

Fundação Getulio Vargas  
Escola de Matemática Aplicada  
Curso de Graduação em Matemática  
Aplicada

Breno de Moura Calderoni

Métodos numéricos para resolver equações de  
Klein-Gordon

Rio de Janeiro - Brasil

2020

**Breno de Moura Calderoni**

**Métodos numéricos para resolver equações de  
Klein-Gordon**

Trabalho de Conclusão de Curso para obtenção do  
grau de bacharel à Escola de Matemática Aplicada da  
Fundação Getulio Vargas - EMAp FGV.

Orientador: Hugo A. de La Cruz Cancino

Rio de Janeiro - Brasil

2020

**Breno de Moura Calderoni**

**Métodos numéricos para resolver equações de  
Klein-Gordon**

Monografia apresentada à Escola de Matemática Aplicada da Fundação Getulio Vargas para a obtenção do grau de bacharelado.

Aprovado em: \_\_/\_\_/\_\_\_\_.

Pela comissão organizadora

---

Hugo A. de La Cruz Cancino (orientador)  
Escola de Matemática Aplicada - FGV

---

Paulo Cezar Pinto Carvalho  
Escola de Matemática Aplicada - FGV

---

Alexandre Louveiro Madureira  
Laboratório Nacional de Computação Científica



**BRENO DE MOURA CALDERONI**

**“MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLVER EQUAÇÕES DE KLEIN-GORDON”**

Trabalho de Conclusão de Curso - TCC apresentado ao Curso de Graduação em Matemática Aplicada da Escola de Matemática Aplicada para obtenção do grau de Bacharel (a) em Matemática Aplicada.

Data da Defesa: 18/12/2020

**ASSINATURA DOS MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA**

Hugo Alexander de la Cruz Cancino  
Orientador

Paulo Cezar Pinto Carvalho  
Membro

DocuSigned by:  
  
6812AE5B8AEA41A...

Alexandre Madureira  
Membro

Nos termos da Lei nº 13.979 de 06/02/20 - DOU nº 27 de 07/02/20 e Portaria MEC nº 544 de 16/06/20 - DOU nº 114 de 17/06/20 que dispõem sobre a suspensão temporária das atividades acadêmicas presenciais e a utilização de recursos tecnológicos face ao COVID-19, as apresentações dos Trabalhos de Conclusão de Curso, de forma excepcional, serão realizadas de forma remota e síncrona, incluindo-se nessa modalidade membros da banca e discente.

*“O que for a profundidade do teu ser, assim será teu desejo.  
O que for o teu desejo, assim será tua vontade.  
O que for a tua vontade, assim serão teus atos.  
O que forem teus atos, assim será teu destino”*

*– Brihadaranyaka Upanishad IV, 4.5*

## **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente ao mestre Hugo Cancino, orientador que sempre esteve presente para tirar minhas dúvidas, por mais banais que elas fossem, a doar seu tempo para corrigir meus textos e mandar páginas de anotações para me auxiliar.

Também agradeço a Bruna Fistarol que sempre está ao meu lado, me dá conselhos e suporte emocional.

## Resumo

O objetivo principal do trabalho é estudar soluções numérico-computacionais para a equação de seno-Gordon. Métodos de diferenças finitas são aplicados para transformar o problema de valor inicial e de contorno associado à equação não linear hiperbólica de seno-Gordon, em um sistema algébrico de equações. Especificamente, os métodos apresentados serão um método explícito de diferenças finitas e o método de Crank-Nicolson. Serão analisadas a consistência, convergência, estabilidade linear e será abordado um comparativo entre os métodos considerados.

**Palavras-chaves:** Equações de seno-Gordon. Métodos de diferenças finitas. Método de Crank-Nicolson. Consistência. Convergência. Estabilidade linear. Implementação computacional.

## Abstract

The aim of this work is to study numerical methods for the sine-Gordon equation. A family of finite difference methods is applied to transform the initial value-boundary problem associated with a non-linear hyperbolic sine-Gordon equation into an algebraic system. Specifically, an explicit finite difference method and the Crank-Nicolson method are considered among the methods. Consistency, convergence and linear stability are analysed and a comparison is discussed.

**Key-words:** Sine-Gordon. Finite difference method. Convergence. Stability. Consistency. Computational implementation.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Método das Diferenças Finitas</b>	<b>10</b>
2.1	Consistência . . . . .	11
2.2	Estabilidade . . . . .	12
2.2.1	Condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) . . . . .	12
2.2.2	Análise de estabilidade de Von Neumann . . . . .	16
2.3	Convergência . . . . .	17
2.4	Método de diferenças explícitas . . . . .	19
2.4.1	Verificação da consistência . . . . .	23
2.4.2	Verificação da estabilidade . . . . .	24
2.4.3	Verificação da convergência . . . . .	26
2.5	Método de Crank-Nicolson . . . . .	28
2.5.1	Verificação da consistência . . . . .	31
2.5.2	Verificação da estabilidade . . . . .	32
2.5.3	Verificação da convergência . . . . .	33
2.6	Comparação entre os métodos . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Conclusões</b>	<b>39</b>
3.1	Apêndice . . . . .	43
3.1.1	Implementação Computacional . . . . .	43

# 1 Introdução

As equações não-lineares hiperbólicas de Klein-Gordon são uma família de EDP's que surgiram ao resolver problemas de mecânica quântica relativística e em teoria do campo[4]. Ela apresenta a forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + F(x, t, u) \quad (u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \quad (1)$$

Posteriormente, foram aplicadas em modelagem de diversos outros tipos de fenômenos físicos, dentro de áreas como acústica[7], engenharia biomédica[16] e física de altas energias[1].

Ao escolher um  $F(x, t, u)$  específico, a equação apresenta diferentes nomes e aplicações. Alguns deles são: phi-four[18], seno-Gordon [19], duplo seno-Gordon[5], senh-Gordon[17], Liouville[11], etc.

Este trabalho é focado unicamente na equação seno-Gordon:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \sin(u(x, t)); \quad L_0 \leq x \leq L_1; \quad t \geq t_0 \quad (2)$$

com as seguintes condições de contorno e valor inicial:

$$\begin{aligned} u(x, t_0) &= f(x); \quad L_0 \leq x \leq L_1 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) &= g(x); \quad L_0 \leq x \leq L_1 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L_0, t) &= 0; \quad t \geq t_0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L_1, t) &= 0; \quad t \geq t_0 \end{aligned}$$

A equação seno-Gordon se torna relevante na física com a evolução da teoria do deslocamento para cristais. Ela também é importante ao estudar a junção de transmissão de linhas de Josephson, onde  $\sin(u)$  é a corrente de Josephson através um isolante entre dois supercondutores, com a voltagem

proporcional à  $\frac{\partial u}{\partial t}$  [10]. Ela é um caso particular da equação não-linear da forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \phi'(u) \quad (3)$$

O primeiro estudo feito sobre as soluções numéricas da equação seno-Gordon foram feitas por Perring e Skyrme [13]. A primeira solução não-trivial dessa equação quando  $\phi(u) = 1 - \cos(u)$  apresenta a forma:

$$u(x, t) = 4 \arctan \left[ \exp \left( \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right] \quad (4)$$

onde  $v$  é a velocidade da onda solitária *soliton* (a fórmula pode ser verificada em [2]). Para a análise numérica da equação, métodos das diferenças finitas são úteis e práticos. Neste trabalho focaremos no método explícito e o método de Crank-Nicolson.

Após todas as respectivas análises de consistência, convergência e estabilidade dos métodos forem analisadas, será feito um comparativo dos gráficos gerados pelos dois métodos citados e, juntamente dele, discussão acerca de qual mostra maior eficiência. Para isso, uma tabela com erros de aproximação ao aferir diferentes valores do passo dado e tempo computacional é feita.

Todas as implementações dos métodos foram escritos em MATLAB.

## 2 Método das Diferenças Finitas

O método das diferenças finitas tem por objetivo aproximar a solução de uma equação diferencial parcial a partir de aproximações de derivadas por diferenças finitas. Essas aproximações são encontradas a partir do polinômio de Taylor.

Para resolução, o espaço e tempo são discretizados. Em ambos os métodos a seguir, a partição a ser feita é da seguinte forma: as fronteiras estão em  $x = L_0$  e  $x = L_1$  e o tempo parte em  $t = t_0$  até  $t = t_1$ . A região espacial  $x$  é fracionada tal que  $x_j = L_0 + jh$ , com  $h = \frac{L_1 - L_0}{N_x}$  e  $j = 0, 1, 2, \dots, N_x$ , e a dimensão temporal,  $t_i = t_0 + ik$ , com  $k = \frac{t_1 - t_0}{N_t}$  e  $i = 0, 1, 2, \dots, N_t$ . Os casos de aproximação que serão usados estão representados a seguir.

