

Daniel Almeida Domingues Fonseca

**Avaliação de Projetos de Investimento com Opções Reais:
Cálculo de Valor de Opção de Espera de uma Unidade
Separadora de Propeno**

EPGE/FGV

Rio de Janeiro, 18 de Fevereiro de 2008

**Avaliação de Projetos de Investimento com Opções Reais:
Cálculo de Valor de Opção de Espera de uma Unidade
Separadora de Propeno**

**Avaliação de Projetos de Investimento com Opções Reais:
Cálculo de Valor de Opção de Espera de uma Unidade
Separadora de Propeno**

Daniel Almeida Domingues Fonseca

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Finanças e Economia Empresarial da Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getulio Vargas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Finanças e Economia Empresarial.

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Guimarães Dias
Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial PUC-Rio

Rio de Janeiro, 18 de Fevereiro de 2008

**Avaliação de Projetos de Investimento com Opções Reais:
Cálculo de Valor de Opção de Espera de uma Unidade
Separadora de Propeno**

Daniel Almeida Domingues Fonseca

Dissertação submetida ao corpo docente da Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getulio Vargas – EPGE/FGV, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Finanças e Economia Empresarial.

Aprovada por:

Prof. Dr. Marco Antonio Guimarães Dias – Orientador

Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial PUC-Rio

Prof. Marco Bonomo – EPGE/FGV
Ph.D. in Economics, Princeton University

Prof. Dr. Luiz Brandão – IAG Business School – PUC-Rio
Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial PUC-Rio

Rio de Janeiro, 18 de Fevereiro de 2008

Agradecimentos

Agradeço a meus pais Paulo Cesar e Aida, minha irmã Ana Paula, amigos e colegas de trabalho (tanto da Petrobras como da Fininvest e do Banco Máxima), pelo apoio e incentivo.

Agradeço à Petrobras e seus colaboradores, pela oportunidade e pelo fornecimento de informações indispensáveis para a realização deste trabalho. Em especial, agradeço aos seguintes colegas: Carlos Eduardo Couto da Silva, Luciene Paiva, Irene Barcelos, José Maurício Correa, Caroline Pessoa, Ana Beatriz Bastos, José Agostinho Neto, Luis Antônio Casali, Ricardo Cestari, Rodrigo Cezar Figueiredo, Larissa Teixeira, Leonardo Sukman, Alessandro Gomides, Ana Cristina Belga, Luciano Lucena, Marcos Huber e Sergio Pupo.

Agradeço ao corpo docente e discente da EPGE/FGV, por todo o aprendizado e suporte ao longo destes anos.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Marco Antonio Guimarães Dias, pela constante disposição em ensinar e ajudar, pelos conselhos, aprendizado e apoio.

Agradeço a Caroline Araújo Pessoa, pela grande ajuda na revisão do texto.

Agradeço ao meu gerente e colega Giovanni D'Elia Sobrinho, cuja ajuda foi fundamental para a realização deste trabalho.

“... Eis aqui, quase cume da cabeça
De Europa toda, o Reino Lusitano,
Onde a terra se acaba e o mar começa ...”

Luís Vaz de Camões

RESUMO

O tema central deste trabalho é a avaliação do valor da opção real de espera do investimento em uma Unidade Separadora de Propeno, em comparação com uma análise estática de Valor Presente Líquido. Para isso, foi exposta a teoria de opções reais, os processos estocásticos para a estimação das suas principais variáveis de incerteza (preço de produto e insumo), bem como a descrição das ferramentas de simulação a serem utilizadas. Com os instrumentos expostos, pretendemos demonstrar aos responsáveis por projetos de investimento que as incertezas podem ser medidas, levando a maior flexibilidade na tomada de decisões. Os resultados obtidos apontam para o exercício imediato da opção pela abordagem de ativos contingentes e resultados divergentes na análise de ativos contingentes em função do diferencial de preços, em função da taxa de dividendos adotada. A influência dos valores da volatilidade e da taxa de dividendos nos resultados também foi avaliada, levando à conclusão de que o primeiro gera impactos maiores no valor da opção do que o segundo.

Palavras-Chave: opções reais, processos estocásticos, diferencial de preços, unidade separadora de propeno, simulação de Monte Carlo

ABSTRACT

The main subject of the present work is the evaluation of a real option to defer an investment on a Propylene Unit, in comparison to a static analysis of Net Present Value. So, we exposed the real options theory, the stochastic processes for the estimation of its main variables of uncertainty (prices of product's sale and cost), as well as the simulation tools to be used. Considering these, we intend to show project managers that uncertainties can be measured, leading to greater flexibility on their decisions. The results show that it is optimal to do the investment immediately by the contingent claim analysis, and show divergent results on spread's contingent claims approach, due to dividend yield's estimation. The influence of volatility and dividend yield's values were evaluated, leading to the conclusion that the former creates more impact on the option's value than the latter.

Key-Words: real options, stochastic processes, spread, propylene production unit, Monte Carlo simulation

Sumário

1 INTRODUÇÃO	1
2 UNIDADE SEPARADORA DE PROPENO	3
2.1 DESCRIÇÃO DO PROCESSO	3
2.2 CAPACIDADE DE PRODUÇÃO	4
2.3 CUSTOS DE PRODUÇÃO	5
2.4 FLUXO DE CAIXA.....	5
3 TEORIA DAS OPÇÕES REAIS	7
3.1 INTRODUÇÃO.....	7
3.2 DEFINIÇÕES.....	8
3.2.1 Opções.....	8
3.2.2 Arbitragem.....	9
3.2.3 Irreversibilidade do Investimento.....	9
3.3 MODELO DE OPÇÃO REAL – OPÇÃO DE ESPERA	10
3.4 MERCADO FUTURO E CONVENIENCE YIELD	13
4 MODELOS DE SIMULAÇÃO E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS	15
4.1 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	15
4.2 PROCESSOS ESTOCÁSTICOS.....	16
4.2.1 Movimento Browniano.....	17
4.2.1.1 Movimento Geométrico Browniano com Simulação de Monte Carlo	18
4.2.1.1.1 Calibração de Parâmetros do Movimento Geométrico Browniano	20
4.2.1.1.1.1 Convenience Yield.....	20
4.2.1.1.1.2 Tendência e Volatilidade	20
4.2.2 Processo de Reversão à Média de Ornstein-Uhlenbeck	24
4.2.2.1 Simulação de Monte Carlo da Reversão à Média	25
4.2.2.2 Calibração de Parâmetros de Reversão à Média	27
5 MÉTODOS DE AVALIAÇÃO DE OPÇÕES REAIS	29
5.1 MÉTODO DA VOLATILIDADE AGREGADA DE COPELAND & ANTIKAROV	29
5.2 DIREITOS CONTINGENCIAIS	30
5.3 MÉTODOS NUMÉRICOS	35
6 DETERMINAÇÃO DO VALOR PRESENTE DO PROJETO E CÁLCULO DO VALOR DA OPÇÃO DE ESPERA	38
6.1 DIFERENÇAS ENTRE A ABORDAGEM ESTÁTICA E OPÇÕES REAIS	38
6.2 SIMULAÇÕES CORRELACIONADAS: A TRANSFORMAÇÃO DE CHOLESKY	40
6.3 CÁLCULO DA VOLATILIDADE DO V DA CARTEIRA DE PROPENO	41
6.4 CÁLCULO DO VALOR DA OPÇÃO	42
6.4.1 Ativos Contingentes	42
6.4.2 Ativos Contingentes como função do spread.....	46
6.4.2.1 O Movimento Aritmético Browniano.....	46
6.4.2.2 O Modelo como função do spread.....	49
6.4.2.2.1 Modelagem usando Contingent Claims.....	49
6.4.2.2.2 Forma funcional de V(S) e Investimento	51
6.4.2.2.3 Cálculo dos Parâmetros.....	52
6.4.2.2.4 Determinação de S* e Solução do Modelo.....	53
6.4.3 Resultados	55
7 CONCLUSÕES	57
8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	58
9 ANEXOS	62
9.1 SÉRIES DE PREÇOS DOS MERCADOS À VISTA DE PROPANO E PROPENO	62
9.2 SÉRIES DE PREÇOS DO MERCADO FUTURO DE PROPANO	67
9.3 FLUXO DE CAIXA DA UNIDADE SEPARADORA DE PROPENO (SEM FLEXIBILIDADE) EM US\$ MILHÕES.....	72
9.4 CÓDIGO VBA (VISUAL BASIC FOR APPLICATIONS) DA APROXIMAÇÃO ANALÍTICA DE BJERKSUND & STENSLAND (1993) PARA OPÇÃO AMERICANA (VALOR DA OPÇÃO E VALOR DO GATILHO)	73
APÊNDICE – DEMONSTRAÇÃO DA OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DISCRETA DE SIMULAÇÃO DE PREÇO ...75	

1 INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é a avaliação de uma oportunidade de investimento sob a ótica de realizá-lo no momento da avaliação ou postergar a sua aprovação, no intuito de se aguardar por um ambiente mais propício (opção de espera ou diferimento). Para tal, usa-se a abordagem comumente conhecida como teoria das opções reais, inspirada nas idéias da teoria das opções financeiras para valorar ativos reais ou não-financeiros. Essa teoria considera as ações ótimas sob incertezas, que são modeladas como processos estocásticos. No caso do empreendimento em análise nessa dissertação, as variáveis estocásticas consideradas são o preço de venda do seu produto e o custo de seu principal insumo.

Os projetos de investimento têm como seu principal componente a incerteza dos seus lucros e retornos, tornando a modelagem dos seus fatores de incerteza um trabalho de suma importância. Neste trabalho, as incertezas dos preços do produto final e do insumo são modeladas como processos estocásticos correlacionados, que permitem estimar a volatilidade e outros parâmetros do processo estocástico resultante para o Valor Presente dos Fluxos de Caixa Operacionais (VP) ¹ do empreendimento, que será o nosso ativo subjacente. Uma maneira alternativa seria modelar um único processo estocástico para o *diferencial* de preços entre o produto e o insumo.

Mais especificamente, a avaliação do investimento em uma Unidade Separadora de Propeno se torna importante no caso brasileiro pelo fato da indústria estar demandando cada vez mais os produtos petroquímicos, bem como pela observação de implantação destes empreendimentos na indústria de petróleo em anos recentes. No cerne destes empreendimentos, há a diferença nos preços (*spread*) do propano e do propeno, dado que abrimos mão de uma parte do primeiro para a transformação no segundo, sendo este último matéria-prima para a indústria petroquímica.

Com o aumento deste diferencial ao longo dos últimos três anos, houve uma aceleração na implantação deste tipo de empreendimento. O objetivo desse trabalho é justamente mensurar o quanto o aumento da atratividade desse tipo de projeto está influenciando a decisão de investir, bem como modelar o comportamento dessas incertezas nos preços, com o objetivo de prever suas realizações futuras, que por fim vão afetar a decisão de investimento.

¹ Deste ponto em diante, sempre que nos referirmos a Valor Presente (VP), entenda-se como sendo o Valor Presente das receitas líquidas de custos operacionais e impostos associados a um projeto genérico ou ao projeto em estudo.

Com isso, pretendemos proporcionar uma visão prática do estudo da viabilidade de implantação de uma Unidade Separadora de Propeno em um ambiente de variação do preço do seu insumo e de seu produto final, em contraposição a uma análise estática dada por um único valor do empreendimento.

2 UNIDADE SEPARADORA DE PROPENO

O trabalho é centrado na avaliação da implantação de uma Unidade Separadora de Propeno em uma refinaria de petróleo, onde esta vai aproveitar a corrente de Gás Liquefeito de Petróleo (GLP) gerado em uma das etapas de refino de petróleo para extrair o propeno, que será vendido para utilização em processo petroquímico. Nas seções seguintes, serão descritos os processos e as premissas envolvendo o empreendimento.

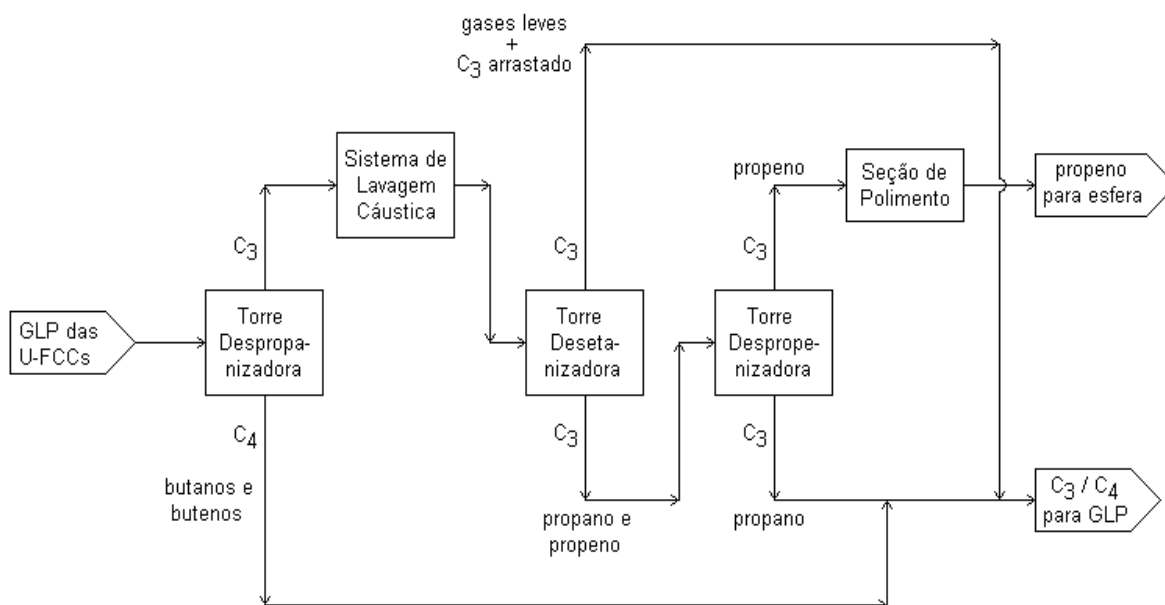
2.1 Descrição do Processo

O objetivo da Unidade é separar da corrente de GLP o propeno, que será utilizado no processo petroquímico. O GLP contém essencialmente propano e propeno (C_3). Como o propano é descartado em favor do propeno, podemos considerar o primeiro como sendo insumo para a produção do segundo. O GLP originado nas Unidades de Craqueamento Catalítico da refinaria será a carga da Unidade de Separação de Propeno, que é composta pelos seguintes processos:

- Torre despropanizadora, que remove da corrente de propeno os butanos e butenos, retornando estes dois últimos para a corrente de GLP;
- Sistema de lavagem cáustica, composto por um vaso de solução cáustica, um vaso de lavagem com água e um vaso de decantação, para retirar impurezas ainda remanescentes na corrente de C_3 , como H_2S ;
- Torre desetanizadora, que separa as frações mais leves que o propeno, devolvendo-as para a corrente de GLP;
- Torre despropenizadora que finalmente separa o propeno (liga dupla, com 3 átomos de Carbono e 6 de Hidrogênio) do propano (liga simples, com 3 átomos de Carbono e 8 de Hidrogênio), obtendo uma corrente com grau de pureza de 94,6 % em volume de propeno no topo da torre;
- Seção de Polimento, onde o propeno é comprimido e passa, na fase líquida, por um leito removedor de COS e arsina (AsH_3).

No final, o propeno produto (grau químico²) segue para armazenamento nas esferas de propeno, e destas para a planta de ácido acrílico, onde será utilizado como insumo no processo petroquímico. A Figura 1 apresenta o diagrama de blocos simplificado da Unidade de Separação de Propeno.

Figura 1 – Diagrama de funcionamento de uma Unidade Separadora de Propeno



2.2 Capacidade de Produção

A unidade foi projetada para uma produção de 112.400 toneladas (ton)/ano (340 dias de operação por ano) de propeno grau químico, com 94,6 % em peso de pureza. A produção a ser comercializada foi definida em 105.000 ton/ano.

A capacidade máxima estimada de produção de propeno é de cerca de 116,4 mil t/ano (considerando a operação por 340 dias/ano ou 125,0 mil t/ano considerando 365 dias/ano) de propeno grau químico.

Podemos considerar que não haverá incerteza na quantidade comercializada, e que esta será igual à produção de 105.000 ton/ano, pois a Unidade está sendo implantada para atender a um Pólo Petroquímico e esta quantidade será definida em contrato.

² Há uma distinção no mercado entre o grau químico e o grau polímero. Este último contém 99,9% de pureza em volume, e não será objeto de nosso estudo.

2.3 Custos de Produção

A Unidade, para funcionar, tem despesas anuais com pessoal, manutenção, IPTU, seguros, entre outras. Estas despesas foram estimadas no início da avaliação e em termos reais devem permanecer constantes durante toda a sua vida útil. Podemos considerar estes como sendo os custos fixos da Unidade.

No processo, também temos custos variáveis, que são uma função da produção da mesma. As principais utilidades necessárias para a operação da Unidade são energia elétrica, vapor de baixa pressão e água de refrigeração. Os seus custos e quantidades serão considerados constantes ao longo do tempo, dado que a quantidade produzida também não sofre variação, por força de contrato. Então, por uma particularidade, os custos variáveis também se tornam fixos.

A retirada do propano da unidade de GLP faz com que a sua densidade não fique em conformidade com as especificações da ANP³. Com isso, será necessário importar 12.000 ton/ano para “corrigir” a densidade. Os custos de frete até o porto e de transferência do porto à refinaria são considerados constantes.

2.4 Fluxo de Caixa

O valor presente do Fluxo de Caixa⁴ do projeto determina a forma funcional do valor do projeto V , que é essencialmente uma função dos preços do propano e propano:

$$V = \sum_{i=1}^T FC_i \exp^{-\mu i} \quad (1)$$

Onde i é o ano do fluxo de caixa, T é o último ano e μ é a taxa real anual de desconto ajustada ao risco.

O Fluxo de Caixa (FC) em cada ano i é dado pela seguinte expressão:

$$FC_i = LL_i \quad (2)$$

³ Sigla para Agência Nacional do Petróleo.

⁴ Fluxo de Caixa Operacional do Projeto, ou seja, fluxo derivado das operações (receitas deduzidas de custos operacionais e impostos).

Onde LL é o Lucro Líquido. É esperado que nos primeiros três anos do projeto os fluxos de caixa sejam iguais a zero, pois a produção se inicia no início do quarto ano.

Já o Lucro Líquido em cada ano i é definido como:

$$LL_i = (1 - \tau)LT_i \quad (3)$$

Onde LT é o Lucro Tributável e τ é a alíquota de imposto sobre a renda (Imposto de Renda (IR) acrescido da Contribuição Social sobre o Lucro Líquido (CSLL)).

Por fim, o Lucro Tributável em cada ano i , que é a base de cálculo do imposto sobre a renda, é definido como:

$$LT_i = [(Ppropeno_i - Ppropano_i - Cfr_i)Q_i] - Cutil_i - Coper_i \quad (4)$$

Onde Ppropeno e Ppropano são respectivamente os preços do propeno e propano⁵, Cfr é o custo dos fretes para correção de densidade do GLP (conforme descrito na seção 2.3), Q é quantidade produzida, Cutil é o custo das utilidades e Coper são os custos operacionais fixos com a tributação de CPMF⁶ (ambos também descritos na seção 2.3). Todos estes valores estão em US\$ tonelada/ano. O termo entre colchetes é a receita operacional, que ao ser deduzido do Cutil gera o resultado operacional. Os custos operacionais vêm segregados do resultado operacional para facilitar a exposição (vide anexo 9.3).

O valor presente do fluxo de investimento em cada ano i tem a seguinte forma funcional

$$I = \sum_{i=1}^T (K_i - D_i \tau) \exp^{-\mu i} \quad (5)$$

Onde K é o desembolso de capital líquido da recuperação tributária de ICMS e PIS/COFINS e com tributação de CPMF, D é a depreciação, com τ e μ tendo os significados já expostos anteriormente.

⁵ Os preços do propano e propeno utilizados ao longo do trabalho estão expressos em dólares norte-americanos por tonelada (US\$/ton)

⁶ Sigla para Contribuição Provisória sobre Movimentações Financeiras, tributo vigente à época da elaboração do Fluxo de Caixa e com alíquota de 0,38%. Este tributo também incide sobre os pagamentos de IR e CSLL.

