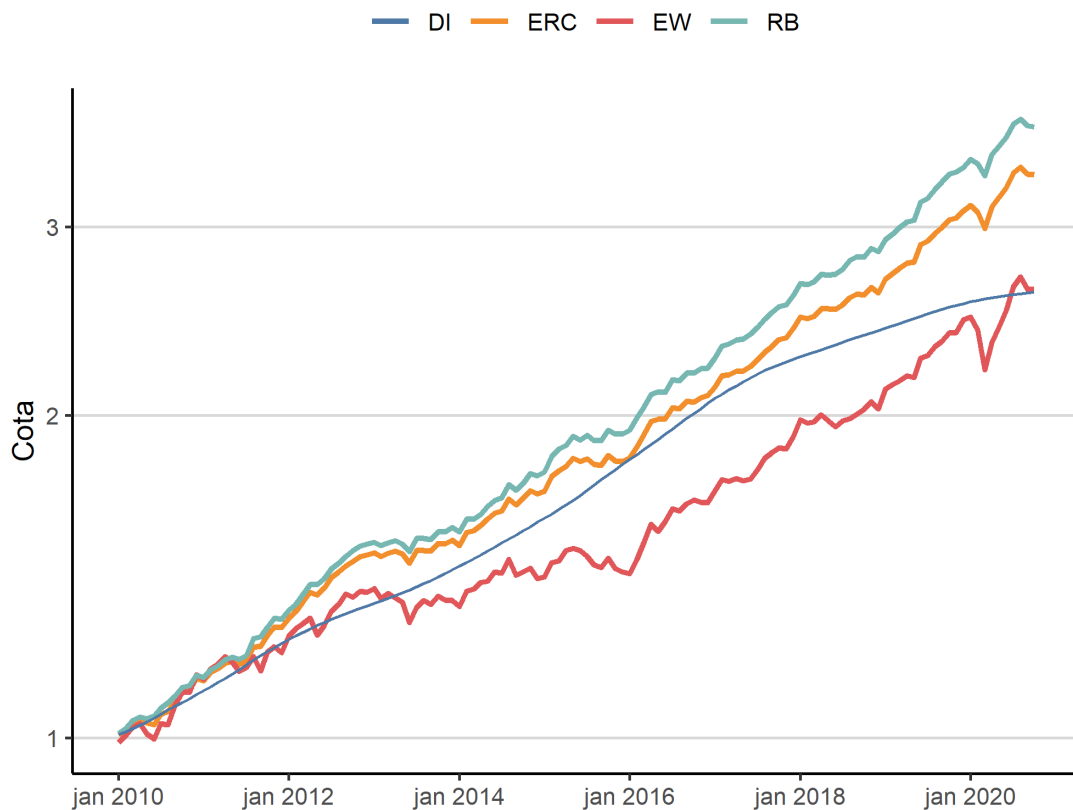
de risco igualitárias e constantes não implicam em pesos financeiros fixos, uma vez que a matriz de covariância é dinâmica, assim, a alocação financeira compensa as variações relativas de volatilidade e correlação. Comparativamente ao portfólio ERC, o portfólio RB alocou mais recursos em média em IRF-M, IMA-B e SPX, reduzindo alocação em BCOM e IBrX. A alocação em XAU ficou praticamente inalterada. Além disso, a dispersão de alocação do portfólio RB é evidentemente maior; isto porque, além de incorporar as variações provenientes da matriz de covariância, o próprio orçamento de risco varia ao longo do tempo.

Figura 5 – Boxplot dos pesos dos ativos – portfólio tipo 5



Finalmente, a síntese de todos os resultados discutidos é exibida na Figura 6, que apresenta o retorno acumulado das três estratégias avaliadas. Fica evidente que a estratégia proposta, a alocação de risco via filtro de Kalman, domina os pares avaliados, acumulando um *spread* de 109,97% e 35,54% em relação as estratégias *Equal Weight* e *Equal Risk Contribution*, respectivamente. Destaca-se sobretudo o *drawdown* bastante moderado entre março e abril de 2020, período de bastante *stress* nos mercados em função da pandemia global do coronavírus.

Figura 6 – Retorno acumulado – portfólio tipo 5



5.1 Simulação com taxa livre de risco

Vamos agora apresentar os resultados da simulação na presença do ativo livre de risco como instrumento elegível para alocação, conforme metodologia explicada na Seção 4.3. Em linhas gerais, a extensão da metodologia proposta permite que, ao variarmos a exposição financeira líquida do portfólio, o nível de volatilidade *ex-ante* da carteira seja regulado para atingir um *target* predefinido. Novamente vamos utilizar o portfólio tipo 5 para apresentar os resultados obtidos. Resultados similares são obtidos com as demais composições de portfólio. Foram simulados quatro objetivos de volatilidade: 2%, 4%, 6% e 8% ao ano.