Modelo *Forward*:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_j, t_i)} = \frac{u(x_{j+1}, t_i) - u(x_j, t_i)}{h} + O(h)$$

Modelo *Backward*:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_j, t_i)} = \frac{u(x_j, t_i) - u(x_{j-1}, t_i)}{h} + O(h)$$

Modelo *Central*:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_j, t_i)} = \frac{u(x_{j+1}, t_i) - u(x_{j-1}, t_i)}{2h} + O(h)$$

Modelo da segunda derivada:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(x_j, t_i)} = \frac{u(x_{j+1}, t_i) - 2u(x_j, t_i) + u(x_{j-1}, t_i)}{h^2} + O(h^2)$$

Defina, então,  $U(x_j, t_i) = U_j^i$  a aproximação à solução de  $u(x, t)$  no ponto  $(x_j, t_i)$ , ou seja

$$U_j^i \approx u(x_j, t_i).$$

Daqui, temos as aproximações são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x_j, t_i)} &\approx \frac{U_{j+1}^i - U_j^i}{h} \\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x_j, t_i)} &\approx \frac{U_j^i - U_{j-1}^i}{h} \\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x_j, t_i)} &\approx \frac{U_{j+1}^i - U_{j-1}^i}{2h} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(x_j, t_i)} &\approx \frac{U_{j+1}^i - 2U_j^i + U_{j-1}^i}{h^2}.\end{aligned}$$

Por meio disso, chega-se num sistema algébrico que, com uso de algebrismo e métodos computacionais, pode ser solucionado. Para a análise de estabilidade linear, o valor numérico de  $U_j^i$  obtido através dos cálculos computacionais sujeitos a erros de arredondamento será  $\tilde{U}_j^i$ .

## 2.1 Consistência

Dada uma equação diferencial parcial,  $Pu = f$ , e um método de diferenças finitas,  $P_{k,h}v = f$ , é possível dizer que o método de diferenças finitas é consistente com a equação diferencial parcial se para qualquer função suave  $\phi(t, x)$

$$P\phi - P_{k,h}\phi \rightarrow 0 \quad \text{conforme } k, h \rightarrow 0$$

a convergência sendo pontual para cada ponto  $(t, x)$ . Às vezes é preciso restringir a maneira como  $k, h$  tendem a zero para o método ser consistente.

O **erro de truncamento** local é definido como o erro introduzido em cada passo pelo truncamento da equação diferencial supondo conhecida a solução exata no início do intervalo do método.

## 2.2 Estabilidade

Esta condição deve garantir que um método numérico não permita erros que cresçam indefinidamente. Deve-se perceber que o computador é de fato uma máquina com "aritméticas finitas", ou seja, opera com uma quantidade finita de números e dígitos. Isso significa que praticamente todo número real, como por exemplo  $\frac{1}{3}$ , nunca será representado exatamente em base binária, e será afetado por erros de arredondamento (*round-off errors*), e esses erros não devem crescer durante o progresso computacional.

O método numérico é estável se pequenas alterações nos dados iniciais produzem pequenas alterações nos resultados finais. Similarmente, o método é considerado instável se pequenas alterações nos dados iniciais produzem uma alteração dramática na solução (*output*) do problema.

### 2.2.1 Condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

A condição CFL é nomeada a partir de seus criadores Courant, Friedrichs e Lewy, que escreveram o primeiro artigo (texto original em [14] e traduzido para o inglês em [6]) sobre estabilidade e convergência de métodos de diferenças finitas [12]. O valor  $v = \frac{k}{h}$  é comumente conhecido como número de *Courant*.

O que a condição CFL diz é que, dado um método numérico linear e hiperbólico, ele é convergente se e somente se o seu domínio numérico de dependência contém o verdadeiro domínio de dependência da EDP, pelo menos no limite em que  $k$  e  $h$  tendem a zero. Essa condição não é suficiente para o método ser estável. Em outras palavras, a informação de uma célula (retângulo de base  $h$  e altura  $k$ ) deve propagar apenas para os seus vizinhos imediatos.

Segue que, para qualquer problema explícito linear ( $x_n = Cx_{n-1} + d$ ), o número de *Courant* deve ser menor do que 1.

- **Teorema:**

Seja  $x_n = Cx_{n-1} + d$ ; então a sequência  $x_0, x_1, \dots$  converge independentemente do valor inicial  $x_0$  se e somente se  $|\lambda(C)| < 1$ , sendo  $\lambda(C)$  qualquer autovalor de  $C$ .

• **Demonstração:**

**Para  $C$  diagonalizável:** Suponha que

$$C = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_d \end{bmatrix} P^{-1}$$

**Ida:** Vamos provar que se  $|\lambda(C)| < 1$  então  $\{x_n\}$  converge ( $\forall x_0$ ):

Seja  $x^*$  o valor o qual  $x_n$  converge conforme  $n$  tende ao infinito.

$$\begin{aligned} (x^* - x_n) &= C(x^* - x_{n-1}) \\ &= C^2(x^* - x_{n-2}) \\ &\vdots \\ &= C^n(x^* - x_0) \\ (x^* - x_n) &= P \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_d^n \end{bmatrix} P^{-1}(x^* - x_0) \end{aligned}$$

Como  $|\lambda(C)| < 1$ , então  $|\lambda(C)^n| \rightarrow 0$ . Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^* - x_n) = 0.$$

**Volta:** Se  $\{x_n\}$  converge, então  $|\lambda(C)| < 1$  ( $\forall x_0$ ):

$$(x^* - x_n) = P \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_d^n \end{bmatrix} P^{-1}(x^* - x_0)$$

É desejado que nenhum autovalor seja maior que 1. Será mostrada a convergência de cada componente do vetor.

Sempre é possível escolher um  $x_0$  de modo que o produto  $P^{-1}(x^* - x_0)$  seja o vetor unitário. Note que o sistema sempre tem solução, dado que  $P$  é uma matriz que possui inversa e determinante diferente de 0. Então dado o produto  $P^{-1}(x^* - x_0)$ :

$$P^{-1}(x^* - x_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Temos então que

$$\begin{aligned} (x^* - x_n) &= P \begin{bmatrix} \lambda_1^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{11}\lambda_1^n \\ P_{21}\lambda_1^n \\ \vdots \\ P_{d1}\lambda_1^n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

Nossa hipótese inicial diz que  $(x^* - x_n) \rightarrow 0$ . Portanto, a única forma de garantir que (5) convirja para zero é quando  $|\lambda_1| < 1$ . É possível replicar a ideia escolhendo cada vetor unitário possível na multiplicação  $P^{-1}(x^* - x_0)$ . Logo,  $|\lambda_i| < 1$ .

**Para  $C$  não diagonalizável:** Usando o teorema de Jordan:

$\forall C$ :

$$C = P \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_m \end{bmatrix} P^{-1}$$

Onde

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad J_i \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

é o bloco de Jordan.

Logo:

$$C^n = P \begin{bmatrix} (J_1)^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (J_2)^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (J_m)^n \end{bmatrix} P^{-1}$$

É possível analisar de forma análoga ao caso em que  $C$  é diagonalizável.

Se  $|\lambda(C)| < 1$ , então  $\{x_n\}$  converge ( $\forall, x_0$ )

$$(x^* - x_n) = P \begin{bmatrix} (J_1)^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (J_2)^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (J_m)^n \end{bmatrix} P^{-1}(x^* - x_0)$$

Como  $|\lambda(C)| < 1$ , então  $|J_i^n| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Ou seja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^* - x_n) = 0.$$

### 2.2.2 Análise de estabilidade de Von Neumann

Análise de estabilidade de Von Neumann não foi rigorosamente definida para equações não-lineares, mas é frequentemente justificada ao assumir que a solução  $u(x, t)$  (e sua aproximação numérica, em contrapartida) não varia muito rapidamente, o que é o caso da maioria das equações de Klein-Gordon não lineares.

Ao analisar equações não lineares similares (como o caso da equação de Burger, [8]), a equação e seu método numérico são linearizados, e pequenos termos são jogados de fora (quando  $k, h$  são pequenos o suficiente) conforme um pequeno desvio entre duas soluções de uma equação diferencial parcial não linear satisfaz a linearização dessa EDP de uma solução exata. Sendo assim, aqui é assumido que  $k$  e  $h$  são pequenos o suficiente, então a equação e seu método numérico podem ser linearizados para análise de estabilidade.

Para o método, é definido o fator de amplificação  $\xi$

$$\xi = \frac{V^{i+1}}{V^i}$$

que deve satisfazer

$$|\xi| \leq 1 \tag{6}$$

- Metodologia [9]:

1. Troque, no método numérico, todos os termos da forma  $U_{j+h}^{i+k}$  por

$$U_{j+h}^{i+k} \Rightarrow V^{i+k} \exp(\tilde{i}(j+h)\phi)$$

Para um método em que o tempo depende dos dois anteriores,  $i$  e  $(i+1)$ ,  $k$  vai ser limitado por  $k=1$ . Para um esquema de 3 níveis,  $k$  vai tomar valores  $k=-1$ ,  $k=0$  e  $k=1$ ;

2. Como todos os termos contêm o fator  $\exp(\tilde{i}(j+h))$  (sendo  $\tilde{i} = \sqrt{-1}$ ), o próximo passo será simplificar todos os termos;
3. Da relação obtida, derive a forma explícita do fator de amplificação  $\xi$ ;
4. Aplique a condição de estabilidade (6);

## 2.3 Convergência

O método ser convergente significa que a solução da sua aproximação por diferença finita alcança a verdadeira solução da equação diferencial parcial conforme a discretização for cada vez mais refinada. É natural pensar se consistência é condição suficiente para convergência. Consistência é certamente necessária para convergência, mas um método pode ser consistente sem ser convergente (Exemplo no livro [15], página 27).

