FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO

MARTIN KLOS RAHAL

ENSAIOS EM CRESCIMENTO ECONÔMICO E PREVIDÊNCIA

SÃO PAULO
2021

MARTIN KLOS RAHAL

ENSAIOS EM CRESCIMENTO ECONÔMICO E PREVIDÊNCIA

Tese apresentada à Escola de Economia da Fundação Getulio Vargas como requisito para obtenção do título de Doutor em Economia

Orientador: Prof. Dr. Victor Filipe Martins da Rocha
Coorientador: Prof. Dr. Vladmir Kühl Teles

São Paulo
2021

Rahal, Martin Klos.
Ensaios em crescimento econômico e previdência / Martin Klos Rahal. - 2021.
93 f.

Orientador: Victor Filipe Martins-da-Rocha.
Co-orientador: Vladimir Kühl Teles.

Tese (doutorado CDEE) – Fundação Getulio Vargas, Escola de Economia de São Paulo.

1. Previdência social - Brasil. 2. Dívida pública. 3. Despesa pública. 4. Desenvolvimento econômico. 5. Educação. I. Martins-da-Rocha, Victor Filipe. II. Teles, Vladimir Kühl. III. Tese (doutorado) – Escola de Economia de São Paulo. IV. Fundação Getulio Vargas. V. Título.

CDU 368.4(81)

Ficha Catalográfica elaborada por: Isabele Oliveira dos Santos Garcia CRB SP-010191/O
Biblioteca Karl A. Boedecker da Fundação Getulio Vargas - SP

MARTIN KLOS RAHAL

ENSAOIS EM CRESCIMENTO ECONÔMICO E PREVIDÊNCIA

Tese apresentada à Escola de Economia da Fundação Getúlio Vargas como requisito para obtenção do título de Doutor em Economia

Linha de pesquisa: Crescimento Econômico

Data da Aprovação: 18/06/2021

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Victor Filipe Martins da Rocha
FGV – EESP

Prof. Dr. Vladmir Kühl Teles
FGV - EESP

Prof. Dr. Paulo Sérigio Tenani
FGV – EESP

Prof. Dr. Rodrigo de Losso da Silveira Bueno
FEA - USP

Prof. Dr. Caio Cesar Mussolini
Universidade Católica de Santos

Agradecimentos

Agradeço especialmente o Prof. Dr. Vladmir Kühl Teles por seu suporte essencial ao longo desta tese. Agradeço também o Prof. Dr. Paulo Sérgio Tenani por toda sua ajuda acadêmica em sentido bastante amplo. Gostaria ainda de expressar particular reconhecimento aos meus pais Marcos e Joanna, que sempre me incentivaram em todos os aspectos relacionados ao estudo.

Resumo

O presente trabalho desenvolve dois ensaios adicionando um sistema de pensão por repartição a modelos de gerações sobrepostas já existentes e analisa os resultados obtidos. O primeiro é baseado em Teles e Mussolini (2014), onde parte dos gastos governamentais é produtiva e o orçamento fiscal conta com dívida pública. O segundo parte de Bräuninger e Vidal (2000), onde a produtividade do trabalho depende do nível de escolaridade e o governo subsidia parcialmente a educação. Ambos modelos chegam a conclusões essencialmente similares: previdência por repartição sempre reduz a poupança e o crescimento de capital; gastos públicos produtivos, que podem ser apenas em educação, são efetivos se e somente se algum nível de disciplina fiscal e um limite superior para o sistema de repartição forem simultaneamente satisfeitos. Entretanto, sob condições bastante restritas, o sistema de repartição pode ajudar a melhorar o nível educacional.

Palavras chave: previdência por repartição, previdência, modelo de crescimento endógeno, modelo de gerações sobrepostas, gastos públicos produtivos, dívida pública, educação.

Abstract

The present work develops two essays adding a pay-as-you-go pension system to existing overlapping generations models and analyses the outcomes. The first is based on Teles and Mussolini (2014), where part of the government expenditures is productive and the fiscal budget counts on public debt. The second departs from Bräuninger and Vidal (2000), where labor productivity depends on the level of scholarship and the government partially subsidizes education. Both models reach essentially similar conclusions: PAYG always decreases savings and capital growth; productive public expenditures, which may be in education only, are effective if, and only if, some level of fiscal discipline and a PAYG upper limit are simultaneously satisfied. However, under some very restricted conditions, PAYG may help to improve the level of education.

Key words: pay-as-you-go pension system, PAYG, pension, endogenous growth model, overlapping generations model, OLG, productive government expenditures, public debt, education.

SUMÁRIO

1 – Introdução

Dois modelos teóricos são desenvolvidos neste trabalho, eles analisam os impactos que um sistema de previdência por repartição traz quando adicionado a modelos de crescimento econômico. O primeiro ensaio é baseado em Teles e Mussolini (2014), em que parte dos gastos públicos é considerada produtiva e o orçamento fiscal conta com a emissão de dívida. O segundo parte de Bräuninger e Vidal (2000), onde a produtividade do trabalho depende da escolaridade e o governo subsidia parcialmente a educação. Os resultados da inclusão da previdência são confrontados com os originais.

A inclusão da previdência impacta os referidos modelos com uma redução no estoque de capital e no produto uma vez que diminui a poupança. Isto ocorre pois parte da renda é transferida da geração que trabalha para a geração de aposentados e estes recursos se transformam em consumo. Tanto a renda disponível como a necessidade de poupar são menores promovendo o referido efeito negativo no estoque de capital. O produto é menor para a sociedade como um todo no estado estacionário, assim como o base para arrecadação e a possibilidade de um governo praticar políticas públicas discricionárias, algumas delas eventualmente muito importantes. Se o envelhecimento de uma população contar com um subsídio na aposentadoria proveniente do orçamento fiscal, ocorrem restrições ainda maiores às políticas públicas. Alternativamente, se este subsídio inexistir e houver a percepção de longevidade crescente, a poupança aumenta. Há ainda um caráter redistributivo na previdência que pode, em determinadas circunstâncias, promover algum benefício a toda sociedade.

Estes resultados qualitativos, de alguma forma já esperados, são obtidos e o mérito deste trabalho é, portanto, evidenciar como as variáveis de um sistema de previdência impactam modelos de crescimento econômico em estado estacionário e o alcance de algumas políticas públicas.

Em Pension Economics, David Blake faz uma breve apresentação sobre os sistemas de planos de pensão. O autor lembra que foi uma invenção do final do século XIX e começo do século XX em economias desenvolvidas. Antes disso, as

pessoas trabalhavam em suas vidas até a exaustão e morriam na *casa para pobres* (*poor house*). Bismark criou o primeiro sistema de pensão na Alemanha na década de 1880. No século XX estes planos se espalharam em países desenvolvidos na Europa, nos EUA e na Austrália. Atualmente, os sistemas de pensão estatais costumam ser por repartição e em países como Alemanha, Itália e França há uma garantia de um padrão de vida bom para os pensionistas, enquanto nos EUA e no Reino Unido, apenas a subsistência. E em países da África, Ásia e América Latina, uma aposentadora digna ainda é um sonho.

A discussão sobre sistemas de previdência, suas características e efetividade tem se tornado mais frequente nos últimos anos com o aumento da perspectiva de vida em conjunto com taxas de natalidades menores. Este fenômeno demográfico implica um desequilíbrio no sistema de previdência presente em muitos países. Existem dois tipos de previdência: por repartição e capitalização. No primeiro, trabalhadores contribuem com um sistema que simplesmente transfere estes recursos a pensionistas. Não há poupança, mas a promessa de quando um trabalhador se aposentar ser a sua vez de receber a transferência entre gerações. No segundo, as contribuições se transformam em investimentos. Difere da poupança no sentido estrito porque dois papéis são desempenhados por este sistema, o de um fundo de investimentos e o de uma seguradora. A característica de seguradora vem da garantia de um fluxo futuro de rendimentos constante independentemente da longevidade do pensionista. Para fins de crescimento econômico, de la Croix e Michel (2002) mostram que a capitalização é idêntica à poupança. Deve ainda ser ressaltado que a previdência por capitalização pode ter duas formas: contribuição definida ou benefício definido. Os autores se referem à contribuição definida, pois Neste trabalho, a previdência por capitalização se refere ao tipo contribuição definida e não benefício definido gera um déficit que deve ser pago por quem patrocina este sistema. Os modelos deste trabalho partem de artigos que já consideram poupança e acrescentam previdência por repartição apenas, uma vez que acrescentar o segundo tipo seria redundante.

A importância de incluir este tipo de sistema de previdência em modelos de crescimento econômico se deve à sua presença em muitos países impondo restrições ao seu crescimento e a suas políticas públicas. Apesar disso, uma transição para um sistema de capitalização parece sempre encontrar dificuldades.

Compreender os desdobramentos econômicos envolvidos é útil pois, além do envelhecimento da população, as taxas de crescimento diminuíram nos últimos anos, nem todos defendem seu fim e descontinuar um sistema por repartição não é uma tarefa rápida ou fácil.

Não obstante a formação de capital ser maior em um sistema de previdência por capitalização, esta transição incorre em custos elevados. Financiar por meio de títulos públicos não altera a essência do problema, pois os ganhos com o sistema novo são perfeitamente compensados pelo peso que esta solução cria. Esta equivalência é bem conhecida e amortizar esta dívida, sob certas condições, não é Pareto eficiente. A escolha da geração que arca com este ônus é arbitrária e apenas as gerações seguintes se beneficiam com o novo sistema. Esta é uma das razões para a resistência a uma transição.

Existem, entretanto, razões para se acreditar que a previdência por repartição pode aumentar ou diminuir seu peso. David Blake na obra supracitada traz um ponto de vista interessante quando analisa o envelhecimento da população no modelo de Diamond–Samuelson com previdência. A tendência linear de envelhecimento de três meses por ano nos últimos 150 anos, segundo Oeppen e Vaupel, deve continuar. O aumento na proporção de pensionistas diminui os proventos em um sistema de repartição e esta percepção faria os jovens aumentarem seu nível de poupança. Isto aumentaria tanto o estoque de capital como o capital per capita das economias.

Ainda segundo Blake, se os trabalhadores forem deixados para tomarem suas próprias decisões sobre poupar para a fase de suas vidas em que não estão mais trabalhando, estas decisões podem não ser as melhores. Fatores comportamentais podem levar os agentes a poupar menos do que precisam ou a não investir os recursos da melhor forma. Os motivos são diversos, dentre eles: problemas com autocontrole sobre poupança; desconto majorado do futuro e sobrevalorização do presente; diferença entre desejo e ação que pode levar à procrastinação da decisão de poupar; e falta de informação precisa sobre quanto poupar e quanto risco assumir. Blake lembra a sugestão de Thaler e Sunstein (2003) de *paternalismo libertário* em que opções de poupança poderiam ser dadas aos trabalhadores, que apenas escolheriam a de sua preferência. Sob esta perspectiva, algum tipo de

obrigatoriedade de escolha de opções predeterminadas seria preferível a uma total discricionariedade.

Outro argumento que merece atenção, mas no sentido oposto, pode ser encontrado em *Political Economics: Explaining Economic Policy*, onde Persson e Tabellini utilizam o teorema do eleitor mediano para analisar decisões tomadas na administração pública. Na seção sobre previdência, encontram suporte para o formato de aposentadoria por repartição estar presente em muitas democracias ocidentais. Uma coalisão entre os eleitores mais velhos e os de baixa renda pode sustentar uma contribuição previdenciária elevada neste sistema, pois estes dois grupos se beneficiam de redistribuições entre e dentro de gerações. As evidências numéricas sobre a redistribuição entre gerações, com base em painéis para países industrializados, mostram que o gasto com previdência como proporção do PIB por aposentado cresce com o aumento da proporção da população mais velha. Os autores ressaltam ainda que para ser fiel à teoria a expectativa de mudanças populacionais também deve ser levada em conta, mas os estudos empíricos não contemplam esta variável nem os efeitos da taxa de juro real. O modelo também prevê aumento deste sistema de previdência no caso de desigualdade de renda. Mas neste caso a evidência apresentada é muito fraca. As variáveis utilizadas para expressar a desigualdade contêm imperfeições e o modelo requer medidas mais cuidadosas devido às suas particularidades. De qualquer forma, a decisão no campo político não leva em conta apenas os argumentos de caráter econômico e um sistema de previdência que carrega imperfeições pode perdurar ou mesmo se intensificar.

Com base nos argumentos acima apresentado, pode-se afirmar que a previdência por repartição é uma realidade encontrada em muitos países, prejudica a formação de poupança, tem custos elevados para ser descontinuada, mas possui aspectos redistributivos e pode apresentar tendência de continuidade quando decisões políticas convergem para as demandas do eleitor mediano. Isto pode implicar que perdure em democracias desde que coalisões entre eleitores se formem para dar o necessário suporte. E como descontinuar este tipo de sistema não é um processo fácil ou rápido é importante compreender suas implicações nos estados estacionários de crescimento econômico. Os modelos desenvolvidos nos próximos capítulos pretendem colocar alguma luz sobre estas questões.

2 – Previdência, Dívida Pública e Crescimento Econômico – Longevidade e Limites da Política Fiscal

2.1 – Introdução

O objetivo deste ensaio é analisar como um sistema de previdência por repartição em conjunto com endividamento público e carga fiscal podem limitar a efetividade de gastos públicos produtivos no crescimento de longo prazo. Alicerçado em Teles e Mussolini (2014) "*Public debt and the limits of fiscal policy to increase economic growth*", um modelo de gerações sobrepostas (*overlapping generations model, OLG*) é elaborado com a adição de previdência. As condições para haver crescimento são determinadas e os efeitos das políticas governamentais no estado estacionário também são analisados.

O modelo desenvolvido neste capítulo mostra que a inclusão da previdência impõe limites às políticas de um governo que configuram seu papel central. Uma combinação de dívida pública menor e menores níveis de gastos do governo (produtivos e não produtivos) é necessária para uma economia com um sistema por repartição admitir estado estacionário. A relação dívida-capital de equilíbrio aumenta e esta mesma relação que torna a dívida explosiva diminui.

Os OLGs são amplamente utilizados para dar suporte a teorias microeconômicas e de crescimento econômico porque permitem a análise das implicações agregadas do ciclo de constituição e uso de poupança dos indivíduos em conjunto com o total de estoque de capital de uma economia, que é uma variável determinante do crescimento econômico. Gastos públicos produtivos têm sido adicionados a modelos de crescimento endógeno como em Chen (2006), Devarajan et al. (1996), Barro (1990) e Glomm e Ravikumar (1997). Estes artigos separam os gastos do governo em produtivos e não produtivos e utilizam funções de produção Cobb-Douglas ou CES em que os gastos produtivos participam como um dos fatores de produção. Concluem que há um nível ótimo para este tipo de gastos e fazem referências a evidências empíricas. Entretanto, limites impostos por uma dívida pública ao crescimento de longo prazo também têm sido evidenciados como em

Bräuninger (2005), Saint-Paul (1992) e Adam e Bevan (2005). O artigo de Bräuninger (2005) mostra uma fronteira para o endividamento a partir da qual não há estado estacionário; o de Saint-Paul (1992), o caráter não Pareto eficiente no pagamento de dívida devido à escolha da geração que arca com este ônus; e o de Adam e Bevan (2005), a interação entre déficit fiscal e dívida que limita o crescimento. Acrescentando dívida pública a um OLG com gastos produtivos do governo, Teles e Mussolini elaboram um modelo abrangente que reúne todas estas variáveis e também permite ver os resultados precedentes dos autores mencionados. Além de um importante passo teórico, este artigo comprova a significância da dívida pública e, controlando por esta variável, permite a reconciliação de dados empíricos até então não muito conclusivos sobre efetividade de gastos públicos produtivos.

Este tipo de abordagem já ocupa lugar de destaque na literatura. Barro (1990) lembra que uma das correntes sobre crescimento endógeno apresenta modelos em que o retorno de investimentos públicos e privados diverge de forma que escolhas descentralizadas levam a taxas de poupança e de crescimento econômico sub ótimas. Neste contexto retornos de escala privados podem ser decrescentes, mas retornos sociais, que refletem acesso a conhecimento e outras externalidades, podem ser constantes ou crescentes. Outra vertente de pesquisas envolve modelos sem externalidades no setor privado, em que escolhas privadas de poupança e crescimento são Pareto ótimas. Mas na presença de externalidades associadas a gastos públicos e impostos as escolhas privadas podem ser sub ótimas. Há, portanto, escolhas interessantes a serem feitas em políticas públicas, que são suportadas por dados empíricos, sobre a relação entre o tamanho do governo, a taxa de poupança e a taxa de crescimento econômico. Para abranger o setor público de forma apropriada o orçamento do governo, que inclui dívida, passa a ser uma das restrições no modelo que o autor desenvolve. Crescimento endógeno com gastos públicos em equilíbrio dinâmico geral são também revistos por Glomm e Ravikumar (1997), que elaboram um OLG ilustrando o papel dos impostos e gastos públicos. Examinam diversos aspectos como a não rivalidade nos bens públicos, existência e unicidade de equilíbrio competitivo, políticas públicas endógenas, formas de financiamento de gastos públicos, composição dos bens e serviços públicos, bem como alternativas privadas. Os modelos econômicos de crescimento até a década

de 1960 davam grande importância ao investimento privado e o crescimento de longo prazo era fruto de desenvolvimento tecnológico, variável considerada exógena. Nas décadas de 1980 e 1990 passaram a considerar ações individuais como motores do crescimento endógeno. E é apenas nos anos mais recentes que surgem estudos sobre a influência de gastos e decisões de consumo e poupança governamentais em modelos de crescimento contínuo. Esta linha de pesquisa tem implicações significativas sobre o papel das políticas governamentais em equilíbrio dinâmico geral no crescimento de longo prazo e no bem-estar.

Não obstante gastos públicos profícuos poderem elevar as taxas de crescimento do produto no longo prazo, a restrição imposta por uma dívida pública também é bastante explorada por diversos autores. Adam e Bevan (2005) analisam dados empíricos em um painel de 45 países em desenvolvimento através de um OLG com gastos governamentais produtivos. Utilizam várias formas de financiamento para os gastos públicos – como impostos, dívida interna, externa e *seigniorage* – e um dos resultados observados é o efeito negativo do endividamento. Outro modelo de crescimento endógeno de gerações sobrepostas, este proposto por Bräuninger (2005), demostra novamente os efeitos negativos que a relação dívida-PIB tem sobre o crescimento. Particularmente, se esta relação estiver acima de um certo patamar, não há crescimento em estado estacionário, pois o crescimento do capital declina continuamente e seu estoque tende a zero no longo prazo. E mais um modelo de crescimento endógeno com externalidades que implicam retornos constantes de capital em nível agregado, desta vez uma contribuição de Saint-Paul (1992), também conclui que uma dívida pública diminui o crescimento. Sob as premissas adotadas permite ainda demostrar que, embora uma redução da dívida eleve a taxa de crescimento, isto não traz uma melhora no sentido de Pareto: uma geração atual que paga impostos deve ser sacrificada para reduzir a dívida para gerações seguintes se beneficiarem de um crescimento maior. E conclui ainda que um sistema de previdência por repartição necessariamente reduz a taxa de crescimento.

O presente modelo acrescenta um sistema de repartição ao conjunto das variáveis acima e mostra sua contribuição para limitar o crescimento endógeno do produto em estado estacionário. Mostra a poupança – que se desdobra em investimento em capital e compra de títulos públicos – diminuir. Apesar do primeiro

destino ser em princípio preferível ao segundo, a soma dos dois passa a ser necessariamente menor. A renda disponível que é a fonte de tributação neste modelo – seja para lastrear gastos produtivos, não produtivos ou carregar e amortizar uma dívida – também sofre uma redução com a contribuição previdenciária sobre o salário. Quando um governo admite pensão por repartição, limita seu escopo em todas as outras áreas. Restringe também o setor privado que passa a consumir e investir menos. Estes resultados são obtidos a seguir.

2.2 – Modelo

O modelo de gerações sobrepostas elaborado nesta seção adiciona um sistema previdenciário ao OLG de Teles e Mussolini (2014) que, por este motivo, merece algum esclarecimento antes de se dar este passo adiante. Os autores consideram uma função de produção do setor privado que inclui como insumo os gastos produtivos do governo que também possui a capacidade de se endividar. Estas duas premissas já estão presentes em Barro (1990) e Glomm e Ravikumar (1997). E assim como em Bräuninger (2005) a função de produção também resulta em um modelo AK. Ainda em conformidade com o último artigo, os gastos não produtivos do governo são considerados exógenos e o orçamento público pode ser equilibrado de duas formas: ou o governo fixa o crescimento da relação dívida-PIB, tornando a tributação endógena; ou mantém o nível de tributação constante, tornando o crescimento da relação dívida-PIB endógeno. A possibilidade de o déficit ser financiado através de dívida também é adotada por Adam e Bevan (2005), que focam nos efeitos de curto prazo nas taxas de crescimento, mas Teles e Mussolini focam nos efeitos de longo prazo.

No OLG que segue, as variáveis que envolvem a previdência promovem a transferência entre gerações da seguinte forma. Existe uma geração jovem que trabalha, poupa, paga impostos e uma contribuição previdenciária. A geração mais velha conta com a poupança que fez na juventude acrescida de juros e também com os rendimentos do sistema previdenciário. Os recursos que lastreiam os pagamentos da aposentadoria provêm de duas origens, ambas recaem sobre a geração jovem: a

contribuição previdenciária em folha de pagamento e um prêmio discricionariamente dado pelo governo que é financiado pelo orçamento público.

As equações que regem o comportamento dos indivíduos, firmas e governo desta economia são apresentadas a seguir.

2.2.1 – Agentes

Indivíduos e sistema previdenciário

Função utilidade dos indivíduos:

$$U = ln\ (c_t^t) + \beta \ln\ (c_{t+1}^t) \quad (2.1)$$

Consumo e poupança na primeira fase de vida:

$$c_t^t + s_t^t \leq \left(1 - \tau_p - \tau_o\right) w_t \quad (2.2)$$

Consumo na segunda fase de vida:

$$c_{t+1}^t \leq (1 + r_t) s_t^t + \tau_p\ w_{t+1}(1 + n) + \psi_t w_t \quad (2.3)$$

$$(c_t^t, c_{t+1}^t) \geq 0 \quad (2.4)$$

Índice inferior “t”: indica o período a que a varável se refere

Índice superior “t”: indica a geração a que a variável se refere

c_t^t: consumo em “t” da geração nascida em “t”

c_{t+1}^t: consumo em “t+1” da geração nascida em “t”

β: taxa de desconto intertemporal da função utilidade

A dinâmica da população obedece à lei de crescimento exponencial:

$$l_t = l_{t-1}(1 + n)$$

l_t: geração jovem, i.e., número de trabalhadores

l_{t-1}: geração precedente, i.e., número de aposentados

n: taxa de crescimento populacional

Portanto, se l_t for o número de trabalhadores em "t", $l_{t-1} = l_t(1+n)^{-1}$ é o número de pensionistas neste mesmo período.

As alíquotas que incidem em folha de pagamento são:

τ_p: alíquota da contribuição previdenciária em folha

τ_o: alíquota de imposto em folha para lastrear as demais despesas do governo

$\tau = \tau_p + \tau_o$: alíquota total

ψ_t: prêmio discricionariamente concedido pelo governo a cada pensionista como proporção do salário que auferia; o déficit do sistema de previdência em "t" é originado por este prêmio e é patrocinado pelo orçamento público no período em que ocorre; em estado estacionário $w_{t+1} = w_t$ e o déficit deste sistema per capita por trabalhador é dado por $\psi_t w_t(1+n)^{-1}$

Firmas

A função de produção das firmas é a Cobb-Douglas utilizada por Barro (1990), que inclui gastos governamentais produtivos como um de seus insumos.

$$y_t = A z_t^{1-\alpha} k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha} \qquad (2.5)$$

$$k_t = (1-\delta)k_{t-1} + i_t$$

$$z_t = x\, y_t \qquad (2.6)$$

y_t: função de produção

A: produtividade total dos fatores

z_t: gastos produtivos do governo

x: gastos produtivos do governo como proporção do produto $x = z_t/y_t$

k_t: capital

l_t: trabalho

δ: taxa de depreciação

i_t: investimento

Seguindo Teles e Mussolini (2014), a taxa de depreciação é $\delta = 1$.

Normalizando o número de trabalhadores para $l_t = 1$, a função de produção se torna:

$$y_t = A^{1/\alpha} x^{(1-\alpha)/\alpha} k_t \quad (2.7)$$

Devido às externalidades dos gastos produtivos do governo, o resultado acima mostra que os retornos de escala são constantes para a economia como um todo, apesar de decrescentes para as firmas.