A Tabela 10 traz os resultados da adição da taxa livre de risco no portfólio tipo 5. Via de regra, a metodologia foi capaz de regular o nível geral da volatilidade realizada do portfólio. Ou seja, a volatilidade *ex-post* aumenta progressivamente conforme o objetivo definido *ex-ante* é majorado. No entanto, em todos os quatro casos testados, a volatilidade realizada ficou nominalmente acima do objetivo definido – em média, 16,6% acima. Associado ao aumento de volatilidade obtido, o retorno médio, evidentemente, também subiu. Dessa maneira, conforme esperado, o índice de Sharpe se manteve constante para os quatro níveis de volatilidade testados, exatamente como antecipado pela metodologia.

Tabela 10 – Indicadores dos portfólios com *target* de volatilidade – portfólio tipo 5

Indicador	Target: 2%	Target: 4%	Target: 6%	Target: 8%
Média Mensal Anualizada (%)	10,79	12,70	14,61	16,53
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	2,36	4,63	6,97	9,31
Índice de Sharpe	0,81	0,81	0,81	0,81
Retorno Acumulado (%)	219,28	288,68	370,28	465,60
Máximo Drawdown (%)	2,00	4,60	7,18	9,81
Alfa Médio (%)	46,70	-6,59	-59,89	-113,18

Finalmente, a última linha da tabela traz o valor médio do parâmetro alfa, que representa a exposição financeira no ativo livre de risco. Para os portfólios com *target* de volatilidade de 4%, 6% e 8%, o alfa é negativo, ou seja, os portfólios em média foram alavancados. Já para o portfólio com 2% de volatilidade, o alfa médio foi positivo, indicando alocação no ativo livre de risco.

Os retorno acumulado dos portfólios com target de volatilidade podem ser observados na Figura 7 – linhas azuis. Os retornos são comparados com o portfólio sem a utilização do ativo livre de risco – linha laranja –, em que a volatilidade não é regulada explicitamente, mas resultado apenas da otimização e alocação via contribuição de risco. É importante ressaltar, mais uma vez, que todas as quatro trajetórias possuem o mesmo índice de Sharpe e todo o retorno adicional que os portfólios progressivamente apresentam vem exclusivamente do aumento da volatilidade.

Finalmente, a Figura 8 ilustra o comportamento da metodologia na definição se o portfólio estará financiado ou aplicado em taxa livre de risco. A linha azul mostra a volatilidade *ex-ante* do portfólio composto apenas pelos ativos arriscados. Sempre que essa volatilidade está acima do *target* – 4% no caso – a alavancagem é negativa, isto é o portfólio final está investido no instrumento livre de risco. Já se a volatilidade do portfólio arriscado é inferior ao objetivo, o portfólio final passa a se financiar no ativo livre de risco, alavancando sua exposição líquida.