3 TEORIA DAS OPÇÕES REAIS

3.1 Introdução

O surgimento do modelo de precificação de opção financeira europeia desenvolvido por Black & Scholes (1973) e Merton (1973) trouxe uma nova forma de valoração de ativos financeiros, usando conceitos de arbitragem e montagem de portfólio livre de risco, tornando irrelevante a discussão da época de qual a taxa de desconto ajustada ao risco de um derivativo. Essa teoria foi estendida para valoração de derivativos sobre mercadorias (*commodities*), como o artigo clássico de Black (1976). De fato, as opções trouxeram também uma nova abordagem para a tomada de decisão, pois os agentes passaram a considerar explicitamente o valor do gerenciamento ativo de exercer ou não um direito de compra ou venda durante um determinado período de tempo, ao invés de uma única decisão imediata.

As opções reais são a aplicação deste arcabouço na avaliação de ativos reais, ou seja, ativos não negociados no mercado. Como exemplo temos projetos de investimento, concessões, projetos de pesquisa e desenvolvimento, entre outros. A sua aplicação é relativamente recente, e tem como cerne a modelagem explícita da possibilidade dos responsáveis por esses projetos poderem tomar as suas decisões gerenciais ao longo da vida útil do projeto.

Em outras palavras, o valor de uma opção real inclui o valor da flexibilidade que um gerente tem para tomar decisões sobre ativos reais em resposta aos novos cenários que se apresentarem. Com a chegada de novas informações, a gerência pode reagir otimamente a elas e adotar decisões que vão influenciar positivamente o valor final do projeto. Comumente, podemos citar como exemplos de opções reais o momento ótimo de investir ou postergar a decisão de investimento, a opção expansão de um empreendimento, a parada temporária de uma operação, o abandono do empreendimento e a opção de modificar ou converter as suas características originais. Assim, um projeto de investimento pode estar contemplando opções sobre um ativo real.

O tempo influencia também as decisões de investimento, pois seus fluxos de caixa são afetados pelas incertezas e pelas decisões tomadas pela empresa e seus concorrentes. Para avaliar esta decisão em uma determinada data, torna-se necessário fazer considerações sobre as perspectivas do negócio e do mercado que podem variar em diversas direções. A técnica de

avaliação de investimento deve considerar essas flutuações, de forma a fornecer instrumentos de tomada de decisão a cada instante do tempo.

3.2 Definições

3.2.1 Opções

Opções são contratos de compra ou venda de um determinado ativo, cujo preço depende de variáveis atreladas a este ativo, objeto ou subjacente, e do tempo de duração deste contrato. Também podemos definir como sendo um derivativo, ou seja, um contrato cujo fluxo de caixa deriva funcionalmente de outro ativo, o subjacente.

Uma opção de compra (*call*) dá o direito de seu detentor de comprar um ativo objeto a um preço estabelecido previamente (preço de exercício). Se ela for do tipo européia, o exercício só poderá ser realizado em uma data futura também determinada previamente (Hull, 2002). A remuneração da opção de compra européia na data de expiração T é a seguinte:

$$C_T = \text{Max} (S_T - K, \text{zero}) \quad (6)$$

Onde C_T é o valor da opção na data T , T é data de vencimento, S_T é o preço do ativo objeto em T e K é o preço de exercício. A opção só começa a ganhar valor no momento em que o valor do ativo objeto supera o de exercício. No jargão do mercado, diz-se que ela está “entrando no dinheiro”. Da mesma forma, quando o inverso acontece ($S_T < K$), o detentor não exerce a opção, pois é mais barato comprar o ativo no mercado do que comprar ao preço K . Nesse caso a opção expira sem valor e no jargão do mercado diz-se que “a opção virou pó”.

Na opção de venda (*put*), o raciocínio é inverso. Ela dá o direito ao seu detentor de vender o ativo objeto a um preço estabelecido previamente (preço de exercício), em uma data futura também determinada previamente. Nesta situação, na expiração a opção tem valor se o preço do ativo objeto ficar abaixo do preço de exercício.

As opções têm suas particularidades quanto à data de exercício. As européias são aquelas que só podem ser exercidas no momento do seu vencimento T , enquanto que as americanas permitem o exercício em qualquer momento até (inclusive) o vencimento. Por isso as opções americanas têm um valor no mínimo igual à das européias.

3.2.2 Arbitragem

Informalmente, arbitragem é a possibilidade de ter lucro sem risco e sem investimento líquido (sem ter dinheiro), por ex., em $t = 0$ fazer um investimento líquido igual a zero e em $t = 1$ não ter risco de perder em nenhum cenário, mas podendo ganhar em algum. Uma definição mais formal (Huang & Litzemberg, 1988, p.226): “*É um plano de consumo que tem custo inicial não-positivo e que é sempre não-negativo e estritamente positivo em pelo menos um cenário*”.

Arbitragem em avaliação de ativos derivativos significa que ao se tomar posições simultâneas em diferentes ativos de forma a montar um portfólio livre de risco, este retorno seja superior (ou inferior) ao do ativo livre de risco negociado no mercado. Havendo esta situação, diz-se que há uma oportunidade de arbitragem. Este conceito foi primordial na criação do modelo de precificação de opções de Black & Scholes (1973). A ausência de arbitragem é uma condição necessária para definir o preço justo de um ativo financeiro em equilíbrio.

3.2.3 Irreversibilidade do Investimento

Um investimento torna-se irreversível quando não há a possibilidade de se recuperar o valor investido. Estes investimentos, também conhecidos como “custos afundados”, ocorrem geralmente em função de sua especificidade, o que os tornam ilíquidos e de difícil venda em mercado. A irreversibilidade pode ser total ou parcial (quando existe valor residual ou de “sucata”).

Objeto de estudo desta dissertação, a Unidade Separadora de Propeno demanda investimentos irreversíveis, muito específicos para finalidade que estão sendo destinados. A irreversibilidade também é retratada através dos longos contratos de construção e montagem que norteiam a execução deste tipo de investimento. Um cancelamento contratual gera perdas de recursos, além de pagamento de multas e penalidades.

Além dos contratos e da especificidade dos investimentos, existe o fator de concentração de mercado, característica deste tipo de segmento. Caso o investimento perca sua atratividade, as empresas fornecedoras e empreendedoras do projeto também passam a desfazer suas posições, caracterizando ainda mais a irreversibilidade de um Projeto de Unidade Separadora de Propeno.

Para investimentos irreversíveis, existe sempre a opção de esperar por novas informações. Com isto, verifica-se um custo de oportunidade na execução destes projetos. O cálculo da opção de espera, que determina a execução imediata de um projeto ou sua postergação, será analisado no capítulo subsequente. Este trabalho não se deterá na avaliação de outros modelos, como abandono, suspensão temporária ou flexibilidade de insumos e/ou produtos finais, já que, para o caso de Unidade Separadora de Propeno, torna-se difícil seu abandono ou conversão para processamento de outros insumos.

3.3 Modelo de Opção Real – Opção de Espera

A análise do Valor Presente Líquido (VPL) é uma análise tradicional, que pressupõe rigidez no gerenciamento, já que olha apenas os fluxos de caixa esperados e não o gerenciamento ativo que toma decisões diferentes (exs.: continuar, parar temporariamente, abandonar, contrair, expandir) em diferentes cenários. O VPL como regra de decisão (investir se o $VPL \geq 0$) geralmente pressupõe uma decisão do tipo “agora ou nunca”, pois não considera o valor da opção de esperar por melhores condições de mercado e/ou novas informações e/ou novas tecnologias..

Já na análise de opções reais, freqüentemente se incentiva a realização do projeto em fases, dado que há um valor na agregação de novas informações reveladas nas primeiras fases para a tomada de decisão ótima nas fases subsequentes. Planejando a flexibilidade no projeto, muda-se a atitude em relação à incerteza: em vez de temer a incerteza e apenas *diversificar* para reduzi-la, a teoria das opções proporciona a possibilidade jogar a favor da incerteza, isto é, *alavancar* o valor do projeto (ou de fases subsequentes do mesmo) usando a informação para tomar decisões otimizadas ao cenário revelado.

A análise pelo método de opções reais é mais relevante, quanto maior for a incerteza e quanto maior for a capacidade de se adaptar à incerteza (flexibilidade). Geralmente a teoria das opções reais é mais importante para projetos com VPL sem flexibilidade próxima de zero (Copeland & Antikarov, 2002).

No caso do investimento irreversível, a decisão de investir leva em consideração o custo de oportunidade de se esperar por novas informações. Assim, a decisão passa a ser a troca entre um custo afundado (o investimento) e um ativo real, cujo valor oscila ao longo do tempo (Valor Presente). Esta decisão é compatível com a modelagem de uma opção americana de compra (McDonald & Siegel, 1986), onde a empresa tem o direito, e não a obrigação, de

comprar um ativo real (projeto pronto para operar) pagando um preço de exercício definido previamente (investimento)⁷.

Suponha um projeto de investimento onde o gerente possua a flexibilidade de postergar sua implantação de forma a se beneficiar de informações futuras. A tomada de decisão deve ser realizada em um período de T anos. Esse tempo T de expiração é um tempo estimado de entrada de competidores que destruiriam o valor da opção de investir nesse projeto, conforme sugere Kester (1984). O valor da opção de investimento em T, $\Phi(V_T, I)$, é definida como:

$$\Phi(V_T, I) = \text{Max}(V_T - I, 0) \quad (7)$$

Onde V_T é o valor do projeto pronto para operar no instante de tempo T e I é o Investimento. O valor de mercado de $V(t)$ pode ser estimado como sendo o valor presente (na data t) das receitas operacionais, líquidas de custos operacionais e impostos. No caso de grandes projetos, o investimento é plurianual, de forma que $I(t)$ é o valor presente (na data t) dos investimentos, líquidos de benefícios fiscais.

O momento ótimo da decisão de investimento é aquele em que o valor da oportunidade (opção real) de investimento é máximo. Se a opção de investir não for exercida até T, demonstra-se que não é ótimo investir no projeto. No entanto, se o valor máximo for atingido no instante zero, deve-se iniciar o projeto imediatamente (nesse caso diz-se que a opção está “deep-in-the-money”). Entre um extremo e outro, existe um momento compreendido entre o instante inicial 0 e o momento T limite para exercício da opção, onde será ótimo exercê-la. A programação dinâmica permite escrever a equação (8) a seguir, chamada de equação de Bellman para problemas binários de *parada ótima*⁸, que calcula o valor da opção de investir em um projeto (Dixit & Pindyck, 1994):

$$F(V_t) = \max \left\{ \Phi(V_t, I), \frac{1}{1 + \rho} E[F(V_{t+\Delta t})] \right\} \quad (8)$$

Onde $F(V_t)$ é o valor da oportunidade avaliada em t, $E[F(V_{t+\Delta t})]$ é o valor esperado da oportunidade de investimento em $t+\Delta t$, ρ é a taxa de desconto para trazer esta remuneração

⁷ Aqui o valor do investimento é líquido de benefícios fiscais, tais como imposto de renda, contribuição social, recuperação de ICMS e PIS/COFINS para aquisições destinadas ao Ativo Imobilizado e que façam parte do processo produtivo.

⁸ Parar aqui significa exercer a opção, ou seja, “parar a espera”.

para a data t e $\Phi(V_t, I)$ é o valor da opção em caso de exercício imediato em t (aqui é $V_t - I$). Assim, a equação diz que F é o máximo entre exercer imediatamente a opção e esperar. Mas teoricamente as taxas ajustadas ao risco do ativo básico V e da opção $F(V)$ são diferentes, pois embora os riscos de F e V sejam vinculados, eles são diferentes. Se o mercado for incompleto, Dixit & Pindyck (1994) recomenda usar a programação dinâmica mas com expectativa real e uma taxa de desconto exógena ρ . Na prática, a taxa ρ usada tem sido o custo médio ponderado de capital da firma, que é uma taxa representativa da firma⁹. No entanto, nessa situação, há um *range* de taxas que não permitem a arbitragem, ao invés de um valor único obtido através do uso de medida neutra ao risco Q (medida de martingale), baseado em um mercado completo (Dixit & Pindyck, 1994). De forma a evitar esta situação, a equação de Bellman para mercado completo pode ser escrita como (Dixit & Pindyck, 1994):

$$F(V_t) = \max \left\{ \Phi(V_t, I), \frac{1}{1+r} E^Q [F(V_{t+\Delta t})] \right\} \quad (8a)$$

Onde $F(V_t)$ é o valor da oportunidade avaliada em t , $E^Q [F(V_{t+\Delta t})]$ é o valor esperado da oportunidade de investimento em $t+\Delta t$ sob medida de probabilidade neutra ao risco Q ¹⁰, r é a taxa de desconto livre de risco para trazer esta remuneração para a data t e $\Phi(V_t, I)$ é o valor da opção em caso de exercício imediato em t (aqui é $V_t - I$).

Na prática, o gerente do projeto não está apenas interessado em saber o valor da opção, mas também a regra de decisão que maximiza o valor da opção de investir, que aqui é dado por um valor crítico (V^*), também chamado de *gatilho*, a partir do qual é ótimo investir. Esse vai ser o V que torna a equação (9) abaixo verdadeira. Neste caso, o gerente é indiferente entre exercer a opção agora (obtendo $V - I$) ou esperar (F):

$$V^* - I = F(V^*) \quad (9)$$

Exceto na expiração, $V^* > I$. Na expiração T , $V^*(T) = I$. Se $V(t) < V^*(t)$ para $t < T$, a opção tem valor mesmo se $V(t) < I$, pois existem probabilidades de V evoluir favoravelmente

⁹ Quando o mercado é incompleto, existe um range de valores de F que não gera arbitragem (em contraste com um único valor de F se o mercado é completo). Assim, o único cuidado com a escolha de ρ é que ele não permita que o valor de F obtido esteja fora desse range e permita ganhos de arbitragem. Na prática é difícil determinar esse range de valores que não permita arbitragem para o caso de ativos reais.

¹⁰ Também chamada de medida equivalente de martingale, em poucas palavras é a medida de probabilidade que faz o retorno do ativo básico ser igual à taxa livre de risco.

e poder ser exercida no futuro. Na prática, este valor crítico pode ser até duas ou três vezes maior que o investimento, a depender principalmente da volatilidade de V (Dixit & Pindyck, 1994; McDonald & Siegel, 1986; Trigeorgis, 1995).

O valor da opção de espera é influenciado pelas incertezas associadas ao ativo subjacente. Mais comumente, esta incerteza está refletida pela volatilidade do Valor Presente, pois quanto maior a volatilidade, maior é o valor da opção, dado que dessa forma o ativo subjacente pode atingir valores maiores. Isso pode ser explicado matematicamente pela desigualdade de Jensen, uma vez que a opção $F(V)$ é uma função convexa de V . Prova-se também que o valor crítico também será maior quanto maior for a volatilidade.

3.4 Mercado Futuro e Convenience Yield

O preço futuro de uma *commodity* no mercado futuro em um tempo t com vencimento em T , $F_{t,T}$, supondo uma taxa de juros livre de risco constante r , tem a seguinte relação com o seu preço à vista P_t e seu *convenience yield* δ (Hull, 2002; McDonald, 2003):

$$F_{t,T} = P_t \exp^{(r-\delta)(T-t)} \quad (10)$$

O *convenience yield* (taxa de conveniência) δ mede o quanto o agente se beneficia por ter o ativo em mãos ao invés de ter um contrato futuro ou um derivativo do mesmo. Por vezes, os agentes preferem manter o ativo fisicamente, principalmente em momentos de previsão de escassez, tais como em guerras ou intempéries. Isto ocorre porque o agente prefere ter o ativo em estoque e usá-lo no processo produtivo sem interrupções, podendo ser considerado um fluxo de benefícios de possuir o estoque físico da mercadoria, e líquido do custo de estocagem. Se não houvesse um fluxo de benefícios de possuir estoque, não se justificaria investir em estocagem (tanques) e ter custos de manutenção dos mesmos. O *convenience yield* justifica a existência de estoques.

O *convenience yield* também serve de parâmetro para a medição das expectativas de mercado acerca da disponibilidade futura da *commodity*. Quanto maior a possibilidade de escassez, maior será δ , guardando relação com as quantidades disponíveis em estoque.

No vencimento do contrato, no tempo t , o preço à vista (spot) P_t se iguala a F , caso contrário haveria uma arbitragem instantânea.

Cada contrato futuro tem o seu *convenience yield*. Para valorações de ativos com opções reais, utilizam-se valores referentes aos contratos mais longos, por serem considerados os mais estáveis.

4 MODELOS DE SIMULAÇÃO E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Conforme descrito anteriormente, o valor do ativo objeto é função das variáveis de incerteza, retratadas pelos preços do propano e propeno. De forma a obter as suas distribuições de probabilidade ao longo do tempo, deve-se definir os processos estocásticos que regem suas variáveis de incerteza de forma a simular seus valores ao longo do tempo. Primeiramente será descrito o funcionamento da ferramenta de simulação de Monte Carlo. Posteriormente, serão descritos os processos estocásticos pertinentes e testados quanto à aderência às flutuações de preços observadas historicamente.

4.1 Simulação de Monte Carlo

Simulação é um método para reproduzir os possíveis desempenhos de um sistema da vida real. A simulação de Monte Carlo é um método numérico (algoritmo) computacional baseado na amostragem probabilística repetida das variáveis de entrada (“inputs”) que gera repetidos resultados (“outputs”), os quais podem ser representados por distribuições de probabilidades dos resultados. Para tal devem-se especificar as distribuições de probabilidades dos dados de entrada e, após a simulação, calcular as médias e outros momentos probabilísticos das distribuições de resultados

Atualmente um dos *software* mais utilizados para simulação de Monte Carlo é o @Risk da Palisade Corporation, que será utilizado ao longo do trabalho na realização das simulações e análises.

O método de amostragem utilizado pela simulação de Monte Carlo na geração de variáveis aleatórias para quaisquer distribuições de probabilidade é descrito a seguir.

Supondo que o objetivo é gerar n amostras de uma determinada variável aleatória x , descrita pela função densidade de probabilidade $f(X)$. De uma forma geral, os *softwares* de análise de risco procedem da seguinte forma:

1. Calcula-se a distribuição acumulada $F(X) = \Pr(x \leq X)$;
2. Calcula-se a função inversa de $F(X)$: $X = G(F(X))$;
3. Geram-se n números aleatórios com distribuição de probabilidade Uniforme $(0,1)$;
4. Para cada número aleatório, calcula-se $X = G(F(X))$.

Desta forma, são gerados n números aleatórios de quase qualquer distribuição de probabilidade. Torna-se necessário um algoritmo Gerador de Números Aleatórios (GNA) de valores de igual probabilidade (uniforme) de ocorrência no intervalo entre zero e 1. No entanto, mesmo com os avanços da informática, ainda não foi possível gerar números genuinamente randômicos. Porém é possível gerar números pseudo-aleatórios ou números quase-aleatórios, suficientes para estudos tradicionais de análise de risco com a simulação de Monte Carlo. O @Risk usa números pseudo-aleatórios com a técnica de amostragem Latin-Hypercubic (opção default do @Risk).

Para a construção de um modelo do fluxo de caixa, fazendo uso da Simulação de Monte Carlo, segue-se uma seqüência lógica, conforme abaixo:

1. Construção de um modelo básico das variações dos fluxos de caixa futuros, provocados pela variação das variáveis aleatórias (no nosso caso, dos preços do insumo e produto final);
2. Elaboração da distribuição de probabilidade cumulativa para cada variável aleatória;
3. Especificação da relação entre as variáveis de forma a calcular o V do empreendimento;
4. Selecionar, aleatoriamente, os valores das variáveis, conforme sua probabilidade de ocorrência;
5. Repetir esta operação n vezes, resultando em n valores de V , que podem ser representados por uma distribuição de probabilidade do V .

4.2 Processos Estocásticos

Um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias geralmente indexadas pelo tempo. É usado para modelar variáveis cuja evolução ao longo do tempo é, em parte, aleatória. Ou seja, a variação ao longo do tempo tem um componente determinístico e outro aleatório e imprevisível, sendo muito usado em finanças e economia, principalmente para modelar a evolução de preços (Dixit & Pindyck, 1994; Hull, 2002). Processos estocásticos podem ser divididos em discretos e contínuos, onde o primeiro estabelece os valores das variáveis apenas em determinados instantes no tempo, enquanto o segundo permite que as oscilações ocorram em qualquer instante do tempo. Apesar dos preços de *commodities* seguirem um processo estocástico discreto (ex.: interrupção de negociação nos fins de

semana), os modelos contínuos apresentam uma boa aderência para o estudo de suas evoluções.