O método numérico definido pela sequência de recorrência  $x_{n+1} = x_n + \phi(x_n, h)$  é convergente se:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \max_n \|x(t_n) - x_n\| = 0.$$

Para um método de diferenças finitas  $U_j^i$ , aproximando a solução  $u(x, t)$  de uma EDP é convergente se  $U_j^i$  converge a  $u(x, t)$  quando  $(j\Delta x, i\Delta t) \rightarrow (x, t)$  conforme  $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow (0, 0)$ . Ou seja, para  $(x, t)$  no domínio de integração tem-se que

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} U_{\left[\frac{x}{\Delta x}\right]}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} = u(x, t).$$

Equivalentemente:

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \left( \max_{0 \leq i \leq \left[\frac{t}{\Delta t}\right], 0 \leq j \leq \left[\frac{x}{\Delta x}\right]} | U_j^i - u(j\Delta x, i\Delta t) | \right) = 0.$$

## 2.4 Método de diferenças explícitas

O método das diferenças explícitas recebe esse nome no sentido de que, ao seu maior nível de tempo, apenas o valor de  $U_j^{i+1}$  deve ser determinado e nenhum outro ponto no mesmo nível está envolvido.

Ao seguir a aproximação de derivadas já apresentada e aplicar na equação de seno-Gordon, é possível obter a seguinte relação:

$$\frac{U_j^{i+1} - 2U_j^i + U_j^{i-1}}{k^2} = \frac{U_{j+1}^i - 2U_j^i + U_{j-1}^i}{h^2} - \sin(U_j^i) \quad (7)$$

Seguindo essa lógica, a função desconhecida  $U_j^{i+1}$  é avaliada dependendo dos fatores conhecidos  $U_{j+1}^i, U_j^i, U_j^{i-1}, U_{j-1}^i$  ao resolver a seguinte recorrência:

$$U_j^{i+1} - 2U_j^i + U_j^{i-1} = \frac{k^2}{h^2} (U_{j+1}^i - 2U_j^i + U_{j-1}^i) - k^2 \sin U_j^i.$$

Ao colocar  $v = \frac{k}{h}$ , temos:

$$U_j^{i+1} - 2U_j^i + U_j^{i-1} = v^2 (U_{j+1}^i - 2U_j^i + U_{j-1}^i) - k^2 \sin U_j^i$$

Ao juntar os termos que apresentam a mesma linha espacial, chegamos na relação de recorrência a seguir:

$$U_j^{i+1} = v^2 U_{j+1}^i + (2 - 2v^2) U_j^i + v^2 U_{j-1}^i - U_j^{i-1} - k^2 \sin(U_j^i) \quad (8)$$

A aproximação central na derivada de primeira ordem, também já apresentada (mas agora relacionada ao tempo), nos fornece a seguinte relação:

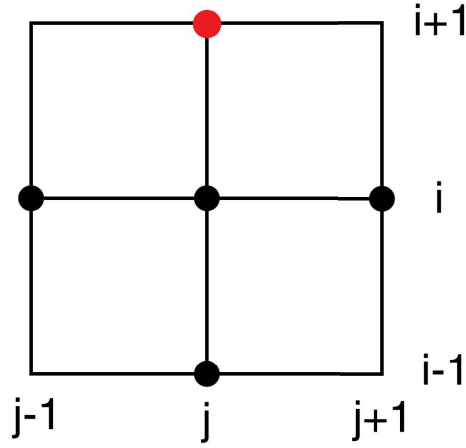


Figura 1: Stencil do método explícito de diferenças finitas

$$\frac{U_1^i + U_{-1}^i}{2h} = 0 \Rightarrow U_1^i = U_{-1}^i$$

$$\frac{U_{N_x+1}^i + U_{N_x-1}^i}{2h} = 0 \Rightarrow U_{N_x+1}^i = U_{N_x-1}^i$$

Para continuarmos, evidencia-se que é preciso calcular  $U_j^1$  pois se torna presente uma relação do termo  $U_j^{i+1}$  com o  $U_j^i$  e  $U_j^{i-1}$ , ou seja, é preciso os dois termos anteriores ( $U_j^0$  já temos devido às condições iniciais). A figura a seguir ilustra bem essa situação.

Para calcular  $U_j^1$ , devemos nos dispor do fato que  $\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_0) = g(x_j)$  e aplicar o conhecimento sobre série de Taylor:

$$u(x_j, k) = u(x_j, 0) + u_t(x_j, 0)k + \frac{1}{2}u_{tt}(x_j, 0)k^2 + o(k^3).$$

Repare nas igualdades a seguir:

$$\begin{aligned}
u(x_j, 0) &= f(x_j) \\
u_t(x_j, 0) &= g(x_j) \\
\frac{1}{2}u_{tt}(x_j, 0) &= \frac{1}{2}(u_{xx}(x_j, 0) - \sin(u(x_j, 0))) = \frac{1}{2}f''(x_j) - \frac{1}{2}\sin(f(x_j)).
\end{aligned}$$

Ao fazer a seguinte aproximação de derivada, temos:

$$f''(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1}))}{h^2} + O(h^2).$$

Logo, ao fazer todas as substituições, pode-se concluir que:

$$U_j^1 = (1 - v^2)f(x_j) + \frac{v^2}{2}(f(x_{j+1}) + f(x_{j-1})) + g(x_j)k - \frac{1}{2}k^2 \sin(f(x_j)). \quad (9)$$

Das condições iniciais e de fronteira originais, sabemos que:

$$U_j^0 = f(x_j).$$

Sabendo que a derivada no espaço é zero, deve-se também calcular as condições de fronteira utilizando a expansão de Taylor

$$\begin{aligned}
u(L_0 + h, t_i) &= u(L_0, t_i) + u'(L_0, t_i)h + O(h^2) \\
&= u(L_0, t_i) + O(h^2)
\end{aligned}$$

Ou seja, quando  $h$  tende a zero,  $U_0^i = U_1^i$ . Analogamente:

$$\begin{aligned}
u(L_1 - h, t_i) &= u(L_1, t_i) - u'(L_1, t_i)h + O(h^2) \\
&= u(L_1, t_i) + O(h^2)
\end{aligned}$$

Logo, quando  $h$  tende a zero,  $U_{N_x}^i = U_{N_x-1}^i$ .

Para colocar em forma matricial, primeiro defina:

$$U^i := \begin{bmatrix} U_1^i \\ U_2^i \\ \vdots \\ U_{N_x-1}^i \end{bmatrix}_{(N_x-1) \times 1} \quad (10)$$

É possível então verificar o seguinte modelo:

$$\begin{aligned}
U^{i+1} &= \begin{bmatrix} (2-2v^2) & 2v^2 & 0 & \dots & 0 \\ v^2 & (2-2v^2) & v^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & v^2 & (2-2v^2) & v^2 \\ 0 & \dots & 0 & 2v^2 & (2-2v^2) \end{bmatrix} U^i - U^{i-1} - \\
&\quad - k^2 \begin{bmatrix} v^2 U_1^i + \sin U_1^i \\ \sin U_2^i \\ \vdots \\ v^2 U_{N_x-1}^i + \sin U_{N_x-1}^i \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Defina a matriz  $A$  e  $S_i$  para simplificar escrita como:

$$A := \begin{bmatrix} (2-2v^2) & v^2 & 0 & \dots & 0 \\ v^2 & (2-2v^2) & v^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & v^2 & (2-2v^2) & v^2 \\ 0 & \dots & 0 & v^2 & (2-2v^2) \end{bmatrix}$$

$$S_i := \begin{bmatrix} v^2 U_1^i k + \sin U_1^i \\ \sin U_2^i \\ \vdots \\ v^2 U_{N_x-1}^i k + \sin U_{N_x-1}^i \end{bmatrix}$$

Com condições iniciais:

$$U^0 = \begin{bmatrix} f(L_0 + h) \\ f(L_0 + 2h) \\ \vdots \\ f(L_0 + (N_x - 1)h) \end{bmatrix}$$

$$U_j^1 = (1 - v^2)f(x_j) + \frac{v^2}{2}(f(x_{j+1}) + f(x_{j-1})) + g(x_j)k - \frac{1}{2}k^2 \sin(f(x_j)).$$

O que pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} U^{i+1} \\ U^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^i \\ U^{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

caracterizando o método de diferenças explícitas.