Gastos produtivos do governo nos modelos de crescimento de acordo com Barro (1990), Glomm e Ravikumar (1997) e Teles e Mussolini (2014) englobam fluxos de gastos ao invés de investimentos em estoque de capital. Uma implicação desta assunção é um aumento na produtividade do capital permanentemente e, portanto, em sua taxa de crescimento. Se por outro lado o governo investisse em capital, isto requereria que o capital público crescesse às mesmas taxas da dívida pública e do capital privado, tornando o estado estacionário mais difícil de ser atingido. E, se investimentos governamentais aumentassem à taxa de acumulação do capital público, a produtividade poderia crescer sem limites juntamente com a produtividade marginal do capital, dadas as características de um modelo AK. Por estas razões z_t no presente modelo também considera gastos em fluxos de serviços públicos que aumentam a produtividade do setor privado.

Governo

O orçamento do governo, já em termos per capita por trabalhador, apresenta no lado esquerdo da equação abaixo a emissão de títulos necessários para financiar o déficit total de um período. No lado direito desta equação, está a necessidade de financiamento que inclui o déficit do sistema previdenciário.

$$d_{t+1} - d_t = r_t d_t + [(g + x)y_t - \tau_o w_t] + \psi_t w_t (1 + n)^{-1} \quad (2.8)$$

d_t: dívida do governo em termos per capita por trabalhador

r_t: taxa de juro

g: gastos do governo como proporção do produto per capita por trabalhador

2.2.2 – Equilíbrio

O equilíbrio competitivo para este problema requer que o vetor $[k_{t+1}, d_{t+1}, y_t, c_t^t, c_{t+1}^t, s_t, w_t, r_t]'$, $t \in \mathbb{N}$, satisfaça:

- Dados w_t e r_{t+1}, (c_t^t, c_{t+1}^t, s_t) que maximizam a utilidade de um indivíduo
- Dados w_t e r_{t+1}, (y_t, k_t) que maximizam o lucro de uma firma representativa
- $s_t = k_{t+1} + d_{t+1}$
- $y_t = c_t^t + c_{t+1}^t + k_{t+1} + g\, y_t + x\, y_t$

Resultando na maximização de utilidade das famílias da equação (2.1) como segue:

$$\max_{s_t^t} U = ln[(1-\tau)w_t - s_t^t] + \beta \ln\left[(1 + r_{t+1})s_t^t + \tau_p w_{t+1}(1+n) + \psi_t w_t\right]$$

O problema de otimização acima resulta na poupança que a geração jovem deve fazer. Esta poupança é dada por:

$$s_t^t = \frac{\beta}{(1+\beta)}\left(1 - \tau_p - \tau_o\right)w_t - \frac{\tau_p(1+n) + \psi_t}{(1+\beta)(1+r_{t+1})} w_t \quad (2.9)$$

A mudança em (2.9) trazida pelo sistema de previdência por repartição ocorre através de dois canais. Não obstante um ser a contrapartida do outro, eles aparecem reduzindo a poupança nesta equação separadamente. O primeiro canal é a redução da renda disponível na juventude provocada pela contribuição previdenciária e pelo financiamento de ψ_t. Se o orçamento público for financiado por impostos, ψ_t incrementa τ_o de forma direta. Alternativamente, no caso do financiamento através de dívida pública, τ_o vai precisar acomodar em algum momento futuro o juro e a amortização originados por ψ_t. O segundo canal vem da necessidade menor de poupar, uma vez que este sistema proporciona rendimentos na velhice – é o termo que aparece subtraído no lado direito de (2.9).

O salário w_t e o juro r_t são derivados da maximização do lucro das firmas em um ambiente perfeitamente competitivo e estas produtividades marginais são dadas por:

$$r_t = \frac{\partial y_t}{\partial k_t} = \alpha A^{1/\alpha} x^{(1-\alpha)/\alpha} \tag{2.10}$$

$$w_t = y_t - k_t \frac{\partial y_t}{\partial k_t} = (1-\alpha) A^{1/\alpha} x^{(1-\alpha)/\alpha} k_t \tag{2.11}$$

2.2.3 – Déficit fiscal e seu financiamento

O déficit público, que agora inclui o resultado da previdência, possui duas formas de ser endereçado: através de impostos, considerando a evolução da dívida uma variável exógena; ou através de emissão de dívida pública, considerando a tributação uma variável exógena. Os estados estacionários gerados através dessas duas formas são obtidos a partir das equações acima nas próximas seções.

2.2.3.1 – Estado estacionário com imposto endógeno e dívida exógena

A abordagem que segue equilibra a situação fiscal considerando a dívida pública com uma dinâmica exógena e o imposto se ajustando para obter os recursos necessários para equilibrar o orçamento. As equações adiante mostram como a capacidade que o governo possui de promover uma política de gastos produtivos fica limitada com uma dívida, com os gastos não produtivos e com um sistema de previdência. E os efeitos na dívida e na formação de capital das políticas públicas de gastos produtivos e previdenciária são mostrados em diagramas de fase.

Usando a equação (2.8) e considerando o aumento da relação dívida-PIB (γ) exógeno:

$$\gamma \equiv \frac{d_{t+1} - d_t}{y_t}$$

A dinâmica da relação dívida-PIB é descrita através da relação que segue:

$$\gamma y_t = r_t d_t + [(g + x)y_t - \tau_o\, w_t] + \psi_t w_t (1 + n)^{-1}$$

A alíquota de imposto que equilibra a equação acima é dada por:

$$\tau_o = \frac{-\gamma y_t + r_t d_t + (g + x) y_t}{w_t} + \psi_t (1 + n)^{-1} \qquad (2.12)$$

Sejam:

$\eta \equiv (1 + n)^{-1}$: taxa de dependência, que representa a proporção de trabalhadores por pensionistas; η^{-1} também é denominado razão de suporte

$\rho \equiv \tau_p(1 + n) + \psi_t$: taxa de reposição, que expressa a razão entre vencimentos de um aposentado e seu salário quando trabalhava

E a partir da definição da taxa de reposição, pode-se reescrever o déficit previdenciário per capita por trabalhador como sendo: $\psi_t w_t (1+n)^{-1} = w_t(\rho\eta - \tau_p)$.

A alíquota de imposto τ_o endogenamente determinada para satisfazer a restrição orçamentária é obtida como segue:

Substituindo y_t, r_t e w_t de (2.7), (2.10) em (2.12):

$$\tau_o = \frac{(g+x-\gamma)+\alpha\frac{d_t}{k_t}}{(1-\alpha)} + (\rho\eta - \tau_p) \quad (2.12a)$$

A inclusão de um sistema de repartição adiciona o déficit previdenciário $(\rho\,\eta - \tau_p)$ à alíquota de imposto que equilibra o orçamento público. Este termo representa a política social em que o governo discricionariamente acrescenta um prêmio ao pagamento dos pensionistas.

A poupança se divide em investimento em capital e compra de títulos de dívida $s_t = k_{t+1} - k_t(1-\delta) + d_{t+1}$ e, considerando $\delta = 1$, obtém-se a relação que segue para a variação no estoque de capital:

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = -1 + \frac{s_t}{k_t} - \frac{d_{t+1}}{k_t} \quad (2.13)$$

Substituindo (2.7), (2.9) e (2.11) em (2.13) e usando a definição de taxa de reposição:

$$s_t^t = \left[\frac{\beta}{(1+\beta)}(1-\tau) - \frac{\rho}{(1+\beta)(1+r_{t+1})}\right](1-\alpha)\; A^{1/\alpha}\; x^{(1-\alpha)/\alpha}\; k_t \quad (2.9a)$$

Expressando o déficit previdenciário com a taxa de reposição, a restrição orçamentária do governo pode ser escrita como:

$$d_{t+1} = d_t(1+r_t) + (g+x)y_t - (\tau_o + \tau_p - \rho\eta)w_t \quad (2.8a)$$

Substituindo (2.9a) e (2.8a) em (2.13) a formação do estoque de capital é dada por:

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = -1 + \left[\frac{\beta}{(1+\beta)}\left(1-\tau_o-\tau_p\right) - \frac{\rho}{(1+\beta)(1+r_{t+1})}\right](1-\alpha)\ A^{1/\alpha}\ x^{(1-\alpha)/\alpha} - \frac{d_t}{k_t}(1+r_t) - (g+x)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} + (\tau_o+\tau_p-\rho\,\eta)\ (1-\alpha)\ A^{1/\alpha}\ x^{(1-\alpha)/\alpha} \qquad (2.14)$$

E usando τ_o de (2.12a), chega-se ao resultado abaixo.

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = \frac{\beta}{(1+\beta)}[(\gamma-g-x)+(1-\alpha)]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} -$$

$$-\frac{\beta}{(1+\beta)}\left(\rho\eta+\frac{\rho}{\beta(1+r_{t+1})}\right)(1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} -$$

$$-\gamma A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha-1} - \left[1+\frac{\beta}{(1+\beta)}\alpha A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\right]\left(\frac{d_t}{k_t}\right) - 1 \qquad (2.15)$$

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = FunçãoLinear\left(\frac{d_t}{k_t}\right) \qquad (2.15a)$$

Quando o equilíbrio fiscal é obtido com dívida exógena e imposto endógeno, a equação (2.15) mostra como ocorre a variação no estoque de capital através dos quatro termos no seu lado direito. O aspecto benéfico da política de gastos produtivos do governo pode ser observado, mas também é possível notar um efeito ambíguo. Quando x aumenta, o produto e as remunerações dos fatores de produção aumentam beneficiando a sociedade, mas todos os termos expressos como proporção destas variáveis também aumentam. Isto ocorre porque, em uma economia que cresce, as despesas, a dívida e o peso de uma previdência também crescem.

Os termos desta equação são analisados individualmente a seguir, apenas o segundo é adicionado pela previdência, os demais já estão presentes no modelo original.

- O primeiro termo mostra que o gasto produtivo do governo aumenta a formação de capital elevando a produtividade do trabalho. Por outro lado, este tipo de gasto contribui negativamente pois requer um aumento de imposto para manter o déficit estável.

- O segundo termo se refere à previdência e mostra a maior produtividade do trabalho obtida com x contribuindo negativamente na formação de capital por meio de dois canais: transferência entre gerações, que se transforma em consumo não transitando pelo investimento, e menor necessidade de poupar. Reescrevendo este termo como:

$$-\frac{\beta}{(1+\beta)}\left[\tau_p + \left(\rho\eta - \tau_p\right) + \frac{\rho}{\beta(1+r_{t+1})}\right](1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}$$

  é possível identificar a contribuição previdenciária (τ_p) e o déficit deste sistema ($\rho\eta - \tau_p$), ambos incidirem no salário. O termo restante $\left(\frac{\rho}{\beta(1+r_{t+1})}\right)$ se refere à menor necessidade de poupar.

- O terceiro termo evidencia como x impacta a formação de capital através da dinâmica da dívida. Uma dívida que evolui de forma estável (cresce de forma estável ou é amortizada de forma estável) apresenta γ constante e uma dívida constante apresenta $\gamma = 0$. Em contraste com a primeira linha, em que o efeito da expansão da dívida (γ) é ajudar a financiar os gastos do governo, esta linha mostra o efeito de competição pela poupança deixando menos espaço para a formação de capital. Este termo também aumenta com x.
- O quarto termo traz o papel negativo do estoque de dívida *per se* que está sendo rolado entre períodos e o respectivo juro. Enquanto no item anterior a expansão da dívida compromete a formação de capital, este item mostra seu volume e seu serviço disputando a poupança. E este termo também cresce quando x aumenta.

Comparando o resultado obtido em (2.15) com os outros modelos citados, Barro (1990) e Glomm e Ravikumar (1997) contemplam apenas o primeiro termo desta equação. Os modelos de crescimento endógeno com dívida de Saint-Paul (1992) e Bräuninger (2005) já incluem o terceiro termo, que mostra o crescimento da dívida reduzindo a formação de capital. Adam e Bevan (2005) e Teles e Mussolini (2014) passam a considerar o quarto termo em que o volume total da dívida aparece com uma contribuição negativa.

Teles e Mussolini frisam a semelhança deste último termo com um sistema de previdência por repartição e ressaltam o papel negativo tanto do volume de dívida como do déficit orçamentário. Os gastos produtivos do governo conseguem promover crescimento apenas quando esta parcela de gastos e a relação dívida-PIB não forem elevados. Os resultados econométricos por eles obtidos utilizando estas variáveis de controle conseguem explicar por que alguns estudos anteriores não eram conclusivos.

A introdução do sistema de previdência por repartição deste ensaio confirma que o volume de recursos transferidos entre gerações também reduz a poupança e o crescimento de capital. Estes recursos se transformam em consumo da geração mais velha não participando mais da decisão entre consumir ou poupar da geração mais nova. Adicionalmente, existe o termo referente à necessidade menor de poupar que reduz ainda mais a formação de capital. Todos estes aspectos contribuem para dificultar a efetividade dos gastos produtivos do governo.

A inclusão de variáveis de um sistema por repartição neste modelo permite algumas inferências adicionais. Na ausência de um sistema deste tipo, a única forma de simular sua existência em um modelo de crescimento é aumentando uma dívida pública – dada a equivalência entre os dois. Uma alteração de alíquota de previdência, por exemplo, só pode ser simulada alterando o volume de uma dívida. Este tipo de simulação não é possível se, por hipótese, a dívida possui uma dinâmica exógena. É esperado que a formação de capital seja impactada, mas não é possível estimar esta magnitude. Ao incluir um sistema de repartição, o presente modelo permite avaliar isoladamente a presença ou a alteração de um sistema previdenciário sobre a formação de capital apenas.

Em relação à dívida, seu crescimento é exógeno e dado por γ, portanto:

$$\gamma \equiv \frac{d_{t+1}-d_t}{y_t}$$

$$\frac{d_{t+1}-d_t}{d_t} = \frac{d_{t+1}-d_t}{d_t}\frac{y_t}{y_t} = \frac{\gamma y_t}{d_t} = \gamma A^{1/\alpha}\ x^{(1-\alpha)/\alpha}\ \frac{k_t}{d_t} \tag{2.16}$$

$$\frac{d_{t+1}-d_t}{d_t} = Hip\acute{e}rbole\left(\frac{d_t}{k_t}\right) \tag{2.16a}$$

Os gastos produtivos do governo aumentam o produto e pioram a dívida dada por (2.16). Isto ocorre porque a dívida depende da proporção dívida-produto γ, que cresce exogenamente, e do produto, que cresce com x.

O estado estacionário é obtido com a imposição de $\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = \frac{d_{t+1}-d_t}{d_t}$ das equações (2.15) e (2.16) que leva a:

$$\frac{\beta}{(1+\beta)}\left\{(\gamma - g - x) + (1-\alpha)\left[1-\rho\left(\eta + \frac{1}{\beta(1+r_{t+1})}\right)\right]\right\}A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} - \gamma A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha-1} - \left[1+\frac{\beta}{(1+\beta)}\alpha A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\right]\left(\frac{d_t}{k_t}\right) - 1 = \gamma A^{1/\alpha}\, x^{(1-\alpha)/\alpha}\frac{k_t}{d_t}$$

Sejam:

$$J \equiv 1 + \frac{\beta}{(1+\beta)}\alpha A^{1/\alpha}\, x^{(1-\alpha)/\alpha}$$

$$W \equiv \frac{\beta}{(1+\beta)}\left\{(\gamma - g - x) + (1-\alpha)\left[1-\rho\left(\eta + \frac{1}{\beta(1+r_{t+1})}\right)\right]\right\} - \gamma$$

$$J\left(\frac{d_t}{k_t}\right)^2 - \left(WA^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} - 1\right)\left(\frac{d_t}{k_t}\right) + \gamma A^{1/\alpha}\, x^{(1-\alpha)/\alpha} = 0$$

Seja:

$$H \equiv \left[\frac{WA^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} - 1}{J}\right]^2 - 4\gamma\frac{A^{1/\alpha}\, x^{(1-\alpha)/\alpha}}{J}$$

As relações dívida-capital nos estados estacionários são dadas por:

$$\left(\frac{d_t}{k_t}\right) = \frac{WA^{1/\alpha}\, x^{(1-\alpha)/\alpha} - 1 \pm J\sqrt{H}}{2J} \qquad (2.17)$$

Um diagrama de fase com (2.15) e (2.16) permite uma melhor visualização do estado estacionário e pode mostrar em que intervalo a relação dívida-capital é sustentável, em que ponto o capital consegue crescer mais e onde a dívida pública se torna explosiva.

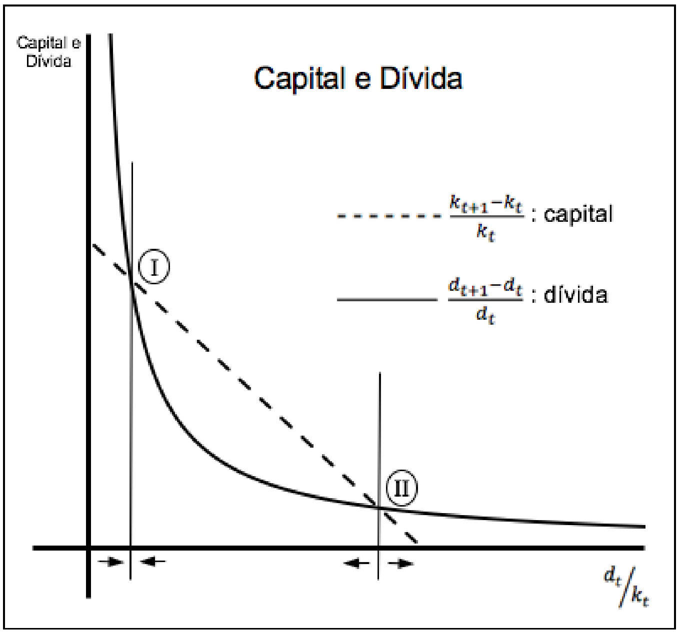

Gráfico 2.1 – Diagrama de fase das dinâmicas da formação de capital e da dívida

Se as duas curvas se cruzarem (2 raízes reais positivas) ou pelo menos se tangenciarem (1 raiz real positiva) haverá estado estacionário e $\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = \frac{d_{t+1}-d_t}{d_t}$ ocorre. No caso de duas raízes reais, o ponto "I" do gráfico é preferível ao ponto "II", pois apresenta menor relação dívida-capital. Adicionalmente "I" apresenta estabilidade e "II", não. O intercepto da reta que representa a acumulação de capital contém o termo relativo à previdência que reduz seu valor tornando a interseção menos provável.

Se os gastos com previdência subirem, a curva da dívida não é afetada pois γ é exógeno e apenas a curva de capital se altera.

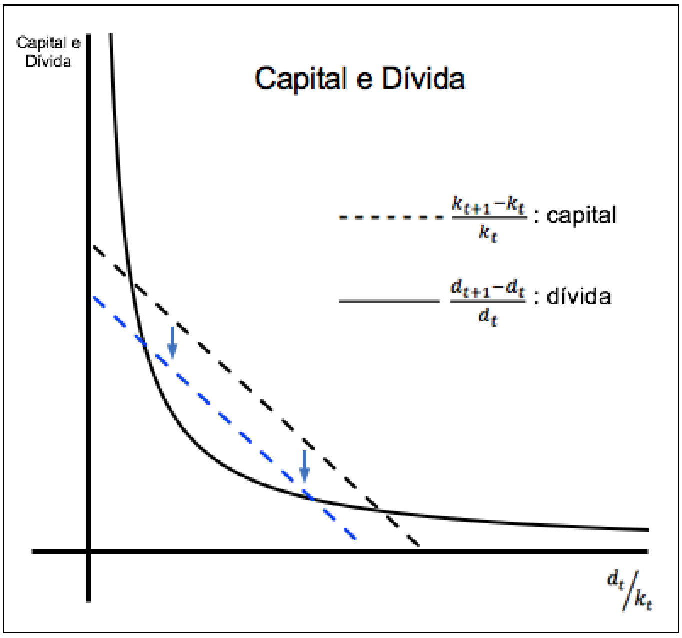

Gráfico 2.2 – Aumento de τ_p e de ψ_t com imposto endógeno

O gráfico 2.2 mostra o efeito de um aumento da previdenciária no estado estacionário. A formação de capital tem seu intercepto deslocado para baixo, o equilíbrio estável passa a ter uma relação dívida-capital maior e o ponto em que a dívida se torna explosiva é alcançado com uma relação dívida-capital menor. Este tipo de resultado é o mesmo encontrado para aumento dos gastos não produtivos do governo.

Se os gastos não produtivos do governo e os gastos com previdência estiverem em patamares relativamente baixos, aumentos nos gastos produtivos promovem o resultado que segue.

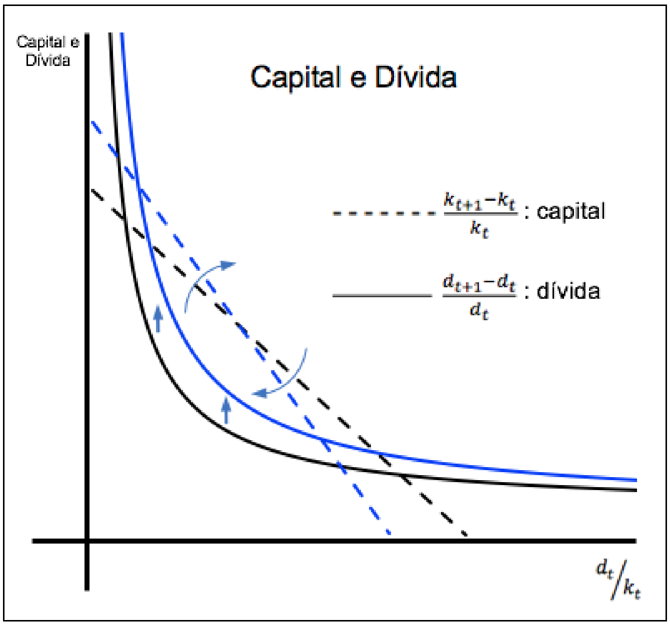

Gráfico 2.3 – Aumento do gasto produtivo do governo com imposto endógeno

Um aumento nos gastos produtivos do governo eleva a hipérbole da dívida, pois aumenta o coeficiente de $(d_t/k_t)^{-1}$. Aumenta o intercepto da reta de capital e torna sua inclinação negativa mais acentuada. A presença da previdência não altera o tipo de movimento que ocorre com as duas curvas quando x aumenta *coeteris paribus*, mas a redução do intercepto mostrada no gráfico 2.2 está presente deixando menos espaço para esta política. Se o déficit e a dívida estiverem abaixo de certos níveis, os ganhos com o aumento de produtividade superam os custos fiscais e este tipo de política pode ser bastante efetivo.

2.2.3.2 – Estado estacionário com dívida endógena e imposto exógeno

Se o governo optar em manter o imposto constante e ajustar o orçamento por meio de variação de dívida pública, esta abordagem fiscal possui as equação obtidas a seguir. De forma semelhante à do equilíbrio via imposto, a solução que segue também mostra como a política de gastos produtivos fica limitada com os gastos não produtivos, a dívida e a previdência. E diagramas de fase também

mostram os efeitos na dívida e na formação de capital das políticas públicas de gastos produtivos e previdenciária.

Quando o imposto (τ_o) é exógeno e o equilíbrio fiscal é obtido por variação na dívida, usando as equações (2.8) a (2.11), a acumulação de capital passa a ser:

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = \frac{\beta}{(1+\beta)}(1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}(1-\tau_o) -$$

$$-[(g+x)-\tau_o(1-\alpha)]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} -$$

$$-\left[\frac{\beta}{(1+\beta)}\left(\tau_p + \frac{\rho}{\beta(1+r_{t+1})}\right) + \left(\rho\eta - \tau_p\right)\right](1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} -$$

$$-\left(1+\alpha A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\right)\left(\frac{d_t}{k_t}\right) - 1 \qquad (2.18)$$

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = FunçãoLinear\left(\frac{d_t}{k_t}\right) \qquad (2.18a)$$

A equação (2.18) mostra como se dá a variação do estoque de capital quando o resultado fiscal é equilibrado com imposto exógeno e dívida endógena. Apenas o terceiro termo é acrescentado pela previdência. Analisando esta equação pode-se constatar como a política de gastos públicos produtivos é limitada pela dívida e pela previdência. As interpretações são similares às da equação (2.15), inclusive a do aspecto ambíguo de x.