4.2.1 Movimento Browniano

O processo estocástico mais usado e conhecido na Literatura de Finanças é o movimento browniano, ou processo de Wiener, que é contínuo com três importantes propriedades:

1. É um processo de Markov no sentido da distribuição de probabilidade dos valores futuros não ser afetada pelos valores passados ou por qualquer outra informação, sendo somente dependente do seu valor atual. Esta propriedade está relacionada à hipótese fraca de eficiência do mercado, já que as distribuições de probabilidades dos preços futuros está condicionada única e exclusivamente às informações atuais (Dixit & Pindyck, 1994; Dothan, 1990; Karatzas & Shreve, 1998);
2. Possui incrementos independentes, ou seja, a distribuição de probabilidades da variação do processo em um intervalo de tempo é independente de qualquer outro intervalo de tempo;
3. As variações de um processo, em um intervalo de tempo finito, seguem uma distribuição Normal, com variância que cresce linearmente com o intervalo de tempo.

Dado $Z_{(t)}$, um processo de Wiener, Δz uma variação de $Z_{(t)}$ e Δt um intervalo de tempo qualquer, temos:

1. $\Delta z = \varepsilon_{(t)} \cdot \sqrt{\Delta t}$, onde $\varepsilon_{(t)}$ tem distribuição Normal padrão $N(0,1)$ e não tem correlação serial,
 - i. é, correlação de $\varepsilon_t, \varepsilon_s = 0$ para $t \neq s$.

Em um intervalo de tempo Δt infinitesimalmente pequeno, podemos representar a variação de um processo de Wiener, dz , em tempo contínuo como:

$$dz = \varepsilon_{(t)} \cdot \sqrt{dt} \quad (11)$$

No processo descrito acima, geralmente acrescenta-se um termo de tendência, sendo representado pela seguinte equação estocástica para uma variável estocástica x :

$$dx = \gamma \cdot dt + \nu \cdot dz \quad (12)$$

Onde γ é o parâmetro de tendência e ν é o parâmetro de variância. Este é um processo conhecido como movimento aritmético browniano (MAB) com tendência.

Em qualquer intervalo de tempo Δt , a variação em x possui distribuição Normal, com valor esperado $E[\Delta x] = \gamma \cdot \Delta t$ e variância $Var[\Delta x] = \nu^2 \cdot \Delta t$. Como x no futuro tem distribuição Normal, esse modelo permite valores negativos para x e por isso não é usado para preços. Mas é muito usado para modelar o logaritmo de preços e para modelar *spreads* (diferenças) entre preços. Nessa dissertação será visto um modelo de *spread* de preços propano-propeno usando o MAB.

4.2.1.1 Movimento Geométrico Browniano com Simulação de Monte Carlo

Um caso especial do movimento browniano é o movimento geométrico browniano (MGB) com tendência. Ao contrário do MAB, o MGB não admite valores negativos e por isso é o processo mais popular para modelar preços de ações e ativos financeiros com responsabilidade limitada. O preço x de uma *commodity* pode seguir um MGB, de acordo com a equação estocástica definida abaixo (Dixit & Pindyck, 1994; Lund & Oksendal, 1991; Trigeorgis, 1996; Trigeorgis, 1995):

$$dx = \alpha \cdot x \cdot dt + \sigma \cdot x \cdot dz \quad (13)$$

Onde dz é um processo incremental de Wiener ($dz = \varepsilon_{(t)} \cdot \sqrt{dt}$), α é a tendência (“drift”) do preço e σ é a sua volatilidade, ambos tipicamente com unidade de % ao ano. Na equação acima, “ x ” é o valor corrente da variável estocástica (valor conhecido). Os termos estocásticos na equação acima são dx e dz . A volatilidade pode ser interpretada como o desvio-padrão da taxa de variação dx/x .

Pode-se determinar o valor esperado de uma variável V que segue um MGB em um tempo t , $E[V_t]$, como (ver, por ex., Dixit & Pindyck, 1994):

$$E[V_t] = V_0 \exp(\alpha t) \quad (14)$$

Onde V_0 é o valor inicial. Da mesma forma, a variância no período t , $\text{Var}[V_t]$, é igual a (Dixit & Pindyck, 1994):

$$\text{Var}[V_t] = V_0^2 \exp(2\alpha t) [\exp(\sigma^2 t) - 1] \quad (15)$$

Inicialmente, o objetivo é simular a dinâmica dos preços. Utilizando-se uma transformação logarítmica em conjunto com o Lema de Itô, chega-se à equação discreta de simulação de preço¹¹. Dessa forma, em um instante t qualquer, o preço $P_{(t)}$ será dado por:

$$P_{(t)} = P_0 \cdot \exp\{(\alpha - 0,5 \cdot \sigma^2) \cdot \Delta t + \sigma \cdot N(0,1) \cdot \sqrt{\Delta t}\} \quad (16)$$

Essa discretização é exata no sentido de que independe de Δt , i. é, podem-se usar intervalos de tempo grandes sem introduzir nenhum erro numérico adicional na simulação¹².

A simulação de Monte Carlo com essa equação passa pela amostragem de valores aleatórios da distribuição Normal padrão ($N(0,1)$), obtendo-se os valores correspondentes do preço $P_{(t)}$. Com esses valores, podemos obter uma distribuição de V 's de um projeto qualquer, através de uma forma funcional como a descrita na seção 2.4.

A equação discreta acima pode ser escrita na versão neutra ao risco, onde se substitui a tendência real α pela tendência neutra ao risco $r - \delta$ (ver, por ex., Dias, 2006). Com isso, obtém-se:

$$P_{(t)} = P_0 \cdot \exp\{(r - \delta - 0,5 \cdot \sigma^2) \cdot \Delta t + \sigma \cdot N(0,1) \cdot \sqrt{\Delta t}\} \quad (17)$$

Onde r é taxa livre de risco e δ é o chamado *dividend yield*, ou a taxa de pagamento dos dividendos gerados pelo ativo. No caso de *commodities*, δ é a taxa de conveniência (“convenience yield”), que é estimado através do mercado futuro, como será visto na seqüência, bem como a estimativa dos demais parâmetros.

¹¹ Vide Apêndice para demonstração da obtenção da fórmula.

¹² Ver, por ex., http://www.puc-rio.br/marco.ind/sim_stoc_proc.html e o livro de Kloeden e Platen (1992) para uma relação das equações diferenciais estocásticas que admitem solução (discretização) exata.

Na simulação neutra ao risco, o valor esperado e a variância de V passam a ser:

$$E[V_t] = V_0 \exp(r - \delta)t \quad (18)$$

$$Var[V_t] = V_0^2 \exp 2(r - \delta)t [\exp(\sigma^2 t) - 1] \quad (19)$$

Além disso, na simulação neutra ao risco, a taxa de desconto de V é, por uma questão de coerência, a taxa livre de risco.

4.2.1.1.1 Calibração de Parâmetros do Movimento Geométrico Browniano

4.2.1.1.1.1 Convenience Yield

A taxa de conveniência (“convenience yield”) é estimada pelo mercado futuro com a equação (10) mostrada no capítulo 3.

No caso de interesse dessa dissertação, somente o propano tem contratos negociados no mercado futuro, negociado na NYMEX¹³. Mesmo sendo contratos com pouca negociação (menos de 1% do total de volume negociado), suas cotações serão utilizadas para estimar o *convenience yield* deste ativo.

Como estão disponíveis os preços à vista do propano de Janeiro de 1990 a Junho de 2007, foram obtidas as curvas no final de cada um dos meses compreendidos no período. O vértice escolhido nessas curvas preferencialmente foi o de 12 meses, ou seja, o preço do contrato futuro escolhido foi na maior parte das situações aquele que vencera em 12 meses.

Para uma taxa livre de risco fixa para o período de 4,15%¹⁴ ao ano (a.a), foi obtida uma média aritmética de *convenience yield* de 4,63% a.a. Uma vez que não há dados de mercado futuro para o propano, como aproximação adotou-se o mesmo *convenience yield*, premissa factível dado que o propano é o produto final do propano

4.2.1.1.1.2 Tendência e Volatilidade

¹³ Abreviatura de New York Mercantile Exchange, Inc.

¹⁴ Soma da taxa real de remuneração dos títulos do governo americano após impostos com uma estimativa de risco-Brasil de 200 pontos-base.

Seja P_t o preço no instante t . Primeiramente, a partir de uma série de preços do ativo corrigidos monetariamente para uma mesma data,¹⁵ calcula-se seus logaritmos, gerando $\ln(P_t)$.

Em um processo MGB, o coeficiente de $\ln(P_{t-1})$ na equação abaixo deve ser igual a 1.

$$\ln(P_t) = a + b \ln(P_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (20)$$

Essa equação pode ser escrita de forma mais adequada para a regressão como:

$$\ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = a + (b - 1) \ln(P_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (20')$$

Com ε_t i.i.d.¹⁶ \sim Normal $(0, \sigma^2/N)$. Para testar se a equação acima segue um MGB, realiza-se um teste de hipótese do coeficiente b ser igual a 1 (ou $b - 1 = 0$). Este teste também é chamado do teste de raiz unitária de Dickey-Fuller (1979).

Uma vez confirmada a hipótese do coeficiente b ser igual a 1, são estimados os parâmetros α e σ do processo estocástico descrito anteriormente. Se P segue um MGB, então se prova com o Lema de Itô que o $\ln(P)$ segue o seguinte MAB:

$$d(\ln(P)) = (\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2) dt + \sigma dz \Rightarrow \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = (\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2) + \sigma N(0, 1) \quad (21)$$

Uma vez que iremos simular apenas um período à frente, $\Delta t = 1$. Comparando a equação acima com a eq.(20') é fácil ver que as seguintes fórmulas permitem estimar os parâmetros do MGB (ver também Winston, 1998, p.328):

$$Var[\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})] = Var[\varepsilon_t] = \frac{\sigma^2}{N}; \text{ implicando em } \sigma^2 = N Var[\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})] \quad (22)$$

$$\alpha = N \left\{ Média[\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})] + 0,5 \frac{\sigma^2}{N} \right\} \quad (23)$$

Onde N é um fator de correção que iguala os períodos dos dados amostrados com o do processo utilizado (por ex., se os dados são mensais e se quer valores anualizados, $N = 12$).

A regressão da equação (20') por mínimos quadrados ordinários com correção de Newey-West (1987,1994) para a série de logaritmos de preços do propano indicou a

¹⁵ Adotado a correção pelo Consumer Price Index norte-americano (CPI) para a data de Dezembro de 2006.

¹⁶ Sigla para independente e identicamente distribuído.

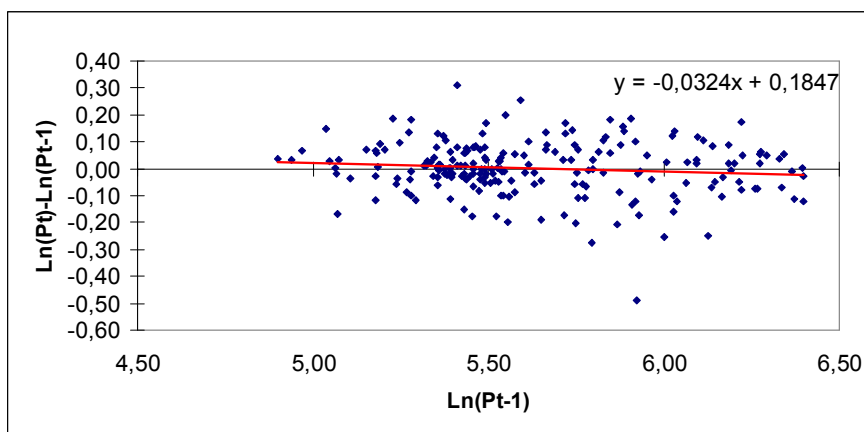
existência de um MGB, pois a um nível de significância de 5% se aceita a hipótese nula do coeficiente $b - 1$ ser igual a zero (i.e., se aceita a hipótese nula de raiz unitária de Dickey-Fuller). O resultado exposto na Tabela 1 é o relatório de saída do *software* econométrico Eviews.

A Figura 2 auxilia na interpretação do resultado descrito anteriormente, dada a inclinação da reta estimada próxima de zero.

Tabela 1 – Resultado da regressão entre $\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$ e $\ln(P_{t-1})$ do propano

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.184729	0.102164	1.808158	0.0720
LOG(PROPANO(-1))	-0.032396	0.018179	-1.782088	0.0762
R-squared	0.012787	Mean dependent var		0.002081
Adjusted R-squared	0.008018	S.D. dependent var		0.099661
S.E. of regression	0.099260	Akaike info criterion		-1.772618
Sum squared resid	2.039492	Schwarz criterion		-1.740634
Log likelihood	187.2385	F-statistic		2.681160
Durbin-Watson stat	1.205197	Prob(F-statistic)		0.103061

Figura 2 – Gráfico de Dispersão entre $\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$ e $\ln(P_{t-1})$ do propano



Da mesma forma, a regressão da equação (20') por mínimos quadrados ordinários com correção de Newey-West (1987,1994) para a série de logaritmos de preços do propano indicou a existência de um MGB, pois a um nível de significância de 5% também se aceita a hipótese nula do coeficiente $b - 1$ ser igual a zero (i.e., se aceita a hipótese nula de raiz

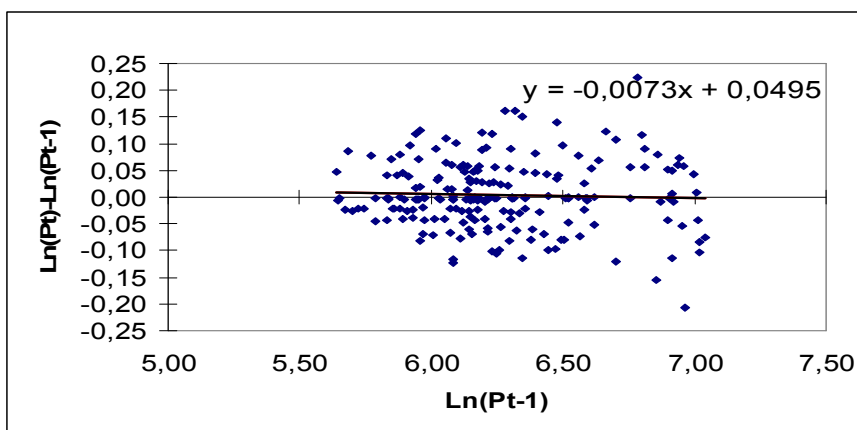
unitária de Dickey-Fuller). O resultado exposto na Tabela 2 é o relatório de saída do *software* econométrico Eviews.

Assim como na Figura 2, a Figura 3 auxilia na interpretação do resultado descrito anteriormente, dada a inclinação da reta estimada também estar próxima de zero.

Tabela 2 – Resultado da regressão entre $\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$ e $\ln(P_{t-1})$ do propeno

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.049507	0.103746	0.477190	0.6337
LOG(PROPENOGQ(-1))	-0.007263	0.016629	-0.436755	0.6627
R-squared	0.001511	Mean dependent var		0.003991
Adjusted R-squared	-0.003312	S.D. dependent var		0.062572
S.E. of regression	0.062676	Akaike info criterion		-2.692162
Sum squared resid	0.813147	Schwarz criterion		-2.660178
Log likelihood	283.3309	F-statistic		0.313307
Durbin-Watson stat	0.834068	Prob(F-statistic)		0.576263

Figura 3 – Gráfico de Dispersão entre $\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$ e $\ln(P_{t-1})$ do propeno



Assim, são definidos os parâmetros de tendência α e de volatilidade σ de ambas as séries. Os resultados estão na Tabela 3 (ao ano).

Tabela 3 – Parâmetros MGB para as séries de preços do Propano e Propeno

Série	Parâmetros (a.a.)		
	α	σ	δ
Propano	0,0299	34,52%	4,63%
Propeno	0,0498	21,68%	4,63%

Dos resultados do teste da raiz unitária de Dickey-Fuller se conclui que o modelo de MGB mostra-se adequado para simular o processo estocástico dos preços do propano e propeno. Portanto, o próximo passo é efetuar a simulação de Monte Carlo com MGB. Mas antes, para completar a parte de processos estocásticos, será descrito o processo de reversão à média, dada sua importância para modelagem de *commodities* em geral.

4.2.2 Processo de Reversão à Média de Ornstein-Uhlenbeck

Processos de reversão à média têm sido muito usados para a modelagem de *commodities*, inclusive em aplicações relacionadas à indústria do petróleo. Em alguns casos esse processo é combinado com outros processos estocásticos a fim de ter maior aderência aos dados, por ex., considerando eventos raros através de saltos, combinando a reversão à média com um processo de Poisson ou usando modelos de dois fatores, combinando processos de reversão à média para a taxa de conveniência com MGB para preços. Ver Dias (2004) para uma discussão sobre processos estocásticos usados para modelar preços de petróleo. Aqui será visto o caso mais simples, de reversão à média pura.

Inicialmente, considere um processo aritmético de Ornstein-Uhlenbeck para uma variável estocástica $x(t)$:

$$dx = \eta(\bar{x} - x).dt + \sigma.dz \quad (24)$$

Esta equação demonstra que há uma força de reversão que atua na variável x , puxando-a para um nível de equilíbrio de longo prazo \bar{x} , a uma velocidade dada por η , e um incremento de Wiener dado por dz . A analogia que é comumente usada é a da mola, pois quanto mais distante do ponto de equilíbrio, maior será a força empreendida para a mola retornar ao seu estado de repouso (ou de equilíbrio).

Podemos solucionar explicitamente esta equação (Kloeden e Platen, 1992), com a seguinte solução em termos de integral estocástica (integral de Itô):

$$x_{(T)} = x_{(0)}.e^{-\eta.T} + (1 - e^{-\eta.T}).\bar{x} + \sigma.e^{-\eta.T} \int_0^T e^{\eta.t}.dz(t) \quad (25)$$

Onde $x_{(T)}$ tem distribuição Normal com as respectivas equações para valor esperado e variância que podem ser obtidas com a equação diferencial de Kolmogorov (Dixit & Pindyck, 1994):

$$E[x_{(T)}] = x_{(0)} \cdot e^{-\eta \cdot T} + \bar{x} \cdot (1 - e^{-\eta \cdot T}) \quad (26)$$

$$Var[x_{(T)}] = (1 - e^{-2\eta \cdot T}) \cdot \frac{\sigma^2}{2\eta} \quad (27)$$

A equação do valor esperado reflete uma ponderação entre o valor inicial $x_{(0)}$ e o valor de equilíbrio de longo prazo \bar{x} , ponderados pelo tempo T e pela velocidade de reversão η (note que os pesos somam 1).

Por mais que a variância aumente com o tempo, esta converge para $\frac{\sigma^2}{2\eta}$ quando o tempo tende a infinito.

4.2.2.1 Simulação de Monte Carlo da Reversão à Média

Para operacionalizar a simulação, devemos utilizar a equação discreta de Dixit e Pindyck (1994), que é dada pelo processo estacionário auto-regressivo de primeira ordem, AR (1):

$$x_{(t)} = x_{(t-1)} \cdot e^{-\eta \cdot \Delta t} + \bar{x} \cdot (1 - e^{-\eta \cdot \Delta t}) + \sigma \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta \cdot \Delta t}}{2\eta}} \cdot N(0,1) \quad (28)$$

De forma a evitar o surgimento de valores negativos (o que pode ser prejudicial no nosso caso, onde estaremos estimando preços), precisamos criar uma relação entre a variável $x_{(t)}$ e o preço corrente P e o patamar de longo prazo \bar{x} e o preço de equilíbrio de longo prazo \bar{P} .

Para tal, assume-se que o preço P segue um processo estocástico de reversão à média cujo patamar de equilíbrio de longo prazo \bar{P} é definido pela equação:

$$\bar{x} = \ln(\bar{P}) \quad (29)$$

Dito de outra forma:

$$\bar{P} = \exp(\bar{x}) \quad (30)$$

Após esta determinação, devemos estabelecer uma relação entre P e x de forma que o valor esperado do preço simulado seja $E[P_{(T)}] = \exp\{E[x_{(T)}]\}$. Fazendo essa substituição e aplicando o valor esperado, temos:

$$E[P_{(T)}] = \exp\{(x_{(0)} \cdot e^{-\eta T}) + \bar{x} \cdot (1 - e^{-\eta T})\} \quad (31)$$

No entanto, esta premissa não funciona para $P_{(t)}$, dado que a exponencial de uma distribuição Normal adiciona metade da variância na média da distribuição Log-Normal. Para atingirmos $E[P_{(T)}] = \exp\{E[x_{(T)}]\}$, temos que compensar com a metade da variância, tal e qual formalizado abaixo:

$$P_{(t)} = \exp\{x_{(t)} - 0,5 \cdot Var[x_{(t)}]\} \quad (32)$$

Onde o termo da variância é a função determinística do tempo dada na equação de determinação da variância de $x_{(T)}$.