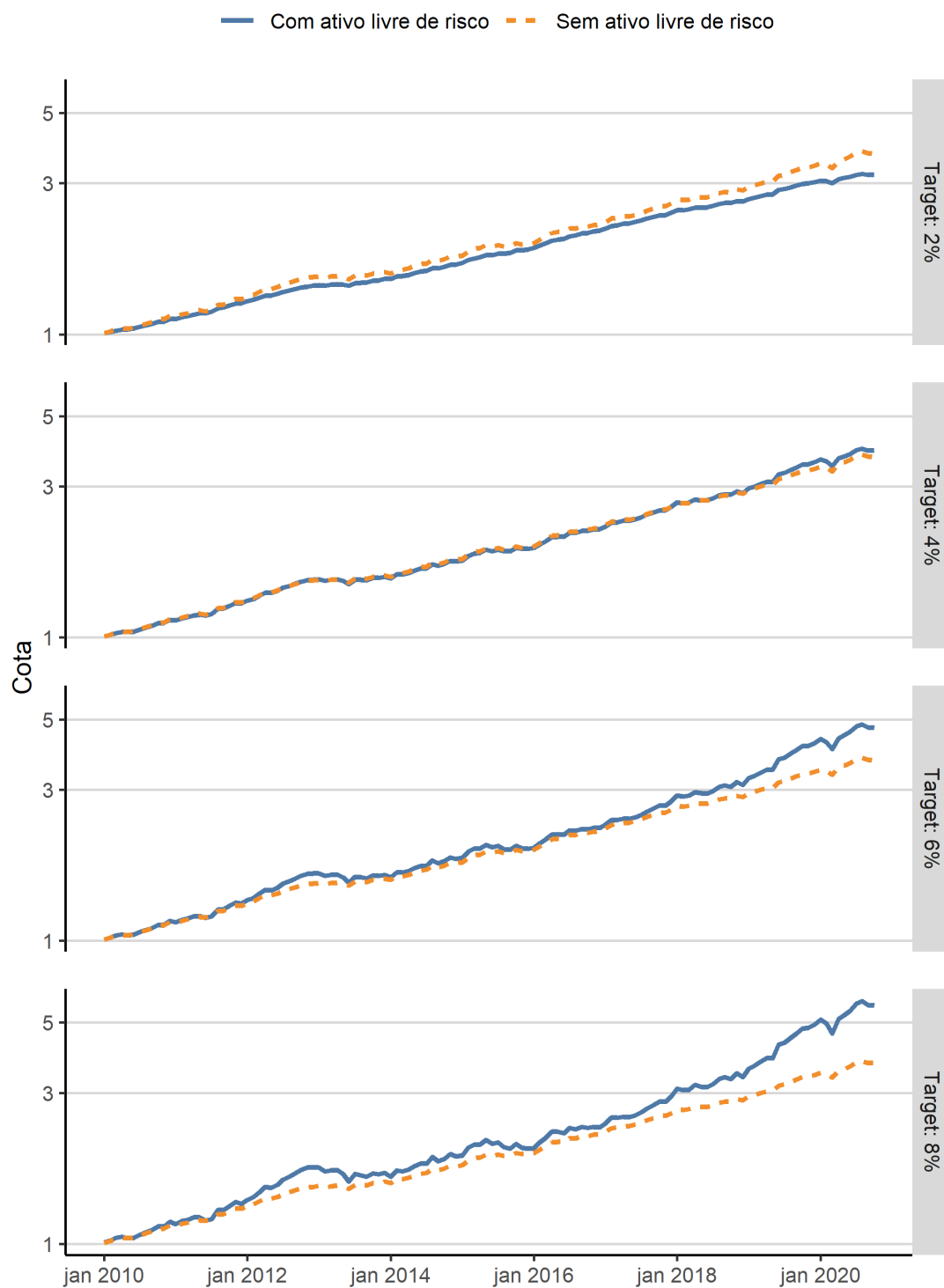
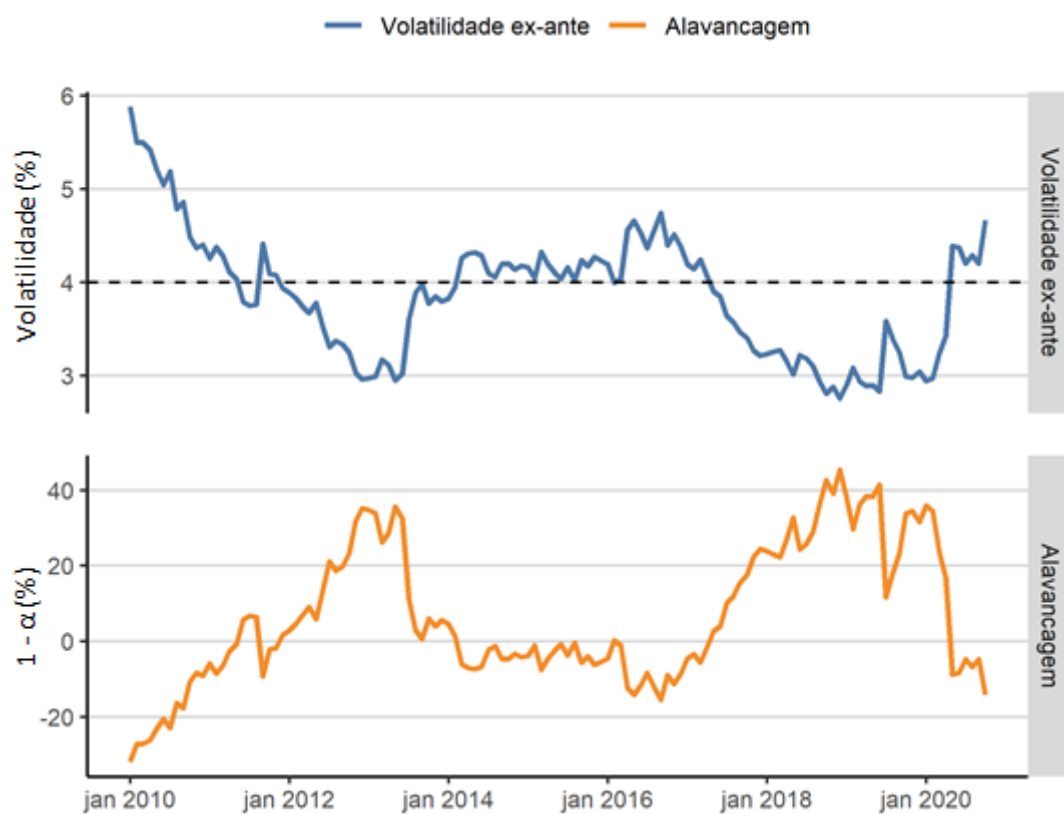
Figura 7 – Retorno acumulado dos portfólios com *target* de volatilidade - tipo 5

