COLEÇÃO APRENDER
MATEMÁTICA

MATEMÁTICA

para o ensino médio – volume III

MANUAL DO PROFESSOR

Miguel Jorge
Mestre em Educação Matemática pela USU-RJ
Bacharel e licenciado em Matemática pela Uerj
Professor da Fundação Getulio Vargas – FGV-RJ
Professor do Colégio Santo Inácio – Rio de Janeiro – RJ
Engenheiro eletricista com especialização em Engenharia Econômica pela UFRJ

Ralph Costa Teixeira
Doutor em Matemática pela Universidade de Harvard, EUA
Mestre em Matemática pelo Impa-RJ
Engenheiro de Computação pelo IME-RJ
Professor adjunto da UFF-RJ

Thales do Couto Filho
Mestre em Educação Matemática pela USS-RJ
Bacharel e licenciado em Matemática pela Sesni-RJ
Engenheiro mecânico pela UFRJ
Professor da PUC-RJ
Professor do Colégio Santo Inácio, Colégio Zaccaria e da rede pública estadual do Rio de Janeiro

Felipe Ferreira da Silva
Licenciado em Matemática pela PUC-RJ
Professor do Colégio Santo Inácio e da Escola SESC de Ensino Médio – Rio de Janeiro – RJ

EDITORA do BRASIL

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

SUMÁRIO

1 – O Ensino da Matemática no Ensino Médio

Sabemos que, na atual conjuntura, o ensino da Matemática contempla os múltiplos aspectos envolvidos no binômio ensino-aprendizagem e, para tal, consideramos a experiência da equipe de autores e sugestões de professores e alunos de várias escolas do Brasil, enviadas por e-mail ou feitas durante os muitos contatos em palestras e oficinas promovidas pela Fundação Getulio Vargas – Ensino Médio, na cidade do Rio de Janeiro.

Por outro lado, buscamos incorporar as novas tendências em Educação Matemática, que têm sido usadas para desmistificar a Matemática como uma linguagem hermética, tornado-a, cada vez mais, um instrumento de serviço para a sociedade e para o mundo de uma forma geral.

É nosso propósito que esta obra permita formar cidadãos capazes de: ler, interpretar e analisar informações, muitas vezes apresentadas em gráficos e tabelas, de forma crítica, com autonomia; tomar decisões, a fim de resolver problemas; criar; aprimorar seus conhecimentos; que sejam capazes, enfim, de exercitar o pensar.

Podemos verificar o que os *PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, de 2002, p. 9, nos apresentam com relação à formação do estudante:

"A intenção de completar a formação geral do estudante nessa fase implica, entretanto, uma ação articulada, no interior de cada área e no conjunto das áreas. Essa ação articulada não é compatível com um trabalho solitário, definido independentemente no interior de cada disciplina, como acontecia no antigo ensino de segundo grau – no qual se pressupunha outra etapa formativa na qual os saberes se interligariam e, eventualmente, ganhariam sentido. Agora, a articulação e o sentido dos conhecimentos devem ser garantidos já no Ensino Médio.

No mundo atual, de tão rápidas transformações e de tão difíceis contradições, estar formado para a vida significa mais do que reproduzir dados, denominar classificações ou identificar símbolos. Significa:

- saber se informar, comunicar-se, argumentar, compreender e agir;
- enfrentar problemas de diferentes naturezas;
- participar socialmente, de forma prática e solidária;
- ser capaz de elaborar críticas ou propostas; e,
- especialmente, adquirir uma atitude de permanente aprendizado."

Assim, com esse propósito, é que percebemos que a Matemática tem um papel importante para a formação do pensamento. Por isso, ela não pode ser vista como algo pronto, pois está em evolução a cada instante e o aluno deve ser incentivado a fazer as descobertas e a saborear os novos saberes com desenvoltura.

Pretendemos, com esta obra, que os alunos possam adquirir uma formação sólida em Matemática nesse nível do ensino, que exige métodos de aprendizado compatíveis, ou seja, condições efetivas para que os alunos possam:

- comunicar-se e argumentar;
- defrontar-se com problemas, compreendê-los, enfrentá-los e resolvê-los;
- participar de um convívio social que lhes dê oportunidades de se realizarem como cidadãos;
- fazer escolhas e proposições;
- tomar gosto pelo conhecimento, aprender a aprender.

2 – Objetivos da coleção

Com esta obra, pretendemos dar a oportunidade para que o estudante possa desenvolver suas habilidades e competências em Matemática, permitindo o aprofundamento e a capacidade de **representação** e **comunicação**; **investigação** e **compreensão**; **contextualização sociocultural**, objetivos que convergem com a área de Linguagens, Códigos e suas Tecnologias – sobretudo no que se refere ao desenvolvimento da representação, da informação e da comunicação de fenômenos e processos – e com a área de Ciências Humanas e suas Tecnologias – especialmente ao apresentar as ciências e técnicas como construções históricas, com participação permanente no desenvolvimento social, econômico e cultural, conforme propõem os *PCN+* de 2002.

Para isso, você, professor, é nosso aliado. Queremos convocá-lo para essa parceria, pois, ao nosso ver, temos de romper com o ensino tradicional, a escola não pode ficar restrita ao ensino de natureza enciclopédica (**cumprir o programa** × **ensinar o programa**).

Espera-se, com esta obra, que os alunos:

- saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano;
- saibam usar a Matemática para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento;
- compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações;
- percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído;
- saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

Visto que as disciplinas Biologia, Física, Química e Matemática fazem parte da área Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, segundo os PCNEM, pretende-se, nesta obra, sempre que possível, realçar o aspecto interdisciplinar de seus conteúdos básicos, enfatizando situações do cotidiano e buscando aferir, de um conjunto de competências fundamentais, aquelas que estejam relacionadas tanto com a habilitação dos candidatos para progredir em estudos mais avançados, quanto com a estimulação do desenvolvimento da capacidade de análise de situações e de tomada de decisões.

A abordagem proposta pelos eixos interdisciplinares possibilita uma avaliação do conhecimento que não se restrinja, apenas, ao conteúdo disciplinar especializado, favorecendo a ampliação da capacidade de compreensão e interpretação dos fenômenos naturais como um todo. Desse modo, os conteúdos que serão apresentados não se esgotam nesta obra. A tendência é que se construam situações mais a frente pelo trabalho lado a lado do aluno-professor e professor-aluno, construindo de forma ampla os demais fenômenos interdisciplinares no Ensino Médio, sendo a Matemática ferramenta indispensável para as aplicações fundamentais da Ciência.

Assim, é nosso propósito que o aluno tenha domínio nos seguintes temas da Matemática:

- Números e operações
  - Proporcionar aos alunos uma diversidade de situações, de forma a capacitá-los a resolver problemas do cotidiano:
    - ler faturas de consumo de água, luz e telefone; decidir sobre as vantagens/desvantagens de uma compra à vista ou a prazo; usar calculadora e escrever números em notação científica.

- Proporcionar aos alunos uma diversidade de problemas geradores da necessidade de ampliação dos campos numéricos e suas operações, dos números naturais para contar aos números reais para medir.
- Permitir ao aluno a compreensão das estruturas dos algoritmos, prevenindo recorrentes erros na resolução de problemas que envolvam manipulações algébricas.

• Funções
- Iniciar o estudo de funções com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações:
  - idade e altura; área e raio do círculo; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo etc.
- Prosseguir com os diferentes modelos que devem ser objeto de estudo na escola – modelos linear, quadrático e exponencial, aplicados a:
  - queda livre de um corpo; crescimento de uma colônia de bactérias; quantidade de medicamento na corrente sanguínea; rendimento financeiro; consumo doméstico de energia elétrica etc.

• Funções especiais
- Destacar o contraste entre crescimento linear e crescimento exponencial.
- Evitar exageros com logaritmos.
- Explorar funções polinomiais simples de grau maior do que 2.
- Anteceder o estudo de funções trigonométricas (enfatizar seu uso como modelo para funções periódicas) com o estudo da trigonometria no triângulo retângulo e nos demais triângulos.

• Geometria
- Usar geometria analítica como articulação entre geometria e álgebra, trabalhando as duas vias:
  - entendimento de figuras geométricas, via equações;
  - entendimento de equações, via figuras geométricas.
- Evitar memorização excessiva e introdução de fórmulas não baseadas em raciocínio lógico.
- Introduzir a noção de vetor.
- Associar sistema linear à sua interpretação geométrica.

• Tratamento da informação e Probabilidade
- Aprimorar as habilidades adquiridas no Ensino Fundamental no que se refere à coleta, à organização e à representação de dados.
- Intensificar a compreensão sobre as medidas de posição (média, moda e mediana) e as medidas de dispersão (desvio médio, variância e desvio padrão).
- Entender combinatória como uma organização de técnicas de contagem, principalmente por meio do princípio multiplicativo e sua associação com árvores de enumeração.
- Destacar probabilidade como ferramenta para modelar incerteza e enfatizar o espírito crítico na construção de espaços equiprováveis.

• Tecnologias
- Usar a calculadora como instrumento para promover a aprendizagem.
- Usar programas de computador (ou calculadoras) capazes de construir gráficos.
- Usar geometria dinâmica (para estimular a experimentação e o raciocínio algorítmico).
- Usar planilhas eletrônicas (para fórmulas, estudo de padrões e simulação probabilística).

Assim é que, com a experiência da equipe de autores e de anos de testagem dessa coleção, podemos afirmar, será um importante auxílio para o professor, que visa dar uma melhor apresentação dos assuntos a serem ensinados.

3 – Estrutura da coleção e conteúdos trabalhados

Esta coleção foi concebida com a aplicação dos conceitos modernos da Educação Matemática, sem perder de vista o rigor dos conceitos matemáticos em toda a obra. Chamamos a sua atenção para os destaques que aparecem nas margens de algumas páginas, pois devem ser apresentados aos alunos como complemento de conceitos ou como forma de enriquecer os assuntos de cada capítulo.

A coleção está dividida em três volumes, de tal modo que o volume I compreende a aplicação da lógica e conjuntos, abordados de forma clara e objetiva, para se apresentar o conceito de função e os seus tipos. Nesse campo, nos preocupamos em apresentar as características de cada uma das funções, como a função afim, a linear, a modular, a quadrática, a exponencial e a logarítmica, dando ênfase às aplicações de forma concreta. Também é valorizada a trigonometria dos triângulos, aplicando-a no ciclo trigonométrico.

Já no volume II, apresentamos as progressões e a aplicação da matemática financeira, a análise combinatória e a probabilidade, assim como o Binômio de Newton. Valorizamos o ensino da geometria, agrupando os grandes assuntos, ou seja, prisma e cilindro, assim como pirâmide e cone, e um estudo completo da esfera e dos poliedros.

No volume III, apresentamos um novo enfoque para o ensino da geometria analítica, pois a desenvolvemos com o tratamento vetorial, uma grande modernidade, visto que os conceitos desse tema ainda não foram tratados com essa visão. Seguindo esse ponto de vista, haverá a contribuição para o amadurecimento desses conceitos pelos estudantes e a facilidade para acompanhar um curso superior. Ainda nesse volume, apresentamos os números complexos, os polinômios e as equações de forma objetiva.

A nossa recomendação é que o professor possa explorar a coleção utilizando-a da melhor forma possível, entretanto devem ser observados os seguintes procedimentos:

- A exposição dos conceitos conforme são apresentados na coleção, dando tempo ao aluno para que ele possa ler e discuti-los, com ou sem ajuda do professor. Assim, o estudante poderá interpretá-los e construir a autonomia no processo de aprendizagem.
- Os exemplos e exercícios resolvidos devem ser estudados pelos alunos, mas não devem servir de modelos que se repetem sem uma lógica, pois são contribuições que irão permitir a formação do conhecimento e sua aplicação nos exercícios seguintes.
- A coleção tem uma variedade e uma quantidade considerável de exercícios e problemas para que o estudante possa consolidar seu conhecimento, resolvendo-os com segurança e podendo escolher entre os mais interessantes. Cabe ao professor instigar e fazer perguntas sobre cada situação proposta.
- No final de cada capítulo da coleção, há uma seção de exercícios de revisão. São testes para a verificação do que foi efetivamente aprendido sobre o capítulo.

Assim, esperamos que o ensino da Matemática possa contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.

4 – Bibliografia indicada

ABRANTES, Paulo. *O trabalho de projeto e a relação dos alunos com a Matemática: uma experiência de Projeto Mat. 789*. Tese (Doutorado). Lisboa: APM, 1994.

ADLER, Irving. *Matemática e desenvolvimento mental*. São Paulo: Cultrix, 1968.

AEBLI, Hans. *Didática psicológica:* aplicação à didática da psicologia de Jean Piaget. Rio de Janeiro: Nacional, 1971.

ÁVILA, Geraldo. *Introdução às funções e à derivada*. São Paulo: Atual, 1994.