Com as equações determinadas acima, se torna possível simular os possíveis caminhos que o preço P pode assumir, de acordo com um processo de reversão à média. Inicialmente, simula-se $x_{(T)}$ escolhendo aleatoriamente valores dentro da distribuição Normal $(0,1)$. Posteriormente, calcula-se $Var[x_{(T)}]$, e utiliza-se a equação anterior para chegar ao valor simulado de P . Repete-se o processo ao longo de um caminho (ao longo do tempo para cada instante discreto t) e para n caminhos distintos.

Mais diretamente, podemos juntar as três equações anteriores e simular $P_{(t)}$ diretamente:

$$P_{(t)} = \exp \left\{ \left[\ln[P_{(t-1)}] \cdot \exp[-\eta \cdot \Delta t] \right] + \left[\ln[\bar{P}] \cdot (1 - \exp[-\eta \cdot \Delta t]) \right] - \left[(1 - \exp[-2\eta \cdot \Delta t]) \cdot \frac{\sigma^2}{4\eta} \right] + \sigma \cdot \sqrt{\frac{1 - \exp[-2\eta \cdot \Delta t]}{2\eta}} \cdot N(0,1) \right\} \quad (33)$$

A interpretação dos quatro termos desta equação é a seguinte:

- a) o primeiro e o segundo termo demonstram a tendência, ponderando-se o valor inicial e o de equilíbrio de longo prazo;
- b) o terceiro termo é a compensação da metade da variância, conforme explicado anteriormente;
- c) o quarto termo é a parcela estocástica devido a Normal padrão (0,1), que visa a introdução da aleatoriedade durante a simulação de Monte Carlo.

A equação de simulação mostrada anteriormente pode ser adaptada para um ambiente neutro ao risco. Nesse caso, o preço de longo prazo no segundo termo sofre a subtração de um “prêmio de risco normalizado”. Na prática, o preço converge para um nível menor do que o preço de longo prazo real. Com isso, teremos:

$$P_{(t)} = \exp \left\{ \left[\ln[P_{(t-1)}] \cdot \exp[-\eta \cdot \Delta t] \right] + \left[\ln[\bar{P}] - \frac{\mu - r}{\eta} \cdot (1 - \exp[-\eta \cdot \Delta t]) \right] - \left[(1 - \exp[-2\eta \cdot \Delta t]) \cdot \frac{\sigma^2}{4\eta} \right] + \sigma \cdot \sqrt{\frac{1 - \exp[-2\eta \cdot \Delta t]}{2\eta}} \cdot N(0,1) \right\} \quad (34)$$

No termo $\frac{\mu - r}{\eta}$, μ é taxa ajustada ao risco e r é taxa livre de risco.

4.2.2.2 Calibração de Parâmetros de Reversão à Média

Seja P_t o preço no instante t . Primeiramente, a partir uma série de preços do ativo corrigidos monetariamente para uma mesma data, calculam-se seus logaritmos, gerando $\ln(P_t)$.

Em um processo de reversão à média, o coeficiente de $\ln(P_{t-1})$ na equação abaixo deve estar entre 0 e 1.

$$\ln(P_t) = a + b \ln(P_{t-1}) \quad (35)$$

Ou seja, $0 < b < 1$. Para estimar os parâmetros a e b , fazemos a seguinte regressão já mencionada anteriormente:

$$\ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = a + (b-1)\ln(P_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (36)$$

Com ε_t i.i.d \sim Normal $(0, \sigma^2/N)$. Com os parâmetros estimados, as seguintes fórmulas permitem estimar um processo de reversão para o logaritmo dos preços (Dixit & Pindyck, 1994, p.77, corrigido e Sheldon Ross, 1999, p.171):

$$\eta = -\ln(b).N \quad (37)$$

$$\sigma = \sigma_\varepsilon \sqrt{N} \sqrt{\frac{2 \ln b}{b^2 - 1}} \quad (38)$$

$$\bar{P} = \exp\left[\frac{(a + 0,5\sigma^2 / N)}{(1-b)}\right] \quad (39)$$

Onde N é um fator de correção de tempo que iguala os períodos entre os dados amostrados e o do processo e σ_ε é o desvio padrão da regressão.

Na seção 4.2.1.1.1.2 concluiu-se através do teste da raiz unitária de Dickey-Fuller que o MGB se mostra adequado para simular o processo estocástico dos preços do propano e propeno. Por mais que haja um fato estilizado que os modelos de reversão à média tenham boa aderência a derivados de petróleo, há também evidências que em séries com menos de 100 anos não se costuma rejeitar a presença de MGB (Dixit & Pindyck, 1994). O modelo do Movimento Geométrico Browniano (MGB) será o adotado.

5 MÉTODOS DE AVALIAÇÃO DE OPÇÕES REAIS

Assim como uma opção financeira, uma opção real pode ser avaliada através de técnicas de análises de direitos contingenciais em que a incerteza toma papel preponderante na avaliação da mesma. Considerando que os investidores (mesmo os avessos ao risco) não demandam prêmio de risco de uma carteira de ativos livre de risco, obtém-se o valor da opção montando-se uma carteira neutra ao risco que inclui o valor da opção e o valor do ativo real. Ferramentas de cálculo estocástico podem ser utilizadas para obter uma equação diferencial parcial (EDP), resolvida analiticamente ou por métodos numéricos. Este método da EDP se torna limitado à medida que as incertezas sobre as variáveis subjacentes são adicionadas, tornando a sua solução complexa do ponto de vista computacional.

No caso de múltiplas fontes de incerteza, em vez de escrever a EDP do valor da opção real em função de várias variáveis estocásticas, pode-se usar a aproximação sugerida por Copeland & Antikarov (2002) para reduzir a dimensionalidade do problema. A idéia é calcular uma volatilidade agregada do valor do projeto V que incorpore as incertezas dos componentes do valor do projeto, tais como preços, custos e outras variáveis de mercado. Assim, se teria apenas um ativo subjacente V , simplificando o problema para o caso clássico de opções reais. Dessa forma se poderia usar um *software* convencional para calcular o valor da opção real de espera e o gatilho V^* para exercício ótimo da opção de investir no projeto.

Para isso, será usada a técnica de Simulação de Monte Carlo, onde os componentes estocásticos de V (aqui os preços do propano e do propeno) são simulados resultando numa distribuição de probabilidade do ativo subjacente V , cuja forma funcional foi descrita na seção 2.4. Com essa distribuição se extrairá a volatilidade agregada σ_V e o *dividend yield* agregado δ_V .

Na seqüência, serão apresentadas essas ferramentas de avaliação, bem como as premissas e formas de determinação dos valores.

5.1 Método da Volatilidade Agregada de Copeland & Antikarov

No caso do projeto de Implantação de Unidade Separadora de Propeno, gastando um investimento I obtém-se o ativo subjacente que é o Valor Presente do projeto V . Esse pode ser visto como o valor presente da receita líquida de custos operacionais e impostos, de forma que

o valor presente líquido $VPL = V - I$. Esse valor V é função do preço de venda do produto no mercado (propeno grau químico) e do preço do insumo (propano) a ser utilizado no processo.

Diferentemente de uma *commodity*, o ativo subjacente V não é negociado no mercado, e não há nenhum ativo com preço de conhecimento público que seja perfeitamente correlacionado com os fluxos de caixa do projeto em pauta. Assim, não há como estimar a volatilidade do mesmo através de dados passados. Dessa forma, é adotada a premissa denominada Market Asset Disclaimer (MAD), no qual a melhor estimativa não-tendenciosa para o valor de um ativo não negociado é o valor presente dos fluxos de caixa operacionais desse ativo sem flexibilidade. Esse é a primeira premissa do método defendido por Copeland & Antikarov (2002). Neste caso, o Valor Presente estático do projeto assim estimado é a melhor estimativa do valor de mercado de V , dado as atuais expectativas de mercado para os fluxos de caixa do projeto. Com isso, se obtém o valor inicial de V se o projeto fosse feito hoje.

A outra premissa de Copeland & Antikarov (2002) para calcular a volatilidade agregada de V , baseado num teorema de Samuelson (1965), é que V é aproximadamente distribuído como uma log-normal e pode ser aproximado como um MGB, independentemente dos processos estocásticos presentes nas variáveis estocásticas que definem o seu valor serem ou não modelados como MGB.

Mais adiante será detalhado como proceder para estimar esta volatilidade agregada. Primeiramente será descrita a forma de cálculo clássica do valor da opção real.

5.2 Direitos Contingenciais

O projeto em questão visa à produção de propeno utilizando como principal insumo o propano. Ambos têm negociação em mercado, com seus preços seguindo um processo estocástico de acordo com a evolução histórica de seus preços negociados. O processo que melhor se adequa a estes preços é o Movimento Geométrico Browniano (MGB), conforme foi visto.

Será assumido que as premissas de Copeland & Antikarov (2002) são válidas de forma que o valor do projeto pronto para operar V segue um MGB e o valor de mercado de V em $t = 0$ é conhecido (e estimado pelo fluxo de caixa do projeto). Assim, tem-se um caso clássico de opções reais de espera onde o ativo básico é o valor do projeto V que segue um MGB. Em caso de exercício da opção se obtém o $VPL = V - I$ onde I é o valor presente dos fluxos de

investimento líquidos de benefícios fiscais. Mas o exercício da opção pode ser adiado se for ótimo a espera. Será considerado aqui tanto o caso de opção perpétua como o de opção finita, onde o tempo de expiração é estimado em função da expectativa de tempo de entrada de concorrentes que poderia corroer o valor do projeto, conforme sugerido por Kester (1984).

Para resolver este problema clássico, pode-se usar o método dos *direitos contingenciais* (ou *ativos contingentes* ou “contingent claims”), que é bem detalhado no livro do Dixit e Pindyck (1994). Para tal, forma-se uma carteira livre de risco com uma combinação adequada do valor do projeto (V) e da opção de espera (F). Sendo a carteira livre de risco, o retorno esperado em equilíbrio tem de ser a taxa livre de risco. Caso contrário, haveria oportunidade de arbitragem. A montagem de uma carteira livre de risco é uma maneira de evitar a complexa tarefa de saber a taxa de desconto (ou retorno esperado em equilíbrio) da opção real F ¹⁷.

Define-se $F(V_t, t)$ como o valor da oportunidade de investimento, isto é, o valor da opção real de investir I para obter um ativo básico V . Essa opção é função do tempo, pois em geral assume-se que a opção é finita (existe um tempo de expiração T) e, portanto, F é função do tempo. Como dito antes, V_t é o valor do ativo básico no tempo t , sendo que V_t segue um Movimento Geométrico Browniano dado por:

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dz \quad (40)$$

Onde α é a taxa de crescimento de V , σ é a volatilidade de V e dz é um processo de Wiener.

Seja uma carteira composta por uma posição comprada na opção F e vendida em n unidades de V . O valor da carteira é então:

$$\Phi = F - n V \quad (41)$$

Embora não se saiba a taxa de desconto para o derivativo F , se o portfólio acima for tal que em todos os cenários ele tenha o mesmo valor numa data futura t , isto é, se o portfólio for sem risco, então a taxa de desconto do portfólio tem de ser a taxa livre de risco para que não haja oportunidades de arbitragem. Felizmente existe um número n que torna esse portfólio sem risco. Para que a carteira seja livre de risco prova-se que o número n é a derivada parcial

¹⁷ A taxa de desconto ajustada ao risco de F em geral não é igual à taxa do ativo básico V . No caso de opções de compra, ela é maior que a taxa de V e varia com o tempo e estado da natureza (ver Merton, 1973).

da opção em relação ao ativo básico V , isto é, $n = \partial F / \partial V = F'(V)$ e n é chamado “delta-hedge”, Assim, o valor deste portfólio sem risco é dado pela equação a seguir:

$$\Phi = F - F'(V) V \quad (41')$$

A composição da carteira é dinâmica, pois a posição $F'(V)$ varia de acordo com os valores de V que surgem ao longo do tempo.

O retorno total de V num intervalo de tempo infinitesimal dt pode ser decomposto como sendo a soma de dois termos: um componente de ganho de capital (dV) mais um componente de dividendos ($\delta V dt$).

Se o portfólio é sem risco para a escolha conveniente de $n = F'(V)$, então num intervalo infinitesimal dt o seu retorno é:

$$r \Phi dt = r [F - F'(V) V] dt \quad (42)$$

Mas o retorno total da carteira em um intervalo de tempo dt também é igual ao ganho de capital mais dividendos dos componentes desse portfólio. No caso da opção F , ela só tem o termo de ganho de capital dF (não tem dividendos, pois não há fluxo de caixa enquanto não se exercer a opção). Já o ativo básico V tem os dois componentes de retorno, sendo o dividendo interpretado como os fluxos de caixa gerados pela operação da planta.

$$r \Phi dt = dF - F'(V) [dV - \delta V dt] \quad (43)$$

O Lema de Itô para $F(V, t)$ é dado por (ver Dixit & Pindyck, 1994):

$$dF = F_V dV + \frac{1}{2} F_{VV} dV^2 + F_t dt \quad (44)$$

Igualando as duas equações de retorno do portfólio e aplicando o Lema de Itô para $F(V, t)$, a fim de substituir o valor de dF na equação de retorno do portfólio, obtém-se uma equação em que aparece dV^2 . Prova-se (ex.: Dias, 2006) que $dz^2 = dt$ e, logo, $dV^2 = \sigma^2 V^2 dt$. Substituindo dV^2 e dF nas equações de retorno e após simplificações, a equação abaixo representa o retorno total sobre a carteira.

$$r \left[F - \frac{\partial F}{\partial V} V \right] dt = \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} dt - \delta V \frac{\partial F}{\partial V} dt + \frac{\partial F}{\partial t} dt \quad (45)$$

Note que o retorno mostrado não depende do fator estocástico dz (ou de dV), tendo apenas componentes determinísticos¹⁸. Isso confirma que a escolha $n = F'(V)$ foi apropriada para eliminar os termos estocásticos de retorno e para que o retorno do portfólio seja a taxa livre de risco (caso contrário haveria oportunidades de arbitragem).

Cortando dt e rearranjando, obtém-se a equação diferencial parcial (EDP) que o valor da opção real $F(V, t)$ deve satisfazer.

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + (r - \delta) V \frac{\partial F}{\partial V} + \frac{\partial F}{\partial t} - rF = 0 \quad (46)$$

Essa EDP é a conhecida equação diferencial de Black-Scholes-Merton (versão com dividendos de Merton), do tipo parabólica de segunda ordem e que tem uma versão análoga na física como equação de transmissão de calor (Dias, 2006). Essa EDP é válida para opções do tipo europeia ou americana, de compra (“call”) ou de venda (“put”). As condições de contorno é que dirão qual o tipo de opção e o resultado (“payoff”) em caso de exercício. Assim, para ser resolvida no caso de interesse, usam-se as seguintes condições de contorno.

$$F(0, t) = 0 \quad (47)$$

$$F(V^*, t) = V^* - I \quad (48)$$

$$F'(V^*, t) = 1 \quad (49)$$

$$F(V, T) = \max[V - I, 0] = \max[VPL, 0] \quad (50)$$

Com $V^*(t)$ sendo o gatilho ou valor crítico, a partir do qual é ótimo investir.

A primeira condição de contorno (cc) é uma condição trivial que diz que a opção não tem valor se V atingir a barreira absorvente $V = 0$ (note na equação do MGB que se $V = 0$ implica que $dV = 0$ e o processo é absorvido). A segunda cc, conhecida por condição de

¹⁸ Na equação diferencial, V é o valor conhecido (valor corrente). As derivadas parciais são calculadas para o valor corrente V e também são determinísticas e conhecidas (desde que se sabe a solução do problema).

continuidade (“value-matching”) diz que no gatilho V^* é ótimo o exercício imediato da opção, obtendo o payoff de exercício que no caso é o VPL. A terceira cc é chamada de contato suave (“smooth pasting”) e diz que a curva do valor da opção deve tocar suavemente a curva (reta) de payoff de exercício no ponto de gatilho, isto é, nesse ponto V^* a derivada da opção em relação ao ativo básico V é igual à derivada da função payoff de exercício. Essa cc é uma condição suficiente (mas não necessária) para o ótimo. A última cc é a condição na expiração $t = T$, em que a opção só é exercida se o payoff (aqui o VPL) for positivo.

Equações diferenciais parciais raramente são resolvidas analiticamente e técnicas numéricas devem ser utilizadas (Clewlow & Strickland, 1998). Uma possibilidade de solução analítica é remover o componente tempo, transformando-a em equação diferencial ordinária (EDO), que tem solução analítica.

Remover o componente tempo significa considerar uma perpetuidade na oportunidade de investimento (opção perpétua) e teremos a seguinte equação diferencial ordinária (EDO). Ver Dixit & Pindyck (1994), cap. 5.

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2\frac{\partial^2F}{\partial V^2}+(r-\delta)V\frac{\partial F}{\partial V}-rF=0 \quad (51)$$

Resolvendo-a pelas condições de contorno acima expostas, exceto a última (pois não há a data de expiração T), a solução para $F(V)$ e V^* é

$$F(V)=AV^\beta \quad (52)$$

$$V^*=[\beta/(\beta-1)]I \quad (53)$$

Onde β é a raiz positiva ($e > 1$) da equação quadrática característica da EDO (ver Dixit & Pindyck, cap. 5, 1994) e A é uma constante determinada pelas condições de contorno. Os seus valores são dados por:

$$\beta=\frac{1}{2}-\frac{(r-\delta)}{\sigma^2}+\sqrt{\left[\frac{(r-\delta)}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right]^2+\frac{2r}{\sigma^2}} \quad (54)$$

$$A=\frac{(V^*-I)}{(V^*)^\beta} \quad (55)$$

Já no caso anterior de uma opção finita, não existe solução analítica. Com isso, deve-se recorrer a alguma aproximação analítica. Será usada a aproximação analítica de Bjerksund & Stensland (1993).¹⁹ Existem outras aproximações analíticas para opções americanas finitas onde o ativo subjacente segue um MGB.

Por fim, o prêmio líquido da espera é a diferença entre a opção real $F(V)$ e o VPL sem flexibilidade. Ou seja, se essa diferença for superior a zero, a decisão a ser tomada é esperar por melhores condições de mercado. Caso contrário, se $F(V)$ for igual ao VPL sem flexibilidade, a espera não tem valor, dado que a decisão ótima é investir imediatamente. Neste caso, seria adquirido hoje um projeto que, ao que apontam os cálculos, tenderia a perder valor se fosse iniciado em algum período posterior.

5.3 Métodos Numéricos

Nem sempre é possível obter o valor da oportunidade de investimento a partir de uma equação diferencial parcial (EDP). Normalmente estes tipos de equações não possuem soluções analíticas, devendo ser utilizados métodos numéricos. O método numérico tradicional para resolver a EDP de Black-Scholes-Merton é o método das diferenças finitas. Mas existem várias aproximações analíticas para resolver o problema. Uma delas será usada nessa dissertação (aproximação de Bjerksund & Stensland, 1993).

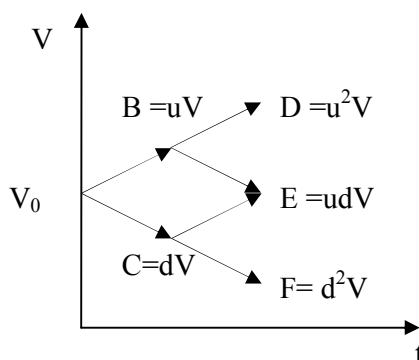
Uma outra maneira de resolver o problema de uma opção americana finita é, em vez de construir a EDP, usar métodos discretos para aproximar diretamente o processo estocástico e trabalhar “backwards” (da expiração para a data corrente). Para isso, tem de trabalhar com o processo estocástico neutro ao risco (probabilidades neutras ao risco), para poder trabalhar com a taxa de desconto livre de risco. Nesse caso, um método numérico bastante utilizado para a precificação de opções é o da árvore binomial, proposto por Cox, Ross & Rubinstein (1979), que será aqui descrito para efeito ilustrativo de métodos numéricos de valoração de opções. Nesta metodologia, em cada período, o valor do ativo pode mudar para somente dois valores possíveis (“upside” e “downside”). Eles provaram que quando se faz o limite do tempo discreto para o tempo contínuo ($\Delta t \rightarrow 0$), ou seja, com intervalos extremamente

¹⁹ Maiores detalhes sobre a aproximação proposta pelos autores podem ser encontrados no anexo 9.4, onde está exposto o código VBA (Visual Basic for Applications) que permite o cálculo em planilha Excel.

pequenos, e para uma escolha adequada do “upside” e “downside”, o processo binomial converge para uma distribuição log-normal.