#### 2.4.1 Verificação da consistência

Como foi visto dentro do capítulo de consistência, precisamos que o erro de truncamento tenda a 0 conforme o tamanho dos passos  $k$  e  $h$  tende a zero.

O método apresenta a seguinte forma:

$$\frac{U_j^{i+1} - 2U_j^i + U_j^{i-1}}{k^2} = \frac{U_{j+1}^i - 2U_j^i + U_{j-1}^i}{h^2} - \sin(U_j^i)$$

Ao substituir  $U_j^i$  por  $u(x_j, t_i)$ , temos a seguinte igualdade:

$$u_{tt}(x_j, t_i) + O(k^2) = u_{xx}(x_j, t_i) + O(h^2) - \sin u(x_j, t_i)$$

Pela equação original de seno-Gordon, é possível cancelar  $u_{tt}(x_j, t_i)$  com  $u_{xx}(x_j, t_i) - \sin u(x_j, t_i)$ , tendo então:

$$O(k^2) - O(h^2) = 0. \quad (12)$$

Ou seja, quando  $h \rightarrow 0$  e  $t \rightarrow 0$ , a equação (12) tende a zero.

Pode-se concluir, portanto, que o método é consistente.

#### 2.4.2 Verificação da estabilidade

Primeiramente considere a aproximação da função seno em uma expansão de Maclaurin

$$\sin(U_j^i) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(U_j^i)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

que fica com o resultado final

$$\frac{U_j^{i+1} - 2U_j^i + U_j^{i-1}}{k^2} = \frac{U_{j+1}^i - 2U_j^i + U_{j-1}^i}{h^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(U_j^i)^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (13)$$

Tome  $E_j^i = U_j^i - \tilde{U}_j^i$ , então

$$\frac{E_j^{i+1} - 2E_j^i + E_j^{i-1}}{k^2} = \frac{E_{j+1}^i - 2E_j^i + E_{j-1}^i}{h^2} - E_j^i T_j^i$$

onde, como feito em [3]

$$\begin{aligned} T_j^i &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[ (U_j^i)^{2n} + (U_j^i)^{2n-1}(\tilde{U}_j^i) + \dots + (\tilde{U}_j^i)^{2n} \right] \\ &\approx \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (U_G)^{2n} = \cos U_G. \end{aligned}$$

depois da linearização do termo em colchetes, e  $U_G$  é um típico valor de  $U_j^i$  para  $j = 0, 1, \dots, N_x$ . Agora seja  $E_j^i = \exp(\tilde{a}ik) \exp(\tilde{i}jbh)$ ,  $\tilde{i}$  é  $\sqrt{-1}$ ,  $\tilde{a}$  é um número complexo e  $b$  é um número real.

Seja  $\xi = \exp(\tilde{a}k)$  o fator de amplificação da análise de estabilidade de Von Neumann. Então, após cancelar  $\exp(\tilde{a}ik) \exp(\tilde{i}jbh)$ , chega-se a equação de estabilidade.

$$\xi^2 - 2 \left[ 1 - 2v^2 \sin^2 \left( \frac{bh}{2} \right) - \frac{1}{2} k^2 \cos(U_G) \right] \xi + 1 = 0. \quad (14)$$

Essa equação é o caso particular da equação a seguir quando  $\tilde{A} = 1$

$$\tilde{A}\xi^2 - 2\tilde{B}\xi + \tilde{A} = 0 \quad \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R} \text{ e } \tilde{A} \neq 0$$

que tem as raízes  $\xi_1$  e  $\xi_2$  com módulo menor ou igual se

$$|\tilde{A}| \geq |\tilde{B}|.$$

Essas condições levam às seguintes desigualdades:

$$v^2 \sin^2 \left( \frac{bh}{2} \right) \geq -\frac{1}{4} k^2 \cos(U_G) \quad (15)$$

$$v^2 \sin^2 \left( \frac{bh}{2} \right) \leq 1 - \frac{1}{4} k^2 \cos(U_G). \quad (16)$$

Como  $v = \frac{k}{h}$ , a primeira inequação leva à

$$\frac{1}{h^2} \sin^2 \left( \frac{bh}{2} \right) \geq -\frac{1}{4} \cos(U_G). \quad (17)$$

E a segunda

$$k^2 \left( \frac{1}{h^2} \sin^2 \left( \frac{bh}{2} \right) + \frac{1}{4} \cos(U_G) \right) \leq 1. \quad (18)$$

O que nos dá uma restrição no passo em  $t$

$$k \leq \left( \frac{1}{h^2} + \frac{1}{4} \right)^{-\frac{1}{32}}. \quad (19)$$

A inequação (17) é sempre satisfeita quando  $\cos(U_G) \geq 0$ , enquanto para  $\cos(U_G) < 0$  ela retorna a seguinte restrição para o passo em  $x$

$$h \leq 2 |\cos(U_G)|^{-\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

### 2.4.3 Verificação da convergência

Para a análise de convergência do método considere a equação (13) e tome  $U_j^i = \exp(i\psi) \exp(ij\theta)$ , onde  $\tilde{i} = \sqrt{-1}$ ,  $\psi$  é um número complexo e  $\theta$  é um número real. A equação (12), após cancelar ambos os lados por  $\exp(\tilde{i}\psi) \exp(\tilde{i}j\theta)$ , retorna a equação de convergência

$$\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) = v^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{k^2}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\exp(\tilde{ii}\psi) \exp(ij\theta))^{2n}}{(2n+1)!}. \quad (21)$$

Então  $|\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)| \leq 1$ ,  $\psi$  um número real, a última equação dá a seguinte condição para convergência

$$k \leq \left[ \frac{1}{h^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

A condição imposta em (22) é mais restritiva que a (19), logo é a que será usada com (20).

Dado que o método é consistente, se for linearizado e verificada a estabilidade do método linear é possível aplicar **o teorema de equivalência de Lax** para esse modelo linearizado. No caso apresentado, a convergência será verificada nos experimentos numéricos.

## 2.5 Método de Crank-Nicolson

O método de Crank-Nicolson foi inventado por John Crank e Phyllis Nicolson, em 1947. É baseado na regra do trapézio e a ideia é substituir a aproximação na dimensão  $x$  pela média das aproximações de suas diferenças finitas representada pelas linhas temporais  $(i+1)$  e  $(i-1)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(x_j, t_i)} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{u(x_{j+1}, t_{i+1}) - 2u(x_j, t_{i+1}) + u(x_{j-1}, t_{i+1})}{h^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{u(x_{j+1}, t_{i-1}) - 2u(x_j, t_{i-1}) + u(x_{j-1}, t_{i-1})}{h^2} \right] + O(h^2) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(x_j, t_i)} &\approx \frac{1}{2} \left[ \frac{U_{j+1}^{i+1} - 2U_j^{i+1} + U_{j-1}^{i+1}}{h^2} + \frac{U_{j+1}^{i-1} - 2U_j^{i-1} + U_{j-1}^{i-1}}{h^2} \right].\end{aligned}$$

Ao fazer as substituições dessa nova aproximação e da aproximação na derivada segunda espacial dentro da equação de seno-Gordon, temos:

$$\frac{U_j^{i+1} - 2U_j^i + U_j^{i-1}}{k^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{U_{j+1}^{i+1} - 2U_j^{i+1} + U_{j-1}^{i+1}}{h^2} + \frac{U_{j+1}^{i-1} - 2U_j^{i-1} + U_{j-1}^{i-1}}{h^2} \right] - \sin U_j^i.$$

Assim como no método anterior, seja  $v = \frac{k}{h}$ . Substituindo

$$\begin{aligned}-v^2 U_{j-1}^{i+1} + (2 + 2v^2)U_j^{i+1} - v^2 U_{j+1}^{i+1} &= 4U_j^i + \\ + v^2 U_{j+1}^{i-1} - (2 + 2v^2)U_j^{i-1} + v^2 U_{j-1}^{i-1} - 2k^2 \sin U_j^i.\end{aligned}\tag{23}$$

Ou seja, podemos ver que o termo  $U_j^{i+1}$  depende de outros 6 :  $U_{j+1}^{i+1}$ ;  $U_{j-1}^{i+1}$ ;  $U_j^i$ ;  $U_{j+1}^{i-1}$ ;  $U_j^{i-1}$  e  $U_{j-1}^{i-1}$ . Isso pode ser representado na Figura 2.