- O primeiro termo mostra que um aumento em x eleva a produtividade, aumenta os salários e a poupança. Entretanto, este efeito decresce com a magnitude da carga tributária τ_o, pois a poupança depende da renda disponível.
- Na segunda linha pode-se observar o resultado fiscal, que possui despesas que são uma proporção do produto e receitas que são uma proporção dos salários. Este resultado aumenta com x refletindo que uma economia maior apresenta maiores despesas e receitas. Este termo permanece constante, pois novas políticas deste governo são abrigadas na equação de dívida apresentada a seguir. Na persente abordagem, é a dívida que equilibra o orçamento público.

- A terceira parcela desta expressão traz o impacto negativo da previdência por meio dos dois canais já apresentados em (2.15). Notar que o sistema de previdência no sentido estrito – i.e., a parte que apenas transfere recursos entre gerações – não é deficitário, o prêmio discricionário que é deliberadamente dado pelo governo é que gera o déficit. Portanto, mudanças na contribuição previdenciária afetam apenas a transferência entre gerações sem mudar o déficit e impactam a formação de capital através da equação acima. Novas políticas deste governo, que ocorrem por meio dos valores discricionariamente dados a pensionistas, não entram neste termo, mas na equação de dívida que é apresentada a seguir. O resultado deste sistema $(\rho\eta - \tau_p)$ permanece estável nesta equação. Todos estes termos são uma proporção dos salários que aumentam com x.
- A última linha traz o tamanho da dívida propriamente dita e o respectivo juro, que disputam alocação da poupança reduzindo a formação de capital. Como x aumenta a produtividade dos fatores, o juro também cresce com este tipo de gasto reduzindo a formação de capital.

A dinâmica da dívida agora é endógena e o déficit orçamentário total passa a ser financiado pela emissão de títulos. Substituindo (2.7), (2.10) e (2.11) em (2.8), a dinâmica de crescimento da dívida pode ser escrita como:

$$\frac{d_{t+1}-d_t}{d_t} = \alpha\, A^{1/\alpha} x^{(1-\alpha)/\alpha} + [(g+x) - \tau_o(1-\alpha) + \psi_t \eta(1-\alpha)] A^{1/\alpha} x^{(1-\alpha)/\alpha} \left(\frac{k_t}{d_t}\right) \quad (2.19)$$

$$\frac{d_{t+1}-d_t}{d_t} = Cte + Hipérbole\left(\frac{d_t}{k_t}\right) \quad (2.19a)$$

Aumentos nos gastos produtivos do governo impactam a dívida negativamente através do aumento do juro sobre o volume da dívida, isto pode ser visto no primeiro termo de (2.19). O segundo termo de (2.19), que é uma hipérbole em (d_t/k_t), apresenta as seguintes componentes. Um efeito negativo através do déficit orçamentário, ainda excluindo a previdência. Este déficit, que é uma proporção do produto, cresce com x, refletindo maiores necessidades de despesas e receitas quando o PIB aumenta. E por último o déficit da previdência, que também

está presente no coeficiente de $(d_t/k_t)^{-1}$. Ele é negativamente impactado por x, pois é uma proporção dos salários que crescem com esta variável.

O estado estacionário é dado com a imposição de $\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = \frac{d_{t+1}-d_t}{d_t}$ de (2.18) e (2.19) levando a:

$$\frac{\beta}{(1+\beta)}(1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\left[\left(1-\tau_o-\tau_p\right)-\frac{\rho}{\beta(1+r_{t+1})}\right]-[(g+x)+\psi_t\eta(1-\alpha)-\tau_o(1-\alpha)]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-\left(1+\alpha A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\right)\frac{d_t}{k_t}-1=\alpha\, A^{1/\alpha}\, x^{(1-\alpha)/\alpha}+[(g+x)-(\tau_o-\psi_t\eta)(1-\alpha)]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\left(\frac{k_t}{d_t}\right)$$

Sejam:

$$W' \equiv \frac{\beta}{(1+\beta)}(1-\alpha)\left[\left(1-\tau_o-\tau_p\right)-\frac{\rho}{\beta(1+r_{t+1})}\right]-\alpha-[(g+x)+\psi_t\eta(1-\alpha)-\tau_o(1-\alpha)]$$

$$J' \equiv 1+\alpha A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}$$

$$J'\left(\frac{d_t}{k_t}\right)^2-\left(W'A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-1\right)\left(\frac{d_t}{k_t}\right)+[(g+x)-(\tau_o-\psi_t\eta)\,(1-\alpha)]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}=0$$

Seja:

$$H' \equiv \left[\frac{W'A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-1}{J'}\right]^2-4\left[(g+x)-(\tau_o-\psi_t\eta)\,(1-\alpha)\right]\frac{A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}}{J'}$$

Os estados estacionários são dados por:

$$\left(\frac{d_t}{k_t}\right)=\frac{W'A^{1/\alpha}\,x^{(1-\alpha)/\alpha}-1\pm J'\sqrt{H'}}{2J'} \qquad (2.20)$$

O diagrama de fase neste caso também é dado pelo o gráfico 2.1. Entretanto, incrementos nas política previdenciária e de gastos produtivos implicam diferentes deslocamentos nas curvas de capital e dívida que são apresentados a seguir.

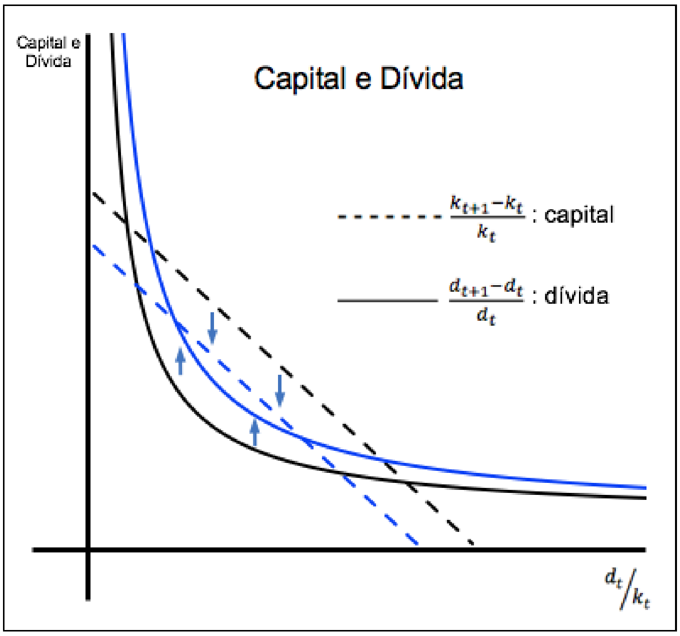

Gráfico 2.4 – Aumento de τ_p e de ψ_t com dívida endógena

O sistema de previdência continua reduzindo o intercepto da curva de capital ao comprometer a poupança por meio de τ_p e ψ_t, tornando o equilíbrio menos provável. Adicionalmente, a hipérbole da dinâmica da dívida inclui agora o déficit previdenciário ψ_t, que atua deslocando esta curva para cima com o aumento do coeficiente de $(d_t/k_t)^{-1}$. Quando τ_p e ψ_t aumentam simultaneamente, o efeito nas duas curvas é similar ao do aumento dos gastos não produtivos do governo do gráfico 2.2. Se ψ_t não mudar, a hipérbole não se desloca para cima. Não obstante τ_p não impactar a curva da dívida, incrementos em qualquer variável de política previdenciária tornam os estados estacionários ainda menos prováveis e, quando ocorrem, o equilíbrio estável possui uma relação dívida-capital maior e a dívida se torna explosiva com uma relação dívida-capital menor.

De forma semelhante ao que aconteceu na seção anterior (dívida exógena e imposto endógeno), uma mudança na alíquota previdenciária não pode ser simulada por meio de dívida e a única forma de observar o impacto de $\Delta\tau_p$ é através da curva de formação de capital. O diagrama de fase acima mostra este efeito através desta curva apresentando intercepto menor.

A efetividade de aumentos nos gastos produtivos do governo já não pode mais ser assegurada. Ela depende dos parâmetros da economia, principalmente da evolução da dívida, como mostra o diagrama de fase que segue.

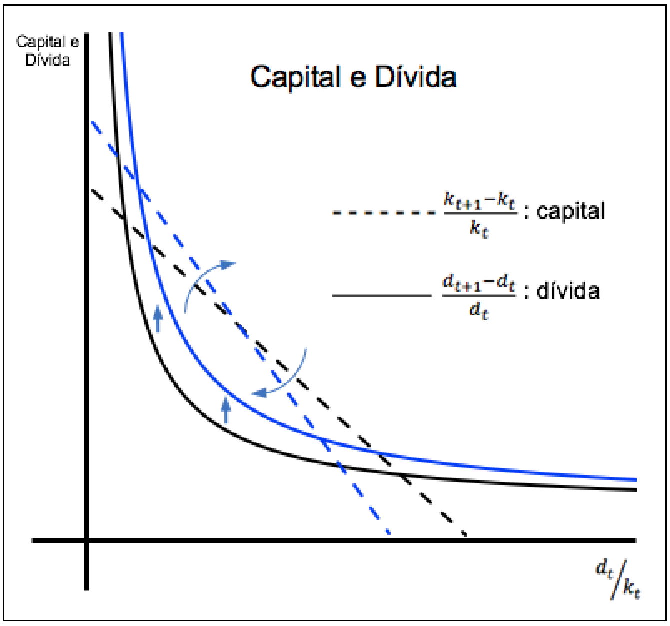

Gráfico 2.5 – Aumento do gasto produtivo do governo com dívida endógena

Coeteris paribus, um aumento em x melhora a curva de capital elevando seu intercepto e tornando sua inclinação negativa mais acentuada. Quando o financiamento de déficit é por dívida, um aumento em x desloca a respectiva curva pra cima com o aumento seu termo independente e do coeficiente de $(d_t/k_t)^{-1}$. A melhora ou piora do estado estacionário depende de como a dívida se comportar. Se o déficit e a dívida estiverem abaixo de certos níveis, os ganhos com o aumento de produtividade superam os custos fiscais e esta política pode ser bastante efetiva. Notar que a presença da previdência traz embutidos os efeitos mostrados no gráfico 2.4, ainda que constantes na presente análise, tornando a efetividade de x menos provável.

2.3 – Conclusão

O modelo desenvolvido neste ensaio é uma extensão de Teles e Mussolini (2014) que adiciona um sistema de previdência por repartição. Todas as conclusões originais se mantêm, mas agora e os efeitos precisos de um sistema de previdência por repartição são acrescentados às conclusões do modelo. Em oposição às conclusões de Saint-Paul (1992) e Bräuninger (2005), aumentos na relação dívida-PIB podem, em certas circunstâncias, permitir um aumento no crescimento econômico. O modelo permite verificar quando estas circunstâncias ocorrem e quando aumentos na dívida deixam de ser Pareto eficientes. O efeito da expansão dos gastos produtivos do governo em educação, saúde, comunicação, transporte e energia podem gerar um efeito positivo no crescimento, desde que o déficit público e o estoque de dívida do governo não sejam elevados. Um aumento dos gastos produtivos do governo também eleva a produtividade dos fatores de produção gerando um efeito, em certa medida, contraproducente ao reduzir a formação de capital e o crescimento. Isto ocorre através do juro que incide sobre a dívida e através a cobrança de imposto que incide sobre o salário.

Os resultados obtidos com a inclusão de previdência por repartição mostram a redução da poupança, menor formação de capital e, portanto, um comprometimento no crescimento através de três canais. (i) Redução na renda disponível com a contribuição previdenciária. (ii) Novamente uma redução a poupança através de uma necessidade menor de poupar, dado que a previdência assegura rendimentos na velhice. Embora estes dois primeiros canais sejam um a contrapartida do outro, eles aparecem de forma independente na equação da poupança. (iii) Maior necessidade de financiar o déficit público no caso de o governo decidir discricionariamente dar um prêmio aos aposentados, pois este valor transita pelo orçamento. Dependendo de como este déficit é financiado, ele aumenta imposto ou dívida. As duas formas reduzem a poupança.

O papel ambíguo dos gastos produtivos do governo também está presente nos canais mencionados. E a efetividade dos gastos produtivos depende do déficit público, da dívida do governo e agora também da previdência permanecerem abaixo de certos patamares.

A presença de um sistema previdenciário por repartição torna o cruzamento das curvas de capital e dívida dos diagramas de fase apresentados menos provável dificultando a ocorrência de estado estacionário para a relação dívida-capital. Quando o estado estacionário ocorre, a relação dívida-capital na situação de estabilidade é maior e a dívida se torna explosiva com uma relação dívida-capital menor.

Este ensaio também torna defensável acrescentar parâmetros da previdência como variáveis de controle na análise de dados em painel de crescimento com gastos produtivos do governo e dívida pública.

Por último, este modelo também sugere a seguinte inferência. O envelhecimento da população tem feito muitos governos aumentarem os proventos previdenciários com valores patrocinados por seus orçamentos fiscais. Estes orçamentos conseguem cada vez menos comportar gastos considerados produtivos de forma que a longevidade está aos poucos eliminando o espaço que ainda existe para uma política fiscal profícua.

3 – Educação, Previdência e Crescimento Endógeno

3.1 – Introdução

O modelo de crescimento econômico desenvolvido neste capítulo é um OLG em que a produtividade do trabalho depende da educação, a educação é parcialmente subsidiada pelo Estado e existe um sistema de previdência por repartição. Baseado em Bräuninger e Vidal (2000) "*Private versus public financing of education and endogenous growth*", adiciona previdência ao conjunto das variáveis endógenas e também altera a incidência do imposto que lastreia a educação. O modelo determina as condições para haver crescimento e mostra os efeitos das políticas educacional e previdenciária no estado estacionário. Os efeitos redistributivos positivos destas duas políticas públicas em conjunto com seus custos determinam as condições para haver sucesso e ambas são agora vistas sempre em conjunto. É ainda possível identificar condições restritas para o caráter redistributivo da previdência aumentar o nível da educação e do crescimento. Apesar deste aspecto positivo muito limitado, de um modo geral a previdência possui uma contribuição negativa no crescimento, limita o alcance da política educacional e o subsídio à educação puro é mais eficiente.

O artigo original examina a interação entre política educacional e crescimento econômico mostrando que o resultado de um incremento desta política é sempre positivo. Por outro lado, gastos com educação produzem o efeito de *crowding out* na formação de capital reduzindo o aprendizado pela experiência (*learning by doing*). O artigo conclui que educação pública pura maximiza o crescimento de longo prazo e que o subsídio parcial à educação pode resultar em menor taxa de crescimento quando comparado à educação privada pura.

A preocupação dos autores com a interação entre política educacional, desigualdade e crescimento vem de três observações empíricas: (i) educação é um dos principais motores do crescimento; (ii) educação é uma fonte de desigualdade de renda que parece guardar correlação serial entre gerações; (iii) e o fato estilizado de sociedades mais igualitárias crescerem mais que sociedades desiguais.

A sustentação da educação ocorre através de três pilares, o mercado, a família e o Estado. Quando o mercado falha na provisão de empréstimos, a família e o Estado se tornam cruciais. E como crianças não podem firmar contratos, o altruísmo dos pais passa a ser fundamental. O papel da família é essencial e pode implicar uma continuidade nas diferenças sociais, pois quando pais estudam mais e auferem uma renda maior tendem a prover mais educação a sua prole. Neste contexto, o papel do Estado subsidiando a educação parcialmente ou em sua integralidade proporciona tanto equidade quanto eficiência à sociedade.

Em contraste com artigos anteriores, este combina aprendizado pela experiência com educação formal em escolas. Enquanto o aprendizado pela experiência é determinante do crescimento de longo prazo, a educação em escolas define o nível médio de produtividade e como o conhecimento acadêmico é distribuído ao longo das gerações. Esta distribuição constitui a fonte de inequidade do modelo e é um fator determinante da acumulação de capital humano quando não existe financiamento à educação. Todos os jovens têm acesso a um nível básico de estudo, mas um nível mais avançado é alcançado apenas quando seus pais são altruístas. Neste caso há um subsídio parcial do Estado que independe da renda familiar.

O subsídio governamental à educação eleva a proporção de indivíduos com maior renda, aumentando a poupança, a formação de capital e o aprendizado pela experiência. Mas os gastos adicionais das famílias para complementar os custos com a educação quando o subsídio é parcial provocam *crowding out* na formação de capital. Este efeito contrário faz a política educacional não ser monotônica: um subsídio pequeno pode diminuir o crescimento enquanto um subsídio maior pode aumentar. Outro resultado interessante observado pelos autores é que uma economia com todos os indivíduos iguais com baixa escolaridade cresce mais que uma economia com algum nível de desigualdade educacional.

Baseado no artigo acima, o modelo proposto neste capítulo inclui um sistema de previdência por repartição que contempla a longevidade da população e altera a incidência do imposto da educação para o salário – originalmente a educação é lastreada por um imposto sobre o juro. A formação de capital diminui, dado que a contribuição previdenciária se transforma em consumo de aposentados sem transitar

pela poupança e pelo investimento e reduz a necessidade de poupar. O imposto da educação contribui no mesmo sentido ao reduzir a renda disponível.

Neste modelo, os efeitos redistributivos positivos das políticas educacional e previdenciária e seus custos determinam conjuntamente as condições para haver sucesso destas duas políticas. A efetividade no artigo original foca na taxa de crescimento econômico, mas um aumento de escolaridade pode também promover uma elevação no nível do produto e este resultado, que pode interessar a países de renda baixa ou média, também é apresentado. É possível ainda identificar condições para o efeito redistributivo da previdência aumentar o nível educacional. Isto é possível porque, na presença dos rendimentos da aposentadoria, a necessidade de poupar é menor. Para os trabalhadores que ganham menos esta política pode criar as condições que possibilitam a educação de seus filhos.

3.2 – Modelo

Existem dois tipos de indivíduos que diferem no que diz respeito ao nível de escolaridade e três períodos na vida de uma pessoa. No primeiro ela apenas estuda podendo adquirir educação básica ou mais avançada e isto depende de uma decisão de seus pais. No segundo ela trabalha, seu salário depende de sua educação, recolhe imposto e contribuição previdenciária, consome, poupa e decide pagar ou não a educação de sua prole. No último ela não trabalha, utiliza os recursos que poupou e a renda proporcionada pelo sistema previdenciário. Independentemente do nível de renda dos indivíduos, caso decidam proporcionar maior educação aos filhos, pagam por ela, mas recebem um subsídio do governo em um valor fixo que cobre parcialmente este gasto. Esta decisão depende da importância atribuída à educação de seus descendentes, de sua renda, e do subsídio à educação. Os pais são heterogêneos em relação ao nível de altruísmo que muda ao longo das gerações sem a presença de correlação serial. A tributação que fornece recursos à educação incide sobre o salário dos trabalhadores juntamente com a contribuição previdenciária, enquanto no artigo original ela incide sobre o juro auferido pelos aposentados.

Se a educação for dada aos filhos, estes terão um salário maior, fruto da produtividade maior de um trabalho mais qualificado. Por outro lado, esta decisão diminui o consumo e a poupança dos pais. Educar a geração seguinte impacta proporcionalmente mais os pais com nível educacional menor. A função utilidade dos indivíduos possui um termo para contemplar o grau de altruísmo através da utilidade da renda que os filhos vão auferir. Pais com menor escolaridade precisam de um grau de altruísmo maior para educar sua prole.

Os pagamentos que o sistema previdenciário proporciona provêm da geração que trabalha por meio de uma contribuição em folha de pagamento com alíquota única não importando o salário. Os valores pagos a todos aposentados são iguais em valor e este sistema não é deficitário. A razão de suporte da previdência, que expressa a longevidade da população através da proporção de trabalhadores por aposentados, está presente neste modelo para avaliar o efeito do envelhecimento da população. Este fator decresce se a população vive mais tornando menores os rendimentos da previdência.

3.2.1 – Firmas

A função de produção que utiliza trabalhadores com maior e menor escolaridade é dada por:

$Y_t = AK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}$: função de produção do tipo Cobb-Douglas, $0 < \alpha < 1$, $A > 0$ e produto homogêneo

$\Pi_t = AK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha} - r_t K_t - w_t^u B_t L_t^u - w_t^s B_t \varepsilon L_t^s$: lucro das firmas

$L_t = B_t(\varepsilon L_t^s + L_t^u)$: unidades efetivas de trabalho

$L_t^s = \pi_t N$: número de trabalhadores qualificados em “t”

$L_t^u = (1 - \pi_t)N$: número de trabalhadores não qualificados em “t”

$B_t = \frac{K_t}{N}$: conhecimento acumulado

K_t: capital utilizado pelas firmas

N: número de trabalhadores em uma população que não cresce

π_t: proporção de trabalhadores com escolaridade maior

$(1-\pi_t)$: proporção de trabalhadores com escolaridade menor

B_t: conhecimento acumulado – seguindo Arrow (1962), Romer (1986) e Lucas (1988), corresponde ao total de capital físico per capita que é a fonte do crescimento endógeno

ε: razão entre a produtividade do trabalhador com maior escolaridade e a do trabalhador com menor escolaridade ($\varepsilon > 1$)

w_t^u: salário do trabalhador com escolaridade menor

w_t^s: salário do trabalhador com escolaridade maior

O conceito de conhecimento acumulado ou aprendizado pela experiência surge em modelos da década de 1960 após o artigo de Arrow (1962). Neste modelo a produtividade de uma firma é uma função crescente do investimento agregado em uma indústria. Evitando as questões de especialização e divisão de trabalho, Arrow argumenta que retornos surgem com o conhecimento descoberto quando investimento e produção acontecem. Os retornos são externos a firmas individuais porque este tipo de conhecimento se torna público. Romer (1986) e Lucas (1998) também adotam esta abordagem e segundo Romer este tipo de aprendizado é fonte do crescimento endógeno. No modelo AK deste ensaio, o papel que $B_t = K_t/N$ desempenha em $L_t = B_t(\varepsilon L_t^s + L_t^u)$ trazendo o aprendizado pela experiência para a função de produção está ancorado neste conceito.

Usando a expressão do conhecimento acumulado, as unidades efetivas de trabalho podem ser expressas como $L_t = K_t(1 - \pi_t + \varepsilon\pi_t)$ e, substituindo este resultado na função de produção, esta se torna:

$$Y_t = AK_t(1 - \pi_t + \varepsilon\pi_t)^{1-\alpha} \tag{3.1}$$

As firmas maximizam lucro em concorrência perfeita e as produtividades marginais dos fatores de produção são dadas por:

$$w_t^s \equiv \frac{\partial Y_t}{\partial L_t^s} = (1-\alpha)A\frac{K_t}{N}(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)^{-\alpha}\varepsilon \tag{3.2}$$

$$w_t^u \equiv \frac{\partial Y_t}{\partial L_t^u} = (1-\alpha)A\frac{K_t}{N}(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)^{-\alpha} \tag{3.3}$$

$$r_t \equiv \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \alpha A(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)^{1-\alpha} \tag{3.4}$$

3.2.2 – Indivíduos

O modelo considera três períodos na vida de um indivíduo:

- Primeiro período (“t-1”): o indivíduo é jovem e ainda não trabalha; estuda pouco se seus pais não forem altruístas; continua seus estudos por mais tempo se seus pais forem altruístas.
- Segundo período (“t”): o indivíduo trabalha; seu salário é maior se ele estudou mais; decide prover mais ou menos educação a seus filhos, dependendo de seu grau de altruísmo; recolhe imposto, contribuição previdenciária e também decide sobre consumo e poupança.
- Terceiro e no último período (“t+1”): o indivíduo está aposentado e consome os recursos de sua poupança juntamente com os rendimentos da previdência.

Em cada período “t” nascem N pessoas, o que mantém a população em um patamar estável, π_t adquirem o nível de escolaridade maior e $(1-\pi_t)$ permanecem com o nível de escolaridade menor.