Figura 8 – Alavancagem com *target* de volatilidade de 4% – portfólio tipo 5

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou uma metodologia para alocação de ativos baseado no *framework* de orçamento de risco. Nessa abordagem, o gestor aloca inicialmente a contribuição de risco que cada ativo tem no portfólio e, posteriormente, converte para a dimensão financeira. Na metodologia proposta, as contribuições de risco ótimas foram obtidas através da utilização do filtro de Kalman, associado ao otimizador de algoritmos genéticos.

O *framework* de alocação de ativos por orçamento de risco surgiu no contexto das limitações do ambiente tradicional, que utiliza a otimização de média variância. A metodologia tradicional é pouco robusta à incerteza dos parâmetros de entrada, sobretudo o retorno esperado dos ativos, que é bastante difícil de ser estimado. Assim, uma série de metodologias que não dependem de estimativas para o retorno esperado foram desenvolvidas. A alocação via orçamento de risco é uma delas. Dentre os métodos de alocação por risco, uma abordagem bastante tradicional busca igualar a contribuição de risco de todos os ativos do portfólio – *Equal Risk Contribution (ERC)*.

De certa maneira, a metodologia ERC tem como princípio a suposição de que o risco de todos os ativos é corretamente remunerado. No entanto, na presença de ativos que não tem um prêmio de risco evidente, o desempenho desse método é prejudicado. Portanto, uma boa pré-seleção dos ativos é fundamental para que toda a potencialidade da metodologia seja aproveitada.

Para endereçar essa desvantagem, esse trabalho buscou propor uma metodologia para que a alocação desvie do orçamento igualitário de risco. Grosso modo, a metodologia obtém *in sample* o orçamento de risco que maximizaria o Sharpe do portfólio em cada mês e posteriormente aplica o filtro de Kalman sobre a série temporal de orçamentos ótimos. A previsão *out of sample* é então utilizada para obter o portfólio ótimo para os meses subsequentes.

De maneira geral, os portfólios obtidos através da metodologia proposta nesse trabalho foram capazes de superar, em termos de risco e retorno, os portfólio ERC e de pesos iguais – *Equal Weight*. Ou seja, há ganho em desviar da alocação igualitária de risco, mesmo sem incorporar explicitamente retornos esperados no processo de alocação. No entanto, esse desvio não chegou a mudar a ordem de grandeza das alocação, isto é, em média os ativos que receberam os maiores pesos no método ERC também receberam os maiores pesos na metodologia proposta.

Por outro lado, a metodologia proposta foi incapaz de endereçar a principal limitação da metodologia ERC, que é a pouca robustez à inserção de ativos com prêmio

de risco reduzidos. Isto é, os resultados obtidos continuam dependendo muito dos ativos selecionados para compor o portfólio e a otimização foi incapaz de expurgar a alocação nesses instrumentos, embora registre-se que suas magnitudes foram reduzidas.

Como extensão desse trabalho e de certa maneira do próprio *framework* de alocação por risco, há a necessidade de incorporar nas metodologias a possibilidade da venda a descoberto. Em parte por ser uma realidade do mercado financeiro e também para aumentar os graus de liberdade na montagem do portfólio.

Outra possibilidade é alterar a função objetivo da otimização *in sample*, uma vez que utilizamos apenas o índice de Sharpe. Além disso, o próprio filtro de Kalman pode ser modificado para incorporar, por exemplo, a tendência local no modelo de nível que foi utilizado.

Finalmente, seria interessante a otimização em outros horizontes que não o mensal. Nesse trabalho, a opção pela frequência mensal foi em virtude da limitação de histórico de dados para o Brasil. Ao estender a metodologia para outras jurisdições, além de ampliar a validação da metodologia, é possível avaliar o efeito da variação dos períodos de otimização.