Para começar a calcular, é necessário encontrar os valores da segunda linha quando  $t = t_0 + k$ . Ao jogar  $i = 1$  na equação (23), temos:

$$\begin{aligned}
& -v^2 U_{j-1}^2 + (2 + 2v^2)U_j^2 - v^2 U_{j+1}^2 = 4U_j^1 + \\
& + v^2 U_{j+1}^0 - (2 + 2v^2)U_j^0 + v^2 U_{j-1}^0 - 2k^2 \sin U_j^i
\end{aligned} \tag{24}$$

Os valores de fronteira são os mesmos que no caso do método de diferenças explícitas, ou seja:

$$\begin{aligned}
U_0^i &= U_1^i \\
U_{N_x}^i &= U_{N_x-1}^i
\end{aligned}$$

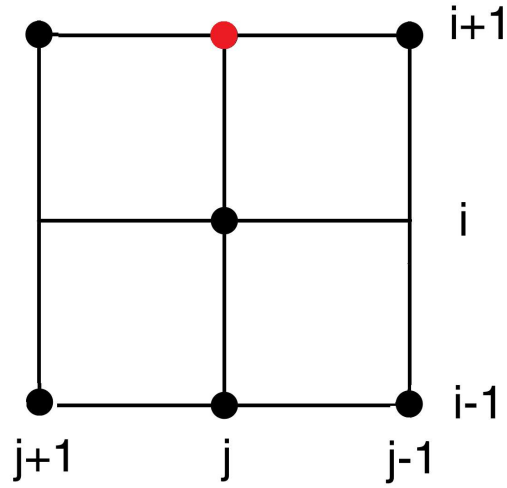


Figura 2: Stencil do método Crank-Nicolson

Defina então:

$$A := \begin{bmatrix} (2 + 2v^2) & -v^2 & 0 & \dots & 0 \\ -v^2 & (2 + 2v^2) & -v^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -v^2 & (2 + 2v^2) & -v^2 \\ 0 & \dots & 0 & -v^2 & (2 + 2v^2) \end{bmatrix}$$

$$S_i := \begin{bmatrix} \frac{v^2}{2} (U_1^{i+1}k + U_1^{i-1}k) + \sin U_1^i \\ \sin U_2^i \\ \vdots \\ \frac{v^2}{2} (U_{N_x}^{i+1}k + U_{N_x-1}^{i-1}k) + \sin U_{N_x}^i \end{bmatrix}$$

Logo, a equação algébrica é:

$$AU_j^{i+1} = 4U_j^i - AU_j^{i-1} - k^2 S_i.$$

Veja que é possível reescrevê-la de uma forma mais conveniente ao multiplicar por  $A^{-1}$  pela esquerda

$$U^{i+1} = 4A^{-1}U^i - U^{i-1} - k^2 A^{-1}S_i.$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} U^{i+1} \\ U^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4A^{-1} & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^i \\ U^{i-1} \end{bmatrix} - k^2 \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Com condições iniciais (desenvolvimento análogo ao método anterior):

$$U^0 = \begin{bmatrix} f(L_0 + h) \\ f(L_0 + 2h) \\ \vdots \\ f(L_0 + (N_x - 1)h) \end{bmatrix}$$

$$U^1 = \frac{1}{2}A^{-1}U^0 + \begin{bmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_{N_x-1}) \end{bmatrix} + \frac{v^2}{2} \begin{bmatrix} p(0) \\ 0 \\ \vdots \\ q(0) \end{bmatrix} - \frac{1}{2}k^2 \sin(f(x)).$$

O que finaliza o desenvolvimento do método de Crank-Nicolson.

### 2.5.1 Verificação da consistência

Assim como no caso do método de diferenças explícitas, devemos mostrar que conforme os passos  $h$  e  $t$  tendem a zero, o erro de truncamento tende a zero. Temos a equação alcançada pelo método de Crank-Nicolson abaixo:

$$\frac{U_j^{i+1} - 2U_j^i + U_j^{i-1}}{k^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{U_{j+1}^{i+1} - 2U_j^{i+1} + U_{j-1}^{i+1}}{h^2} + \frac{U_{j+1}^{i-1} - 2U_j^{i-1} + U_{j-1}^{i-1}}{h^2} \right] - \sin U_j^i.$$

Ao fazer a substituição de  $U_j^i$  por  $u(x_j, t_i)$ :

$$u_{tt}(x_j, t_i) + O(k^2) = \frac{1}{2} (u_{xx}(x_j, t_{i+1}) + O(h^2) + u_{xx}(x_j, t_{i-1}) + O(h^2)) - \sin(u(x_j, t_i))$$

$$O(k^2 - 2h^2) = 0. \quad (26)$$

Ou seja, quando  $h \rightarrow 0$  e  $t \rightarrow 0$ , a equação (28) tende a zero.

Pode-se concluir, portanto, que o método é consistente.

### 2.5.2 Verificação da estabilidade

Partindo de um racicínio análogo ao realizado no método das diferenças explícitas, temos:

$$\begin{aligned}\xi - 2 + \xi^{-1} &= \frac{v^2}{2} [\xi^{-1}(\exp(\tilde{i}bh) - 2 + \exp(-\tilde{i}bh) + \xi(\exp(\tilde{i}bh) - 2 + \exp(-\tilde{i}bh)))] - \\ &\quad - \cos(U_G) \\ \Rightarrow \xi - 2 + \xi^{-1} &= -2v^2\xi^{-1}\sin^2\left(\frac{bh}{2}\right) - 2v^2\xi\sin^2\left(\frac{bh}{2}\right) - \cos(U_G).\end{aligned}$$

Multiplicando por  $\xi$ :

$$\xi^2 - 2\xi + 1 = -2v^2\sin^2\left(\frac{bh}{2}\right) - 2v^2\xi^2\sin^2\left(\frac{bh}{2}\right) - \xi\cos(U_G).$$

Após passar todos os termos para o mesmo lado, monta-se uma equação do segundo grau em  $\xi$

$$\left(1 + 2v^2\sin^2\left(\frac{bh}{2}\right)\right)\xi^2 - 2\left(1 - \frac{k^2\cos(U_G)}{2}\right)\xi + 1 + 2v^2\sin^2\left(\frac{bh}{2}\right) = 0.$$

Ao dividir por  $\left(1 + 2v^2\sin^2\left(\frac{bh}{2}\right)\right)$ :

$$\begin{aligned}\xi^2 - 2C\xi + 1 &= 0 \\ C &= \frac{1 - \frac{k^2\cos(U_G)}{2}}{1 + 2v^2\sin^2\left(\frac{bh}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Então as raízes são  $\xi_{1,2} = C \pm \sqrt{C^2 - 1}$ . E condição necessária e suficiente é

$|C| \leq 1$ , ou seja

$$-1 \leq \frac{1 - \frac{k^2 \cos(U_G)}{2}}{1 + 2v^2 \sin^2\left(\frac{bh}{2}\right)} \leq 1. \quad (27)$$

### 2.5.3 Verificação da convergência

Assim como no método de diferenças finitas explícito, como o método é consistente, se for linearizado e verificada a estabilidade do método linear é possível aplicar **o teorema de equivalência de Lax** para esse modelo linearizado. No caso apresentado, a convergência será verificada nos experimentos numéricos.

## 2.6 Comparação entre os métodos

A seguir, o gráfico do valor exato, método de diferenças explícitas e método de Crank-Nicolson implementados com  $Nx = 400$ ;  $Nt = 20000$ :