BASSANEZI, Rodney C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher/Edusp, 1996.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: MEC, 2002.

______. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *PCN+*: Ensino Médio – Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

______. Secretaria de Educação Básica. *Explorando o ensino da Matemática*. Brasília: MEC, 2004. Artigos: v. 1, 2 e 3.

CÂMARA, Marcelo. Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem em Matemática. *Educação Matemática em Revista*. São Paulo: Sbem, n. 12, 2002.

______. Um exemplo de situação-problema: o problema do bilhar. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo: Sbem, n. 50, 2002.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARRAHER, Terezinha N. et al. *Aprender pensando*. Rio de Janeiro: Vozes, 1989.

______; CARRAHER, David W.; SCHLIEMANN, Analúcia. *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez, 1988.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. *Metodologia do ensino da Matemática*. São Paulo: Cortez, 1994.

CHENALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. *Estudar Matemática:* o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

COLEÇÃO *Matemática: Aprendendo e Ensinando*. Vários autores. São Paulo: Atual/MIR, 1994. Vários volumes.

COLEÇÃO *O Prazer da Matemática*. Vários autores. Lisboa: Gradiva. Vários volumes.

COLEÇÃO *Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula*. Vários autores. São Paulo: Atual, 1992. Vários volumes.

COUTINHO, Cileda de Q. S. *Introdução ao conceito de probabilidade:* uma visão frequentista. São Paulo: Educ, 1996.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação:* reflexões sobre Educação e Matemática. São Paulo: Summus/Unicamp, 1986.

______. *Educação Matemática:* da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. *O sonho de Descartes*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1988.

______. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

EDUCAÇÃO Matemática em Revista. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Sbem. Semestral.

In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE INFORMÁTICA EDUCATIVA 4, 1998, Brasília. *A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados*. Brasília, 1998, v. 1, p. 25-35.

GUELLI, Oscar. Coleção Contando a História da Matemática. São Paulo: Ática, 1998. Vários volumes.

IFRAH, Georges. *Os números:* a história de uma grande invenção. São Paulo: Globo, 2004.

KOETHE, S. *Pensar é divertido*. São Paulo: Herder, 1977.

KUENZER, Acácia Z. (Org.). *Ensino Médio:* construindo uma proposta para os que vivem do trabalho. São Paulo: Cortez, 2000.

______. O Ensino Médio agora é para a vida: entre o pretendido, o dito e o feito. *Revista Educação & Sociedade,* Campinas: Cedes, ano XXI, n. 70, 2000.

LIMA, Elon L. *Coordenadas no espaço*. Rio de Janeiro: Sbem, 2001. (Coleção do Professor de Matemática).

______. *Medida e forma em geometria*. Rio de Janeiro: Sbem, 2000. (Coleção do Professor de Matemática).

______; CARVALHO, Paulo Cezar. *Coordenadas no plano*. Rio de Janeiro: Sbem, 2001. (Coleção do Professor de Matemática).

______; CARVALHO, Paulo Cezar; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sbem, 2000, v. 1, 2 e 3. (Coleção do Professor de Matemática).

______. *Temas e problemas*. Rio de Janeiro: Sbem, 2001. (Coleção do Professor de Matemática).

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). *Aprendendo e ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994.

LOPES, Celi Espasandin. *A probabilidade e a estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular.* Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação da Unicamp, Campinas, 1998, p. 125.

______; NACARATO, Adair (Org.). *Escritas e leituras na educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MACHADO, Nilson José. *Epistemologia e didática*. São Paulo: Cortez, 1996.

MIORIM, Maria Ângela. *Introdução à história da educação matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

MORIN, Edgar. *A cabeça bem-feita:* repensar a reforma, reformar o pensamento. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2000.

NETO, Ernesto Rosa. *Didática da Matemática*. São Paulo: Ática, 1994.

OBERMAIR, Gilbert. *Quebra-cabeças, truques e jogos com palitos de fósforo*. Rio de Janeiro: Ediouro, 1981.

ONRUBIA, Javier. *A atenção à diversidade no Ensino Médio:* algumas reflexões e alguns critérios psicopedagógicos. Porto Alegre: Artmed, 2002.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1944.

PORTUGAL. Ministério da Educação. Departamento do Ensino Secundário. *Didática da Matemática*: Ensino Secundário. Lisboa, 1997.

PRIMEIRO E SEGUNDO GRAUS – MATEMÁTICA. *Telecurso 2000*. Rio de Janeiro: Rede Globo. Programa de TV.

RAMOS, Marise N. O projeto unitário de Ensino Médio sob os princípios do trabalho, da ciência e da cultura. In: FRIGOTTO, Gaudêncio; CIAVATTA, Maria (Orgs.). *Ensino Médio: ciência, cultura e trabalho*. Brasília: MEC/Semtec, 2004.

RATHS, Louis E. *Ensinar a pensar:* teoria e aplicação. São Paulo: EPU, 1977.

REVISTA do professor de matemática. São Paulo: Sbem. Semestral.

REVISTA Nova Escola. São Paulo: Fundação Victor Civita.

STRUIK, Dirk J. *História concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1989.

TAHAN, Malba. *As maravilhas da Matemática*. Rio de Janeiro: Bloch, 1972.

______. *Matemática divertida e curiosa*. Rio de Janeiro: Record, 1993.

______. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 2001.

______. *Os números governam o mundo*. Rio de Janeiro: Ediouro, 1998.

VEIGA, Ilma P. A. (Org.). *Projeto político-pedagógico da escola*. Campinas: Papirus, 2003. 16. ed.

4.1 – Instituições para contato, cursos e obtenção de publicações

Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática (Caem)
Instituto de Matemática e Estatística (IME) – USP
Rua do Matão, 1 010, bloco B, sala 167
CEP 05508-090 – São Paulo, SP
Tel.: (11) 3091-6160

Centro de Ciências de Minas Gerais (Cecimig)
Faculdade de Educação – UFMG
Avenida Antônio Carlos, 6 227
Caixa Postal 253 – CEP 31270-010 – Belo Horizonte, MG
Tel.: (31) 3409-5338; (031) 3409-5337

Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática (Cempem)
Faculdade de Educação – Unicamp
Rua Bertrand Russell, 801, sala 1 103 – Barão Geraldo
Caixa Postal 6 120 – CEP 13083-970 – Campinas, SP
Tel.: (19) 3788-5587
Fax.: (19) 3289-1463

Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática IGCE – Unesp – Rio Claro
Avenida 24A, 1 515 – Bela Vista
Caixa Postal 178 – CEP 13500-230 – Rio Claro, SP
Telefax: (19) 3534-0123

Departamento de Teoria e Prática de Ensino (Dtpen) – Setor de Educação – UFPR
Rua General Carneiro, 460, Edifício D. Pedro I
CEP 80060-150 – Curitiba, PR
Tel.: (41) 3264-3574 (ramal 2 278)

Faculdade de Educação – Departamento de Metodologia – USP
Avenida da Universidade, 308, bloco B, térreo
CEP 05508-090 – São Paulo, SP
Telefax: (11) 3091-1688

Furb – Departamento de Matemática
Rua Antônio da Veiga, 140 – Victor Konder
Caixa Postal 1 507 – CEP 89010-971 – Blumenau, SC
Telefax: (47) 3321-0463

Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (Gepem)
Universidade Santa Úrsula
Rua Fernando Ferrari, 75, prédio VI, sala 1 105 – Botafogo
CEP 22231-040 – Rio de Janeiro, RJ
Telefax: (21) 2554-2500

Laboratório de Ensino de Matemática – Departamento de Matemática – Centro de Ciências Exatas e da Natureza (CCEN) – UFPE
Avenida Prof. Moares Rego, 1 235
CEP 50670-901 – Recife, PE
Tel.: (81) 2126-8006
Fax: (81) 2126-8118

Laboratório de Ensino de Matemática – Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação (Imecc) – Unicamp
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651 – Barão Geraldo
Caixa Postal 6 065 – CEP 13083-970 – Campinas, SP
Telefax: (19) 3521-5937

Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática – (Leacim) – Ufes – Campus de Goiabeiras
Avenida Fernando Ferrari, s.n. – Goiabeiras
CEP 29060-900 – Vitória, ES
Telefax: (27) 3335-2534

Mestrado em Educação Matemática – PUC-SP
Rua Marquês de Paranaguá, 111, prédio 1, 2º andar – Consolação
CEP 01303-050 – São Paulo, SP
Tel.: (11) 3124-7200 (ramal 7 210)
Fax: (11) 3159-0189

Projeto Fundão – Matemática – Instituto de Matemática – UFRJ
IM/UFRJ-CT, bloco C, sala 108
Caixa Postal 68 530 – CEP 21945-970 – Rio de Janeiro, RJ
Telefax: (21) 2562-7511

Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Sbem) – Departamento de Matemática – Centro de Ciências Exatas e da Natureza (CCEN) – UFPE
Rua Prof. Luiz Freire, s.n., sala 108
CEP 50740-540 – Recife, PE
Tel.: (81) 3272-7563

Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)
Estrada Dona Castorina, 110, sala 109
CEP 22460-320 – Rio de Janeiro, RJ
Tel.: (21) 2529-5073

4.2 – Alguns órgãos governamentais

Ministério da Educação e do Desporto (MEC) – Secretaria de Educação Média e Tecnológica
Esplanada dos Ministérios, bloco L, 3º andar, sala 300
CEP 70047-900 – Brasília, DF
Tel.: (61) 2104-8670
Fax: (61) 2104-9848

Secretaria de Educação a Distância
Esplanada dos Ministérios, bloco L, anexo 1, sala 327
CEP 70047-902 – Brasília, DF
Tel.: 0800-61-6161

Secretaria de Estado da Educação do Rio Grande do Sul – Centro de Ciências do Rio Grande do Sul
Av. Borges de Medeiros, 1 501 – Bairro Praia de Belas
CEP 90119-900 – Porto Alegre, RS
Tel. PABX: (51) 3288-4700

Secretaria de Estado da Educação de São Paulo – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (Cenp)
Praça da República, 53, sala 102 – Centro
CEP 01045-903 – São Paulo, SP
Tel.: (11) 3237-2115

Secretarias de educação estaduais e municipais, provavelmente a Secretaria de Educação do estado em que você mora e também a do seu município mantêm equipes pedagógicas e publicações e oferecem cursos de Matemática a professores. Procure se informar e participar.

4.3 – Sites

- http://www.tvcultura.com/artematematica (*Arte e Matemática: uma série de 13 programas para a TV Cultura*. Fundação Padre Anchieta & TV Escola)
- http://www.somatematica.com.br/emedio.php
- http://www.matematica.com.br
- http://www.edulinks.com.br/Matematica
- http://www.brasilescola.com/matematica
- http://diadematematica.com/modules/xfsection/index.php?category54
- http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/medio.htm
- http://www.edumatec.mat.ufrgs.br

5 – Comentários sobre cada capítulo

5.1 – Vetores

Procuramos inovar neste capítulo, pois apresentamos toda a Geometria Analítica sob um novo enfoque, isto é, com um tratamento vetorial. Por se tratar de uma grande novidade para um livro do Ensino Médio, deve ser bem estudada pelos alunos e apresentada a eles como um recurso matemático que vem para facilitar o ensino desse tópico. Apresentamos os espaços cartesianos $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Sugerimos que sejam dados conforme os assuntos são apresentados no capítulo, pois visam, sobretudo, um encadeamento dos conteúdos de forma a dar segurança e transparência em sua apresentação, facilitando o ingresso dos alunos no Ensino Superior.

Apresentamos o conceito de vetor, o plano cartesiano, algumas das transformações, como a rotação, e o conceito de módulo de um vetor (distância entre dois pontos). Trabalhamos as operações elementares com vetores: a adição, a multiplicação por um escalar e a subtração de vetores. Introduzimos, a ideia de um ponto que divide um segmento numa certa razão, o conceito de vetor unitário (versor de um vetor), os vetores paralelos e a condição de alinhamento de três pontos. Apresentamos também o conceito de centro de massa – ou baricentro – de um triângulo e de baricentro do tetraedro.

5.2 – Produtos de vetores

Iniciamos este capítulo introduzindo o conceito da expressão analítica de um vetor a fim de explorar o produto escalar, cuja interpretação geométrica nos permite encontrar o ângulo entre dois vetores. Também destacamos as bissetrizes dos ângulos das direções de dois vetores e verificamos a condição para que dois vetores sejam perpendiculares e suas aplicações.

Introduzimos o conceito de produto vetorial de dois vetores do $\mathbb{R}^3$ e sua interpretação geométrica, que nos permite encontrar a área de um paralelogramo, de um triângulo e de um polígono. Verificamos, assim, a condição para que dois vetores sejam paralelos e suas aplicações, tais como a distância de um ponto a uma reta ou entre duas retas reversas.

