COLEÇÃO APRENDER

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA

para o ensino médio – volume III

MANUAL DO PROFESSOR

Miguel Jorge

Mestre em Educação Matemática pela USU-RJ
Bacharel e licenciado em Matemática pela Uerj
Professor da Fundação Getulio Vargas – FGV-RJ
Professor do Colégio Santo Inácio – Rio de Janeiro – RJ
Engenheiro eletricista com especialização em Engenharia Econômica pela UFRJ

Ralph Costa Teixeira

Doutor em Matemática pela Universidade de Harvard, EUA
Mestre em Matemática pelo Impa-RJ
Engenheiro de Computação pelo IME-RJ
Professor adjunto da UFF-RJ

Thales do Couto Filho

Mestre em Educação Matemática pela USS-RJ
Bacharel e licenciado em Matemática pela Sesni-RJ
Engenheiro mecânico pela UFRJ
Professor da PUC-RJ
Professor do Colégio Santo Inácio, Colégio Zaccaria e da rede pública estadual do Rio de Janeiro

Felipe Ferreira da Silva

Licenciado em Matemática pela PUC-RJ
Professor do Colégio Santo Inácio e da Escola SESC de Ensino Médio – Rio de Janeiro – RJ

EDITORA *do* BRASIL

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Matemática para o ensino médio: volume III / Miguel Jorge… [et al.]. – São Paulo: Editora do Brasil; Rio de Janeiro: Fundação Getulio Vargas, 2011. – (Coleção aprender)

Outros autores: Ralph Costa Teixeira, Thales do Couto Filho, Felipe Ferreira da Silva
Suplementado pelo manual do professor.
ISBN 978-85-10-05030-2 (aluno)
978-85-10-05031-9 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Jorge, Miguel. II. Teixeira, Ralph Costa. III. Couto Filho, Thales do. IV. Silva, Felipe Ferreira da. V. Série.

11–04963 CDD–510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática: Ensino médio 510.7

Projeto
FGV Ensino Médio da Fundação Getulio Vargas

Presidente da FGV
Carlos Ivan Simonsen Leal

Coordenadora do FGV Ensino Médio
Marieta de Moraes Ferreira

Assistente de coordenação
Renato Franco

Projeto gráfico
Osvaldo Moreira da Silva

Capa
Washington Dias Lessa

Diretoria Executiva
Maria Lúcia Kerr Cavalcante Queiroz

Superintendência
Frederico Wolfgang Wickert

Gerência Editorial
Cibele Mendes Curto Santos

Supervisão Editorial
Felipe Ramos Poletti e Rita Rodrigues

Supervisão de Arte e Editoração
Carolina Cerutti

Coordenação de Revisão de Textos
Fernando Mauro S. Pires

Consultoria de Iconografia
Tempo Composto Col. de Dados Ltda.

Supervisão de Processos Editoriais
Marta Dias Portero

Supervisão de Direitos Autorais
Marilisa Bertolone Mendes

Edição
Valéria Elvira Prete e Cibeli de Oliveira Chibante

Assistência Editorial
Alexandre Braga D'Avila, Alexandre Garcia Macedo e Rodrigo Pessota

Produção Editorial e Diagramação
Conexão Editorial

Pesquisa Iconográfica
Angélica Nakamura e Elena Ribeiro

Ilustrações
Paulo César Pereira

Controle de Processos Editoriais
Leila P. Jungstedt e Carlos Nunes

1ª edição/1ª impressão – 2011
Impresso na Intergraf Indústria Gráfica

FGV ensino médio

Rua Jornalista Orlando Dantas, 37 – Rio de Janeiro/RJ – CEP 22231-010
Fone: (21) 3799-4434 – Fax: (21) 3799-4436
www.fgv.br/ensinomedio

EDITORA do BRASIL

Rua Conselheiro Nébias, 887 – São Paulo/SP – CEP 01203-001
Fone: (11) 3226-0211 – Fax: (11) 3222-5583
www.editoradobrasil.com.br

Apresentação

Este livro foi elaborado com a finalidade de oferecer subsídios de matemática elementar ao estudante brasileiro, visando introduzi-lo no ambiente universitário.

Fomos movidos pelo interesse de tratar com modernidade e rigor os conceitos fundamentais dessa linguagem universal. Em alguns momentos elevamos ligeiramente o nível de dificuldade dos exercícios e aprofundamos os conceitos com apêndices no final dos capítulos.

Este trabalho propõe-se também a complementar a bibliografia existente procurando compatibilizar os conceitos com os que deverão ser aprendidos na universidade.

Por outro lado, procuramos dar enfoques práticos, usados no cotidiano, contextualizando muitos exercícios para colocar o estudante a par das atividades mais frequentes durante a vida.

Assim, sem veleidades, entregamos aos nossos jovens este trabalho.

Os autores

Às nossas famílias, que, com paciência e incentivo, compreenderam os momentos de ausência, nos permitindo tornar realidade este trabalho.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

VETORES

www.plainpicture.com

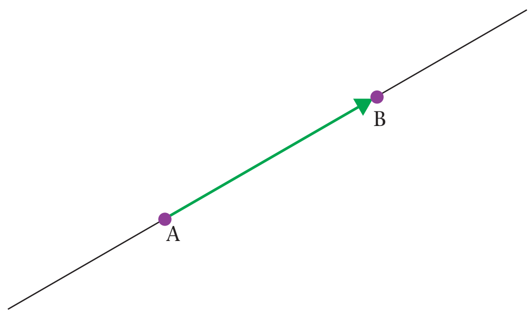
Vetores são objetos ideais para modelar várias grandezas físicas que têm tamanho, direção e sentido – como posição relativa a um ponto, velocidade, aceleração e força, por exemplo. Além disso, o uso de vetores facilita muito a resolução de problemas em Geometria e Geometria Analítica, como veremos nos capítulos a seguir. Na fotografia, um poste indica direções e distâncias para várias cidades do mundo. Usando esta fotografia e um mapa-múndi, você consegue descobrir em que lugar está este poste?

1 – VETORES

1.1 – Definição

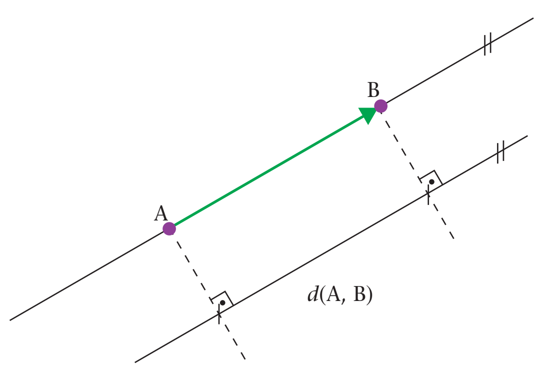
DEFINIÇÃO
Segmento orientado.

Chama-se **segmento orientado** ao segmento de reta definido pelo par ordenado de pontos A e B. A é a **origem** e B é a **extremidade** do segmento orientado.



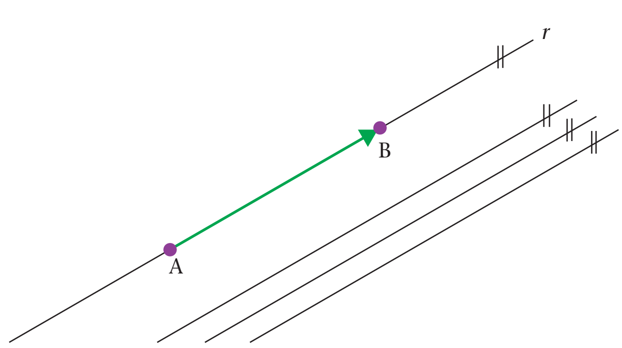
Num segmento orientado, destacamos três elementos:

• **Módulo** (ou **comprimento**, **norma**, **tamanho**)
É a distância entre os pontos A e B, numa determinada unidade.



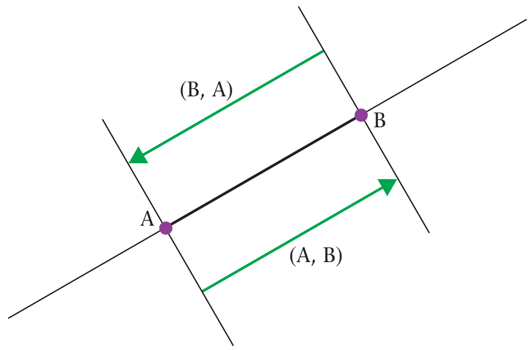
NOTA
Direção de uma reta *r* é o conjunto de todas as retas paralelas a *r*. Para determinar uma direção, basta escolher uma reta desse conjunto.

• **Direção**
É a direção da reta *r* suporte dos pontos A e B.



• **Sentido**

É a ordem em que são tomados os pontos A e B. Usa-se a notação (A, B) ou (B, A), dependendo da ordem em que são tomados os pontos.

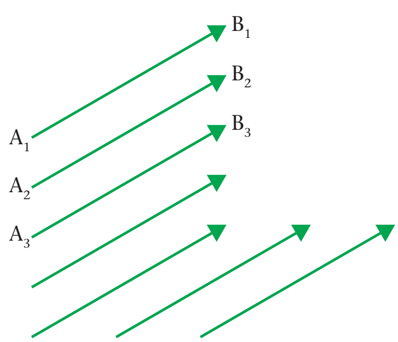


NOTA
Sobre uma direção existem dois sentidos: o de A para B e o de B para A.

NOTA
Quando A = B, temos o caso particular do **segmento orientado nulo**. Seu módulo é nulo, sua direção e sentido são indeterminados.

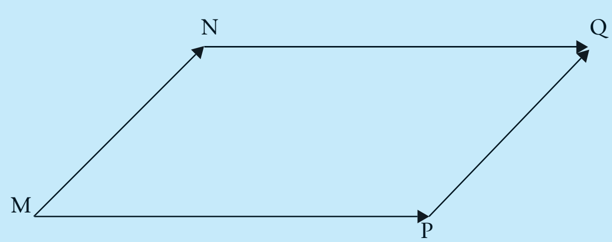
Dois segmentos orientados são **equipolentes** ou **equivalentes** se e somente se têm o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido.

DEFINIÇÃO
Equipolência ou equivalência de segmentos orientados.



Exemplo:

Num paralelogramo MNQP:



os segmentos orientados (M, N) e (P, Q) são equivalentes, assim como (M, P) e (N, Q). Já (M, P) e (Q, N) não são equivalentes, pois têm sentidos opostos.

Classe de equivalência de um segmento orientado é um conjunto de segmentos orientados equipolentes ao segmento dado.

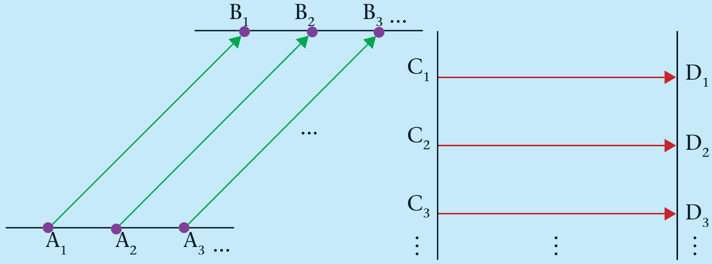
DEFINIÇÃO
Classe de equivalência de segmentos orientados.

OBSERVAÇÃO
Uma **relação de equivalência** R num conjunto C é uma relação que goza das propriedades:
I) **Reflexiva**
$\forall x \in C,\ x \mathrel{R} x$
II) **Simétrica**
$\forall x, y \in C,\ x \mathrel{R} y \Leftrightarrow y \mathrel{R} x$
III) **Transitiva**
$\forall x, y, z \in C,$
$x \mathrel{R} y$ e $y \mathrel{R} z \Rightarrow x \mathrel{R} z$

Neste contexto, uma **classe de equivalência** de um elemento $x \in C$ é o conjunto de todos os elementos y de C tais que $x \mathrel{R} y$: $C\ell(x) = \{y \in C \mid x \mathrel{R} y\}$. É comum usar o símbolo ~ para indicar a relação: $x \sim y$.

Exemplo:

A figura abaixo ilustra duas classes de equivalência:



$$C\ell((A_1, B_1)) = \{(A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots\}$$
$$C\ell((C_1, D_1)) = \{(C_1, D_1), (C_2, D_2), \ldots\}$$

DEFINIÇÃO
Vetor.

Vetor é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a um segmento orientado, a classe de equivalência de um segmento orientado.

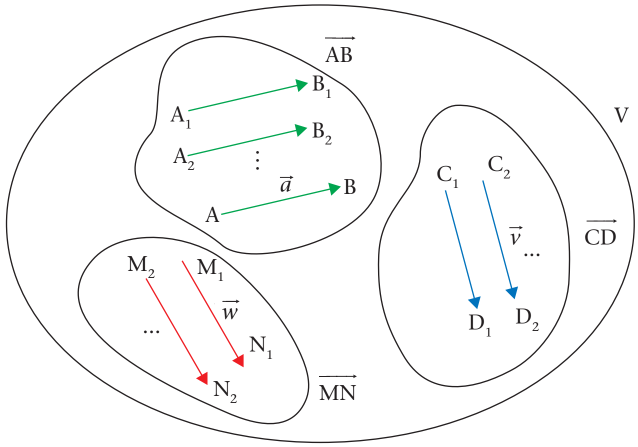
Usa-se a notação $\overrightarrow{AB}$, ou ainda $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}$ etc.

$\overrightarrow{AB} = C\ell((A, B)) = \{x \mid x \sim (A, B)\} = \{(A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots\}$

Podemos escolher qualquer segmento orientado da classe de equivalência para representar o vetor. Em geral, ao nos referirmos a um vetor, usamos apenas o representante da classe. Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{A_iB_i}$ representam a mesma classe, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_iB_i}$.

NOTA
Não confundir vetor com segmento orientado. Um vetor é uma classe de equivalência de um segmento orientado associada à relação de equivalência "ser equipolente" e um segmento orientado é um par ordenado de pontos.

Em outras palavras, se (A, B) e (A_1, B_1) são segmentos orientados equipolentes, seus vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{A_1B_1}$ são iguais.



V é o conjunto de todos os vetores. (A, B) é o representante da classe $\overrightarrow{AB}$.

Módulo, direção e sentido de um vetor são o módulo, a direção e o sentido de qualquer segmento da classe de equivalência. Para o módulo do vetor $\vec{v}$, usa-se a notação $\|\vec{v}\|$.

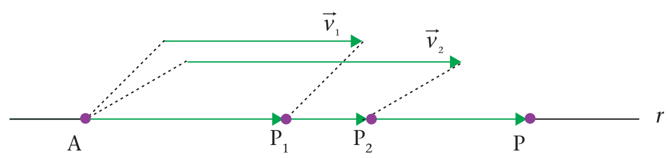
Quando o módulo de um vetor é 1, ele é dito **unitário**:

$$\vec{u} \text{ unitário} \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 1$$

Quando se escolhe o segmento orientado (A, B) para representar o vetor $\overrightarrow{AB}$, dizemos que o vetor $\overrightarrow{AB}$ está **aplicado** no ponto A. Neste caso, o ponto A é chamado de **origem** do vetor $\overrightarrow{AB}$ e B de **extremidade** do vetor $\overrightarrow{AB}$.

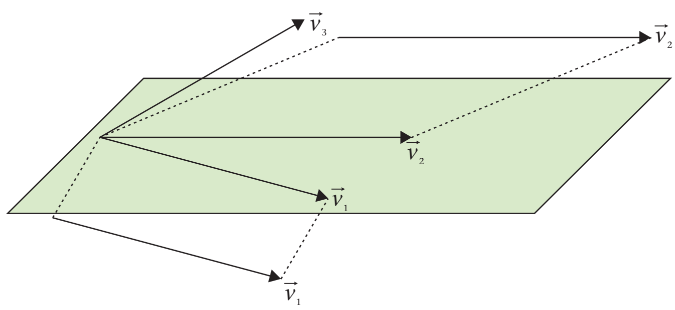
Vetores que têm a mesma direção são ditos **colineares**. Vetores colineares aplicados num mesmo ponto A têm a mesma reta suporte.

NOTA
O vetor nulo é considerado colinear com qualquer outro.



Vetores que sejam paralelos a um mesmo plano são ditos **coplanares**. Note que dois vetores são sempre coplanares. Já com três vetores, isto não ocorre necessariamente.

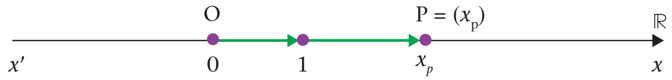
NOTA
$\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são coplanares, mas $\vec{v}_3$ não é coplanar com $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.



1.2 – Referenciais cartesianos

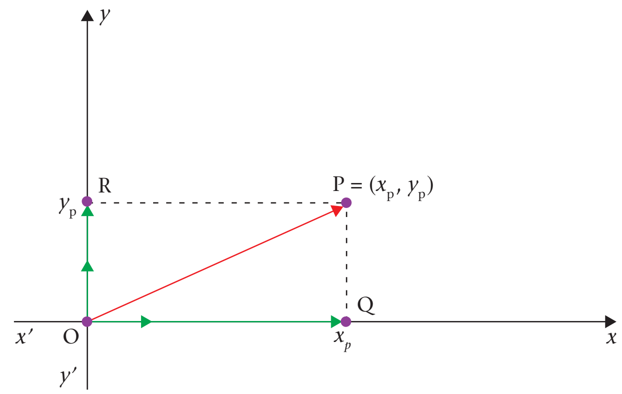
1.2.1 – Espaço unidimensional $\mathbb{R}$

Um ponto P qualquer da reta $x'Ox$ fica determinado por apenas um número que é a sua abscissa. Por isso, é comum dizer-se que a reta forma um espaço unidimensional ou de dimensão 1. A dimensão do espaço fica determinada pelo número de valores necessários para determinar um ponto nesse espaço (coordenadas).



1.2.2 – Espaço bidimensional $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Consideremos dois eixos $x'Ox$ e $y'Oy$ perpendiculares, orientados como na figura.

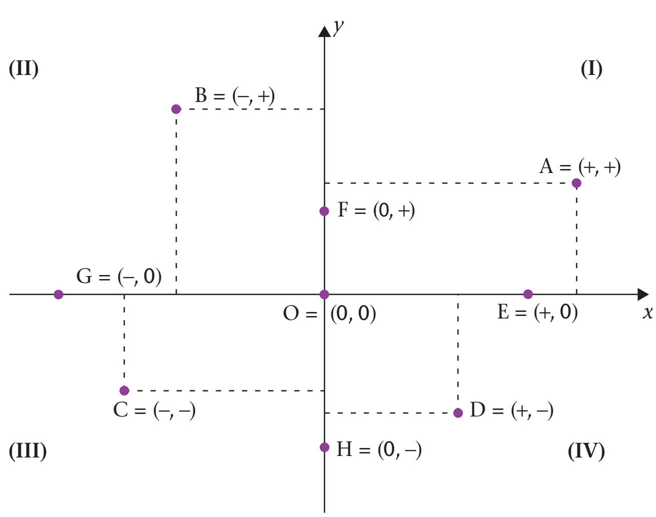


Um ponto P qualquer do plano fica determinado por dois números reais x_p e y_p, que são as coordenadas do ponto P.

O número x_p será a abscissa do ponto P, e y_p será a ordenada do ponto P.

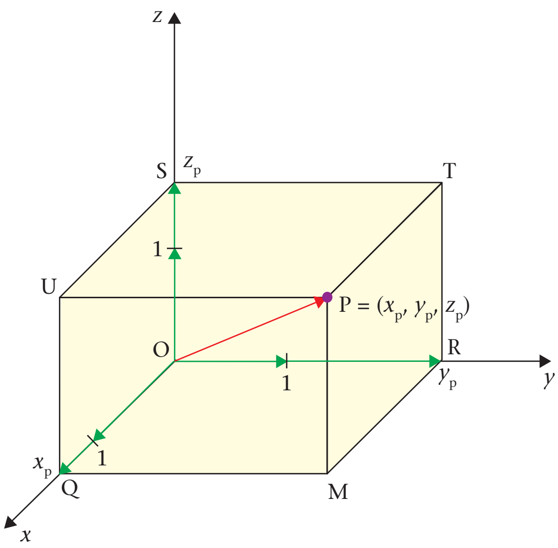
Os eixos $x'Ox$ e $y'Oy$ dividem o plano $\mathbb{R}^2$ em quatro regiões que são os quadrantes. Tais quadrantes são numerados no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Assim:

Região	x	y
(I)	+	+
(II)	–	+
(III)	–	–
(IV)	+	–
$x'Ox$	±	0
$y'Oy$	0	±
origem O	0	0



1.2.3 – Espaço tridimensional $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

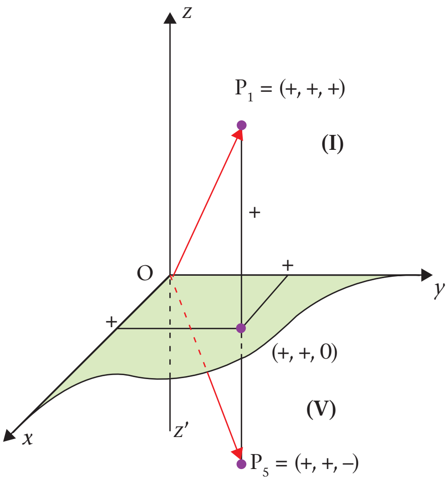
Consideremos três eixos $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ perpendiculares dois a dois, e orientados como mostra a figura.

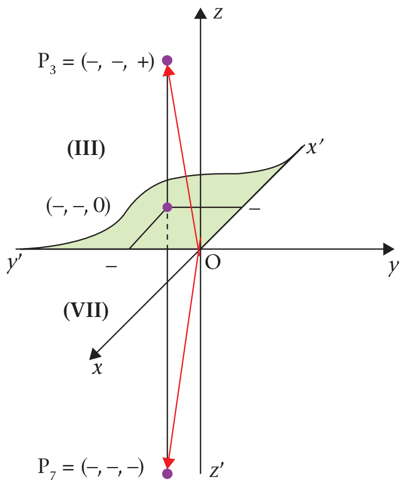


Um ponto P qualquer do espaço fica agora determinado por três números reais x_p, y_p e z_p, que são as coordenadas de P. Aqui, x_p é a abscissa, y_p é a ordenada e z_p é a cota ou a altura do ponto P.

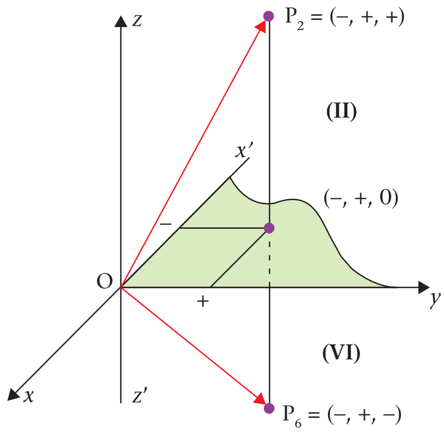
A figura OQMRTSUP é um paralelepípedo. Quando escrevemos $P = (x_p, y_p, z_p)$, o primeiro número do terno ordenado é sempre a **abscissa**, o segundo é sempre a **ordenada** e o terceiro é chamado **cota**. Como o ponto fica determinado por um terno ordenado, dizemos que o espaço é tridimensional, ou de dimensão 3.

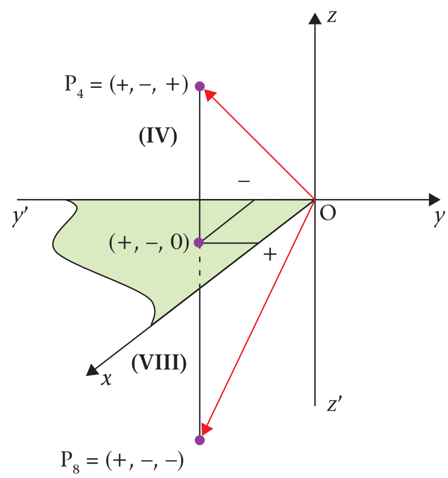
Os planos xOy, xOz e yOz dividem o espaço em oito regiões como indicam as figuras.





NOTA
Em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, o vetor $\overrightarrow{OP}$ é chamado **vetor posição** do ponto P.

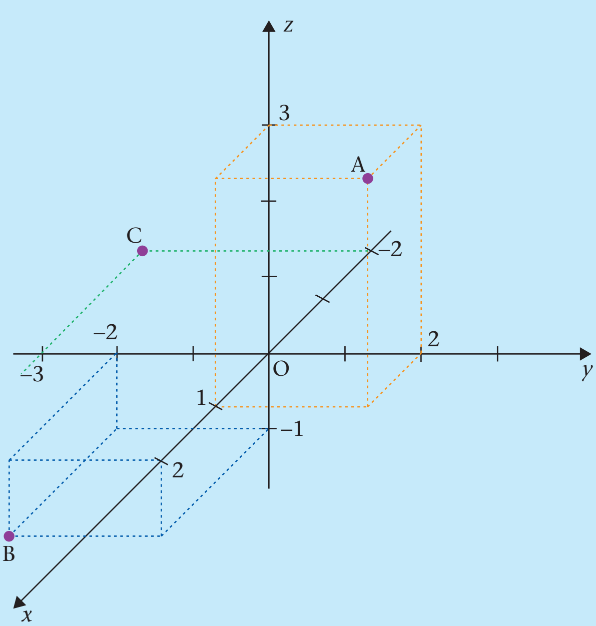




Exemplos:

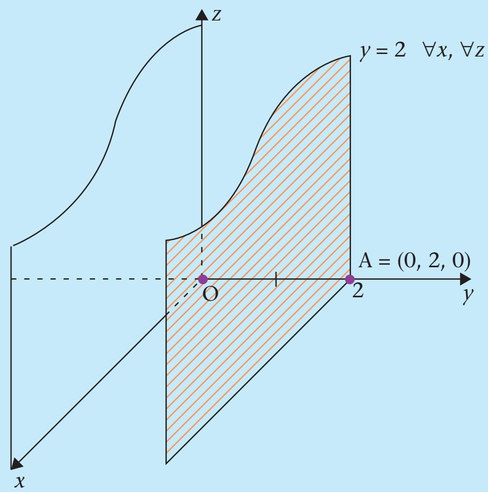
i) Marcar no $\mathbb{R}^3$ os seguintes pontos:

A = (1, 2, 3), B = (2, –2, –1) e C = (–2, –3, 0)



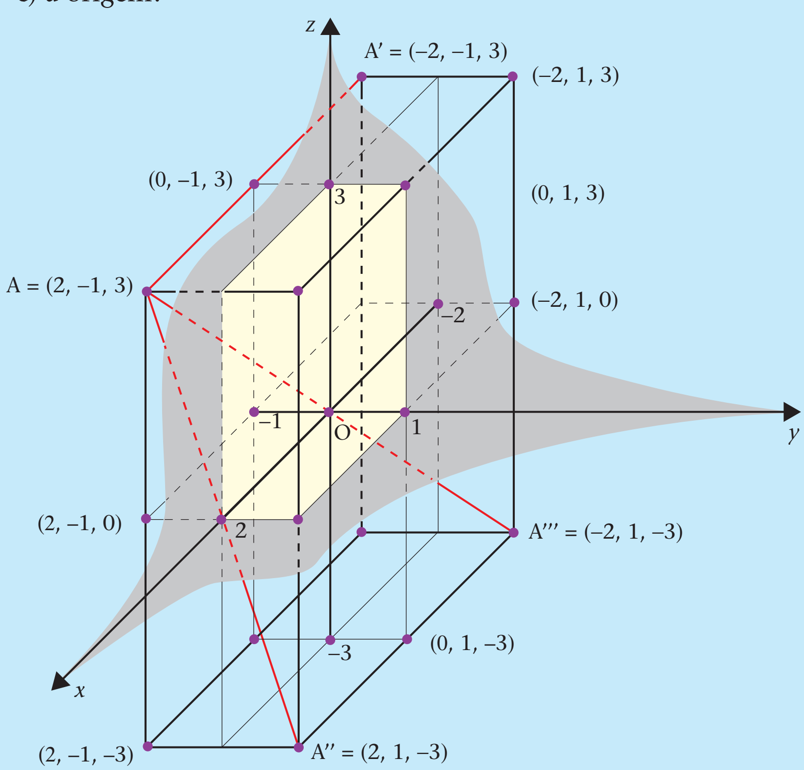
Observe que o ponto C está no plano *xOy*.

ii) Qual o lugar geométrico dos pontos do espaço tais que $y = 2$?



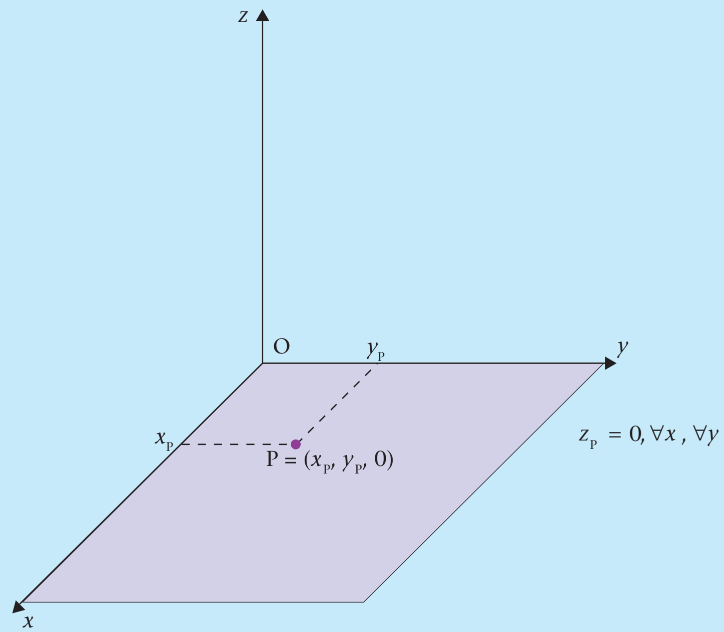
Todos os pontos do $\mathbb{R}^3$ que têm $y = 2$ são pontos de um plano paralelo ao plano zOx, que passa no ponto A = (0, 2, 0), isto é, são os pontos de coordenadas $(x, 2, z)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

iii) Quais os simétricos do ponto A = (2, –1, 3) em relação:
a) ao plano yOz?
b) ao eixo $x'x$?
c) à origem?