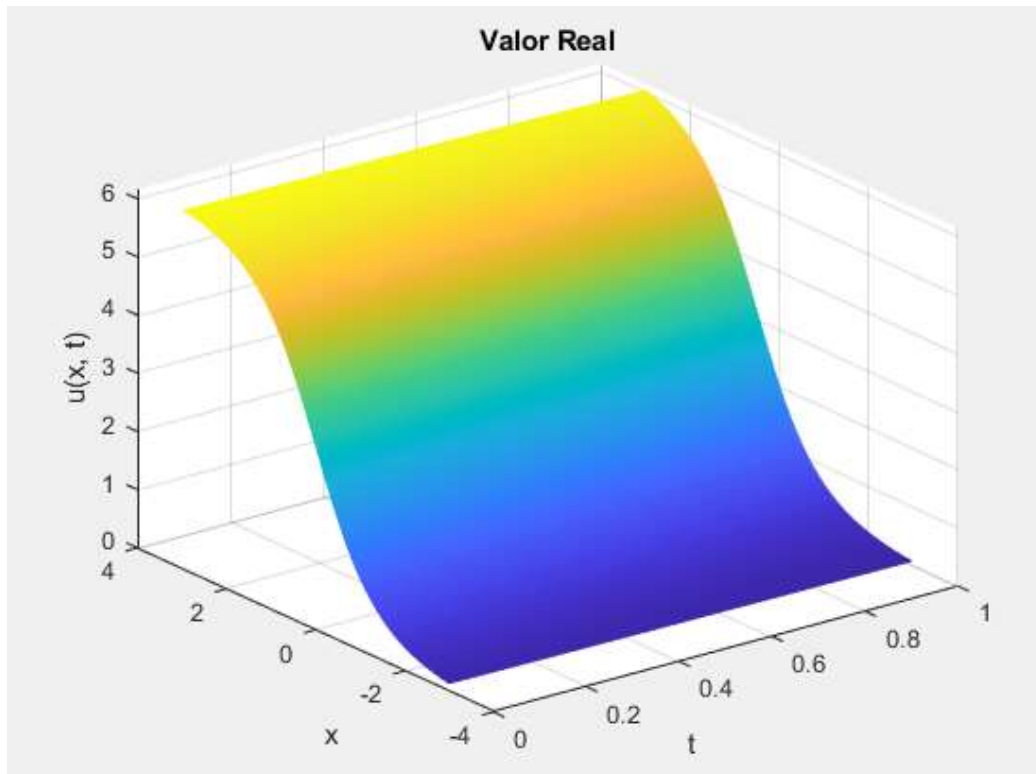


Figura 3: Gráfico do valor exato

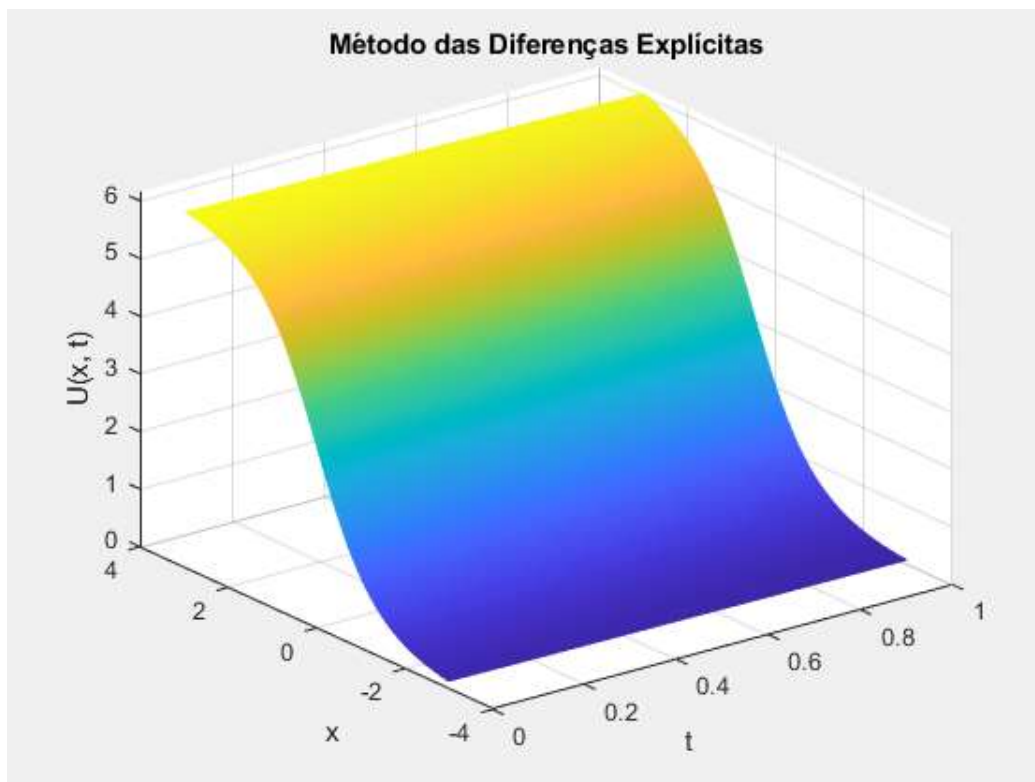


Figura 4: Gráfico do método de diferenças explícitas

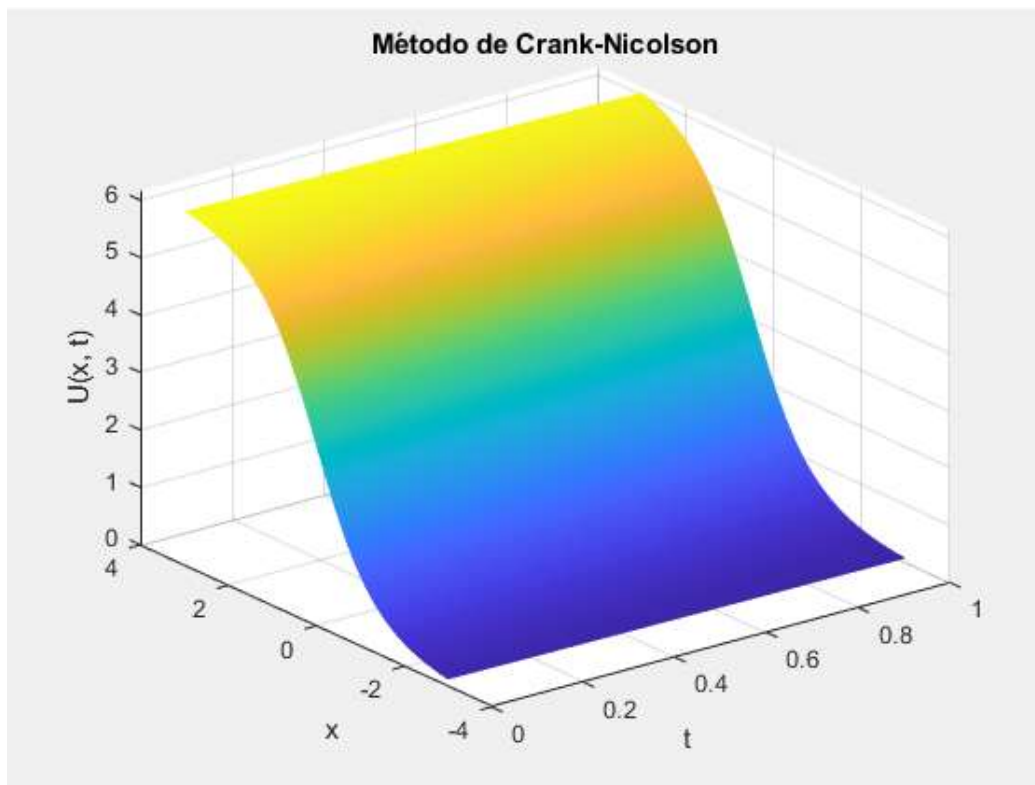


Figura 5: Gráfico do método de Crank-Nicolson

Para fazer as comparações, foram escolhidos os tempos  $t = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$  e  $x = -2.7, -1.8, \dots, 2.7$ .

Erro - Diferenças Explícitas, $N_x = 100$ ; $N_t = 1000$								0.008141 segundo
$t \backslash x$	-2,7	-1,8	-0,9	0	0,9	1,8	2,7	
0,1	-9.8349e-06	-7.9606e-07	2.6512e-06	2.2465e-06	-4.4617e-06	7.6063e-07	4.7929e-07	
0,2	-0.0013	-3.1726e-06	1.0181e-05	1.0585e-05	-1.8919e-05	2.9773e-06	1.8561e-05	
0,3	-0.0115	-7.0095e-06	2.2072e-05	2.6463e-05	-4.4641e-05	6.3787e-06	9.4603e-04	
0,4	-0.0271	-1.2112e-05	3.8109e-05	5.0103e-05	-8.2489e-05	1.0503e-05	0.0088	
0,5	-0.0384	-1.8208e-05	5.8197e-05	8.0617e-05	-1.3248e-04	1.4655e-05	0.0264	
0,6	-0.0506	-2.4942e-05	8.2153e-05	1.1630e-04	-1.9338e-04	1.7861e-05	0.0423	
0,7	-0.0604	-3.1884e-05	1.0949e-04	1.5501e-04	-2.6246e-04	1.8829e-05	0.0590	
0,8	-0.0702	-3.9495e-05	1.3928e-04	1.9447e-04	-3.3551e-04	1.5941e-05	0.0765	
0,9	-0.0781	-7.0876e-05	1.7009e-04	2.3258e-04	-4.0723e-04	8.0609e-06	0.0940	

Tabela 1: erros do método de diferenças explícitas com  $N_x = 100$  e  $N_t = 1000$

Erro - Diferenças Explícitas, $N_x = 500$ ; $N_t = 1000$								0.020651 segundo
$t \backslash x$	-2,7	-1,8	-0,9	0	0,9	1,8	2,7	
0,1	-1.7566e-08	-3.3101e-08	1.2644e-07	4.0232e-08	-1.5520e-07	2.9902e-08	1.7485e-08	
0,2	-8.5342e-08	-1.2945e-07	4.8823e-07	2.2267e-07	-6.6268e-07	1.2063e-07	7.3277e-08	
0,3	-0.0019	-2.8402e-07	1.0585e-06	6.3553e-07	-1.5806e-06	2.6347e-07	3.8195e-04	
0,4	-0.0164	-4.8829e-07	1.8205e-06	1.3271e-06	-2.9586e-06	4.4299e-07	0.0135	
0,5	-0.0291	-7.3022e-07	2.7599e-06	2.3011e-06	-4.8211e-06	6.3554e-07	0.0290	
0,6	-0.0407	-9.9394e-07	3.8569e-06	3.5219e-06	-7.1486e-06	8.0736e-07	0.0450	
0,7	-0.0514	-1.2595e-06	5.0779e-06	4.9242e-06	-9.8636e-06	9.1275e-07	0.0616	
0,8	-0.0611	-1.5026e-06	6.3711e-06	6.4267e-06	-1.2826e-05	8.9262e-07	0.0785	
0,9	-0.0696	-1.6947e-06	7.6679e-06	7.9438e-06	-1.5842e-05	6.7401e-07	0.0960	