Apresentamos o produto misto que se aplica para três vetores do $\mathbb{R}^3$, cuja interpretação geométrica nos permite encontrar o volume de um prisma de base quadrangular ou de um prisma de base triangular, assim como o volume do tetraedro. Exploramos tais conceitos para apresentarmos a ideia de dependência e independência linear de vetores.

5.3 – Geometria Analítica no plano

Estudamos a reta no $\mathbb{R}^2$ caracterizando que toda equação do 1º grau representa uma reta e que toda reta pode ser representada por uma equação do 1º grau. Apresentamos a reta que passa por dois pontos, assim como a reta que passa por um ponto e é normal a um vetor do $\mathbb{R}^2$. Apresentamos as condições para que uma reta seja paralela a um vetor, as equações paramétricas, a forma segmentar e a forma reduzida da reta no $\mathbb{R}^2$. Destacamos a inclinação da reta, com o seu coeficiente angular, o ponto de intersecção dela com o eixo das ordenadas e o coeficiente linear, assim como o ângulo entre duas retas no $\mathbb{R}^2$ e a distância de um ponto à reta.

Na abordagem da equação cartesiana da circunferência no $\mathbb{R}^2$, fizemos um estudo com vista a determinar o centro e o raio usando a estratégia de completar os quadrados ou por meio das fórmulas. Apresentamos a intersecção de circunferência e reta no $\mathbb{R}^2$.

Descrevemos a construção mecânica da elipse, que é uma cônica, bem como apresentamos suas equações na forma geral, destacando a existência do triângulo retângulo obtido por pontos dos eixos maior e menor.

Apresentamos também as cônicas hipérbole e parábola, assim como a equação da hipérbole na forma geral, destacando a existência do triângulo retângulo obtido por pontos dos eixos maior e menor; e a equação da parábola na forma geral, destacando a importância do foco, da diretriz e do vértice. As parábolas já vistas no Volume I são as mesmas que estão agora sendo estudadas, mas naquele volume analisamos apenas as parábolas que são funções e aqui consideramos qualquer possibilidade.

Relacionamos os cortes possíveis em um cone com a parábola, a elipse e a hipérbole, além, é claro, da existência da circunferência, de um ponto ou de duas retas concorrentes.

Abordamos as desigualdades no plano cartesiano, onde analisamos duas ou mais regiões definidas por uma reta, pela intersecção de retas ou de uma reta e uma cônica.

5.4 – Geometria Analítica no espaço

Iniciamos este capítulo com a ideia do plano, destacando sua equação e suas posições em relação aos eixos coordenados. Verificamos quando um vetor é normal a um plano e discutimos suas características. Apresentamos as equações paramétricas da reta no $\mathbb{R}^3$ e a suas equações simétricas.

Destacamos a esfera e suas propriedades, sobretudo a forma de ver a intersecção entre uma esfera e um plano. Valorizamos a interpretação geométrica entre três equações com três incógnitas para a resolução de um sistema 3×3.

5.5 – Números complexos

Introduzimos este capítulo a partir do número representado por i e do campo dos números complexos. Destacamos o conjugado de um complexo, a igualdade de dois complexos e suas operações, tais como adição, subtração, multiplicação, divisão e potências de i. Abordamos a validade da raiz quadrada e a forma geométrica de um número complexo, combinada com a forma trigonométrica do complexo. Quanto à forma trigonométrica do complexo, introduzimos o conceito de módulo como a distância da imagem de z à origem, como já visto em vetores.

Apresentamos uma conexão de módulo com a ideia das transformações usando o conceito das operações já conhecidas. Exploramos a definição de argumento e a forma trigonométrica ou polar do número complexo. Desenvolvemos com a forma trigonométrica a multiplicação e a divisão, para enfim aplicarmos a Fórmula de Moivre. Valorizamos a radiciação e a interpretação geométrica das raízes de um número complexo com a apresentação de logaritmo e a forma vetorial. No apêndice temos a forma matricial de um número complexo.

5.6 – Polinômios

Neste capítulo, procuramos disponibilizar, de forma clara e sucinta, a ampliação do conceito de polinômios, já de conhecimento dos alunos, valorizando a obtenção do valor numérico de um polinômio, a identidade entre polinômios, quando um polinômio é identicamente nulo e quando dois polinômios são idênticos.

Na divisão por $x - a$ e por $ax - b$, destacamos o algoritmo de Ruffini. Analisamos a condição para o quociente da divisão por $ax - b$, assim como as divisões por $x^n \pm a^n$ e por $x \pm a$ e a decomposição de uma fração (frações parciais).

5.7 – Apêndice: indução finita

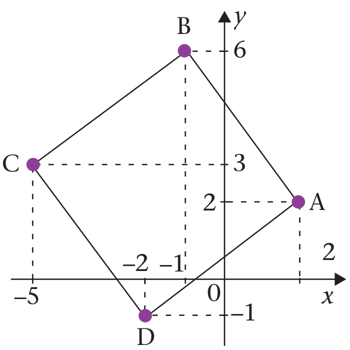
Neste capítulo, oferecemos aos alunos conteúdo mais avançado, visto que esse é um assunto mais estudado no Ensino Superior. Entretanto, podemos afirmar que o nosso propósito foi validar as condições para o princípio da indução finita e, para isso, estudamos suas várias aplicações, inclusive com a apresentação das matrizes em que se destaca nos determinantes a proposta do teorema de Vandermonde.

6 – Resolução comentada de alguns exercícios

CAPÍTULO I

Exercícios de fixação, p. 35

10 A = (2, 2)
B = (−1, 6)
C = (−5, 3)
D = (−2, −1)



Calculemos:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 6) - (2,\ 2) = (-3,\ 4)\\ \overrightarrow{AD} = D - A = (-2,\ -1) - (2,\ 2) = (-4,\ -3)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ AD = AB_{+90^{o}}$$

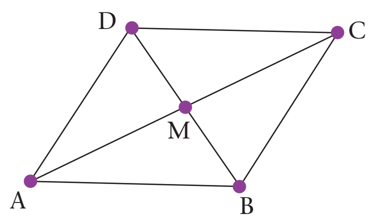
$$\overrightarrow{BC} = C - B = (-5,\ 3) - (-1,\ 6) = (-4,\ -3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

Como $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, ABCD é um paralelogramo.

Como $AD = AB_{+90^{o}}$, ABCD é um quadrado.

11 A = (1, 0, 2)
B = (1, −1, 1)
C = (2, *m*, *n*)
D = (*x*, 1, −1)



$$M = \frac{A + C}{2} = \frac{(1,\ 0,\ 2) + (2,\ m,\ n)}{2} = \left(\frac{3}{2},\ \frac{m}{2},\ \frac{2+n}{2}\right)$$

Por outro lado:

$$M = \frac{B + D}{2} = \frac{(1,\ -1,\ 1) + (x,\ 1,\ -1)}{2} = \left(\frac{1+x}{2},\ 0,\ 0\right)$$

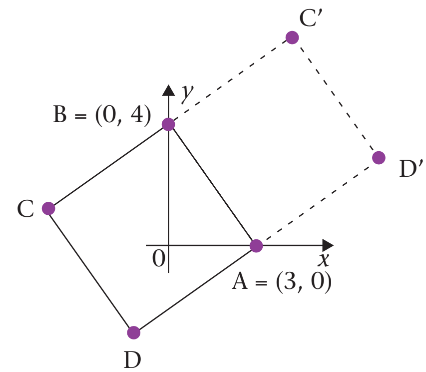
Temos então:

$$\frac{3}{2} = \frac{1+x}{2} \Rightarrow x = 2,\ \frac{m}{2} = 0 \Rightarrow m = 0\ e\ \frac{2+n}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = -2$$

C = (2, 0, −2) e D = (2, 1, −1)

12



Devemos ter o quadrado ABCD, pois D é o mais próximo da origem.

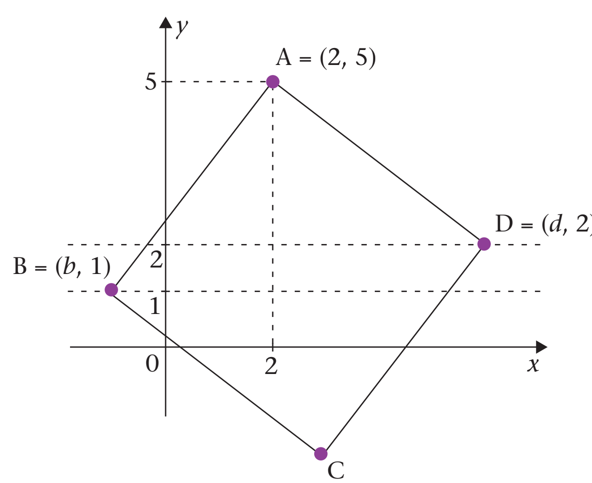
$$C = B + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}_{-90^{o}} = (A - B)_{-90^{o}} = (3,\ -4)_{-90^{o}} = (-4,\ -3)$$

$$C = (0,\ 4) + (-4,\ -3) = (-4,\ 1)$$

$$D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = (3,\ 0) + (-4,\ -3) = (-1,\ -3)$$

16



$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}_{+90^{o}} \Rightarrow D - A = (B - A)_{+90^{o}}$$

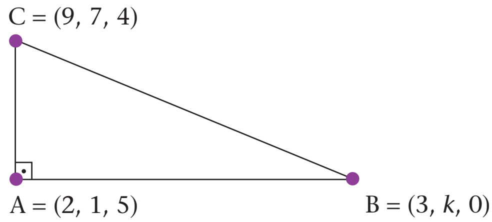
$(d - 2,\ -3) = (b - 2,\ -4)_{+90^{o}} \Rightarrow (d - 2,\ -3) =$
$= (4,\ b - 2)$

$d - 2 = 4 \Rightarrow d = 6 \Rightarrow D = (6,\ 2)$

$b - 2 = -3 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow B = (-1,\ 1)$

$$C = D + \overrightarrow{DC} = D + \overrightarrow{AB} = (6,\ 2) + (-3,\ -4) = (3,\ -2)$$

26



Para o triângulo ABC ser retângulo em A, devemos ter $BC^2 = AC^2 + AB^2$.
Em que:

$$BC = \|\overrightarrow{BC}\| \qquad \overrightarrow{BC} = C - B = (6, 7 - k, 4)$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{6^2 + (7-k)^2 + 4^2}$$

$$AC = \|\overrightarrow{AC}\|$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (7, 6, -1) \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{7^2 + 6^2 + 1}$$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\|$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, k - 1, -5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1 + (k-1)^2 + (-5)^2}$$

Logo:
$BC^2 = AC^2 + AB^2$
$36 + (7 - k)^2 + 16 = 49 + 36 + 1 + 1 + (k - 1)^2 + 25$
$\cancel{36} + \cancel{49} - 14k + \cancel{k^2} + 16 = \cancel{49} + \cancel{36} + 1 + 1 +$
$+ \cancel{k^2} - 2k + 1 + 25$
$12k = -12 \Rightarrow k = -1$

28 Sejam $P = (x, y, z)$, $O = (0, 0, 0)$, $A = (0, 0, 1)$ e $B = (2, 2, 2)$, temos:

$$\begin{cases} PO = \sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{6} & \text{(I)} \\ PA = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2} = \sqrt{3} & \text{(II)} \\ PB = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{2} & \text{(III)} \end{cases}$$

De (I), vem: $x^2 + y^2 + z^2 = 6$
De (II), vem: $x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6 - 2z + 1 = 3 \Rightarrow z = 2$
De (III), vem: $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z +$
$+ 4 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6 - 4x + 4 - 4y + 4 - 8 + 4 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x + 4y = 8$

Temos, então: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + (2 - x)^2 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 4 - 4x + x^2 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = 1$
Logo: $P = (1, 1, 2)$

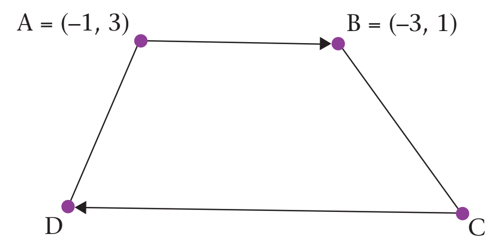
33 $P = (t^2 - 2, t\sqrt{2})$

$$PO = \sqrt{(t^2-2)^2 + (t\sqrt{2})^2} =$$
$$= \sqrt{t^4 - 4t^2 + 4 + 2t^2} = \sqrt{t^4 - 2t^2 + 1 + 3} =$$
$$= \sqrt{(t^2 - 1)^2 + 3}$$

A distância PO será mínima quando $t^2 - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow t = \pm 1$.
Logo: $P = \left(-1, \sqrt{2}\right)$ ou $P = \left(-1, -\sqrt{2}\right)$