Temos que:
$S_{yOz}(A) = (-2, -1, 3) = A'$
$S_{x'x}(A) = (2, 1, -3) = A''$
$S_O(A) = (-2, 1, -3) = A'''$

iv) Qual é a condição necessária e suficiente para que um ponto do $\mathbb{R}^3$ pertença ao plano xOy?
É fácil notar que a condição é que $z = 0$.

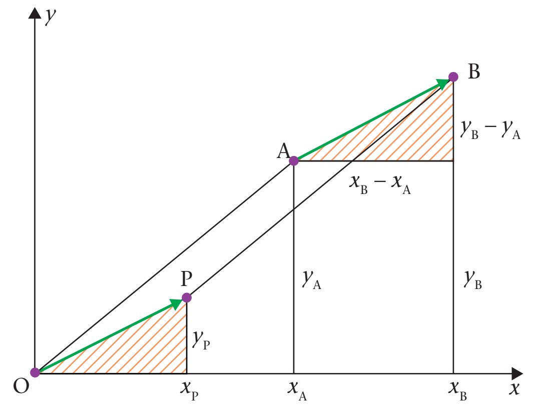


1.2.4 – Coordenadas de um vetor – notação de Grassmann

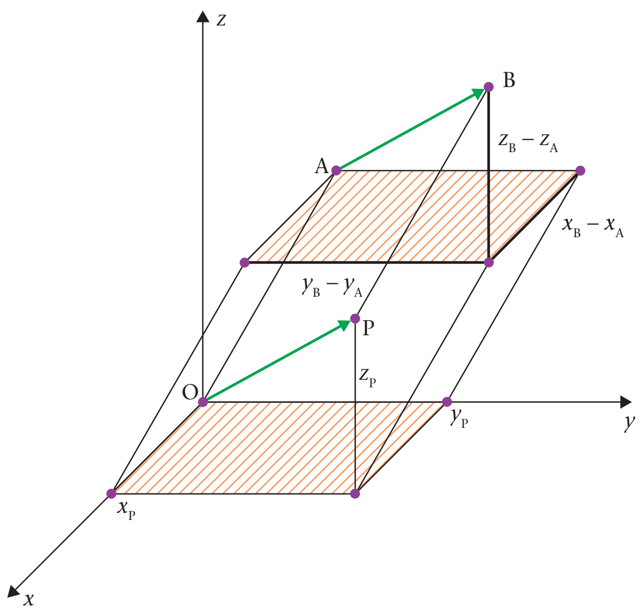
Coordenadas de um vetor são as coordenadas do único ponto P tal que seu vetor posição $\overrightarrow{OP}$ seja equipolente ao vetor dado.

a) Em $\mathbb{R}$:

b) Em $\mathbb{R}^2$:



c) Em $\mathbb{R}^3$:



As coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ são as coordenadas do ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$.

Sejam $P = (x_P)$ ou $P = (x_P, y_P)$ ou $P = (x_P, y_P, z_P)$ respectivamente no $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Temos:

$x_P = x_B - x_A$; $y_P = y_B - y_A$ e $z_P = z_B - z_A$

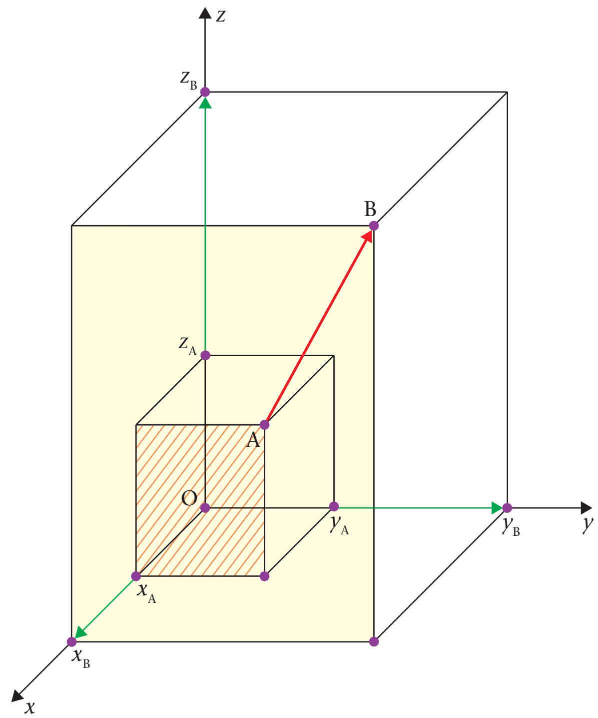
e escrevemos:

a) no $\mathbb{R}^1$: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)$

b) no $\mathbb{R}^2$: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A)$

c) no $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A)$

NOTA
Tracemos pelo ponto A um plano paralelo ao plano yOz e pelo ponto B outro plano também paralelo ao plano yOz. Esses planos determinam sobre o eixo Ox as abscissas x_A e x_B. A abscissa do vetor $\overrightarrow{AB}$ será a diferença $x = x_B - x_A$. De maneira análoga, com planos paralelos ao plano xOz e xOy, respectivamente, obtém-se a ordenada $y = y_B - y_A$ e a cota $z = z_B - z_A$.



Obtemos as coordenadas de um vetor fazendo a diferença entre as coordenadas de mesmo nome da sua extremidade e da sua origem, nessa ordem. Sendo $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$, temos simbolicamente:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A) =$$
$$= (x_B,\ y_B,\ z_B) - (x_A,\ y_A,\ z_A) = B - A$$

Como B é a extremidade e A é a origem de $\overrightarrow{AB}$, temos:

vetor = extremidade – origem
$\overrightarrow{AB} = B - A$

Exemplos:

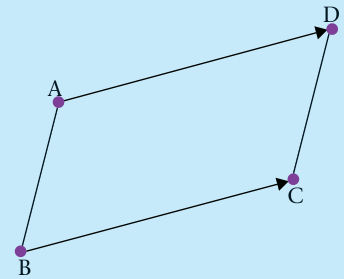
i) Sendo A = (1, 2), B = (–1, 3), C = (1, –1, 2) e D = (0, 2, –1), determinar as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$.
Temos que:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 3) - (1, 2) = (-1 - 1, 3 - 2) = (-2, 1)$$

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (0, 2, -1) - (1, -1, 2) = (0 - 1, 2 + 1, -1 - 2) = (-1, 3, -3)$$

ii) Verificar se o quadrilátero cujos vértices são os pontos A = (1, 2, –1), B = (5, 3, 0), C = (3, 1, 3) e D = (–1, 0, 2) é um paralelogramo.
ABCD é um paralelogramo se os vetores $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$ forem equipolentes, isto é, tiverem as mesmas coordenadas.

NOTA
Se os segmentos orientados são equipolentes, os vetores são iguais.



$\overrightarrow{AD} = D - A = (-1, 0, 2) - (1, 2, -1) = (-2, -2, 3)$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (3, 1, 3) - (5, 3, 0) = (-2, -2, 3)$

Como $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, o quadrilátero é um paralelogramo.

iii) Sendo A = (1, 2, 3), B = (–1, 2, 2) e C = (1, 1, 2), calcular D sabendo que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Temos B – A = D – C e seja D = (x, y, z).
$(-1, 2, 2) - (1, 2, 3) = (x, y, z) - (1, 1, 2)$
$(-2, 0, -1) = (x - 1, y - 1, z - 2)$
Logo:
$x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1$
$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$
$z - 2 = -1 \Rightarrow z = 1$
donde D = (–1, 1, 1)
ou simplesmente D = B – A + C.

NOTA
Observe que podemos operar com as letras A, B, C e D em vez de operar com as coordenadas. Só no final devemos substituir suas coordenadas.
Assim: D = B – A + C.

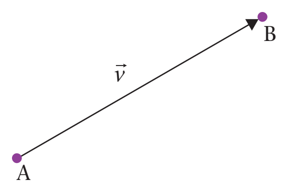
1.2.5 – Vetor como operador de translação

Um vetor pode ser considerado como um operador de translação, ou seja, aplicado a um ponto, transporta esse ponto de uma posição do espaço para outra.

Sejam $A = (x_A, y_A, z_A)$ e um vetor $\vec{v} = (x, y, z)$.

Aplicando o vetor $\vec{v}$ ao ponto A, obtemos o único ponto B tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Seja $B = (x_B, y_B, z_B)$.



Como $\overrightarrow{AB} = B - A$, temos: $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (x, y, z)$
que igualando dá: $x_B = x_A + x$, $y_B = y_A + y$, $z_B = z_A + z$

Simbolicamente, temos:

$B = (x_A + x, y_A + y, z_A + z) = (x_A, y_A, z_A) + (x, y, z) = A + \vec{v}$

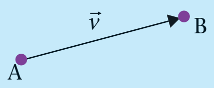
ou seja:

$B = A + \vec{v}$ ou $B = A + \overrightarrow{AB}$ que vale em qualquer espaço.

NOTA
Esta propriedade sugere o nome **vetor**, que vem do latim *vehere* que significa "transportar". Quando somamos (aplicamos) a um ponto um vetor, obtemos a extremidade desse vetor.

Exemplos:

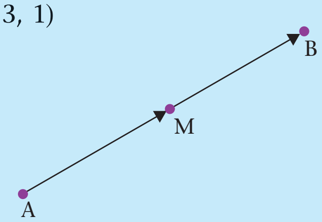
i) O ponto A = (1, –3) é a origem do vetor $\vec{v}$ = (5, 1). Qual é a extremidade do vetor $\vec{v}$?
Temos:



$B = A + \vec{v} = (1, -3) + (5, 1) = (6, -2)$

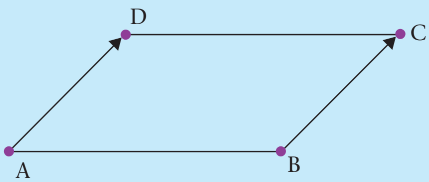
ii) O ponto M = (–1, 1, 2) é médio do segmento $\overline{AB}$ em que A = (0, –2, 1). Calcular o ponto B.
Temos que: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{AM} = M - A = (-1, 3, 1)$



Aplicando $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ em M, obtém-se B:
$B = M + \overrightarrow{MB} = M + \overrightarrow{AM} = (-1, 1, 2) + (-1, 3, 1)$
Logo: B = (–2, 4, 3)

iii) Sendo ABCD um paralelogramo em que A = (2, –1, 3), B = (0, 1, 1) e C = (–3, 2, –2), calcular o ponto D.

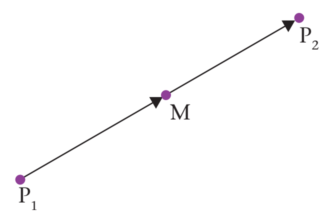


O ponto D será obtido somando-se ao ponto A o vetor $\overrightarrow{AD}$.

Como $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} = C - B = (-3, 2, -2) - (0, 1, 1)$
$\overrightarrow{AD} = (-3, 1, -3)$
Logo:
$D = A + \overrightarrow{AD} = (2, -1, 3) + (-3, 1, -3)$
D = (–1, 0, 0)

1.2.6 – Ponto médio de um segmento – centro de massa

Sejam $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$.



Seja $M = (x, y, z)$ o ponto médio de $\overline{P_1P_2}$.
Temos que $\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{MP_2} \Rightarrow M - P_1 = P_2 - M$.
$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$

Segue-se que: $x - x_1 = x_2 - x \Rightarrow 2x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

Analogamente, temos: $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ e $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$

Temos o ponto $M = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$ que simbolicamente denotamos:

$$\boxed{M = \frac{P_1 + P_2}{2}}$$

As coordenadas do ponto médio de um segmento valem as médias aritméticas das coordenadas de mesmo nome dos extremos.

Usando a notação de Grassmann:

$$\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{MP_2}$$
$$M - P_1 = P_2 - M$$
$$M + M = P_1 + P_2$$
$$2M = P_1 + P_2$$
$$M = \frac{P_1 + P_2}{2}$$

Exemplos:

Calcular o ponto médio do segmento AB, dados:

i) $A = (5)$ e $B = (3)$, então $M = \dfrac{5+3}{2} = 4$

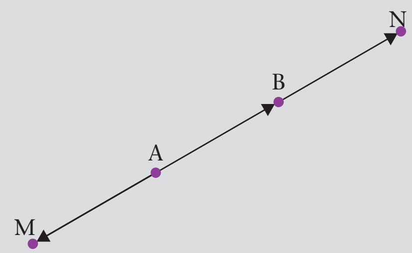
ii) $A = (3, 2)$ e $B = (5, 6)$, então $M = \dfrac{(3, 2) + (5, 6)}{2} = (4, 4)$

iii) $A = (3, 0, -1)$ e $B = (1, 2, -3)$, então $M = \dfrac{A + B}{2} = \dfrac{(3, 0, -1) + (1, 2, -3)}{2}$

$M = (2, 1, -2)$

Exercícios resolvidos:

1) Se A = (1, 2) e B = (3, 5) são os pontos que dividem $\overline{MN}$ em três partes congruentes, calcule M e N.
Solução:



$N = B + \overrightarrow{BN}$

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,\ 5) - (1,\ 2) = (2,\ 3)$

$N = (3,\ 5) + (2,\ 3)$

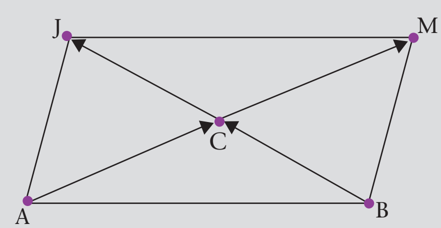
$N = (5,\ 8)$

$M = A + \overrightarrow{AM}$

$A = M + \overrightarrow{MA} = M + \overrightarrow{AB} \Rightarrow M = A - \overrightarrow{AB} = (1,\ 2) - (2,\ 3)$

M = (–1, –1)

2) Sendo A = (1, 1, 3) e B = (–1, 2, 2) vértices consecutivos de um paralelogramo ABMJ cujo centro é C = (–2, 0, 1), calcule os outros dois vértices M e J.
Solução:



$M = C + \overrightarrow{CM} = (-2,\ 0,\ 1) + \overrightarrow{AC}$

Como $\overrightarrow{AC}$ = C – A = (–2, 0, 1) – (1, 1, 3) = (–3, –1, –2), vem:

$M = (-2,\ 0,\ 1) + (-3, -1, -2)$

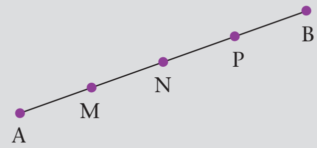
$M = (-5, -1, -1)$

$J = C + \overrightarrow{CJ} = (-2,\ 0,\ 1) + \overrightarrow{BC}$

$J = (-2,\ 0,\ 1) + (-1,\ -2, -1)$

$J = (-3, -2,\ 0)$

3) Calcule os pontos que dividem $\overline{AB}$, A = (–1, 3, 2) e B = (3, –5, 6), em quatro partes congruentes.

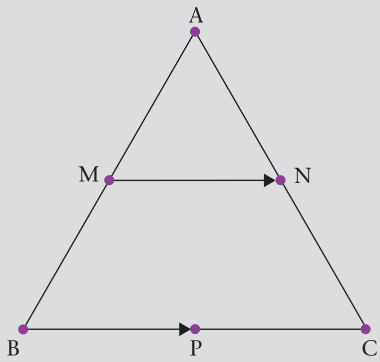


Solução:

$$N = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3-5}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (1, -1, 4)$$

$$M = \frac{A+N}{2} = (0, 1, 3) \text{ e } P = \frac{N+B}{2} = (2, -3, 5)$$

4) Dados os vértices do triângulo ABC, A = (1, 3), B = (–3, –3) e C = (5, 1), mostre o segmento que une os pontos médios dos lados AB e AC é paralelo a BC e equivale à metade de BC.
Solução:



Sejam M, N e P os pontos médios de AB, AC e BC respectivamente. Temos:

$$M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{1-3}{2}, \frac{3-3}{2}\right) = (-1, 0)$$

$$N = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (3,2) \quad \text{e} \quad P = \left(\frac{-3+5}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = (1, -1)$$

Calculemos $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BP}$ e $\overrightarrow{BC}$:

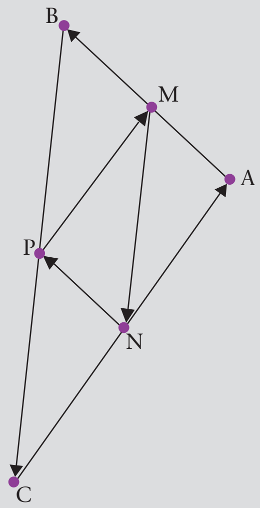
$$\overrightarrow{MN} = N - M = (4, 2), \ \overrightarrow{BP} = P - B = (4, 2) \text{ e } \overrightarrow{BC} = C - B = (8, 4)$$

donde $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Como $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BP}$ têm as mesmas coordenadas, então são equipolentes, o que demonstra a proposição.

5) Sendo M = (–1, 0, 2), N = (1, 1, –2) e P = (2, 1, 0) os pontos médios dos lados de um triângulo, calcule os vértices.

Solução:



Temos que:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = N - M = (2,\ 1,\ -4)$

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{NP} = P - N = (1,\ 0,\ 2)$

$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{NA} \Rightarrow \overrightarrow{PM} = M - P = (-3, -1,\ 2)$

Logo:

$C = P + \overrightarrow{PC} = (2,\ 1,\ 0) + (2,\ 1, -4) = (4,\ 2, -4)$

$B = M + \overrightarrow{MB} = (-1,\ 0,\ 2) + (1,\ 0,\ 2) = (0,\ 0,\ 4)$

$A = N + \overrightarrow{NA} = (1,\ 1, -2) + (-3, -1,\ 2) = (-2,\ 0,\ 0)$

Outra solução:

Usando a propriedade do ponto médio:

$M = \dfrac{A+B}{2} \Rightarrow A + B = 2M \quad \text{(I)}$

$N = \dfrac{A+C}{2} \Rightarrow A + C = 2N \quad \text{(II)}$

$P = \dfrac{B+C}{2} \Rightarrow B + C = 2P \quad \text{(III)}$

Somando as equações (I), (II) e (III), temos: 2A + 2B + 2C = 2M + 2N + 2P, logo, A + B + C = M + N + P (IV).

Fazendo (IV) – (I), (IV) – (II) e (IV) – (III), vem:

C = N + P – M = (4, 2, –4)

B = M + P – N = (0, 0, 4)

A = M + N – P = (–2, 0, 0)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Marque os seguintes pontos em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$:

a) A = (–2)

b) B = (–1, 3)

c) C = (2, –2, 1)

2 Quais os simétricos do ponto:

a) A = (–1) em relação a P = (3) e à origem?

b) A = (–2, 3) em relação a Ox e à bissetriz dos quadrantes ímpares?

c) A = (–1, 2, 2) em relação ao plano yOz e à origem?

3 Dê as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}$ em que:

a) A = (–3) e B = (2)

b) A = (3, 5) e B = (–1, 2)

c) A = (1, 0, –1) e B = (2, 1, 1)

4 Ache as coordenadas do ponto B, conhecendo o ponto A e o vetor $\overrightarrow{AB}$:

a) A = (–1), $\overrightarrow{AB}$ = (5)

b) A = (–1, 4), $\overrightarrow{AB}$ = (3, –1)

c) A = (1, –2, 2), $\overrightarrow{AB}$ = (4, 1, 1)

5 Calcule as coordenadas do ponto M, médio do segmento AB:

a) A = (3) e B = (–5)

b) A = (1, 3) e B = (3, 5)

c) A = (2, –1, 1) e B = (4, 5, –3)

6 Determine as coordenadas dos extremos A e B do segmento dividido em 3 partes iguais pelos pontos M e N:

a) M = (–2), N = (1)

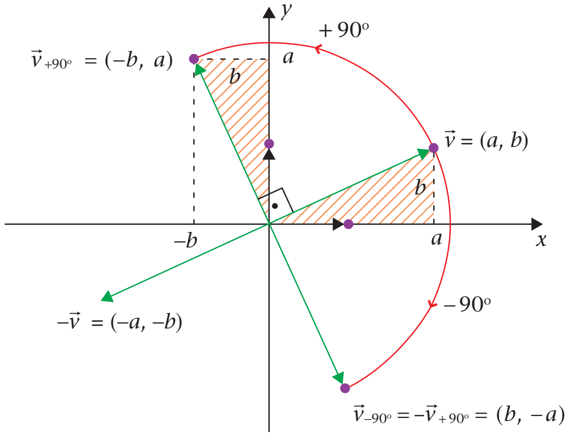
b) M = (–1, 3), N = (2, 2)

c) M = (2, 1, 1), N = (0, 2, –1)

1.3 – Rotação e módulo

1.3.1 – Rotação de 90º num vetor do plano $\mathbb{R}^2$

Seja $\vec{v} = (a,\ b)$ um vetor que se deseja girar +90º ou –90º no sentido trigonométrico.



NOTA
Na rotação de um vetor, seu módulo não se altera.

Os triângulos indicados na figura são congruentes, logo:

$$\boxed{\vec{v} = (a,\ b) \Rightarrow \vec{v}_{+90°} = (-b,\ a)}$$

Como $\vec{v}_{-90°}$ é oposto a $\vec{v}_{+90°}$, então: $\vec{v}_{-90°} = -\vec{v}_{+90°} = -(-b,\ a) = (b,\ -a)$

Para um vetor girar +90º no sentido trigonométrico, basta permutar as suas coordenadas e trocar o sinal da primeira.
A rotação de –90º dá o oposto da rotação de +90º.

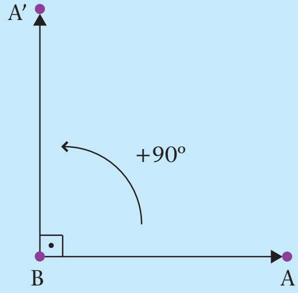
Exemplos:

i) $\vec{v} = (2,\ 3) \Rightarrow \vec{v}_{+90°} = (-3,\ 2)$ e $\vec{v}_{-90°} = (3,\ -2)$

$\vec{v} = (-1,\ 5) \Rightarrow \vec{v}_{+90°} = (-5,\ -1)$ e $\vec{v}_{-90°} = (5,\ 1)$

$\vec{v} = (0,\ 4) \Rightarrow \vec{v}_{+90°} = (-4,\ 0)$ e $\vec{v}_{-90°} = (4,\ 0)$

ii) Qual o ponto que se obtém quando se efetua uma rotação de 90º, no sentido trigonométrico, no ponto A = (1, 4) em torno do ponto B = (3, –1)?



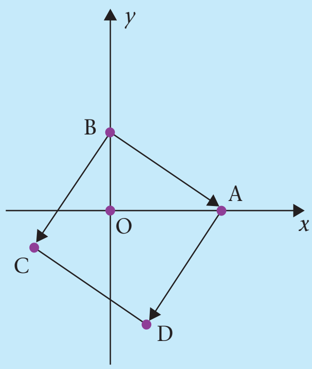
$$A' = B + \overrightarrow{BA'}$$

$$\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BA}_{+90°} = (A - B)_{+90°} = (-2,\ 5)_{+90°} = (-5,\ -2)$$

$$A' = (3,\ -1) + (-5,\ -2) = (-2,\ -3)$$

iii) ABCD é um quadrado que tem a origem no seu interior.

Se A = (3, 0) e B = (0, 2), calcular os vértices C e D.



Temos:

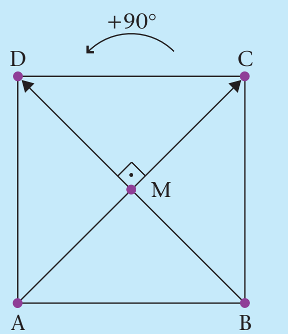
$C = B + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}_{-90^\circ} = (A - B)_{-90^\circ} = (3,\ -2)_{-90^\circ} = (-2,\ -3)$

$C = (0,\ 2) + (-2,\ -3) = (-2,\ -1)$

$D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = (3,\ 0) + (-2,\ -3) = (1,\ -3)$

iv) Determinar os vértices de um quadrado ABCD conhecendo dois vértices opostos A = (1, 5) e C = (3, –1).



Seja M o centro do quadrado:

$M = \dfrac{A + C}{2} = \dfrac{(1,\ 5) + (3,\ -1)}{2} = (2,\ 2)$

$D = M + \overline{MD} = M + \overline{MC}_{+90^\circ} = (2,\ 2) + (C - M)_{+90^\circ}$

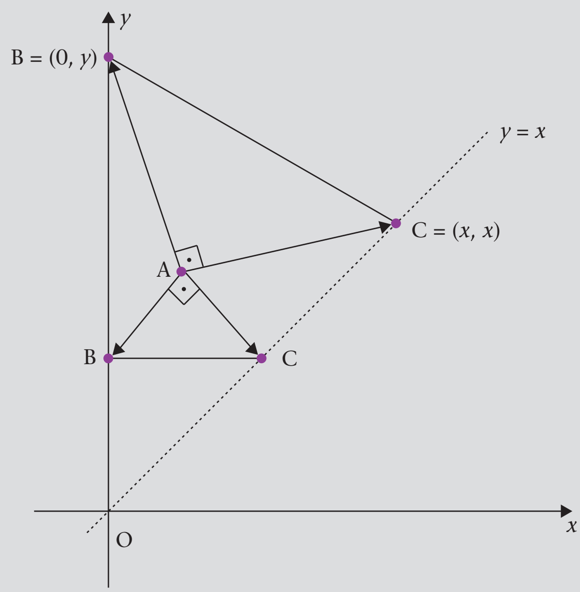
$D = (2,\ 2) + (1,\ -3)_{+90^\circ} = (2,\ 2) + (3,\ 1) = (5,\ 3)$

Como M é médio de BD:

$M = \dfrac{B + D}{2} \ \Rightarrow\ B = 2M - D = (4,\ 4) - (5,\ 3) = (-1,\ 1)$

Exercícios resolvidos:

1) ABC é um triângulo retângulo isósceles tal que A = (1, 3), B pertence ao eixo Oy e C à bissetriz dos quadrantes ímpares, $y = x$. Calcule B e C.
Solução:



B = (0, y) e C = (x, x)
$\overrightarrow{AB}$ = B – A = (0, y) – (1, 3) = (–1, y – 3)
$\overrightarrow{AC}$ = C – A = (x, x) – (1, 3) = (x – 1, x – 3)
Devemos ter:
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}_{+90^\circ}$ ou $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}_{-90^\circ}$

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}_{+90^\circ} \Rightarrow (-1,\ y-3) = (x-1,\ x-3)_{+90^\circ}$

$$(-1,\ y-3) = (-x+3,\ x-1)$$

$$\begin{cases} -1 = -x+3 \\ y-3 = x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$$

Logo: B = (0, 6) e C = (4, 4)

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}_{-90^\circ} \Rightarrow (-1,\ y-3) = (x-1,\ x-3)_{-90^\circ}$

$$(-1,\ y-3) = (x-3, -x+1)$$

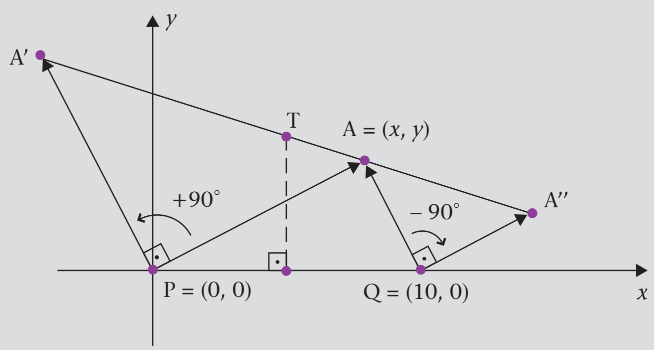
$$\begin{cases} -1 = x-3 \\ y-3 = -x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Logo: B = (0, 2) e C = (2, 2)

2) (Problema clássico do tesouro) Um náufrago conseguiu chegar a uma ilha com um tesouro. Viu duas pedras P e Q afastadas por uma distância de 10 passos e uma árvore A. De P, olhando para A, andou para a esquerda uma distância igual a PA. De Q, olhando para A, andou para a direita uma distância igual a QA. Sejam A′ e A″ respectivamente os pontos alcançados. Caminhou de A′ até A″ e enterrou o tesouro a meio caminho. Tempos depois, lá voltando, não encontrou mais a árvore. Determine o ponto onde o náufrago enterrou o tesouro.

Solução:

Coloquemos um referencial numa posição conveniente.
Façamos P na origem, Q sobre o eixo Ox e A numa posição qualquer.
Temos: P = (0, 0), Q = (10, 0) e A = (x, y).



Tomemos o vetor $\overrightarrow{PA}$ e façamos uma rotação de +90° obtendo $\overrightarrow{PA'}$.

$\overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{PA}_{+90^\circ} = (A - P)_{+90^\circ} = (x,\ y)_{+90^\circ} = (-y,\ x)$

Logo: $A' = P + \overrightarrow{PA'} = (0,\ 0) + (-y,\ x) = (-y,\ x)$

Tomemos agora o vetor $\overrightarrow{QA}$ e façamos uma rotação de –90° resultando $\overrightarrow{QA''}$.

$\overrightarrow{QA''} = \overrightarrow{QA}_{-90^\circ} = (A - Q)_{-90^\circ} = (x - 10,\ y)_{-90^\circ} = (y,\ 10 - x)$

Logo: $A'' = Q + \overrightarrow{QA''} = (10,\ 0) + (y,\ 10 - x) = (10 + y,\ 10 - x)$

O ponto T será médio de A′A″: $T = \dfrac{A' + A''}{2} = \dfrac{(-y,\ x) + (10 + y,\ 10 - x)}{2}$

$$T = (5,\ 5)$$

Basta então, saindo da pedra P em direção à pedra Q, caminhar até a metade do caminho (5 passos), dobrar à esquerda e caminhar uma distância igual (5 passos).
Resposta: O ponto onde o náufrago enterrou o tesouro é T = (5, 5).