REFERÊNCIAS

- ARNOTT, R.; HARVEY, C. R.; MARKOWITZ, H. A backtesting protocol in the era of machine learning. *Journal of Financial Data Science*, v. 1, n. 1, p. 64–74, 2019.
- ARTZNER, A. et al. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, v. 9(3), p. 203–228, 1999.
- BLACK, F.; LITTERMAN, R. Asset allocation: combining investor views with market equilibrium. *Journal of Fixed Income*, v. 1, p. 7–18, 1991.
- BRUDER, B.; RONCALLI, T. Managing risk exposures using the risk budgeting approach. *Available at SSRN 2009778*, 2012.
- CHANG, T. J.; YANG, S. C.; CHANG, K. J. Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. *GExpert Systems with applications*, v. 36, p. 10529–10537, 2009.
- CHU, G. et al. A new online portfolio selection algorithm based on Kalman filter and anti-correlation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 536, 2019.
- DILELLIO, J. A Kalman filter control technique in mean-variance portfolio management. *Journal of Economics and Finance*, v. 39, p. 235–261, 2015.
- DRAKE, A.; MARKS, R. Genetic algorithms in economics and finance: Forecasting stock market prices and foreign exchange – a review. *Genetic algorithms and genetic programming in computational finance*, p. 29–54, 2002.
- FAMA, E.; FRENCH, K. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of financial economics*, v. 33, p. 3–56, 1993.
- GASTALDI, M.; NARDECCHIA, A. The Kalman filter approach for time-varying estimation. *Systems Analysis Modelling Simulation*, v. 43, n. 8, p. 1033–1042, 2003.
- GREWAL, M. S.; ANDREWS, A. P. Applications of Kalman filtering in aerospace 1960 to the present. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 30, n. 3, p. 69–78, 2010.
- HAUGH, M.; IYENGAR, G.; SONG, I. A generalized risk budgeting approach to portfolio construction. *Journal of Computational Finance*, v. 21, n. 2, p. 29–60, 2017.
- KAHN, R. N. What practitioners need to know... about backtesting. *Financial Analysts Journal*, v. 46, n. 4, 1990.
- KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering*, v. 82, n. Series D, p. 35–45, 1960.
- KAPSOS, M.; CHRISTOFIDES, N.; RUSTEM, B. Robust risk budgeting. *Annals of Operations Research*, v. 266, n. 1, p. 199–221, 2018.
- KOUWENBERG, R. Strategic asset allocation and risk budgeting for insurers under Solvency II. *Available at SSRN 2894809*, 2017.

- LEE, W.; LAM, D. Y. Implementing optimal risk budgeting. *The Journal of Portfolio Management*, v. 28, n. 1, p. 73–80, 2001.
- LEINWEBER, D.; ARNOTT, R. Quantitative and computational innovation in investment management. *Journal of Portfolio Management*, v. 21, p. 8–15, 1995.
- LINDBERG, C. Portfolio optimization when expected stock returns are determined by exposure to risk. *Bernoulli*, v. 15, p. 464–474, 2009.
- LORASCHI, A.; TETTAMANZI, A. *An Evolutionary Algorithm for Portfolio Selection Within a Downside Risk Framework*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1996.
- MAILLARD, S.; RONCALLI, T.; TEILETCHE, J. On the properties of equally-weighted risk contribution portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, v. 36, p. 60–70, 2010.
- MARKOWITZ, H. M. Portfolio selection. *Journal of Finance*, v. 7, p. 77–91, 1952.
- METAWA, N.; K., H. M.; ELHOSENY, M. Genetic algorithm based model for optimizing bank lending decisions. *Expert Systems With Applications*, 2017.
- MEUCCI, A.; SANTANGELO, A.; DEGUEST, R. Risk budgeting and diversification based on optimized uncorrelated factors. *Risk*, v. 11, p. 70–75, 2015.
- NEELY, C.; WELLER, P.; DITTMAR, R. Is technical analysis in the foreign exchange market profitable? A genetic programming approach. *Journal of Financial Quantitative Analysis*, v. 32, p. 405–426, 1997.
- OLIVEIRA, H. M. de. *Análise de Sinais para Engenheiros: Uma abordagem via WAVELETS*. [S.l.]: Brasport, 2007.
- PEREIRA, R. Genetic algorithm optimisation for finance and investment. *MPRA Paper No. 8610*, 2000.
- QIAN, E. Risk parity portfolios: Efficient portfolios through true diversification. *Panagora Asset Management*, 2005.
- QIAN, E. On the financial interpretation of risk contributions: Risk budgets do add up. *Journal of Investment Management*, 2006.
- RIGATOS, G. Kalman filtering approach to the detection of option mispricing in elaborated pde finance models. *State-Space Approaches for Modelling and Control in Financial Engineering*. Springer, p. 141–152, 2017.
- RONCALLI, T. Introducing expected returns into risk parity portfolios: A new framework for asset allocation. *Available at SSRN 2321309*, 2014.
- RONCALLI, T.; WEISANG, G. Risk parity portfolios with risk factors. *Quantitative Finance*, v. 16.3, p. 377–288, 2015.
- SHARPE, W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risks. *The journal of finance*, v. 19, n. 3, p. 425–442, 1964.
- WATARI, Y. *Aplicação de alocação de risco em fatores (Risk Factor Budgeting) ao mercado brasileiro de ações*. Dissertação (Mestrado) — FGV, 2017.