Tabela 2: erros do método de diferenças explícitas com  $N_x = 500$  e  $N_t = 1000$

Erro - Diferenças Explícitas, $N_x = 500$ ; $N_t = 5000$								0.063209 segundo
$t \backslash x$	-2,7	-1,8	-0,9	0	0,9	1,8	2,7	
0,1	-1.7321e-08	-3.2318e-08	1.2935e-07	3.4953e-08	-1.5708e-07	3.1814e-08	1.8395e-08	
0,2	-8.9910e-08	-1.2788e-07	4.9377e-07	2.1335e-07	-6.6710e-07	1.2456e-07	7.5379e-08	
0,3	-0.0021	-2.8164e-07	1.0664e-06	6.2350e-07	-1.5884e-06	2.6944e-07	4.2231e-04	
0,4	-0.0165	-4.8510e-07	1.8301e-06	1.3135e-06	-2.9707e-06	4.5093e-07	0.0137	
0,5	-0.0292	-7.2618e-07	2.7708e-06	2.2871e-06	-4.8380e-06	6.4527e-07	0.0292	
0,6	-0.0409	-9.8902e-07	3.8684e-06	3.5080e-06	-7.1707e-06	8.1855e-07	0.0452	
0,7	-0.0516	-1.2537e-06	5.0891e-06	4.9109e-06	-9.8907e-06	9.2492e-07	0.0618	
0,8	-0.0612	-1.4958e-06	6.3812e-06	6.4141e-06	-1.2857e-05	9.0511e-07	0.0787	
0,9	-0.0697	-1.6870e-06	7.6760e-06	7.9321e-06	-1.5876e-05	6.8593e-07	0.0962	

Tabela 3: erros do método de diferenças explícitas com  $N_x = 500$  e  $N_t = 5000$

Erro - Crank-Nicolson, $N_x = 100$ ; $N_t = 1000$								0.039013 segundo
t\x	-2,7	-1,8	-0,9	0	0,9	1,8	2,7	
0,1	-4.0564e-07	-7.9639e-07	2.6523e-06	2.2474e-06	-4.4636e-06	7.6095e-07	4.7341e-07	
0,2	-1.6092e-06	-3.1739e-06	1.0185e-05	1.0589e-05	-1.8927e-05	2.9785e-06	1.9447e-06	
0,3	-3.5678e-06	-7.0124e-06	2.2081e-05	2.6474e-05	-4.4660e-05	6.3813e-06	4.4577e-06	
0,4	-6.2388e-06	-1.2117e-05	3.8124e-05	5.0124e-05	-8.2523e-05	1.0507e-05	8.0510e-06	
0,5	-9.5793e-06	-1.8215e-05	5.8221e-05	8.0650e-05	-1.3254e-04	1.4661e-05	1.2753e-05	
0,6	-1.3545e-05	-2.4952e-05	8.2187e-05	1.1635e-04	-1.9346e-04	1.7868e-05	1.8579e-05	
0,7	-1.8088e-05	-3.1878e-05	1.0954e-04	1.5507e-04	-2.6257e-04	1.8837e-05	2.5519e-05	
0,8	-2.3154e-05	-3.8445e-05	1.3934e-04	1.9455e-04	-3.3565e-04	1.5928e-05	3.3532e-05	
0,9	-2.8674e-05	-4.4000e-05	1.7016e-04	2.3268e-04	-4.0740e-04	7.1679e-06	4.2542e-05	

Tabela 4: erros do método de Crank-Nicolson com  $N_x = 100$  e  $N_t = 1000$

Erro - Crank-Nicolson, $N_x = 500$ ; $N_t = 1000$								1.805057 segundo
t\x	-2,7	-1,8	-0,9	0	0,9	1,8	2,7	
0,1	-1.7741e-08	-3.3428e-08	1.2775e-07	4.0583e-08	-1.5680e-07	3.0225e-08	1.7671e-08	
0,2	-6.9366e-08	-1.3076e-07	4.9331e-07	2.2486e-07	-6.6954e-07	1.2191e-07	7.3756e-08	
0,3	-1.5303e-07	-2.8692e-07	1.0696e-06	6.4195e-07	-1.5970e-06	2.6624e-07	1.7004e-07	
0,4	-2.6690e-07	-4.9331e-07	1.8394e-06	1.3406e-06	-2.9894e-06	4.4765e-07	3.0814e-07	
0,5	-4.0910e-07	-7.3775e-07	2.7886e-06	2.3248e-06	-4.8712e-06	6.4221e-07	4.8938e-07	
0,6	-5.7765e-07	-1.0042e-06	3.8970e-06	3.5583e-06	-7.2230e-06	8.1582e-07	7.1462e-07	
0,7	-7.7040e-07	-1.2725e-06	5.1306e-06	4.9752e-06	-9.9663e-06	9.2231e-07	9.8397e-07	
0,8	-9.8491e-07	-1.5182e-06	6.4373e-06	6.4933e-06	-1.2960e-05	9.0198e-07	1.2964e-06	
0,9	-1.2183e-06	-1.7123e-06	7.7476e-06	8.0263e-06	-1.6007e-05	6.8109e-07	1.6493e-06	

Tabela 5: erros do método de Crank-Nicolson com  $N_x = 500$  e  $N_t = 1000$

Erro - Crank-Nicolson, $N_x = 500$ ; $N_t = 5000$								8.799359 segundos
t\x	-2,7	-1,8	-0,9	0	0,9	1,8	2,7	
0,1	-1.7328e-08	-3.2328e-08	1.2941e-07	3.4987e-08	-1.5711e-07	3.1864e-08	1.8444e-08	
0,2	-6.8192e-08	-1.2792e-07	4.9402e-07	2.1352e-07	-6.6724e-07	1.2477e-07	7.5174e-08	
0,3	-1.5077e-07	-2.8173e-07	1.0669e-06	6.2394e-07	-1.5887e-06	2.6989e-07	1.7195e-07	
0,4	-2.6325e-07	-4.8525e-07	1.8310e-06	1.3144e-06	-2.9714e-06	4.5173e-07	3.1037e-07	
0,5	-4.0376e-07	-7.2640e-07	2.7722e-06	2.2886e-06	-4.8392e-06	6.4649e-07	4.9174e-07	
0,6	-5.7035e-07	-9.8932e-07	3.8703e-06	3.5102e-06	-7.1725e-06	8.2025e-07	7.1688e-07	
0,7	-7.6089e-07	-1.2540e-06	5.0916e-06	4.9139e-06	-9.8932e-06	9.2714e-07	9.8587e-07	
0,8	-9.7295e-07	-1.4962e-06	6.3844e-06	6.4181e-06	-1.2861e-05	9.0784e-07	1.2977e-06	
0,9	-1.2037e-06	-1.6874e-06	7.6799e-06	7.9370e-06	-1.5880e-05	6.8915e-07	1.6497e-06	

Tabela 6: erros do método de Crank-Nicolson com  $N_x = 500$  e  $N_t = 5000$

### 3 Conclusões

Neste trabalho foram apresentadas as soluções numérico-computacionais da equação seno-Gordon a partir do método de diferenças finitas e o método de Crank-Nicolson. A análise de consistência, estabilidade e convergência também foram verificadas.

Como pôde ser analisado, o método de Crank-Nicolson obteve uma aproximação melhor se comparado com o método de diferenças finitas. Isso pode ser facilmente notado nas tabelas. Além disso, o tempo de execução do método de Crank-Nicolson foi maior.

A análise numérica tem fundamental importância no estudo de fenômenos físicos. Uma parceria entre físicos teóricos e matemáticos é fundamental para elaboração de sistemas e análise de resultados mais práticos. Pode ser acrescentado a esse trabalho o estudo de diferentes métodos com suas devidas comparações, além da análise também dos casos 2D e 3D da equação seno-Gordon.

## Referências

- [1] Faizuddin Ahmed. “Klein-Gordon Oscillator in the Presence of External Fields in a Cosmic Space-Time with a Space-Like Dislocation and Aharonov-Bohm Effect”. Em: *Advances in High Energy Physics* 2020 (2020).
- [2] Athanassios G Bratsos e Edward H Twizell. “A family of parametric finite-difference methods for the solution of the sine-Gordon equation”. Em: *Applied Mathematics and Computation* 93.2-3 (1998), pp. 117–137.
- [3] Athanassios G Bratsos e Edward H Twizell. “The solution of the sine-Gordon equation using the method of lines”. Em: *International journal of computer mathematics* 61.3-4 (1996), pp. 271–292.
- [4] M Carmeli. “Field theory on  $R \times S^3$  topology. I: The Klein-Gordon and Schrödinger equations”. Em: *Foundations of Physics* 15.2 (1985), pp. 175–184.
- [5] CA Condat, RA Guyer e MD Miller. “Double sine-Gordon chain”. Em: *Physical Review B* 27.1 (1983), p. 474.
- [6] Richard Courant, Kurt Friedrichs e Hans Lewy. “On the partial difference equations of mathematical physics”. Em: *IBM journal of Research and Development* 11.2 (1967), pp. 215–234.
- [7] Alfredo T Cousin, Cícero L Frota e Nickolai A Larkin. “On a system of Klein–Gordon type equations with acoustic boundary conditions”. Em: *Journal of mathematical analysis and applications* 293.1 (2004), pp. 293–309.
- [8] Richard H Enns e George C McGuire. *Nonlinear physics with Mathematica for scientists and engineers*. Springer Science & Business Media, 2012.