NOTA
Lembrar que:
$|x_B - x_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2}$
isto é:
$|x| = \sqrt{x^2}$

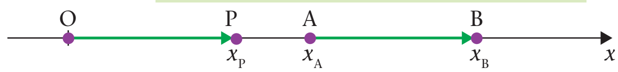
1.3.2 – Módulo de um vetor

Seja $d(A, B)$ a distância entre os pontos A e B. Seja $\overrightarrow{OP}$ o vetor posição de P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$.

Temos que:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B) = d(O, P) = \|\overrightarrow{OP}\|$$

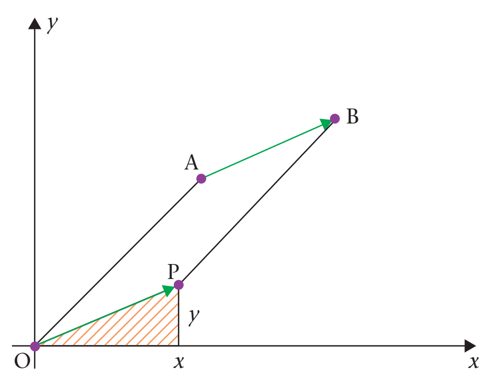
No $\mathbb{R}^1$: $\boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{OP}\| = |x_B - x_A| = |x_P|}$



No $\mathbb{R}^2$: $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

onde $\overrightarrow{AB} = (x, y)$, isto é, $x = x_B - x_A$ e $y = y_B - y_A$.

Logo: $\boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$



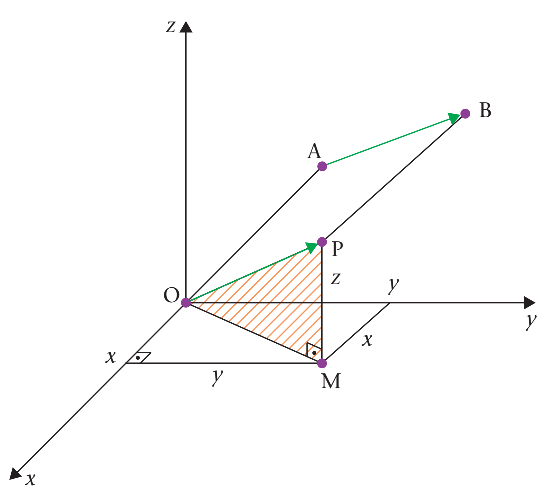
No $\mathbb{R}^3$: $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{OM^2 + z^2}$, mas $OM^2 = x^2 + y^2$.

Então:

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, onde $\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$.

Logo:

$$\boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

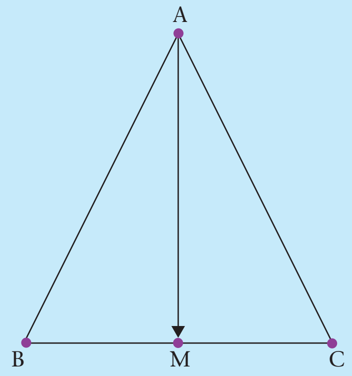


Propriedade

Se o módulo de um vetor é zero, então este é o vetor nulo.
$\|\vec{v}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \vec{0}$

Exemplos:

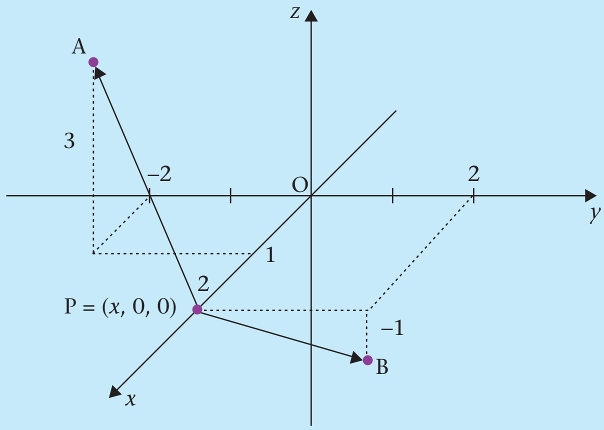
i) Os vértices de um triângulo são A = (1, 3), B = (2, –1) e C = (8, 1). Calcular o comprimento da mediana relativa ao vértice A.



$$M = \frac{B+C}{2} = (5,\ 0)$$

$$\overrightarrow{AM} = M - A = (4,\ -3) \ \Rightarrow \ \|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{16+9} = 5$$

ii) Determinar sobre o eixo Ox um ponto equidistante dos pontos A = (1, –2, 3), B = (2, 2, –1).



Seja P = (x, 0, 0) o ponto sobre Ox.
Temos que: d(P, A) = d(P, B), ou seja: $\|\overrightarrow{PA}\| = \|\overrightarrow{PB}\|$

$$\overrightarrow{PA} = A - P = (1-x,\ -2-0,\ 3-0)$$

$$\|\overrightarrow{PA}\| = \sqrt{(1-x)^2 + 4 + 9}$$

$$\overrightarrow{PB} = B - P = (2-x,\ 2-0,\ -1-0) \ \Rightarrow \ \|\overrightarrow{PB}\| = \sqrt{(2-x)^2 + 4 + 1}$$

Como $\|\overrightarrow{PA}\| = \|\overrightarrow{PB}\|$, vem:

$$1 - 2x + x^2 + 13 = 4 - 4x + x^2 + 5 \;\Rightarrow\; 2x = -5 \;\Rightarrow\; x = -\frac{5}{2}$$

O ponto procurado é $P = \left(-\frac{5}{2},\ 0,\ 0\right)$.

iii) Determinar a natureza do triângulo cujos vértices são: A = (–1, 3), B = (0, 10) e C = (–8, 4).
Calculemos $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\|$ e $\|\overrightarrow{BC}\|$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 7)$ $\qquad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$

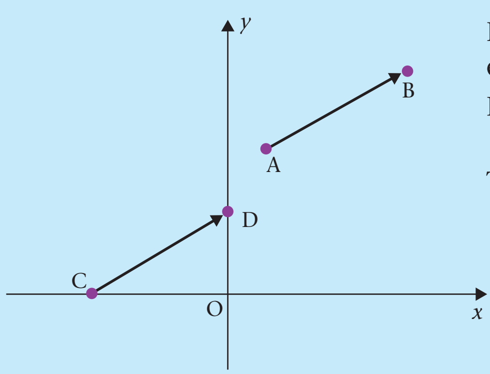
$\overrightarrow{AC} = C - A = (-7,\ 1)$ $\qquad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (-8,\ -6)$ $\qquad \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{64+36} = \sqrt{100}$

Como $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$, o triângulo é isósceles.
Por outro lado, $\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2$ logo, o triângulo é retângulo em A.

NOTA
Quando os lados forem diferentes, devemos comparar o quadrado do maior lado à soma dos quadrados dos outros dois:
Se $a > b$ e $a > c$:
$a^2 > b^2 + c^2$ (obtusângulo)
$a^2 = b^2 + c^2$ (retângulo)
$a^2 < b^2 + c^2$ (acutângulo)

iv) Sendo A = (2, 3) e B = (8, –5) determine os pontos C e D, tais que $\overrightarrow{CD}$ paralelo a $\overrightarrow{AB}$ tal que $\|\overrightarrow{CD}\| = 10$ com C pertencente a Ox e D a Oy.
$\overrightarrow{AB} = B - A = (6,\ -8) \;\Rightarrow\; \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{36+64} = 10$



Então: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, mas C = ($x$, 0) e D = (0, y).
Logo: $\overrightarrow{CD} = D - C = (-x,\ y)$. Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, vem: $x = -6$ e $y = -8$.
Temos C = (–6, 0) e D = (0, –8).

v) Dar a natureza do triângulo cujos vértices são:
A = (–1, 2, 4), B = (–1, 5, 1) e C = (2, 2, 1)

$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 3,\ -3) \;\Rightarrow\; \|\overrightarrow{AB}\| = 3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (3,\ 0,\ -3) \;\Rightarrow\; \|\overrightarrow{AC}\| = 3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (3,\ -3,\ 0) \;\Rightarrow\; \|\overrightarrow{BC}\| = 3\sqrt{2}$

Como $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$, o triângulo ABC será equilátero.

vi) Calcular o ponto equidistante de A = (–1, 1, 2), B = (3, 1, 2) e dos semieixos positivos Ox, Oy e Oz.
Temos P = (x, x, x) e PA = PB.

$$\sqrt{(x+1)^2 + (x-1)^2 + (x-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (x-1)^2 + (x-2)^2}$$

$2x + 1 = -6x + 9 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow P = (1, 1, 1)$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Verifique se o quadrilátero ABCD cujos vértices são A = (1, 2, –1), B = (5, 3, 0), C = (3, 1, 3) e D = (–1, 0, 2) é um paralelogramo.

2 Calcule o ponto B sabendo que:

a) A = (–1, 4) e $\overrightarrow{AB}$ = (3, –1)

b) A = (1, –2, 2) e $\overrightarrow{AB}$ = (4, 1, 1)

3 Calcule os extremos A e B do segmento dividido em 3 partes congruentes pelos pontos M e N.

a) M = (–1, 3) N = (2, 2)

b) M = (2, 1, 1) N = (0, 2, –1)

4 Sendo A = (1, 2), B = (2, 0) e C = (–1, –1) vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD, calcule D.

5 Sendo A = (1, 1, 3) e B = (–1, 2, 2) vértices consecutivos de um paralelogramo cujo centro é (–2, 0, 1), calcule os outros vértices.

6 Calcule os pontos que dividem o segmento AB em 4 partes congruentes. A = (–1, 3, 2), B = (3, –5, 6)

7 Sendo M = (1, 0, 2), N = (1, 1, –2) e P = (2, 1, 0) os pontos médios dos lados de um triângulo, calcule os vértices.

8 Qual o ponto que se obtém quando se efetua uma rotação de 90º no ponto A = (1, 4) em torno do ponto B = (3, –1), no sentido trigonométrico?

9 Determine os vértices de um quadrado ABCD conhecendo os vértices opostos A = (1, 5) e C = (3, –1).

10 Qual a natureza do quadrilátero ABCD cujos vértices são A = (2, 2), B = (–1, 6), C = (–5, 3) e D = (–2, –1)?

11 Determine C e D para que ABCD seja um paralelogramo cujo centro tenha cota nula. A = (1, 0, 2), B = (1, –1, 1), C = (2, m, n), D = (x, 1, –1).

12 Os pontos A = (3, 0) e B = (0, 4) são vértices consecutivos de um quadrado ABCD. Calcule os outros vértices sabendo que D é o mais próximo da origem.

13 Os pontos A = (–5, –1) e C = (–1, 5) são vértices opostos de um quadrado ABCD. Calcule os outros vértices.

14 A = (5, 1) é o vértice, mais afastado da origem, de um quadrado ABCD. O ponto B pertence ao eixo Ox e C pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares. Calcule os vértices do quadrado.

15 O ponto A = (–1, 4) é vértice do ângulo reto do triângulo retângulo isósceles ABC. O vértice B está na bissetriz dos quadrantes pares e C está no eixo Oy. Calcule os vértices.

16 O ponto A = (2, 5) é vértice de um quadrado ABCD em que B tem ordenada 1 e D tem ordenada 2. Calcule os vértices do quadrado.

17 Os pontos M = (–8, 1) e J = (0, –1) são extremos da diagonal do quadrado MNJP. Calcule N e P.

18 Os pontos M = (–8, 1) e J = (0, –1) são vértices consecutivos de um quadrado MJNP. Calcule os vértices sabendo que a origem de coordenadas está no interior do quadrado.

19 Considere o paralelogramo ABCD. Construa, sobre os lados, quadrados externos ao paralelogramo. Sejam M, J, P e Q os centros desses quadrados. Mostre que o quadrilátero MJPQ é um quadrado.

20 Os vértices de um triângulo são A = (1, 3, –1), B = (2, 5, 4) e C = (4, 7, 6). Calcule o comprimento da mediana relativa ao vértice A.

21 Determine sobre o eixo Ox um ponto equidistante de A = (–1, 3) e B = (5, 9).

22 Mostre que o triângulo ABC em que A = (2, 3, 1), B = (–4, 3, 7) e C = (–6, 1, –1) é equilátero.

23 Determine um ponto equidistante de A = (–1, 1, 2), B = (3, 1, 2) e dos semieixos positivos Ox, Oy e Oz.

24 Ache no eixo das abscissas um ponto M cuja distância ao ponto J = (2, –3) seja 5.

25 Mostre que o triângulo ABC é retângulo.

A = (2, –1, 1), B = (1, –3, –5) e C = (3, –4, –4).

26 Sejam A = (2, 1, 5), B = (3, k, 0) e C = (9, 7, 4). Calcule k de modo que o triângulo seja retângulo em A.

27 Determine sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares um ponto C tal que o triângulo ABC seja retângulo em A. A = (3, 5) e B = (0, 2)

28 Calcule um ponto P sabendo que sua distância à origem é $\sqrt{6}$ e suas distâncias aos pontos (0, 0, 1) e (2, 2, 2) são respectivamente $\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$.

29 Um foco luminoso está em M = (5, –3) e ilumina o ponto J = (4, 4) depois de incidir em O*y* e sofrer reflexão. Determine:

a) a distância percorrida pela luz de M até J;

b) o ponto de incidência em O*y*.

30 Determine os pontos de reta $y = x + 1$ que distam $\sqrt{5}$ da origem.

31 Os pontos (0, 1), (x, y) e $(-y, x)$ são vértices de um triângulo equilátero. Calcule x e y.

32 Determine os pontos do plano que distam 2 da origem e que distam igualmente dos pontos (0, 1) e (0, –1).

33 Dos pontos cujas coordenadas são $(t^2 - 2,\ t\sqrt{2})$, qual o mais próximo da origem?

34 Dos pontos que distam 1 do ponto (–1, –1), qual o mais afastado a origem?

1.4 – Operações elementares

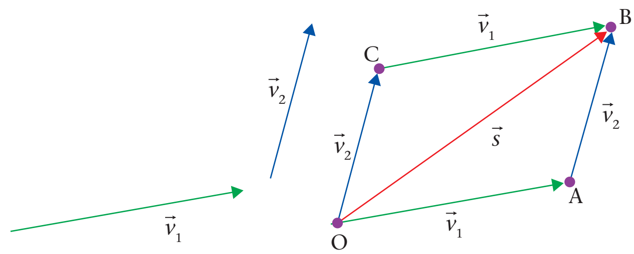
1.4.1 – Adição de vetores

Sejam dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Apliquemos estes vetores a um ponto O, origem de $\mathbb{R}^3$, e construamos o paralelogramo OABC tal que:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} = \vec{v}_1 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \vec{v}_2$$

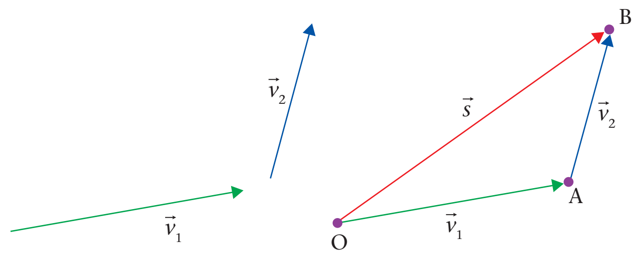
Define-se como soma $\vec{s}$ de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ o vetor $\overrightarrow{OB}$ diagonal do paralelogramo.

DEFINIÇÃO
Adição de vetores.



É muito comum, para determinar-se a soma $\vec{s}$ dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, usar-se a regra do triângulo: pela origem O, traçamos o segmento orientado (O, A) que está na classe de equivalência de $\vec{v}_1$ e por sua extremidade A, um outro segmento orientado (A, B) tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}_2$. A soma será o vetor $\overrightarrow{OB}$.

NOTA
Se O' for um ponto qualquer do espaço, então, repetindo a construção com O' no lugar de O, obtém-se $\overrightarrow{O'B} = \overrightarrow{OB}$.



A adição de vários vetores se efetua mediante a aplicação sucessiva da regra do triângulo.

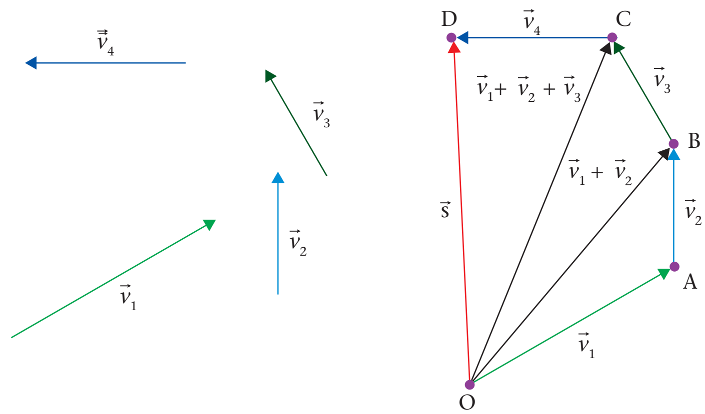
Sejam por exemplo quatro vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ e $\vec{v}_4$ quaisquer do espaço.

Tomemos um ponto O do espaço como origem e apliquemos em O o vetor $\overrightarrow{OA}$ da classe de equivalência de $\vec{v}_1$. Em seguida, apliquemos em A o vetor $\overrightarrow{AB}$ da classe de $\vec{v}_2$. O vetor $\overrightarrow{OB}$ será a soma $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Apliquemos agora em B o vetor $\overrightarrow{BC}$ da classe de $\vec{v}_3$. O vetor $\overrightarrow{OC}$ será a soma $\overrightarrow{OB} + \vec{v}_3 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$.

NOTA
Os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ foram traçados "consecutivos", isto é, a extremidade do primeiro é a origem do segundo.

Analogamente, apliquemos em C o vetor $\overrightarrow{CD}$, da classe de $\vec{v}_4$. O vetor $\overrightarrow{OD}$ será a soma:

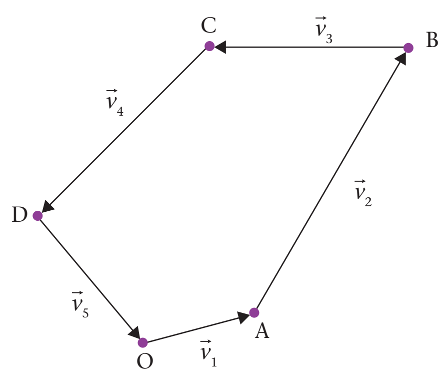
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \vec{v}_4 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) + \vec{v}_4 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{s}$$



Temos então a **regra da poligonal**:

Por um ponto qualquer, toma-se um segmento orientado da classe de equivalência $\vec{v}_1$. Pela extremidade desse segmento, um vetor da classe de $\vec{v}_2$. Pela extremidade desse último, um vetor da classe de $\vec{v}_3$. E assim sucessivamente. A soma será o vetor que tem a origem do primeiro e a extremidade do último.

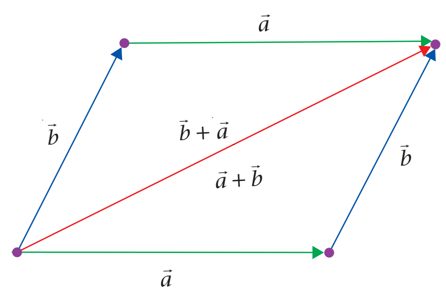
Se a poligonal fechar, isto é, a extremidade do último coincidir com a origem do primeiro, a soma dos vetores será nula.



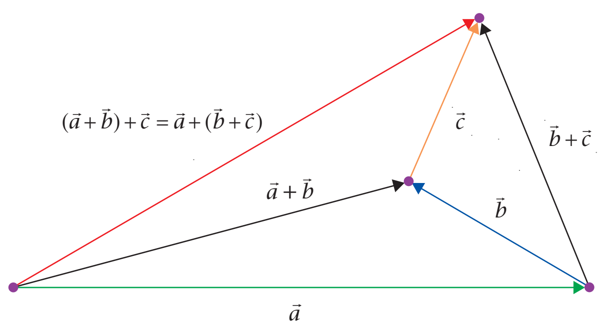
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$$
$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 + \vec{v}_5 = \vec{0}$$

Propriedades da adição

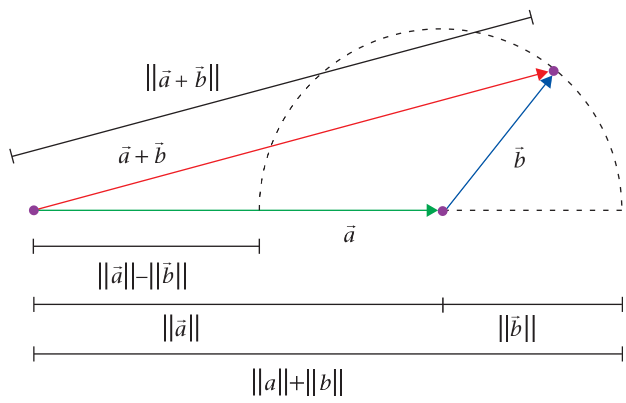
I) Comutatividade: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$



II) Associatividade: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

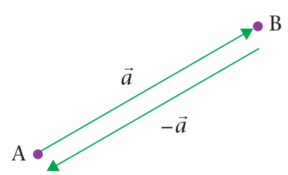


III) Desigualdade triangular: $|\|\vec{a}\|-\|\vec{b}\||\leq\|\vec{a}+\vec{b}\|\leq\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$



IV) Elemento neutro: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

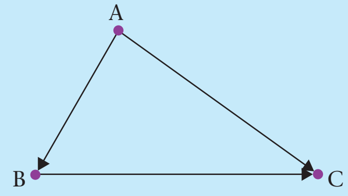
V) Vetor oposto: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$



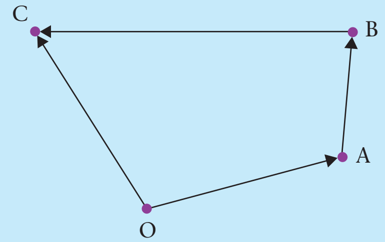
NOTA
Os vetores $\vec{a}$ e $(-\vec{a})$ têm o mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos: $\vec{a} \nearrow\swarrow (-\vec{a})$

Exemplos:

i) Dados três pontos quaisquer, é sempre possível escrever:
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ou C – A = (B – A) + (C – B)

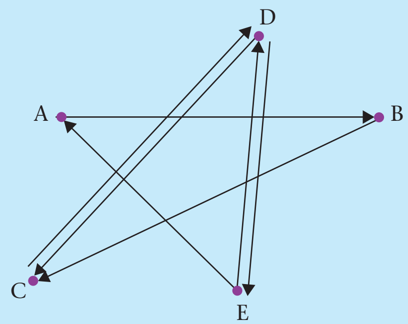


ii) A notação de Grassmann é muito cômoda para obtenção da soma de vetores.



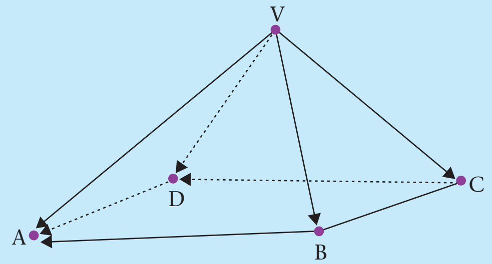
Temos que:
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
Pela notação de Grassmann, temos: (A – O) + (B – A) + (C – B) = C – O que é equivalente à equipolência acima. (As letras se simplificam como na álgebra).

iii) Sendo:
$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ e $\overrightarrow{ED} = \vec{d}$, calcular $\overrightarrow{EA}$.



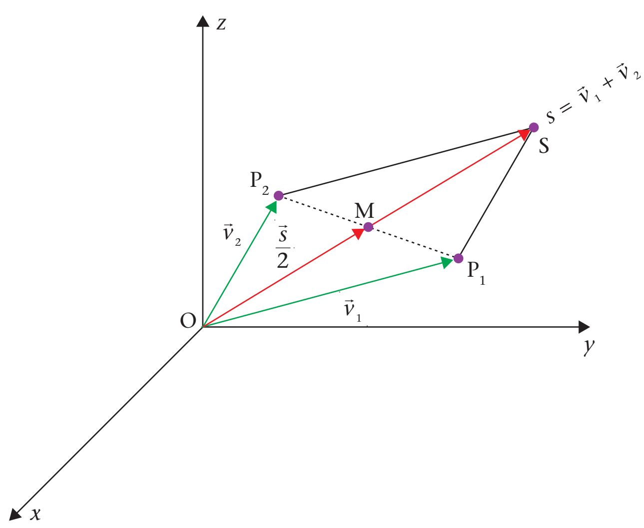
Temos que:
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \vec{0}$ porque o polígono fecha. Levando em conta que: $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC} = \left(-\vec{c}\right)$ e $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{ED} = \left(-\vec{d}\right)$, vem:
$\vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c}) + (-\vec{d}) + \overrightarrow{EA} = \vec{0}$
Transpondo:
$\overrightarrow{EA} = (-\vec{a}) + (-\vec{b}) + \vec{c} + \vec{d}$

iv) Sendo V o vértice de uma pirâmide quadrangular regular ABCD, exprimir $\overrightarrow{VA}$ em função de $\overrightarrow{VB}$, $\overrightarrow{VC}$ e $\overrightarrow{VD}$.



Temos:
$\overrightarrow{VA} = \overrightarrow{VB} + \overrightarrow{BA}$
Como $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, vem: $\overrightarrow{VA} = \overrightarrow{VB} + \overrightarrow{CD}$
Usando a notação de Grassmann:
A – V = (B – V) + (D – C) + (V – V)
A – V = (B – V) – (C – V) + (D – V)
Logo: $\overrightarrow{VA} = \overrightarrow{VB} - \overrightarrow{VC} + \overrightarrow{VD}$

Adição em coordenadas



Como as coordenadas de um vetor não dependem do ponto onde ele está aplicado, podemos considerar os vetores parcelas da adição aplicados na origem.

Sejam: $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Estas coordenadas são também dos pontos P_1 e P_2 respectivamente. O ponto M é médio de $\overline{P_1P_2}$, logo:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

Por outro lado, se $\vec{s} = (x, y, z)$, então M é também ponto médio de $\overline{OS}$. Assim:

$$M = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2} \right)$$

Portanto, $\frac{x}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $\frac{y}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2}$ e $\frac{z}{2} = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

As coordenadas da soma serão: $\vec{s} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$

As coordenadas da soma de dois vetores são as somas das coordenadas de mesmo nome das parcelas.

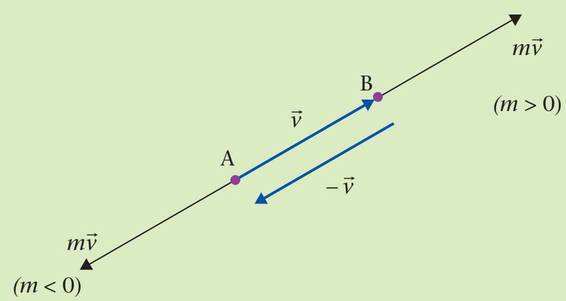
Para o $\mathbb{R}^2$ temos: $\vec{s} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$

Para o $\mathbb{R}^1$ temos: $\vec{s} = (x_1 + x_2)$

1.4.2 – Multiplicação de um vetor por um escalar (número)

DEFINIÇÃO
Multiplicação de um vetor por um escalar.

Dado um vetor $\vec{v}$ e um número real m, chama-se produto de $\vec{v}$ por m o vetor $m \cdot \vec{v}$ tal que:



a) $\| m\vec{v} \| = | m | \cdot \| \vec{v} \|$
b) $m\vec{v}$ tem a mesma direção que $\vec{v}$ (paralelos): $m\vec{v} \,//\, \vec{v}$
c) $m\vec{v}$ tem o mesmo sentido de $\vec{v}$ se $m > 0$: $m\vec{v} \nearrow\!\!\nearrow \vec{v}$;
e sentido oposto se $m < 0$: $m\vec{v} \nearrow\!\!\swarrow \vec{v}$

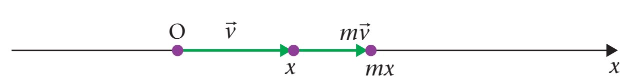
NOTA
Se $|m| > 1$, temos uma "dilatação" e se $|m| < 1$, temos uma "contração".
Caso particular:
$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = (-1) \cdot \overrightarrow{AB}$

NOTA
Se $m = 0$, $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

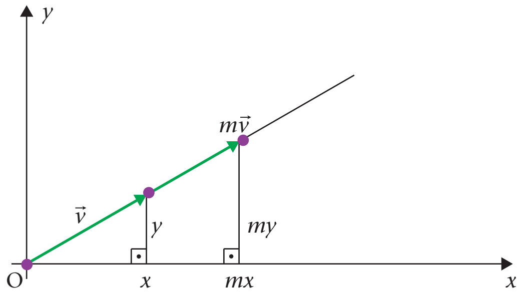
Produto por um escalar em coordenadas

É fácil concluir, por semelhança de triângulos, que as coordenadas de $m\vec{v}$ são os produtos das coordenadas de $\vec{v}$ pelo escalar m.