WELCH, G.; BISHOP, G. An introduction to the Kalman filter. *Proc of SIGGRAPH*, v. 8, 2001.

WELLS, C. *The Kalman filter in finance*. [S.l.]: Springer Science Business Media, 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE A – DEMAIS RESULTADOS

No Capítulo 5, por concisão, optamos por apresentar os resultados detalhados apenas para o portfólio tipo 5. Aqui trazemos o detalhamento dos resultados para os outros dez portfólios que fizeram parte da simulação, primeiro na versão sem ativo de risco e depois com sua inclusão.

A.1 Sem ativo livre de risco

As tabelas abaixo apresentam os resultados da simulação sem a presença do ativo livre de risco como instrumento elegível.

Tabela 11 – Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 1

Indicador	EW	ERC	RB
Média Mensal Anualizada (%)	9,50	10,70	10,82
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	11,16	4,88	4,01
Índice de Sharpe	0,06	0,38	0,49
Retorno / Risco	0,85	2,19	2,70
Máximo Drawdown (%)	18,47	5,60	2,95
VaR 95% - ex-post (%)	-4,16	-1,28	-1,08
Expected Shortfall 95% - ex-post (%)	-6,54	-2,45	-1,78
Retorno Acumulado (%)	160,55	212,95	218,46
CAGR	9,24	11,11	11,29
Skewness	-0,73	-0,47	-0,25
Kurtosis	3,48	2,06	1,24

Tabela 12 – Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 2

Indicador	EW	ERC	RB
Média Mensal Anualizada (%)	10,49	11,15	11,13
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	9,19	5,41	4,84
Índice de Sharpe	0,18	0,43	0,47
Retorno / Risco	1,14	2,06	2,30
Máximo Drawdown (%)	14,50	6,10	4,16
VaR 95% - ex-post (%)	-3,26	-1,66	-1,56
Expected Shortfall 95% - ex-post (%)	-5,46	-2,87	-2,44
Retorno Acumulado (%)	196,19	227,76	227,94
CAGR	10,54	11,58	11,59
Skewness	-0,85	-0,55	-0,40
Kurtosis	3,90	2,21	1,27

Tabela 13 – Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 3

Indicador	EW	ERC	RB
Média Mensal Anualizada (%)	9,43	10,67	10,69
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	8,91	5,73	5,25
Índice de Sharpe	0,06	0,32	0,35
Retorno / Risco	1,06	1,86	2,04
Máximo Drawdown (%)	11,77	5,90	5,54
VaR 95% - ex-post (%)	-3,23	-1,83	-1,57
Expected Shortfall 95% - ex-post (%)	-5,12	-2,89	-2,53
Retorno Acumulado (%)	165,03	210,75	212,28
CAGR	9,41	11,03	11,08
Skewness	-0,51	-0,36	-0,27
Kurtosis	1,14	0,71	0,40

Tabela 14 – Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 4

Indicador	EW	ERC	RB
Média Mensal Anualizada (%)	6,53	8,67	9,37
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	9,01	5,77	5,42
Índice de Sharpe	-0,26	-0,04	0,09
Retorno / Risco	0,73	1,50	1,73
Máximo Drawdown (%)	15,61	7,17	5,66
VaR 95% - ex-post (%)	-3,24	-1,74	-1,55
Expected Shortfall 95% - ex-post (%)	-5,49	-2,92	-2,67
Retorno Acumulado (%)	93,82	150,34	170,51
CAGR	6,30	8,84	9,62
Skewness	-0,59	-0,38	-0,34
Kurtosis	1,29	1,06	0,59

Tabela 15 – Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 6

Indicador	EW	ERC	RB
Média Mensal Anualizada (%)	10,34	11,19	11,90
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	7,42	4,56	4,54
Índice de Sharpe	0,19	0,50	0,65
Retorno / Risco	1,39	2,45	2,62
Máximo Drawdown (%)	10,22	5,13	4,22
VaR 95% - ex-post (%)	-2,31	-1,11	-1,03
Expected Shortfall 95% - ex-post (%)	-3,72	-1,74	-1,66
Retorno Acumulado (%)	196,31	230,47	256,74
CAGR	10,55	11,67	12,46
Skewness	-0,28	-0,19	-0,05
Kurtosis	0,96	0,52	0,37