Exercícios de fixação, p. 67

4



$$\overrightarrow{BC} = (5, -2)$$
$$\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{CD} = -2(B - A)$$
$$\overrightarrow{CD} = -2(-2, -2)$$
$$\overrightarrow{CD} = (4, 4)$$
$$C = B + \overrightarrow{BC} = (-3, 1) + (5, -2) = (2, -1)$$
$$D = C + \overrightarrow{CD} = (2, -1) + (4, 4) = (6, 3)$$

5 $\overrightarrow{AB} = B - A = (8, 8) - (4, 5) = (4, 3)$
$C = (x, 0)$ e $D = (0, y) \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{CD} = D - C = (0, y) - (x, 0) = (-x, y)$
Temos:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{CD} // \overrightarrow{AB} \Rightarrow \dfrac{-x}{4} = \dfrac{y}{3} \\ \|\overrightarrow{CD}\| = 10 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

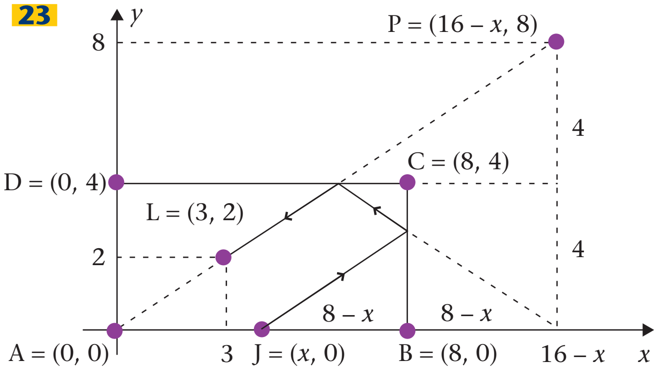
$\Rightarrow x = -8$ e $y = 6$. Logo:
$C = (-8, 0)$ e $D = (0, 6)$

6 $A = (-2, 0, 3)$, $B = (1, 6, x)$ e $C = (3, y, -7)$
Condição de alinhamento: $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = B - A = (3, 6, x - 3) \\ \overrightarrow{AC} = C - A = (5, y, 10) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{6}{y} = \frac{x - 3}{-10} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 10$ e $x = -3$

23



Os pontos P = (16 − x, 8), L = (3, 2) e A = (0, 0) estão em linha reta, logo a área do triângulo PLA é nula, então:

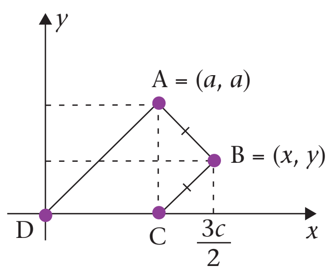
$$\frac{16-x}{3}=\frac{8}{2} \Rightarrow 32-2x=24 \Rightarrow x=4$$

24 A = (a, a)
D = (0, 0)
C = (c, 0)
$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$
B = (x, y)
De acordo com a figura a seguir, temos:

$a = c$

$x = c + \dfrac{c}{2} = \dfrac{3c}{2}$

$y = \dfrac{c}{2}$



$$S_{ABCD} = 48 \Rightarrow \begin{bmatrix} c & \frac{3c}{2} & c & 0 & c \\ c & \frac{c}{2} & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left|\frac{c^2}{2}-\frac{c^2}{2}-\frac{3c^2}{2}\right| = 48$$

$$\frac{3c^2}{2} = 96 \Rightarrow c^2 = 64 \Rightarrow c = \pm 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = (8, 8),\ B = (12,\ 4) \text{ e } C = (8, 0)$$

ou A = (−8, −8), B = (−12, −4) e C = (−8, 0)

25 G = (x − r, x, x + r)
A = (a, 0, 8) C = (3, 2, −1)
B = (−1, 3, 2) D = (2, −1, 3)

$$G = \frac{A+B+C+D}{4}$$

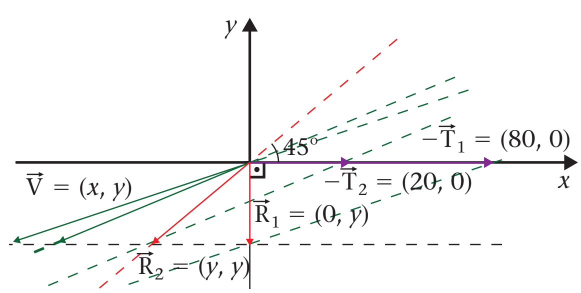
$$(x-r,\ x,\ x+r) = \left(\frac{4+a}{4},\ 1,\ 3\right) \Rightarrow \begin{cases} x-r=\dfrac{4+a}{4} \\ x=1 \\ x+r=3 \Rightarrow r=2 \end{cases}$$

$$\frac{4+a}{4} = 1-2 \Rightarrow a=-8$$

Então: G = (1 − 2, 1, 1 + 2)
G = (−1, 1, 3)

Exercícios de revisão, p. 69

21 Sejam:
$\vec{V}$ = vetor velocidade do vento: $\vec{V}$ = (x, y)
$\vec{T}_1$ = vetor velocidade do trem no momento em que ele se desloca com velocidade igual a 80 km/h: $\vec{T}_1$ = (–80, 0)
$\vec{T}_2$ = vetor velocidade do trem no momento em que ele se desloca com velocidade igual a 20 km/h: $\vec{T}_2$ = (–20, 0)
$\vec{R}_1$ = resultante sentida pelo passageiro no instante 1: $\vec{R}_1$ = (0, y)
$\vec{R}_2$ = resultante sentida pelo passageiro no instante 2: $\vec{R}_2$ = (y, y)
Se o trem se desloca de leste para oeste, o passageiro sente um vento cujo vetor que o representa é o vetor oposto a ele, logo, $-\vec{T}_1$ = (80, 0) e $-\vec{T}_2$ = (20, 0).

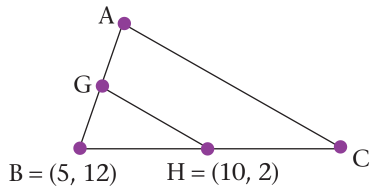


Instante 1:
R_1 = V + (– T_1)
(0, y) = (x, y) + (80, 0)
0 = x + 80 => x = –80

Instante 2:
R_2 = V + (– T_2)
(y, y) = (x, y) + (20, 0)
(y, y) = (–80, y) + (20, 0
y = –80 + 20 => y = –60

Logo:
V = (–80, –60)
$\|V\| = \sqrt{(-80)^2 + (-60)^2} = 100$ km/h

29



Como H é médio de BC, vem:

$$H = \frac{B + C}{2} \Rightarrow C = 2H - B$$

C = 2 (10, 2) − (5, 12)
C = (20, 4) − (5, 12)
C = (15, −8)

CAPÍTULO II

Exercícios de revisão, p. 139

9 $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são ortogonais

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$

$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) =$

$= \vec{a} \cdot \vec{a} - 3\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{a} - 6\vec{b} \cdot \vec{b} =$

$= |\vec{a}|^2 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot |\vec{b}|^2 =$

$= 2^2 - 0 + 0 - 6 \cdot 2^2 =$

$= 4 - 24 = -20$

Alternativa (E).

10 $\vec{u} = (1, 0, 0)$
$\vec{v} = (0, 1, 0)$
$\vec{w} = (0, 0, 1)$

• $\vec{u} + \vec{v} = (1, 0, 0) + (0, 1, 0)$
$\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} = (1, 1, 0)$

• $\vec{v} - \vec{w} = (0, 1, 0) - (0, 0, 1)$
$\vec{y} = \vec{v} - \vec{w} = (0, 1, -1)$

$\vec{x} \cdot \vec{y} = ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cdot \cos\theta$

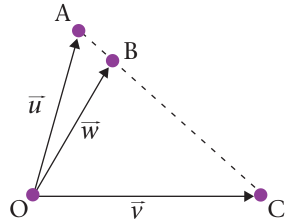
$$\cos\theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||} =$$

$$= \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{0 + 1 + 0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$$

$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60°$

Alternativa (D).

23



$\overrightarrow{BC} = 4 \cdot \overrightarrow{AB}$

$\vec{w} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{w} = \vec{u} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{w} - \vec{u} \\ \vec{w} + 4\overrightarrow{AB} = \vec{v} \end{cases}$$

$\vec{w} + 4 \cdot (\vec{w} - \vec{u}) = \vec{v}$

$\vec{w} + 4\vec{w} - 4\vec{u} = \vec{v}$

$5\vec{w} = 4\vec{u} + \vec{v}$

$\vec{w} = \frac{4}{5}\vec{u} + \frac{1}{5}\vec{v}$

Logo: $x = \frac{4}{5}$ e $y = \frac{1}{5}$

28 $|\vec{u} + \vec{v}| = 7 \Rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 7^2$

$|\vec{u} - \vec{v}| = 5 \Rightarrow (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 5^2$

$$-\begin{cases} |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 49 \\ |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 25 \end{cases}$$

$4\vec{u} \cdot \vec{v} = 24$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$

Alternativa (C).

30 $|\vec{u}| = 1$
$|\vec{v}| = 2$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (ortogonais)

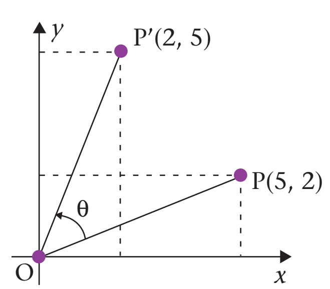
$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (t\vec{u} + 2\vec{v}) = 0$

$$t \cdot \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{u}}_{1^2} + 2 \cdot \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{0} + t \cdot \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{0} + 2\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}_{2^2} = 0$$

$t + 8 = 0 \Rightarrow t = -8$

Alternativa (A).

38



$\|\overrightarrow{OP}\| = \|\overrightarrow{OP'}\| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \|\overrightarrow{OP}\| \cdot \|\overrightarrow{OP'}\| \cdot \cos\theta$

$2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = \sqrt{29} \cdot \sqrt{29} \cdot \cos\theta$

$20 = 29 \cos\theta$

$\cos\theta = \frac{20}{29}$

40

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2 = \frac{1}{2}$

$|\vec{V}_2|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow |\vec{V}_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\vec{V}_3 \cdot \vec{V}_3 = 4$

$|\vec{V}_3|^2 = 4$

$|\vec{V}_3| = 2$

$\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3 = |\vec{V}_2| \cdot |\vec{V}_3| \cdot \cos\theta$

$1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \cos\theta$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta = 45^\circ$

45 $\vec{u} = (6, 4, 3)$

$\vec{v} = (9, 8, x)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \cdot 9 + 4 \cdot 8 + 3x$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 54 + 32 + 3x$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 86 + 3x$

$$\begin{array}{l|l} 86 + 3x & 11 \\ \hline 5 & Q \end{array}$$

$86 + 3x = 11Q + 5$

$81 + 3x = 11Q$

$Q = \frac{81 + 3x}{11} \in \mathbb{Z}$

$Q = \frac{77 + 4 + 3x}{11}$

$Q = 7 + \frac{4 + 3x}{11}$

Se $x = 1 \Rightarrow Q \notin \mathbb{Z}$

$x = 2 \Rightarrow Q \notin \mathbb{Z}$

$x = 3 \Rightarrow Q \notin \mathbb{Z}$

$\vdots$

$x = 6 \Rightarrow Q = 7 + \frac{4 + 18}{11}$

$Q = 7 + 2$

$Q = 9$

Logo, o ano foi 1986.
Alternativa (B).

53 P (2, t, 0)
A (0, 2, 0)
B (2, 0, 2)

$\overrightarrow{PA} = A - P = (-2, 2 - t, 0)$

$\overrightarrow{PB} = B - P = (0, -t, 2)$

$$\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2-t & 0 \\ 0 & -t & 2 \end{vmatrix} = (4 - 2t, 4, 2t)$$

Área do triângulo no $\mathbb{R}^3$: $A = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB} \right\|$

$A = \frac{1}{2}\sqrt{(4-2t)^2 + 4^2 + (2t)^2}$

$A = \frac{1}{2}\sqrt{16 - 16t + 4t^2 + 16 + 4t^2}$

$A = \frac{1}{2}\sqrt{8t^2 - 16t + 32}$

$A = \frac{1}{2}\sqrt{8(t^2 - 2t + 4)}$

$A = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2(t^2 - 2t + 4)}$

$A = \sqrt{2t^2 - 4t + 8}$

A é mínimo quando A^2 for mínimo.