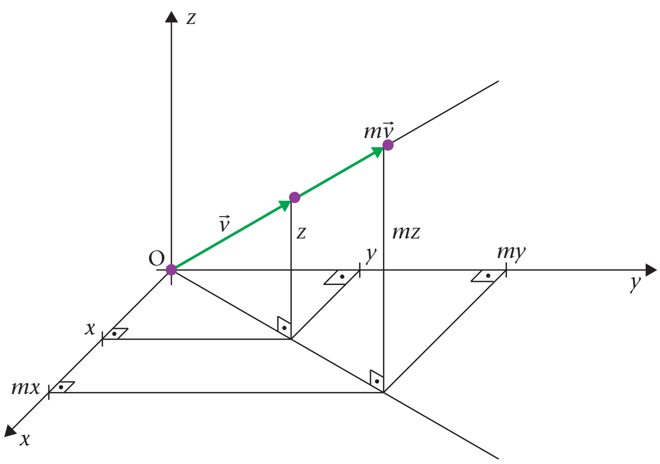
a)



b)



c)



Assim:

a) No $\mathbb{R}^1$: $\vec{v} = (x) \Rightarrow m\vec{v} = m \cdot (x) = (mx)$

b) No $\mathbb{R}^2$: $\vec{v} = (x,\ y) \Rightarrow m\vec{v} = (mx,\ my)$

c) No $\mathbb{R}^3$: $\vec{v} = (x,\ y,\ z) \Rightarrow m\vec{v} = (mx,\ my,\ mz)$

Exemplos:

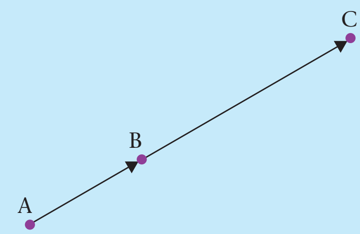
i) Se $\vec{v}$ = (6), calcular $2\vec{v}$. Temos: $2\vec{v} = 2 \cdot (6) = (12)$

ii) Se A = (1, 2) e B = (10, –10), calcular $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Temos: $\overrightarrow{AB}$ = B – A = (9, –12)

Logo: $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}(9,\ -12) = (-3,\ 4)$

iii) Sendo A = (1, 2, 3) e B = (–1, 4, –1), calcular C de modo que $\overrightarrow{AC} = 3 \cdot \overrightarrow{AB}$.
Temos: $\overrightarrow{AB}$ = B – A = (–2, 2, –4).

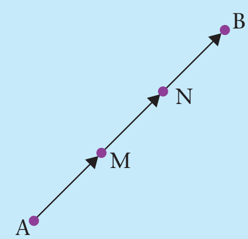


$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} = 3(-2,\ 2,\ -4) = (-6,\ 6,\ -12)$

$C = A + \overrightarrow{AC} = (1,\ 2,\ 3) + (-6,\ 6,\ -12) = (-5,\ 8,\ -9)$

iv) Calcular o ponto C sabendo que $\overrightarrow{AC} = 5 \cdot \overrightarrow{BC}$, sendo A = (–5) e B = (3).
Seja C = (x), temos:
$\overrightarrow{AC} = C - A = (x) - (-5) = (x + 5)$ e
$\overrightarrow{BC} = C - B = (x) - (3) = (x - 3)$, logo
$x + 5 = 5(x - 3) \Rightarrow 5x - 15 = x + 5 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow C = (5)$

v) Determinar as coordenadas dos pontos que dividem o segmento AB em 3 partes congruentes. Dados A = (1, –3), B = (4, 9).



Devemos ter $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (3,\ 12) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}(3,\ 12) = (1,\ 4)$
Segue-se que:
$M = A + \overrightarrow{AM} = (1,\ -3) + (1,\ 4) = (2,\ 1)$
Como $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AM} = (1,\ 4)$, calculemos N:
$N = M + \overrightarrow{MN} = M + \overrightarrow{AM} = (2,\ 1) + (1,\ 4) = (3,\ 5)$

Propriedades do produto por um escalar

I) Distributividade:
$(m + n)\vec{v} = m\vec{v} + n\vec{v}$

Temos: $(m + n)\vec{v} =$

$= (m + n)(x,\ y,\ z) = ((m + n)x,\ (m + n)y,\ (m + n)z) =$

$= (mx + nx,\ my + ny,\ mz + nz) =$

$= (mx,\ my,\ mz) + (nx,\ ny,\ nz) =$

$= m(x,\ y,\ z) + n(x,\ y,\ z) =$

$= m\vec{v} + n\vec{v}$

$m(\vec{a}+\vec{b}) = m\vec{a}+m\vec{b}$

Temos: $m(\vec{a}+\vec{b}) =$
$= m(x_a + x_b,\ y_a + y_b,\ z_a + z_b) =$
$= (mx_a + mx_b,\ my_a + my_b,\ mz_a + mz_b) =$
$= (mx_a,\ my_a,\ mz_a) + (mx_b,\ my_b,\ mz_b) =$
$= m(x_a,\ y_a,\ z_a) + m(x_b,\ y_b,\ z_b) =$
$= m\vec{a}+m\vec{b}$

II) Associatividade: $m(n\vec{v}) = (m \cdot n)\vec{v}$

Temos: $(mn)\vec{v} =$
$= mn(x,\ y,\ z) = (mnx,\ mny,\ mnz) =$
$= m(nx,\ ny,\ nz) =$
$= m(n\vec{v})$

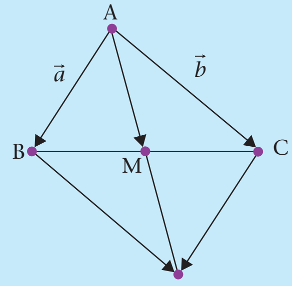
III) Elemento neutro: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

IV) Elemento absorvente: $m \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}$

V) Vetor simétrico: $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$

Exemplos:

i) Sendo $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ e M médio de $\overline{BC}$, calcule $\overrightarrow{AM}$.



Temos que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Como $\overrightarrow{AD} = \vec{a}+\vec{b}$, segue-se que: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

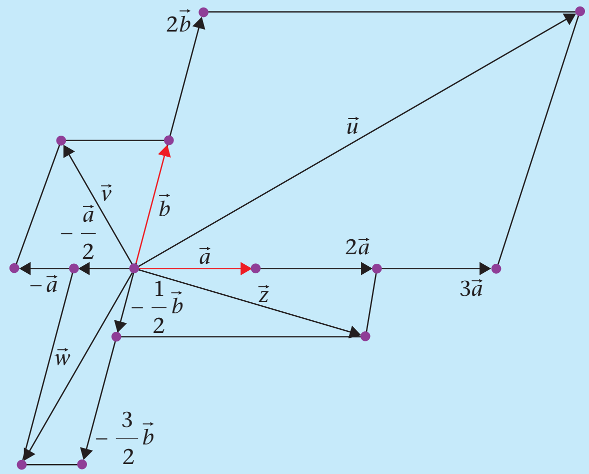
ii) Sendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vetores quaisquer, construir os vetores:

a) $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$

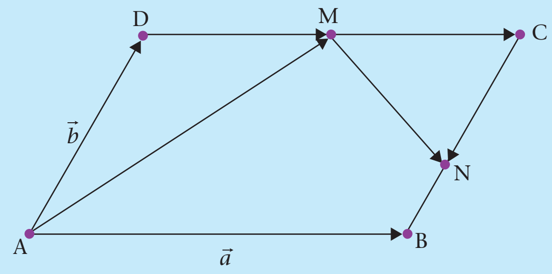
b) $\vec{v} = -\vec{a} + \vec{b}$

c) $\vec{w} = -\dfrac{1}{2}\vec{a} - \dfrac{3}{2}\vec{b}$

d) $\vec{z} = 2\vec{a} - \dfrac{\vec{b}}{2}$



iii) Seja o paralelogramo ABCD e os vetores $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Calcular em função de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ os vetores $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{MN}$, sendo M médio de $\overline{CD}$ e $\overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.



Temos, pela regra do triângulo:

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \dfrac{1}{2}\vec{a} - \dfrac{2}{3}\vec{b}$

Exercícios resolvidos:

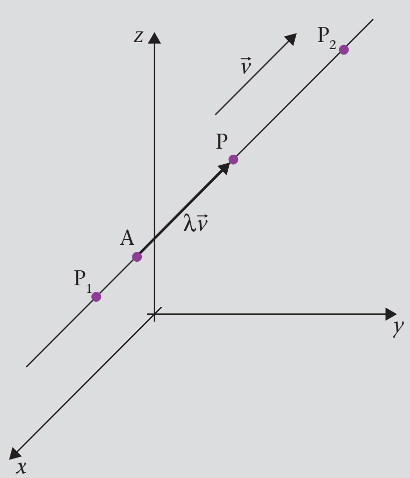
1) O que representa a equação $P = A + \lambda\vec{v}$, onde $A = (-1, 2, 1)$, $\vec{v} = (3, -2, 2)$ e:

a) λ é um parâmetro real tal que $-1 \leq \lambda \leq 3$?

b) λ é uma variável real, isto é, $\lambda \in (-\infty, +\infty)$?

Solução:
a) A equação $P = A + \lambda\vec{v}$ representa uma translação do ponto A segundo o vetor $\lambda\vec{v}$. Como λ é um parâmetro variável, a equação $P = A + \lambda\vec{v}$ representará uma infinidade de pontos, limitados por $-1 \leq \lambda \leq 3$. Quando $\lambda = -1$, $P_1 = A - \vec{v}$, ou seja, $P_1 = (-1, 2, 1) - (3, -2, 2) = (-4, 4, -1)$.
Quando $\lambda = 3$, $P_2 = A + 3\vec{v} = (-1, 2, 1) + 3(3, -2, 2) = (8, -4, 7)$.
Observe que quando $\lambda = 0$, $P = A$, logo a equação representará o segmento de reta que passa pelo ponto A, compreendido entre os pontos P_1 e P_2.

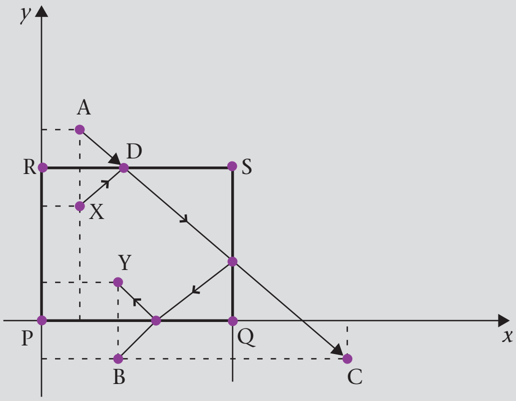
b) Quando $\lambda \in \mathbb{R}$, o lugar dos pontos P será a reta que passa pelo ponto A, paralela ao vetor $\vec{v}$.



NOTA
O presente exercício é uma introdução ao estudo da reta. Para o $\mathbb{R}^2$, as considerações são análogas. Posteriormente, faremos um estudo mais detalhado das equações que definem uma reta nos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

2) Uma mesa de bilhar PQSR tem seus vértices dados por coordenadas cartesianas $P = (0, 0)$, $Q = (5, 0)$, $R = (0, 4)$ e $S = (5, 4)$. Dadas duas bolas nos pontos $X = (1, 3)$ e $Y = (2, 1)$ sobre a mesa, determine em que ponto da tabela RS deve ser atirada a bola X de modo que ela atinja sucessivamente as três tabelas RS, QS, PQ e vá depois chocar-se com a bola Y. (Admite-se que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, em cada choque com as tabelas.)

Solução:



Devemos ter: $D = A + \lambda\overrightarrow{AC}$

Seja A o simétrico de X em relação a RS: A = (1, 5)

Seja B o simétrico de Y em relação a PQ: B = (2, –1)

Seja C o simétrico de B em relação a QS: C = (8, –1)

Então:

$\overrightarrow{AC} = C - A = (7,\ -6)$

Logo:

$D = (1,\ 5) + \lambda(7,\ -6) = (1 + 7\lambda,\ 5 - 6\lambda)$

Mas D = $(x, 4)$, logo: $\begin{cases} 1 + 7\lambda = x \\ 5 - 6\lambda = 4 \end{cases}$

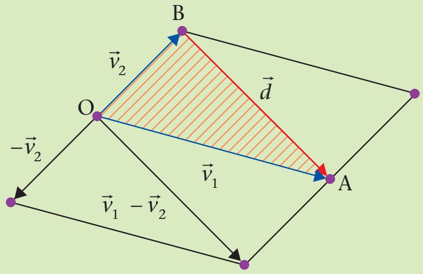
$6\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{6}$ e daí

$x = 1 + \dfrac{7}{6} = \dfrac{13}{6} \Rightarrow D = \left(\dfrac{13}{6},\ 4\right)$

1.4.3 – Subtração de vetores

DEFINIÇÃO
Subtração de vetores.

Dados dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, define-se a diferença $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ como a soma: $\vec{v}_1 + (-\vec{v}_2) = \vec{d}$.



NOTAS
1) Como $\vec{v}_2 + \vec{d} = \vec{v}_1$, a diferença $\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ é o vetor que somado a $\vec{v}_2$ dá $\vec{v}_1$.
2) A diferença $\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ é a soma de $\vec{v}_1$ com o oposto de $\vec{v}_2$, isto é, $\vec{v}_1 + (-1)\vec{v}_2$.

Sejam $\vec{v}_1 = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ e $\vec{v}_2 = (x_2,\ y_2,\ z_2)$.

Como $-\vec{v}_2 = (-x_2,\ -y_2,\ -z_2)$, então: $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2)$

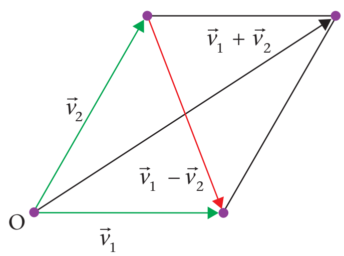
No $\mathbb{R}^2$ teríamos:

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$$

No $\mathbb{R}^1$ teríamos:

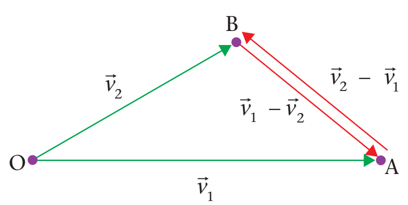
$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (x_1 - x_2)$$

Aplicando os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ no mesmo ponto O, a soma $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ será uma das diagonais do paralelogramo e a diferença a outra diagonal.



O sentido do vetor diferença $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ é o de $\vec{v}_2$ para $\vec{v}_1$.

NOTA
$\vec{v}_1$ está aplicado na extremidade e $\vec{v}_2$ está aplicado na origem do vetor diferença.



Então:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (B - A) + (O - O) = (B - O) - (A - O) = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$\overrightarrow{AB}$ = (vetor posição de extremidade B) – (vetor posição de extremidade A)

Exemplos:

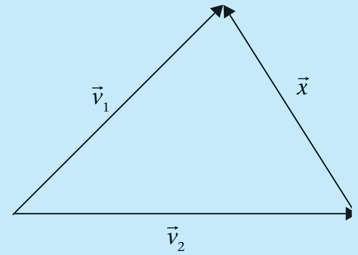
i) Calcular o vetor $\vec{x}$ tal que $2\vec{x} + 3\vec{a} = \vec{b}$, onde $\vec{a} = (-1,\ 3,\ 5)$ e $\vec{b} = (3,\ -1,\ 3)$.
Temos:

$$\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{b} - 3\vec{a}) = \frac{1}{2}[(3,\ -1,\ 3) - 3\,(-1,\ 3,\ 5)]$$

$$\vec{x} = \frac{1}{2}[(3,\ -1,\ 3) + (3,\ -9,\ -15)] = \frac{1}{2}(6,\ -10,\ -12) = (3,\ -5,\ -6)$$

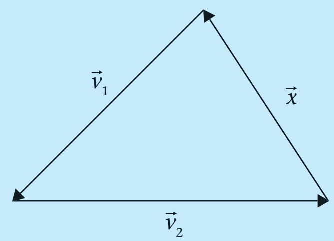
ii) Escreva o vetor $\vec{x}$ em função dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ nas figuras abaixo:

a)



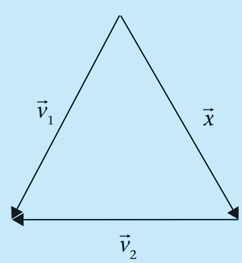
$\vec{x} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$

b)



$\vec{x} = (-\vec{v}_1) - \vec{v}_2$

c)



$\vec{x} = (-\vec{v}_2) - (-\vec{v}_1)$

$\vec{x} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$

iii) Calcular os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ tais que: $2\vec{x} + \vec{y} = (1,\ 2)$ e $\vec{x} - \vec{y} = (5,\ 1)$.

Temos o sistema:

$$\begin{cases} 2\vec{x} + \vec{y} = (1,\ 2) \\ \vec{x} - \vec{y} = (5,\ 1) \end{cases}$$

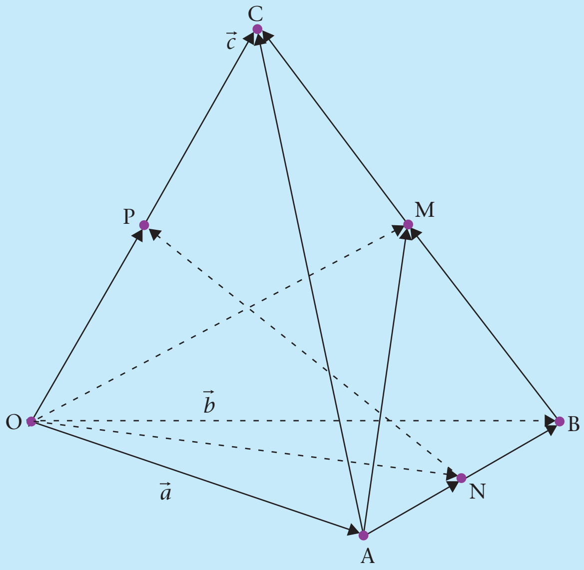
Somando membro a membro, vem:

$3\vec{x} = (6,\ 3) \Rightarrow \vec{x} = (2,\ 1)$

Da 2ª equação:

$\vec{y} = \vec{x} - (5,\ 1) = (2,\ 1) + (-5,\ -1) = (-3,\ 0)$

iv) Dado o tetraedro OABC em que: $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ e M, N, P são pontos médios de BC, AB e OC, respectivamente. Calcular $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{NP}$ em função de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.



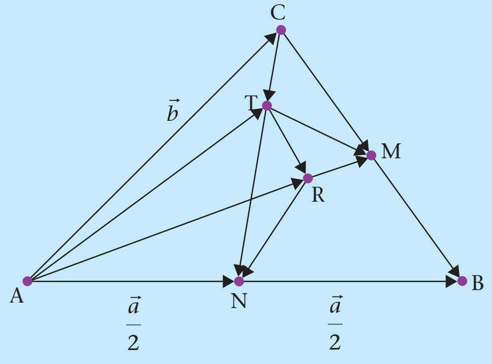
$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a})$$

$$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{ON}=\frac{\vec{c}}{2}-(\vec{a}+\overrightarrow{AN})=\frac{\vec{c}}{2}-\vec{a}-\overrightarrow{AN}$$

Mas $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$, logo:

$$\overrightarrow{NP}=\frac{\vec{c}}{2}-\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b}-\vec{a})$$

v) No triângulo ABC: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AR}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{CT}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CN}$, M e N são médios respectivos de BC e AB.



Calcular $\overrightarrow{RN}$, $\overrightarrow{TM}$ e $\overrightarrow{TR}$ como funções lineares de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

a) $\overrightarrow{RN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{8}(\vec{a}+\vec{b})$

$\overrightarrow{RN} = \frac{1}{8}\vec{a} - \frac{3}{8}\vec{b}$

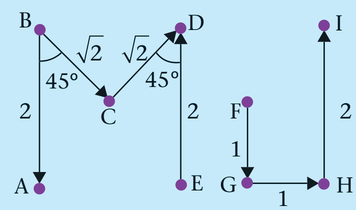
b) $\overrightarrow{TM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}) - \frac{1}{3}\left(\frac{\vec{a}}{2} - \vec{b}\right)$

$\overrightarrow{TM} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}$

c) $\overrightarrow{TR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AT} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AM} - (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CT}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \left(\vec{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CN}\right)$

$\overrightarrow{TR} = \frac{3}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b} - \vec{b} - \frac{1}{3}\left(\frac{\vec{a}}{2} - \vec{b}\right) = \frac{5}{24}\vec{a} - \frac{7}{24}\vec{b}$

vi) Calcular o módulo da soma de todos os vetores indicados na figura.

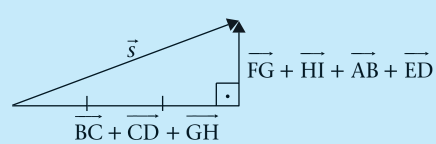


$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} = 0$

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} \Rightarrow ||\overrightarrow{BD}|| = 2$

$||\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{GH}|| = 3$

$||\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HI}|| = 1$

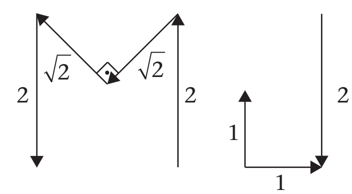


$||\vec{s}|| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

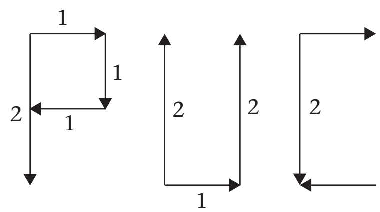
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Calcule o módulo da soma dos vetores:

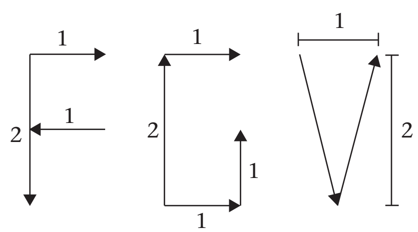
a)



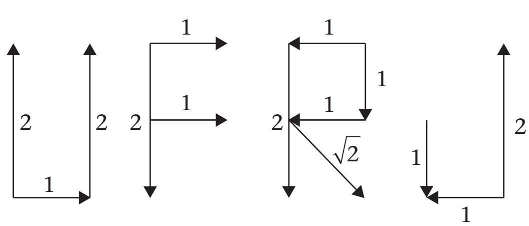
b)



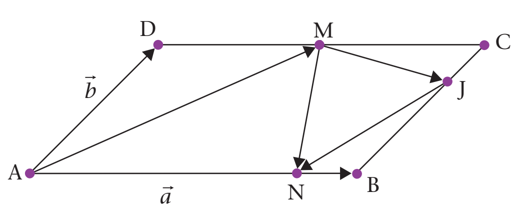
c)



d)



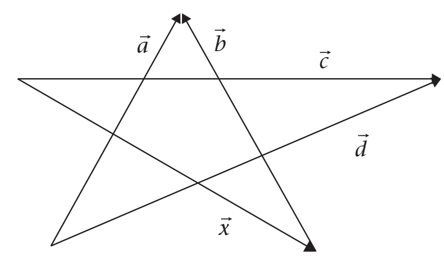
2 Seja o paralelogramo ABCD e os vetores $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Calcule $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MJ}$ e $\overrightarrow{JN}$ em função de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sabendo que:



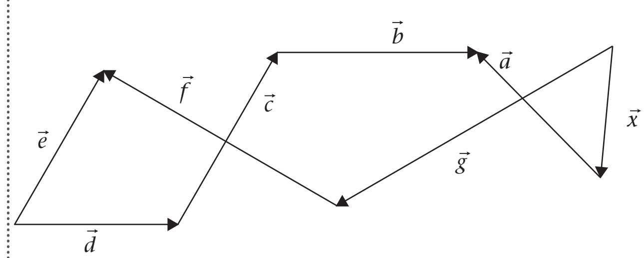
- M é médio de DC
- CJ = $\frac{1}{3}$ CB
- NB = $\frac{1}{4}$ AB

3 Calcule o vetor $\vec{x}$.

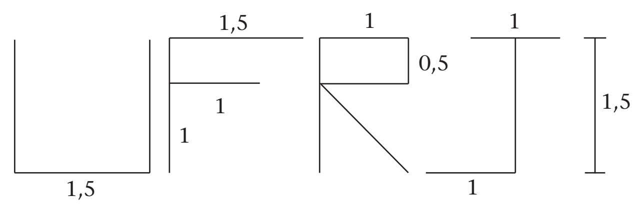
a)



b)



4 No logotipo abaixo, há 14 segmentos. Cada um deles sugere um vetor.



Considere os seis verticais orientados para cima e os sete horizontais para a direita. Calcule o módulo da soma desses 14 vetores.

1.5 – Aplicações das operações elementares

1.5.1 – Ponto que divide um segmento numa razão dada

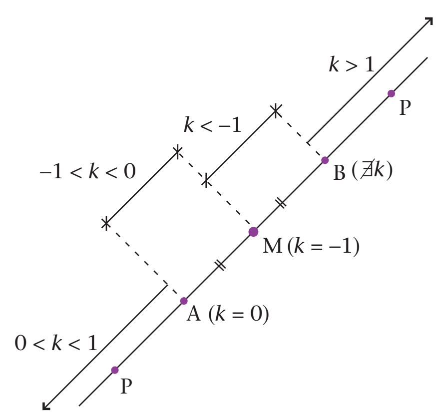
Diz-se que o ponto P divide o segmento AB numa razão k (e escreve-se $\dfrac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = k$) se $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PB}$. Logo $P \in \overleftrightarrow{AB}$.

NOTA
Os pontos P, A e B devem estar alinhados.

Temos:

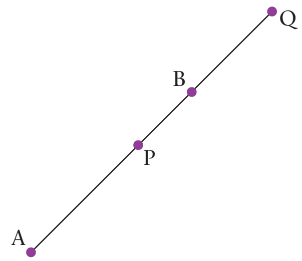
$$\begin{aligned} A - P &= k \cdot (B - P) \\ A - P &= kB - kP \\ A - kB &= P - kP \\ P(1-k) &= A - kB \\ P &= \frac{A - kB}{1-k} \end{aligned}$$

a) $k > 0$ significa que os vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ são do mesmo sentido, logo o ponto P está fora do segmento AB.
b) $k < 0$ siginifica que os vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ têm sentidos contrários, logo o ponto P está entre A e B.
c) Se $k = -1$, o ponto P será médio de $\overline{AB}$.



d) Diz-se que P e Q são **conjugados harmônicos** em relação ao segmento AB se $\dfrac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = -\dfrac{\overrightarrow{QA}}{\overrightarrow{QB}} = k$.

OBSERVAÇÃO
Não existe conjugado harmônico do ponto médio de um segmento, pois não há ponto externo ao segmento AB na mesma reta tal que PA = PB.



Isto é: $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PB}$ e $\overrightarrow{QA} = -k\overrightarrow{QB}$

O conjugado harmônico de um ponto interno ao segmento é externo ao mesmo e vice-versa.

Dados dois vetores colineares $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ com $\overrightarrow{CD} \neq \vec{0}$, podemos definir a razão $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = k$ como a razão entre seus módulos com sinal positivo ou negativo conforme $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sejam de mesmo sentido ou de sentidos contrários, respectivamente.

Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ não forem colineares, não existirá o número real *k*, pois o produto de um número real por um vetor mantém a direção do vetor.

Exemplos:

i) Calcular as coordenadas do ponto P tal que $\dfrac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = \dfrac{1}{2}$, sendo A = (1, 3, 2) e B = (0, 1, 1).

Devemos ter:

$\overrightarrow{PA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{PB} = 2 \cdot \overrightarrow{PA}$

Seja P = (x, y, z).

$\overrightarrow{PA} = A - P = (1 - x, 3 - y, 2 - z)$

$\overrightarrow{PB} = B - P = (-x, 1 - y, 1 - z)$

$2\overrightarrow{PA} = (2 - 2x, 6 - 2y, 4 - 2z)$

$2 - 2x = -x \Rightarrow x = 2$

$6 - 2y = 1 - y \Rightarrow y = 5$

$4 - 2z = 1 - z \Rightarrow z = 3$

Logo: P = (2, 5, 3).

Ou usando a notação de Grassmann:

$\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PA}$

B – P = 2(A – P)

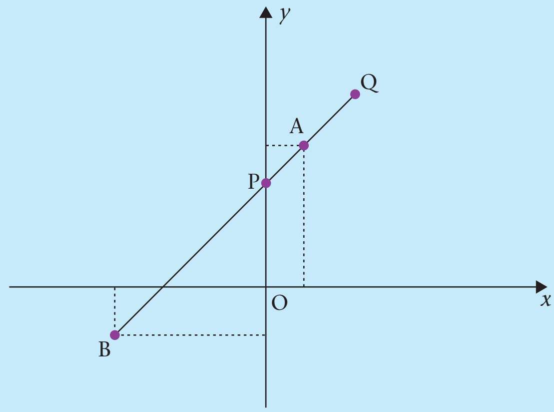
B – P = 2A – 2P

P = 2A – B

P = (2, 6, 4) – (0, 1, 1)

P = (2, 5, 3)

ii) Seja AB o segmento tal que A = (1, 3) e B = (–4, –1). Seja P o ponto do eixo Oy sobre o segmento AB. Determinar P e Q conjugado harmônico de P.



Sejam P = (0, y) e $\overrightarrow{PA} = k \cdot \overrightarrow{PB}$.

$\overrightarrow{PA} = A - P = (1, 3 - y)$

$\overrightarrow{PB} = B - P = (-4, -1 - y) \Leftrightarrow k \cdot \overrightarrow{PB} = (-4k, -k - ky)$

Devemos ter:

$$\begin{cases} -4k = 1 \Rightarrow k = -\dfrac{1}{4} \\ 3 - y = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} y \Rightarrow \dfrac{11}{4} = \dfrac{5}{4} y \Rightarrow y = \dfrac{11}{5} \end{cases}$$

Seja Q o conjugado harmônico de P. Então:

$\dfrac{\overrightarrow{QA}}{\overrightarrow{QB}} = \dfrac{1}{4}$ ou seja:

$\overrightarrow{QA} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{QB} \Leftrightarrow \overrightarrow{QB} = 4\overrightarrow{QA}$

Seja Q = (x, y).

$\overrightarrow{QB} = B - Q = (-4 - x, -1 - y)$

$\overrightarrow{QA} = A - Q = (1 - x, 3 - y) \Rightarrow 4 \cdot \overrightarrow{QA} = (4 - 4x, 12 - 4y)$

Então:

$$\begin{cases} 4 - 4x = -4 - x \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \dfrac{8}{3} \\ 12 - 4y = -1 - y \Rightarrow 13 = 3y \Rightarrow y = \dfrac{13}{3} \end{cases}$$

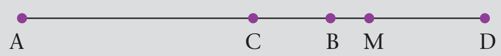
Os pontos pedidos são:

$$P = \left(0, \ \frac{11}{5}\right) \text{ e } Q = \left(\frac{8}{3}, \ \frac{13}{3}\right)$$

Exercício resolvido:

Mostre que se os pontos C e D são conjugados harmônicos de $\overline{AB}$ na razão k, então o ponto médio de $\overline{CD}$ divide $\overline{AB}$ na razão k^2.