<u>Função utilidade</u>

$$U^i(c_t, d_{t+1}, I_{t+1}) = (1-\beta)\ln c_t + \beta \ln d_{t+1} + \gamma^i \ln I_{t+1} \tag{3.5}$$

$U^i(c_t, d_{t+1}, I_{t+1})$: Utilidade total em “t” do indivíduo nascido em “t-1”

c_t: consumo em “t” do indivíduo nascido em “t-1”

d_{t+1}: consumo em "t+1" do indivíduo nascido em "t-1"; neste período, o indivíduo está aposentado, consome a poupança que constituiu e o que recebe do sistema previdenciário

$(1-\beta)$: peso da utilidade do consumo em "t"; $0 \geq \beta \geq 1$; β é constante para toda população

β: peso da utilidade do consumo em "t+1"

I_{t+1}: renda proveniente do salário que o filho deste indivíduo vai auferir em "t+1"; este filho estuda em "t"; sua renda em "t+1" é maior se estudar mais; se estudar mais, o consumo e a poupança menores dos pais em "t" são compensados por um aumento de utilidade com uma renda maior de seu filho

γ^i: peso da utilidade da renda que o filho do indivíduo "i" que nasce em "t" vai auferir quando trabalhar em "t+1"; representa o altruísmo dos pais; no caso de pais altruístas o último termo da função utilidade tem um peso maior ($\gamma_{altruísta} > \gamma_{não\ altruísta}$); o valor de γ que define a fronteira entre educar ou não a geração seguinte é determinado endogenamente neste modelo

$f(\gamma)$ e $F(\gamma)$: γ é uma variável aleatória i.i.d. com densidade acumulada $F(\gamma)$ e densidade $f(\gamma) \equiv F'(\gamma)$; não há correlação serial de γ ao longo de gerações

Alocação da renda de indivíduos representativos:

- altruístas

$$w_t^i(1-\tau_p-\tau_e) = c_t^{i,s} + (e_t - E_t) + s_t^{i,s} \quad (3.6a)$$

- não altruístas

$$w_t^i(1-\tau_p-\tau_e) = c_t^{i,u} + s_t^{i,u} \quad (3.6b)$$

w_t^i: salário em "t" de um indivíduo com qualificação "i" ("i=s" qualificado ou "i=u" não qualificado)

$c_t^{i,j}$: consumo em “t” de um indivíduo com qualificação “i” (“i=s” qualificado ou “i=u” não qualificado) e que proporciona a educação “j” a seu filho (“j=s” elevada ou “j=u” básica)

e_t: gasto com educação em “t“, presente apenas em (3.6a)

E_t: subsídio à educação, que só ocorre no caso de o filho estudar, pago pelo governo aos pais e presente apenas em (3.6a)

$s_t^{i,j}$: poupança em “t” de um indivíduo com qualificação “i” (“i=s” qualificado ou “i=u” não qualificado) que proporciona a educação “j” a seu filho (“j=s” elevada ou “j=u” básica)

τ_p: alíquota do sistema previdenciário que incide em folha de pagamento nos salários dos trabalhadores

τ_e: alíquota de imposto do sistema educacional que incide em folha de pagamento nos salários dos trabalhadores

O valor que o sistema de previdência por repartição proporciona ao aposentado é dado por:

$$p_{t+1} = \zeta\left[(1-\pi_t)\tau_p w_t^u + \pi_t \tau_p w_t^s\right] \tag{3.7}$$

p_{t+1}: valor pago pelo sistema previdenciário ao aposentado que nasce em “t-1”, trabalha em “t”, se aposenta em “t+1”; este valor independe de seu nível de escolaridade

$\zeta \equiv \frac{n^\circ\ trabalhadores}{n^\circ\ aposentados} \leq 1$: razão de suporte do sistema previdenciário; quanto maior a longevidade da sociedade, menor é ζ; ao contrário do ensaio anterior não se deve ao crescimento populacional, mas à longevidade de uma população que não cresce em estado estacionário; o número de aposentados é assumido como sendo maior ou igual ao número de trabalhadores; $\zeta \leq 1$ significa uma pirâmide etária com topo maior que a base, esta condição será explicada adiante

O rendimento de um pensionista pode ser expresso em termos do salário de um trabalhador qualificado ou não qualificado $p_{t+1} = \zeta\tau_p(w_t^s/\varepsilon)(1-\pi_t + \varepsilon\pi_t) = \zeta\tau_p w_t^u(1-\pi_t + \varepsilon\pi_t)$ ou ainda $p_{t+1} = \zeta\tau_p(1-\alpha)A(K_t/N)(1-\pi_t + \varepsilon\pi_t)^{1-\alpha}$.

$\rho_{t+1}^i \equiv \frac{p_{t+1}}{w_t^i}$: taxa de reposição; expressa quanto a aposentadoria de um trabalhador do tipo "i" representa em termos de seu salário quando trabalhava ("i=u" não qualificado ou "i=s" qualificado)

O subsídio à educação é dado por:

$$E_t = \begin{cases} \theta w_t^s, se\ e_t = \mu w_t^s \\ 0 \quad\ , se\ e_t = 0 \end{cases}$$

Onde:

μ: $0 < \mu < 1$ é o custo da educação como proporção do salário de um trabalhador qualificado

θ: $\theta \in [0, \mu]$ é o subsídio dado pelo governo à educação, também como proporção do salário de um trabalhador qualificado

Como não há dívida pública, a alíquota de imposto da educação é determinada endogenamente pelos gastos promovidos pela política educacional para manter receitas e despesas em equilíbrio $[N(1-\pi_t)w_t^u + N\pi_t w_t^s]\tau_e = N\pi_t^e\theta w_t^s$ e é dada por:

$$\tau_e = \theta\mathcal{T}$$

Onde:

$$\mathcal{T} \equiv \frac{\pi_t^e\varepsilon}{1-\pi_t+\varepsilon\pi_t}$$

π_t^e: proporção da população jovem que o sistema educacional subsidia; em estado estacionário $\pi_t^e = \pi_t = \pi$

A renda do filho é consequentemente dada por:

$$I_{t+1}^{i} = \begin{cases} w_{t+1}^{s}, se\ e_t = \mu w_t^s \\ w_{t+1}^{u}, se\ e_t = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

Onde $i = s$ ou u

Os recursos que possibilitam o consumo na terceira fase da vida de um indivíduo "i" são dados pela poupança feita durante a segunda fase acrescida de juro e do valor da aposentadoria $d_{t+1}^{i,j} = (1 + r_{t+1})s_t^{i,j} + \rho_t^i w_t^i$. Onde "i=s" ou "u" representa a escolaridade do pai e "j=s" ou "u" representa a escolaridade proporcionada ao filho

3.2.3 – Maximização da utilidade dos indivíduos

Seja $V^{i,j}$ a função utilidade indireta ("i=s,u" é a escolaridade do pai; "j=s,u" é a escolaridade do filho; "j" também representa o altruísmo do pai "j=s" altruísta e "j=u" não altruísta). Esta função expressa a utilidade como função de $s_t^{i,j}$ ao invés de $c_{t+1}^{i,j}$, $d_{t+1}^{i,j}$ e I_{t+1}^{j}, ela permite o cálculo do nível ótimo de poupança e é necessária para derivar as condições de primeira ordem. Substituindo (3.6a), (3.6b), (3.9), o imposto da educação e o rendimento previdenciário nas funções utilidade obtém-se $V^{i,j}$:

Pais não altruístas ($j = u$):

$$V^{i,u}(s_t^{i,u}) = (1-\beta)\ln\left[w_t^i\left(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}\right)-s_t^{i,u}\right]+$$

$$+\beta\ln\left\{(1+r_{t+1})s_t^{i,s}+\rho_t^i w_t^i\right\}+\gamma\ln(w_{t+1}^u)$$

Pais altruístas ($j = s$):

$$V^{i,s}(s_t^{i,s}) = (1-\beta)\ln\left[w_t^i\left(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}\right)-(e_t-E_t)-s_t^{i,s}\right]+$$

$$+\beta\ln\left\{(1+r_{t+1})s_t^{i,s}+\rho_t^i w_t^i\right\}+\gamma\ln(w_{t+1}^s)$$

Pais podem ter maior ou menor escolaridade e podem ser altruístas ou não constituindo quatro casos. As condições de primeira ordem $\frac{\partial}{\partial s_t^{i,j}} V^{i,j}\left(s_t^{i,j}\right) = 0$ implicam que as poupanças sejam:

$$s_t^{s,u} = w_t^s \left\{\beta\left(1 - \tau_p - \theta\mathcal{T}\right) - \rho_t^s \frac{(1-\beta)}{\beta(1+r_{t+1})}\right\}$$

$$s_t^{u,u} = w_t^u \left\{\beta\left(1 - \tau_p - \theta\mathcal{T}\right) - \rho_t^u \frac{(1-\beta)}{\beta(1+r_{t+1})}\right\}$$

$$s_t^{s,s} = s_t^{s,u} - w_t^s(\mu - \theta)\beta \tag{3.10}$$

$$s_t^{u,s} = s_t^{u,u} - w_t^u(\mu - \theta)\varepsilon\beta$$

Todas as poupanças apresentam termos que as diminuem devido: (i) à previdência, pois há uma redução na renda disponível e uma necessidade menor de poupar para a velhice; (ii) à tributação da política educacional, pois esta variável também diminui a renda disponível. Apenas os pais altruístas possuem o gasto adicional no valor da educação não coberto pelo subsídio do governo e este termo pesa negativamente em suas poupanças.

3.2.4 – Condição para educar filhos

A condição necessária e suficiente para os pais pagarem a educação dos filhos é a utilidade de educar ser maior que a de não educar. As condições de primeira ordem (3.10) substituídas nas funções de utilidade indireta fornecem as utilidades máximas nos quatro casos. As diferenças entre as expressões obtidas para altruístas e não altruístas fornecem os parâmetros γ's que separam os dois tipos de decisões sobre educar descendentes. Pais com γ's maiores que os valores obtidos adiante decidem educar sua prole e vice-versa.

Seja a função utilidade para um indivíduo “i”:

$V_t^{i,j,k}$: utilidade indireta; a primeira letra no índice superior (“i”) representa o indivíduo; a segunda representa seu nível de escolaridade (“j=s,u”); e a terceira significa o grau de educação que este indivíduo proporciona a sua geração seguinte (“k=s,u”)

<u>Pais com escolaridade maior:</u>

- $V_t^{i,s,u} = (1-\beta)\ln\{w_t^s(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}) - s_t^{s,u}\} +$

  $+\beta\ln\{(1+r_{t+1})s_t^{s,u} + \rho_t^s w_t^s\} + \gamma^i \ln\{w_{t+1}^u\}$

- $V_t^{i,s,s} = (1-\beta)\ln\{w_t^s(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}) - (\mu-\theta)w_t^s - s_t^{s,s}\} +$

  $+\beta\ln\{(1+r_{t+1})s_t^{s,s} + \rho_t^s w_t^s\} + \gamma^i \ln\{w_{t+1}^s\}$

γ^s que torna $(V_t^{i,s,s} - V_t^{i,s,u}) > 0$ quando $\gamma^i > \gamma^s$ é dado por:

$$\gamma^s > -\frac{\ln\left\{1-\frac{(\mu-\theta)}{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1-\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon(1+r_{t+1})}\right]}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}} = -\frac{\ln\left\{1-\frac{(\mu-\theta)}{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\wp^s}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}} \qquad (3.11a)$$

Onde: $\wp^s \equiv 1-\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon(1+r_{t+1})} > 0 => \frac{\partial\gamma^s}{\partial\tau_p} > 0$

A condição $\zeta \leq 1$ – que significa uma pirâmide etária com topo maior que a base – foi adotada para evitar uma análise exaustiva das condições em que ζ pode superar o valor de ε em $\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon(1+r_{t+1})}$ a ponto de tornar $\wp^s < 1$, embora o modelo admita $\zeta > 1$.

<u>Pais com escolaridade menor:</u>

- $V_t^{i,u,u} = (1-\beta)\ln\{w_t^u(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}) - s_t^{u,u}\} +$

  $+\beta\ln\{(1+r_{t+1})s_t^{u,u} + \rho_t^u w_t^u\} + \gamma^i \ln\{w_{t+1}^u\}$

- $V_t^{i,u,s} = (1-\beta)\ln\{w_t^u(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}) - \varepsilon(\mu-\theta)w_t^u - s_t^{u,s}\} +$

$$+\beta\ln\{(1+r_{t+1})s_t^{u,s} + \rho_t^u w_t^u\} + \gamma^i \ln\{w_{t+1}^s\}$$

γ^u que torna $\left(V_t^{i,u,s} - V_t^{i,u,u}\right) > 0$ quando $\gamma^i > \gamma^u$ é dado por:

$$\gamma^u > -\frac{\ln\left\{1-\frac{\varepsilon(\mu-\theta)}{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1-\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})}\right]}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}} = -\frac{\ln\left\{1-\frac{\varepsilon(\mu-\theta)}{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\wp^u}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}} \qquad (3.11b)$$

Onde: $\wp^u \equiv 1 - \frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})} \underset{<}{\overset{>}{=}} 0 \Rightarrow \frac{\partial\gamma^u}{\partial\tau_p} \underset{<}{\overset{>}{=}} 0$

Pais com renda menor precisam ser mais altruístas para educarem seus filhos, o que é confirmado pelos parâmetros obtidos. $\wp^s > \wp^u$, pois $\varepsilon > 1$. E analisando os numeradores de γ^s e γ^u, pode-se inferir que $\wp^s > \wp^u$ em conjunto com $\varepsilon > 1$ implicam $\gamma^u > \gamma^s$.

Limites das políticas sociais sobre a educação e as armadilhas de γ^s e γ^u

Neste ensaio a situação em que a sociedade toda passa para o nível educacional básico é denominada armadilha da educação. Ela ocorre se qualquer um dos estratos sociais não puder mais educar seus filhos e isto é demonstrado a seguir.

Para os pais com maior escolaridade, a expressão (3.11a) permite identificar a combinação das políticas educacional e previdência que provoca a armadilha da educação:

Inviabilidade de educar se: $\frac{(\mu-\theta)}{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\wp^s} \to 1 \Rightarrow \gamma^s \to +\infty$

Para não se incorrer neste problema, a condição de não armadilha de γ^s abaixo é necessária:

$$(\mu-\theta) < 1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\wp^s \qquad (3.12a)$$

O resultado (3.11a) também permite observar que $\wp^s > 0$ implica $\Delta\tau_p > 0$ sempre ter um efeito negativo na educação dos filhos desta classe.

Analogamente, para os pais com baixa escolaridade, (3.11b) possibilita identificar quando a combinação das duas políticas sociais enseja a armadilha educacional:

Inviabilidade de educar se: $\frac{\varepsilon(\mu-\theta)}{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\wp^u} \to 1 => \gamma^u \to +\infty$

Para evitar esta situação, a condição de não armadilha de γ^u que segue precisa ser imposta:

$$\varepsilon(\mu-\theta) < 1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\wp^u \quad (3.12b)$$

Notar que o efeito $\Delta\tau_p > 0$ na educação dos filhos destes trabalhadores depende do sinal de $\wp^u$. Se $\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t) > (1+r_{t+1}) => \wp^u < 0, \gamma^u$ diminui e os trabalhadores deste grupo tendem a educar mais seus filhos. Se de $\wp^u = 0$, γ^u independe de τ_p e, caso $\wp^u > 0$, $\Delta\tau_p > 0$ tem um efeito negativo na educação deste estrato.

Qualquer uma das armadilhas acima constitui uma armadilha para a sociedade como um todo e isto é demonstrado a seguir. Reescrevendo as condições que evitam as armadilhas da educação da forma que segue, pode-se verificar que quando a armadilha de γ^u é evitada, a de γ^s também é.

Condição de não armadilha de γ^s (3.12a):

$$\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})} > \left[1-\frac{(1-\varepsilon\mu)+(\varepsilon-\mathcal{T})\theta}{\tau_p}\right] - \left[\frac{(\varepsilon-1)(1-\tau_p-\tau_e)}{\tau_p}\right]$$

Condição de não armadilha de γ^u (3.12b):

$$\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})} > 1-\frac{(1-\varepsilon\mu)+(\varepsilon-\mathcal{T})\theta}{\tau_p}$$

Se (3.12b) for respeitada, (3.12a) necessariamente também é, uma vez que $\left[\frac{(\varepsilon-1)(1-\tau_p-\tau_e)}{\tau_p}\right] > 0$, e existem filhos em ambas classes que estuam. Este resultado reflete o fato de pais com renda menor precisarem de mais altruísmo para educar seus filhos $(\gamma^u > \gamma^s)$ e, quando estes conseguem, os de maior renda também conseguem. Neste caso há fluxo ascendente, fluxo descendente e permanência parcial nos dois patamares sociais. Em estado estacionário, as mudanças entre patamares se anulam.

Existe também a possibilidade de apenas (3.12a) ser satisfeita configurando a armadilha da educação de γ^u. Nesta situação o altruísmo está presente apenas entre os pais de renda elevada. Não há mobilidade social no sentido ascendente. Como a mobilidade no sentido descendente sempre existe – só não existiria se $\gamma^s = 0$ – em estado estacionário toda população acaba sem acesso à educação. A armadilha de γ^u é suficiente para levar a sociedade toda ao estrato social inferior e a condição abrangente para não se incorrer neste tipo de problema é (3.12b).

E o último caso acontece quando nem os pais de renda elevada conseguem educar seus filhos constituindo a armadilha da educação de γ^s. Se (3.12a) não for satisfeita, (3.12b) também não é e o altruísmo está ausente em toda sociedade. O estado estacionário no patamar inferior é atingido em uma única geração.

Em simulações numéricas ocorreu a situação $s_t^{u,s} < 0$. O financiamento de consumo e educação dos filhos no segundo período de vida com pagamento deste financiamento no terceiro não é compatível com os critérios de concessão de crédito. Os possíveis γ's que satisfazem (3.12b), mas que necessitam de crédito para pais de renda baixa, devem ser excluídos com a imposição de:

$$s_t^{u,s} \geq 0$$

$$1 - \theta\mathcal{T} - \tau_p \left[1 + (1 - \pi_t + \varepsilon\pi_t)\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right] - (\mu - \theta)\varepsilon > 0 \tag{3.12c}$$

No caso da política educacional, um aumento em θ tende a ser benéfico para as duas classes promovendo $\frac{\partial \gamma^i}{\partial \theta} < 0$. Esta conclusão vem da análise de (3.11a) e (3.11b), mas para $\Delta\theta > 0$ reduzir os valores limites de γ^s e γ^u a partir dos quais os pais se tornam altruístas, deve-se impor as condições (3.12b) e (3.12c).

E se a efetividade da política previdenciária para o grupo de trabalhadores de renda baixa for desejada ($\wp^u < 0$), a condição abaixo também deve ser obedecida:

$$\zeta(1 - \pi_t + \varepsilon\pi_t) > (1 + r_{t+1}) \tag{3.12d}$$

3.2.5 – Dinâmica da escolaridade

A dinâmica da escolaridade é descrita por uma cadeia de Markov. As proporções de indivíduos segundo sua escolaridade ao longo de duas gerações são dadas abaixo.

Em “t”:

- Pais com escolaridade elevada: π_t
  - que educam filhos com escolaridade básica: $\pi_t F(\gamma^s)$
  - que educam filhos com escolaridade elevada: $\pi_t[1 - F(\gamma^s)]$
- Pais com escolaridade básica: $(1 - \pi_t)$ (3.13)
  - que educam filhos com escolaridade básica: $(1 - \pi_t)F(\gamma^u)$
  - que educam filhos com escolaridade elevada: $(1 - \pi_t)[1 - F(\gamma^u)]$

Em “t+1”, a proporção de trabalhadores qualificados que é obtida a partir de (3.13) é:

$$\pi_{t+1} = [1 - F(\gamma^s)]\pi_t + [1 - F(\gamma^u)](1 - \pi_t)$$

$$\pi_{t+1} = [F(\gamma^u) - F(\gamma^s)]\pi_t + 1 - F(\gamma^u) \tag{3.14}$$

Em estado estacionário: $\pi_t = \pi_{t+1} = \pi$

$$\pi = [1 - F(\gamma^s)]\pi + [1 - F(\gamma^u)](1 - \pi)$$

Logo:

$$\pi = \frac{1 - F(\gamma^u)}{1 + F(\gamma^s) - F(\gamma^u)} \tag{3.15}$$

A equação (3.14) escrita da forma que aparece no gráfico abaixo mostra a estabilidade do estado estacionário (3.15), uma vez que $[F(\gamma^u) - F(\gamma^s) - 1] < 0$ sempre.

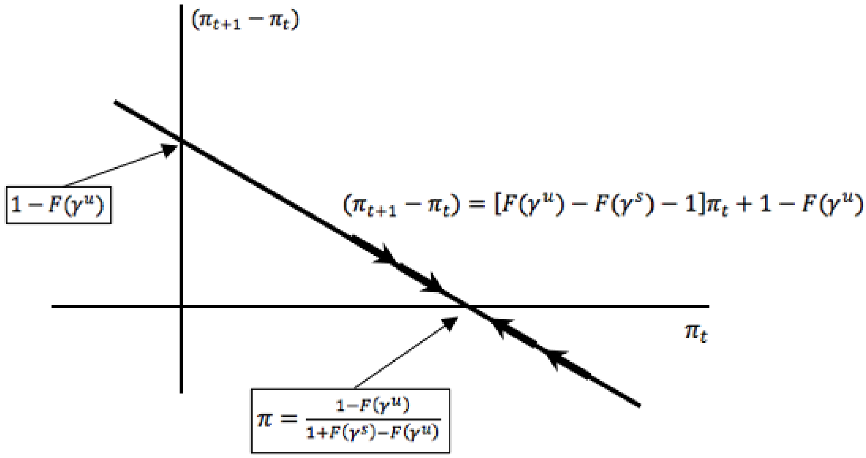

Gráfico 3.1 – Diagrama de fase da dinâmica da escolaridade

A alteração da incidência do imposto da educação e a inclusão da previdência não alteram a dinâmica do processo de Markov. Mas dado que π depende dos γ's, que por sua vez dependem de θ e de τ_p, o estado estacionário depende dos parâmetros dessas políticas sociais.

3.2.6 – Crescimento endógeno

<u>Características e condições impostas por este modelo</u>

Em todas as derivações a seguir as expressões que contêm os parâmetros γ's são impactadas pelas políticas educacional e / ou previdenciária, conforme mostram as equações (3.11a) e (3.11b).

Para se obter sucesso com estas políticas socais elas devem conjuntamente respeitar a condição de não armadilha da educação (3.12b). A condição que exclui o uso de crédito $s_t^{u,s} \geq 0$ (3.12c) também deve ser satisfeita. E a política previdenciária pode ajudar os trabalhadores de baixa renda a educar seus filhos, desde que a (3.12d) esteja presente. Caso contrário, as políticas se tornam contraproducentes ou impossíveis.

Expressões relacionadas à formação de capital, que dependem da poupança, são negativamente impactadas pelo imposto da educação e pela contribuição previdenciária, uma vez estas variáveis reduzem a renda disponível. A previdência também diminui a necessidade de poupar através da renda adicional que proporciona na velhice.

Estas características são inerentes a este modelo não são mencionadas em cada derivação nas próximas seções, há apenas referências pontuais quando consideradas relevantes.

Crescimento endógeno

No longo prazo, seguindo a abordagem de Romer, o crescimento endógeno é determinado pelo conhecimento acumulado pela experiência que é dado pelo estoque de capital. Mas enquanto o estado estacionário não é atingido, o crescimento também depende da evolução do nível médio de escolaridade da sociedade.

Os horizontes de tempo neste ensaio são definidos como segue. Curto prazo é o lapso de tempo em que o número de trabalhadores qualificados permanece constante, pois esta proporção leva uma geração para começar a mudar. Em contraste com esta variável, o instrumento de política social (τ_e ou τ_p), a proporção de altruístas (que depende dos γ's), o número de estudantes (π_t^e), a poupança e a formação de capital precisam se mover imediatamente para possibilitar a mudança no número de trabalhadores qualificados no período seguinte. Médio prazo é o intervalo de tempo em que π_t converge para seu estado estacionário seguindo a cadeia de Markov. E longo prazo é caracterizado pelo estado estacionário em que o número de estudantes é igual ao número de trabalhadores qualificados e representam uma proporção estável π da população.

Com base na função de produção o crescimento do produto pode ser decomposto nas duas parcelas abaixo.

$$G_{t+1} = \frac{Y_{t+1}}{Y_t} = G_{t+1}^K G_{t+1}^\pi \tag{3.16}$$

Onde:

$$G_{t+1}^\pi \equiv \frac{(1-\pi_{t+1}+\varepsilon\pi_{t+1})^{1-\alpha}}{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)^{1-\alpha}}$$

$$G_{t+1}^K \equiv \frac{K_{t+1}}{K_t}$$

A equação (3.16) separa o crescimento econômico em uma componente que se deve ao conhecimento acumulado pela experiência, G_{t+1}^K, e em outra que se deve à escolaridade, G_{t+1}^π. Estas duas parcelas são derivadas a seguir.

Para se obter G_{t+1}^π, as proporções listadas em (3.13) devem ser substituídas na definição desta variável:

$$G_{t+1}^\pi = \frac{\{1+(\varepsilon-1)[[F(\gamma^u)-F(\gamma^s)]\pi_t+1-F(\gamma^u)]\}^{1-\alpha}}{(1-\pi_t-\varepsilon\pi_t)^{1-\alpha}} \tag{3.17}$$

No longo prazo, π segue o estado estacionário descrito por (3.15), logo $G^\pi = 1$ e $G = G^K$. O aumento da proporção de trabalhadores qualificados promove um aumento permanente no nível do produto, mas seu efeito no crescimento ocorre apenas no médio prazo.