A partir de um valor presente inicial (V_0), uma árvore com N períodos de tempo é gerada, onde N é $\Delta t/T$, isto é, a quantidade de períodos até o seu vencimento T . O valor inicial V_0 pode assumir dois valores, um de “upside” ou de alta (multiplicando u por V , onde $u > 1$) com probabilidade neutra ao risco p e um de “downside” ou de baixa (multiplicando d por V , onde $d < 1$) com probabilidade $(1-p)$ no segundo período. Sendo a árvore binomial recombinante a partir do terceiro período (uma alta seguida de uma baixa leva ao mesmo cenário de uma baixa seguida de uma alta), então são gerados três valores possíveis (u^2V , udV e d^2V) no início do terceiro período, e assim por diante até chegar ao N -ésimo período. Cada um dos pontos de partida do valor do ativo é chamado de nó da árvore e é um potencial nó de decisão. A árvore é mostrada na Figura 4, atentando para o fato que ela se torna recombinante quando $d=1/u$. Isto não é teoricamente necessário, mas reduz dramaticamente o tempo computacional quando comparado com esquemas não-recombinantes.

Figura 4 – Exemplo de árvore binomial



A metodologia de árvore binomial usa probabilidades neutras ao risco. Essa é uma outra maneira de evitar o complexo problema de qual a taxa ajustada ao risco da opção. Foi visto anteriormente o método do portfólio livre de risco, onde uma combinação adequada da opção e o seu ativo subjacente faz esse portfólio ficar sem risco e assim pode-se usar a taxa livre de risco para calcular o valor presente desse portfólio. Já no método binomial isso não é feito. O que se faz é uma mudança de medida de probabilidade, chamada de medida equivalente de martingale (ou “probabilidades neutras ao risco”) de forma a penalizar o cenário de “upside” do ativo básico. Com essa mudança de medida, prova-se que se podem atualizar derivativos (funções) desse ativo básico com a taxa livre de risco. Quando o mercado

é completo, essa medida equivalente de martingale é única (o que é assumido no modelo binomial).

No método binomial, se o ativo subjacente pagar dividendos, o mesmo pode ser incorporado aos fatores de alta e baixa. Para tal, soma-se o valor dos dividendos do instante de tempo ao valor do ativo subjacente neste mesmo estado, com as equações de probabilidades neutras ao risco sendo as mesmas do caso sem dividendos e dado por:

$$p = (1 + r - d) / (u - d) \quad (56)$$

Onde r é a taxa livre de risco. A determinação do fator de alta (u) passa pela determinação da sua volatilidade (σ), pois u é escolhido ser $\exp(\sigma\sqrt{\Delta t})$ para que no limite quando $\Delta t \rightarrow 0$ possa convergir para uma distribuição log-normal.

No caso da planta em estudo, não se pode estimar a volatilidade através de dados históricos do Valor V do projeto, pois não há negociação no mercado como nos ativos financeiros. Uma maneira de estimá-la é através do método adaptado de Copeland & Antikarov (2002), que será aqui detalhado.

Para tal, deve-se gerar a distribuição de probabilidade do Valor Presente do projeto (V) através do uso de ferramenta de simulação de Monte Carlo, onde V assume a forma funcional descrita na seção 2.4. Dessa forma, obtêm-se os momentos da distribuição, em especial média e variância, para chegar então à volatilidade. Isso será detalhado a seguir.

6 DETERMINAÇÃO DO VALOR PRESENTE DO PROJETO E CÁLCULO DO VALOR DA OPÇÃO DE ESPERA

6.1 Diferenças entre a abordagem estática e opções reais

O arcabouço de opções reais vem incrementar a análise tradicional de Valor Presente Líquido (VPL), dado que neste último obtém-se um valor estático, gerado com cenários de preços e custos imutáveis. Usualmente, o VPL é gerado através de um Fluxo de Caixa Descontado (FCD), onde a regra de decisão é o projeto ser aprovado em caso de VPL positivo, ou rejeitado caso contrário. Não são consideradas as incertezas e, mais importante, a flexibilidade de resposta a essa incerteza. Por ex., não é considerada a opção de espera por melhores condições de mercado num ambiente de incertezas.

No entanto é razoável supor que o valor de um projeto se comporte tal e qual um ativo financeiro que pode assumir outros valores ao longo do tempo, dado que há incertezas em seus componentes. Conforme explicado anteriormente, o uso da hipótese MAD assume que a melhor estimativa não-tendenciosa do valor do projeto V é a sua estimativa estática inicial gerada pelo método de FCD.

No caso, a partir de dois processos estocásticos MGB nas variáveis de preços de insumo e produto, o valor presente das receitas líquidas de custos operacionais e impostos, isto é, o ativo subjacente V , se torna uma função destes preços, podendo assumir diversos valores, ao invés de um só na análise de FCD.

Recuperando os resultados obtidos nas regressões dos logaritmos da variação de preços do propano e do propeno, obtém-se as respectivas equações estocásticas MGB anuais neutras ao risco:

$$P_{(t)} = 503,29 \cdot \exp\{(4,15\% - 4,63\% - 0,5 \cdot (34,5\%)^2) \cdot \Delta t + 34,5\% \cdot N(0,1) \cdot \sqrt{\Delta t}\} \quad (57) \text{ (propano)}$$

$$P_{(t)} = 859,79 \cdot \exp\{(4,15\% - 4,63\% - 0,5 \cdot (21,7\%)^2) \cdot \Delta t + 21,7\% \cdot N(0,1) \cdot \sqrt{\Delta t}\} \quad (58) \text{ (propeno)}$$

A partir das referidas equações, o próximo passo é efetuar uma Simulação de Monte Carlo com 1.000.000 de iterações de forma a traçar uma distribuição de probabilidade do Valor Presente do projeto através da geração de números aleatórios na distribuição $N(0,1)$.

Um ponto importante a ser destacado é que, diferentemente de Copeland & Antikarov (2002), o uso do MAD modificado, ou MAD-Dias, foi o escolhido. Ao invés de simular todos os anos do fluxo de caixa, este método somente simula o fluxo de caixa em um período além do último dado de preço conhecido, utilizando curvas de valor esperado para calcular os fluxos de caixa esperados dos demais períodos até o final da operação do empreendimento. Este procedimento é adequado pois evita os erros de implementação originais do livro do Copeland & Antikarov (2002) que resultam em volatilidades demasiadamente altas (Dias, 2006, Brandão et al, 2005, 2005(1), Smith, 2005). Esse erro da metodologia original pode ser constatado com um caso teórico em que se conhece a volatilidade de V: se o valor do ativo subjacente é proporcional ao preço de um produto, isto é, $V = k P$, onde k é uma constante e P segue um MGB, então é fácil mostrar com o Lema de Itô que V também segue um MGB e com a mesma volatilidade de P . Usando o método MAD-modificado isso pode ser numericamente comprovado (Dias, 2006), mas se usar a implementação original de Copeland & Antikarov, o resultado teórico não é obtido.

A idéia do método MAD-Dias é simples. Se for assumido que V segue um MGB e sabendo o valor de V em $t = 0$ (valor presente dos fluxos de caixa operacionais – hipótese MAD), então se for adiado em um ano o exercício da opção, V poderá assumir outros valores de acordo com o MGB. Assim, se o projeto for adiado por um ano, V assumirá um valor de uma distribuição log-normal. Sendo MGB, sabe-se qual é a fórmula da média e da variância da distribuição log-normal de V (mostrado anteriormente).

Assim, se for usado a simulação de Monte Carlo para simular N cenários dos componentes estocásticos dos fluxos de caixa para daqui a um ano, pode-se calcular V condicional ao cenário simulado. Ou seja, para cada cenário simulado se calcula o valor presente V em $t = 1$ usando curvas de valor esperado desses componentes, condicional aos cenários simulados dos componentes em $t = 1$. Dessa forma, serão obtidos N cenários para o valor V em $t = 1$. Pode-se assim calcular a média e a variância dos N cenários de V em $t = 1$. Igualando esses valores empíricos com a média e a variância teórica de um MGB para o caso de $t = 1$, se terá duas equações (uma para a média e outra para a variância) e duas incógnitas (a tendência α e a volatilidade σ). Assim, a volatilidade “agregada” de V é obtida, assim como a sua tendência. Para calcular o *dividend yield* de V , procede-se de modo similar, repetindo a simulação, mas para processos neutros ao risco dos componentes de V , pois nas fórmulas de média e variância do MGB neutro ao risco a única mudança é que a tendência α é substituída pela tendência neutra ao risco ($r - \delta$). Tendo a taxa livre de risco r , se obtém o *dividend yield* δ

de V . No item 6.3 serão mostradas as fórmulas, explicitando os valores da volatilidade e do *dividend yield*.

Deve-se observar que no caso de uso da simulação real para os componentes de V (simulação real dos preços do propano e do propeno), a taxa de desconto a ser usada para calcular V é a taxa ajustada ao risco de V . Já na simulação neutra ao risco desses componentes, o desconto para obter V é feito com a taxa livre de risco.

Na simulação dos componentes estocásticos de V (preços do propano e do propeno), deve-se levar em conta a correlação entre os mesmos. No próximo item será visto como considerar na simulação a correlação entre os retornos dos preços do propano e do propeno.

6.2 Simulações correlacionadas: a transformação de Cholesky

Até então, não mencionamos a existência de correlação entre os preços do produto e do insumo. No entanto esta correlação deve ser considerada e estimada, já que seus movimentos de preços costumam ser dependentes. Assim, calculando a correlação entre as suas taxas de retorno anuais em logaritmo, foi obtido um valor de 0,678.

De forma a considerar as correlações entre essas duas variáveis, a alternativa utilizada neste trabalho foi a de aplicar a transformação de Cholesky às variáveis aleatórias geradas no processo de simulação, que é bastante apropriado para correlacionar distribuições normais. No caso, as normais padrão, $N(0, 1)$, dos dois processos serão correlacionadas através da fórmula de Cholesky para duas variáveis com distribuição normal.

Se duas variáveis aleatórias (v.a.) com distribuições normais X e Y têm correlação ρ , então basta amostrar duas normais independentes z_x e z_w , usar z_x para a v.a. X e usar a seguinte fórmula de Cholesky para a v.a. Y :

$$z_y = \rho z_x + z_w \sqrt{1 - \rho^2} \quad (59)$$

Essa fórmula será suficiente no caso dessa dissertação. Mas no caso de mais de duas variáveis aleatórias correlacionadas, o procedimento é um pouco mais complexo e deve-se trabalhar com vetores e matrizes. Uma vez dispondo da matriz de correlação das variáveis aleatórias a serem simuladas, pode-se obter a matriz de Cholesky. Esta é obtida pela multiplicação de um vetor de variáveis aleatórias independentes por esta matriz, de forma que o resultado será um vetor de variáveis aleatórias correlacionadas de acordo com a matriz de

correlações original. Para detalhes e uma aplicação voltada a ativos financeiros, vide Gomides (2004).

6.3 Cálculo da volatilidade do V da carteira de Propeno

O objetivo principal de obter uma distribuição de probabilidade do V da Unidade Separadora de Propeno é o cálculo da sua volatilidade e do *dividend yield* agregados. Conforme explicado anteriormente, estes serão utilizados no cálculo da opção de espera.

Recordando que uma variável MAD segue um MGB e recuperando as fórmulas do valor esperado e da variância deste processo estocástico, adaptados para um processo neutro ao risco.

$$E[V_t] = V_0 \exp(r - \delta)t \quad (60)$$

$$Var[V_t] = V_0^2 \exp 2(r - \delta)t [\exp(\sigma^2 t) - 1] \quad (61)$$

Temos que a volatilidade σ é igual a:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{t} \ln \left[1 + \left(\frac{Var[V_t]}{V_0^2 \exp 2(r - \delta)t} \right) \right]} \quad (62)$$

Da mesma forma que o *dividend yield* δ :

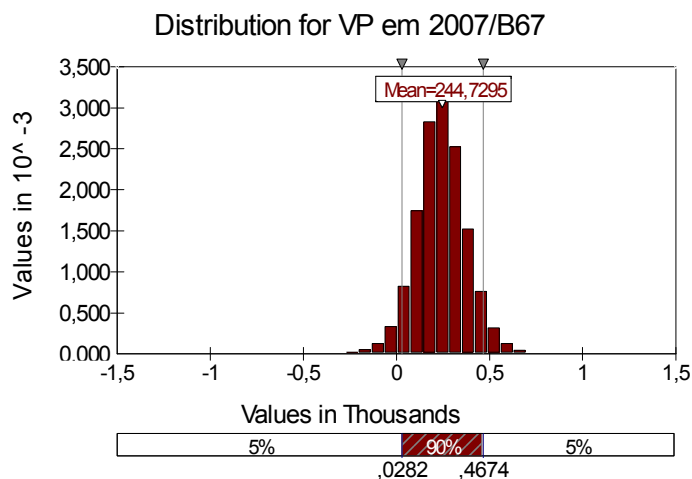
$$\delta = r - \left(\frac{1}{t} \right) \ln \left(\frac{E[V_t]}{V_0} \right) \quad (63)$$

Dessa forma, realiza-se simulações dos dois processos MGB (foi usada 1.000.000 de iterações) pelo método de Monte Carlo (com ajuda do *software @Risk*), resultando numa distribuição de probabilidade do Valor Presente da Unidade Separadora de Propeno. Com o primeiro e segundo momentos da distribuição (média e variância), e com a taxa livre de risco anteriormente vista, foram obtidos os seguintes valores para a volatilidade e *dividend yield* agregados do projeto:

$$\sigma_V = 51,59\% \text{ a.a}$$

$$\delta_V = 7,46\% \text{ a.a}$$

Figura 5: Gráfico de Distribuição de Probabilidade do V da Unidade Separadora de Propeno (em milhões de dólares norte-americanos – US\$)



6.4 Cálculo do valor da opção

6.4.1 Ativos Contingentes

Com os dados disponíveis, calcula-se qual é o valor da opção real de espera da Unidade Separadora de Propeno, bem como define-se qual decisão a ser tomada pelo método de ativos contingentes. O valor da opção real de espera F é o valor dessa oportunidade de investimento que pode ser igual ou maior que o VPL de exercício imediato. A decisão a ser tomada é dada pelo gatilho ou valor crítico V^* . Se o valor corrente (em $t = 0$) de V for igual ou maior que V^* , então é ótimo o exercício imediato da opção e se obtém o VPL, isto é, se $V(t = 0) \geq V^*$, então $F = VPL = V - I$ e o projeto deve ser feito imediatamente.

Assim, a espera só tem valor quando $F(V, t)$ for maior que o VPL sem flexibilidade. Caso contrário, decide-se pelo exercício da opção, investindo imediatamente. Para resolver essa opção finita pelo método de *contingent claims* pode-se resolver a EDP e suas cc com uma aproximação analítica proposta por Bjerksund & Stensland (1993). No caso de uma opção perpétua, utiliza-se a resolução analítica proposta no item 5.2 do trabalho.

Considerando uma taxa livre de risco de 4,15% a.a, um *dividend yield* de 7,46% a.a, volatilidade de 51,59% a.a, Valor Presente sem flexibilidade de US\$ 252,95 milhões e um investimento líquido de benefícios fiscais de US\$ 57,67 milhões (gerando um VPL sem

flexibilidade de US\$ 195,28 milhões), temos os seguintes valores de V^* para os anos de expiração da opção, bem como a decisão ótima a ser adotada²⁰.

Tabela 4 – Valor Crítico e Decisão Ótima de Investimento da Unidade Separadora de Propeno

Tempo de expiração (em anos)	Valor Crítico V^* (em milhões de US\$)	Decisão ótima (dado que $V(t=0) = 252,95$)	Valor Líquido da Espera, $F - VPL$ (em milhões de US\$)
0	57,67	Investir imediatamente	0,00
1	103,82	Investir imediatamente	0,00
2	116,93	Investir imediatamente	0,00
3	125,28	Investir imediatamente	0,00
4	131,38	Investir imediatamente	0,00
5	136,12	Investir imediatamente	0,00
Perpétuo	182,58	Investir imediatamente	0,00

Conforme mostrado, mesmo numa condição de opção perpétua (opção sem data de vencimento), a decisão ótima é investir imediatamente, pois o valor crítico não será superior ao valor presente sem flexibilidade em nenhum momento do tempo. Esse resultado pode ser atribuído ao fato que o valor do projeto V é muito superior (mais de quatro vezes) ao valor do investimento ($V/I = 2,52/0,57 = 4,42$) e ao fato da taxa de dividendos δ ser bem maior do que a taxa de juros livre de risco r . Isso mais que compensou o efeito da alta volatilidade (quase 50% ao ano) do ativo básico V .

Apesar de teoricamente a opção de investir nessa planta seja uma opção perpétua para empresas que detém essa tecnologia, na prática a entrada de um concorrente pode erodir de forma permanente (ou por muitos anos) a opção de investir nessa planta. Por isso, em muitos casos costuma-se limitar o vencimento da opção real ao período em que algum concorrente possa entrar no mercado (Kester, 1984; Kemna, 1993)²¹. Neste trabalho, o período foi limitado em cinco anos, além da análise do caso de opção perpétua.

O valor do *dividend yield* pode ser alvo de uma análise de sensibilidade. Efetuando o mesmo exercício acima, com os demais parâmetros mantidos constantes e valores de δ de 3%, 5%, 7% e 9% a.a, obtemos os seguintes valores para V^* conforme demonstrado na Tabela 5.

²⁰ Valores obtidos com a planilha Timing disponível em: <http://www.puc-rio.br/marco.ind/timing.html>, exceto na opção perpétua, onde foi adotada a fórmula (53).

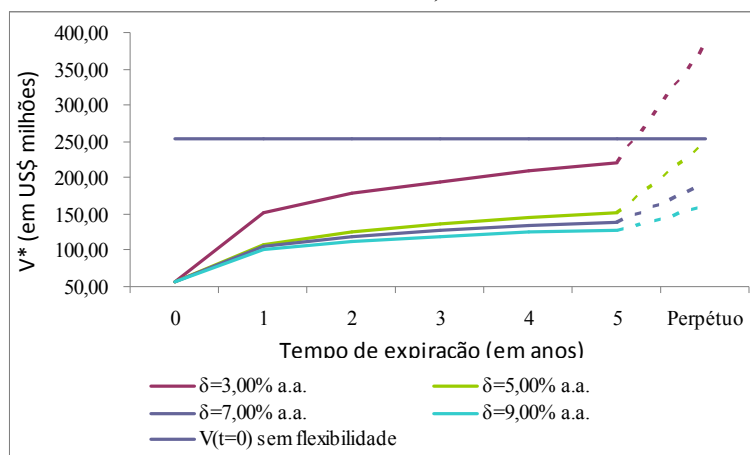
²¹ Dessa forma a entrada de concorrentes é modelada de forma exógena. Um modelo mais rigoroso do efeito da competição é combinar técnicas de opções reais com técnicas da teoria dos jogos, os chamados *jogos de opções reais*, que modela de forma endógena o efeito da competição. Ver Dixit & Pindyck (1994), cap. 9.

Tabela 5 – Valor Crítico da Unidade Separadora de Propeno em US\$ milhões (com análise de sensibilidade de δ)

Tempo de expiração (em anos)	Dividend Yield (δ) – a.a			
	3,00%	5,00%	7,00%	9,00%
0	57,67	57,67	57,67	57,67
1	152,51	108,41	104,62	101,20
2	177,59	125,04	118,32	112,50
3	195,08	136,38	127,16	119,42
4	208,74	145,08	133,67	124,31
5	220,00	152,15	138,77	128,02
Perpétuo	381,19	247,89	191,18	159,95

A Figura 6 consolida graficamente os dados da Tabela 5 e os compara com o valor de V^* para o caso base (US\$ 252,95 milhões). Verifica-se que somente com um valor de δ de 3 % a.a e sem prazo de expiração a opção de espera tem valor, com seu V^* de US\$ 381,19 milhões superando o do caso base, de US\$ 252,95 milhões. Simulando o valor de δ que faz a opção de espera ter valor logo no primeiro ano de vencimento, mantido tudo o demais constante, obtivemos o valor de 1,81% a.a, resultado este bastante inferior ao do caso base de 7,46% a.a. Também nota-se que os valores de V^* têm um comportamento relativamente estável ao longo do tempo de expiração, atingindo valores mais expressivos quando a opção não tem prazo de expiração.