<u>Solução:</u>



$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = k \Rightarrow \frac{A-C}{B-C} = k \quad \text{e} \quad \frac{A-D}{B-D} = -k$$

$$C = \frac{A-kB}{1-k} \qquad D = \frac{A+kB}{1+k}$$

$$M = \frac{C+D}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{A-kB}{1-k} + \frac{A+kB}{1+k}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{(A-kB)(1+k)+(A+kB)(1-k)}{1-k^2}$$

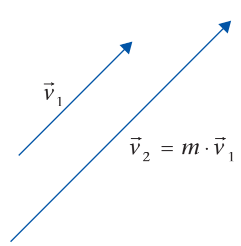
$$M = \frac{1}{2}\,\frac{A+Ak-kB-k^2B+A-Ak+kB-k^2B}{1-k^2} = \frac{1}{2}\,\frac{2A-2k^2B}{1-k^2} = \frac{A-k^2B}{1-k^2}$$

Logo, $M - k^2M = A - k^2B \Rightarrow k^2B - k^2M = A - M \Rightarrow k^2(B-M) = A - M$

então: $k^2 \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = k^2$

1.5.2 – Vetores paralelos – condição de alinhamento de três pontos

Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ dois vetores não nulos. Temos que os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são paralelos se existe um escalar m tal que $\vec{v}_2 = m\vec{v}_1$.



Se $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, então: $(x_2, y_2, z_2) = (mx_1, my_1, mz_1)$, o que nos dá: $x_2 = mx_1$, $y_2 = my_1$ e $z_2 = mz_1$ ou se nenhuma das coordenadas de $\vec{v}_1$ for zero, temos:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = m$$

Se dois vetores são paralelos, suas coordenadas de mesmo nome são proporcionais.

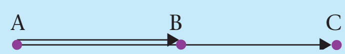
Exemplos:

i) Verificar se os pares de vetores são de vetores paralelos.

a) $\begin{cases} \vec{v}_1 = (2,\ 3,\ -1) \Rightarrow \dfrac{2}{-4} = \dfrac{3}{-6} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow \vec{v}_1 // \vec{v}_2 \\ \vec{v}_2 = (-4,\ -6,\ 2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \vec{v}_1 = (2,\ 3,\ 1) \Rightarrow \dfrac{2}{10} = \dfrac{3}{15} \neq \dfrac{1}{20} \Rightarrow \vec{v}_1 \not\parallel \vec{v}_2 \\ \vec{v}_2 = (10,\ 15,\ 20) \end{cases}$

ii) Calcular o valor de k de modo que os pontos A = (1, 2), B = (3, –1) e C = (k, 2k – 1) estejam sobre a mesma reta.



Devemos ter $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= B - A = (2,\ -3) \\ \overrightarrow{AC} &= C - A = (k-1,\ 2k-3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{2k-3}{-3} = \frac{k-1}{2}$$

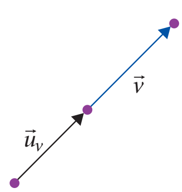
$$-3k + 3 = 4k - 6$$

$$7k = 9 \Rightarrow k = \frac{9}{7}$$

1.5.3 – Unitário de vetor (versor)

DEFINIÇÃO
Versor de um vetor.

Versor de um vetor é um vetor unitário paralelo ao vetor dado e de mesmo sentido.



$$\vec{v} = |m|\vec{u}_v \Rightarrow ||\vec{v}|| = |m| \cdot ||\vec{u}_v||$$

Como:

$$||\vec{u}_v|| = 1 \Rightarrow |m| = ||\vec{v}\,||$$

Logo:

$$\vec{v} = ||\vec{v}|| \cdot \vec{u}_v \Rightarrow \vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{||\,\vec{v}\,||}$$

O unitário de um vetor é o produto do vetor pelo inverso do seu módulo.

DEFINIÇÃO
Vetor unitário.

Exemplos:

i) Calcular o unitário do vetor $\vec{v} = (-2,\ 3,\ 6)$.

$$\vec{u}_v = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{4+9+36} = 7$, logo:

$$\vec{u}_v = \frac{1}{7}(-2,\ 3,\ 6) \Rightarrow \vec{u}_v = \left(-\frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{6}{7}\right).$$

ii) Calcular um vetor paralelo e de mesmo sentido que o vetor $\vec{v} = (-1, 2, 2)$, cujo módulo seja 5.
Basta determinar o unitário de $\vec{v}$ e multiplicar por 5.

$$\vec{v} = (-1,\ 2,\ 2) \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{1+4+4} = 3 \Rightarrow \vec{u}_v = \frac{1}{3} \cdot \vec{v}$$

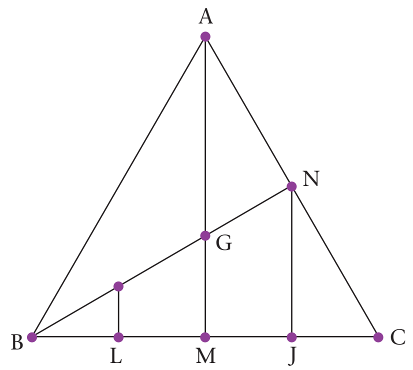
O vetor procurado é então:

$$5\vec{u}_v = 5 \cdot \frac{1}{3}\vec{v} = \frac{5}{3}\vec{v} = \left(-\frac{5}{3},\ \frac{10}{3},\ \frac{10}{3}\right)$$

1.5.4 – Centro de massa do triângulo – baricentro

O centro de massa de um triângulo é o ponto de encontro das medianas.

DEFINIÇÃO
Baricentro de um triângulo.



N é médio de $\overline{AC}$, logo J é médio de $\overline{MC}$.
Temos que:
$MB = 2MJ \Rightarrow \overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MJ}$ (Note que o segmento MB mede o dobro de $\overline{MJ}$, mas o vetor $\overrightarrow{MB}$ é o dobro de $\overrightarrow{MJ}$ com o sinal negativo porque são vetores opostos.)

Donde: $\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GN}$

$$B - G = -2(N - G)$$

$$B - G = -2N + 2G$$

$$3G = B + 2N$$

$$3G = B + 2 \cdot \frac{A + C}{2}$$

$$3G = A + B + C$$

$$\boxed{G = \frac{A + B + C}{3}}$$

No $\mathbb{R}^3$: $\boxed{G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)}$

No $\mathbb{R}^2$: $\boxed{G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)}$

Exemplos:

i) Calcular o baricentro do triângulo ABC, sendo A = (1, 2, 3), B = (3, 0, –1) e C = (2, 1, –2).

Temos: $G = \frac{A + B + C}{3}$

$$G = \frac{(1, 2, 3) + (3, 0, -1) + (2, 1, -2)}{3}$$

$$G = (2, 1, 0)$$

ii) Calcular os vértices B e C do triângulo ABC sabendo que seu baricentro é (2, –1), A = (3, 5), B = (–3, *a*) e que o vértice C está sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Temos que C = (*c*, *c*).

$$G = \frac{A + B + C}{3}$$

$$3G = A + B + C$$

$$3(2, -1) = (3, 5) + (-3, a) + (c, c)$$

$$(6, -3) = (c, 5 + a + c)$$

$$\begin{cases} c = 6 \\ 5 + a + c = -3 \Rightarrow a = -14 \end{cases}$$

Logo: B = (–3, –14) e C = (6, 6)

iii) O ponto M de intersecção das medianas de um triângulo está situado sobre o eixo das abscissas; dois de seus vértices são os pontos A = (2, –3) e B = (–5, 1); o vértice C está sobre o eixo das ordenadas. Determinar M e C.

Sejam M = (x, 0) e C = (0, y).
Temos:

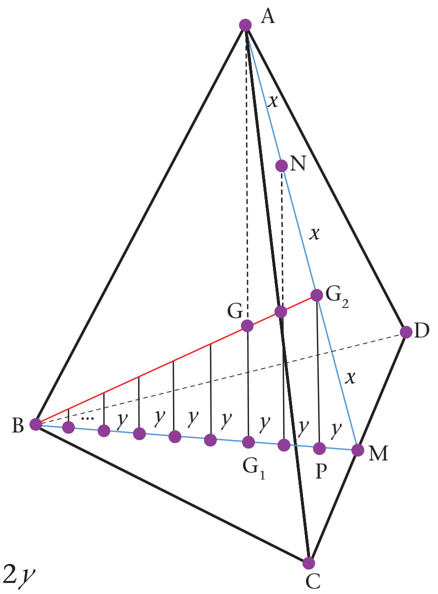
$$x = \frac{2-5+0}{3} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow M = (-1,\ 0)$$

$$0 = \frac{-3+1+y}{3} \Rightarrow 0 = -2+y \Rightarrow y = 2 \Rightarrow C = (0,\ 2)$$

1.5.5 – Baricentro do tetraedro

É o ponto de encontro das retas que unem os vértices aos baricentros das faces opostas.

DEFINIÇÃO
Baricentro de um tetraedro.



$AG_2 = 2x$ e $G_1P = 2y$
Logo: $BG_1 = 6y$

$$\frac{\overrightarrow{G_1B}}{\overrightarrow{G_1P}} = -\frac{6y}{2y} = -3$$

$$\overrightarrow{G_1B} = -3\overrightarrow{G_1P} \ \text{ e } \ \overrightarrow{GB} = -3\overrightarrow{GG_2}$$

$$B - G = -3(G_2 - G)$$

$$B - G = -3G_2 + 3G$$

$$4G = B + 3G_2$$

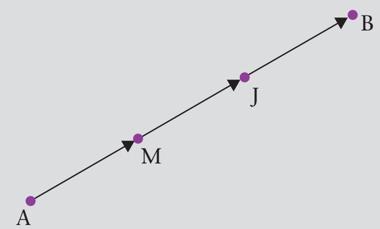
Mas $G_2 = \dfrac{A+C+D}{3}$, pois é o baricentro do triângulo ACD, logo:

$$4G = B + 3 \cdot \frac{A+C+D}{3}$$

$$\boxed{G = \frac{A+B+C+D}{4}}$$

Exercícios resolvidos:

1) Determine as coordenadas dos pontos que dividem o segmento AB, A = (–1, 2) e B = (2, –4), em três partes congruentes.
Solução:



$$M = A + \overrightarrow{AM} = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = A + \frac{1}{3}(B - A)$$

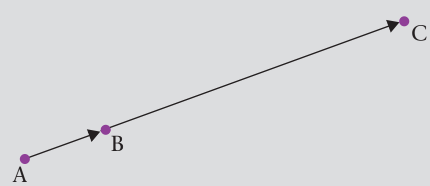
$$M = (-1,\ 2) + \frac{1}{3}(3,\ -6) = (-1,\ 2) + (1,\ -2)$$

$$M = (0,\ 0)$$

$$J = M + \overrightarrow{MJ} = M + \frac{1}{3}(B - A)$$

$$J = (0,\ 0) + (1,\ -2) = (1,\ -2)$$

2) Sejam A = (–1, 0, 2) e B = (1, –1, 1). Prolonga-se o segmento AB, a partir de B, de modo que o segmento quintuplique em C. Calcule C.
Solução:

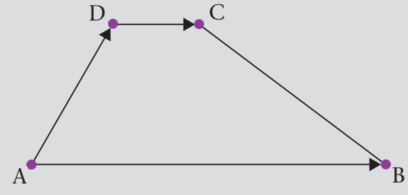


$$\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB} = 5(B - A) = 5(2,\ -1,\ -1)$$

$$C = A + \overrightarrow{AC} = (-1,\ 0,\ 2) + (10,\ -5,\ -5)$$

$$C = (9,\ -5,\ -3)$$

3) ABCD é um trapézio em que a base AB mede o triplo da base CD. A = (1, –1, 0), $\overrightarrow{AD}$ = (2, 1, 1) e C = (3, 3, 3). Calcule B.
Solução:



$D = A + \overrightarrow{AD} = (1,\ -1,\ 0) + (2,\ 1,\ 1) = (3,\ 0,\ 1)$

$\overrightarrow{DC} = C - D = (3,\ 3,\ 3) - (3,\ 0,\ 1) = (0,\ 3,\ 2)$

$\overrightarrow{AB} = \pm 3\overrightarrow{DC} = \pm 3(0,\ 3,\ 2) = \pm(0,\ 9,\ 6)$

$B = A + \overrightarrow{AB} = (1,\ -1,\ 0)\ \pm\ (0,\ 9,\ 6)$

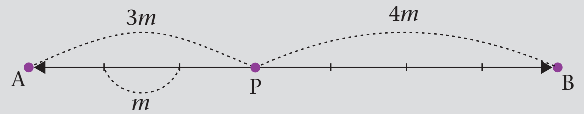
$B' = (1,\ 8,\ 6)$ ou $B'' = (1,\ -10,\ -6)$

4) Calcule as coordenadas do ponto P tal que $\dfrac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = \dfrac{1}{2}$, sendo A = (1, 3, 2) e B = (1, 1, 1).
<u>Solução</u>:

$\dfrac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} \Rightarrow 2(A - P) = B - P \Rightarrow 2A - 2P = B - P$

$P = 2A - B \Rightarrow P = (2,\ 6,\ 4) - (1,\ 1,\ 1) = (1,\ 5,\ 3)$

5) Divide-se o segmento AB em 7 partes congruentes. A = (–1, 3) e B = (6, –11). Calcule o terceiro ponto de divisão, mais próximo de A.
<u>Solução</u>:



$\left(m = \dfrac{AB}{7}\right)$

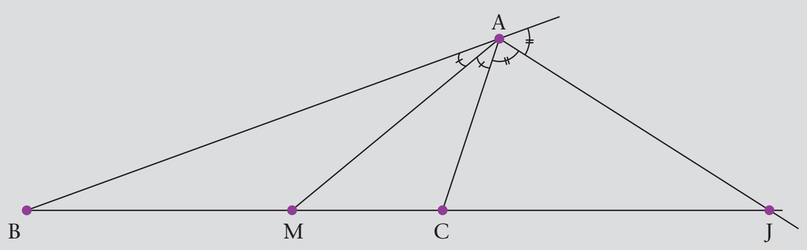
$\dfrac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = -\dfrac{3m}{4m} = -\dfrac{3}{4}$

$\overrightarrow{PA} = -\dfrac{3}{4}\overrightarrow{PB} \Rightarrow 4\overrightarrow{PA} = -3\overrightarrow{PB}$

$4(A - P) = -3(B - P) \Rightarrow 4A - 4P = -3B + 3P \Rightarrow 7P = 4A + 3B$

$P = \dfrac{4A + 3B}{7} = \dfrac{(-4,\ 12) + (18, -33)}{7} = \dfrac{(14,\ -21)}{7} = (2,\ -3)$

6) Calcule os comprimentos das bissetrizes interna e externa do ângulo A no triângulo ABC.
A = (1, 1, 1), B = (3, 3, 2) e C = (–7, 5, 0)
<u>Solução</u>:



$$\frac{\overline{\overrightarrow{MB}}}{\overline{\overrightarrow{MC}}} = -\frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ 2,\ 1)$$
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-8,\ 4,\ -1)$$
$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{64+16+1} = 9$$

$$\frac{\overline{\overrightarrow{MB}}}{\overline{\overrightarrow{MC}}} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3} \Rightarrow 3\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC} \Rightarrow 3(B - M) = -(C - M)$$

$$3B - 3M = -C + M \Rightarrow 4M = 3B + C \Rightarrow M = \frac{(9,\ 9,\ 6) + (-7,\ 5,\ 0)}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = M - A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$AM = \|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Como J é conjugado de M em relação a BC: $\dfrac{\overline{\overrightarrow{JB}}}{\overline{\overrightarrow{JC}}} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

$$\frac{3B - C}{2} = \frac{(9,\ 9,\ 6) - (-7,\ 5,\ 0)}{2} = (8,\ 2,\ 3) \Rightarrow \overrightarrow{AJ} = (7,\ 1,\ 2)$$

$$AJ = \|\overrightarrow{AJ}\| = \sqrt{49+1+4} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

7) O centro de massa do triângulo ABC, A = $(a,\ b,\ c)$, B = $(c,\ a,\ b)$ e C = $(b,\ c,\ a)$, dista 3 unidades da origem. Calcule-o.

$$G = \frac{A+B+C}{3} = \left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3}\right)$$ então $x = y = z$.

<u>Solução</u>:
Chamemos então G = $(x,\ x,\ x)$:

$$\overrightarrow{OG} = G - O = (x,\ x,\ x) \Rightarrow \|\overrightarrow{OG}\| = \sqrt{x^2 + x^2 + x^2} = 3$$
$$|x|\sqrt{3} = 3 \Rightarrow |x| = \sqrt{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Temos: $G' = (\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{3})$ ou $G'' = (-\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

8) O baricentro do tetraedro ABCD é G = (–1, 2, 0). Sabendo que A = $(a,\ 1,\ c)$, B = $(1,\ a,\ a)$, C = (0, 2, 3), calcule D = $(0,\ b,\ a)$.

Solução:

$$G = \frac{A+B+C+D}{4} \Rightarrow (-1,\ 2,\ 0) = \left(\frac{a+1}{4},\ \frac{1+a+2+b}{4},\ \frac{c+a+3+a}{4}\right)$$

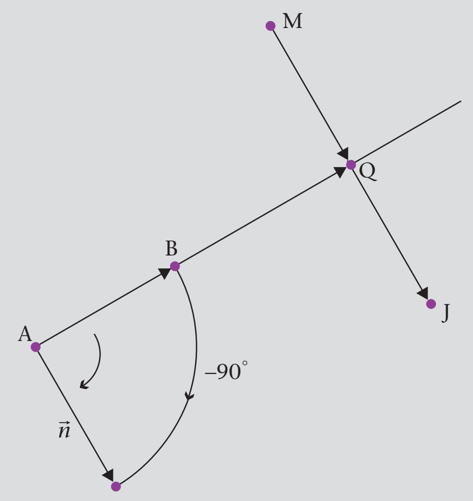
$$\begin{cases} \dfrac{a+1}{4} = -1 \Rightarrow a = -5 \\ \dfrac{3+a+b}{4} = 2 \Rightarrow 3-5+b = 8 \Rightarrow b = 10 \\ \dfrac{c+2a+3}{4} = 0 \Rightarrow c-10+3 = 0 \Rightarrow c = 7 \end{cases} \Rightarrow \quad D = (0,\ 10,\ -5)$$

9) Calcule os vetores $\vec{x}$ de módulo 10, paralelos ao vetor $\vec{v} = (4,\ 8,\ 1)$.
Solução:

$$\vec{x} = \pm 10 \cdot \vec{u}_v = \pm 10 \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \pm 10 \cdot \frac{(4,\ 8,\ 1)}{\sqrt{16+64+1}} = \pm 10 \cdot \frac{(4,\ 8,\ 1)}{9}$$

$$\vec{x} = \left(\pm\frac{40}{9},\ \pm\frac{80}{9},\ \pm\frac{10}{9}\right) \text{ com correspondência de sinais.}$$

10) Calcule o simétrico do ponto $M = (3,\ 4)$ em relação à reta que passa pelos pontos $A = (-1,\ 3)$ e $B = (4,\ -2)$.
Solução:



Seja $J = (x,\ y)$ a solução.

$\overrightarrow{MJ}$ é paralelo a $\vec{n} = \overrightarrow{AB}_{-90^\circ}$

$$\vec{n} = (B-A)_{-90^\circ} = (5,\ -5)_{-90^\circ} = (-5,\ -5)$$

$$\overrightarrow{MJ} = J - M = (x-3,\ y-4)$$

$$\overrightarrow{MJ} \,//\, \vec{n} \Rightarrow \frac{x-3}{-5} = \frac{y-4}{-5} \Rightarrow x - y = -1$$

Por outro lado, Q é médio de $\overline{MJ}$ e está na reta que contém A e B.

$$Q = \frac{M+J}{2} = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+4}{2}\right)$$

Como $\overrightarrow{AQ}$ é paralelo a $\overrightarrow{AB}$, temos:

$$\overrightarrow{AQ} = Q - A = \left(\frac{x+3}{2}+1, \frac{y+4}{2}-3\right) = \left(\frac{x+5}{2}, \frac{y-2}{2}\right)$$

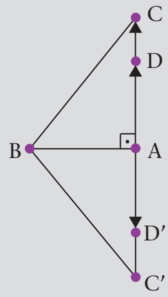
$$\overrightarrow{AB} = (5, -5)$$

$$\frac{x+5}{10} = \frac{y-2}{-10} \Rightarrow x+y=-3$$

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow J=(-2,-1)$$

11) A é vértice do ângulo reto do triângulo ABC. A = (2, 1), B = (–1, 5) e $\overline{AC}$ mede 8. Calcule C.

Solução:



$$\overrightarrow{AC} = 8 \cdot \vec{u}_{AD} \qquad AD = \pm AB_{90^\circ} = \pm(-3, 4)_{90^\circ} = \pm(-4, -3)$$

$$\vec{u}_{AD} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|} = \frac{\pm(4, 3)}{\sqrt{16+9}} = \pm\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = \pm 8\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \pm\left(\frac{32}{5}, \frac{24}{5}\right)$$

$$C = A + \overrightarrow{AC}$$

$$C' = (2, 1) + \left(\frac{32}{5}, \frac{24}{5}\right) = \left(\frac{42}{5}, \frac{29}{5}\right)$$

$$C'' = (2, 1) - \left(\frac{32}{5}, \frac{24}{5}\right) = \left(-\frac{22}{5}, -\frac{19}{5}\right)$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 P é o ponto até o qual se deve prolongar o segmento AB, no sentido de A para B, de modo que seu comprimento quintuplique. Sendo A = (1, 2) e B = (2, 4), calcule o conjugado harmônico de P.

2 O ponto B = (5, 12) é um dos vértices do triângulo ABC. Uma reta que contém G, ponto médio de AB, e é paralela ao lado AC, intercepta o terceiro lado em H = (10, 2). Calcule C.

3 Mostre que os pontos A = (–5, 4), B = (3, 2) e C = (7, 1) estão alinhados. Calcule M tal que $\dfrac{\overline{\overline{\overrightarrow{MA}}}}{\overline{\overline{\overrightarrow{MC}}}} = \dfrac{\overline{\overline{\overrightarrow{BA}}}}{\overline{\overline{\overrightarrow{BC}}}}$.

4 Seja o trapézio ABCD em que A = (–1, 3), B = (–3, 1), $\overrightarrow{BC}$ = (5, –2) e $\overrightarrow{CD} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$. Calcule os vértices C e D.

5 Calcule os pontos C e D sabendo que:

- $\overrightarrow{CD}$ é paralelo e de mesmo sentido que $\overrightarrow{AB}$, A = (4, 5), B = (8, 8);
- o comprimento de CD é 10, C está sobre O*x* e D sobre O*y*.

6 Dê os valores de *x* e *y* para que os pontos (–2, 0, 3), (1, 6, *x*) e (3, *y*, –7) estejam sobre a mesma reta.

7 Os vértices de um triângulo são A = (2, –5), B = (1, –2) e C = (4, 7). Determine o ponto de intersecção do lado AC com a bissetriz do ângulo B.

8 Calcule o baricentro do triângulo ABC.
A = (2, 1), B = (3, 0) e C = (1, 5).

9 Calcule o vértice A do triângulo ABC, sabendo que seu baricentro dista uma unidade da origem. A = (*x*, *x* + 1, *x*); B = (2, 1, 3) e C = (–1, –2, –2).

10 Verifique se os pares de vetores são paralelos.

a) $\vec{u}$ = (1, 2, 3) e $\vec{v}$ = (–2, 4, –6)

b) $\vec{u}$ = (2, –3) e $\vec{v}$ = (4, –1)

11 Calcule o valor de *a* de modo que os pontos A = (*a*, *a* + 1), B = (2, 5) e C = (–1, 4) estejam em linha reta.

12 Calcule os unitários dos vetores $\overrightarrow{AB}$ nos casos:

a) A = (3, 1) e B = (0, 5)

b) A = (1, 2, 3) e B = (–1, 5, –3)

13 O segmento AB é tal que A = (8, 8) e B = (–4, –1). Determine o ponto P pertencente a AB e ao eixo O*y*. Calcule Q, o conjugado harmônico de P, $\dfrac{\overline{\overline{\overrightarrow{PA}}}}{\overline{\overline{\overrightarrow{PB}}}}$ e P.

14 Sejam A = (0, 0, 0) e B = (4, 8, 1). Prolonga-se AB até o ponto C de modo que o módulo de $\overrightarrow{AC}$ seja 10. Calcule C.

15 Sendo $\vec{v}$ = (3*x* + *y*, *x* – 2*y*, –*y* – 8), calcule *x* + *y* quando $\vec{v}$ é paralelo aos semieixos positivos O*y* e O*z*.

16 Calcule *t* de modo que os vetores sejam paralelos nos casos:

a) (*t*, 2) e (–2*t*, –4)

b) (*t*, 2) e (–8, *t*)

17 Calcule *t* de modo que os pontos (1, –1, 3), (3, 5, 7) e (4, 8, *t*) estejam alinhados.

18 Determine o vetor paralelo ao vetor (1, 2, –2) que tem módulo 9.

19 Sejam A = (*x*, –1) e B = (2, –3). Calcule *x* sabendo que o vetor $\overrightarrow{BA}$ é paralelo à bissetriz dos quadrantes pares.

20 Um ponto P está a $\dfrac{2}{5}$ da distância de A até B. Se P = (2, 4) e B = (–7, 5), calcule A.

21 Calcule o baricentro do tetraedro ABCD sabendo que A = (–1, 2, 1), B = (3, 4, 5), C = (2, 0, 3) e D = (0, 2, 3).

22 As coordenadas dos vértices de uma mesa de bilhar são A = (8, 0), B = (8, 6), C = (0, 6) e D = (0, 0). Considere as bolas M = (1, 5) e J = (6, 2).

a) Determine na tabela BC o ponto P sobre o qual se deve atirar a bola M para atingir a bola J.

b) Determine sobre BC o ponto P e sobre AB o ponto Q tais que, atirada a bola M sobre P, ela atinja a tabela AB em Q e em seguida a bola J.

23 As coordenadas dos vértices de uma mesa de sinuca são A = (0, 0), B = (8, 0), C = (8, 4) e D = (0, 4). Considere as bolas J = (*x*, 0) e L = (3, 2). Sabe-se que J é atirada sem efeito na tabela BC, atingindo depois a tabela CD e em seguida a bola L que entra na caçapa. Calcule *x*.

24 ABCD é um trapézio retângulo tal que:

- A é o vértice do ângulo reto e está situado na bissetriz dos quadrantes ímpares;
- D é a origem de coordenadas e C pertence ao eixo O*x*;
- o lado AB tem o mesmo comprimento que BC;
- a área do trapézio é 48.

Calcule A, B e C.

25 O baricentro de um tetraedro ABCD tem suas coordenadas em progressão aritmética. Calcule-o sabendo que A = (*a*, 0, 8), B = (–1, 3, 2), C = (3, 2, –1) e D = (2, –1, 3).

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (Unificado-RJ) ABCD é um quadrado. O vetor $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ é igual a:

(A) $\overrightarrow{DB}$ (C) $\overrightarrow{CB}$ (E) $\overrightarrow{AC}$

(B) $\overrightarrow{CA}$ (D) $\overrightarrow{BD}$

2 Se $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}-\vec{v}|$, então:

(A) $\vec{v}=\vec{0}$ (B) $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ (C) $|\vec{u}|=|\vec{v}|$

(D) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos (E) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais

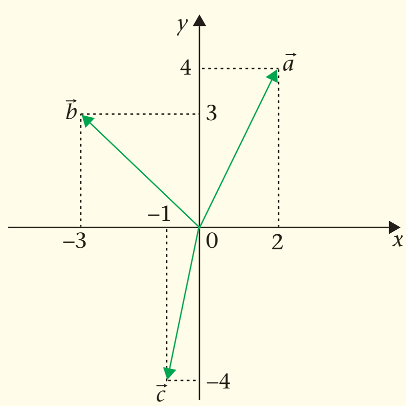
3 Os pontos A(2, –1), B(8, 7) e C(4, 3) são vértices de um paralelogramo ABCD. Determine:

a) as coordenadas do vértice D;

b) o ponto de encontro das diagonais;

c) a medida de cada diagonal.

4 (Unirio-RJ)



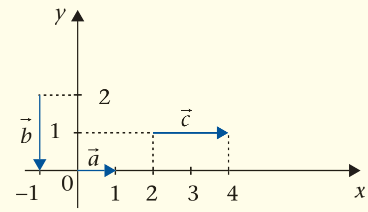
Considere os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ acima representados.

O vetor $\vec{v}$ tal que $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{c}$ é:

(A) $\left(-6, \frac{7}{4}\right)$ (C) $\left(-\frac{7}{4}, 6\right)$ (E) $\left(6, -\frac{7}{4}\right)$

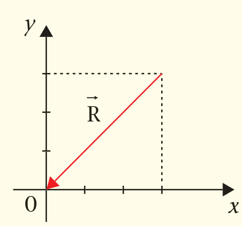
(B) (–2, 3) (D) $\left(\frac{7}{4}, -6\right)$

5 (Unirio-RJ) Considere os vetores abaixo:

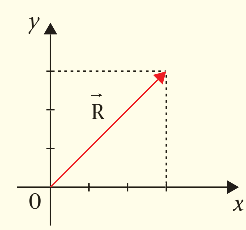


Assinale o gráfico que representa o vetor $\vec{R}=2\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

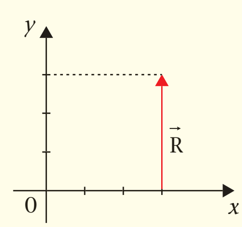
(A)



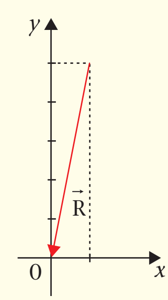
(D)



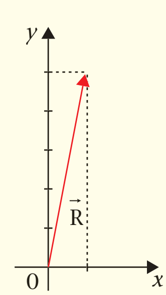
(B)



(E)



(C)



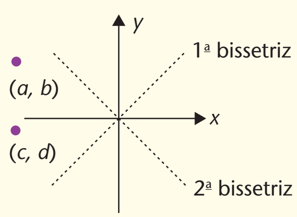
6 (UFRJ) Sejam A(1, 0) e $B(5,\ 4\sqrt{3})$ dois vértices de um triângulo equilátero ABC. O vértice C está no 2º quadrante. Determine suas coordenadas.