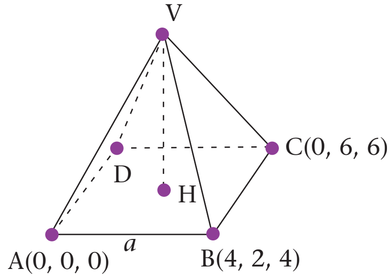
$A^2 = 2t^2 - 4t + 8$

Vértice:

$t_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$

Resposta: $t = 1$

54



a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$B - A = C - D$

$D = C - B + A$

$D = (0, 6, 6) - (4, 2, 4) + (0, 0, 0)$

$D = (-4, 4, 2)$

$a = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}$

$a = \sqrt{16 + 4 + 16}$

$a = 6$

b) $V_{\text{pirâmide}} = 72$

$\frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = 72 \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot h = 72 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 6$

Equação do plano ABCD:

$\overrightarrow{AB} = (4, 2, 4) \quad \overrightarrow{AC} = (0, 6, 6)$

$\overrightarrow{AD} = (x, y, z)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

$24z + 12x - 24x - 24y = 0$

$-12x - 24y + 24z = 0 \ (\div -12)$

$x + 2y - 2z = 0 \Rightarrow$ vetor normal:

$\vec{N} = (1, 2, -2)$

$H = \frac{A+C}{2}$ (ponto médio) $\Rightarrow H = (0, 3, 3)$

$\|\vec{N}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$

$\overrightarrow{HV} = 2\vec{N} \Rightarrow V' - H = 2 \cdot (1, 2, -2)$

$V' = (2, 4, -4) + H$

$V' = (2, 4, -4) + (0, 3, 3)$

$V' = (2, 7, -1)$

$\overrightarrow{VH} = 2\vec{N}$

$\vec{H} - V'' = (2, 4, -4)$

$V'' = (0, 3, 3) - (2, 4, -4)$

$V'' = (-2, -1, 7)$

CAPÍTULO III

Exercícios de fixação, p. 167

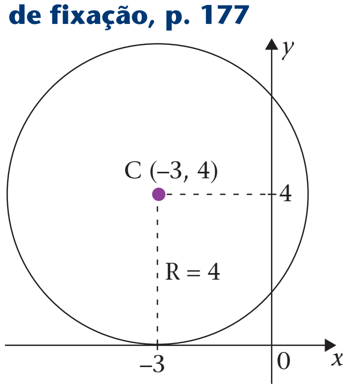
20 $a_1 = \frac{1}{k}$ e $a_2 = 2k^2$

a) $\frac{1}{k} = 2k^2 \Rightarrow 2k^3 = 1 \Rightarrow k^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

b) $\frac{1}{\cancel{k}} \cdot 2k^{\cancel{2}} = -1 \Rightarrow 2k = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$

Exercícios de fixação, p. 177

9



$(x - (-3))^2 + (y - 4)^2 = 4^2$

$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$

14 a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + 4 = 0 + 1 + 4$

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1 \Rightarrow C(-1, 2)$ e $R = 1$

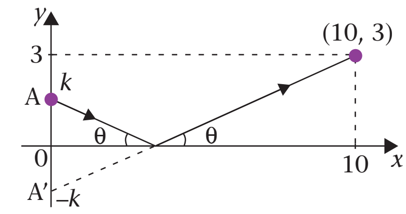
b) $x^2 + y^2 + 2y = 0$

$(x - 0)^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 + 1$

$(x - 0)^2 + (y + 1)^2 = 1 \Rightarrow C(0, -1)$ e $R = 1$

Exercícios de revisão, p. 208

29



$y = ax + b$, como $a = \frac{1}{2}$, temos:

$y = \frac{1}{2}x + b \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} \cdot 10 + b \Rightarrow b = -2$

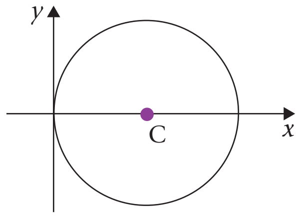
$a + b = \frac{1}{2} + (-2) = \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2}$

Alternativa (A).

67 $x^2 + y^2 - 4x = 0$

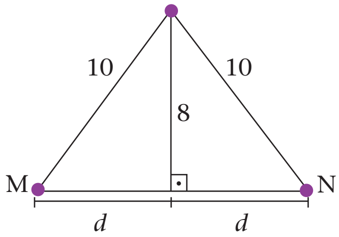
$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 0 + 4$

$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = 4 \Rightarrow C\ (2, 0)$ e $R = \sqrt{4} = 2$



Alternativa (E).

81



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$d^2 + 8^2 = 10^2$

$d^2 = 100 - 64 = 36$

$d^2 = 6$, então:

$\overline{MN} = 12$ m

Alternativa (B).

CAPÍTULO IV

Exercícios de revisão, p. 256

4 O plano da equação $x - y + \sqrt{2}\,z + 1 = 0$ tem vetor normal $\vec{n} = (1, -1, \sqrt{2})$. Para calcular o seu unitário, basta dividir o vetor $\vec{n}$ por seu módulo $\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$. Assim:

$$\vec{u}_n = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{(1, -1, \sqrt{2})}{2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$$

Alternativa (D).

9 Como o plano é paralelo aos vetores $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} = (1, 1, 0)$ e $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} = (1, -1, 0)$, seu vetor normal será o produto vetorial

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -2).$$

Sua equação será, então, do tipo $0x + 0y - 2z + d = 0$.
Obrigando este plano a passar pela origem, temos: $0x + 0y - 2 \cdot 0 + d = 0$, logo, $d = 0$. A equação será, então, $0x + 0y - 2z + 0 = 0$, ou seja, $z = 0$.
Alternativa (C).

11 Se o plano contém o eixo Z, é paralelo ao vetor $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Por outro lado, como ele é também paralelo à reta $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3}t \\ z = 0t \end{cases}$, será paralelo ao vetor diretor da reta $\vec{v} = (1, \sqrt{3}, 0)$. Seu vetor normal será o produto vetorial desses dois vetores:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \overbrace{1 \quad 0}^{1} & 0 & 1 \\ 1 & \underbrace{\sqrt{3} \quad 0}_{-\sqrt{3}} & \underbrace{1 \quad \sqrt{3}}_{0} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{v} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$$

A equação do plano será do tipo:
$-\sqrt{3}x + 1y + 0z + d = 0$. Como o plano passa pela origem, ponto comum do eixo Oz e a reta dada, temos $d = 0$. Assim, a equação do plano será $-\sqrt{3}x + y = 0$ ou $y = \sqrt{3}x$.

14 Como a esfera tem centro na origem e a reta também passa pela origem, os pontos P e Q são simétricos em relação à origem, logo $u = -r$, $v = -s$ e $w = -t$.
Alternativa (A).

18 O vetor normal ao plano será o produto vetorial dos vetores diretores das retas:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}, \ (4, 1, -2) \text{ e } \begin{cases} x = t + 6 \\ y = 3t - 2, \\ z = -t + 2 \end{cases}$$

$(1, 3, -1)$. Calculando seu produto vetorial:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & \overbrace{-2 \quad 4}^{2} & 1 & -2 \\ 1 & \underbrace{3 \quad -1}_{5} & \underbrace{1 \quad 3}_{11} & -1 \end{bmatrix}, \text{ logo } \vec{n} = (5, 2, 11).$$

A equação do plano será então:
$5x + 2y + 11z + d = 0$.
Como o plano contém todos os pontos das duas retas, conterá também o ponto de passagem de uma delas, por exemplo, $(2, -3, 4)$. Assim, $5 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 11 \cdot 4 + d = 0$, então, $d = -48$. Portanto, a equação do plano será $5x + 2y + 11z - 48 = 0 \Rightarrow 5x + 2y + 11z = 48$.

21 O vetor diretor da reta será o produto vetorial dos vetores normais aos planos $x + y + z = 3$, $(1, 1, 1)$ e $x + 2y + z = 1$, $(1, 2, 1)$, então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \overbrace{1 \quad 1}^{0} & 1 & 1 \\ 1 & \underbrace{2 \quad 1}_{-1} & \underbrace{1 \quad 2}_{1} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v} = (-1, 0, 1)$$

Como este vetor é paralelo ao eixo $0y$, o plano normal a este vetor será paralelo ao plano XZ.

23 Passando a equação da reta $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{1}$ para a forma paramétrica, temos:

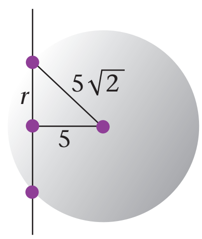
$$\begin{cases} \frac{x-2}{1} = t \\ \frac{y-1}{-3} = t \\ \frac{z-0}{1} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -3t + 1 \\ z = t \end{cases}$$

Obrigando este ponto variável a pertencer ao plano $x - 2y - 7 = 0$, temos:
$t + 2 - 2(-3t + 1) - 7 = 0 \Rightarrow t = 1$, logo:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases} \text{ que é o ponto } (3, -2, 1).$$

27 A esfera $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - m)^2 = 9$ tem centro $(2, 3, m)$ e raio 3. A distância do centro ao plano $z = 0$ é $|m|$, logo $|m| = 3$.
Alternativa (D).

28 Completando os quadrados para obter o centro e o raio da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y + 2z = 20$: temos $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 + (z + 1)^2 = 50$ que é uma esfera de centro $(2, -5, -1)$ e raio $R = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.



O raio do círculo da intersecção será r tal que:
$r^2 + 5^2 = (5\sqrt{2})^2 \Rightarrow r = 5$
A área da secção será então $\pi r^2 = 25\pi$.

29 Basta substituir o ponto descrevente da reta $\begin{cases} x = t \\ y = -t + 1 \\ z = 2\sqrt{2} \end{cases}$ na equação da esfera para obter os pontos de intersecção.
$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \Rightarrow t^2 + (-t + 1)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2t^2 - 2t = 0$ que dá os valores dos parâmetros para os pontos de intersecção: $t_1 = 0$ ou $t_2 = 1$.
Os pontos de intersecção serão então:

$$I_1 = \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow I_1 = \left(0, 1, 2\sqrt{2}\right) \text{ e}$$

$$I_2 = \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 0 \\ z_2 = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow I_2 = \left(1, 0, 2\sqrt{2}\right)$$

A distância será então o módulo do vetor $\overrightarrow{I_1I_2}$.

$$\overrightarrow{I_1I_2} = I_2 - I_1 = \left(1, 0, 2\sqrt{2}\right) - \left(0, 1, 2\sqrt{2}\right) = (1, -1, 0)$$

$$\left\|\overrightarrow{I_1I_2}\right\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Alternativa (A).

CAPÍTULO V

Exercícios de revisão, p. 306

4 $a_n = \dfrac{2^3}{2^n} + i\,\dfrac{2^4}{2^n} = \dfrac{2^3}{2^n}(1 + 2i) \Rightarrow$

$\Rightarrow S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n =$

$= 8(1 + 2i)\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots\right)$

$$S = 8(1 + 2i) \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 8(1 + 2i) \Rightarrow$$

$\Rightarrow |S| = 8\sqrt{1^2 + 2^2} = 8\sqrt{5}$

Alternativa (E).

11 Como p e q são reais, a equação admitirá raízes complexas conjugadas, logo $z_1 = 3 - 2i$ e $z_2 = 3 + 2i$. Temos, então:

$z_1 z_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{q}{2} \Rightarrow q = 2z_1 z_2 =$

$= 2(3 - 2i)(3 + 2i) =$

$= 2(3^2 + 2^2) = 26$

Alternativa (D).

12 $(1 + ai)(b - i) = 5 + 5i \Rightarrow$

$\Rightarrow b - i + abi + a = 5 + 5i \Rightarrow \begin{cases} b + a = 5 \\ -1 + ab = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} b + a = 5 \\ ab = 6 \end{cases} \Rightarrow b = \dfrac{6}{a} \Rightarrow \dfrac{6}{a} + a = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 - 5a + 6 = 0$ ou $x^2 - 5x + 6 = 0$

Alternativa (E).

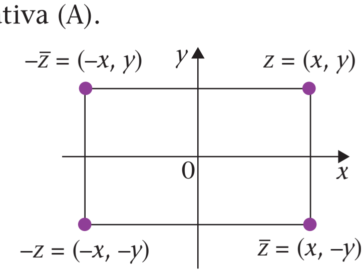
21 $\dfrac{i^n}{i^{-n}} = i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ -1, & n \text{ ímpar} \end{cases}$

24

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} \Rightarrow A^9 = \begin{bmatrix} i^9 & 0 & 0 \\ 0 & i^9 & 0 \\ 0 & 0 & i^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} = A$$

Alternativa (A).

25



$S = 2x \cdot 2y = 4xy$
Alternativa (D).

26 $\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_3}{z_2} = i \Rightarrow \begin{cases} z_2 = iz_1 \\ z_3 = iz_2 \end{cases}$

Multiplicando membro a membro, temos:
$z_2z_3 = i^2z_1z_2 \Rightarrow z_3 = -z_1 \Rightarrow z_1 = -z_3$
Alternativa (A).

34 Façamos $z = x + yi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z-3| = |x+yi-3| = \sqrt{(x-3)^2+y^2} \\ |z-7| = |x+yi-7| = \sqrt{(x-7)^2+y^2} \\ |z-3i| = |x+yi-3i| = \sqrt{x^2+(y-3)^2} \end{cases}$$

Igualando:

$$\begin{cases} \sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{(x-7)^2+y^2} \Rightarrow x=5 \\ \sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 4+y^2 = 25+y^2-6y+9 \Rightarrow y=5 \end{cases}$$

$\Rightarrow z = 5+5i \Rightarrow \overline{z} = 5-5i$
Alternativa (C).