O crescimento do aprendizado pela experiência, G_{t+1}^K, é obtido a partir da poupança em "t" que determina o estoque de capital em "t+1":

$$K_{t+1} = S_t$$

$$G_{t+1} = G_{t+1}^K = \frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{S_t}{K_t}$$

A poupança provém de quatro tipos de poupadores, como mostram as equações (3.10), e cada nível de poupança desses indivíduos deve ser ponderado com sua respectiva proporção listada em (3.13).

$$S_t = N\{(1-\pi_t)\left[F(\gamma^u)s_t^{u,u} + \left(1-F(\gamma^u)\right)s_t^{u,s}\right] + \pi_t\left[F(\gamma^s)s_t^{s,u} + \left(1-F(\gamma^s)\right)s_t^{s,s}\right]\}$$

Portanto:

$$G_{t+1}^{K} = \frac{(1-\alpha)A\beta}{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)^{\alpha}}\{(1-\pi_t)[\psi^u - (\theta\mathcal{T} + \tau_p\wp)] + \pi_t\varepsilon[\psi^s - (\theta\mathcal{T} + \tau_p\wp)]\} \qquad (3.18)$$

Onde:

$$\psi^u \equiv F(\gamma^u) + [1 - F(\gamma^u)][1 - (\mu - \theta)\varepsilon]$$

$$\psi^s \equiv F(\gamma^s) + [1 - F(\gamma^s)][1 - (\mu - \theta)]$$

$$\wp \equiv 1 + \frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}$$

Notar que G_{t+1}^{K} é uma função linear decrescente em θ e em τ_p.

O crescimento do produto é obtido substituindo os resultados obtidos em (3.17) e (3.18) na equação (3.16).

$$G_{t+1} = \frac{(1-\alpha)A\beta}{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)^{\alpha}} \cdot \{(1-\pi_t)[\psi^u - (\theta\mathcal{T} + \tau_p\wp)] + \pi_t\varepsilon[\psi^s - (\theta\mathcal{T} + \tau_p\wp)]\} \cdot$$
$$\cdot \frac{\{1+(\varepsilon-1)[[F(\gamma^u)-F(\gamma^s)]\pi_t+1-F(\gamma^u)]\}^{1-\alpha}}{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)^{1-\alpha}} \qquad (3.19)$$

Os efeitos do subsídio à educação e da política previdenciária em (3.19) são analisados nas seções seguintes.

3.3 – Efeito das políticas sociais

Os efeitos de $\Delta\theta > 0$ e de $\Delta\tau_p > 0$ na equação (3.16) são analisados adiante no curto prazo, enquanto π_t ainda converge para seu valor final, e no longo prazo, quando o estado estacionário é atingido. No longo prazo, também são identificados os legados das políticas sociais nas variáveis desta equação que ocorrem no curto e médio prazos.

3.3.1 – Efeito do subsídio à educação – curto prazo

No curto prazo, uma alteração na política educacional promove:

$$\frac{\partial G_{t+1}}{\partial \theta} = \frac{\partial G_{t+1}^{K}}{\partial \theta} G_{t+1}^{\pi} + G_{t+1}^{K} \frac{\partial G_{t+1}^{\pi}}{\partial \theta}$$

<u>Efeito de θ em G_{t+1}^{π} no curto prazo</u>

Derivando (3.17) em relação a θ:

$$\frac{\partial G_{t+1}^{\pi}}{\partial \theta} = G_{t+1}^{\pi} \frac{-(1-\alpha)(\varepsilon-1)\left[\pi_t f(\gamma^s)\frac{\partial \gamma^s}{\partial \theta} + (1-\pi_t) f(\gamma^u)\frac{\partial \gamma^u}{\partial \theta}\right]}{1+(\varepsilon-1)\left[[F(\gamma^u)-F(\gamma^s)]\pi_t + 1 - F(\gamma^u)\right]}$$

Apesar do número de trabalhadores qualificados permanecer constante por um período, $\frac{\partial G_{t+1}^{\pi}}{\partial \theta}$ traz em seu numerador a mudança da quantidade de pais altruístas (através das derivadas $\frac{\partial \gamma^s}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial \gamma^u}{\partial \theta}$). Quando as condições impostas por este modelo são satisfeitas, os γ's diminuem e o número de estudantes aumenta.

<u>Efeito de θ em G_{t+1}^{K} no curto prazo</u>

No curto prazo, um incremento no subsídio à educacional tende a diminuir a poupança como resultado de três efeitos que ocorrem nos gastos dos indivíduos: (i) gastos adicionais de pais que se tornam altruístas; (ii) tributação maior para lastrear a educação; (iii) redução de gastos de pais que já eram altruístas e passam a poupar mais.

Derivando (3.18) em relação a θ:

$$\frac{\partial G_{t+1}^{K}}{\partial \theta} = \frac{(1-\alpha)A\beta}{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)^{\alpha}} \left\{(1-\pi_t)\left[\frac{\partial \psi^u}{\partial \theta} - \left(\mathcal{T} + \theta\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta}\right)\right] + \pi_t \varepsilon \left[\frac{\partial \psi^s}{\partial \theta} - \left(\mathcal{T} + \theta\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta}\right)\right]\right\}$$

Onde:

$$\frac{\partial\psi^u}{\partial\theta} = \varepsilon\left[1 - F(\gamma^u) + (\mu - \theta)f(\gamma^u)\frac{\partial\gamma^u}{\partial\theta}\right]$$

$$\frac{\partial\psi^s}{\partial\theta} = 1 - F(\gamma^s) + (\mu - \theta)f(\gamma^s)\frac{\partial\gamma^s}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\theta} = \left(\frac{\varepsilon}{1-\pi_t+\varepsilon\pi_t}\right)\frac{\partial\pi_t^e}{\partial\theta}$$

A equação acima mostra o efeito de curto prazo de $\Delta\theta > 0$ em $\frac{\partial G_{t+1}^K}{\partial\theta}$. Quando as condições deste modelo são satisfeitas, as expressões $\left[1 - F\left(\gamma^i\right)\right]$ (i=s,u) presentes nas derivadas $\frac{\partial\psi^i}{\partial\theta}$ indicam o aumento de poupança dos pais que já eram altruístas, pois quem já ía educar seus filhos se beneficia de um aumento em θ. As expressões $f\left(\gamma^i\right)\frac{\partial\gamma^i}{\partial\theta}(\mu - \theta)$, também presentes nessas mesmas derivadas, representam a redução da poupança de pais que não eram altruístas e passam a ser. Estes pais passam a gastar o valor adicional indicado por $(\mu - \theta)$ com a educação de seus filhos, portanto passam a poupar menos. O termo $\theta\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\theta}$ mostra que um orçamento fiscal equilibrado requer um aumento de alíquota de imposto enquanto houver mais estudantes que trabalhadores qualificados; este termo continua presente no médio prazo. E como neste modelo todos os gastos com a educação recaem sobre a renda da sociedade, todos os efeito acima combinados tendem a provocar um resultado negativo na poupança e no capital.

Efeito de θ em G_{t+1} no curto prazo

O efeito de curto prazo da política educacional vem apenas do efeito na poupança $\frac{\partial G_{t+1}}{\partial\theta} = \frac{\partial G_{t+1}^K}{\partial\theta}$, pois o número de trabalhadores qualificados permanece inalterado.

3.3.2 – Efeito do subsídio à educação – longo prazo

No longo prazo, o crescimento econômico corresponde ao crescimento do capital da equação (3.18) em estado estacionário:

$$G = G^K = \frac{(1-\alpha)A\beta}{(1-\pi+\varepsilon\pi)^{\alpha}}\left\{(1-\pi)\left[\psi^u - \left(\theta\mathcal{T} + \tau_p\wp\right)\right] + \pi\varepsilon\left[\psi^s - \left(\theta\mathcal{T} + \tau_p\wp\right)\right]\right\} \tag{3.20}$$

Após atingir o estado estacionário, os efeitos que uma política educacional deixa como legado permanente na taxa de crescimento de longo prazo podem ser analisados derivando (3.20) em relação a θ:

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} =$$

$$= -\frac{\alpha(1-\alpha)\beta A}{(1-\pi+\varepsilon\pi)^{\alpha+1}}\left\{(1-\pi)\left[\psi^u - \left(\theta\mathcal{T} + \tau_p\wp\right)\right] + \pi\varepsilon\left[\psi^s - \left(\theta\mathcal{T} + \tau_p\wp\right)\right]\right\}(\varepsilon - 1)\frac{\partial \pi}{\partial \theta} +$$

$$+\frac{(1-\alpha)\beta A}{(1-\pi+\varepsilon\pi)^{\alpha}}\left\{\varepsilon\left[\psi^s - \left(\theta\mathcal{T} + \tau_p\wp\right)\right] - \left[\psi^u - \left(\theta\mathcal{T} + \tau_p\wp\right)\right]\right\}\frac{\partial \pi}{\partial \theta} +$$

$$+\frac{(1-\alpha)\beta A}{(1-\pi+\varepsilon\pi)^{\alpha}}\left\{(1-\pi)\,\varepsilon\left[\frac{\partial \psi^s}{\partial \theta} - \mathcal{T}\right] - \pi\left[\frac{\partial \psi^u}{\partial \theta} - \mathcal{T}\right]\right\}$$

O resultado acima traz em sua primeira linha o efeito nos salários. Uma política educacional, dentro das condições impostas por este modelo, faz os salários caírem com o amento da mão de obra efetiva.

A segunda linha mostra o efeito na diferença da poupança entre trabalhadores qualificados e não qualificados e pode apresentar os dois sinais.

A terceira linha mostra o efeito combinado que ocorre na formação de capital devido ao aumento na quantidade de estudantes: (i) mais indivíduos educam seus filhos e poupam menos; (ii) os que já educavam poupam mais com o aumento do subsídio; (iii) todos estão sujeitos ao efeito negativo do aumento do imposto da educação, que reduz a renda disponível. A terceira linha é quase igual à derivada de (3.18) em relação a θ no curto prazo analisada no item anterior, só não possui o termo $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta}$ que no longo prazo é zero. Com exceção deste termo, os demais possuem as mesmas interpretações.

Comparando com o artigo original, não se pode concluir que o ensino público puro maximiza o crescimento de longo prazo. Segundo os próprios autores, a intuição para o resultado por eles obtido vem de não haver custo com a educação, da taxa de poupança ser máxima e, portanto, maximizar a formação de capital e o aprendizado pela experiência. Mas no presente modelo todos os custos das políticas governamentais estão presentes. O termo $(1-\pi+\pi\varepsilon)\left(\theta\mathcal{T}+\tau_p\wp\right)$ traz este ônus, e mesmo na ausência de previdência $\left(\tau_p=0\right)$, o custo da educação recai sobre a sociedade reduzindo a poupança. O resultado na armadilha da educação também difere do obtido no modelo original, pois nesta circunstância ocorre transferência de renda de não altruístas para altruístas, sendo que ambos auferem renda baixa. A poupança é mais impactada negativamente do que quando parte dos trabalhadores tem renda maior. Este resultado é diferente porque originalmente o imposto da educação não compromete a poupança.

Há ainda um resultado não mencionado pelos autores no artigo original que ocorre com o nível do produto. Apesar do crescimento depender apenas do aumento do capital em um modelo AK, seu nível depende da produtividade total dos fatores. Se $\frac{\partial G^{\pi}}{\partial\theta}>0$ no médio prazo, o produto e o produto per capita vão para patamares mais elevados no longo prazo e este legado pode ser de interesse para países de renda baixa ou média.

3.3.3 – Efeito da contribuição previdenciária – curto prazo

No curto prazo, uma alteração na política previdenciária promove:

$$\frac{\partial G_{t+1}}{\partial\tau_p}=\frac{\partial G_{t+1}^{K}}{\partial\tau_p}G_{t+1}^{\pi}+G_{t+1}^{K}\frac{\partial G_{t+1}^{\pi}}{\partial\tau_p}$$

Os efeitos de $\Delta\tau_p$ e os de $\Delta\theta$ apresentam semelhanças em suas derivações matemáticas. Efeitos redistributivos positivos, desde que as imposições deste modelo sejam respeitadas, e tributários negativos estão presentes na utilidade dos

indivíduos e na formação de capital nos dois casos. Apesar dessas semelhanças, a política previdenciária possui as especificidades que são apresenta a seguir.

Não obstante a previdência reduzir a formação de capital e poder contribuir para as armadilhas da educação deste modelo, ela também pode ajudar a elevar o nível educacional com seu caráter redistributivo de renda. Atua reduzindo a renda disponível de todos os agentes enquanto trabalham e proporciona uma renda adicional quando param de trabalhar. Dependendo do grau de inequidade de uma sociedade e dos parâmetros do sistema de repartição, os rendimentos dos aposentados de baixa renda podem aumentar sua utilidade de forma a mais do que compensar a perda de utilidade das contribuições no período em que trabalham. Se isto acontecer, o ganho de utilidade de pais de baixa renda no limiar de se tornarem altruístas os faz altruístas.

Como γ^u é calculado com a utilidade de educar ser maior que a de não educar, todos os resultados que envolvem esta variável contemplam os argumentos acima. Isso explica por que $\frac{\partial \gamma^u}{\partial \tau_p}$ pode assumir os dois sinais algébricos ou mesmo ser igual a zero e a existência de condições para assegurar seu sinal negativo. Por outro lado, quem aufere renda maior é prejudicado por qualquer política redistributiva, a previdência por repartição não é exceção e $\frac{\partial \gamma^s}{\partial \tau_p} > 0$ sempre.

Se $\Delta\tau_p > 0$, os efeitos no altruísmo nos dois grupos de pais ocorrem e o resultado final na educação pode acontecer em qualquer sentidos. A condição que faz o saldo ser positivo – apesar de ocorrer com pouca frequência não ser o melhor tipo de política – é obtida a seguir.

Efeito de τ_p em G_{t+1}^{π} no curto prazo

Derivando (3.17) em relação a τ_p:

$$\frac{\partial G_{t+1}^{\pi}}{\partial \tau_p} = G_{t+1}^{\pi} \frac{-(1-\alpha)(\varepsilon-1)\left[\pi_t f(\gamma^s)\frac{\partial \gamma^s}{\partial \tau_p} + (1-\pi_t) f(\gamma^u)\frac{\partial \gamma^u}{\partial \tau_p}\right]}{1+(\varepsilon-1)\left[[F(\gamma^u)-F(\gamma^s)]\pi_t + 1 - F(\gamma^u)\right]}$$

No curto prazo o número de trabalhadores qualificados é constante, mas o altruísmo e o número de estudantes mudam. Para esta política ter um efeito positivo na educação, além de todas as condições impostas por este modelo, particularmente (3.12d), é necessário que:

$$-f(\gamma^u)\frac{\partial \gamma^u}{\partial \tau_p} > \frac{\pi_t}{1-\pi_t} f(\gamma^s)\frac{\partial \gamma^s}{\partial \tau_p}$$

A diferença em relação às condições obtidas nas seções anteriores é que elas não envolviam a distribuição de altruísmo da sociedade (f e sua derivada em relação a τ_p). Na condição acima, a PDF de γ e sua sensibilidade à política previdenciária participam na ponderação dos efeitos contrários de $\frac{\partial \gamma^u}{\partial \tau_p} < 0$ e $\frac{\partial \gamma^s}{\partial \tau_p} > 0$ para que $\frac{\partial G_{t+1}^{\pi}}{\partial \tau_p} > 0$.

Apenas se todas as exigências acima estiverem em vigor, $\Delta\tau_p > 0$ aumenta o nível educacional. Caso contrário, que é a situação mais frequente, reduz.

Efeito de τ_p em G_{t+1}^K no curto prazo

Derivando (3.18) em relação a τ_p:

$$\frac{\partial G_{t+1}^K}{\partial \tau_p} = (1-\alpha)A\beta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)^{-\alpha}\left[(1-\pi_t)\left(\frac{\partial \psi^u}{\partial \tau_p} - \wp\right) + \pi_t\varepsilon\left(\frac{\partial \psi^s}{\partial \tau_p} - \wp\right)\right]$$

Onde:

$$\frac{\partial \psi^u}{\partial \tau_p} = \varepsilon(\mu-\theta)f(\gamma^u)\frac{\partial \gamma^u}{\partial \tau_p} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$$

$$\frac{\partial \psi^s}{\partial \tau_p} = (\mu-\theta)f(\gamma^s)\frac{\partial \gamma^s}{\partial \tau_p} > 0$$

O resultado de um incremento da contribuição previdenciária na formação de capital acontece por meio de duas vertentes: mudança na proporção de pais que

educam seus filhos (através de $\frac{\partial\psi^i}{\partial\tau_p}$) e os efeitos diretos da previdência na poupança (através de $\wp$).

O resultado no grupo de pais com renda elevada é reduzir a proporção de altruístas ($\frac{\partial\gamma^s}{\partial\tau_p} > 0$) e, consequentemente, o gasto com a educação de filhos aumentando a poupança. O efeito nos pais de renda baixa pode ser o oposto, desde que a condição (3.12d) esteja presente, ou idêntico, caso contrário.

Em linha com o que as poupanças em (3.10) indicam, dois efeitos da previdência ocorrem na formação de capital. Um através da redução da renda disponível e outro através da necessidade de poupar menos. Isto pode ser visto através de $\wp \equiv 1 + \frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}$.

Ainda é possível inferir através de $\wp$ que uma população mais longeva $(\Delta\zeta < 0)$ tem maior necessidade de poupar pois conta com menores rendimentos do sistema de repartição. Este tipo de efeito não é observado com frequência porque perdas de rendimentos com a longevidade tendem a ser compensadas com medidas que geram impacto fiscal – como era possível no capítulo anterior. Na ausência destas medidas – que é o caso deste capítulo – ocorre estímulo a poupar mais.

<u>Efeito de τ_p em G_{t+1} no curto prazo</u>

De forma análoga ao que acontece com política educacional, o efeito no curto prazo da política previdenciária vem apenas do efeito na poupança $\frac{\partial G_{t+1}}{\partial\tau_p} = \frac{\partial G_{t+1}^K}{\partial\tau_p}$, pois o número de trabalhadores qualificados ainda permanece constante.

3.3.4 – Efeito da contribuição previdenciária – longo prazo

De forma muito semelhante ao que já foi apresentado para a política educacional, o crescimento econômico no longo prazo é dado pela equação (3.20).

E os efeitos que uma política previdenciária deixa após este estado estacionário ser alcançado podem ser analisados derivando-se esta equação em relação a τ_p:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau_p} = -\frac{\alpha(1-\alpha)\beta A}{(1-\pi+\varepsilon\pi)^{\alpha+1}}\{(1-\pi_t)[\psi^u - (\theta\mathcal{T} + \tau_p\wp)] + \pi_t\varepsilon[\psi^s - (\theta\mathcal{T} + \tau_p\wp)]\}(\varepsilon - 1)\frac{\partial \pi}{\partial \tau_p} +$$

$$+\frac{(1-\alpha)\beta A}{(1-\pi+\varepsilon\pi)^{\alpha}}\{\varepsilon[\psi^s - (\theta\mathcal{T} + \tau_p\wp)] - [\psi^u - (\theta\mathcal{T} + \tau_p\wp)]\}\frac{\partial \pi}{\partial \tau_p} +$$

$$+\frac{(1-\alpha)\beta A}{(1-\pi+\varepsilon\pi)^{\alpha}}\left\{(1-\pi_t)\varepsilon\left[\frac{\partial \psi^s}{\partial \tau_p} - \wp\right] + \pi_t\left[\frac{\partial \psi^u}{\partial \tau_p} - \wp\right]\right\}$$

A equação acima traz em sua primeira linha o efeito da política previdenciária na mudança nos salários devido à variação da mão de obra efetiva.

A segunda linha traz o efeito na diferença da poupança dos indivíduos com maior e menor escolaridade.

A terceira linha mostra o efeito combinado que ocorre na formação de capital devido à mudança na quantidade de estudantes. Ela é idêntica à derivada (3.18) em relação a τ_p no curto prazo analisada no item anterior e seus termos possuem as mesmas interpretações.

3.4 – Conclusão

O presente ensaio parte do modelo de Bräuninger e Vidal (2000) de crescimento endógeno com educação pública e privada, acrescenta um sistema de previdência por repartição e muda a incidência do imposto da educação. As conclusões a que se chega são bem distintas, mesmo quando se exclui a previdência – isto se deve essencialmente à incidência do imposto da educação que impacta a poupança. O caráter redistributivo das políticas educacional e previdenciária são analisados considerando, não apenas seus benefícios, mas seus custos também. A previdência pode apresentar um resultado interessante, ainda que pouco provável e pouco efetivo.

A carga tributária da política educacional e a contribuição previdenciária reduzem a poupança e o investimento reduzindo a taxa de crescimento de longo

prazo. As políticas sociais em conjunto devem permanecer dentro de certos limites, caso contrário, a sociedade entra na armadilha da educação.

Quando existir uma política educacional, uma política previdenciária pode na margem e, em determinadas circunstâncias, apresentar um saldo positivo tanto no nível educacional como no crescimento. Este resultado ocorre em situações bastante restritas e a política educacional utilizada individualmente é bem mais efetiva para promover estes efeitos. E levando-se em conta que aumentar a alíquota previdenciária deixa um passivo para gerações futuras a política educacional é preferível.

A longevidade da população no longo prazo eleva o crescimento, pois reduz o rendimento da previdência aumentando a necessidade de poupar. Este resultado, que ocorre devido a uma imposição do modelo nem sempre presente nas economias, está em linha com o prognóstico de David Blake em *Pension Economics*.

Apesar do crescimento do produto depender apenas do crescimento do capital em um modelo AK, neste OLG com educação seu nível depende da escolaridade. Se $\frac{\partial G_{t+1}^{\pi}}{\partial \theta} > 0$ no médio prazo, o produto e o produto per capita passam para um patamar mais elevado no longo prazo e este efeito pode ser interessante para países de renda baixa ou média.

Abaixo seguem alguns gráficos de simulações meramente ilustrativas, i.e., não foram calibradas com dados de países. Ainda assim, conseguem exibir com clareza os resultados algébricos descritos neste capítulo.

Os gráficos que seguem mostram os estados estacionários das variáveis dependentes π, γ^u, γ^s, G^K e A_{ee} no domínio das variáveis independentes τ_p x θ. A variável A_{ee} representa a produtividade total dos fatores no longo prazo e é definida como: $A_{ee} = A_t$ em estado estacionário, onde $A_t \equiv A(1 - \pi_t + \varepsilon\pi_t)^{1-\alpha}$.

A região em que ocorre armadilha da educação ($\pi = 0$) não foi simulada para as variáveis γ^u, γ^s, G^K, A_{ee} e elas são apresentadas no patamar zero.

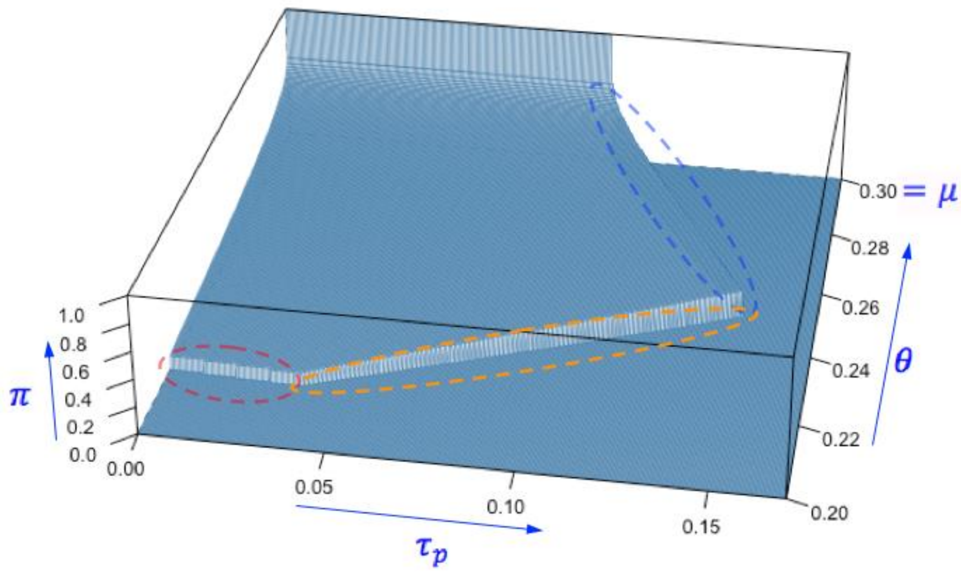

Gráfico 3.2 – Proporção de pessoas com maior escolaridade (π)

A superfície acima mostra como as políticas sociais (τ_p e θ) podem ser favoráveis para aumentar π. A política educacional, quando aproxima o subsídio ao custo total da educação ($\theta \rightarrow \mu$, $\mu = 30\%$ nesta simulação), faz π tender a um.