Tabela 16 – Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 7

Indicador	EW	ERC	RB
Média Mensal Anualizada (%)	10,85	11,18	11,43
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	6,34	4,02	4,25
Índice de Sharpe	0,30	0,55	0,59
Retorno / Risco	1,71	2,78	2,69
Máximo Drawdown (%)	6,46	2,25	3,75
VaR 95% - ex-post (%)	-1,90	-0,72	-0,94
Expected Shortfall 95% - ex-post (%)	-2,72	-1,22	-1,40
Retorno Acumulado (%)	215,62	231,08	239,75
CAGR	11,19	11,69	11,95
Skewness	0,08	0,24	0,20
Kurtosis	0,35	0,27	0,39

Tabela 17 – Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 8

Indicador	EW	ERC	RB
Média Mensal Anualizada (%)	11,30	10,86	11,54
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	5,99	3,83	4,14
Índice de Sharpe	0,39	0,50	0,63
Retorno / Risco	1,89	2,84	2,79
Máximo Drawdown (%)	3,70	2,46	3,40
VaR 95% - ex-post (%)	-1,64	-0,74	-0,86
Expected Shortfall 95% - ex-post (%)	-2,30	-1,19	-1,38
Retorno Acumulado (%)	231,94	220,08	243,79
CAGR	11,71	11,34	12,07
Skewness	0,28	0,06	0,07
Kurtosis	0,35	-0,42	0,11

Tabela 18 – Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 9

Indicador	EW	ERC	RB
Média Mensal Anualizada (%)	13,49	13,13	13,25
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	7,19	4,16	3,91
Índice de Sharpe	0,64	1,02	1,11
Retorno / Risco	1,88	3,16	3,39
Máximo Drawdown (%)	11,45	4,40	3,09
VaR 95% - ex-post (%)	-2,16	-0,83	-0,70
Expected Shortfall 95% - ex-post (%)	-3,57	-1,68	-1,36
Retorno Acumulado (%)	316,22	307,58	313,62
CAGR	14,07	13,85	14,00
Skewness	-0,68	-0,38	-0,18
Kurtosis	3,49	1,08	0,52

Tabela 19 – Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 10

Indicador	EW	ERC	RB
Média Mensal Anualizada (%)	12,04	12,83	13,07
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	6,88	4,34	4,09
Índice de Sharpe	0,45	0,90	1,01
Retorno / Risco	1,75	2,96	3,20
Máximo Drawdown (%)	9,35	4,08	2,63
VaR 95% - ex-post (%)	-1,83	-0,85	-0,85
Expected Shortfall 95% - ex-post (%)	-3,34	-1,59	-1,27
Retorno Acumulado (%)	257,12	294,63	305,15
CAGR	12,47	13,51	13,79
Skewness	-0,31	-0,04	0,12
Kurtosis	1,89	0,67	0,11

Tabela 20 – Todos os indicadores da simulação – portfólio tipo 11

Indicador	EW	ERC	RB
Média Mensal Anualizada (%)	14,24	13,00	13,10
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	8,23	4,38	4,10
Índice de Sharpe	0,64	0,93	1,02
Retorno / Risco	1,73	2,97	3,20
Máximo Drawdown (%)	10,63	4,61	3,50
VaR 95% - ex-post (%)	-2,86	-0,99	-0,85
Expected Shortfall 95% - ex-post (%)	-3,76	-1,74	-1,48
Retorno Acumulado (%)	347,23	301,60	306,41
CAGR	14,83	13,69	13,82
Skewness	-0,24	-0,35	-0,24
Kurtosis	1,11	0,83	0,48

A.2 Com ativo livre de risco

As tabelas abaixo apresentam os resultados da simulação com a presença do ativo livre de risco como instrumento elegível.

Tabela 21 – Indicadores dos portfólios com *target* de volatilidade – portfólio tipo 1

Indicador	Target: 2%	Target: 4%	Target: 6%	Target: 8%
Média Mensal Anualizada (%)	9,72	10,56	11,39	12,23
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	2,35	4,46	6,62	8,79
Índice de Sharpe	0,38	0,38	0,38	0,38
Retorno Acumulado (%)	184,52	208,96	233,77	258,70
Máximo Drawdown (%)	1,74	4,63	7,89	12,65
Alfa Médio (%)	42,77	-14,46	-71,69	-128,92

Tabela 22 – Indicadores dos portfólios com *target* de volatilidade – portfólio tipo 2

Indicador	Target: 2%	Target: 4%	Target: 6%	Target: 8%
Média Mensal Anualizada (%)	9,85	10,82	11,78	12,75
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	2,42	4,59	6,81	9,04
Índice de Sharpe	0,43	0,43	0,43	0,43
Retorno Acumulado (%)	188,45	217,47	247,50	278,30
Máximo Drawdown (%)	1,97	5,07	9,76	15,42
Alfa Médio (%)	52,60	5,21	-42,19	-89,59

Tabela 23 – Indicadores dos portfólios com *target* de volatilidade – portfólio tipo 3