7 (Unificado-RJ) O ponto Q é o simétrico do ponto P(*x*, *y*) em relação ao eixo O*y*. O ponto R é o simétrico do ponto Q em relação à reta *y* = 1. As coordenadas de R são:

(A) (x, 1 – *y*) (C) (–*x*, 1 – *y*) (E) (*y*, –*x*)

(B) (0, 1) (D) (–*x*, 2 – *y*)

8 Os pontos (*a*, *b*) e (*c*, *d*) estão representados na figura.



O ponto (*a* + *b*, *c* – *d*) está situado no:

(A) 1º quadrante.

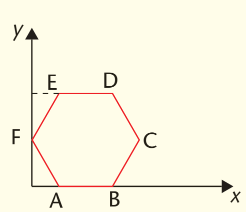
(B) 2º quadrante.

(C) 3º quadrante.

(D) 4º quadrante.

(E) eixo O*x*.

9 (UFF-RJ) No hexágono equilátero ABCDEF, representado na figura abaixo, AB//DE e são conhecidas as coordenadas dos vértices A(3, 0) e F(0, 4). Determine as coordenadas de todos os outros vértices.



10 (Unirio-RJ) Considere a função real definida por $f(x) = 1 + \sqrt{18 - 2x^2}$ e um ponto A(2, 1). Sabe-se que a distância de um ponto P do gráfico de *f* ao ponto A é $\sqrt{10}$. O ponto P encontra-se no:

(A) 1º quadrante.

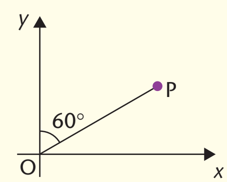
(B) 2º quadrante.

(C) 3º quadrante.

(D) 4º quadrante.

(E) ponto de origem do sistema *x*O*y*.

11 Na figura, $|\overrightarrow{OP}| = 18$. Determine as coordenadas cartesianas (*x*, *y*) do ponto P.



12 (PUC-RJ) ABCD é um paralelogramo. M é o ponto médio do lado CD e P é tal que $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

Se T é o ponto de intersecção de AM com DP, o valor da razão $\frac{\overline{DT}}{\overline{DP}}$ é de:

(A) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{4}{7}$

(B) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{3}{7}$

13 (Uerj) Uma lanterna está no ponto A = (–2, 2) e ilumina o ponto B = (10, 3) depois da luz incidir no espelho, que é o eixo O*x*. Calcule o comprimento do caminho percorrido pela luz.

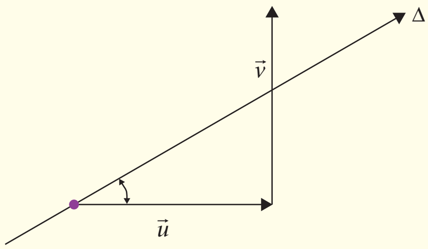
14 (UFRJ) Sejam M_1 = (1, 2), M_2 = (3, 4) e M_3 = (1, –1) os pontos médios dos lados de um triângulo.
Determine as coordenadas dos vértices desse triângulo.

15 (PUC-RJ) Os pontos A(3, 1), B(4, –2) e C(*x*, 7) são colineares. O valor de *x* é igual a:

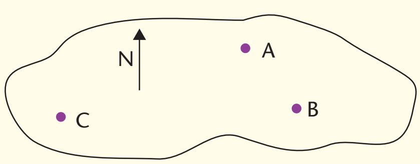
(A) 1 (C) 5 (E) 7

(B) 2 (D) 6

16 (Cesgranrio-RJ) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores ortogonais de módulo 1; e seja Δ um eixo do plano dos dois vetores, como mostrado na figura. Se o ângulo entre Δ e $\vec{u}$ é de 30°, calcule o módulo da projeção de $\vec{u} + \vec{v}$ sobre Δ.



17 (UFRJ) Três cidades A, B e C estão representadas no mapa a seguir. Escolhendo uma cidade como origem, é possível localizar as outras duas usando um sistema de coordenadas (d, θ) em que d é a distância, em quilômetros, entre a cidade considerada e a origem e θ é o ângulo, em graus, que a semirreta que une a origem à cidade considerada faz com o vetor norte N; θ é medido a partir do vetor N no sentido horário.



Usando A como origem, as coordenadas de B nesse sistema são (50, 120) e as coordenadas de C são (120, 210).

a) Determine a distância entre as cidades B e C.

b) Determine as coordenadas da cidade B, se escolhermos C como origem.

18 (UFF-RJ) Em um retângulo ABCD, M e N são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.
Tem-se que $\overrightarrow{BM} = (\sqrt{3}, 1)$ e $\overrightarrow{BN} = (2\sqrt{3}, -2)$.
Determine o perímetro do retângulo.

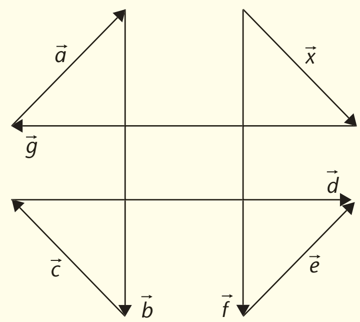
19 Um trem viaja para o sul com velocidade de 40 km/h. Para um observador nesse trem, o vento parece soprar do oeste. Quando a velocidade do trem é reduzida para 10 km/h, o vento parece vir do noroeste. Calcule o módulo da velocidade do vento.

20 Sendo AB, AC e AD três arestas de um paralelepípedo, calcule o ponto P mais afastado de A nesse paralelepípedo, assim como sua distância até A.
Dados: A = (1, –1, 0), B = (2, 1, 1), C = (0, 2, 2) e D = (3, 0, 0)

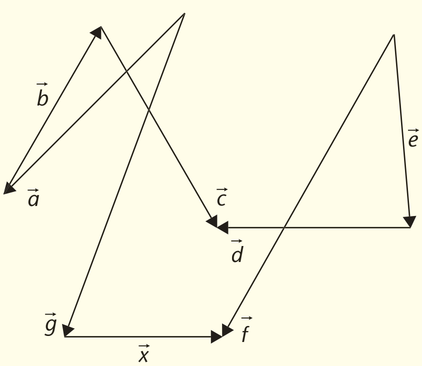
21 Um trem viaja para o oeste com velocidade de 80 km/h. Para um observador situado no trem, o vento parece soprar do norte. Quando a velocidade do trem é reduzida para 20 km/h, o vento parece soprar do nordeste. Qual o módulo da velocidade do vento?

22 Dadas as figuras abaixo, calcule o vetor $\vec{x}$.

a)



b)



23 Considere um quadrilátero convexo ABCD. Seja P a intersecção das diagonais AC e BD e seja Q a intersecção dos suportes dos lados CB e DA. Se $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB} = 3\overrightarrow{PD}$, determine k de modo que $\overrightarrow{BQ} = k\overrightarrow{BC}$.

24 Para um barco rumo noroeste, o vento parece vir do oeste. O barco muda o rumo para nordeste com a mesma velocidade, e o vento parece vir do leste. Sabendo que o módulo da nova velocidade aparente é $\sqrt{3}$ vezes o módulo da anterior, qual a direção real do vento?

25 Um paralelogramo ABCD tem vértices A = (2, –3, 5) e B = (–1, 3, 2). A intersecção de suas diagonais é M = (4, –1, 7).

Calcule as coordenadas dos vértices do paralelogramo que se obtém efetuando-se uma translação de ABCD segundo o vetor $\vec{v} = (-5, 2, -15)$.

26 Dê os valores de x e y para que os pontos $(-2, 0, 3)$, $(1, 6, x)$ e $(3, y, 7)$ pertençam à mesma reta.

27 Os pontos A = (1, 2), B = (3, –2) e C = (–1, –1) são três vértices de um paralelogramo. Dê o conjunto das coordenadas prováveis do vértice D.

28 Os pontos médios dos lados de um triângulo são A = (1, 2), B = (2, 3) e C = (3, 4). Calcule as coordenadas do baricentro do triângulo.

29 O ponto B = (5, 12) é um dos vértices de um triângulo ABC. Uma reta que contém G, ponto médio de AB, e é paralela ao lado AC, intercepta o terceiro lado no ponto H = (10, 2). Calcule o ponto C.

30 Calcule o conjunto de valores de x de modo que os pontos $(1, x)$, $(2, 0)$ e $(x, 3)$ fiquem em linha reta.

CAPÍTULO II

PRODUTOS DE VETORES

Mikhail Malyshev/Dreamstime.com

Neste capítulo, estudaremos vários produtos distintos que podem ser feitos entre dois, e até três, vetores. Por exemplo, não é apenas a magnitude da força aplicada a uma ferramenta que faz girar a porca – o importante é que o torque (produto vetorial desta força com o vetor que liga o centro de rotação ao ponto onde ela é aplicada) seja o maior possível. Por este motivo, não adianta empurrar a ferramenta em direção à porca, mas, quanto mais longe dela for o ponto de aplicação, menos força precisará ser feita.

2 – PRODUTOS DE VETORES

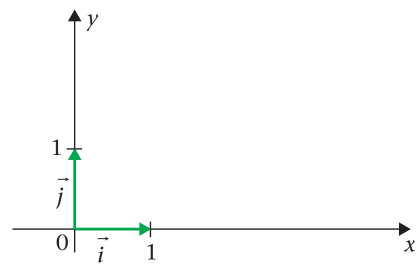
2.1 – Expressão analítica de um vetor

Sejam $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ os vetores unitários dos eixos, tais que: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

No $\mathbb{R}^2$, esses vetores são:

$\vec{i} = (1,\ 0)$

$\vec{j} = (0,\ 1)$

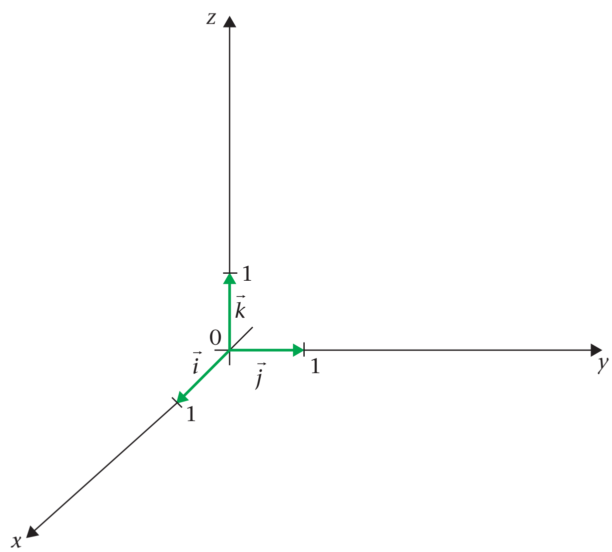


No $\mathbb{R}^3$, esses vetores são:

$\vec{i} = (1,\ 0,\ 0)$

$\vec{j} = (0,\ 1,\ 0)$

$\vec{k} = (0,\ 0,\ 1)$



Consideremos um vetor qualquer $\vec{v} = (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$.
Note que:

$\vec{v} = (x,\ y) = (x,\ 0) + (0,\ y) = x(1,\ 0) + y(0,\ 1) = x\vec{i} + y\vec{j}$

Logo:

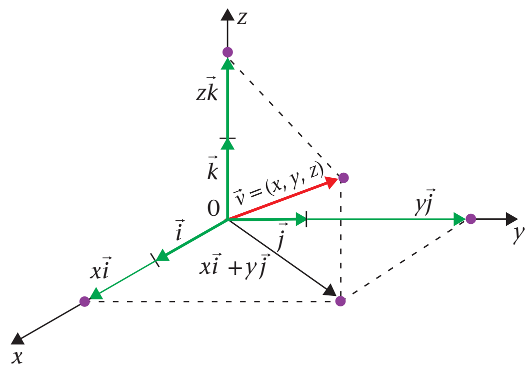
$$\vec{v} = (x,\ y) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Analogamente, no $\mathbb{R}^3$ vem:

$\vec{v} = (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0,0, 1) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Logo:

$$\vec{v} = (x,\ y,\ z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



Exemplos:

i) Passar para a forma analítica os vetores:
$\vec{v}_1 = (2,\ 0,\ 3)$, $\vec{v}_2 = (1,\ 1,\ 2)$, $\vec{v}_3 = (1,\ 2)$ e $\vec{v}_4 = (0,\ 2,\ 0)$.

Temos:

$$\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$$
$$\vec{v}_2 = 1\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$
$$\vec{v}_3 = 1\vec{i} + 2\vec{j} = \vec{i} + 2\vec{j}$$
$$\vec{v}_4 = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} = 2\vec{j}$$

ii) Sendo $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, calcular $-2\vec{v}$.

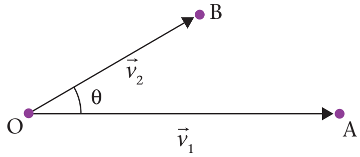
Temos:

$$-2\vec{v} = -2(2\vec{i} + 3\vec{j}) = -4\vec{i} - 6\vec{j} = (-4, -6)$$

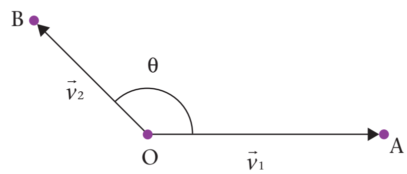
2.2 – Produto escalar ou produto interno

Sejam dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Apliquemos os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ em um ponto O qualquer. O ângulo θ entre os segmentos orientados (O, A) e (O, B), representantes de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente, é o ângulo dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

$$\text{ang}\ (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \text{ang}\ (\vec{v}_2, \vec{v}_1) = \theta, 0 \le \theta \le 180^\circ$$

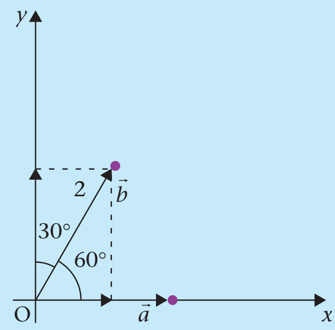


ou



Exemplos:

i) São dados dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tais que $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 2$.
Calcular $\|\vec{a} + \vec{b}\|$, sabendo que o ângulo de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é 60°.

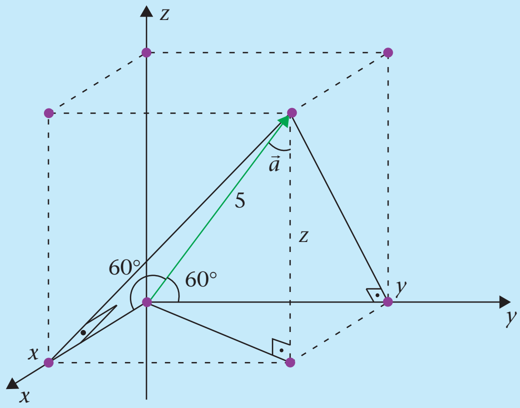


Coloquemos $\vec{a}$ sobre Ox e calculemos as coordenadas de $\vec{a} + \vec{b}$.
Temos: $\vec{a} = 2\vec{i}$
$\vec{b} = (2\cos 60°)\vec{i} + (2\cos 30°)\vec{j} = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$

Então $\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$, logo:

$\|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

ii) Sendo $\vec{b} = 4\vec{i}$, $c = 15\vec{j}$, $\|\vec{a}\| = 5$ e $\text{ang}(\vec{a}, \vec{c}) = (\text{ang } \vec{a}, \vec{b}) = 60°$, calcular as coordenadas de $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ assim como seu módulo.



Temos:

$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$x = y = 5\cos 60° = \dfrac{5}{2}$

Como $\|\vec{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, vem:

$$5 = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4} + z^2} \Rightarrow z = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Logo:

$$\vec{a} = \frac{5}{2}\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j} \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}\vec{k} \Rightarrow$$

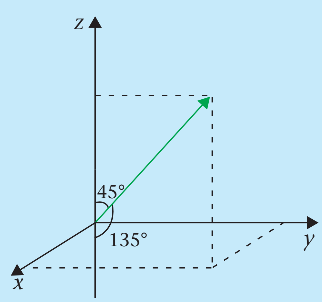
$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \frac{5}{2}\vec{i} = \frac{5}{2}\vec{j} \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}\vec{k} + 4\vec{i} + 15\vec{j} =$$

$$= \frac{13}{2}\vec{i} + \frac{35}{2}\vec{j} \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}\vec{k}$$

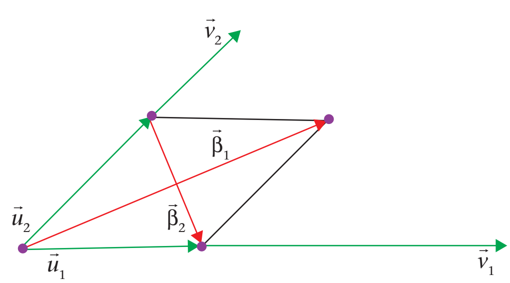
$$\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\| = \sqrt{\frac{169}{4} + \frac{1\,225}{4} + \frac{50}{4}} = \sqrt{361} = 19$$

Observe que os ângulos do vetor $\vec{a}$ (são dois) com o eixo z são tais que:

$$\cos\alpha = \frac{z}{\|\vec{a}\|} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ou seja, } 45° \text{ e } 135°.$$



2.2.1 – Bissetrizes dos ângulos das direções de dois vetores



Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ dois vetores e consideremos seus unitários, respectivamente, $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$.

O paralelogramo relativo à soma $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ se transforma num losango e suas diagonais são as bissetrizes das direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Logo, a soma $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ será paralela à bissetriz do ângulo dos vetores, e a diferença $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ será paralela à bissetriz do suplemento, já que as diagonais de um losango são perpendiculares.

Temos:

$$\vec{\beta}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} + \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} \quad \text{e} \quad \vec{\beta}_2 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} - \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}$$

Exemplo:

Determinar dois vetores paralelos às bissetrizes das direções de:
$\vec{v}_1 = (2,\ -2,\ 1)$ e $\vec{v}_2 = (-2,\ 3,\ -6)$

Calculemos os unitários de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{(2,\ -2,\ 1)}{\sqrt{4+4+1}} = \left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{(-2,\ 3,\ -6)}{\sqrt{4+9+36}} = \left(-\frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ -\frac{6}{7}\right)$$

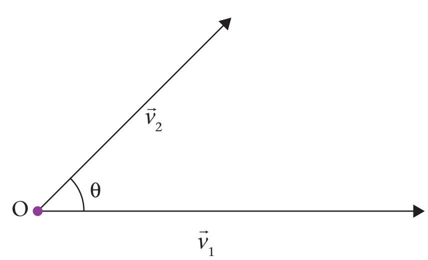
Os vetores paralelos às bissetrizes são:

$$\vec{\beta}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \left(\frac{8}{21},\ \frac{-5}{21},\ \frac{-11}{21}\right) \quad \text{do ângulo de } \vec{v}_1 \text{ e } \vec{v}_2.$$

$$\vec{\beta}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \left(\frac{20}{21},\ \frac{-23}{21},\ \frac{25}{21}\right) \quad \text{do suplemento.}$$

DEFINIÇÃO
Produto escalar.

Sejam dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Chama-se **produto escalar** ou **interno** dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ o número real cujo valor é o produto dos módulos dos dois vetores, pelo cosseno do ângulo por eles formado.



Usa-se a notação $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$, que se lê "$\vec{v}_1$ escalar $\vec{v}_2$".

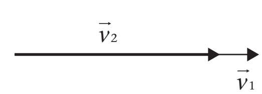
Sendo $\theta = \text{ang}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, $\boxed{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \cos\theta}$.

Conforme o ângulo θ, temos:

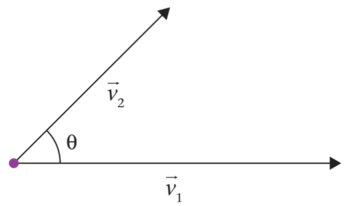
NOTA
Em particular, $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$.

a) $\boxed{\theta = 0} \Rightarrow \cos\theta = 1$

Se os vetores são paralelos e de mesmo sentido, então: $\boxed{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|}$

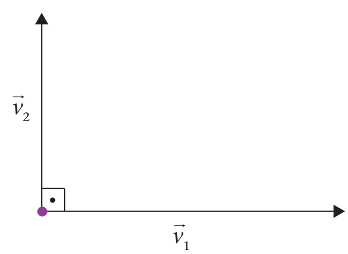


b) $\boxed{0 < \theta < \frac{\pi}{2}} \Rightarrow 0 < \cos\theta < 1 \Rightarrow \boxed{0 < \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 < \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|}$



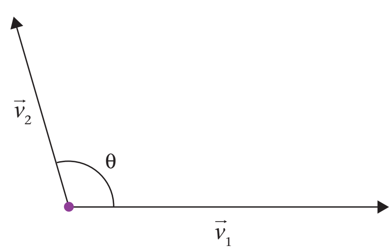
Quando o ângulo de dois vetores é agudo, o produto escalar é positivo.

c) $\theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$



Se dois vetores são perpendiculares, o produto escalar é igual a zero.

d) $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow -1 < \cos\theta < 0 \Rightarrow -\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| < \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 < 0$



Se o ângulo de dois vetores é obtuso, o produto escalar é negativo.

e) $\theta = \pi \Rightarrow \cos\theta = -1$

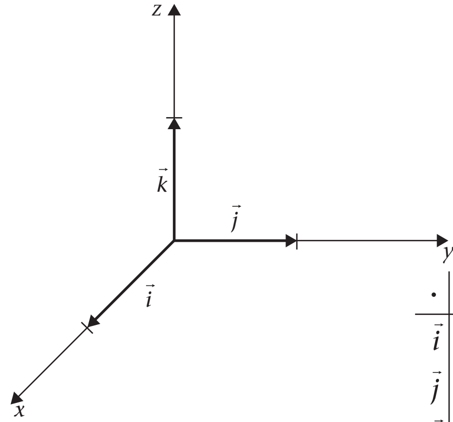
Se os vetores são paralelos e de sentidos contrários, então: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|$

Resumindo:

$$-\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \leq \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \leq \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \text{ ou } |\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| \leq \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|$$

Assim, se os módulos de dois vetores são fixos, seu produto escalar será máximo quando forem paralelos de mesmo sentido e mínimo quando forem paralelos de sentidos contrários.

Os produtos escalares entre os unitários dos eixos coordenados são:



$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Pois:

$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90° = 0$

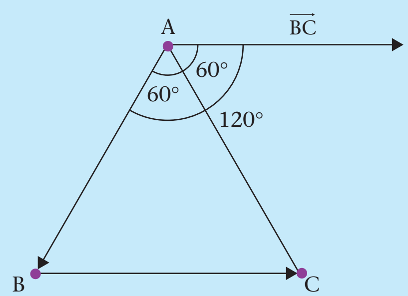
Exemplos:

i) Sejam os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de módulos respectivos 4 e 5, que formam o ângulo de 60°. Então:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos 60° = 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{a}\| \cos 0° = 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16$$

ii) Seja o triângulo equilátero ABC de lado 2. Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.



Temos que:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 2 \cdot 2 \cos 120° = -2$$

uma vez que $\text{ang}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120°$.

iii) O produto escalar de dois vetores de módulos $\sqrt{5}$ e $\sqrt{10}$ é –5. Calcular o ângulo desses vetores.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{-5}{\sqrt{50}} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 135°$$

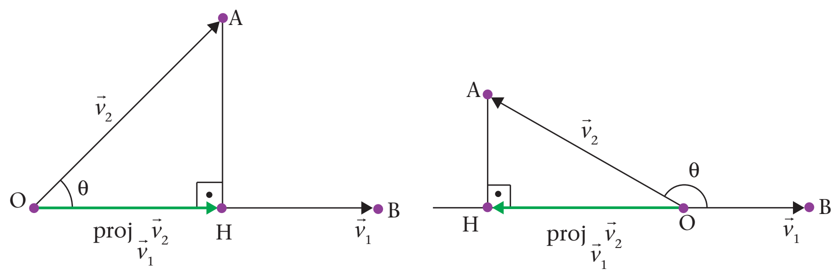
Note que o ângulo entre dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ pode ser obtido a partir de:

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|}$$

2.2.2 – Interpretação geométrica do produto escalar

Dados dois vetores $\vec{v}_1 = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{v}_2 = \overrightarrow{OA}$, considere a projeção ortogonal H do ponto A sobre a reta suporte de OB. O vetor $\overrightarrow{OH}$ é chamado **projeção ortogonal** de $\vec{v}_2$ sobre $\vec{v}_1$.

DEFINIÇÃO
Projeção ortogonal de um vetor sobre outro vetor.

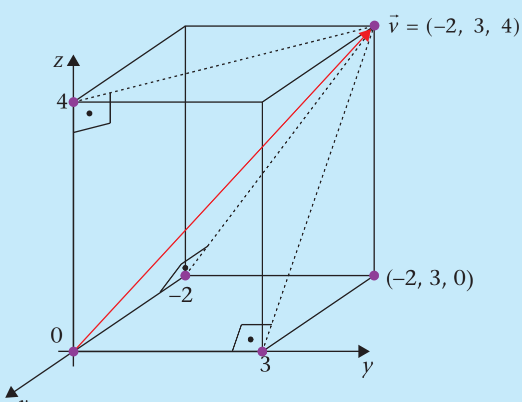


O **valor algébrico** da projeção de $\vec{v}_2$ sobre $\vec{v}_1$ é $\|\overrightarrow{OH}\|$ se $\overrightarrow{OH}$ tiver o sentido de $\vec{v}_1$, ou $-\|\overrightarrow{OH}\|$ se $\overrightarrow{OH}$ e $\vec{v}_1$ tiverem sentidos contrários.

Usaremos as notações $\text{proj}_{\vec{v}_1}\vec{v}_2$ e $\text{alg}\,\text{proj}_{\vec{v}_1}\vec{v}_2$ para a projeção ortogonal de $\vec{v}_2$ sobre $\vec{v}_1$ e seu valor algébrico, respectivamente.

Exemplo:

O vetor $\vec{v} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ tem como valor algébrico de sua projeção sobre os eixos: Ox a sua abscissa $x = -2$; Oy a sua ordenada $y = 3$; Oz a sua cota $z = 4$, uma vez que $\vec{v} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k} = (-2, 3, 4)$.



Em geral, se o ângulo entre os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ é θ, temos que:

$$\text{alg proj}_{\vec{v}_1}\vec{v}_2 = \|\vec{v}_2\|\cos\theta$$

Portanto:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\|\|\vec{v}_2\|\cos\theta = \|\vec{v}_1\|\text{alg proj}_{\vec{v}_1}\vec{v}_2$$

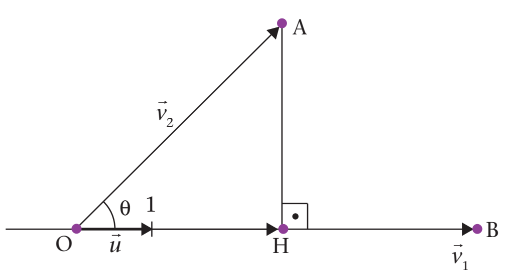
Analogamente:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_2\|\text{alg proj}_{\vec{v}_2}\vec{v}_1$$

O produto escalar de dois vetores é o produto do módulo de um deles pelo valor algébrico da projeção ortogonal do outro sobre ele.

De onde:

O valor algébrico da projeção ortogonal de um vetor $\vec{v}_2$ sobre um vetor $\vec{v}_1$ é o produto escalar de $\vec{v}_2$ pelo unitário de $\vec{v}_1$.



$$\vec{v}_2 \cdot \vec{u} = \|\vec{v}_2\| \cdot 1 \cdot \cos\theta = \text{alg proj}_{\vec{v}_1}\vec{v}_2$$

NOTA

Lembre-se que $\text{alg proj}_{\vec{v}_1}\vec{v}_2$ é um número.

Enfim, o vetor projeção $\overrightarrow{OH}$ pode ser obtido por meio de:

$$\overrightarrow{OH} = (\text{alg proj}_{\vec{v}_1}\vec{v}_2) \cdot \vec{u} = (\vec{v}_2 \cdot \vec{u})\vec{u}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}_1}\vec{v}_2 = (\vec{v}_2 \cdot \vec{u})\vec{u}$$

Em particular, se $\vec{v} = (x, y, z)$, temos:

$\text{alg proj}_{\vec{i}}\vec{v} = x \Rightarrow \text{proj}_{\vec{i}}\vec{v} = x\vec{i} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{i} = x$

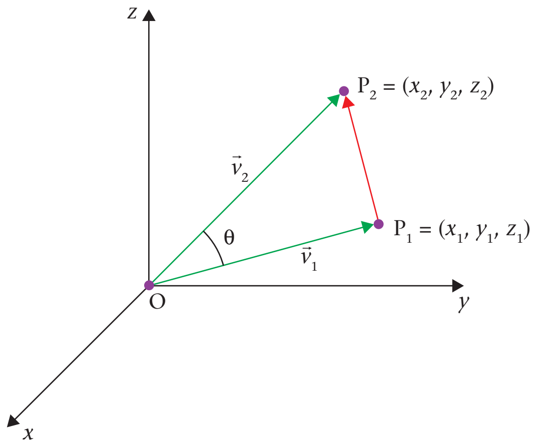
$\text{alg proj}_{\vec{j}}\vec{v} = y \Rightarrow \text{proj}_{\vec{j}}\vec{v} = y\vec{j} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{j} = y$

$\text{alg proj}_{\vec{k}}\vec{v} = z \Rightarrow \text{proj}_{\vec{k}}\vec{v} = z\vec{k} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{k} = z$

2.3 – Expressão analítica do produto escalar

Dados $\vec{v}_1 = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ e $\vec{v}_2 = (x_2,\ y_2, z_2)$, calculemos a expressão analítica de $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ em função de suas coordenadas.