A região em que a variável dependente (π) é zero corresponde à armadilha da educação ou a uma condição arbitrária de renda disponível mínima que não foi respeitada. As elipses destacam fronteiras que são explicadas a seguir.

Elipse vermelha

Mostra a fronteira da armadilha da educação em que as duas políticas sociais (τ_p e θ) são favoráveis. A inclinação desta fronteira no domínio τ_p x θ indica que, na armadilha ($\pi = 0$), mas perto da fronteira, tanto $\Delta\tau_p > 0$ como $\Delta\theta > 0$ individualmente promovem movimentos favoráveis para sair da armadilha. Não é qualquer combinação de parâmetros deste modelo que gera a fronteira com esta inclinação, a condição (3.18d) precisa estar presente. Muitas simulações geram apenas uma fronteira com a inclinação destacada em laranja com extensão maior.

Elipse laranja

Identifica a fronteira da armadilha da educação em que apenas θ é efetiva. I.e., na armadilha ($\pi = 0$), mas perto da fronteira, $\Delta\tau_p > 0$ aprofunda a sociedade na armadilha e apenas $\Delta\theta > 0$ promove um movimento favorável para sair desta situação.

Elipse azul

Limite arbitrariamente imposto na simulação: quando a carga tributária e a contribuição previdenciária excedem um certo limite (nesta simulação, $\theta + \tau_p > 40\%$) considerado excessivo, esta região é excluída da simulação. Este limite foi colocado para evitar uma renda disponível muito baixa.

As regiões identificadas pelas elipses continuam existindo nos próximos gráficos, não são destacadas, mas são de fácil visualização.

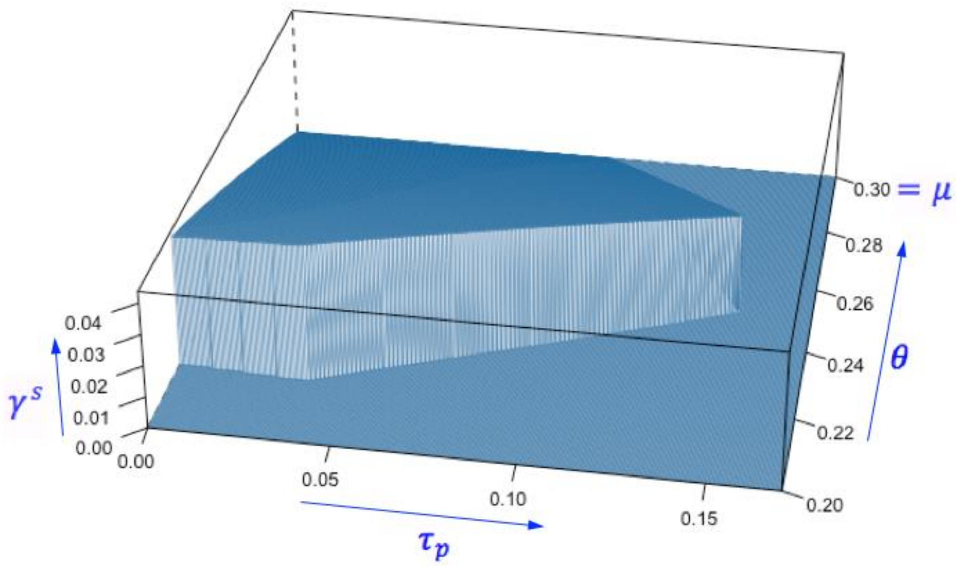

Gráfico 3.3 – Peso da escolaridade dos filhos necessário para pais com renda elevada se tornarem altruístas (γ^s)

Se o indivíduo de renda alta “i” tiver seu parâmetro γ tal que $\gamma^i > \gamma^s$, ele é altruísta. O objetivo das políticas sociais é sempre diminuir γ^s (e também γ^u). Quando o subsídio à educação tende ao valor integral do ensino, γ^s tende a zero e

este grupo todo se torna altruísta. As fronteiras destacadas no Gráfico 3.2 podem ser observadas neste também, apesar de não estarem destacadas.

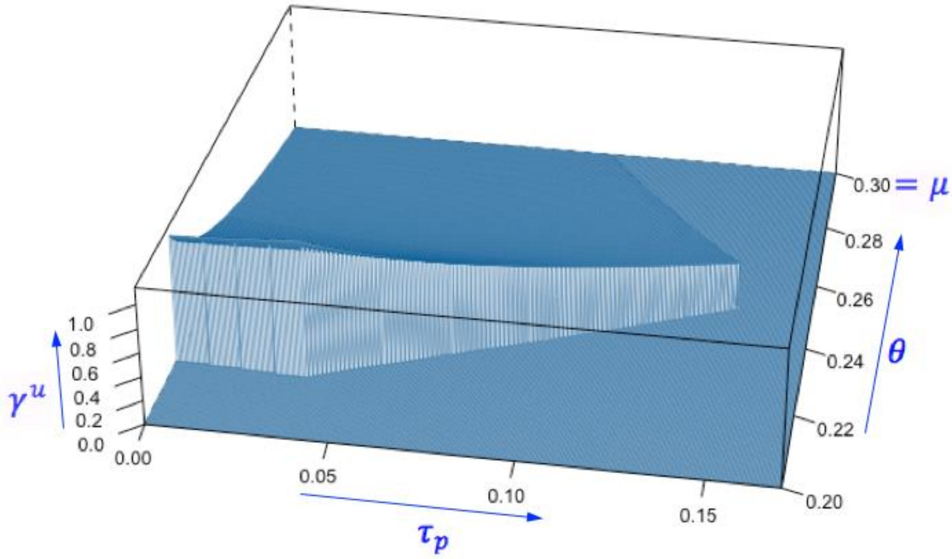

Gráfico 3.4 – Peso da escolaridade dos filhos necessário para pais com renda baixa se tornarem altruístas (γ^u)

O parâmetro γ^u, que separa pais altruístas de não altruístas no grupo de renda baixa, também apresenta o mesmo comportamento de γ^s no gráfico anterior: tende a zero quando a política educacional tende ao valor integral da educação. Apesar desta simulação não utilizar dados reais, pode-se observar nos gráficos que γ^s parte de valores muito menores que γ^u. Ou seja, pais de renda baixa precisam ser muito mais altruístas para educarem seus filhos.

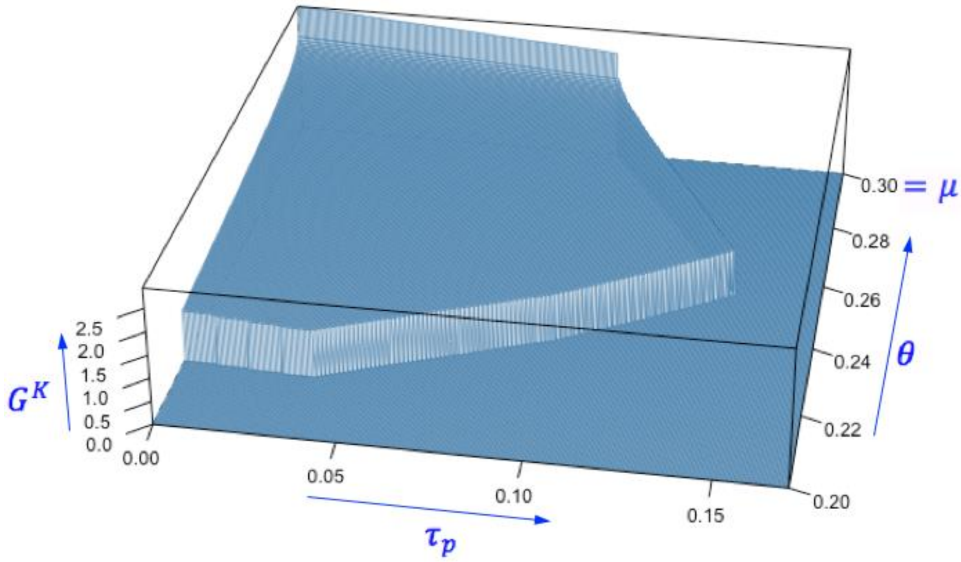

Gráfico 3.5 – Crescimento de longo prazo G^K

O crescimento de longo prazo tende a seus valores máximos quando a educação tende a totalidade. E os mesmos padrões das inclinações das fronteiras no domínio τ_p x θ também se repetem nesta simulação.

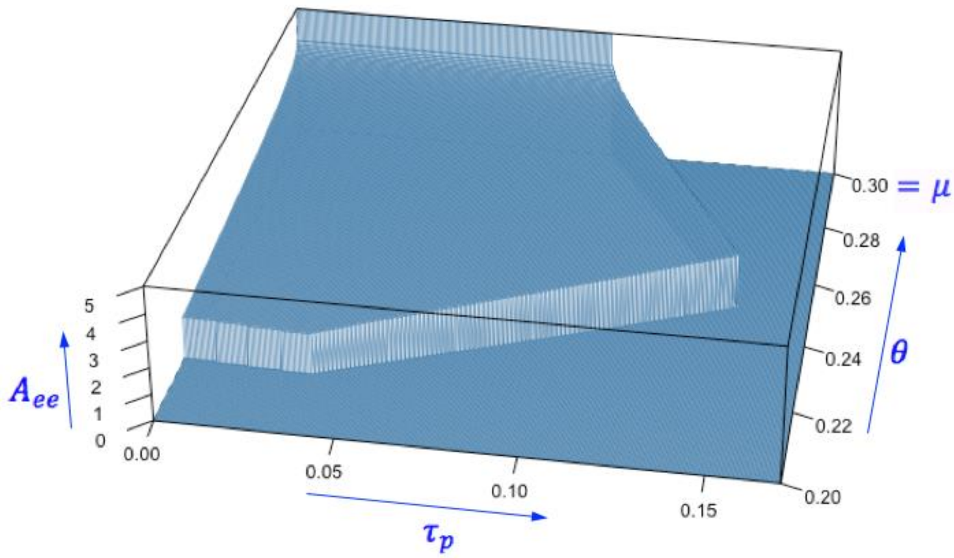

Gráfico 3.7 – Nível do produto A_{ee}

A variável A_{ee} é definida como: $A_{ee} = A_t$ em estado estacionário, onde $A_t \equiv A(1 - \pi_t + \varepsilon\pi_t)^{1-\alpha}$. Quando o patamar de educação π pode crescer com as políticas públicas, conforme mostra o Gráfico 3.2, A_{ee} também acompanha este movimento. Neste caso, nível do produto apresenta um aumento através da maior produtividade do trabalho. As políticas sociais deixam um legado positivo de longo prazo no nível do produto e no produto per capita.

4 – Conclusões

Os dois modelos propostos neste trabalho pretendem acrescentar algumas perspectivas ao debate da previdência que tem ganhado espaço nos últimos anos com o envelhecimento da população e o baixo crescimento econômico. Adicionalmente, questões fiscais mais abrangente e de educação, fonte importante de desigualdade, também estão presentes nas variáveis endógenas e podem expandir o escopo da discussão. Os modelos possuem semelhanças e diferenças, mas em essência levam a conclusões que vão no mesmo sentido e se complementam.

O primeiro ensaio trata de gastos do governo que podem ou não ser produtivos. Se forem produtivos, promovem aumento na produtividade e no crescimento. A educação é um desses gastos. O segundo se dedica apenas à educação, podendo neste aspecto ser visto como um caso particular do primeiro. Esses gastos não atuam da mesma forma nos modelos, mas quando efetivos promovem melhoras em ambos. No primeiro, são insumo da função de produção e aumentam a produtividade do capital e do trabalho; no segundo, aumentam o nível da educação e a produtividade total dos fatores; nos dois, aumentam o nível do produto e o crescimento. Além de impostos que são comuns aos dois modelos, o primeiro aborda o peso de uma dívida e de um sistema de previdência por repartição. O segundo, apenas previdência, entretanto, devido à equivalência com dívida, eles podem ser considerados semelhante neste aspecto também. Um sistema de previdência mais oneroso enseja os mesmos efeitos no crescimento que uma dívida pública massiva e faz o segundo modelo chegar a resultados que podem ser interpretados em linha com os do primeiro.

Os dois de fato concluem que um peso grande sobre a sociedade, seja através de impostos, dívida (quando esta existir) ou previdência, faz os gastos produtivos deixarem de apresentar os efeitos desejados. No primeiro, a relação dívida-capital estável aumenta, a relação dívida-capital explosiva diminui e a chance de haver estado estacionário diminui. No segundo, gastos combinados de educação e previdência, quando excessivos, provocam a armadilha da educação. E o estado

estacionário ocorre no patamar inferior de educação e de renda. Estes resultados apontam no mesmo sentido.

A diferença entre os modelos vem com a divisão de classes sociais que está presente apenas no segundo. Vale ressaltar que o tamanho relativo destas classes, originado pela desigualdade na educação, é uma variável endógena sensível às políticas deste modelo. O efeito redistributivo entre e dentro de gerações passa ser observado e, em certas condições muito restritas, até mesmo a previdência pode ter um papel positivo, embora inferior ao da política educacional pura. O primeiro modelo possui uma única classe social, não permite inferência sobre o aspectos redistributivos de suas políticas e uma comparação neste aspecto não é possível. Mas as conclusão principais dos dois ensaio continuam em linha.

Como problemas previdenciários, de desigualdade social e fiscais são muito frequentes, é interessante notar que os dois ensaios apresentam alguma esperança para as políticas públicas. Em ambos há aumentos de produtividade e de taxas de crescimento, desde que determinadas condições fiscais sejam respeitadas. Os benefícios desta natureza pertencerem de fato às gerações que os produzem. Mas se forem adequadamente repartidos entre ganhos de utilidade de eleitores e recursos para endereçar os problemas aludidos, pode ser mais fácil encontrar uma coalizão de eleitores que proporcione um suporte necessário. I.e., mesmo não sendo Pareto eficiente, este tipo de solução pode, em princípio, ter adesão de uma maioria. Mas, independentemente de ajudarem a encontrar respostas deste tipo, os modelos propostos possuem o mérito de reunir todas as variáveis destes debates e proporcionar novos pontos de vista.

5 – Referências

Acemoglu, D., 2009. Introduction to Modern Economic Growth. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Adam, C. S., Bevan, D. L., 2005. Fiscal déficits and growth in developing countries. J. Public Econ. 89, 571–597.
URL (http://ideas.repec.org/a/eee/pubeco/v89y2005i4p571-597.html).

Arrow, Kenneth J., 1962. "The Economic Implications of Learning by Doing." Rev. Econ. Studies 29, 155-73

Barro, R.J.,1990. Government spending in a simple model of endogenous growth. J. Polit. Econ. 98, S103–S126.

Barro, R. and X. Sala-i-Martin, 1990, Economic growth and convergence across the United States, Working paper no. 3419 (NBER, Cambridge, MA).

Blanchard, Olivier J., 1985. "Debt, Deficits, and Finite Horizons." Journal of Political Economy, 93 (1985), pp. 223-247

Blake, D. (2006). Pension economics. Chichester: Wiley.

Boucekkine, R., de la Croix, R., Licandro, O., 2004. “Modelling vintage structures with DDEs: Principles and applications.” Mathematical Population Studies 11, 151-179.

Bräuninger, M., 2005. The budget deficit, public debt, and endogenous growth. J. Public Econ. Theory 7, 827–840.

Bräuninger, M., Vidal, J.-P, 2000. Private versus public financing of education and endogenous growth. Journal of Population Economics, 13, 387–401.

Chen, B.-L., 2006. Economic growth with na optimal public spending composition. Oxf. Econ. Pap. 58, 123–136.

de la Croix D, Michel P (2002) A theory of economic growth: dynamics and policy in overlapping generations. Cambridge University Press, Cambridge

Devarajan, S., Swaroop, V., Heng-fu, Z., 1996. The composition of public expenditure and economic growth. J. Monet. Econ. 37, 313–344.

Glomm, G., and Ravikumar, B., 1992. "Public versus Private Investment in Human Capital: Endogenous Growth and Income Inequality." Journal of Political Economy, 100, 813–834.

Glomm, G., Ravikumar, B., 1997. Productive government expenditures and long-run growth. J. Econ. Dyn. Control 21, 183–204.

Lucas Jr RE, 1988. On the Mechanics of Economic Development. Journal of Monetary Economics 22 (1): 2 – 42.

Persson, Torsten, and Guido Tabellini. 2000. Political Economics: Explaining Economic Policy. Cambridge, Mass.: MIT Press

Romer P., 1986. Increasing Returns and Long Run Growth. Journal of Political Economy 94 (5): 1002 – 1037.

Saint-Paul, G., 1992. Fiscal policy in na endogenous growth model. Q. J. Econ. 107, 1243–1259.

Teles, Vladimir K. and Mussolini, Caio Cesar, 2014. Public debt and the limits of fiscal policy to increase economic growth. European Economic Review 66, 1–15.

Tenani, P. S., 2004. Human capital and growth. São Paulo: M Books do Brasil.

Thaler,R. and Sunstein, C., 2003. Libertarian paternalism, American Economic Review, 93, 175–179.

Yaari, Menahem E., 1965. "Uncertain Lifetime, Life Insurance and The Theory of the Consumer," R.E. Studies 32, 137—150.

6 – Anexos

6.1 – Anexo – derivação das eq. de ajuste via imposto (2.15) a (2.17)

Utilizando os resultados obtidos em (2.9a) e (2.17) em (2.13):

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = -1 + \frac{s_t}{k_t} - \frac{d_{t+1}}{k_t}$$

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = -1 + \frac{\left[\frac{\beta}{(1+\beta)}(1-\tau) - \frac{\rho}{(1+\beta)(1+r_{t+1})}\right]w_t}{k_t} - \frac{d_t(1+r_t)+(g+x)\,y_t-(\tau_o+\tau_p-\rho\,\eta)\,w_t}{k_t}$$

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = -1 + \frac{\left[\frac{\beta}{(1+\beta)}(1-\tau) - \frac{\rho}{(1+\beta)(1+r_{t+1})}\right](1-\alpha)\,A^{1/\alpha}\,x^{(1-\alpha)/\alpha}\,k_t}{k_t} -$$

$$\frac{d_t(1+r_t)+(g+x)\,A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}k_t-(\tau_o+\tau_p-\rho\,\eta)\,(1-\alpha)\,A^{1/\alpha}\,x^{(1-\alpha)/\alpha}\,k_t}{k_t}$$

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = -1 + \left[\frac{\beta}{(1+\beta)}\left(1-\tau_o-\tau_p\right) - \frac{\rho}{(1+\beta)(1+r_{t+1})}\right](1-\alpha)\,A^{1/\alpha}\,x^{(1-\alpha)/\alpha} - \frac{d_t}{k_t}(1+r_t) - (g+x)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} + (\tau_o+\tau_p-\rho\,\eta)\,(1-\alpha)\,A^{1/\alpha}\,x^{(1-\alpha)/\alpha} \tag{2.14}$$

<u>Ajuste via alíquota de imposto:</u>

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = -1 + \left[\frac{\beta}{(1+\beta)}\left(1-\tau_o-\tau_p\right) - \frac{\rho}{(1+\beta)(1+r_{t+1})}\right](1-\alpha)\,A^{1/\alpha}\,x^{(1-\alpha)/\alpha} - \frac{d_t}{k_t}(1+r_t) - (g+x)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} + (\tau_o+\tau_p-\rho\,\eta)\,(1-\alpha)\,A^{1/\alpha}\,x^{(1-\alpha)/\alpha}$$

Usando τ_o de (2.13b):

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = -1 + \left[\frac{\beta}{(1+\beta)}\left(1 - \frac{(g+x-\gamma)+\alpha\frac{d_t}{k_t}}{(1-\alpha)} - \left(\rho\,\eta-\tau_p\right) - \tau_p\right) - \frac{\rho}{(1+\beta)(1+r_{t+1})}\right](1-\alpha)\,A^{1/\alpha}\,x^{(1-\alpha)/\alpha} - \frac{d_t}{k_t}(1+r_t) - (g+x)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} + \left[\frac{(g+x-\gamma)+\alpha\frac{d_t}{k_t}}{(1-\alpha)} + (\rho\,\eta-\tau_p) + \tau_p - \rho\,\eta\right]\,(1-\alpha)\,A^{1/\alpha}\,x^{(1-\alpha)/\alpha}$$

Parte que depende de $\frac{d_t}{k_t}$

$$\frac{d_t}{k_t}\left\{-\frac{\beta}{(1+\beta)}\frac{\alpha}{(1-\alpha)}+\frac{\alpha}{(1-\alpha)}\right\}(1-\alpha)\ A^{1/\alpha}\ x^{(1-\alpha)/\alpha}-\frac{d_t}{k_t}(1+r_t)$$

$$\frac{d_t}{k_t}\left\{\alpha\left[1-\frac{\beta}{(1+\beta)}\right]\right\}A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-\frac{d_t}{k_t}(1+r_t)$$

$$\frac{d_t}{k_t}\left\{\frac{\alpha}{(1+\beta)}\right\}A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-\frac{d_t}{k_t}(1+\alpha A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha})$$

$$-\frac{d_t}{k_t}\left\{1+\alpha A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-\frac{\alpha}{(1+\beta)}A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\right\}$$

$$-\frac{d_t}{k_t}\left\{1+\frac{\alpha\beta}{(1+\beta)}A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\right\}$$

Parte que não depende de $\frac{d_t}{k_t}$

$$-1+\left[\frac{\beta}{(1+\beta)}\left(1-\frac{(g+x-\gamma)}{(1-\alpha)}-(\rho\eta-\tau_p)-\tau_p\right)-\frac{\rho}{(1+\beta)(1+r_{t+1})}\right](1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-(g+x)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}+\left[\frac{(g+x-\gamma)}{(1-\alpha)}+(\rho\eta-\tau_p)+\tau_p-\rho\eta\right](1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}=$$

$$-1+\left[\frac{\beta}{(1+\beta)}\left(1-\frac{(g+x-\gamma)}{(1-\alpha)}-\rho\eta\right)-\frac{\rho}{(1+\beta)(1+r_{t+1})}\right](1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-(g+x)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}+\left[\frac{(g+x-\gamma)}{(1-\alpha)}\right](1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}=$$

$$-1+\frac{\beta}{(1+\beta)}\left[1+\frac{(\gamma-g-x)}{(1-\alpha)}-\rho\eta-\frac{\rho}{\beta(1+r_{t+1})}\right](1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-\gamma A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}=$$

$$-1+\frac{\beta}{(1+\beta)}\left[(1-\alpha)+(\gamma-g-x)-(1-\alpha)\rho\left(\eta+\frac{1}{\beta(1+r_{t+1})}\right)\right]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-\gamma A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha-1}=$$

$$-1+\frac{\beta}{(1+\beta)}\left\{(\gamma-g-x)+(1-\alpha)\left[1-\rho\left(\eta+\frac{1}{\beta(1+r_{t+1})}\right)\right]\right\}A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-\gamma A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha-1}=$$

Logo:

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = \frac{\beta}{(1+\beta)}\left\{(\gamma - g - x) + (1-\alpha)\left[1-\rho\left(\eta + \frac{1}{\beta(1+r_{t+1})}\right)\right]\right\}A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} - \gamma A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha - 1} - \frac{d_t}{k_t}\left\{1 + \frac{\alpha\beta}{(1+\beta)}A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\right\} - 1$$

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = \frac{\beta}{(1+\beta)}\left\{(\gamma - g - x) + (1-\alpha)\left[1-\rho\left(\eta + \frac{1}{\beta(1+r_{t+1})}\right)\right]\right\}A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} - -\gamma A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha - 1} - \left[1 + \frac{\beta}{(1+\beta)}\alpha A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\right]\left(\frac{d_t}{k_t}\right) - 1 \quad (2.15)$$

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = FunçãoLinear\left(\frac{d_t}{k_t}\right) \quad (2.15a)$$

<u>Equilíbrio – ajuste via imposto</u>

Outro equilíbrio possível neste modelo quando o ajuste é via tributação, que ocorre sem deslocar as intersecções das duas curvas (2.15) e (2.16). Este equilíbrio permanece com grande semelhança ao do modelo original. A imposição de $\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = \frac{d_{t+1}-d_t}{d_t}$ leva a:

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = -1 + \frac{\beta}{(1+\beta)}\left[(g + x - \gamma) + (1-\alpha)(1-\rho\eta) - \frac{\rho(1-\alpha)}{\beta(1+r_{t+1})}\right]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} - \gamma A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} - \frac{d_t}{k_t}\left\{1 + \frac{\alpha\beta}{(1+\beta)}A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\right\} \quad (2.15)$$

$$\frac{d_{t+1}-d_t}{d_t} = \frac{d_{t+1}-d_t}{d_t}\frac{y_t}{y_t} = \frac{\gamma y_t}{d_t} = \gamma A^{1/\alpha}\ x^{(1-\alpha)/\alpha}\ \frac{k_t}{d_t} \quad (2.16)$$

Estado estacionário: $\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = \frac{d_{t+1}-d_t}{d_t}$

$$-1 + \frac{\beta}{(1+\beta)}\left[(g + x - \gamma) + (1-\alpha)(1-\rho\eta) - \frac{\rho(1-\alpha)}{\beta(1+r_{t+1})}\right]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} - \gamma A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} - \frac{d_t}{k_t}\left\{1 + \frac{\alpha\beta}{(1+\beta)}A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\right\} = \gamma A^{1/\alpha}\ x^{(1-\alpha)/\alpha}\ \frac{k_t}{d_t}$$

$$\left[1 + \frac{\beta}{(1+\beta)}\alpha A^{1/\alpha}\ x^{(1-\alpha)/\alpha}\right]\left(\frac{d_t}{k_t}\right)^2 - \left\{\frac{\beta}{(1+\beta)}\left[(g + x - \gamma) + (1-\alpha)(1-\rho\eta) - \frac{\rho(1-\alpha)}{\beta(1+r_{t+1})}\right]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} - \gamma\ A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} - 1\right\}\left(\frac{d_t}{k_t}\right) + \gamma A^{1/\alpha}\ x^{(1-\alpha)/\alpha} = 0$$

$$J \equiv 1 + \frac{\beta}{(1+\beta)}\alpha A^{1/\alpha}\ x^{(1-\alpha)/\alpha}$$

$$W \equiv \frac{\beta}{(1+\beta)}\left[(g + x - \gamma) + (1-\alpha)(1-\rho\eta) - \frac{\rho(1-\alpha)}{\beta(1+r_{t+1})}\right] - \gamma$$

$$J\left(\frac{d_t}{k_t}\right)^2-\left(WA^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-1\right)\left(\frac{d_t}{k_t}\right)+\gamma A^{1/\alpha}\ x^{(1-\alpha)/\alpha}=0$$

$$\Delta=\left[WA^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-1\right]^2-4J\gamma A^{1/\alpha}\ x^{(1-\alpha)/\alpha}$$

$$H\equiv\frac{\Delta}{J^2}=\left[\frac{WA^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-1}{J}\right]^2-4\gamma\frac{A^{1/\alpha}\ x^{(1-\alpha)/\alpha}}{J}$$

$$=>\Delta=HJ^2$$

$$\left(\frac{d_t}{k_t}\right)=\frac{WA^{1/\alpha}\ x^{(1-\alpha)/\alpha}-1\pm J\sqrt{H}}{2J} \tag{2.17}$$

Onde:

$$J\equiv 1+\frac{\beta}{(1+\beta)}\alpha A^{1/\alpha}\ x^{(1-\alpha)/\alpha}$$

$$W\equiv\frac{\beta}{(1+\beta)}\left[(g+x-\gamma)+(1-\alpha)(1-\rho\eta)-\frac{\rho(1-\alpha)}{\beta(1+r_{t+1})}\right]$$

$$H\equiv\left[\frac{WA^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-1}{J}\right]^2-4\gamma\frac{A^{1/\alpha}\ x^{(1-\alpha)/\alpha}}{J}$$

6.2 – Anexo – derivação das eq. de ajuste via dívida (2.18) a (2.20)

Ajuste via dívida:

Necessidades orçamentárias são endereçadas com emissão de dívida. A limitação desta abordagem será identificada com a análise simultânea do capital e da dívida.

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t}=-1+\frac{s_t}{k_t}-\frac{d_{t+1}}{k_t}$$

$$y_t=A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}k_t \tag{2.7}$$

$$d_{t+1}-d_t=r_t d_t+[(g+x)y_t-\tau_o\ w_t]+\psi_t w_t(1+n)^{-1} \tag{2.8}$$

$$s_t^t=\frac{\beta}{(1+\beta)}(1-\tau)w_t-\frac{\tau_p(1+n)+\psi_t}{(1+\beta)(1+r_{t+1})}w_t \tag{2.9}$$

Partindo-se de $s_t=k_{t+1}-k_t(1-\delta)+d_{t+1}$ e considerando $\delta=1$, obtém-se:

$$r_t=\frac{\partial y_t}{\partial k_t}=\alpha\ A^{1/\alpha}\ x^{(1-\alpha)/\alpha} \tag{2.10}$$

$$w_t = y_t - k_t \frac{\partial y_t}{\partial k_t} = (1-\alpha)\, A^{1/\alpha}\, x^{(1-\alpha)/\alpha}\, k_t \tag{2.11}$$

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = -1 + \frac{s_t}{k_t} - \frac{d_{t+1}}{k_t} \tag{2.13}$$

$$s_t^t = \left[\frac{\beta}{(1+\beta)}(1-\tau) - \frac{\rho}{(1+\beta)(1+r_{t+1})}\right](1-\alpha)\, A^{1/\alpha}\, x^{(1-\alpha)/\alpha}\, k_t \tag{2.9a}$$

$$\gamma \equiv \frac{d_{t+1}-d_t}{y_t}$$

A dinâmica da relação dívida-PIB é descrita através da relação que segue:

$$\gamma y_t = r_t d_t + [(g+x)y_t - \tau_o\, w_t] + \psi_t w_t (1+n)^{-1}$$

$$\gamma y_t + d_t = (1+r_t)d_t + [(g+x)y_t - \tau_o\, w_t] + \psi_t w_t (1+n)^{-1}$$

$$\frac{\gamma y_t + d_t}{k_t} = (1+r_t)\frac{d_t}{k_t} + \left[(g+x)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} - \tau_o(1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\right] + \psi_t(1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}(1+n)^{-1}$$

$$\frac{\gamma y_t + d_t}{k_t} = (1+r_t)\frac{d_t}{k_t} + [(g+x) - \tau_o(1-\alpha) + \psi_t(1-\alpha)(1+n)^{-1}]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}$$

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = -1 + \frac{s_t}{k_t} - \frac{d_{t+1}}{k_t} = -1 + \frac{s_t}{k_t} - \frac{\gamma y_t + d_t}{k_t}$$

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = -1 + \left[\frac{\beta}{(1+\beta)}(1-\tau) - \frac{\rho}{(1+\beta)(1+r_{t+1})}\right](1-\alpha)\, A^{1/\alpha}\, x^{(1-\alpha)/\alpha} - (1+r_t)\frac{d_t}{k_t} + [(g+x) - \tau_o(1-\alpha) + \psi_t(1-\alpha)(1+n)^{-1}]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}$$

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = \frac{\beta}{(1+\beta)}(1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\left[(1-\tau) - \frac{\rho}{\beta(1+r_{t+1})}\right] - [(g+x) - \tau_o(1-\alpha) + \psi_t\eta(1-\alpha)]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} - \left(1+\alpha A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\right)\frac{d_t}{k_t} - 1$$

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = \frac{\beta}{(1+\beta)}(1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\left[\left(1-\tau_o-\tau_p\right) - \frac{\rho}{\beta(1+r_{t+1})}\right] - [(g+x) - \tau_o(1-\alpha) + \psi_t\eta(1-\alpha)]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} - \left(1+\alpha A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\right)\frac{d_t}{k_t} - 1$$

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = \frac{\beta}{(1+\beta)}(1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}[(1-\tau_o)] -$$

$$-[(g+x) - \tau_o(1-\alpha)]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} -$$

$$-\left[\frac{\beta}{(1+\beta)}\left(\tau_p + \frac{\rho}{\beta(1+r_{t+1})}\right) + \psi_t\eta\right](1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha} -$$

$$-\left(1+\alpha A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\right)\left(\frac{d_t}{k_t}\right)-1$$

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t}=\frac{\beta}{(1+\beta)}(1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}[(1-\tau_o)]-$$

$$-[(g+x)-\tau_o(1-\alpha)]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-$$

$$-\left[\frac{\beta}{(1+\beta)}\left(\tau_p+\frac{\rho}{\beta(1+r_{t+1})}\right)+\left(\rho\eta-\tau_p\right)\right](1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-$$

$$-\left(1+\alpha A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\right)\left(\frac{d_t}{k_t}\right)-1 \qquad (2.18)$$

Substituindo as equações (2.7), (2.10) e (2.11) na equação (2.8), a dinâmica de crescimento da dívida pode ser escrita como:

$$\frac{d_{t+1}-d_t}{d_t}=\alpha\ A^{1/\alpha}\ x^{(1-\alpha)/\alpha}+[(g+x)-(\tau_o-\psi_t\eta)\ (1-\alpha)]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\left(\frac{k_t}{d_t}\right) \qquad (2.19)$$

O equilíbrio possível neste modelo quando o ajuste é via dívida permanece com grande semelhança ao do modelo original. A imposição de $\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t}=\frac{d_{t+1}-d_t}{d_t}$ de (2.23) e (2.24) leva a:

$$\frac{\beta}{(1+\beta)}(1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\left[\left(1-\tau_o-\tau_p\right)-\frac{\rho}{\beta(1+r_{t+1})}\right]-[(g+x)+\psi_t\eta(1-\alpha)-\tau_o(1-\alpha)]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-\left(1+\alpha A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\right)\frac{d_t}{k_t}-1=\alpha\ A^{1/\alpha}\ x^{(1-\alpha)/\alpha}+[(g+x)-(\tau_o-\psi_t\eta)(1-\alpha)]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\left(\frac{k_t}{d_t}\right)$$

$$\left(1+\alpha A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\right)\left(\frac{d_t}{k_t}\right)^2-\left\{\frac{\beta}{(1+\beta)}(1-\alpha)A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}\left[(1-\tau)-\frac{\rho}{\beta(1+r_{t+1})}\right]-[(g+x)+\psi_t\eta(1-\alpha)-\tau_o(1-\alpha)-\alpha]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-1\right\}\left(\frac{d_t}{k_t}\right)+[(g+x)-(\tau_o-\psi_t\eta)(1-\alpha)]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}=0$$

$$W'\equiv\frac{\beta}{(1+\beta)}(1-\alpha)\left[\left(1-\tau_o-\tau_p\right)-\frac{\rho}{\beta(1+r_{t+1})}\right]-[(g+x)+\psi_t\eta(1-\alpha)-\tau_o(1-\alpha)]-\alpha$$

$$J'\equiv 1+\alpha A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}$$

$$J'\left(\frac{d_t}{k_t}\right)^2-\left(W'A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}-1\right)\left(\frac{d_t}{k_t}\right)+[(g+x)-(\tau_o-\psi_t\eta)\ (1-\alpha)]A^{1/\alpha}x^{(1-\alpha)/\alpha}=0$$

$$\Delta' = \left[W' A^{1/\alpha} x^{(1-\alpha)/\alpha} - 1\right]^2 - 4J'\left[(g+x) - (\tau_o - \psi_t \eta)\ (1-\alpha)\right] A^{1/\alpha} x^{(1-\alpha)/\alpha}$$

$$H' \equiv \frac{\Delta'}{(J')^2} = \left[\frac{W' A^{1/\alpha} x^{(1-\alpha)/\alpha} - 1}{J'}\right]^2 - 4\left[(g+x) - (\tau_o - \psi_t \eta)\ (1-\alpha)\right] \frac{A^{1/\alpha} x^{(1-\alpha)/\alpha}}{J'}$$

$$H' \equiv \left[\frac{W' A^{1/\alpha} x^{(1-\alpha)/\alpha} - 1}{J'}\right]^2 - 4\left[(g+x) - (\tau_o - \psi_t \eta)\ (1-\alpha)\right] \frac{A^{1/\alpha} x^{(1-\alpha)/\alpha}}{J'}$$

$$=> \Delta = H'(J')^2$$

$$\left(\frac{d_t}{k_t}\right) = \frac{W' A^{1/\alpha}\, x^{(1-\alpha)/\alpha} - 1 \pm J' \sqrt{H'}}{2J'} \qquad (2.20)$$

Onde:

$$J' \equiv 1 + \alpha A^{1/\alpha} x^{(1-\alpha)/\alpha}$$

$$W' \equiv \frac{\beta}{(1+\beta)}(1-\alpha)\left[(1-\tau) - \frac{\rho}{\beta\,(1+r_{t+1})}\right] - \left[(g+x) + \psi_t \eta (1-\alpha) - \tau_o (1-\alpha)\right] - \alpha$$

$$H' \equiv \left[\frac{W' A^{1/\alpha} x^{(1-\alpha)/\alpha} - 1}{J'}\right]^2 - 4\left[(g+x) - (\tau_o - \psi_t \eta)(1-\alpha)\right] \frac{A^{1/\alpha} x^{(1-\alpha)/\alpha}}{J'}$$

6.3 – Anexo – derivação das eq. (3.11a) e (3.11b)

As propensões marginais a poupar ($\sigma_t^{i,j}$) simplificam algumas passagens nas derivações das equações que seguem e são dadas por:

$$\sigma_t^{s,u} \equiv \beta\left\{1 - \theta\mathcal{T} - \tau_p\left[1 + \frac{(1-\pi_t + \varepsilon\pi_t)}{\varepsilon}\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\}$$

$$\sigma_t^{u,u} \equiv \beta\left\{1 - \theta\mathcal{T} - \tau_p\left[1 + (1-\pi_t + \varepsilon\pi_t)\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\}$$

$$\sigma_t^{s,s} \equiv \beta\left\{1 - \theta\mathcal{T} - \tau_p\left[1 + \frac{(1-\pi_t + \varepsilon\pi_t)}{\varepsilon}\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\} - (\mu - \theta)\beta$$

$$\sigma_t^{s,s} = \sigma_t^{s,u} - (\mu - \theta)\beta$$

$$\sigma_t^{u,s} \equiv \beta\left\{1 - \theta\mathcal{T} - \tau_p\left[1 + (1-\pi_t + \varepsilon\pi_t)\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\} - (\mu - \theta)\varepsilon\beta$$

$$\sigma_t^{u,s} = \sigma_t^{u,u} - (\mu - \theta)\varepsilon\beta$$

Pais com escolaridade maior:

- $V_t^{i,s,u} = (1-\beta)\ln\left\{w_t^s\left(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}\right)-w_t^s\sigma_t^{s,u}\right\}+\beta\ln\left\{(1+r_{t+1})w_t^s\sigma_t^{s,u}+\zeta\tau_p\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon}w_t^s\right\}+\gamma^i\ln\{w_{t+1}^u\}$
- $V_t^{i,s,s} = (1-\beta)\ln\left\{w_t^s\left(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}\right)-(\mu-\theta)w_t^s-w_t^s[\sigma_t^{s,u}-(\mu-\theta)\beta]\right\}+\beta\ln\left\{(1+r_{t+1})w_t^s[\sigma_t^{s,u}-(\mu-\theta)\beta]+\zeta\tau_p\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon}w_t^s\right\}+\gamma^i\ln\{w_{t+1}^s\}$

γ^s que torna $V_t^{i,s,s}-V_t^{i,s,u}>0$ quando $\gamma^i>\gamma^s$ é dado por:

$$(1-\beta)\ln\left\{\frac{w_t^s\left(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}\right)-(\mu-\theta)w_t^s-w_t^s[\sigma_t^{s,u}-(\mu-\theta)\beta]}{w_t^s\left(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}\right)-w_t^s\sigma_t^{s,u}}\right\}+$$
$$\beta\ln\left\{\frac{(1+r_{t+1})w_t^s[\sigma_t^{s,u}-(\mu-\theta)\beta]+\zeta\tau_p\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon}w_t^s}{(1+r_{t+1})w_t^s\sigma_t^{s,u}+\zeta\tau_p\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon}w_t^s}\right\}+\gamma^i\ln\left\{\frac{w_{t+1}^s}{w_{t+1}^u}\right\}>0$$

$$\gamma^i\ln\{\varepsilon\}>-(1-\beta)\ln\left\{\frac{\left(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}\right)-(\mu-\theta)-[\sigma_t^{s,u}-(\mu-\theta)\beta]}{\left(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}\right)-\sigma_t^{s,u}}\right\}-$$
$$\beta\ln\left\{\frac{(1+r_{t+1})[\sigma_t^{s,u}-(\mu-\theta)\beta]+\zeta\tau_p\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon}}{(1+r_{t+1})\sigma_t^{s,u}+\zeta\tau_p\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon}}\right\}$$

$$\gamma^i>-\frac{(1-\beta)\ln\left\{1-\frac{(1-\beta)(\mu-\theta)}{(1-\tau_p-\theta\mathcal{T})-\sigma_t^{s,u}}\right\}+\beta\ln\left\{1-\frac{\beta(\mu-\theta)}{\sigma_t^{s,u}+\zeta\tau_p\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon(1+r_{t+1})}}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}}$$

$$\gamma^i>$$
$$-\frac{(1-\beta)\ln\left\{1-\frac{(1-\beta)(\mu-\theta)}{(1-\tau_p-\theta\mathcal{T})-\beta\left\{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1+\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon}\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\}}\right\}+\beta\ln\left\{1-\frac{\beta(\mu-\theta)}{\beta\left\{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1+\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon}\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\}+\zeta\tau_p\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon(1+r_{t+1})}}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}}$$

$$\gamma^i>$$
$$-\frac{(1-\beta)\ln\left\{1-\frac{(1-\beta)(\mu-\theta)}{(1-\tau_p-\theta\mathcal{T})-\beta\{1-\theta\mathcal{T}\}+\beta\tau_p\left[1+\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon}\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]}\right\}+\beta\ln\left\{1-\frac{(\mu-\theta)}{\left\{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1+\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon}\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\}+\zeta\tau_p\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon(1+r_{t+1})\beta}}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}}$$

$$\gamma^i>-\frac{(1-\beta)\ln\left\{1-\frac{(1-\beta)(\mu-\theta)}{(1-\theta\mathcal{T})-\beta\{1-\theta\mathcal{T}\}-\tau_p\left[1-\beta-\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon}\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})}\right]}\right\}+\beta\ln\left\{1-\frac{(\mu-\theta)}{\left\{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1+\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon}\frac{\zeta(-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\}}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}}$$

$$\gamma^i>-\frac{(1-\beta)\ln\left\{1-\frac{(\mu-\theta)}{(1-\theta\mathcal{T})-\tau_p\left[1-\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon(1+r_{t+1})}\right]}\right\}+\beta\ln\left\{1-\frac{(\mu-\theta)}{\left\{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1-\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon(1+r_{t+1})}\right]\right\}}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}}$$

$$\gamma^s > -\frac{\ln\left\{1-\frac{(\mu-\theta)}{(1-\theta\mathcal{T})-\tau_p\left[1-\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon(1+r_{t+1})}\right]}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}} = -\frac{\ln\left\{1-\frac{(\mu-\theta)}{(1-\theta\mathcal{T})-\tau_p\wp^s}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}} \qquad (3.11a)$$

Onde: $\wp^s \equiv 1-\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon(1+r_{t+1})} = 1-\frac{\rho_t^s}{\tau_p(1+r_{t+1})} > 0 => \frac{\partial\gamma^s}{\partial\tau_p} > 0$

Onde: $\wp^s \equiv 1-\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon(1+r_{t+1})} = 1-\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon(1+r_{t+1})}+\frac{(1-\zeta)(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon(1+r_{t+1})} = \frac{\varepsilon+r_{t+1}\varepsilon-1+\pi_t-\varepsilon\pi_t}{\varepsilon(1+r_{t+1})} +$
$\frac{(1-\zeta)(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon(1+r_{t+1})} = \frac{r_{t+1}\varepsilon-(1-\pi_t)+\varepsilon(1-\pi_t)}{\varepsilon(1+r_{t+1})}+\frac{(1-\zeta)[1+\varepsilon(1-\pi_t)]}{\varepsilon(1+r_{t+1})} = \frac{r_{t+1}\varepsilon+(\varepsilon-1)(1-\pi_t)}{\varepsilon(1+r_{t+1})} +$
$\frac{(1-\zeta)[1+\varepsilon(1-\pi_t)]}{\varepsilon(1+r_{t+1})} > 0$, lembrando que $\zeta \leq 1$

Condição de não armadilha de γ^s: $\tau_p\wp^s < (1-\mu)+(1-\mathcal{T})\theta$ (3.12a)

$$\tau_p\wp^s < (1-\mu)+(1-\mathcal{T})\theta$$

$$\tau_p\left[1-\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon(1+r_{t+1})}\right] < (1-\mu)+(1-\mathcal{T})\theta$$

$$\left[1-\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon(1+r_{t+1})}\right] < \frac{(1-\mu)+(1-\mathcal{T})\theta}{\tau_p}$$

$$\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon(1+r_{t+1})} > 1-\frac{(1-\mu)+(1-\mathcal{T})\theta}{\tau_p}$$

$$\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})} > \varepsilon\left[1-\frac{(1-\mu)+(1-\mathcal{T})\theta}{\tau_p}\right]$$

$$\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})} > \varepsilon-\frac{\varepsilon(1-\mu)+\varepsilon(1-\mathcal{T})\theta}{\tau_p} = \varepsilon-\frac{(\varepsilon-\varepsilon\mu)+(\varepsilon-\varepsilon\mathcal{T})\theta}{\tau_p} = 1-1+\varepsilon-\frac{(1-1+\varepsilon-\varepsilon\mu)+(\varepsilon-\varepsilon\mathcal{T}+\mathcal{T}-\mathcal{T})\theta}{\tau_p}$$

$$\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})} > \left[1-\frac{(1-\varepsilon\mu)+(\varepsilon-\mathcal{T})\theta}{\tau_p}\right]+\left[-1+\varepsilon-\frac{(-1+\varepsilon)+(-\varepsilon\mathcal{T}+\mathcal{T})\theta}{\tau_p}\right]$$

$$\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})} > \left[1-\frac{(1-\varepsilon\mu)+(\varepsilon-\mathcal{T})\theta}{\tau_p}\right]+\left[(\varepsilon-1)-\frac{(\varepsilon-1)-(\varepsilon-1)\theta\mathcal{T}}{\tau_p}\right]$$

$$\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})} > \left[1-\frac{(1-\varepsilon\mu)+(\varepsilon-\mathcal{T})\theta}{\tau_p}\right]+\left[\frac{(\varepsilon-1)\tau_p-(\varepsilon-1)+(\varepsilon-1)\theta\mathcal{T}}{\tau_p}\right]$$

$$\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})} > \left[1-\frac{(1-\varepsilon\mu)+(\varepsilon-\mathcal{T})\theta}{\tau_p}\right]+\left[\frac{(\varepsilon-1)(\tau_p-1+\theta\mathcal{T})}{\tau_p}\right]$$

$$\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})} > \left[1-\frac{(1-\varepsilon\mu)+(\varepsilon-\mathcal{T})\theta}{\tau_p}\right]-\left[\frac{(\varepsilon-1)(1-\tau_p-\theta\mathcal{T})}{\tau_p}\right]$$

$$\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})} > \left[1-\frac{(1-\varepsilon\mu)+(\varepsilon-\mathcal{T})\theta}{\tau_p}\right]-\left[\frac{(\varepsilon-1)(1-\tau_p-\tau_e)}{\tau_p}\right]$$

$$\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})} > \left[1-\frac{(1-\varepsilon\mu)+(\varepsilon-\mathcal{T})\theta}{\tau_p}\right]-\left[\frac{(\varepsilon-1)(1-\tau_p-\tau_e)}{\tau_p}\right]$$

$(3.18b) - [> 0]$

<u>Pais com escolaridade menor:</u>

- $V_t^{i,u,u} = (1-\beta)\ln\{w_t^u(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}) - w_t^u\sigma_t^{u,u}\} + \beta\ln\{(1+r_{t+1})w_t^u\sigma_t^{u,u} + \zeta\tau_p(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)w_t^u\} + \gamma^i\ln\{w_{t+1}^u\}$
- $V_t^{i,u,s} = (1-\beta)\ln\{w_t^u(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}) - \varepsilon(\mu-\theta)w_t^u - w_t^u[\sigma_t^{u,u} - (\mu-\theta)\varepsilon\beta]\} + \beta\ln\{(1+r_{t+1})w_t^u[\sigma_t^{u,u} - (\mu-\theta)\varepsilon\beta] + \zeta\tau_p(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)w_t^u\} + \gamma^i\ln\{w_{t+1}^s\}$