Figura 6 – Valor Crítico da Unidade Separadora de Propeno em US\$ milhões (com análise de sensibilidade de δ)



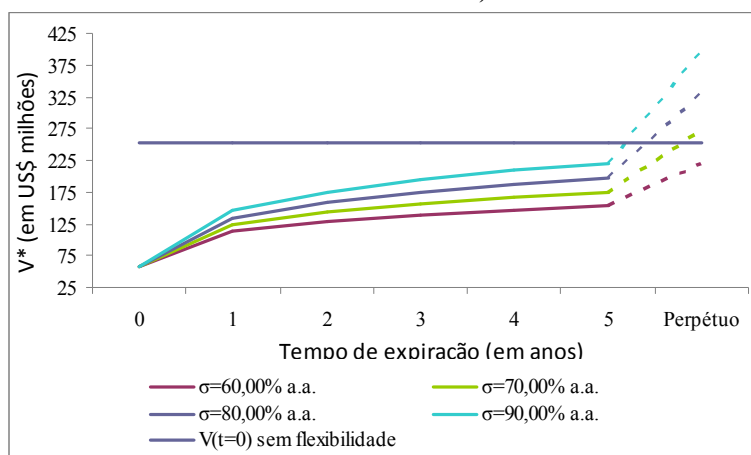
Outra análise de sensibilidade possível é para o valor da volatilidade σ . Efetuando o mesmo exercício descrito anteriormente, com os demais parâmetros mantidos constantes e valores de σ de 60%, 70%, 80% e 90% a.a, obtemos os seguintes valores para V^* conforme demonstrado na Tabela 6.

Tabela 6 – Valor Crítico da Unidade Separadora de Propeno em US\$ milhões (com análise de sensibilidade de σ)

Tempo de expiração (em anos)	Volatilidade (σ) – a.a			
	60,00%	70,00%	80,00%	90,00%
0	57,67	57,67	57,67	57,67
1	112,79	123,65	134,64	145,73
2	129,11	143,96	159,09	174,43
3	139,72	157,41	175,52	193,95
4	147,57	167,50	187,99	208,91
5	153,75	175,55	198,04	221,07
Perpétuo	220,51	272,36	331,55	398,19

Assim como na análise anterior, a Figura 7 consolida graficamente os dados da Tabela 6 e os compara com o valor de V^* para o caso base (US\$ 252,95 milhões). Verifica-se que para valores de σ superiores de 70 % a.a e sem prazo de expiração a opção de espera tem valor, com seus V^* 's superando o do caso base, de US\$ 252,95 milhões. Simulando o valor de σ que faz a opção de espera ter valor logo no primeiro ano de vencimento, mantido tudo o demais constante, obtivemos o valor de 184,56% a.a, resultado este bastante superior ao do caso base de 51,59% a.a. Ou seja, somente numa situação extrema incerteza é que a espera teria valor. Também nota-se que os valores de V^* têm um comportamento mais distante um dos outros ao longo do tempo de expiração, atingindo valores mais expressivos quando a opção não tem prazo de expiração.

Figura 7 – Valor Crítico da Unidade Separadora de Propeno em US\$ milhões (com análise de sensibilidade de σ)



6.4.2 Ativos Contingentes como função do spread

Uma abordagem alternativa ao problema é calcular o valor da opção de espera em função da diferença de preços entre o propeno e o propano (“spread”). Segundo Geman (2005), o diferencial entre duas quantidades é hoje provavelmente o instrumento mais transacionado no mercado de *commodities*, em especial no mercado de energia. Consequentemente, as opções cujo ativo subjacente é o *spread* se tornaram uma ferramenta importante para a avaliação de usinas elétricas, refinarias de petróleo, entre outras.

Geman (2005) estabelece duas formas de *spread*: entre duas *commodities* e o temporal (“calendar spreads”). A primeira estabelece um valor (ou prêmio) para a diferença entre dois produtos similares, sendo em geral um de qualidade inferior e outro superior. Como exemplo, o *spread* entre óleo cru e gasolina sem chumbo negociado na NYMEX. A outra forma permite fazer uma proteção contra flutuações sazonais entre dois ativos.

Neste trabalho, é mais natural a adoção da primeira forma de *spread*, que se divide em duas modalidades: *cracksread* e *sparksread*, com o primeiro sendo um diferencial entre os preços de produtos mais refinados e o óleo cru. Já o *sparksread* representa a diferença entre o preço da eletricidade e o preço da matéria-prima para gerá-la (seja óleo combustível, gás natural ou carvão).

O nosso *cracksread* é a diferença de preços entre o propeno (produto com qualidade superior e produto final) e o propano (produto de qualidade inferior e insumo). Para facilitar a notação e descrição, esse diferencial vai ser chamado deste ponto em diante de *spread*.

6.4.2.1 O Movimento Aritmético Browniano

O modelo utilizado para incluir o *spread* no cálculo da opção real da Unidade Separadora de Propeno será baseado em Fleten & Nasakkala (2003), porém adotando o método de direitos contingenciais (“contingent claims”) para o cálculo do valor da opção, ao invés da programação dinâmica usando uma taxa de desconto exógena, que foi adotado pelos autores.

Este modelo parte do princípio que o valor do projeto $V(S)$ é função do *spread*, e que este segue um Movimento Aritmético Browniano (MAB), dada a possibilidade da variável assumir valores negativos por possuir uma distribuição Normal.

$$dS = \gamma dt + \nu dz \quad (12')$$

Podemos reescrever a equação (12') conforme a seguir. Note que a unidade do *spread* S é em Dólares Norte-Americanos (US\$) por tonelada/ano:

$$S(t + dt) = S(t) + \gamma dt + \nu dz \quad (12'')$$

Onde S(t+dt) tem valor esperado (ou média) igual a S(t) + γdt e variância $\nu^2 dt$ (Dias, 2006).

Os parâmetros γ e ν^2 são dados por adaptações nas equações (22) e (23)

$$\nu^2 = N \cdot \text{Var}[S_t - S_{t-1}] \quad (22')$$

$$\gamma = N \{ \text{Média}[S_t - S_{t-1}] \} \quad (23')$$

Com a mesma série de preços utilizada anteriormente, obtemos os valores dos parâmetros das equações (22') e (23'):

$$\gamma = \text{US\$ } 22,94 \text{ ton/ano}$$

$$\nu^2 = \text{US\$ } 33.137,02 \text{ ton}^2/\text{ano}^2, \text{ levando à volatilidade de } \nu = \text{US\$ } 182,04 \text{ ton/ano}$$

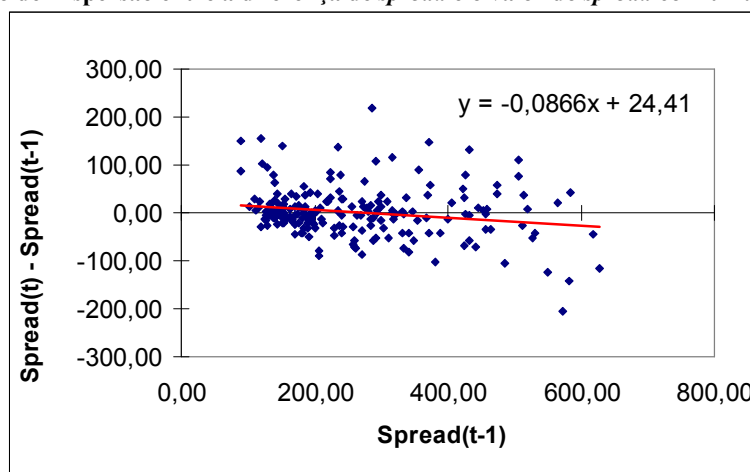
Para aplicar o modelo, é necessária a verificação da aderência da série dos *spreads* propeno-propano (S) ao MAB, tendo que efetuar a regressão de uma versão transformada da equação (36):

$$S_t - S_{t-1} = a + (b-1)S_{t-1} + \varepsilon_t \quad (36')$$

Em (36'), não é utilizada a transformação logarítmica, pois é o *spread* que segue um MAB e não o seu logaritmo (como ocorria com preços). Da mesma forma que nos processos individuais dos preços do propeno e propano, a regressão é efetuada por mínimos quadrados ordinários com a correção de Newey-West, bem como o período adotado é o mesmo.

Tabela 7 – Resultado da regressão da diferença de *spread* e o valor do *spread* com uma defasagem

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	24.40996	8.313556	2.936164	0.0037
SPREAD(-1)	-0.086555	0.028890	-2.996043	0.0031
R-squared	0.041561	Mean dependent var		1.911572
Adjusted R-squared	0.036931	S.D. dependent var		52.54920
S.E. of regression	51.56972	Akaike info criterion		10.73327
Sum squared resid	550503.2	Schwarz criterion		10.76525
Log likelihood	-1119.627	F-statistic		8.976271
Durbin-Watson stat	1.405906	Prob(F-statistic)		0.003069

Figura 8 – Gráfico de Dispersão entre a diferença de *spread* e o valor do *spread* com uma defasagem

A princípio, visualmente o gráfico de dispersão indica que o processo estocástico mais adequado é o de reversão à média, dada que a inclinação negativa da reta parece ser significativa, isto é, aparenta ter um valor significativamente diferente de zero para o coeficiente (b-1). No entanto, para verificar essa intuição tem de fazer o teste de hipótese da raiz unitária, onde se testa a aderência ao MAB verificando se o coeficiente (b-1) pode ser considerado igual a zero (teste de Dickey-Fuller).

O resultado do teste de hipótese descrito acima foi praticamente nulo, conforme visto na Tabela 7 (probabilidade associada de 0,31%). Assim, a hipótese de MAB para o *spread* é rejeitada e favorece o indício de que o processo estocástico mais adequado para S é o de reversão à média.

O modelo de Fleten & Nasakkala para opção perpétua tem solução analítica, mas se baseia no MAB, não podendo ser adotado para uma variável com outro processo estocástico. A solução para uma variável S que segue um processo de reversão à média, mesmo para opção perpétua, só deve ser obtida com o uso de métodos numéricos, cujo encaminhamento é

sugerido para outros pesquisadores que desejem explorar o tema. No entanto, para continuar a exposição do modelo e obter uma solução analítica, suponha que a variável S segue um MAB. Depois será interpretado os resultados obtidos, os quais devem ser vistos com reservas, pois os dados de S não aderiram bem a esse processo estocástico.

6.4.2.2 O Modelo como função do spread

6.4.2.2.1 Modelagem usando Contingent Claims

Seja $F(S)$ o valor de uma opção perpétua para construir uma Unidade Separadora de Propeno, cuja margem S é o *spread* que segue o MAB apontado pela equação (12'). O método do *contingent claims* aqui será um pouco mais detalhado do que no caso do ativo básico como MGB, já que é mais raro encontrar esse desenvolvimento com MAB na literatura (baseado em Dias, 2006). Para aplicar o método de direitos contingenciais, como anteriormente considere o portfólio:

$$\Phi = F - nS \quad (64)$$

Se houver um n que torne o portfólio livre de risco, o seu retorno em um intervalo dt terá de ser o retorno livre de risco para não haver oportunidades de arbitragem. Ou seja, o retorno do portfólio é:

$$r\Phi dt = r(F - nS)dt \quad (65)$$

No entanto, o retorno deste mesmo portfólio em dt também é o retorno dos seus componentes, lembrando que F não paga dividendos, mas existe um *convenience yield* para o *spread* (alguns *spreads* são negociados no mercado futuro e pode ser estimados com dados desse mercado).

$$r\Phi dt = dF - n(dS + \delta S dt) \quad (66)$$

Com δ sendo o *convenience yield* do *spread*. Pelo lema de Itô e pelo fato de no MAB $(dS)^2 = \sigma^2 dt$, vem:

$$dF = F_s dS + 0,5F_{ss}\sigma^2 dt \quad (67)$$

Igualando os dois retornos e usando o lema de Itô para dF:

$$r(F - nS)dt = (F_s - n)dS + 0,5F_{ss}\sigma^2 dt - n\delta Sdt \quad (68)$$

Está sendo considerado que a opção é perpétua, de forma que a derivada parcial de F em relação ao tempo é zero. Para tornar o portfolio sem risco, $n = F_s$ (pois dessa forma se elimina o único termo estocástico que é dS). Simplificando e rearrumando termos, temos a seguinte Equação Diferencial Ordinária para F(S).

$$0,5F_{ss}\sigma^2 + (r - \delta)SF_s - rF = 0 \quad (69)$$

Onde r é a taxa livre de risco. A solução geral da EDO é

$$F(S) = A_1 \exp(\beta_1 S) + A_2 \exp(\beta_2 S) \quad (70)$$

Com β_1 e β_2 sendo as raízes da equação quadrática

$$0,5\sigma^2 \beta^2 + (r - \delta)S\beta - r = 0 \quad (71)$$

Com solução

$$\beta_1 = \frac{-(r - \delta)S + \sqrt{(r - \delta)^2 S^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2} > 0 \quad (72)$$

$$\beta_2 = \frac{-(r - \delta)S - \sqrt{(r - \delta)^2 S^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2} < 0 \quad (73)$$

As condições de contorno da EDO são

$$\lim_{S \rightarrow -\infty} F(S) = 0 \quad (74)$$

$$\text{Em } S=S^*, F(S^*) = V(S^*) - I \quad (75)$$

$$\text{Em } S=S^*, F_S(S^*) = V_S(S^*) \quad (76)$$

Com S^* sendo o *spread* no ponto de exercício ótimo e I o valor presente do fluxo de investimento líquido de benefícios fiscais. Os subscritos S sinalizam as derivadas parciais com relação a S . A primeira condição obriga a constante A_2 ser igual a zero, originando (70').

$$F(S) = A_1 \exp(\beta_1 S) \quad (70')$$

Mais adiante, vão ser definidas as funções valor do projeto $V(S)$ e de I , que permitem que as condições de contorno (75) e (76) determinem o valor de A_1 e S^* , resolvendo totalmente o problema de F e S^* .

6.4.2.2.2 Forma funcional de $V(S)$ e Investimento

A forma funcional do valor do projeto como função do *spread* $V(S)$ é o valor presente dos seus fluxos anuais de caixa:

$$V(S) = \sum_{i=1}^T FC_i \exp^{-\mu i} \quad (77)$$

Onde i é o ano do fluxo de caixa, T é o último ano e μ é a taxa real anual de desconto ajustada ao risco.

O Fluxo de Caixa (FC) em cada ano i é dado pela seguinte expressão:

$$FC_i = LL_i \quad (78)$$

Onde LL é o Lucro Líquido. É esperado que nos primeiros três anos do projeto os fluxos de caixa sejam iguais a zero, pois a produção se inicia no início do quarto ano.

Já o Lucro Líquido em cada ano i é definido como:

$$LL_i = (1 - \tau)LT_i \quad (79)$$

Onde LT é o Lucro Tributável e τ é a alíquota de imposto sobre a renda (Imposto de Renda (IR) acrescido da Contribuição Social sobre o Lucro Líquido (CSLL)).

Por fim, o Lucro Tributável em cada ano i , que é a base de cálculo do imposto sobre a renda, é definido como:

$$LT_i = [(S_i - Cfr_i)Q_i] - Cutil_i - Coper_i \quad (80)$$

Onde S é o *spread*, Cfr é o custo dos fretes para correção de densidade do GLP (conforme descrito na seção 2.3), Q é quantidade produzida, $Cutil$ é o custo das utilidades e $Coper$ são os custos operacionais fixos (ambos também descritos na seção 2.3). Todos estes valores estão em US\$ tonelada/ano.

O valor presente do fluxo de investimento em cada ano i tem a seguinte forma funcional

$$I = \sum_{i=1}^T (K_i - D_i \tau) \exp^{-\mu i} \quad (81)$$

Onde K é o desembolso de capital líquido da recuperação tributária de ICMS e PIS/COFINS, D é a depreciação, com τ e μ tendo os significados já expostos anteriormente.²²

6.4.2.2.3 Cálculo dos Parâmetros

Como a variável S segue um MAB, temos o valor esperado em cada instante do tempo:

$$S_i = S_0 + \gamma i \quad (82)$$

²² Nessa abordagem, foi excluído o tributo CPMF.

Com i sendo o ano correspondente ao fluxo de caixa, S_0 o valor inicial do *spread* e γ o termo de tendência (drift) em US\$/ton/ano.

A derivada de $V(S)$ com relação a S é simplificada por termos que derivar somente a expressão do Lucro Líquido. Com isso, obtemos:

$$\frac{\partial V(S)}{\partial S} = \left[\sum_{i=i}^T Q_i \exp^{-\mu i} \right] (1 - \tau) \quad (83)$$

Os parâmetros de tendência e volatilidade de um MAB, diferente do Movimento Geométrico Browniano, não são expressos em percentuais/ano (note que a unidade do drift no MAB em US\$/ton/ano, diferindo da unidade do drift α no MGB, que era dado em %/ano). Dada a impossibilidade de obtenção de um valor de *convenience yield* para o *spread* entre propano e propano (não existe mercado futuro para esse *spread*), transformamos a variável γ para esta passar a ser expressa em percentuais relativos ao *spread* S . Assim, dividindo a equação (12') pelo valor corrente do *spread* S , ela se transforma na eq. (12''):

$$\frac{dS}{S} = \frac{\gamma}{S} \cdot dt + \frac{\nu}{S} \cdot dz \quad (12'')$$

O retorno μ de um ativo é a soma do seu ganho de capital, que pode ser dado pelo ganho de capital $\theta = \gamma/S$ e seus dividendos δ (ou *convenience yield*, no caso de *commodities*).

$$\mu = \theta + \delta \quad (84)$$

Com $\theta = \gamma/S$, e se sabemos o valor de μ do projeto (isto é, a sua taxa real de desconto ajustada ao risco), temos por diferença o valor do *convenience yield* δ . Em termos práticos, o valor de S a ser utilizado pode ser tanto o valor corrente como uma média dos últimos períodos a fim de procurar um valor inicial mais representativo.

6.4.2.2.4 Determinação de S^* e Solução do Modelo

Para resolver o problema e determinar o S crítico (S^*), encontramos primeiramente o valor de $V_S(S)$ através da equação (83), onde S ainda não é S^* . Com uma quantidade anual fixa de 105.000 toneladas, uma alíquota de 34% de Imposto de Renda e Contribuição Social sobre o

Lucro Líquido e uma taxa de desconto ajustada ao risco de 8,50% em termos reais, temos que a equação (83) tem uma solução dada por um número (494.996,35). Encontrado este valor, temos a solução da equação (76).

Este valor deve ser igualado à derivada de $F(S)$ com relação a S , $F_S(S)$, na equação (76). Recorde-se que o termo β_1 é função de S :

$$F_S(S) = A_1 \exp(\beta_1 S) (\beta_{1(S)} S + \beta_1) \quad (85)$$

Sendo $\beta_{1(S)}$ a derivada deste termo com relação a S . Com isso, conseguimos isolar o termo A_1 , obtendo:

$$\frac{V_S(S)}{\exp(\beta_1 S) (\beta_{1(S)} S + \beta_1)} = A_1 \quad (86)$$

Dado que $F_S(S) = V_S(S)$ no ponto de interesse $S = S^*$. Derivando β_1 com relação a S , temos:

$$\beta_{1(S)} = \frac{-(r - \delta) + 0,5 \left(\sqrt{(r - \delta)^2 S^2 + 2\sigma^2 r} \right)^{-0,5} 2S(r - \delta)^2}{\sigma^2} \quad (87)$$

Com isso, temos os termos A_1 e β_1 como função de S na equação (70'). O S^* que soluciona o modelo é aquele que resolve a equação (75) (em $S=S^*$).

$$F(S^*) - V(S^*) + I = 0 \quad (75)$$

Como temos uma equação e uma incógnita (S^*), mesmo não havendo linearidade em S^* , a solução é obtida numericamente através de processo iterativo.

O valor de S^* vai determinar se é ótimo ou não investir no projeto. Se o *spread* corrente S é superior a S^* , é ótimo investir no projeto, dado que o Valor Presente Líquido gerado será superior ao valor da opção real F . Caso contrário, o ótimo é aguardar por novas informações (isto é, uma melhora no valor de S).

6.4.3 Resultados

Com a definição de algumas premissas, é possível efetuar o cálculo do valor de S crítico (S*) que nos vai indicar qual a decisão ótima do projeto (espera ou continuidade).