Temos:



$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$

$\theta = \text{ang}\ (\vec{v}_1, \vec{v}_2),\ 0 \leq \theta \leq \pi$

$OP_1 = \|\vec{v}_1\|$ e $OP_2 = \|\vec{v}_2\|$

Utilizando a lei dos cossenos, temos:

$$P_1P_2^{\ 2} = OP_1^{\ 2} + OP_2^{\ 2} - 2\ \cdot OP_1 \cdot OP_2 \cdot \cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2 \cdot OP_1 \cdot OP_2\ \cdot \cos\theta$$

$$2 \cdot OP_1 \cdot OP_2 \cdot \cos\theta = 2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2z_1z_2$$

Como $OP_1 = \|\vec{v}_1\|$ e $OP_2 = \|\vec{v}_2\|$, vem:

$$\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Como $\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cos\theta$ é o produto escalar $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Analogamente para $\mathbb{R}^2$, temos:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2$$

O produto escalar de dois vetores em coordenadas é a soma dos produtos de suas coordenadas de mesmo nome.

Exemplos:

i) Dados os vetores $\vec{a} = (1,\ 2,\ 3)$ e $\vec{b} = (-1,\ 2,\ 1)$, calcular:
a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$
b) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$

Temos:
a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 6$
b) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = (5,\ -2,\ 3) \cdot (-1,\ 6,\ 5) = -5 - 12 + 15 = -2$

ii) Calcular o valor de a de modo que os vetores $\vec{u} = a\vec{i} + \vec{j} + (a+1)\vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + a\vec{j} - 6\vec{k}$ sejam perpendiculares.
Devemos ter: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
$(a,\ 1,\ a+1) \cdot (2,\ a,\ -6) = 0 \ \Rightarrow\ 2a + a - 6a - 6 = 0 \ \Rightarrow\ a = -2$

iii) Determinar o vetor projeção do vetor $\vec{v} = (5,\ -1,\ 1)$ sobre o vetor $\vec{w} = (-1,\ 2,\ -2)$.
Temos que:

$$\text{alg proj}_{\vec{w}}\vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}_{\vec{w}} = (5,\ -1,\ 1) \cdot \frac{(-1,\ 2,\ -2)}{\sqrt{1+4+4}}$$

$$\text{alg proj}_{\vec{w}}\vec{v} = \frac{-5-2-2}{3} = -3, \text{ logo } \text{proj}_{\vec{w}}\vec{v} = -3\vec{u}_{\vec{w}}$$

De onde: $\text{proj}_{\vec{w}}\vec{v} = -3 \cdot \dfrac{(-1,\ 2,\ -2)}{3} = (1,\ -2,\ 2)$

iv) Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{a} = (2,\ 1,\ 1)$ e $\vec{b} = (-1,\ -2,\ 1)$.
Temos que:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{-2-2+1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Logo: $\theta = 120°$

Exercícios resolvidos:

1) Mostre que as diagonais do quadrilátero ABCD, cujos vértices são A = (1, 1), B = (1, 3), C = (3, 2) e D = (–2, 9) são perpendiculares.

Solução:
As diagonais serão: $\overrightarrow{AC} = C - A = (2,\ 1)$ e $\overrightarrow{BD} = D - B = (-3,\ 6)$
O produto escalar $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -6 + 6 = 0$, logo são perpendiculares.

2) Calcule o valor de m de modo que o módulo da projeção de $\overrightarrow{PR}$ sobre $\overrightarrow{AB}$ seja 1. Dados: P = (1, m), R = (2, –1), A = (1, –2) e B = (–3, 1).

Solução:

Temos que:

$$\left\|\text{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{PR}\right\| = 1 \Rightarrow \left|\text{alg proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{PR}\right| = 1$$

$$\left|\overrightarrow{PR}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}\right| = 1 \Rightarrow \left|\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{AB}\right| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

$\overrightarrow{PR} = R - P = (1,\ -1-m)$ e $\overrightarrow{AB} = B - A = (-4,\ 3)$

Logo: $|-4-3-3m| = \sqrt{16+9} \Rightarrow \left|-3m-7\right| = 5 \Rightarrow 3m + 7 = \pm 5$

$3m = -7 \pm 5 \Rightarrow m = -4$ ou $m = -\dfrac{2}{3}$

3) Determine a relação que deve existir entre as coordenadas de um vetor do $\mathbb{R}^2$, de modo que forme 45° com o vetor $\vec{v} = (3,\ 1)$.

Solução:

Seja $\vec{w} = (x,\ y)$ o vetor em questão. Devemos ter:

$$\cos 45° = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3x+y}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}$$

Logo:

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2+y^2} = 3x+y \Rightarrow 5x^2+5y^2 = 9x^2+6xy+y^2 \Rightarrow 2x^2+3xy-2y^2 = 0$$

Resolvendo esta equação em relação a x, vem:

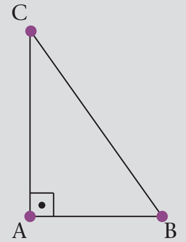
$$x = \frac{-3y \pm \sqrt{9y^2+16y^2}}{4} \Rightarrow 4x = -3y \pm 5y\text{, de onde:}$$

$4x = -3y - 5y \Rightarrow x = -2y$ ou

$4x = -3y + 5y \Rightarrow y = 2x$

4) Calcule o valor de a de modo que o triângulo ABC, A = (3, 0, –1), B = (2, 2, 1) e C = (–1, 1, a), seja retângulo em A.

Solução:

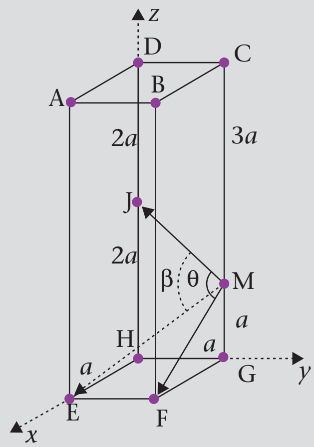


Devemos ter $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ para os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 2,\ 2)$ $\qquad (-1)\cdot(-4)+2\cdot 1+2\cdot(a+1) = 0 \Rightarrow$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-4,\ 1,\ a+1)$ $\qquad \Rightarrow 4+2a+4 = 0 \Rightarrow a = -4$

5)



No paralelepípedo retângulo ABCDEFGH, AD = DC, AE = 4AD, DH = 2DJ e CM = 3MG. Calcule os ângulos FMJ e EMJ.

Solução:

Coloquemos os eixos sobre as arestas do paralelepípedo com a origem no ponto H.

Temos então: F = (a, a, 0), M = (0, a, a) e J = (0, 0, 2a)

Logo: $\overrightarrow{MF} = F - M = (a,\ 0,\ -a)$ e $\overrightarrow{MJ} = J - M = (0,\ -a,\ a)$

Então: $\cos\theta = \dfrac{a\cdot 0 + 0\cdot(-a) + (-a)\cdot a}{\sqrt{a^2+0+a^2}\cdot\sqrt{0+a^2+a^2}} = \dfrac{-a^2}{a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120°$

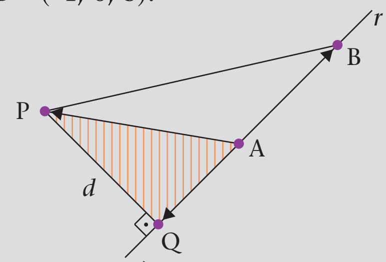
Por outro lado: $\overrightarrow{ME} = E - M = (a,\ 0,\ 0) - (0,\ a,\ a) = (a,\ -a,\ -a)$,
pois E = (a, 0, 0):

$$\cos\beta = \frac{0\cdot a + (-a)\cdot(-a) + a\cdot(-a)}{\sqrt{0+a^2+a^2}\cdot\sqrt{a^2+a^2+a^2}} = 0 \Rightarrow \beta = 90°$$

6) Calcule a distância do ponto P = (2, 3, –1) à reta que passa pelos pontos A = (1, 2, 13) e B = (–1, 0, 5).

Solução:

Temos que:



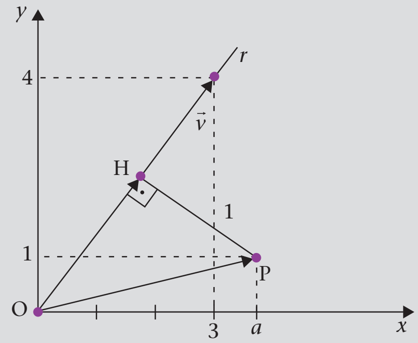
$\overrightarrow{AP} = P - A = (1,\ 1,\ -14)$ e $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,\ -2,\ -8)$

$\text{alg proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP}\cdot\vec{u}_{\overrightarrow{AB}} = (1,\ 1,\ -14)\cdot\dfrac{(-2,\ -2,\ -8)}{\sqrt{4+4+64}} =$

$= \dfrac{-2-2+112}{6\sqrt{2}} = \dfrac{108}{6\sqrt{2}} = 9\sqrt{2}$

$d = \sqrt{\|\overrightarrow{AP}\|^2 - \left|\text{alg proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AP}\right|^2} = \sqrt{198-162} = \sqrt{36} = 6$

7) Calcule o valor de a de modo que o ponto P = (a, 1) diste 1 da reta r que passa na origem e é paralela ao vetor $\vec{v} = (3,\ 4)$.
Solução:
Temos que:



$$\overrightarrow{OH} = \text{alg proj}_r\,\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{u}_{\vec{v}}$$

$$\overrightarrow{OP} = (a,\ 1)$$

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(3,\ 4)}{\sqrt{9+16}} = \frac{(3,\ 4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$\overrightarrow{OH} = \dfrac{3a+4}{5}$. Como $\|\overrightarrow{OH}\|^2 + 1^2 = \|\overrightarrow{OP}\|^2$, vem:

$$\frac{(3a+4)^2}{25} + 1 = 1 + a^2 \Rightarrow 2a^2 - 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ ou } a = -\frac{1}{2}$$

2.3.1 – Propriedades do produto escalar

As expressões cartesianas:

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2$ (para $\mathbb{R}^2$)

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ (para $\mathbb{R}^3$)

permitem estabelecer as seguintes propriedades do produto interno:

1) Comutatividade
$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$

2) Associatividade em relação ao produto por um escalar
$(m\vec{v}_1) \cdot (n\vec{v}_2) = (mn) \cdot (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$

3) Distributividade em relação à adição de vetores
$\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3$

Demonstraremos apenas esta última em $\mathbb{R}^3$.

Dados $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$, temos:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) &= (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2 + x_3, y_2 + y_3, z_2 + z_3) = \\ &= x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) + z_1(z_2 + z_3) = \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + (x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) = \\ &= \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3\end{aligned}$$

NOTA
A lei do cancelamento não vale para o produto escalar, isto é, não vale que $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_3$, mesmo que $\vec{v}_2 \neq 0$.
De fato, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\vec{v}_1 - \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_2 = 0$ significa apenas que $\vec{v}_2$ é perpendicular a $\vec{v}_1 - \vec{v}_3$.

Outras propriedades algébricas do produto interno são:

4) $\vec{v} \cdot \vec{0} = 0$

5) $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_1 = 0$ ou $\vec{v}_2 = 0$ ou $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$

6) $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2 \geq 0$

7) $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0$

8) $(\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 \pm 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2$, isto é,

$$\|\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2\|^2 = \|\vec{v}_1\|^2 \pm 2\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| + \|\vec{v}_2\|^2$$

9) $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \|\vec{v}_1\|^2 - \|\vec{v}_2\|^2$

Exemplo:

Sendo $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 3$ e ang $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$, calcular:

a) $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2$

b) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

c) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$

a) $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 =$
$= 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos 120^\circ + 9 = 7$

b) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 = 4 - 9 = -5$

c) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a} \cdot \vec{a} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{a} - 4\vec{b} \cdot \vec{b} =$
$= 3\|\vec{a}\|^2 + 4\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos 120^\circ - 4\|\vec{b}\|^2 =$
$= 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot 3 \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 \cdot 9 =$
$= 12 - 12 - 36 = -36$

Exercícios resolvidos:

1) Sendo $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 2$, $\|\vec{c}\| = 3$ e $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, calcule:

$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

<u>Solução:</u>

Basta elevar a equipolência $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ao “quadrado, escalarmente”:

$$\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$0 = 1 + 4 + 9 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c})$$

Logo: $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = -7$

NOTA
Lembre que:

$$\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

2) Sabendo que os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ formam dois a dois ângulos de 60° e que $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 2$ e $\|\vec{c}\| = 3$, calcule: $\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|$

<u>Solução:</u>

Devemos ter: $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
Elevando ao “quadrado escalar”:

$$\|\vec{s}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\|\vec{s}\|^2 = 1 + 4 + 9 + 2 \cdot 1 \cdot 2\cos 60^\circ + 2 \cdot 1 \cdot 3\cos 60^\circ + 2 \cdot 2 \cdot 3\cos 60^\circ$$

$$\|\vec{s}\|^2 = 14 + 2 + 3 + 6 = 25 \Rightarrow \|\vec{s}\| = 5$$

3) Sabendo que $\|\vec{a}\| = 12$ e $\|\vec{b}\| = 2$, calcule os valores de m de modo que os vetores $\vec{a}+m\vec{b}$ e $\vec{a}-m\vec{b}$ sejam perpendiculares.

<u>Solução:</u>

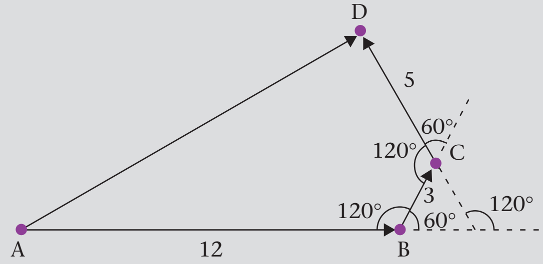
Devemos ter:
$(\vec{a} + m\vec{b}) \cdot (\vec{a} - m\vec{b}) = 0$ (condição de perpendicularismo)

$$\|\vec{a}\|^2 - m^2\|\vec{b}\|^2 = 0$$

$$144 - 4m^2 = 0 \Rightarrow m^2 = 36 \Rightarrow m = \pm 6$$

4) O quadrilátero plano ABCD é tal que os ângulos $\hat{B} = 120°$, $\hat{C} = 120°$ e AB = 12, BC = 3 e CD = 5. Calcule AD.

<u>Solução:</u>



Considerando os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CD}$, temos:

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ e

ang $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ = ang $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD})$ = 60° e ang (ab, cd) = 120°.

Elevando ao "quadrado escalar", vem:

$$\|\overrightarrow{AD}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}\|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}$$

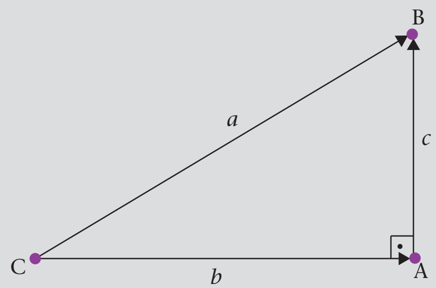
$$AD^2 = 144 + 9 + 25 + 2 \cdot 12 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 12 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}$$

$$AD^2 = 144 + 9 + 25 + 36 - 60 + 15 = 169$$

Logo, $AD = 13$.

5) Demonstre o teorema de Pitágoras, usando o produto escalar.

<u>Solução:</u>



Seja o triângulo retângulo ABC de hipotenusa a e catetos b e c.

Temos: $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$

Elevando ao "quadrado escalar", vem:

$$\|\overrightarrow{CB}\|^2 = \|\overrightarrow{CA}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2 \cdot \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Mas $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, pois $\text{ang}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = 90°$, então:

$a^2 = b^2 + c^2$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Compare a tabela de produtos escalares e calcule:

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

a) $\vec{k} \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

b) $(\vec{i} + \vec{j}) \cdot (\vec{i} - \vec{j})$

c) $(a\vec{i} + b\vec{j} - a\vec{k}) \cdot (b\vec{i} - a\vec{j} - b\vec{k})$

2 Calcule $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

a) $\vec{a} = (1,\ 2,\ 3);\ \vec{b} = (5,\ 7,\ -2)$

b) $\vec{a} = (2,\ -3);\ \vec{b} = (8,\ 1)$

c) $\vec{a} = (4,\ 0);\ \vec{b} = (0,\ -2)$

d) $\vec{a} = 5\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k};\ \vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$

e) $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j};\ \vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$

f) $\vec{a} = 5\vec{j};\ \vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$

3 Considerando as características abaixo referentes ao trapézio retângulo ABCD, calcule A, B e C.

- A é o vértice do ângulo reto e está situado na bissetriz dos quadrantes ímpares.
- D é a origem de coordenadas e C pertence ao eixo O*x*.
- O lado AB tem o mesmo comprimento que BC.
- A área do trapézio é 48.

4 Dados os pontos A = (1, 4, 3), B = (–9, 1, 3), C = (4, 1, 9) e D = (1, 2, –3), calcule:

a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

b) $(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BD})$

5 Calcule o valor de *x* de modo que:

a) (*x*, 2, *x*) e (*x*, 2, –5) sejam perpendiculares.

b) (*x*, 2) e (*x*, 1) sejam perpendiculares.

c) (*x*, 1, 5) e (x, –4, 0) formem ângulo obtuso.

d) (*x*, –3*x*, 1) e (*x*, 2, 5) formem ângulo agudo.

6 Sejam A = (2, 1, 5), B = (3, *k*, 0) e C = (9, 7, 4). Calcule *k* de modo que o triângulo ABC seja retângulo em A.

7 Calcule o ângulo dos vetores:

a) $\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{j} + \vec{k}$

b) $3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ e $-3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$

c) (1, 3) e (–1, 2)

d) (2, 1, 1) e (–1, –2, 1)

8 Calcule os valores de *a* de modo que o ângulo A do triângulo ABC, A = (1, 0, 2), B = (3, 1, 3) e C = (*a* + 1, –2, 3), seja 60°.

9 Calcule o valor algébrico da projeção do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$, assim como suas coordenadas.

a) $\vec{u} = 10\vec{i} - 5\vec{j}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

b) $\vec{u} = (10,\ 5,\ 9)$ e $\vec{v} = (1,\ -2,\ 2)$

10 Calcule a distância do ponto P à reta que passa pelos pontos A e B.

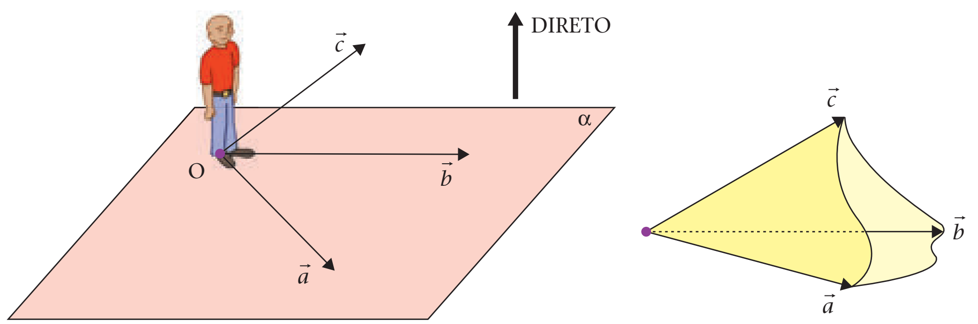
a) P = (1, –2); A = (0, 1); B = (4, 4)

b) P = (6, –4, 4); A = (2, 1, 2); B = (1, 3, 0)

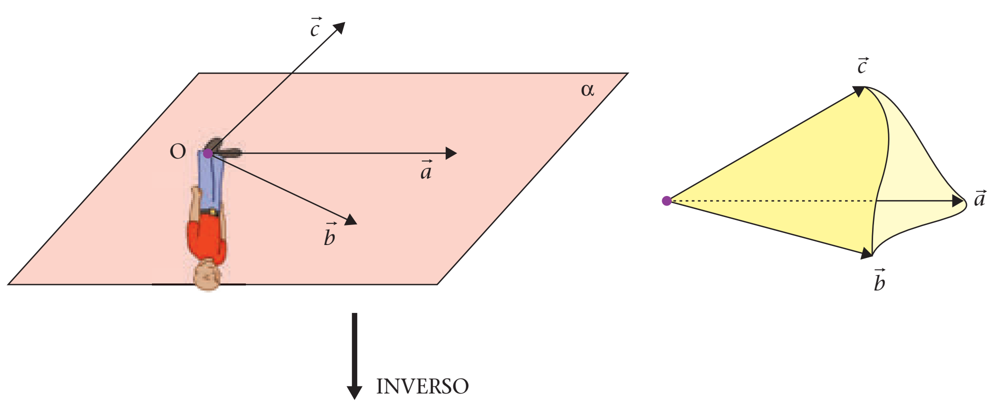
2.4 – Produto vetorial de dois vetores ou produto externo

2.4.1 – Orientação do espaço $\mathbb{R}^3$

Sejam três vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ aplicados num ponto O do espaço, e não paralelos dois a dois. Tais vetores formam no espaço um triedro $(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c})$.



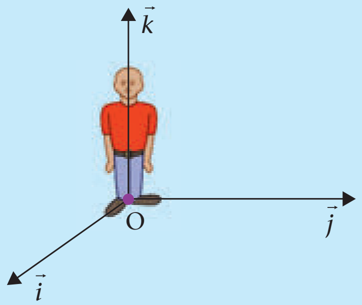
Diz-se que $(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c})$, nesta ordem, é um triedro **direto** se um observador colocado em pé no plano α de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, com o pé direito em $\vec{a}$ e o esquerdo em $\vec{b}$, ficar no mesmo semiespaço que $\vec{c}$ em relação ao plano α. Tal triedro é também chamado **positivo**. O triedro $(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c})$ será chamado **inverso** ou **negativo** se o observador e o vetor $\vec{c}$ estiverem em semiespaços opostos em relação ao plano α.

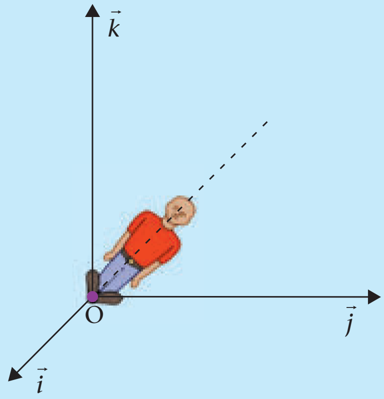


São diretos os triedros: $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$, $(\vec{b},\ \vec{c},\ \vec{a})$ e $(\vec{c},\ \vec{a},\ \vec{b})$
São inversos os triedros: $(\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{b})$, $(\vec{b},\ \vec{a},\ \vec{c})$ e $(\vec{c},\ \vec{b},\ \vec{a})$

Exemplo:

O triedro $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é direto, enquanto $(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$ é inverso.





2.4.2 – Produto vetorial ou externo

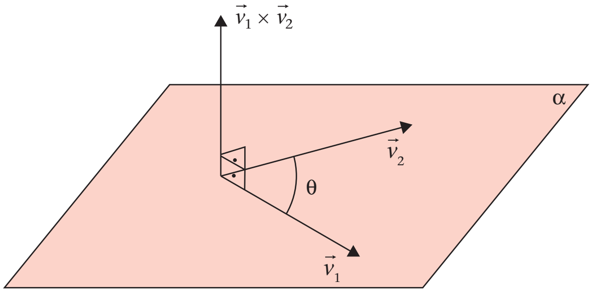
Sejam dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Chama-se produto vetorial ou produto externo dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ o vetor, que denotaremos por $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, tal que:

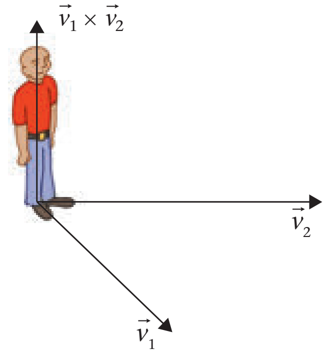
a) $\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \operatorname{sen} \theta$, onde $\theta = \operatorname{ang}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$;

b) a direção de $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ é perpendicular à direção de $\vec{v}_1$ e também à direção de $\vec{v}_2$. A direção de $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ é então perpendicular ao plano α de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$;

c) o sentido $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ é tal que o triedro $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$ seja direto.

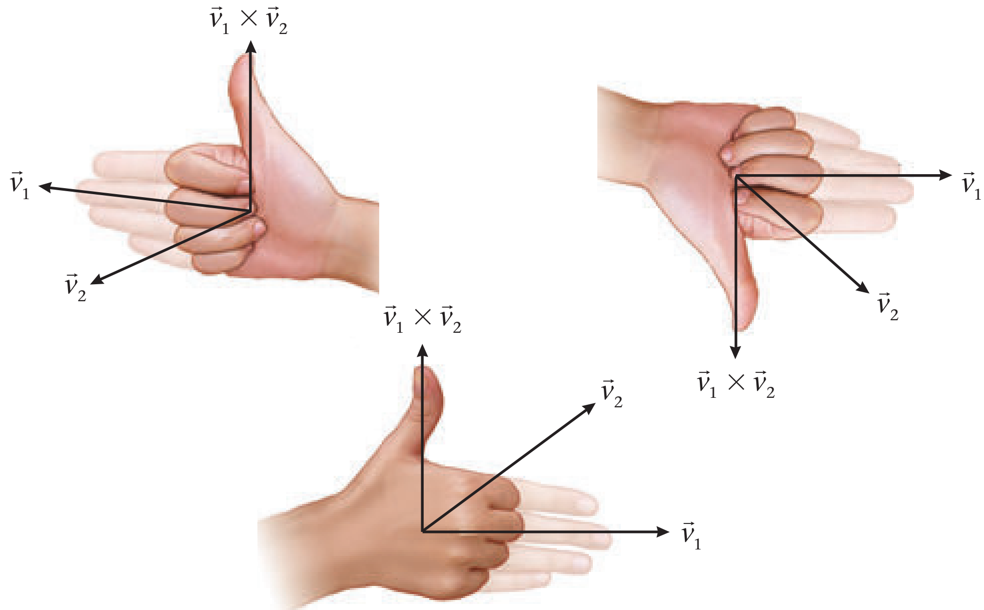
DEFINIÇÃO
Produto vetorial de dois vetores.





Outra regra para obter o sentido do produto vetorial é conhecida como "regra da mão direita".

Coloca-se a mão direita com os dedos esticados no sentido do vetor $\vec{v}_1$, com a palma da mão voltada para o vetor $\vec{v}_2$. Giram-se os dedos no sentido de $\vec{v}_1$ para $\vec{v}_2$. O sentido do produto vetorial é aquele para o qual o polegar aponta.



NOTA
Em particular $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Conforme o ângulo θ, temos:

a) $\theta = 0$ ou $\theta = \pi \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0}$

Neste caso, os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são paralelos e o plano α não está definido.

b) $0 < \theta < \pi \Rightarrow 0 < \operatorname{sen}\theta \leq 1 \Rightarrow \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| \leq \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|$

Perceba que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ é um vetor, enquanto $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ é um número real. Note também que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ só está definido para vetores em $\mathbb{R}^3$, enquanto $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ faz sentido em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Exemplo:

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de módulos respectivos 2 e 3. Calcular:

a) $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$, sendo ang $(\vec{a}, \vec{b}) = 30°$;

b) máximo $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$;

c) $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$, sabendo que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$.

Temos:

a) $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \operatorname{sen} 30° = 2 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{2} = 3$

b) máx $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \operatorname{sen} 90° = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$

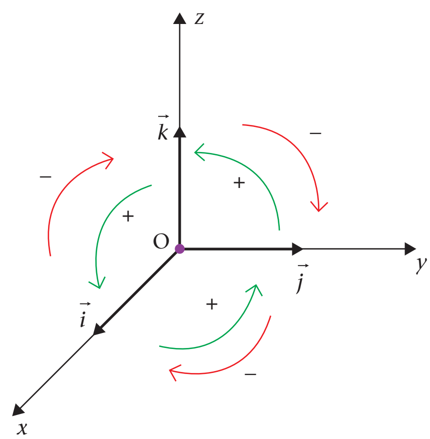
c) se $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$, então $\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos\theta = 4$, ou seja, $2 \cdot 3\cos\theta = 4 \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{2}{3}$

Como $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\dfrac{4}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

(Só serve o valor positivo, pois $0 \leq \theta \leq 180°$.)

Então: $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \operatorname{sen}\theta = 2 \cdot 3 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{3} = 2\sqrt{5}$

Os produtos vetoriais entre os unitários dos eixos coordenados são:



$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

Pois eles são perpendiculares dois a dois e, por exemplo:

$$\|\vec{i} \times \vec{j}\| = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\| \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Uma regra prática para obter esses produtos pode ser obtida observando o diagrama abaixo.

$$\xrightarrow{\quad} +$$
$$\vec{i}\ \ \vec{j}\ \ \vec{k}\ \ \vec{i}\ \ \vec{j}\ \ \vec{k}$$
$$- \xleftarrow{\quad}$$

O produto de vetores adjacentes é igual ao seguinte obedecendo o sinal indicado pela ordem.