36 $\sqrt{-15-8i} = \sqrt{-15-8\sqrt{-1}} = \sqrt{-15-\sqrt{-64}}$
Usando a fórmula de transformação de radicais duplos $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, em que $C = \sqrt{A^2-B}$ temos:

$C = \sqrt{(-15)^2-(-64)} = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17,$

então:

$\sqrt{-15-8i} =$

$= \pm\left(\sqrt{\frac{-15+17}{2}} - \sqrt{\frac{-15-17}{2}}\right) = \pm\ (1-4i)$

41 a) $x^2-4x+8=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2} =$

$= \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i$

b) A medida do menor ângulo é o ângulo dos vetores $\overrightarrow{OA} = (2,2)$ e $\overrightarrow{OB} = (2,-2)$ que se obtém por meio da fórmula do ângulo de dois vetores.

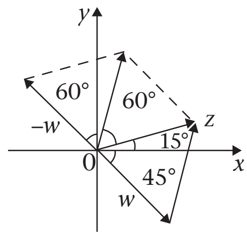
$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\|} = \frac{(2,2)\cdot(2,-2)}{\sqrt{4+4}\cdot\sqrt{4+4}} =$

$= \frac{4-4}{8} = 0 \Rightarrow \theta = 90°$

Graficamente, verifica-se imediatamente que o ângulo é 90º.

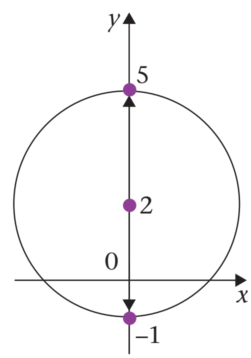
49 $\frac{1}{z} = \overline{z} \Rightarrow \frac{\overline{z}}{|\overline{z}|^2} = \overline{z} \Rightarrow |\overline{z}|^2 = 1$
Se $z = x + yi$, então $\overline{z} = x - yi$ e
$|\overline{z}|^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2=1$
é uma circunferência.
Alternativa (B).

54



Como $|z| = |w| = |z - w| = 1$, o triângulo dos vetores z, w e $z - w$ é equilátero, logo $w = \text{cis}\,(-45º) =$ $= \text{cis}\ 315º$, portanto $w = \cos 315º + i\ \text{sen}\ 315º$.
Alternativa (A).

65 $|z - (1 + i)^2| = k \Rightarrow |z - (1 + 2i - 1)| = k \Rightarrow$ $\Rightarrow |z - 2i| = k$
Seja $z = x + yi$
$|z - 2i| = |x + yi - 2i| = |x + (y - 2)i|$



Para $z = 5i$, temos $|5i - 2i| = k \Rightarrow |3i| = k$.
$k = 3$. Então $|x + (y - 2)i| = 3$, logo

$\sqrt{x^2+(y-2)^2} = 3 \Rightarrow x^2+(y-2)^2 = 9.$
Como o lugar geométrico dos complexos z é um círculo de centro (0, 2) e raio 3, o ponto mais alto é (0, 5) e o mais baixo é (0, −1). Então o complexo de menor módulo é o complexo $z = (0, -1) = 0 - 1i = -i$.
Alternativa (A).

66 Basta multiplicar o complexo $1+i\sqrt{3} = 2\ \text{cis}\ 60°$ por cis 120º e cis 240º. Temos, então:
$2\ \text{cis}\ 60º\ \text{cis}\ 120º = 2\ \text{cis}\ 180º = 2(-1 + 0i) = -2$
$2\ \text{cis}\ 60\ \text{cis}\ 240º = 2\ \text{cis}\ 300º =$

$= 2\cdot\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$

77 $z=\sqrt{3}+i=2\text{ cis }30^\circ$
Elevando ao expoente n, temos:
$z^n = (2\text{ cis }30^\circ)^n = 2^n(\text{cis }30^\circ\cdot n) = 2^n(\cos 30^\circ\cdot n + i\text{ sen }30^\circ\cdot n)$
Devemos ter $30^\circ\cdot n = 180^\circ \Rightarrow n = 6$.
Alternativa (C).

78 $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=$
$$=\frac{z^6\cdot z-1}{z-1}=\frac{z^7-1}{z-1}=\frac{1-1}{z-1}=0$$

83 $\begin{cases}|z-3i|=3\\|z+i|=|z-(2+i)|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x+yi-3i|=3\\|x+(y+1)i|=|(x-2)+(y-1)i|\end{cases}$

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+(y-3)^2}=3\\\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+(y-3)^2=9\\x^2+y^2+2y+1=x^2-4x+4+y^2-2y+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+(y-3)^2=9\\y=1-x\end{cases}\Rightarrow x^2+(1-x-3)^2=9\Rightarrow x^2+x^2+4x+4=9$$

$$2x^2+4x-5=0\Rightarrow x=\frac{-4\pm2\sqrt{14}}{4}=-1\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$x_1=-1+\frac{\sqrt{14}}{2}\Rightarrow y_1=1-x_1=1-\left(-1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)=2-\frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$x_2=-1-\frac{\sqrt{14}}{2}\Rightarrow y_2=1-x_2=1-\left(-1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)=2+\frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$\begin{cases}z_1=\left(-1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)+\left(2-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)i\\z_2=\left(-1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)+\left(2+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)i\end{cases}$$

$$z_1z_2=\left(1+\frac{7}{2}\right)+\left(-2-\cancel{\frac{\sqrt{14}}{2}}+\cancel{\sqrt{14}}+\frac{7}{2}-2-\cancel{\sqrt{14}}+\cancel{\frac{\sqrt{14}}{2}}+\frac{7}{2}\right)i-\left(4-\frac{7}{2}\right)$$

$z_1z_2 = -3 + 3i$
Alternativa (D).

94 Como as soluções da equação $z^6 = 1$ são vértices de um hexágono regular de raio $\sqrt[6]{1}=1$, a área do hexágono será $6\cdot\frac{1^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
Alternativa (D).

CAPÍTULO VI

Exercícios de revisão, p. 361

2 $p(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}p(1)=2 \Rightarrow 1+a+b+c+1=2\\p(-1)=3\Rightarrow -1+a+b-c+1=3\\p(2)=0\Rightarrow 32+16a+4b+2c+1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+b+c=0\\a+b-c=3\\16a+4b+2c=-33\end{cases}\Rightarrow c=-\frac{3}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=\frac{3}{2}\\16a+4b=-30\end{cases}\Rightarrow b=\frac{3}{2}-a$$

$$16a+4\left(\frac{3}{2}-a\right)=-30 \Rightarrow 12a=-36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=-3 \Rightarrow b=\frac{9}{2}$$

$$\frac{ab}{c}=\frac{(-3)\cdot\frac{9}{2}}{\left(-\frac{3}{2}\right)}=9$$

Alternativa (E).

22 Como o divisor $x^2-1=(x+1)(x-1)$ é do 2º grau, o resto será do 1º grau, logo, do tipo $R(x)=Mx+N$. Então,
$x^{100}+x+1 \equiv (x-1)(x+1)Q(x)+Mx+N$.
Fazendo $x=1$ e $x=-1$, temos:

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow 1+1+1=0+M+N \\ x=-1 \Rightarrow 1-1+1=0-M+N \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} M+N=3 \\ -M+N=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} N=2 \\ M=1 \end{matrix}$$

O resto será, então, $R(x)=x+2$.
Devemos ter: $x^{100}+x+1 \equiv (x^2-1)\,Q(x)+x+2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -x^{100}-1=(x^2-1)Q(x)$
Chamando $x^2=y$, temos:

$$y^{50}-1=(y-1)Q(x) \Rightarrow Q(x)=-\frac{y^{50}-1}{y-1}$$

	1	0	0	...	0	0	−1
1	1	1	1	...	1	1	0

$\Rightarrow$

$\Rightarrow Q(x)=y^{49}+y^{48}+y^{47}+\ldots+y+1$

Ou seja, $Q(x)=x^{98}+x^{96}+x^{94}+\ldots+x^2+1$.

34 $P(x)=(x^2+x)(x^2-3)+Mx+N$, pois o divisor é do 2º grau.

$$\begin{cases} P(1)=0 \Rightarrow 2\cdot(-2)+M+N=0 \Rightarrow M+N=4 \\ R(x)=Mx+N \Rightarrow R(4)=4M+N \Rightarrow 4M+N=10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} M=2 \\ N=2 \end{matrix}$$

$P(x)=x^4-3x^2+x^3-3x+2x+2$
$P(x)=x^4+x^3-3x^2-x+2$
Alternativa (C).

37 $p(3)=0$
$p(x)=(x-1)q(x)+10 \Rightarrow$
$\Rightarrow p(3)=(3-1)q(3)+10 \Rightarrow 0=2q(3)+10$
Logo, $q(3)=-5$ que é o resto da divisão de $q(x)$ por $x-3$.
Alternativa (A).

46 a) $f(x)=(x-0)^3\cdot(x-2)=x^3(x-2)=x^4-2x^3$
b) $0 \le x < 1$ tornam $f(x)$ entre -1 e 0.

62 a) $p(n)=(n+1)(n^2+3n+2)=(n+1)(n+1)(n+2)=$
$=(n+1)^2(n+2)$
$p(n)$ é o volume de um paralelepípedo de aresta de base igual a $n+1$ e altura $n+2$.
$p(11)=(11+1)^2\,(11+2)=12^2\cdot 13$
Como o volume de um paralelepípedo de base quadrada de arestas a, a, b é a^2b, temos as seguintes hipóteses para esse produto:
$1\cdot 1\cdot(12^2\cdot 13)$, $2\cdot 2\cdot(6^2\cdot 13)$, $3\cdot 3\cdot(4^2\cdot 13)$, $4\cdot 4\cdot(3^2\cdot 13)$, $6\cdot 6\cdot(2^2\cdot 13)$ e $12\cdot 12\cdot(1\cdot 13)$, isto é, os valores para a devem ser $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ que são os divisores de 12.
Logo, são 6 paralelepípedos.

b) Por outro lado, $p(n)=n^3+4n^2+5n+2$ que para $n=7^3$ nos dá $7^9+4\cdot 7^6+5\cdot 7^3+2=$
$=p(7^3)\cdot(7^3+1)\,(7^3+2)$.
Como $7^3+1=343+1=344$,

$$\frac{p(7^3)}{(7^3+1)}=7^3+2=343+2=345$$

73 a) $P(4)=15$
b) $P(2)=-3$ e $P(4)=15$
$P(x)=(x-2)(x-4)+Mx+N$, pois o divisor é do 2º grau.

$$\begin{cases} P(2)=0+2M+N \Rightarrow 2M+N=-3 \\ P(4)=0+4M+N \Rightarrow 4M+N=15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 2M=18 \Rightarrow M=9 \\ N=-21 \end{matrix}$$

O resto da divisão será $R(x)=9M-21$.
Consideremos a reta $y=9x-21$.
Para $x=2 \Rightarrow y=-3$ e para $x=4 \Rightarrow y=15$, o que comprova.

78 Como a soma dos coeficientes da equação $x^3-5x^2+6x-2=0$ é $1-5+6-2=0$, temos que $x=1$ é raiz da equação.
Retirando a raiz $x=1$ pelo algoritmo de Ruffini, temos:

	1	−5	6	−2
1	1	−4	2	0

As demais raízes serão as raízes da equação $x^2-4x+2=0$ que são $2\pm\sqrt{2}$.
Logo,
a) São 3 raízes.
b) $\{1, 2\pm\sqrt{2}\}$

88 Como $x=2$ é raiz do polinômio, pois este corta o eixo Ox em $x=2$, temos $P(2)=0$, logo $8-4+a=0 \Rightarrow a=-4$. O polinômio fica

$P(x) = x^3 - 2x - 4$.
Retirando a raiz $x = 2$ pelo algoritmo de Ruffini, temos:

	1	0	−2	−4
2	1	2	2	0

As demais raízes são as raízes da equação $x^2 + 2x + 2 = 0$.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i$$

Portanto, as raízes são $\{2, -1 \pm 2i\}$.

97 $(2, a_2, a_3, ..., a_8)$ PG de razão $q > 0 \Rightarrow (2, 2q, 2q^2, ..., 2q^{n-1})$ e $P(x)$ fica:
$P(x) = 2x + 2qx^2 + 2q^2x^3 + ... + 2q^{n-1}x^n$ que é uma PG de razão qx. Somando seus termos, temos:

$$P(x) = \frac{2q^{n-1}x^n \cdot qx - 2x}{qx - 1} = 2x \cdot \frac{(qx)^n - 1}{qx - 1}$$

Como:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\left(-\frac{q}{2}\right)^n - 1}{-\frac{q}{2} - 1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{q}{2}\right)^n = 1 \Rightarrow q = 2, n \text{ par}$$

$$P(2) = 5\,460 \Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot \frac{(2q)^n - 1}{2q - 1} = 5460$$

Para $q = 2$, temos $4 \cdot \frac{4^n - 1}{4 - 1} = 5460$, então

$$\frac{4^n - 1}{3} = 1365 \Rightarrow 4^n = 4096 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 6 \Rightarrow \frac{n^2 - q^3}{q^4} = \frac{36 - 8}{16} = \frac{7}{4}.$$

Alternativa (C).