γ^u que torna $V_t^{i,u,s} - V_t^{i,u,u} > 0$ quando $\gamma^i > \gamma^u$ é dado por:

$$(1-\beta)\ln\left\{\frac{w_t^u(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}) - \varepsilon(\mu-\theta)w_t^u - w_t^u[\sigma_t^{u,u} - (\mu-\theta)\varepsilon\beta]}{w_t^u(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}) - w_t^u\sigma_t^{u,u}}\right\} +$$
$$\beta\ln\left\{\frac{(1+r_{t+1})w_t^u[\sigma_t^{u,u} - (\mu-\theta)\varepsilon\beta] + \zeta\tau_p(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)w_t^u}{(1+r_{t+1})w_t^u\sigma_t^{u,u} + \zeta\tau_p(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)w_t^u}\right\} + \gamma^i\ln\left\{\frac{w_{t+1}^s}{w_{t+1}^u}\right\} > 0$$

$$\gamma^i > -\frac{(1-\beta)\ln\left\{\frac{w_t^u(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}) - \varepsilon(\mu-\theta)w_t^u - w_t^u\left[\sigma_t^{u,u} - (\mu-\theta)\varepsilon\beta\right]}{w_t^u(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}) - w_t^u\sigma_t^{u,u}}\right\} + \beta\ln\left\{\frac{(1+r_{t+1})w_t^u\left[\sigma_t^{u,u} - (\mu-\theta)\varepsilon\beta\right] + \zeta\tau_p(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)w_t^u}{(1+r_{t+1})w_t^u\sigma_t^{u,u} + \zeta\tau_p(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)w_t^u}\right\}}{\ln\left\{\frac{w_{t+1}^s}{w_{t+1}^u}\right\}}$$

$$\gamma^i > -\frac{(1-\beta)\ln\left\{\frac{(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}) - \varepsilon(\mu-\theta) - \left[\sigma_t^{u,u} - (\mu-\theta)\varepsilon\beta\right]}{(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}) - \sigma_t^{u,u}}\right\} + \beta\ln\left\{\frac{(1+r_{t+1})\left[\sigma_t^{u,u} - (\mu-\theta)\varepsilon\beta\right] + \zeta\tau_p(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})\sigma_t^{u,u} + \zeta\tau_p(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}}$$

$$\gamma^i > -\frac{(1-\beta)\ln\left\{1 - \frac{\varepsilon(\mu-\theta)}{(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}) - \sigma_t^{u,u}}\right\} + \beta\ln\left\{1 - \frac{(\mu-\theta)\varepsilon\beta}{\sigma_t^{u,u} + \frac{\zeta\tau_p(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})}}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}}$$

$$\sigma_t^{u,u} \equiv \beta\left\{1 - \theta\mathcal{T} - \tau_p\left[1 + (1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\}$$

$$\gamma^i >$$
$$-\frac{(1-\beta)\ln\left\{1 - \frac{(1-\beta)\varepsilon(\mu-\theta)}{(1-\tau_p-\theta\mathcal{T}) - \beta\left\{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1+(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\}}\right\} + \beta\ln\left\{1 - \frac{(\mu-\theta)\varepsilon\beta}{\beta\left\{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1+(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\} + \frac{\zeta\tau_p(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})}}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}}$$

$$\gamma^i >$$

$$-\frac{(1-\beta)\ln\left\{1-\frac{(1-\beta)\varepsilon(\mu-\theta)}{(1-\theta\mathcal{T})-\beta(1-\theta\mathcal{T})-\tau_p\left[1-\beta-(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})}\right]}\right\}+\beta\ln\left\{1-\frac{(\mu-\theta)\varepsilon}{\left\{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1+(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\}+\frac{\zeta\tau_p(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\beta(1+r_{t+1})}}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}}$$

$$\gamma^i > -\frac{(1-\beta)\ln\left\{1-\frac{\varepsilon(\mu-\theta)}{(1-\theta\mathcal{T})-\tau_p\left[1-\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})}\right]}\right\}+\beta\ln\left\{1-\frac{(\mu-\theta)\varepsilon}{\left\{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1+(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)\frac{\zeta(-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\}}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}}$$

$$\gamma^i > -\frac{(1-\beta)\ln\left\{1-\frac{\varepsilon(\mu-\theta)}{(1-\theta\mathcal{T})-\tau_p\left[1-\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})}\right]}\right\}+\beta\ln\left\{1-\frac{(\mu-\theta)\varepsilon}{\left\{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1-\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})}\right]\right\}}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}}$$

$$\gamma^u > -\frac{\ln\left\{1-\frac{\varepsilon(\mu-\theta)}{(1-\theta\mathcal{T})-\tau_p\left[1-\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})}\right]}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}} = -\frac{\ln\left\{1-\frac{\varepsilon(\mu-\theta)}{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\wp^u}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}} \qquad (3.11b)$$

Onde: $\wp^u \equiv 1-\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})} = 1-\frac{\rho_t^u}{\tau_p(1+r_{t+1})} \underset{<}{\overset{>}{=}} 0 \Rightarrow \frac{\partial\gamma^u}{\partial\tau_p} \underset{<}{\overset{>}{=}} 0$

Onde: $\wp^u \equiv 1-\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})} = 1-\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})}+\frac{(1-\zeta)(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})} = \frac{1+r_{t+1}-1+\pi_t-\varepsilon\pi_t}{(1+r_{t+1})}+$ $\frac{(1-\zeta)[1+\varepsilon(1-\pi_t)]}{(1+r_{t+1})} = \frac{r_{t+1}-(\varepsilon-1)\pi_t}{(1+r_{t+1})}+\frac{(1-\zeta)[1+\varepsilon(1-\pi_t)]}{(1+r_{t+1})} \underset{<}{\overset{>}{=}} 0$, logo $\frac{\partial\gamma^u}{\partial\tau_p}$ pode assumir os dois sinais algébricos, lembrando que $\zeta \leq 1$

$$\gamma^u = -\frac{\ln\left\{1-\frac{\varepsilon(\mu-\theta)}{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\wp^u}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}}$$

Condição de não armadilha de γ^u: $\tau_p\wp^u < (1-\varepsilon\mu)+(\varepsilon-\mathcal{T})\theta$ (3.12b)

$$\tau_p\wp^u < (1-\varepsilon\mu)+(\varepsilon-\mathcal{T})\theta$$

$$\tau_p\left[1-\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})}\right] < (1-\varepsilon\mu)+(\varepsilon-\mathcal{T})\theta$$

$$\left[1-\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})}\right] < \frac{(1-\varepsilon\mu)+(\varepsilon-\mathcal{T})\theta}{\tau_p}$$

$$\frac{\zeta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{(1+r_{t+1})} > 1-\frac{(1-\varepsilon\mu)+(\varepsilon-\mathcal{T})\theta}{\tau_p}$$

Derivadas dos γ's

$$1-\frac{\varepsilon(\mu-\theta)}{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\wp^i}=\frac{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\wp^i-\varepsilon\mu+\varepsilon\theta}{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\wp^i}=\frac{\left(1-\tau_p\wp^u-\varepsilon\mu\right)+\theta(\varepsilon-\mathcal{T})}{\left(1-\tau_p\wp^u\right)-\theta\mathcal{T}}$$

$$\gamma^u=-\frac{\ln\left\{\frac{A+\theta(\varepsilon-\mathcal{T})}{B-\theta\mathcal{T}}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}}$$

$A=\left(1-\tau_p\wp^u-\varepsilon\mu\right)$ e $B=\left(1-\tau_p\wp^u\right)$

$$\frac{\partial\ln\left\{\frac{A+\theta(\varepsilon-\mathcal{T})}{B-\theta\mathcal{T}}\right\}}{\partial\theta}=\frac{B-\theta\mathcal{T}}{A+\theta(\varepsilon-\mathcal{T})}\frac{(\varepsilon-\mathcal{T})(B-\theta\mathcal{T})+[A+\theta(\varepsilon-\mathcal{T})]\mathcal{T}}{(B-\theta\mathcal{T})^2}=\frac{(\varepsilon-\mathcal{T})(B-\theta\mathcal{T})+[A+\theta(\varepsilon-\mathcal{T})]\mathcal{T}}{[A+\theta(\varepsilon-\mathcal{T})](B-\theta\mathcal{T})}=$$

$$\frac{B\varepsilon-\theta\mathcal{T}\varepsilon-B\mathcal{T}+\theta\mathcal{T}^2+A\mathcal{T}+(\varepsilon-\mathcal{T})\theta\mathcal{T}}{AB-A\mathcal{T}\theta+(\varepsilon-\mathcal{T})B\theta-(\varepsilon-\mathcal{T})\mathcal{T}\theta^2}=\frac{(B\varepsilon-B\mathcal{T}+A\mathcal{T})+\theta\left[-\mathcal{T}\varepsilon+\mathcal{T}^2+(\varepsilon-\mathcal{T})\mathcal{T}\right]}{AB-A\mathcal{T}\theta+(\varepsilon-\mathcal{T})B\theta-(\varepsilon-\mathcal{T})\mathcal{T}\theta^2}$$

$$\frac{(B\varepsilon-B\mathcal{T}+A\mathcal{T})}{AB+(\varepsilon-\mathcal{T}-A\mathcal{T})B\theta-(\varepsilon-\mathcal{T})\mathcal{T}\theta^2}=\frac{\varepsilon-\tau_p\wp^i\varepsilon-\mathcal{T}+\tau_p\wp^u\mathcal{T}+\mathcal{T}-\tau_p\wp^u\mathcal{T}-\varepsilon\mu\mathcal{T}}{\left(1-\tau_p\wp^u-\varepsilon\mu\right)\left(1-\tau_p\wp^u\right)+\left[\varepsilon-\mathcal{T}-\left(1-\tau_p\wp^u-\varepsilon\mu\right)\mathcal{T}\right]\left(1-\tau_p\wp^u\right)\theta-(\varepsilon-\mathcal{T})\mathcal{T}\theta^2}$$

$$\frac{\partial\ln\left\{\frac{A+\theta(\varepsilon-\mathcal{T})}{B-\theta\mathcal{T}}\right\}}{\partial\theta}=\frac{\varepsilon\left(1-\tau_p\wp^u-\mu\mathcal{T}\right)}{\left(1-\tau_p\wp^u-\varepsilon\mu\right)\left(1-\tau_p\wp^u\right)+\left[\varepsilon-\mathcal{T}-\left(1-\tau_p\wp^u-\varepsilon\mu\right)\mathcal{T}\right]\left(1-\tau_p\wp^u\right)\theta-(\varepsilon-\mathcal{T})\mathcal{T}\theta^2}$$

$$\frac{\partial\gamma^u}{\partial\theta}=-\frac{1}{\ln\{\varepsilon\}}\frac{\partial\ln\left\{\frac{A+\theta(\varepsilon-\mathcal{T})}{B-\theta\mathcal{T}}\right\}}{\partial\theta}=$$

$$-\frac{1}{\ln\{\varepsilon\}}\frac{\varepsilon\left(1-\tau_p\wp^u-\mu\mathcal{T}\right)}{\left(1-\tau_p\wp^u-\varepsilon\mu\right)\left(1-\tau_p\wp^u\right)+\left[\varepsilon-\mathcal{T}-\left(1-\tau_p\wp^u-\varepsilon\mu\right)\mathcal{T}\right]\left(1-\tau_p\wp^u\right)\theta-(\varepsilon-\mathcal{T})\mathcal{T}\theta^2}$$

$$\frac{\partial\gamma^s}{\partial\theta}=-\frac{1}{\ln\{\varepsilon\}}\frac{\left(1-\tau_p\wp^s-\mu\mathcal{T}\right)}{\left(1-\tau_p\wp^s-\mu\right)\left(1-\tau_p\wp^s\right)+\left[1-\mathcal{T}-\left(1-\tau_p\wp^s-\mu\right)\mathcal{T}\right]\left(1-\tau_p\wp^s\right)\theta-(1-\mathcal{T})\mathcal{T}\theta^2}$$

$$\frac{\partial\gamma^u}{\partial\theta}=-\frac{1}{\ln\{\varepsilon\}}\frac{\varepsilon\left(1-\tau_p\wp^u-\mu\mathcal{T}\right)}{\left(1-\tau_p\wp^u-\varepsilon\mu\right)\left(1-\tau_p\wp^u\right)+\left[\varepsilon-\mathcal{T}-\left(1-\tau_p\wp^u-\varepsilon\mu\right)\mathcal{T}\right]\left(1-\tau_p\wp^u\right)\theta-(\varepsilon-\mathcal{T})\mathcal{T}\theta^2}$$

$$\gamma^u=-\frac{\ln\left\{1-\frac{\varepsilon(\mu-\theta)}{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\wp^u}\right\}}{\ln\{\varepsilon\}}$$

$A=\varepsilon(\mu-\theta)$, $B=1-\theta\mathcal{T}$ e $C=\tau_p$

$$\frac{\partial ln\left(1-\frac{A}{B-Cx}\right)}{\partial x}=\frac{\partial ln\left(\frac{B-Cx-A}{B-Cx}\right)}{\partial x}=\frac{B-Cx}{B-Cx-A}\frac{-C(B-Cx)+(B-Cx-A)C}{(B-Cx)^2}=\frac{-C(B-Cx)+(B-Cx-A)C}{(B-Cx-A)(B-Cx)}=$$
$$\frac{-CB+C^2x+BC-C^2x-AC}{(B-Cx-A)(B-Cx)}$$

$$=\frac{-AC}{(B-Cx-A)(B-Cx)}$$

Raízes no denominador: $\tau_p = \frac{B-A}{\wp^u}$ ou $\tau_p = \frac{B}{\wp^u}$

Raízes no denominador: $\tau_p = \frac{B-A}{\wp^s}$ ou $\tau_p = \frac{B}{\wp^s}$

$$\frac{\partial \gamma^u}{\partial \tau_p} = \frac{1}{\ln\{\varepsilon\}} \frac{\varepsilon(\mu-\theta)\wp^u}{[1-\theta\mathcal{T}-\varepsilon(\mu-\theta)-\tau_p\wp^u](1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\wp^u)}$$

$$\frac{\partial \gamma^s}{\partial \tau_p} = \frac{1}{\ln\{\varepsilon\}} \frac{(\mu-\theta)\wp^s}{[1-\theta\mathcal{T}-(\mu-\theta)-\tau_p\wp^s](1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\wp^s)}$$

$$\wp^u < 0$$

$\tau_p = \frac{1-\theta\mathcal{T}-\varepsilon(\mu-\theta)}{\wp^u}$ ou $\tau_p = \frac{1-\theta\mathcal{T}}{\wp^u}$

6.4 – Anexo – derivação da eq. (3.18)

$$G_{t+1}^K = \frac{S_t}{K_t} = \frac{N}{K_t}\{(1-\pi_t)\left[F(\gamma^u)s_t^{u,u} + \left(1-F(\gamma^u)\right)s_t^{u,s}\right] + \pi_t\left[F(\gamma^s)s_t^{s,u} + \left(1-F(\gamma^s)\right)s_t^{s,s}\right]\}$$

$$G_{t+1}^K = \frac{N}{K_t}w_t^u\{(1-\pi_t)\left[F(\gamma^u)\sigma_t^{u,u} + \left(1-F(\gamma^u)\right)\sigma_t^{u,s}\right] + \pi_t\varepsilon\left[F(\gamma^s)\sigma_t^{s,u} + \left(1-F(\gamma^s)\right)\sigma_t^{s,s}\right]\}$$

$$G_{t+1}^K = \frac{N}{K_t}(1-\alpha)A\frac{K_t}{N}(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)^{-\alpha}\{(1-\pi_t)\left[F(\gamma^u)\sigma_t^{u,u} + \left(1-F(\gamma^u)\right)\sigma_t^{u,s}\right] + \pi_t\varepsilon\left[F(\gamma^s)\sigma_t^{s,u} + \left(1-F(\gamma^s)\right)\sigma_t^{s,s}\right]\}$$

$$G_{t+1}^K = (1-\alpha)A(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)^{-\alpha}\{(1-\pi_t)\left[F(\gamma^u)\sigma_t^{u,u} + \left(1-F(\gamma^u)\right)\sigma_t^{u,s}\right] + \pi_t\varepsilon\left[F(\gamma^s)\sigma_t^{s,u} + \left(1-F(\gamma^s)\right)\sigma_t^{s,s}\right]\}$$

$$(1-\pi_t)\left[F(\gamma^u)\sigma_t^{u,u} + \left(1-F(\gamma^u)\right)(\sigma_t^{u,u} - (\mu-\theta)\varepsilon\beta)\right] +$$

$$+\pi_t\varepsilon\left[F(\gamma^s)\sigma_t^{s,u} + \left(1-F(\gamma^s)\right)(\sigma_t^{s,u} - (\mu-\theta)\beta)\right] =$$

$$(1-\pi_t)[F(\gamma^u)\sigma_t^{u,u} + \sigma_t^{u,u} - (\mu-\theta)\varepsilon\beta - F(\gamma^u)\sigma_t^{u,u} + F(\gamma^u)(\mu-\theta)\varepsilon\beta] +$$

$+\pi_t\varepsilon[F(\gamma^s)\sigma_t^{s,u} + \sigma_t^{s,u} - (\mu-\theta)\beta - F(\gamma^s)\sigma_t^{s,u} + F(\gamma^s)(\mu-\theta)\beta] =$

$(1-\pi_t)[\sigma_t^{u,u} - (\mu-\theta)\varepsilon\beta + F(\gamma^u)(\mu-\theta)\varepsilon\beta] +$

$+\pi_t\varepsilon[\sigma_t^{s,u} - (\mu-\theta)\beta + F(\gamma^s)(\mu-\theta)\beta] =$

$(1-\pi_t)\left[\beta\left\{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1+(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\} - (\mu-\theta)\varepsilon\beta + F(\gamma^u)(\mu-\theta)\varepsilon\beta\right] +$

$+\pi_t\varepsilon\left[\beta\left\{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1+\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon}\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\} - (\mu-\theta)\beta + F(\gamma^s)(\mu-\theta)\beta\right] =$

$(1-\pi_t)\beta\left[\left\{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1+(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\} - (\mu-\theta)\varepsilon + F(\gamma^u)(\mu-\theta)\varepsilon\right] +$

$+\pi_t\varepsilon\beta\left[\left\{1-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1+\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon}\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\} - (\mu-\theta) + F(\gamma^s)(\mu-\theta)\right] =$

$(1-\pi_t)\beta[1-(\mu-\theta)\varepsilon + F(\gamma^u)(\mu-\theta)\varepsilon] +$

$+\pi_t\varepsilon\beta[1-(\mu-\theta) + F(\gamma^s)(\mu-\theta)] +$

$+(1-\pi_t)\beta\left\{-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1+(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\} + \pi_t\varepsilon\beta\left\{-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1+\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon}\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\} =$

$(1-\pi_t)\beta[1-(\mu-\theta)\varepsilon + F(\gamma^u)(\mu-\theta)\varepsilon] +$

$+\pi_t\varepsilon\beta[1-(\mu-\theta) + F(\gamma^s)(\mu-\theta)] +$

$+(1-\pi_t)\beta\left\{-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1+(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\} + \pi_t\varepsilon\beta\left\{-\theta\mathcal{T}-\tau_p\left[1+\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon}\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right\} =$

$$(1-\pi_t)\beta[F(\gamma^u)+1-(\mu-\theta)\varepsilon-F(\gamma^u)+F(\gamma^u)(\mu-\theta)\varepsilon]+$$

$$+\pi_t\varepsilon\beta[F(\gamma^s)+1-(\mu-\theta)-F(\gamma^s)+F(\gamma^s)(\mu-\theta)]-$$

$$-(1-\pi_t)\beta\big(\theta\mathcal{T}+\tau_p\big)-(1-\pi_t)\beta\tau_p\left[(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]-\pi_t\varepsilon\beta\big(\theta\mathcal{T}+\tau_p\big)-$$

$$\pi_t\varepsilon\beta\big(\theta\mathcal{T}+\tau_p\big)\tau_p\left[\frac{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)}{\varepsilon}\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]=$$

$$(1-\pi_t)\beta[F(\gamma^u)+1-(\mu-\theta)\varepsilon-F(\gamma^u)+F(\gamma^u)(\mu-\theta)\varepsilon]+$$

$$+\pi_t\varepsilon\beta[F(\gamma^s)+1-(\mu-\theta)-F(\gamma^s)+F(\gamma^s)(\mu-\theta)]-$$

$$-(1-\pi_t)\beta\big(\theta\mathcal{T}+\tau_p\big)-(1-\pi_t)\beta\tau_p\left[(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]-\pi_t\varepsilon\beta\big(\theta\mathcal{T}+\tau_p\big)-$$

$$\pi_t\beta\big(\theta\mathcal{T}+\tau_p\big)\tau_p\left[(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]=$$

$$(1-\pi_t)\beta\big[F(\gamma^u)+[1-F(\gamma^u)][1-(\mu-\theta)\varepsilon]\big]+$$

$$+\pi_t\varepsilon\beta\big[F(\gamma^s)+[1-F(\gamma^s)][1-(\mu-\theta)]\big]-$$

$$-(1-\pi_t+\pi_t\varepsilon)\beta\big(\theta\mathcal{T}+\tau_p\big)-\beta\tau_p\left[(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]=$$

$$(1-\pi_t)\beta\big[F(\gamma^u)+[1-F(\gamma^u)][1-(\mu-\theta)\varepsilon]\big]+$$

$$+\pi_t\varepsilon\beta\big[F(\gamma^s)+[1-F(\gamma^s)][1-(\mu-\theta)]\big]+$$

$$-\beta(1-\pi_t+\pi_t\varepsilon)\left[\theta\mathcal{T}+\tau_p\left[1+\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right]=$$

$$(1-\pi_t)\beta\big[F(\gamma^u)+[1-F(\gamma^u)][1-(\mu-\theta)\varepsilon]\big]+$$

$$+\pi_t\varepsilon\beta\big[F(\gamma^s)+[1-F(\gamma^s)][1-(\mu-\theta)]\big]+$$

$$-\beta[(1-\pi_t)+\pi_t\varepsilon]\left[\theta\mathcal{T}+\tau_p\left[1+\frac{(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right]=$$

$$G_{t+1}^{K} = (1-\alpha)A(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)^{-\alpha}\{(1-\pi_t)\left[F(\gamma^u)\sigma_t^{u,u} + \left(1-F(\gamma^u)\right)\sigma_t^{u,s}\right] + \pi_t\varepsilon\left[F(\gamma^s)\sigma_t^{s,u} + \left(1-F(\gamma^s)\right)\sigma_t^{s,s}\right]\}$$

$$G_{t+1}^{K} = (1-\alpha)A(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)^{-\alpha}\left\{(1-\pi_t)\beta\left[F(\gamma^u) + [1-F(\gamma^u)][1-(\mu-\theta)\varepsilon]\right] + \pi_t\varepsilon\beta\left[F(\gamma^s) + [1-F(\gamma^s)][1-(\mu-\theta)]\right] - \beta[(1-\pi_t)+\pi_t\varepsilon]\left[\theta\mathcal{T} + \tau_p\left[1+\frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}\right]\right]\right\}$$

$$G_{t+1}^{K} = (1-\alpha)A\beta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)^{-\alpha}\{(1-\pi_t)\left[\psi^u - \left(\theta\mathcal{T}+\tau_p\wp\right)\right] + \pi_t\varepsilon\left[\psi^s - \left(\theta\mathcal{T}+\tau_p\wp\right)\right]\}$$

$$G_{t+1}^{K} = (1-\alpha)A\beta(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)^{-\alpha}\left[(1-\pi_t)\psi^u + \pi_t\varepsilon\psi^s - (1-\pi_t+\pi_t\varepsilon)\left(\theta\mathcal{T}+\tau_p\wp\right)\right]$$

Ou:

$$G_{t+1}^{K} = \frac{(1-\alpha)A\beta}{(1-\pi_t+\varepsilon\pi_t)^{\alpha}}\{(1-\pi_t)\left[\psi^u - \left(\theta\mathcal{T}+\tau_p\wp\right)\right] + \pi_t\varepsilon\left[\psi^s - \left(\theta\mathcal{T}+\tau_p\wp\right)\right]\} \tag{3.18}$$

$$\psi^u \equiv F(\gamma^u) + [1-F(\gamma^u)][1-(\mu-\theta)\varepsilon]$$

$$\psi^s \equiv F(\gamma^s) + [1-F(\gamma^s)][1-(\mu-\theta)]$$

$$\wp \equiv 1 + \frac{\zeta(1-\beta)}{(1+r_{t+1})\beta}$$