- [9] Charles Hirsch. “Numerical computation of internal and external flows, Volume 1: Fundamentals of numerical discretization”. Em: *John Wiley and Sons* 9 (1988), p. 10.
- [10] Carsten Hutter et al. “Josephson junction transmission lines as tunable artificial crystals”. Em: *Physical Review B* 83.1 (2011), p. 014511.
- [11] Ryogo Kubo. “Stochastic liouville equations”. Em: *Journal of Mathematical Physics* 4.2 (1963), pp. 174–183.
- [12] Randall J LeVeque. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*. SIAM, 2007.
- [13] Tony Hilton Royle Skyrme e Gerald Edward Brown. *Selected Papers, with Commentary, of Tony Hilton Royle Skyrme*. Vol. 3. World Scientific, 1994.
- [14] “ ”U nas equações de diferença parcial da física matemática”. Em: 100 (). Ed. por springer.
- [15] John C Strikwerda. *Finite difference schemes and partial differential equations*. SIAM, 2004.
- [16] Albert Sulaiman. “Large amplitude of the internal motion of DNA immersed in bio-fluid”. Em: (jan. de 2006).
- [17] Abdul-Majid Wazwaz. “The tanh method: exact solutions of the sine-Gordon and the sinh-Gordon equations”. Em: *Applied Mathematics and Computation* 167.2 (2005), pp. 1196–1210.
- [18] Eric W. Weisstein. “Phi-Four Equation”. Em: ().
- [19] Serge Bruno Yamgoué, Guy Roger Deffo e François Beceau Pelap. “A new rational sine-Gordon expansion method and its application to non-linear wave equations arising in mathematical physics”. Em: *The European Physical Journal Plus* 134.8 (2019), p. 380.

- [20] Chunxiong Zheng. “Numerical solution to the sine-Gordon equation defined on the whole real axis”. Em: *SIAM Journal on Scientific Computing* 29.6 (2007), pp. 2494–2506.

## 3.1 Apêndice

### 3.1.1 Implementação Computacional

Para a implementação, foram tomadas os valores e funções retiradas de [20], no Exemplo 2, mas outra função foi colocada como comentário no código caso seja desejado plotá-la também.

- Função  $f(x)$ :

```
function y = function_f(x)
    c = 0.5;
    y = 4*atan(exp(x/((1-c^2)^(1/2)))); %(função 1)
    %y = 4*atan(c*sinh(x/(1-c^2)^0.5)); %(função 2)
end function
```

- Função  $g(x)$ :

```
function y = function_g(x)
    c = 0.5;
    y = (-4*c*(1/(1-c^2))^(1/2))*exp(x/((1-c^2)^(1/2))).
        /(1+exp(2*(x/((1-c^2)^(1/2)))));%(função1)
    %y = 0*x; %(função 2)
```

Além disso, para todos os métodos serem comparados, segue o *script* para o valor exato da função.

```
R = zeros(Nx+1, Nt+1);
c = 0.5;
for i = 1:Nx+1
    for j = 1:Nt+1
        %(função 1)
        R(i, j) = 4*atan(exp((x(i)-c*t(j))/((1-c^2)^(1/2))));
        %(função 2)
```

```

        %R(i, j) = 4*atan(sinh(x(i)/(1-c^2)^0.5)
            *sech(c*t(j)/(1-c^2)^0.5));
    end
end

```

### Implementação do método de diferenças explícitas

```

function [x, t, U] = diferenca_explicita(L_0, L_1, t_0, t_1, Nx, Nt)
    h = (L_1-L_0)/Nx;
    k = (t_1-t_0)/Nt;
    x = L_0:h:L_1;
    t = t_0:k:t_1;
    v = k/h;

    U = zeros(Nx+1, Nt+1);

    U(1, 1) = function_f(L_0);
    U(Nx+1, 1) = function_f(L_1);

    for i = 2:Nx
        U(i, 1) = function_f(L_0 + (i-1)*h);
        U(i, 2) = (1-v^2)*function_f(L_0 + (i-1)*h)
            +0.5*v^2*(function_f(L_0 + (i-2)*h)
            +function_f(L_0 + (i)*h))
            +k*function_g(L_0 + (i-1)*h)
            -0.5*k^2*sin(function_f(L_0 + (i-1)*h));
    end

    U(1,2) = U(2,2);
    U(Nx+1, 2) = U(Nx,2);

```

```

for j = 2:Nt
    for i = 2:Nx
        U(i, j+1) = 2*(1-v^2)*U(i, j)
        +v^2*(U(i+1, j) + U(i-1, j))
        -U(i, j-1) -k^2*sin(U(i, j));
    end
    U(1,j+1) = U(2,j+1);
    U(Nx+1, j+1) = U(Nx,j+1);
end

```

### Implementação do método de Crank-Nicolson

Para sua implementação, primeiro foi criada uma função que calcula  $Ax = b$ , com  $A$  uma matriz tridiagonal

- Função para  $Ax = b$ :

```

function x = lin_tridiagonal(A, b)

% resolve o sistema Ax = b, onde A é uma matriz tridiagonal baseado no
% algoritmo de Crout

n = size(A,1);
x = zeros(n,1);
U = zeros(n,n);
L = zeros(n,n);

L(1,1) = A(1,1);
U(1,2) = A(1,2)/L(1,1);

for i = 2:n-1
    L(i,i-1) = A(i, i-1);
    L(i,i) = A(i,i)

```

```

        -L(i, i-1)*U(i-1,i);
    U(i,i+1) = A(i,i+1)/L(i,i);
end

L(n,n-1) = A(n, n-1);
L(n,n) = A(n,n)
        -L(n, n-1)*U(n-1,n);

z = zeros(n, 1);
z(1) = b(1)/L(1,1);
for j = 2:n-1
    z(j) = (b(j)-L(j,j-1)*z(j-1))/L(j,j);
end
z(n) = (b(n) - L(n,n-1)*z(n-1))/L(n,n);
x(n) = z(n);
for j = 1:n-1
    x(n-j) = z(n-j)-U(n-j,n-j+1)*x(n-j+1);
end

```

- Método de Crank-Nicolson:

```

function [x, t, U] = crank_nicolson_matricial(L_0, L_1, t_0, t_1, Nx, Nt)
    h = (L_1-L_0)/Nx; % tamanho do passo no espaço
    k = (t_1-t_0)/Nt; % tamanho do passo no tempo
    x = L_0:h:L_1; % vetor x (para o plot final)
    t = t_0:k:t_1; % vetor t (para o plot final)
    v = k/h; % numero de courant

    A = diag((2+2*v^2)*ones(1, Nx-1))
        +diag((-v^2)*ones(1, Nx-2), 1)
        +diag((-v^2)*ones(1, Nx-2), -1); % matriz A tridiagonal

```

```

% guardar valores das aproximações
%U(x, t) (espaço na linha, tempo na coluna)
U = zeros(Nx+1, Nt+1);

U(1, 1) = function_f(L_0);
U(Nx+1, 1) = function_f(L_1);

% seta os valores em t_0 e aproxima os valores em t_0 + k
% a partir da expansão de Taylor
for i = 2:Nx
    U(i, 1) = function_f(L_0 + (i-1)*h); % U(x, t_0)
    U(i, 2) = (1-v^2)*function_f(L_0 + (i-1)*h)
        +0.5*v^2*(function_f(L_0 + (i-2)*h)
        +function_f(L_0 + (i)*h))
        +k*function_g(L_0 + (i-1)*h)
        -0.5*k^2*sin(function_f(L_0 + (i-1)*h)); % U(x, t_0 + k)
end

% valores das extremidades de t_0 + k
U(1,2) = U(2,2);
U(Nx+1, 2) = U(Nx,2);

for i = 3:Nt+1
    b = 4*U(2:Nx, i-1)
        -A*U(2:Nx, i-2)
        -2*sin(U(2:Nx, i-1))*k^2;

    U(2:Nx, i) = lin_tridiagonal(A, b); % resolve o sistema Ax = b

```

```
% U(2:Nx, i) = A\b; fica exatamente igual usando lin_tridiagonal

% valores das extremidades
U(1,i) = U(2,i);
U(Nx+1, i) = U(Nx,i);
end
```