99 Como o gráfico corta o eixo Ox na origem e em pontos simétricos em relação à origem, então existem raízes do tipo 0, a e $-a$. O polinômio poderá, então, ser do tipo
$p(x) = k(x - a) \cdot (x + a) = kx\,(x^2 - a^2)$ que, para $k = 1$ e $a = 1$, temos $P(x) = x(x^2 - 1)$.
Alternativa (D).

100 Temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -b \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = c \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -d \\ x_1x_2x_3x_4 = e \end{cases}$$

Se x_1, x_2 e x_3 são pares e x_4 ímpar, então b é ímpar e c, d e e são pares, pois são somas de números pares.
Alternativa (D).

107 $y = p(x - 2) = (x - 2)^2(x - 2 - 1)[(x - 2)^2 - 4] = (x - 2)^2(x - 3)(x^2 - 4x) = x(x - 2)^2(x - 3)(x - 4)$, cujas raízes são 0, 2, 3 e 4. Por outro lado, $P(5) > 0$, o que mostra que depois de $x = 4$ o ramo do gráfico é ascendente.
Alternativa (A).

108 $P(x) = -(2x + 1)(x^2 - 2)$
Basta estudar o sinal deste produto por meio da tabela:

	$-\infty$ a $-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$ a $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ a $\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$ a $+\infty$
$2x + 1$	−		−	0	+		+
$x^2 - 2$	+	0	−		−		+
$(2x + 1)(x^2 - 2)$	−	0	+	0	−	0	+
$-(2x + 1)(x^2 - 2)$	+	0	−	0	+	0	−

Como devemos ter valores negativos,

$$-\sqrt{2} < x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > \sqrt{2}.$$

Alternativa (D).

110 Temos que as raízes são −4, 2, 2 e $p(0) = d = 4$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \Rightarrow -4 + 2 + 2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow b = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \Rightarrow -8 - 8 + 4 = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = -12 \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \Rightarrow -16 = -\frac{d}{a} \Rightarrow -16 = -\frac{4}{a} \Rightarrow \\ \Rightarrow a = \frac{1}{4}, c = -3, b = 0 \end{cases}$$

Alternativa (D).

112 $p(x) = x + x^3 + x^5 + ... + x^{2n+1} =$

$$= \frac{x^{2n+1} \cdot x^2 - x}{x^2 - 1} = x \cdot \frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1} \quad (x \neq \pm 1)$$

$x = 0$ ou $x^{2n+2} = 1$. Como $x \neq \pm 1$, temos $2n$ raízes complexas.
Alternativa (B).

116 Como i é raiz da equação $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0$, $-i$ também será. Retirando-as pelo algoritmo de Ruffini, temos:

	1	−4	6	−4	5
i	1	$-4 + i$	$-4i + 5$	$5i$	0
$-i$	1	−4	5	0	

As demais raízes serão as raízes da equação $x^2 - 4x + 5 = 0$:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

118 Calculemos as raízes da equação $6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x = 0$:
$x(6x^3 - 5x^2 - 7x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou
$6x^3 - 5x^2 - 7x + 4 = 0$
As prováveis raízes inteiras são ±1, ±2, ±4.
Testemos o valor -1 pelo algoritmo de Ruffini.

	6	−5	−7	4
−1	6	−11	4	0

Como -1 é raiz, as demais serão as raízes de $6x^2 - 11x + 4 = 0$:

$$x = \frac{11 \pm 5}{12} \Rightarrow x = \frac{4}{3} \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

O polinômio fatorado é:

$$p(x) = 6x(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{4}{3}\right).$$ Seu final será:

$$+ \quad -1 \quad - \quad 0 \quad + \quad \frac{1}{2} \quad - \quad \frac{4}{3} \quad +$$

Os intervalos são $(-1, 0)$ ou $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$ cuja soma dos comprimentos é:

$$S = 0 - (-1) + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = 1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}.$$

Alternativa (D).

129 Temos que a equação $2x^6 - 4x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 4x - 2 = 0$ é recíproca de 2ª classe, tendo, portanto, as raízes $x = 1$ e $x = -1$. Retirando-as pelo algoritmo de Ruffini:

	2	−4	0	0	0	4	−2
1	2	−2	−2	−2	−2	2	0
−1	2	0	−2	0	−2	0	

As demais raízes são as da equação:
$x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x - 2 = 0$, que é uma equação biquadrada $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$.

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{3}}$$

$$S = \left\{1, -1, \sqrt{1+\sqrt{3}}, -\sqrt{1+\sqrt{3}}, \sqrt{1-\sqrt{3}}, -\sqrt{1-\sqrt{3}}\right\}$$

em que as quatro primeiras são reais positivas e $\pm\sqrt{1-\sqrt{3}}$ são complexas.
Alternativa (B).

134 $(2343)_x = (534)_{x+3} \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 + 4x + 3 = 5(x+3)^2 + 3(x+3) + 4$
$2x^3 + 3x^2 + 4x + 3 = 5(x^2 + 6x + 9) + 3x + 9 + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^3 - 2x^2 - 29x - 55 = 0$,
cujas raízes prováveis são 1, −1, 5, −5, 11, −11, 55, −55.
Testando-as, obtemos $x = 5$.

	2	−2	−29	−55
5	2	8	11	0

As demais raízes são as da equação $2x^2 + 8x + 11 = 0$:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{-24}}{4} = \frac{-4 \pm i\sqrt{6}}{2}$$

135 a) $x^3 + 3x^2 + 9x + 9 = 0$
Fazendo $x = y - 1$, temos $(y-1)^3 + 3(y-1)^2 + 9(y-1) + 9 = 0$
$y^3 - 3y^2 + 3y - 1 + 3y^2 - 6y + 3 + 9y - 9 + 9 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y^3 + 6y + 2 = 0.$

Fazendo, agora, $y = z - \frac{2}{z}$, temos:

$$\left(z - \frac{2}{z}\right)^3 + 6\left(z - \frac{2}{z}\right) + 2 = 0$$

$$z^3 - 3z^2 \frac{2}{z} + 3z \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + 6z - \frac{12}{z} + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^3 - \frac{8}{z^3} + 2 = 0$$

Logo, $z^6 + 2z^3 - 8 = 0$ é uma equação trinômia.
b) Fazendo $z^3 = t$, temos:

$$t^2 + 2t - 8 = 0 \Rightarrow t = \frac{-2 \pm 6}{2} \Rightarrow t = 2 \text{ ou } t = -4$$

$$z^3 = 2 \Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{2};\ z_2 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right);$$

$$z_3 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right);$$

$$z_4 = -\sqrt[3]{4};\ z_5 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right);\ z_6 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

139 As raízes só podem ser 2, i, i, $-i$, $-i$. Assim, o polinômio será $(x - 2)(x - i)^2(x + i)^2 = (x - 2)(x^2 + 1)^2 = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2$, cuja soma dos coeficientes é -4.
Alternativa (A).

149 Façamos $e^x = y$. A equação fica: $2y^3 + ay^2 + 7y + b = 0$.
Sejam $x_1 = m - r$, $x_2 = m$ e $x_3 = m + r$ em PA
$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow m - r + m + m - r = 0 \Rightarrow m = 0$
e as raízes ficam $x_1 = -r$, $x_2 = 0$ e $x_3 = r$.

As raízes da equação em y serão então: $y_1 = e^{-r}$, $y_2 = e^0 = 1$ e $y_3 = e^r$, que estão em PG de razão e^r, cujo produto $y_1y_2y_3 = 1$. Como $y = 1$, devemos ter $2 + a + 7 + b = 0 \Rightarrow a + b = -9$. Por outro lado,

$$y_1y_2y_3 = 1 \Rightarrow -\frac{b}{2} = 1 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a = -7,$$

então $a - b = -7 + 2 = -5$.

Alternativa (D).

164 Considerando $x - 2 = y$, temos: $y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 - (y + 2)^4 = 0$

$(y + 1)^4 - (y + 2)^4 = 0 \Rightarrow (y + 1)^4 = (y + 2)^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow y + 1 = \pm(y + 2)$.

$y + 1 = y + 2 \Rightarrow 1 = 2$ não leva à solução:

$$y + 1 = -y - 2 \Rightarrow 2y = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Alternativa (A).

169 Devemos ter $x_1 = x_2 = a$ e $x_3 = b$. Como $2x^3 + 7x^2 + 4x + k = 0$, temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a + a + b = -\dfrac{7}{2} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a^2 + ab + ab = 2 \Rightarrow \\ x_1x_2x_3 = a^2b = -\dfrac{k}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -\dfrac{7}{2} \Rightarrow \\ a^2 + 2ab = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow 3a^2 + 7a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$ ou $a = -\dfrac{1}{3}$

Então, $a = -2 = x_1$ (inteiro).

$$b = \frac{1}{2} = x_2$$

$$k = -2a^2b = -2 \cdot (-2)^2 \cdot \frac{1}{2} = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k + x_1)x_2 = (-4 - 2) \cdot \frac{1}{2} = -3$$

Alternativa (B).

172 A equação deverá ter as raízes i, $-i$, 1, -1 com coeficientes dos termos equidistantes dos extremos simétricos.

$p(x) = \mathrm{A}x^6 + \mathrm{B}x^5 + \mathrm{C}x^4 - \mathrm{C}x^2 - \mathrm{B}x - \mathrm{A}$

$$\begin{cases} p(i) = -\mathrm{A} + \mathrm{B}i + \mathrm{C} + \mathrm{C} - \mathrm{B}i - \mathrm{A} = 0 \Rightarrow \mathrm{C} - \mathrm{A} = 0 \Rightarrow \mathrm{C} = \mathrm{A} \\ p(2) = 64\mathrm{A} + 32\mathrm{B} + 16\mathrm{C} - 4\mathrm{C} - 2\mathrm{B} - \mathrm{A} = -\dfrac{105}{8} \Rightarrow 21\mathrm{A} + 10\mathrm{B} + 4\mathrm{C} = -\dfrac{35}{8} \\ p(-2) = 64\mathrm{A} - 32\mathrm{B} + 16\mathrm{C} - 4\mathrm{C} + 2\mathrm{B} - \mathrm{A} = \dfrac{255}{8} \Rightarrow 21\mathrm{A} - 10\mathrm{B} + 4\mathrm{C} = \dfrac{85}{8} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$\mathrm{A} = \mathrm{C} = \frac{1}{8},\ \mathrm{B} = -\frac{3}{4} = -\frac{6}{8} \qquad p(x) = \frac{1}{8}(x^6 - 6x^5 + x^4 - x^2 + 6x - 1)$$

	1	−6	1	0	−1	6	−1
1	1	−5	−4	−4	−5	1	0
−1	1	−6	2	−6	1	0	
i	1	$-6 + i$	$1 - 6i$	i	0		
$-i$	1	−6	1	0			

As demais raízes são as da equação $x^2 - 6x + 1 = 0$ cuja soma é 6. A soma das outras raízes é $1 - 1 + i - i = 0$.

Alternativa (C).

172 Como as equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + bx + 12 = 0$ têm duas raízes comuns, elas são divisíveis por um polinômio do 2º grau, pois $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + Ax + B$. Os restos das divisões devem ser identicamente nulos.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + ax^2 + 0x + 18 & x^2 + Ax + B \\ \cline{2-2} \underline{-x^3 - Ax^2 - Bx} & x + (a - A) \\ (a - A)x^2 - Bx + 18 & \\ \underline{-(a - A)x^2 - A(a - A)x - B(a - A)} & \end{array}$$

$$(-Aa + A^2 - B)x + (-Ba + AB + 18) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -aA + A^2 - B = 0 \text{ (I)} \\ -Ba + AB = -18 \text{ (II)} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 0x^2 + bx + 12 & x^2 + Ax + B \\ \cline{2-2} \underline{-x^3 - Ax^2 - Bx} & x - A \\ - Ax^2 + (b - B)x + 12 & \\ \underline{Ax^2 + A^2x + AB} & \end{array}$$

$$(A^2 + b - B)x + (AB + 12) \Rightarrow \begin{cases} A^2 + b - B = 0 & \text{(III)} \\ AB + 12 = 0 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Temos o sistema:

$$\begin{cases} B = A(A - a) & \text{(I)} \Rightarrow A - a = \dfrac{B}{A} \\ B(A - a) = -18 & \text{(II)} \\ B = A^2 + b & \text{(III)} \\ AB = -12 & \text{(IV)} \end{cases}$$

$A - a$ em (II): $B \cdot \dfrac{B}{A} = -18 \Rightarrow$

$\Rightarrow B^2 = -18A \Rightarrow A = -\dfrac{B^2}{18}$

A em (IV): $-\dfrac{B^2}{18} \cdot B = -12 \Rightarrow$

$\Rightarrow B^3 = 12 \cdot 18 = 216 \Rightarrow B = 6$

$B = 6$ em (IV): $A = 42$

$B = 6$ e $A = -2$ em (III): $6 = 4 + b \Rightarrow b = 2$

em (II): $6(-2 - a) = -18 \Rightarrow a = 1$

As raízes comuns são da equação $x^2 + Ax + B = x^2 - 2x + 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{-20}}{2} = 1 \pm 5i$.