Tabela 8 – Premissas para cálculo de S*

Parâmetro	Valor	Observações
Taxa de desconto ajustada ao risco (μ)	8,50%	Em termos reais ao ano
Tendência (γ)	22,94	Em US\$ tonelada/ano
Volatilidade (σ)	182,04	Em US\$ tonelada/ano
Tendência ajustada (γ/S)	4,59%	Em termos reais ao ano e calculado conforme exposto na seção 6.4.2.2.3
<i>Convenience yield</i> (δ)	3,91%	Ao ano e calculado conforme exposto na seção 6.4.2.2.3
Taxa livre de risco (r)	4,15%	Em termos reais ao ano
IR + CSLL	34%	25% de IR + 9% de CSLL
S	500	Em US\$ tonelada/ano. Valor aproximado na data atual
Quantidade produzida (Q)	105.000	Em toneladas/ano. Valor constante em todo o período
Duração do Projeto (T)	30	Em anos

Através da ferramenta Atingir Meta do Excel, obtivemos o valor de US\$ 541,23 ton/ano para S*. Como o valor do S atual é inferior ao S ótimo, o modelo indica que a melhor escolha é esperar antes de implementar o projeto.

No entanto, como a diferença entre o S atual e o ótimo é relativamente pequena, é possível fazer uma análise de sensibilidade. Ao invés de adotarmos o *convenience yield* de 3,91%, obtido através do exposto na seção 6.4.2.2.3, podemos supôr que este parâmetro será igual ao do propano (4,63%).

Com este procedimento, S* cai para US\$ 456,06 ton/ano, alterando a indicação do modelo, que passa a ser de investir imediatamente. Se for usado o *dividend yield* agregado para V, que é ainda maior ($\delta = 7,46\%$ a.a.), o gatilho S* cai ainda mais, para US\$ 278,18 ton/ano, também indicando o exercício imediato da opção.

Para este projeto, com um processo estocástico baseado no *spread* entre propano e propano, o modelo indica resultados divergentes do caso base que é quando o valor do projeto V segue um MGB. Entretanto, o resultado do modelo de *spread* é bem sensível ao *convenience yield* adotado. Se for adotado o mesmo valor para δ (tanto do propano como o de V) usado no caso base em que V segue um MGB, a indicação de ser ótimo o exercício

imediatamente da opção ocorre tanto no caso do V como MGB como no caso de *spread* S seguindo um MAB.

A principal crítica aos resultados do modelo do *spread* é o fato de termos usado um modelo baseado num MAB para uma variável que os dados indicam que segue outro processo estocástico. Outra limitação do modelo é o fato de não ter sido possível obter um valor mais preciso do parâmetro δ , dado que não há negociação deste *spread* no mercado futuro.

Outra limitação dos resultados do modelo com *spread* é que este modelo calculou só o valor de uma opção perpétua de investimento. Não há uma aproximação analítica disponível para o caso de opção finita (como no modelo de V seguindo um MGB) e assim não foi analisado a sensibilidade das datas de vencimento finitas. A resolução do caso de opção finita para o *spread* seguindo um MAB é possível, mas teria de usar métodos numéricos tais como o método das diferenças finitas. Embora a opção possa ter uma interpretação a curto prazo diferente da apontada para o longo prazo, no caso da opção finita o gatilho $S^*(t)$ deve ser menor que o gatilho calculado ($S^*(\infty)$), em função do comportamento monotonicamente decrescente com o tempo de expiração que normalmente o gatilho apresenta.

Pelo exposto, aconselhamos que os resultados deste modelo sejam vistos com cautela, bem como recomendar que a avaliação por métodos numéricos seja adotada em estudos futuros.

7 CONCLUSÕES

Após a descrição do processo de funcionamento da Unidade Separadora de Propeno e da determinação do processo estocástico que melhor se adequa aos preços de seu produto e insumo, chegamos às seguintes conclusões:

- O processo estocástico que melhor se adequa à flutuação dos preços do propano e do propeno é o MGB, que não pôde ser rejeitado no teste da raiz unitária de Dickey-Fuller.
- Foi usado o método de Copeland & Antikarov modificado para estimar a volatilidade agregada do Valor Presente do projeto, que é uma variável de grande influência no valor da opção de espera. Com essa volatilidade agregada de V foi possível usar o método clássico para valorar uma opção real de espera com a EDP de Black-Scholes-Merton.
- Dadas as premissas de determinação do Valor Presente, a opção ótima é a de investir imediatamente no projeto, já que foi obtido um valor $V(t = 0) > V^*$.
- A espera somente tem valor em uma situação com volatilidade muito superior à estimada ou *dividend yield* muito inferior ao estimado e se considerar um longo período de expiração da opção (cinco anos ou mais).

Os resultados estão coerentes com os movimentos observados no mercado brasileiro, dado que há uma retomada no mercado petroquímico, com o retorno da Petrobras como um dos seus principais *players*.

Outra forma de obter o valor da opção de espera é através da modelagem do diferencial de preços (*spread*) entre o preço do propano e do propeno utilizando-se o Movimento Aritmético Browniano, que permite valores negativos. Baseado no artigo de Fleten & Nasakalla (2003), mas usando o método dos ativos contingentes (em vez da programação dinâmica com taxa exógena usada no artigo), foi encontrado o valor da opção de investir na planta e o gatilho para imediato investimento no caso de opção perpétua. Também nesse caso foi encontrado que o ótimo seria o imediato investimento. Mas esse modelo foi considerado secundário, já que a série temporal de dados de *spread* propano-propeno não aderiu bem aos dados (foi rejeitado pelo teste de Dickey-Fuller). Fica como sugestão para futuros trabalhos o uso de um processo de reversão à média para o *spread*.

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BELLMAN, Richard. Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, 1957.
- BJERKSUND, Petter & STENSLAND, Gunnar. Closed Form Approximation of American Options. Scandinavian Journal of Management, vol.9, pp. 87-99, 1993.
- BLACK, Fischer. The pricing of commodity contracts, Journal of Financial Economics, vol. 3, 167-179, 1976
- BLACK, Fischer & SCHOLES, Myron. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy 81, 637-659, 1973.
- BRANDAO, Luiz E. et al. Using Binomial Decision Trees to Solve Real-Option Valuation Problems. Decision Analysis, Vol.2, No.2, June 2005, pp. 69-88, 2005
- BRANDAO, Luiz E. et al (1). Response to Comments on Brandao et al. Decision Analysis, Vol.2, No.2, June 2005, pp. 103-109, 2005
- CLEWLOW, Les & STRICKLAND, Chris. Implementing Derivatives Models. John Wiley & Sons, Nova York, 1998.
- COPELAND, Tom & ANTIKAROV, Vladimir. Opções reais: um novo paradigma para reinventar a avaliação de investimentos. Editora Campus, 2002.
- COX, John, ROSS, Stephen & RUBINSTEIN, Mark. “Option Pricing. A Simplified Approach. Journal of Financial Economics 7, 229-263, 1979.
- DIAS, Marco A. G. e ROCHA, Katia . Petroleum Concession with Extendible Options Using Mean Reversion with Jumps to Model Oil Prices. 3rd Annual Conference on Real Options – Theory Meets Practice, 1999.
- DIAS, Marco A. G. Valuation of Exploration & Production Assets: An Overview of Real Options Models. Journal of Petroleum Science and Engineering 44(1-2), 93-114, 2004.
- DIAS, Marco A. G.. Notas de Aula, disponível em www.puc-rio.br/marco.ind/ind2072.html. Pontifícia Universidade Católica Rio de Janeiro, 2006.

DICKEY, David A. & FULLER, Wayne. Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. Journal of the American Statistical Association, 74, p. 427–431, 1979.

DIXIT, Avinash e PINDYCK, Robert. Investment Under Uncertainty. Princeton University Press, 2ª Edição, 1994.

DOZHANOV, Michael U. Prices in Financial Markets. Oxford University Press, 1990.

FLETEN, S.-E. & Näsäkkälä, E. Gas Fired Power Plants: Investment Timing, Operating Flexibility and Abandonment. Working Paper 04-03, Department of Industrial Economics and Technology Management, Norwegian University of Science and Technology, 2003

GEMAN, Hellyete. Commodities and Commodity Derivatives: Modeling and Pricing for Agriculturals, Metals and Energy. Wiley Finance, 2005.

GOMIDES, Alessandro. Avaliação de Riscos em Estratégias de Investimento de Longo Prazo: Aplicação Prática em um Fundo de Pensão. Dissertação de Mestrado em Finanças, EPGE/FGV, 2004.

HUANG, C. & R.H. LITZEMBERG. Foundations for Financial Economics. Elsevier Science Publishing Co., Inc., Amsterdam, 1988.

HULL, John C. Options, Futures and Other Derivatives Securities. Prentice Hall, Fifth Edition, 2002.

JARROW, Robert & RUDD, Andrew. Options Pricing. Homewood, IL: Irwin, 1983.

KARATZAS, Ioannis & SHREVE, Steven. Methods of Mathematical Finance. Springer, Nova York, 1998.

KEMNA, Angeliën G.Z.. Case Studies on Real Options. Financial Management. Financial Management Association, vol. 22(3), Fall 1993.

KESTER, W.C. Today's Options for Tomorrow's Growth. Harvard Business Review, nº 62, March-April 1984, pp.153-160.

KLOEDEN, Peter E. & PLATEN, Eckhard. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations". Springer-Verlag, 1992, 636 pp, 1992.

LUND, Diderick. & B. OKSENDAL (eds.). Stochastic Models and Option Values: With Applications to Resources, Environment, and Investment Problems. North Holland, Amsterdam, 1991.

MADDALA, G.S. Introduction to Econometrics. John Wiley & Sons, Ltd, 2001.

MCDONALD, Robert. Derivatives Markets. Addison Wesley/Pearson Educ., Inc., 2003.

MCDONALD, Robert. & SIEGEL, Daniel. The Value of Waiting to Invest. Quarterly Journal of Economics, 101, 707-727, 1986.

MERTON, Robert. The Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics and Management Science, 4, 141-183, 1973.

NEWKEY Whitney K. & WEST, Kenneth D. A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. Econometrica, 55, 703–708, 1987.

NEWKEY Whitney K. & WEST, Kenneth D.. Automatic Lag Selection in Covariance Matrix Estimation. Review of Economic Studies, 61, 631–653, 1994.

ROSS, SHELDON M. An Introduction to Mathematical Finance – Options and Other Topics. Cambridge University Press, 1999.

SAMUELSON, Paul A. Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. Industrial Management Review, Spring 1965, pp.41-49, 1965.

SMITH, James E. Alternative Approaches for Solving Real Options Problems: A Comment on Brandao, Dyer and Hahn. Fuqua School of Business, Duke University, 2005.

TRIGEORGIS, Lenos. A Log-Transformed Binomial Numerical Analysis Method for Valuing Complex Multi-Option Investment. Journal of Financial and Quantitative Analysis. 26, 309-326, 1991.

TRIGEORGIS, Lenos. Real Options in Capital Budgeting. Managerial Flexibility in Capital Resource Allocation. MIT Press, 1996.

TRIGEORGIS, Lenos (ed.). Real Options in Capital Investment: Models, Strategies, and Applications. Praeger Publishers, Westport, 1995.

WINSTON, Wayne L. Financial Models Using Simulation and Optimization. Palisade Co., Eds., 1998, 500 pp, 1998

9 ANEXOS

9.1 Séries de preços dos mercados à vista de propano e propeno

Mês Ano	Preço Propano (em US\$/ton)	Preço Propano corrigido pelo CPI (em US\$/ton)	Preço Propeno (em US\$/ton)	Preço Propeno corrigido pelo CPI (em US\$/ton)
1990 01	235,52	373,07	292,11	462,70
1990 02	144,86	228,38	297,62	469,22
1990 03	125,02	196,03	297,62	466,67
1990 04	120,51	188,67	308,64	483,20
1990 05	116,47	181,92	308,64	482,08
1990 06	125,78	195,40	308,64	479,48
1990 07	144,65	223,86	319,67	494,70
1990 08	198,94	305,06	319,67	490,19
1990 09	237,17	360,68	363,76	553,18
1990 10	274,00	414,19	429,90	649,84
1990 11	248,99	375,53	496,04	748,13
1990 12	209,79	316,40	496,04	748,13
1991 01	189,49	284,09	473,99	710,63
1991 02	157,03	235,08	440,92	660,07
1991 03	170,14	254,33	407,85	609,66
1991 04	168,83	252,00	396,83	592,31
1991 05	173,96	258,89	374,78	557,75
1991 06	143,21	212,49	352,74	523,40
1991 07	145,38	215,41	319,67	473,63
1991 08	164,68	243,28	319,67	472,25
1991 09	195,71	287,85	319,67	470,18
1991 10	224,35	329,50	319,67	469,50
1991 11	224,80	329,21	319,67	468,13
1991 12	170,84	250,00	319,67	467,79
1992 01	143,30	209,41	308,64	451,01
1992 02	150,15	218,62	286,60	417,28
1992 03	151,35	219,26	286,60	415,19
1992 04	151,81	219,61	286,60	414,59
1992 05	162,11	234,17	297,62	429,92
1992 06	176,52	254,08	303,13	436,32
1992 07	176,40	253,36	308,64	443,31
1992 08	184,46	264,19	303,13	434,15
1992 09	195,62	279,38	297,62	425,05
1992 10	185,69	264,26	286,60	407,87
1992 11	170,74	242,64	275,58	391,63
1992 12	161,60	229,82	270,06	384,06
1993 01	175,30	248,07	270,06	382,18
1993 02	172,56	243,35	270,06	380,84
1993 03	178,86	251,36	270,06	379,52
1993 04	179,73	251,87	275,58	386,19
1993 05	171,25	239,65	281,09	393,37
1993 06	170,91	238,85	281,09	392,82
1993 07	163,84	228,97	281,09	392,82
1993 08	158,59	221,02	270,06	376,37
1993 09	156,16	217,18	264,55	367,93

1993 10	153,06	212,00	259,04	358,78
1993 11	143,76	198,98	253,53	350,91
1993 12	128,11	177,32	248,02	343,28
1994 01	137,59	189,92	248,02	342,34
1994 02	151,84	208,87	248,02	341,17
1994 03	148,51	203,60	259,04	355,12
1994 04	150,42	205,93	270,06	369,73
1994 05	154,70	211,65	281,09	384,56
1994 06	150,40	205,07	303,13	413,33
1994 07	152,74	207,70	314,16	427,20
1994 08	156,78	212,33	336,20	455,34
1994 09	156,50	211,39	358,25	483,90
1994 10	169,47	228,75	380,29	513,33
1994 11	179,80	242,38	402,34	542,37
1994 12	173,92	234,45	424,39	572,08
1995 01	171,07	229,69	446,43	599,40
1995 02	165,26	221,01	468,48	626,50
1995 03	171,23	228,23	490,52	653,82
1995 04	168,73	224,16	512,57	680,95
1995 05	170,94	226,65	512,57	679,61
1995 06	166,34	220,11	512,57	678,27
1995 07	160,90	212,92	512,57	678,27
1995 08	163,60	215,92	490,52	647,40
1995 09	163,76	215,71	446,43	588,05
1995 10	161,36	211,86	413,36	542,72
1995 11	161,49	212,17	380,29	499,63
1995 12	184,15	242,09	358,25	470,97
1996 01	185,13	241,96	336,20	439,41
1996 02	200,82	261,62	336,20	438,00
1996 03	192,70	249,75	336,20	435,74
1996 04	185,39	239,36	358,25	462,54
1996 05	182,03	234,56	380,29	490,06
1996 06	182,01	234,39	391,32	503,94
1996 07	185,84	238,87	391,32	502,98
1996 08	200,19	256,82	402,34	516,16
1996 09	244,61	312,82	402,34	514,53
1996 10	268,37	342,11	402,34	512,90
1996 11	302,50	384,89	402,34	511,93
1996 12	317,59	404,10	413,36	525,96
1997 01	247,54	313,98	424,39	538,28
1997 02	202,65	256,24	435,41	550,54
1997 03	201,12	253,67	435,41	549,16
1997 04	182,13	229,42	435,41	548,47
1997 05	184,40	232,43	435,41	548,82
1997 06	179,86	226,42	435,41	548,13
1997 07	182,29	229,20	435,41	547,45
1997 08	193,34	242,63	435,41	546,43
1997 09	202,01	252,89	418,87	524,37
1997 10	208,05	259,81	396,83	495,54
1997 11	187,70	234,54	380,29	475,19
1997 12	175,41	219,45	363,76	455,09
1998 01	157,29	196,42	347,22	433,60

1998 02	155,71	194,08	325,18	405,32
1998 03	143,17	178,12	303,13	377,14
1998 04	151,73	188,43	292,11	362,76
1998 05	143,28	177,61	281,09	348,42
1998 06	127,63	158,01	275,58	341,17
1998 07	128,36	158,72	275,58	340,75
1998 08	126,09	155,72	264,55	326,72
1998 09	129,68	159,96	264,55	326,32
1998 10	134,34	165,30	253,53	311,96
1998 11	129,48	159,33	248,02	305,18
1998 12	109,16	134,40	242,51	298,58
1999 01	113,54	139,45	236,99	291,09
1999 02	117,28	143,88	231,48	283,97
1999 03	125,93	154,02	231,48	283,11
1999 04	147,00	178,49	231,48	281,07
1999 05	147,97	179,66	242,51	294,45
1999 06	161,98	196,67	264,55	321,22
1999 07	194,66	235,64	286,60	346,94
1999 08	211,73	255,70	308,64	372,74
1999 09	225,58	271,13	341,71	410,71
1999 10	237,21	284,60	374,78	449,65
1999 11	226,95	272,13	396,83	475,82
1999 12	223,76	268,30	396,83	475,82
2000 01	290,12	346,84	396,83	474,41
2000 02	309,77	368,15	418,87	497,81
2000 03	273,32	322,18	462,97	545,72
2000 04	245,18	288,84	507,06	597,34
2000 05	268,12	315,49	551,15	648,53
2000 06	289,83	339,25	573,20	670,95
2000 07	286,70	334,82	573,20	669,39
2000 08	305,43	356,69	529,10	617,90
2000 09	335,40	389,65	496,04	576,28
2000 10	322,66	374,21	496,04	575,29
2000 11	317,08	367,53	496,04	574,96
2000 12	382,18	443,24	485,01	562,50
2001 01	396,56	457,03	473,99	546,26
2001 02	309,64	355,44	462,97	531,44
2001 03	284,01	325,27	451,94	517,61
2001 04	283,56	323,48	407,85	465,26
2001 05	267,22	303,46	385,81	438,13
2001 06	225,39	255,53	341,71	387,40
2001 07	203,00	230,80	314,16	357,16
2001 08	217,07	246,78	314,16	357,16
2001 09	217,64	246,33	341,71	386,75
2001 10	205,95	233,88	385,81	438,13
2001 11	172,51	196,23	385,81	438,87
2001 12	155,50	177,59	341,71	390,25
2002 01	151,91	173,10	319,67	364,25
2002 02	164,08	186,22	319,67	362,82
2002 03	198,61	224,16	336,20	379,45
2002 04	216,59	243,09	380,29	426,83
2002 05	212,45	238,44	424,39	476,31

2002 06	195,54	219,34	446,43	500,78
2002 07	193,19	216,47	446,43	500,22
2002 08	215,76	240,95	446,43	498,56
2002 09	246,38	274,69	418,87	467,01
2002 10	250,24	278,54	418,87	466,24
2002 11	246,80	274,70	407,85	453,97
2002 12	272,95	304,49	396,83	442,67
2003 01	312,01	346,52	440,92	489,70
2003 02	376,54	415,00	485,01	534,55
2003 03	322,85	353,70	573,20	627,96
2003 04	262,41	288,11	573,20	629,33
2003 05	281,63	309,72	518,08	569,75
2003 06	291,07	319,74	462,97	508,58
2003 07	275,71	302,55	418,87	459,65
2003 08	286,31	312,99	418,87	457,90
2003 09	271,54	295,88	440,92	480,44
2003 10	288,97	315,21	429,90	468,94
2003 11	284,47	311,15	440,92	482,26
2003 12	327,71	358,83	462,97	506,93
2004 01	384,87	419,37	523,59	570,52
2004 02	342,98	371,72	611,78	663,03
2004 03	306,24	329,77	677,91	730,01
2004 04	316,72	339,97	677,91	727,68
2004 05	353,37	377,10	677,91	723,44
2004 06	350,46	372,81	677,91	721,16
2004 07	387,66	413,04	661,38	704,68
2004 08	437,65	466,05	661,38	704,31
2004 09	417,98	444,18	716,50	761,39
2004 10	472,52	499,50	771,61	815,67
2004 11	450,67	476,15	859,79	908,41
2004 12	404,98	429,45	936,96	993,58
2005 01	384,36	406,73	936,96	991,49
2005 02	395,75	416,39	992,07	1.043,79
2005 03	457,52	477,64	947,98	989,66
2005 04	446,30	462,81	914,91	948,76
2005 05	415,61	431,43	782,63	812,42
2005 06	426,39	442,40	694,45	720,51
2005 07	437,64	451,97	716,50	739,96
2005 08	489,32	502,78	760,59	781,50
2005 09	589,08	597,97	870,82	883,96
2005 10	592,18	599,91	1.091,28	1.105,52
2005 11	520,47	531,54	1.091,28	1.114,47
2005 12	550,90	564,89	981,05	1.005,97
2006 01	517,61	526,75	881,84	897,40
2006 02	480,76	488,27	992,07	1.007,55
2006 03	481,44	486,26	1.003,09	1.013,13
2006 04	529,10	529,89	1.003,09	1.004,59
2006 05	542,52	540,65	1.058,21	1.054,55
2006 06	571,70	568,60	1.124,35	1.118,25
2006 07	605,33	600,27	1.036,16	1.027,51
2006 08	590,68	584,60	1.102,30	1.090,95
2006 09	525,78	522,93	1.146,39	1.140,18