Indicador	Target: 2%	Target: 4%	Target: 6%	Target: 8%
Média Mensal Anualizada (%)	9,55	10,22	10,89	11,56
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	2,37	4,51	6,71	8,92
Índice de Sharpe	0,30	0,30	0,30	0,30
Retorno Acumulado (%)	179,40	197,90	215,94	233,29
Máximo Drawdown (%)	2,14	6,23	11,61	17,71
Alfa Médio (%)	57,44	14,88	-27,67	-70,23

Tabela 24 – Indicadores dos portfólios com *target* de volatilidade – portfólio tipo 4

Indicador	Target: 2%	Target: 4%	Target: 6%	Target: 8%
Média Mensal Anualizada (%)	9,04	9,21	9,37	9,53
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	2,36	4,50	6,69	8,89
Índice de Sharpe	0,07	0,07	0,07	0,07
Retorno Acumulado (%)	164,60	167,20	168,40	168,17
Máximo Drawdown (%)	2,11	6,31	10,73	16,14
Alfa Médio (%)	59,21	18,43	-22,36	-63,14

Tabela 25 – Indicadores dos portfólios com *target* de volatilidade – portfólio tipo 6

Indicador	Target: 2%	Target: 4%	Target: 6%	Target: 8%
Média Mensal Anualizada (%)	10,46	12,03	13,61	15,18
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	2,38	4,66	7,00	9,35
Índice de Sharpe	0,67	0,67	0,67	0,67
Retorno Acumulado (%)	207,98	261,67	322,15	389,78
Máximo Drawdown (%)	2,34	5,28	8,18	11,05
Alfa Médio (%)	49,58	-0,84	-51,26	-101,68

Tabela 26 – Indicadores dos portfólios com *target* de volatilidade – portfólio tipo 7

Indicador	Target: 2%	Target: 4%	Target: 6%	Target: 8%
Média Mensal Anualizada (%)	10,16	11,45	12,73	14,01
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	2,34	4,58	6,88	9,19
Índice de Sharpe	0,55	0,55	0,55	0,55
Retorno Acumulado (%)	198,45	239,73	284,48	332,63
Máximo Drawdown (%)	1,97	5,15	9,46	13,63
Alfa Médio (%)	46,22	-7,55	-61,33	-115,10

Tabela 27 – Indicadores dos portfólios com *target* de volatilidade – portfólio tipo 8

Indicador	Target: 2%	Target: 4%	Target: 6%	Target: 8%
Média Mensal Anualizada (%)	10,32	11,76	13,19	14,63
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	2,37	4,66	7,00	9,36
Índice de Sharpe	0,61	0,61	0,61	0,61
Retorno Acumulado (%)	203,43	251,08	303,77	361,60
Máximo Drawdown (%)	2,04	4,80	8,96	12,98
Alfa Médio (%)	45,29	-9,42	-64,13	-118,84

Tabela 28 – Indicadores dos portfólios com *target* de volatilidade – portfólio tipo 9

Indicador	Target: 2%	Target: 4%	Target: 6%	Target: 8%
Média Mensal Anualizada (%)	11,52	14,16	16,80	19,44
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	2,37	4,62	6,93	9,24
Índice de Sharpe	1,13	1,13	1,13	1,13
Retorno Acumulado (%)	245,24	354,38	494,28	672,47
Máximo Drawdown (%)	2,01	4,62	7,21	9,77
Alfa Médio (%)	41,98	-16,03	-74,05	-132,07

Tabela 29 – Indicadores dos portfólios com *target* de volatilidade – portfólio tipo 10

Indicador	Target: 2%	Target: 4%	Target: 6%	Target: 8%
Média Mensal Anualizada (%)	11,25	13,63	16,00	18,37
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	2,35	4,61	6,93	9,26
Índice de Sharpe	1,01	1,01	1,01	1,01
Retorno Acumulado (%)	235,53	329,22	445,71	589,61
Máximo Drawdown (%)	1,63	3,87	6,09	8,75
Alfa Médio (%)	46,03	-7,94	-61,92	-115,89

Tabela 30 – Indicadores dos portfólios com *target* de volatilidade – portfólio tipo 10

Indicador	Target: 2%	Target: 4%	Target: 6%	Target: 8%
Média Mensal Anualizada (%)	11,30	13,73	16,15	18,57
Volatilidade Mensal Anualizada (%)	2,36	4,59	6,87	9,17
Índice de Sharpe	1,05	1,05	1,05	1,05
Retorno Acumulado (%)	237,33	333,86	454,63	604,74
Máximo Drawdown (%)	2,17	4,94	7,69	10,39
Alfa Médio (%)	44,65	-10,71	-66,06	-121,42