As raízes não comuns são das equações $x + (a - A) = x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ e $x - A = x + 2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = -2$.

Apêndice

Exercícios de fixação, p. 392

1 Em primeiro lugar, calculemos $f(n)$ para alguns valores baixos atribuídos a n.

Temos:

$f(1) = 2$
$f(2) = f(1 + 1) = f(1) - 3 = -1$
$f(3) = f(2 + 1) = f(2) - 3 = -4$

Parece-nos que $f(n) = 5 - 3n$ para n natural positivo. Para provar este fato, usemos a indução finita.

Em outras palavras, seja $P(n)$ a seguinte afirmação:

$$P(n): f(n) = 5 - 3n$$

Mostremos que $P(n)$ é verdadeira para todo n natural.

- $P(1)$ diz que $f(1) = 2$. Como isso é dado do enunciado, $P(1)$ é verdadeira.
- Passo de indução: mostremos agora que $P(k)$ implica $P(k + 1)$ para todo k natural. De fato, se vale $P(k)$ para algum k, isto é, se tivermos:

$$f(k) = 5 - 3k,$$

então teremos:

$f(k + 1) = f(k) - 3 = (5 - 3k) - 3 = 5 - 3(k + 1)$, confirmando que $P(k + 1)$ é verdadeira.

Como $P(1)$ vale, e $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ para todo k natural, concluímos, por indução, que $P(n)$ é verdadeira para todo n natural. Assim:

$$f(50) = 5 - 3 \cdot 50 = -145$$

Comentário: O modo mais simples para resolução é observar que $f(n)$ é uma PA e usar a fórmula que dá o termo geral de uma PA. Entretanto, a demonstração por indução realizada anteriormente é uma maneira rigorosa de demonstrar a fórmula do termo geral da PA.

2 Seja $f(n)$ o total de balas na pilha, isto é:

$$f(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

Vejamos se algum padrão é encontrado com valores baixos atribuídos a n:

$f(1) = 1$
$f(2) = 5$
$f(3) = 14 = 2 \cdot 7$
$f(4) = 30$

$f(5) = 55 = 5 \cdot 11$

$f(6) = 91 = 7 \cdot 13$

$f(7) = 140$

$f(8) = 204 = 12 \cdot 17$

Note como os maiores fatores parecem incluir os ímpares, crescendo de 2 em 2. Então, vamos tentar encontrar um padrão para $\frac{f(n)}{2n+1}$.

$$\frac{f(1)}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{f(2)}{5} = 1$$

$$\frac{f(3)}{7} = 2$$

$$\frac{f(4)}{9} = \frac{10}{3}$$

$$\frac{f(5)}{11} = 5$$

$$\frac{f(6)}{13} = 7$$

$$\frac{f(7)}{15} = \frac{28}{3}$$

$$\frac{f(8)}{17} = 12$$

Multiplicando esses números por 3, para eliminar as frações, ficamos com a sequência: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ...

Já conhecemos esse padrão. Por exemplo, note que esses números parecem ser exatamente a segunda coluna do triângulo de Pascal, isto é, eles são da forma $C_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$. Logo, se todos esses palpites estiverem corretos, teremos:

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2}\frac{1}{3}(2n+1)$$

$\left(\text{o } \frac{1}{3} \text{ é para compensar aquela multiplicação por 3 que fizemos}\right)$.

Simplificando, nosso palpite é:

$$f(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Apesar de essa parte ter sido a mais difícil do problema, o raciocínio anterior não prova coisa alguma – temos agora de demonstrar que, de fato, $f(n)$ tem essa expressão. Vamos verificar por indução, ou seja, definir

$$P(n)\colon 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Queremos mostrar que $P(n)$ é verdadeira para $n = 1, 2, 3, \dots$

- $P(1)$ é verdadeira. De fato, $1^2 = 1 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2+1)}{6}$.
- Suponha agora que $P(k)$ é verdadeira para um k qualquer, isto é, que vale a igualdade

$$1^2 + 2^2 + \dots + (k-1)^2 + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Somando $(k+1)^2$ dos dois lados, temos

$$1^2+2^2+\dots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

Agora é só fatorar a expressão do lado direito:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= (k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6} + k + 1\right) =$$

$$= \frac{(k+1)}{6}(2k^2 + 7k + 6) =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Ou seja, acabamos de mostrar que, se $P(k)$ é verdadeira, então:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

que é exatamente $P(k+1)$. Em suma, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para cada k natural.

- Juntando tudo, provamos por indução que $P(n)$ é verdadeira para todo n natural, ou seja, que

$$f(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Comentário: há várias maneiras para "adivinhar" a fórmula, algumas mais precisas do que outras, e depende muito da experiência do aluno/professor/leitor. Mesmo que a fórmula tenha

sido adivinhada por métodos bastante vagos, a demonstração por indução é a parte formal do problema, é ela que comprovará se aquela fórmula "adivinhada" realmente vale ou não. Considerando essa informação, há maneiras mais precisas de encontrar fórmulas desse tipo por "PAs de ordens maiores" (vide Apêndice do Capítulo 2, Volume 2).

3 Por indução:

- A igualdade está correta para $n = 1$?
  Sim, pois
  $S_1 = 1 \cdot 2 = 2$ e $\frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2$.
- Suponha agora que para um certo k natural positivo valha:
  $S_k = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + k(k + 1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$.
  Se isso valer, então a soma S_{k+1} vale

$$S_{k+1} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + k(k + 1) + (k + 1)(k + 2) =$$

$$= S_k + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) =$$

$$= (k + 1)(k + 2)\left(\frac{k}{3} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3},$$

  que é a expressão $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, fazendo $n = k + 1$.
- Juntando tudo, por indução, conclui-se que

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + (n - 1)n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

  para todo n natural positivo.

4 Mais uma vez, por indução:

- Se $n = 3$, temos $3n^2 - n = 3 \cdot 3^2 - 3 = 24 > 23$, ou seja, a proposição está correta quando $n = 3$.
- Agora, suponha que a proposição está correta para um certo valor $k \geq 3$, isto é, suponha que:

$$3k^2 - k \geq 23$$

  Então:
  $3(k + 1)^2 - (k + 1) = 3k^2 + 6k + 3 - k - 1 =$
  $= (3k^2 - k) + (6k^2 + 2)$

  Como o primeiro termo é maior que 23 e o segundo é maior que 0 (pois $k \geq 3 > 0$), temos

$$3(k + 1)^2 - (k + 1) > 23 + 0 = 23,$$

  ou seja, se a proposição valer para um certo $k \geq 3$, valerá para $k + 1$ também.
- Portanto, por indução finita, a proposição é válida para todo natural $n \geq 3$, isto é, $3n^2 - n > 23$ sempre que $n > 2$ for natural.

5 Comecemos por $n = 5$:

- Se $n = 5$, temos $2^n = 2^5 = 32$ e $n^2 = 5^2 = 25$. Neste caso, $2^n > n^2$.
- Agora suponha que, para um certo $k \geq 5$, tem-se

$$2^k > k^2.$$

  Queremos provar por algum meio que $2^{k+1} > (k + 1)^2$. Vejamos o que podemos fazer usando a desigualdade acima:
  $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2 = k^2 + k^2$
  Como $(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1$, o que queremos é mostrar que $k^2 > 2k + 1$. Mas, realmente, completando quadrados:

$$k^2 > 2k + 1 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 > 2 \Leftrightarrow (k - 1)^2 > 2$$

  Esta última desigualdade é claramente verdadeira se $k \geq 5$. Então o passo de indução está demonstrado. Para maior clareza, vamos reordenar o raciocínio lógico que o demonstra a seguir:
  a) Como $k \geq 5$, então $k - 1 \geq 4$ e, portanto, $(k - 1)^2 \geq 16$. Logo, $k^2 \geq 2k + 15$.
  b) Assim, se $2^k > k^2$, então
  $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2 = k^2 + k^2 \geq k^2 + (2k + 15) =$
  $= (k + 1)^2 + 14 > (k + 1)^2$.
- Assim, provamos, por indução, que $2^n > n^2$ para todo n natural maior ou igual a 5.

6 Se $n = 2$, então $4n^2 - 3n = 16 - 6 = 10 > 2$.
Agora vamos ao passo de indução: suponha que $4k^2 - 3k > 2$ para algum k natural e maior que 1.
Então:

$$4(k + 1)^2 - 3(k + 1) =$$
$$= (4k^2 - 3k) + (8k + 1) > (2) + (9) > 2$$

Assim, mostramos que, se $4k^2 - 3k > 2$ (com $k > 1$), logo $4(k + 1)^2 - 3(k + 1) > 2$.

Conclusão: por indução, temos que $4n^2 - 3n > 2$ para todo n natural maior que 1.

7 Para $n = 4$, temos $2^4 = 16 < 24 = 4!$
Entretanto, se para algum $k \geq 4$ valer $2^k < k!$, então $(k + 1)! = (k + 1) \cdot k! > (k + 1) \cdot 2^k > 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

Ou seja, para $k = 4, 5, 6, ...$, vale a implicação

$$(2^k < k!) \Rightarrow \left(2^{k+1} < (k + 1)!\right)$$

Conclusão: por indução finita, temos que $2^n < n!$ para todo k inteiro maior ou igual a 4.

8 Se $n = 0$, temos $2^n - 1 = 2^0 - 1 = 0$, que é múltiplo de 3.
Agora, suponha que, para um determinado k par, tem-se que $2^k - 1$ é múltiplo de 3. Vejamos o que isso revela sobre o próximo expoente par, isto é, $2^{k+2} - 1$:

$$2^{k+2} - 1 = 2^k \cdot 2^2 - 1 = \\ = 4 \cdot 2^k - 1 = 3 \cdot 2^k + (2^k - 1)$$

Ou seja, $2^{k+2} - 1$ é um múltiplo de 3, mais o número $2^k - 1$, que supomos ser um múltiplo de 3.
Em outras palavras, mostramos aqui que, se $2^k - 1$ é múltiplo de 3, então $2^{k+2} - 1$ também é.
Assim, a afirmação "$2^k - 1$ é múltiplo de 3" vale para $n = 0, 2, 4, 6, 8, ...$, ou seja, para todo n par.

9 Como o enunciado sugere, vamos dividir a pilha em duas: uma é a pilha de base quadrada ADFE, que tem $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ balas. A outra é uma pilha de base retangular; esta pilha pode ser dividida em $(m - n)$ seções verticais iguais (por exemplo, as seções triangulares IBC e HE'F'), cada uma com $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ balas. Juntando tudo, o número total de balas é:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (m - n)\frac{n(n+1)}{2} = \\ = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} + m - n\right) = \\ = \frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6}.$$

Note que, se $m = n$, a conta dá $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, como era de se esperar.

10 Tentemos demonstrar um fato mais geral: será que a proposição

$$P(n)\colon 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\ = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$$

é verdadeira para todo n natural positivo (em vez de apenas para $n = 100$)? Vejamos:

- Para $n = 1$, temos $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ do lado esquerdo e $\frac{1}{2}$ do lado direito. Então P(1) é verdadeira.
- Agora, suponha que $P(k)$ é verdadeira para algum k natural positivo, isto é, suponha que:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} ... + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \\ = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k}$$

Então, somando $\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$ a ambos os lados, ficamos com:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \\ = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$$

Quase todos os termos do lado direito são desejados, mas precisamos eliminar o $\frac{1}{k+1}$, e o sinal do $\frac{1}{2k+2}$ não está como queremos. Entretanto, podemos operar estes dois "termos problemáticos" da seguinte forma:

$$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+1}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2k+2}$$

Ou seja, a expressão do lado direito é:

$$\frac{1}{k+1} + \left(\frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1}\right) - \frac{1}{2k+2} = \\ = \left(\frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1}\right) + \frac{1}{2k+2}$$

Portanto, $P(k + 1)$ é verdadeira.
- Finalmente, por indução, mostramos que $P(n)$ é verdadeira para todo natural positivo, isto é, que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\ = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$$

para todo n positivo. Colocando agora $n = 100$, obtemos o resultado pedido no enunciado.