2006 10	485,23	485,23	1.058,21	1.058,21
2006 11	493,38	494,11	859,79	861,07
2006 12	503,29	503,29	859,79	859,79
2007 01	465,69	464,27	912,26	909,49
2007 02	509,70	505,44	970,02	961,93
2007 03	540,21	530,86	970,02	953,25
2007 04	573,73	560,16	1.058,21	1.033,19
2007 05	599,69	581,96	1.146,39	1.112,49
2007 06	593,26	576,33	1.096,79	1.065,47

9.2 Séries de preços do mercado futuro de propano

Dia	Tempo até o vencimento (em meses)	Preço no Mercado Futuro (em US\$/Ton)
31/1/1990	6	154,11
28/2/1990	5	126,42
30/3/1990	4	125,90
30/4/1990	8	124,07
31/5/1990	8	127,47
29/6/1990	7	141,05
31/7/1990	8	162,99
31/8/1990	7	190,15
28/9/1990	8	240,30
30/10/1990	7	171,09
30/11/1990	8	172,39
31/12/1990	8	172,39
31/1/1991	8	133,21
28/2/1991	8	146,27
28/3/1991	11	170,82
30/4/1991	10	170,04
31/5/1991	9	166,38
28/6/1991	11	134,78
31/7/1991	12	143,66
30/8/1991	11	142,62
30/9/1991	10	147,58
30/10/1991	9	151,50
29/11/1991	13	198,51
31/12/1991	12	167,17
31/1/1992	12	161,94
28/2/1992	11	161,94
31/3/1992	14	141,05
30/4/1992	13	141,05
29/5/1992	12	146,27
30/6/1992	12	146,27
31/7/1992	11	151,50
31/8/1992	10	156,72
30/9/1992	9	166,12
30/10/1992	8	156,20
30/11/1992	7	151,50
31/12/1992	8	155,15
29/1/1993	9	164,56
26/2/1993	3	167,17
31/3/1993	11	183,88
30/4/1993	12	179,18
28/5/1993	11	176,57
30/6/1993	12	176,83
30/7/1993	11	158,03
31/8/1993	12	158,29
30/9/1993	11	156,72
29/10/1993	10	147,32
30/11/1993	12	137,13
30/12/1993	12	129,29

31/1/1994	9	141,05
28/2/1994	8	147,58
31/3/1994	8	150,19
29/4/1994	8	161,94
31/5/1994	9	156,98
30/6/1994	8	161,42
29/7/1994	10	156,72
31/8/1994	12	152,54
30/9/1994	11	152,54
28/10/1994	12	162,47
30/11/1994	11	167,95
30/12/1994	10	163,25
31/1/1995	12	162,99
28/2/1995	12	160,64
31/3/1995	12	159,33
28/4/1995	12	168,47
31/5/1995	11	161,42
30/6/1995	11	161,94
31/7/1995	12	159,85
31/8/1995	12	159,33
29/9/1995	12	160,90
30/10/1995	12	158,55
30/11/1995	12	159,85
29/12/1995	12	166,38
31/1/1996	12	166,91
28/2/1996	12	171,09
29/3/1996	12	172,91
30/4/1996	11	180,23
31/5/1996	11	175,00
28/6/1996	10	174,48
31/7/1996	11	170,04
30/8/1996	11	179,97
30/9/1996	12	195,90
30/10/1996	12	199,82
27/11/1996	12	201,12
31/12/1996	12	199,56
31/1/1997	12	202,69
28/2/1997	12	203,74
31/3/1997	12	189,63
30/4/1997	12	183,36
30/5/1997	12	182,84
30/6/1997	12	177,88
31/7/1997	12	180,49
29/8/1997	12	184,93
30/9/1997	12	187,54
30/10/1997	12	185,97
26/11/1997	11	174,48
31/12/1997	12	173,70
30/1/1998	12	164,56
27/2/1998	12	158,81
31/3/1998	12	157,76
30/4/1998	12	160,38

29/5/1998	11	146,53
30/6/1998	12	140,53
31/7/1998	11	135,04
31/8/1998	10	128,51
30/9/1998	9	135,04
30/10/1998	12	139,74
30/11/1998	12	124,33
31/12/1998	12	124,59
29/1/1999	12	129,29
26/2/1999	12	128,77
31/3/1999	12	143,40
30/4/1999	11	158,29
28/5/1999	10	156,72
30/6/1999	9	181,27
30/7/1999	8	200,60
31/8/1999	8	199,82
30/9/1999	10	186,76
29/10/1999	12	183,88
30/11/1999	12	187,54
30/12/1999	11	190,15
31/1/2000	10	216,01
28/2/2000	11	234,04
31/3/2000	10	242,92
28/4/2000	9	246,83
31/5/2000	8	298,81
30/6/2000	9	302,99
31/7/2000	8	277,39
31/8/2000	8	286,80
29/9/2000	7	280,79
30/10/2000	6	280,27
30/11/2000	12	262,51
29/12/2000	12	259,89
31/1/2001	12	292,54
28/2/2001	12	295,16
30/3/2001	12	281,05
30/4/2001	12	275,57
31/5/2001	12	254,67
29/6/2001	12	208,96
31/7/2001	12	228,55
30/8/2001	12	212,09
28/9/2001	12	198,51
30/10/2001	12	189,37
30/11/2001	12	171,09
31/12/2001	12	181,01
31/1/2002	12	169,78
28/2/2002	12	182,84
28/3/2002	12	227,24
30/4/2002	12	229,86
31/5/2002	12	212,88
28/6/2002	12	208,96
31/7/2002	12	214,18
30/8/2002	12	240,30

30/9/2002	12	239,00
30/10/2002	12	231,16
27/11/2002	12	225,68
31/12/2002	12	251,54
31/1/2003	12	269,04
28/2/2003	12	327,81
31/3/2003	12	266,42
30/4/2003	12	262,51
30/5/2003	12	295,16
30/6/2003	12	283,40
31/7/2003	12	262,51
29/8/2003	12	272,95
30/9/2003	12	258,59
30/10/2003	12	244,22
26/11/2003	12	253,36
31/12/2003	12	283,40
30/1/2004	12	288,63
27/2/2004	12	300,38
31/3/2004	12	299,60
30/4/2004	11	330,42
28/5/2004	12	334,34
30/6/2004	12	330,42
30/7/2004	11	355,23
31/8/2004	12	336,69
30/9/2004	12	382,66
29/10/2004	12	411,39
30/11/2004	12	400,94
30/12/2004	12	360,46
31/1/2005	12	373,52
28/2/2005	12	423,67
31/3/2005	12	466,24
29/4/2005	12	446,65
31/5/2005	12	425,76
30/6/2005	12	447,70
29/7/2005	12	468,85
31/8/2005	12	558,97
30/9/2005	12	600,76
28/10/2005	12	566,80
30/11/2005	12	502,81
30/12/2005	12	510,65
31/1/2006	12	514,56
28/2/2006	12	494,45
31/3/2006	12	535,72
28/4/2006	12	570,46
31/5/2006	12	562,89
30/6/2006	12	626,88
31/7/2006	12	626,88
31/8/2006	12	608,60
29/9/2006	12	515,87
30/10/2006	12	483,22
30/11/2006	12	509,34
29/12/2006	12	488,44

31/1/2007	11	501,50
28/2/2007	12	532,85
30/3/2007	12	577,25
30/4/2007	11	607,29
31/5/2007	12	547,21
29/6/2007	12	572,03

9.3 Fluxo de Caixa da Unidade Separadora de Propeno (sem flexibilidade) em US\$ milhões

	vpl em 2007	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
RESULTADO OPERACIONAL	388,98	0,00	0,00	0,00	0,00	29,73	29,55	29,37	29,19	29,02	28,84	28,66	28,49	28,31
Ajuste de CUSTOS OPERACIONAIS	5,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37
CPMF SOBRE CUSTOS	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
DEPRECIACÃO TOTAL	44,34	0,00	0,00	0,00	0,00	7,42	7,10	6,79	6,50	6,22	5,95	5,69	5,45	5,21
LUCRO TRIBUTÁVEL	339,59	0,00	0,00	0,00	0,00	21,94	22,08	22,21	22,32	22,43	22,52	22,60	22,67	22,73
IR	84,90	0,00	0,00	0,00	0,00	5,49	5,52	5,55	5,58	5,61	5,63	5,65	5,67	5,68
CS	30,56	0,00	0,00	0,00	0,00	1,98	1,99	2,00	2,01	2,02	2,03	2,04	2,04	2,05
CPMF SOBRE IR E CS	0,44	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
LUCRO LÍQUIDO	223,69	0,00	0,00	0,00	0,00	14,46	14,55	14,63	14,71	14,77	14,83	14,89	14,93	14,97
RETORNO DA DEPRECIACÃO	44,34	0,00	0,00	0,00	0,00	7,42	7,10	6,79	6,50	6,22	5,95	5,69	5,45	5,21
INVESTIMENTO TOTAL	84,62	1,18	1,84	22,16	60,12	9,44	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
INVESTIMENTO - MATERIAIS	43,60	0,00	0,00	13,70	31,43	3,70								
INVESTIMENTO - SERVIÇOS	41,02	1,18	1,84	8,46	28,69	5,74								
TRIBUTOS RECUPERÁVEIS	14,79	0,10	0,16	4,25	10,58	1,45	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
PAGAMENTO DE PIS/COFINS	7,49	0,10	0,16	1,96	5,32	0,84	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
PAGAMENTO DE ICMS	7,29	0,00	0,00	2,29	5,26	0,62	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
TRIBUTOS NÃO RECUPERÁVEIS	4,41	0,02	0,04	1,30	3,15	0,42	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
INVESTIMENTO DEPRECIÁVEL TOTAL	69,83	1,08	1,67	17,91	49,54	7,98	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
RECUPERAÇÃO DE PIS/COFINS TOTAL	6,06	0,00	0,00	0,00	0,00	2,00	1,92	1,85	1,78	1,78	1,78	1,78	1,78	1,78
RETORNO ICMS S/ INVESTIMENTO	6,14	0,00	0,00	0,54	1,76	1,84	1,77	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74
CPMF SOBRE INVESTIMENTO	0,32	0,00	0,01	0,08	0,23	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
FLUXO DE CAIXA LÍQUIDO	195,28	(1,19)	(1,84)	(21,70)	(58,59)	16,24	25,34	24,51	23,11	20,99	20,78	20,58	20,38	20,19

	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	2032	2033	2034	2035
RESULTADO OPERACIONAL	28,14	27,97	27,80	27,63	27,45	27,29	27,12	26,95	26,78	26,62	26,45	26,29	26,12	25,96	25,80	25,64	25,48
Ajuste de CUSTOS OPERACIONAIS	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,00
CPMF SOBRE CUSTOS	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
DEPRECIACÃO TOTAL	4,99	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
LUCRO TRIBUTÁVEL	22,78	27,60	27,43	27,25	27,08	26,91	26,75	26,58	26,41	26,25	26,08	25,92	25,75	25,59	25,43	25,27	25,11
IR	5,69	6,90	6,86	6,81	6,77	6,73	6,69	6,64	6,60	6,56	6,52	6,48	6,44	6,40	6,36	6,32	6,28
CS	2,05	2,48	2,47	2,45	2,44	2,42	2,41	2,39	2,38	2,36	2,35	2,33	2,32	2,30	2,29	2,27	2,25
CPMF SOBRE IR E CS	0,03	0,04	0,04	0,04	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
LUCRO LÍQUIDO	15,00	18,18	18,07	17,95	17,84	17,73	17,62	17,51	17,40	17,29	17,18	17,07	16,96	16,86	16,75	16,64	16,53
RETORNO DA DEPRECIACÃO	4,99	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
INVESTIMENTO TOTAL																	
INVESTIMENTO - MATERIAIS																	
INVESTIMENTO - SERVIÇOS																	
TRIBUTOS RECUPERÁVEIS																	
PAGAMENTO DE PIS/COFINS																	
PAGAMENTO DE ICMS																	
TRIBUTOS NÃO RECUPERÁVEIS																	
INVESTIMENTO DEPRECIÁVEL TOTAL																	
RECUPERAÇÃO DE PIS/COFINS TOTAL																	
RETORNO ICMS S/ INVESTIMENTO																	
CPMF SOBRE INVESTIMENTO																	
FLUXO DE CAIXA LÍQUIDO	20,00	18,18	18,07	17,95	17,84	17,73	17,62	17,51	17,40	17,29	17,18	17,07	16,96	16,86	16,75	16,64	16,53

TIR	23,04%
VPL em 2007	195,28
VP em 2007	252,95
I em 2007	57,67

9.4 Código VBA (Visual Basic for Applications) da Aproximação Analítica de Bjerksund & Stensland (1993) para Opção Americana (Valor da Opção e Valor do Gatilho)

Option Explicit

Option Base 1

' Option Explicit means that all variables MUST BE declared

' Option Base 1 means that arrays start with 1 instead the default 0

Function Vcrit(Inv As Double, r As Double, d As Double, sig As Double, T As Double) As Double

Dim Bperp As Double

Dim B0 As Double

Dim ht As Double

Dim Beta As Double

If d <= 0 Then

Vcrit = "Earlier exercise is not optimal"

Else

If T <= 0 Then

Vcrit = Inv

Else

Beta = (0.5 - ((r - d) / (sig ^ 2))) + Sqr((((r - d) / (sig ^ 2)) - 0.5) ^ 2) + (2 * r / (sig ^ 2))

Bperp = (Beta / (Beta - 1)) * Inv

B0 = Application.max(Inv, (r / d) * Inv)

ht = -((r - d) * T + 2 * sig * Sqr(T)) * B0 / (Bperp - B0)

Vcrit = B0 + (Bperp - B0) * (1 - Exp(ht))

End If

End If

End Function

Function BlackScholesMerton(V As Double, Inv As Double, r As Double, _
d As Double, sig As Double, T As Double) As Double

' Calculates the European Call Option in a general framework (allows dividend yield, Merton)

Dim h1 As Double

Dim h2 As Double

h1 = (Log(V / Inv) + ((r - d) + sig ^ 2 / 2) * T) / (sig * Sqr(T))

h2 = h1 - sig * Sqr(T)

BlackScholesMerton = V * Exp(-d * T) * Application.NormSDist(h1) - _

Inv * Exp(-r * T) * Application.NormSDist(h2)

End Function

Function BjStAmericanCall(V As Double, Inv As Double, T As Double, _
r As Double, d As Double, sig As Double) As Double

Dim Vcritical As Double

Dim alpha As Double

Dim Beta As Double

```

If d <= 0 Then '// Equal to European Call
  BjStAmericanCall = BlackScholesMerton(V, Inv, r, d, sig, T)
Else
  Beta = (0.5 - ((r - d) / (sig ^ 2))) + Sqr((((r - d) / (sig ^ 2)) - 0.5) ^ 2) + (2 * r / (sig ^
2)))
  Vcritical = Vcrit(Inv, r, d, sig, T)
  alpha = (Vcritical - Inv) * Vcritical ^ (-Beta)
  If V >= Vcritical Then
    BjStAmericanCall = V - Inv
  Else
    BjStAmericanCall = alpha * V ^ Beta - alpha * prob(V, T, Beta, Vcritical,
Vcritical, r, d, sig) +
    prob(V, T, 1, Vcritical, Vcritical, r, d, sig) - prob(V, T, 1, Inv, Vcritical, r, d, sig)
    -
    Inv * prob(V, T, 0, Vcritical, Vcritical, r, d, sig) + Inv * prob(V, T, 0, Inv,
Vcritical, r, d, sig)
  End If
End If
End Function

Function prob(V As Double, T As Double, conta As Double, h As Double, Vcrit As Double,
-
r As Double, d As Double, sig As Double) As Double

  Dim lambda As Double
  Dim kappa As Double
  Dim b As Double

  lambda = (-r + (conta * (r - d)) + 0.5 * conta * (conta - 1) * sig ^ 2) * T
  b = -(Log(V / h) + ((r - d) + (conta - 0.5) * sig ^ 2) * T) / (sig * Sqr(T))
  kappa = 2 * (r - d) / (sig ^ 2) + (2 * conta - 1)
  prob = Exp(lambda) * V ^ conta * (Application.NormSDist(b) - (Vcrit / V) ^ kappa * _
Application.NormSDist(b - 2 * Log(Vcrit / V) / (sig * Sqr(T))))
End Function

```

Apêndice – Demonstração da obtenção da equação discreta de simulação de preço

Pelo Lema de Itô, uma função $F(P,t)$ com apenas uma variável estocástica de preço P , tem a seguinte expansão:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial P} dP + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial P^2} (dP)^2 + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

Onde $(dP)^2$ é uma função do tipo $f(P, t) dt$ que depende do processo estocástico escolhido para P . Se essa variável estocástica P seguir um MGB, conforme abaixo:

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz$$

O termo $(dP)^2$ é igual a:

$$(dP)^2 = \alpha^2 P^2 (dt)^2 + 2\alpha\sigma P^2 dt dz + \sigma^2 P^2 (dz)^2$$

Como os termos de ordem $(dt)^2$ e $(dt)^{3/2}$ (como $dt dz$) são desprezíveis frente a dt e como pode-se provar que a variação quadrática do movimento Browniano é finita, determinística e igual ao intervalo de tempo (prova: ver notas de aula de Dias), isto é, $(dz)^2=dt$,

$$(dP)^2 = \sigma^2 P^2 dt$$

Que é uma função no formato $f(P,t) dt$. Uma vez em posse destes resultados, aplicando o lema de Itô para a transformação logarítmica em P , uma função apenas de P , vem:

$$F(P) = p = \ln(P)$$

As derivadas parciais a serem aplicadas no Lema de Itô são as seguintes:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0 ; \frac{\partial p}{\partial P} = \frac{1}{P} ; \frac{\partial^2 p}{\partial P^2} = -\frac{1}{P^2}$$

Aplicando o Lema de Itô para $p(P)$:

$$dp = \left(\frac{1}{P}\right)dP - 0,5\left(\frac{1}{P^2}\right)(dP)^2$$

$$dp = \alpha dt + \sigma dz - 0,5\sigma^2 dt$$

$$dp = (\alpha - 0,5\sigma^2)dt + \sigma dz$$

Recordando que $dz = \varepsilon_{(t)} \cdot \sqrt{dt}$

$$dp = (\alpha - 0,5\sigma^2)dt + \sigma \varepsilon_{(t)} \cdot \sqrt{dt}$$

Onde dp é a taxa de variação no logaritmo do preço entre o instante zero e um instante futuro $0 + dt$, isto é, $dp = \ln P_{dt} - \ln P_0 = \ln(P_{dt}/P_0)$. Assim, o logaritmo dos preços segue um movimento aritmético Browniano (MAB). Conforme Kloeden & Platen (1992, tópico 4.4, "Some explicitly solvable SDEs"), o MAB tem solução explícita e assim temos discretização exata (vale para grandes intervalos de tempo):

$$\ln(P_t / P_0) = (\alpha - 0,5\sigma^2)\Delta t + \sigma \varepsilon_{(t)} \cdot \sqrt{\Delta t}$$

Como para $\Delta t = t - 0 = t$:

$$\ln(P_t / P_0) = (\alpha - 0,5\sigma^2)t + \sigma \varepsilon_{(t)} \cdot \sqrt{t}$$

Aplicando o operador exponencial para recuperar a operacionalidade da simulação, atuando diretamente nos valores dos preços observados, temos a equação (16):

$$P_t = P_0 \cdot \exp\{(\alpha - 0,5\sigma^2)t + \sigma \cdot N(0,1) \cdot \sqrt{t}\} \quad (16)$$