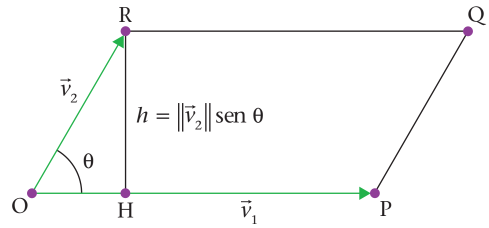
Assim:

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ $\quad$ $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ $\quad$ $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ $\quad$ $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$ $\quad$ $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$ $\quad$ $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

2.4.3 – Interpretação geométrica do módulo do produto vetorial

Sejam dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Temos que:

$\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \operatorname{sen} \theta$



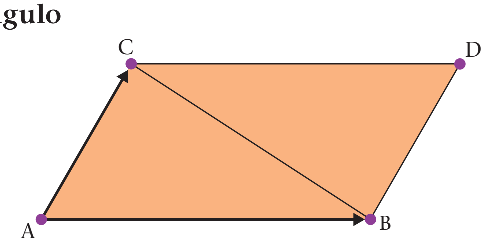
Mas $\|\vec{v}_2\| \operatorname{sen} \theta = h = \mathrm{HR}$ que é a altura do paralelogramo OPQR relativa à base OP, logo:

$\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1\| \cdot \mathrm{HR} = \mathrm{OP} \cdot \mathrm{HR} = S_{OPQR}$

O módulo do produto vetorial de dois vetores é a área do paralelogramo cujos lados são equipolentes aos dois vetores.

Consequência:

Área do triângulo



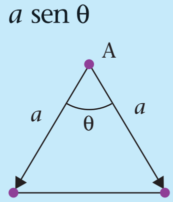
A área de um triângulo ABC é a metade da área do paralelogramo ABCD, logo:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$$

Exemplo:

Considere os possíveis triângulos isósceles cujos lados iguais valem a. Qual o de maior área?

$$S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \operatorname{sen} \theta$$



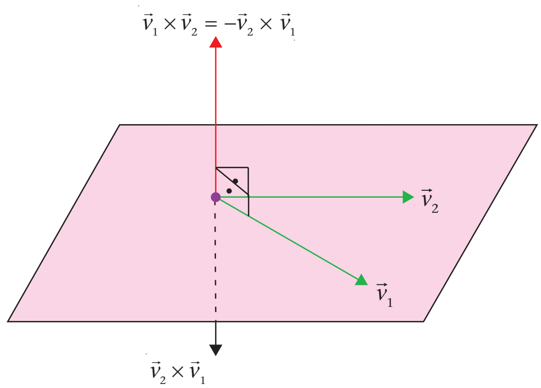
A área será máxima se $\theta = 90°$.

2.5 – Expressão analítica do produto vetorial

2.5.1 – Propriedades do produto vetorial

São elas:

1) **Anticomutatividade**



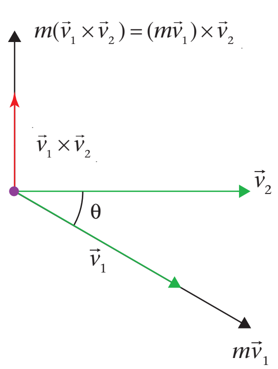
Com efeito, o triedro $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_1\times\vec{v}_2)$ é direto. Como o triedro $(\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2\times\vec{v}_1)$ deve ser também direto, os vetores $\vec{v}_1\times\vec{v}_2$ e $\vec{v}_2\times\vec{v}_1$ serão opostos, logo:

$$\vec{v}_1\times\vec{v}_2 = -\vec{v}_2\times\vec{v}_1$$

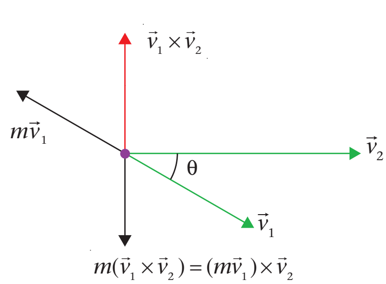
2) **Associatividade em relação ao produto por um escalar**

$$(m\vec{v}_1)\times\vec{v}_2 = m(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)$$

- Caso $m > 0$:



- Caso $m < 0$:



No caso em que $m > 0$, a direção e o sentido de $(m\vec{v}_1)\times\vec{v}_2$ são os mesmos de $\vec{v}_1\times\vec{v}_2$, enquanto:

$$\|(m\vec{v}_1)\times\vec{v}_2\| = \|m\vec{v}_1\|\cdot\|\vec{v}_2\|\operatorname{sen}\theta = |m|\cdot\|\vec{v}_1\|\cdot\|\vec{v}_2\|\operatorname{sen}\theta = m\|\vec{v}_2\times\vec{v}_2\|$$

Assim, $(m\vec{v}_1)\times\vec{v}_2 = (m\vec{v}_1)\times\vec{v}_2$.

O caso em que $m < 0$ é análogo, mas o sentido de $m(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)$ é o oposto do sentido de $\vec{v}_1\times\vec{v}_2$.

Aliás, pode-se mostrar que, para todo m e n números reais, temos:

$$(m\vec{v}_1) \times (n\vec{v}_2) = mn(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$$

3) **Distributividade em relação à adição**
Demonstraremos após a definição do produto misto que:

$$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_3$$

Resumindo:

NOTA
Assim como no produto escalar, a lei do cancelamento não vale.

1) Anticomutatividade
$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -(\vec{v}_2 \times \vec{v}_1)$
2) Associatividade em relação ao produto por escalares
$(m\vec{v}_1) \times (n\vec{v}_2) = (mn) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$
3) Distributividade em relação à adição de vetores
$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) + (\vec{v}_1 \times \vec{v}_3)$

Exemplos:

i) Calcular $\vec{p} = (2\vec{i} - \vec{j}) \times (\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k})$.
Como o produto vetorial é distribuído em relação à adição, temos:

$$\vec{p} = 2\vec{i} \times \vec{i} + 6\vec{i} \times \vec{j} - 4\vec{i} \times \vec{k} - \vec{j} \times \vec{i} - 3\vec{j} \times \vec{j} + 2\vec{j} \times \vec{k}$$

$$\vec{p} = 0 + 6\vec{k} + 4\vec{j} + \vec{k} - \vec{0} + 2\vec{i} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k} = (2,\ 4,\ 7)$$

ii) Determinar um vetor $\vec{v}$ do plano xOy tal que $\vec{v} \times (2\vec{i} - 3\vec{j}) = 11\vec{k}$ e que seja paralelo ao vetor (1, 4).
Seja $\vec{v} = (x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$.
Como $\vec{v}$ é paralelo a (1, 4), vem: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{4} \Rightarrow y = 4x$

Por outro lado, $(x\vec{i} + y\vec{j}) \times (2\vec{i} - 3\vec{j}) = 11\vec{k}$, de onde

$$2x\vec{i} \times \vec{i} - 3x\vec{i} \times \vec{j} + 2y\vec{j} \times \vec{i} - 3y\vec{j} \times \vec{j} = 11\vec{k}$$

$$-3x\vec{k} - 2y\vec{k} = 11\vec{k} \Rightarrow -3x - 2y = 11$$

Temos então o sistema:

$$\begin{cases} y = 4x \\ 3x + 2y = -11 \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ e } y = -4$$

Logo: $\vec{v} = (-1, -4)$

Exercícios resolvidos:

1) Sabendo que os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ formam um ângulo de 120° e que $\|\vec{a}\| = 2$ e $\|\vec{b}\| = 3$, calcule $\|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})\|$.

Solução:

$$(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + 6\vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} - 2\vec{b} \times \vec{b} =$$

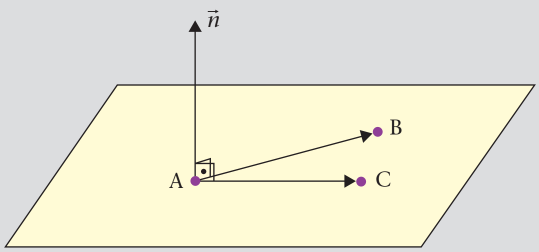
$$= 6\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} = 7\vec{a} \times \vec{b}$$

$$\left\|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})\right\| = 7\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = 7 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \text{sen } 120^o =$$

$$= 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 21$$

2) Sejam $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ os vetores-posição dos pontos A, B e C. Mostre que $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$ é um vetor perpendicular ao plano de A, B e C.

Solução:



A condição é necessária: um vetor perpendicular ao plano de A, B e C é:

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})$

$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{a}$

Logo: $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$

que coincide com o vetor do enunciado.

2.5.2 – Expressão analítica do produto vetorial

Sejam:

$\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2) = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

Façamos o seu produto vetorial:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = {} & x_1x_2\vec{i} \times \vec{i} + x_1y_2\vec{i} \times \vec{j} + x_1z_2\vec{i} \times \vec{k} + \\ & + y_1x_2\vec{j} \times \vec{i} + y_1y_2\vec{j} \times \vec{j} + y_1z_2\vec{j} \times \vec{k} + \\ & + z_1x_2\vec{k} \times \vec{i} + z_1y_2\vec{k} \times \vec{j} + z_1z_2\vec{k} \times \vec{k}\end{aligned}$$

Levando em conta os produtos dos unitários dos eixos, vem:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = x_1y_2\vec{k} - x_1z_2\vec{j} - y_1x_2\vec{k} + y_1z_2\vec{i} + z_1x_2\vec{j} - z_1y_2\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}}$$

que se resume no determinante:

$$\boxed{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}}$$

Exemplos:

i) Calcular o produto externo dos vetores $\vec{v}_1 = (2,\ 1,\ 3)$ e $\vec{v}_2 = (1,\ -1,\ 2)$.

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 5\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k} = (5,\ -1,\ -3)$$

ii) Calcular a área do triângulo ABC em que A = (2, 3, 2), B = (1, 2, 2) e C = (1, 4, –2).

Temos: $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ -1,\ 0)$ e $\overrightarrow{AC} = C - A = (-1,\ 1,\ -4)$

Logo:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

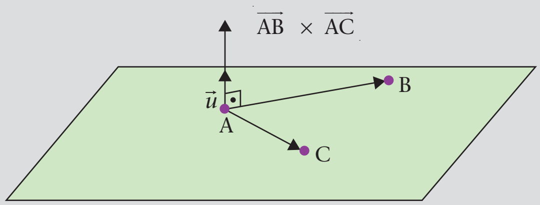
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 4\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k} = (4,\ -4,\ -2)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 16 + 4} = \frac{6}{2} = 3$$

Exercícios resolvidos:

1) Calcule um vetor unitário, perpendicular ao plano dos pontos A = (1, 1, –1), B = (3, 3, 2) e C = (3, –1, –2).

Solução:



Um vetor perpendicular ao plano de A, B e C é o produto vetorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ 2,\ 3)$ e $\overrightarrow{AC} = C - A = (2,\ -2,\ -1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 8\vec{k} = (4,\ 8,\ -8)$$

Temos então:

$$\vec{u} = \pm\frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|} = \pm\frac{(4,\ 8,\ -8)}{12} = \pm\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$$

2) Determine um vetor $\vec{v}$ tal que $\vec{u} \times \vec{v} = (-4,\ 26,\ -20)$ e que $\vec{v} \times \vec{w} = 1$, sendo $\vec{u} = (8,\ 2,\ 1)$ e $\vec{w} = (1,\ -1,\ 1)$.

<u>Solução:</u>

Seja $\vec{v} = (x, y, z)$. Temos que:

$$\begin{cases} (8, 2, 1) \times \vec{v} = (-4, 26, -20) & \text{(I)} \\ \vec{v} \times (1, -1, 1) = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (I):

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (2z - y,\ x - 8z,\ 8y - 2x) \Rightarrow \begin{cases} 2z - y = -4 \\ x - 8z = 26 \\ 8y - 2x = -20 \end{cases}$$

Temos:

$y = 2z + 4$ e $x = 26 + 8z$

Substituindo na terceira equação: $16z + 32 - 52 - 16z = -20 \Rightarrow -20 = -20$

Esse sistema é indeterminado.

Tomemos duas equações desse sistema e a equação (II) do sistema inicial.

$$\begin{cases} y = 2z + 4 \\ x = 26 + 8z \\ (1, -1, 1) \times (x, y, z) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2z + 4 \\ x = 26 + 8z \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$26 + 8z - 2z - 4 + z = 1 \Rightarrow 7z = -21 \Rightarrow z = -3$$

$$y = -2$$

$$x = 2$$

<u>Resposta</u>: O vetor procurado é $\vec{v} = (2, -2, -3)$.

Regra prática

As coordenadas do produto vetorial podem também ser obtidas com a seguinte regra prática:

Escrevem-se as coordenadas dos dois vetores na ordem do produto vetorial duas vezes.

Assim:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$$

Retiram-se a primeira e a última colunas.

$$\left[\begin{matrix} \cancel{x_1} & y_1 & \overbrace{z_1 \quad x_1}^{y} & y_1 & \cancel{z_1} \\ \cancel{x_2} & \underbrace{y_2 \quad z_2}_{x} & \underbrace{x_2 \quad y_2}_{z} & \cancel{z_2} \end{matrix}\right]$$

Os determinantes de segunda ordem $x = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$, $y = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}$ e $z = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

serão as coordenadas do produto vetorial $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$.

Exemplo:

Dados $\vec{v}_1 = (2,\ 1,\ 3)$ e $\vec{v}_2 = (3,\ 0,\ -1)$, calcular $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ e $\vec{v}_2 \times \vec{v}_1$.

$$\begin{array}{l} \vec{v}_1 \to \\ \vec{v}_2 \to \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

coluna retirada · coluna retirada

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (-1,\ 11,\ -3)$$

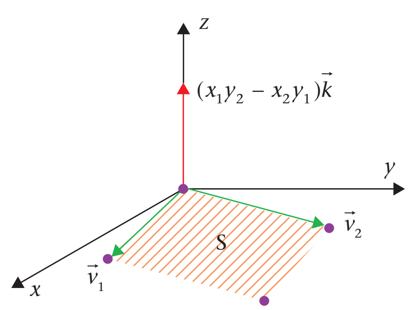
$$\begin{array}{l} \vec{v}_2 \to \\ \vec{v}_1 \to \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 \times \vec{v}_1 = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{v}_2 \times \vec{v}_1 = (1,\ -11,\ 3) = -\ \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

2.6 – Aplicações do produto vetorial

2.6.1 – Área do paralelogramo no $\mathbb{R}^3$

Sejam dois vetores, do $\mathbb{R}^2$, $\vec{v}_1 = (x_1,\ y_1) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ e $\vec{v}_2 = (x_2,\ y_2) = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$.



Podemos considerá-los como vetores do $\mathbb{R}^3$, bastando fazer $\vec{v}_1 = (x_1,\ y_1,\ 0)$ e $\vec{v}_2 = (x_2,\ y_2,\ 0)$.

A área S do paralelogramo dos dois vetores é o módulo do produto vetorial $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

Temos:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) \\ &= x_1x_2\vec{i}\times\vec{i} + x_1y_2\vec{i}\times\vec{j} + y_1x_2\vec{j}\times\vec{i} + y_1y_2\vec{j}\times\vec{j} \\ &= x_1y_2\vec{k} - x_2y_1\vec{k} = (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k} \end{aligned}$$

NOTA
A área do triângulo definido pelos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ é:
$\frac{1}{2}\left|\det(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)\right|$

A área S será:

$$S = \left\|(x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}\right\| = \left|x_1y_2 - x_2y_1\right| \cdot \left\|\vec{k}\right\| = \left|x_1y_2 - x_2y_1\right|$$

$$\boxed{S = \left|\det(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)\right| = \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix} \right\|}$$

Exemplos:

i) Calcular a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{v}_1 = (3, -2)$ e $\vec{v}_2 = (1,\ 5)$.

$$\det(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 - (-2) = 17 \Rightarrow S = 17$$

ii) Qual o valor do parâmetro m de modo que os pontos A = (1, 2), B = (2, m) e C = (3, 4) estejam alinhados?

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ m-2) \qquad \overrightarrow{AC} = C - A = (2,\ 2)$$

$$S_{ABC} = 0 \Rightarrow \det(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & m-2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$2 - 2(m-2) = 0 \Rightarrow 2m = 6 \Rightarrow m = 3$$

Exercício resolvido:

Determine sobre o eixo Ox um ponto P tal que a área do triângulo ABP seja o dobro da área do triângulo ACP. Dados: A = (1, 2), B = (0, 3) e C = (2, –2).

<u>Solução:</u>

Temos:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP})\right| \text{ e } S_{ACP} = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AP})\right|$$

Seja:

$P = (x,\ 0)$, $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 1)$, $\overrightarrow{AC} = C - A = (1, -4)$ e

$\overrightarrow{AP} = P - A = (x-1,\ -2)$

Devemos ter: $S_{ABP} = 2\,S_{ACP}$, logo:

$$\left|\det(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP})\right| = 2\left|\det(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AP})\right|$$

$$\det(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ x-1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - x + 1 = 3 - x$$

$$\det(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AP}) = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ x-1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 4x - 4 = 4x - 6$$

$$|3 - x| = 2|4x - 6| \Rightarrow 3 - x = \pm 2(4x - 6)$$

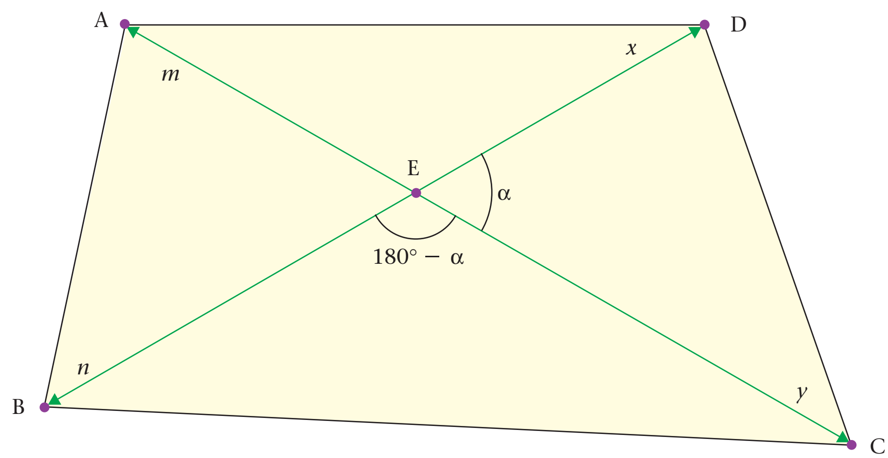
Se $3 - x = 8x - 12 \Rightarrow 9x = 15 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3} \Rightarrow P = \left(\dfrac{5}{3},\ 0\right)$

Se $3 - x = -8x + 12 \Rightarrow 7x = 9 \Rightarrow x = \dfrac{9}{7} \Rightarrow P = \left(\dfrac{9}{7},\ 0\right)$

2.6.2 – Área de um quadrilátero em função das diagonais

A área S do quadrilátero será a soma das áreas dos quatro triângulos a seguir:

$$S = S_{EBC} + S_{EBA} + S_{EAD} + S_{EDC}$$



$$S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{EB} \times \overrightarrow{EC}\| + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{EB} \times \overrightarrow{EA}\| + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{EA} \times \overrightarrow{ED}\| + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{ED} \times \overrightarrow{EC}\|$$

$$S = \frac{1}{2}\,ny\,\text{sen}(180^\circ - \alpha) + \frac{1}{2}\,mn\,\text{sen}\,\alpha + \frac{1}{2}\,mx\,\text{sen}(180^\circ - \alpha) + \frac{1}{2}\,xy\,\text{sen}\,\alpha$$

$$S = \frac{1}{2}(y + m)n\,\text{sen}\,\alpha + \frac{1}{2}(m + y)x\,\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}(m + y)(x + n)\,\text{sen}\,\alpha$$

Mas $m + y = \|\overrightarrow{AC}\|$ e $x + n = \|\overrightarrow{BD}\|$, logo:

$$S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{BD}\|\,\text{sen}\,\alpha \Rightarrow S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}\|$$

A área de um quadrilátero é a metade do módulo do produto vetorial das diagonais.

Exemplos:

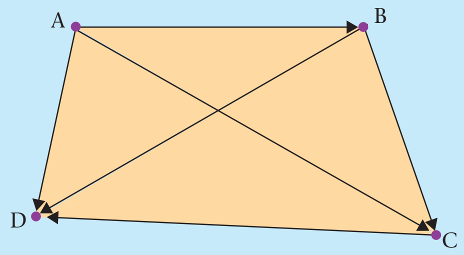
i) Calcular a área do quadrilátero ABCD sabendo que:

$\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ e $\overrightarrow{BD} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = (2, -1, 1)$$

Logo: $S = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

ii) Num trapézio ABCD os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ são paralelos. Sabendo que $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} = (2,\ 2,\ 4)$ e $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = (6,\ 0,\ 6)$, calcular a área do trapézio.



Temos:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

Somando membro a membro:

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = (6,\ 0,\ 6) \qquad \text{(I)}$$

Por outro lado:

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} = (2,\ 2,\ 4) \quad \text{(II)}$$

Multiplicando vetorialmente (I) e (II), vem:

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 12\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$2\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD} = (-12, -12,\ 12) \Rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD} = (-3, -3,\ 3)$$

$$S = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}\right\| = \sqrt{9 + 9 + 9} = 3\sqrt{3}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de módulos 2 e 3, respectivamente. Calcule:

a) $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ quando ang $(\vec{a}, \vec{b}) = 30°$.

b) o valor máximo de $\vec{a} \times \vec{b}$ e de $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

c) $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ quando $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$.

2 Calcule o produto externo dos vetores (2, 1, 3) e (1, –1, 2). Qual a área do paralelogramo definido por esses vetores?

3 Calcule a área do triângulo cujos vértices são A = (2, 3, 2), B = (1, 2, 2) e C = (1, 4, –2).

4 Determine os vetores unitários perpendiculares ao plano do triângulo ABC, sendo A = (1, 1, –1), B = (3, 3, 2) e C = (3, –1, –2).

5 Calcule a área do paralelogramo cujas diagonais são (1, 1, 0) e (0, 2, –4).

6 Determine um vetor cujo produto externo por (8, 2, 1) seja (–4, 26, –20) e cujo produto interno por (1, –1, 1) seja 1.

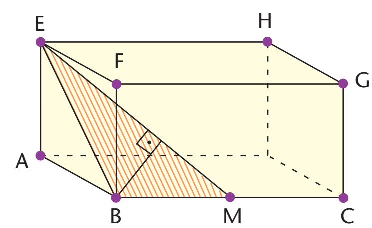
7 Calcule a distância de P = (5, 1) à reta que passa pelos pontos A = (0, 1) e B = (4, 4). Idem para o ponto P = (5, –6, 2), A = (1, –1, 2) e B = (1, 3, –1).

8 Calcule a distância do ponto P = (–5, –4, 8) ao plano dos pontos A = (2, 3, 1), B = (4, 1, –2) e C = (6, 3, 7).

9 Calcule a distância entre as retas AB e CD sendo: A = (1, 2, 3), B = (–1, 0, 2), C = (0, 1, 7) e D = (3, 1, 10).

10 Sendo $\vec{n} = (4, 6, -10)$ e $\vec{m} = (3, -1, -7)$ vetores perpendiculares aos planos α e β respectivamente. Calcule o vetor de menores coordenadas positivas, que seja paralelo à intersecção dos planos α e β.

11 No paralelepípedo retângulo, calcule a distância de B ao segmento EM e a área do triângulo EBM, sendo M médio de $\overline{BC}$, AB = a, BC = $4a$ e AE = $2a$.

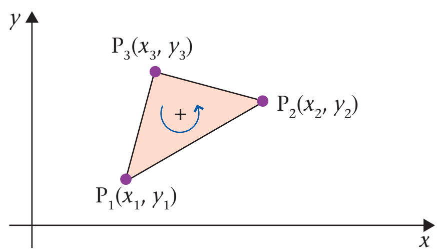


12 Seja o triângulo PAB, tal que P = (2, 3, –1), A = (1, 2, 13) e B = (–1, 0, 5). Determine o valor de sua área.

2.6.3 – Áreas de polígonos no $\mathbb{R}^2$

Como vimos, a área do triângulo ABC de vértices $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ é:

$$S = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\right\| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1\right|$$



desde que $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ estejam orientados de acordo com a figura, isto é, desde que $P_1P_2P_3$ descrevam o triângulo no sentido anti-horário. Se P_1, P_2 e P_3 estiverem no sentido horário, um sinal negativo deve ser adicionado à expressão toda.

Uma forma prática para obter esse polinômio é associar à matriz $\begin{bmatrix} x_2 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{bmatrix}$ o algoritmo:

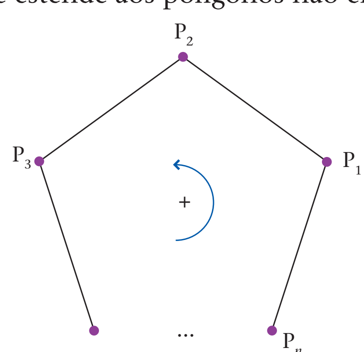
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$-x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3 \quad x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1$$

Esta expressão é o dobro da área:

$$S = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3\right|$$

A presente fórmula se estende aos polígonos não cruzados.



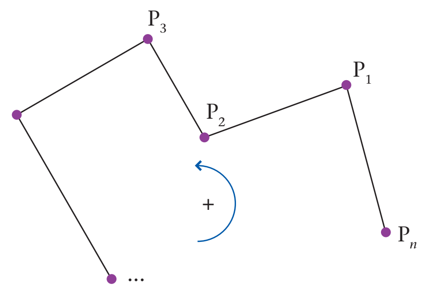
$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & y_1 \end{bmatrix}$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 + \dots + x_ny_1 - x_1y_n - \dots - x_2y_1\right|$$

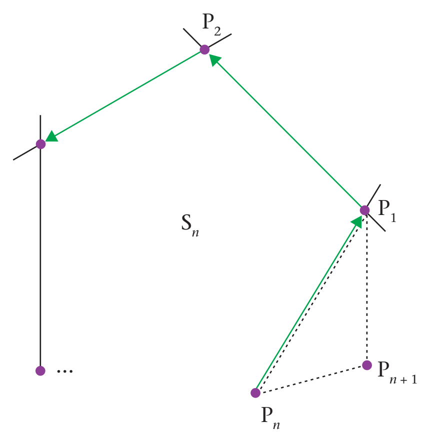
NOTA
Observe que as coordenadas dos pontos devem ser colocadas na matriz na ordem anti-horária, no caso, $P_1P_2P_3$.

NOTA
Veja "indução finita" no último capítulo deste livro.

A generalização é simples por indução finita. O processo vale para polígonos com reentrâncias.



De fato, já vimos que a fórmula vale para $n = 3$ (triângulos). Agora, para o passo de indução, suponha que a fórmula seja válida para polígonos de n lados.



NOTA
Os termos $x_n y_1$ e $x_1 y_n$ desaparecem na soma.

NOTA
Observe que as coordenadas dos vértices devem ser colocadas de modo que o polígono feche, isto é, as últimas coordenadas devem ser iguais às primeiras.

Coloquemos mais um vértice no polígono, P_{n+1}. A área será $S_n + S_{P_1P_nP_{n+1}}$, logo, $S_{n+1} = S_n + S_{P_1P_nP_{n+1}}$. Então,

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} & y_n & y_1 \end{bmatrix} \Rightarrow S_n = \frac{1}{2}(x_1y_2 + \dots + x_{n-1}y_n + x_ny_1 - x_1y_n - x_ny_{n-1} - \dots - x_2y_1)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_n & x_{n+1} & x_1 \\ y_1 & y_n & y_{n+1} & y_1 \end{bmatrix} \Rightarrow S_{P_1P_nP_{n+1}} = \frac{1}{2}(x_1y_n + x_ny_{n+1} + x_{n+1}y_1 - x_1y_{n+1} - x_{n+1}y_n - x_ny_1)$$

Soma do membro a membro:

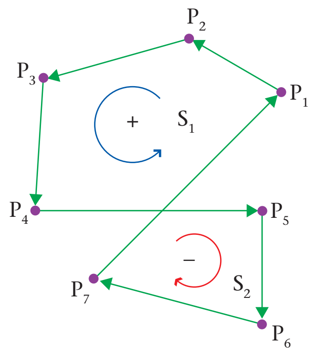
$$S_n + S_{P_1P_nP_{n+1}} = \frac{1}{2}(x_1y_2 + \dots + x_{n-1}y_n + x_ny_{n+1} + x_{n+1}y_1 - x_1y_{n+1} - x_ny_{n-1} - \dots - x_2y_1)$$

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}(x_1y_2 + \dots + x_ny_{n+1} + x_{n+1}y_1 - x_1y_{n+1} - x_{n+1}y_n - \dots - x_2y_1)$$

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1x_2 \dots x_nx_{n+1}x_1 \\ y_1y_2 \dots y_ny_{n+1}y_1 \end{bmatrix}$$

o que completa a indução.

Quando os lados se cruzam em pontos que não são vértices, haverá inversão no sentido de rotação do percurso e o polinômio associado à matriz não dará a área do polígono e sim a soma algébrica das áreas percorridas.

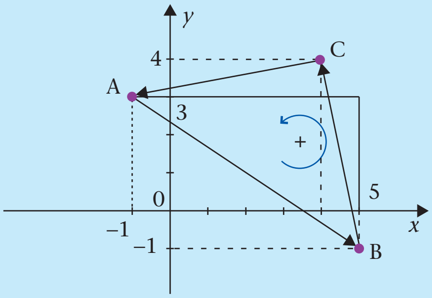


Nesta figura:
$(x_1y_2 + x_2y_3 + ... + x_6y_7 + x_7y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + ... + x_7y_6 + x_1y_7) = 2(S_1 - S_2)$

No caso de o polígono não ser triângulo, o polinômio poderá dar zero sem que os pontos estejam alinhados. Isto significa que o polígono é cruzado e as áreas positivas são iguais às negativas, em módulo.

Exemplos:

i) Calcular a área do triângulo ABC, sendo:
A = (–1, 3), B = (5, –1) e C = (4, 4)



$$\begin{array}{cccc} A & B & C & A \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|1 + 20 + 12 + 4 + 4 - 15\right| = \frac{1}{2}|26| = 13$$

ii) No exemplo anterior, observe que se percorrêssemos o triângulo ABC no sentido ACB, teríamos:

$$\begin{array}{cccc} A & C & B & A \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S_{ACB} = \frac{1}{2}\left| -4 - 4 + 15 - 1 - 20 - 12 \right|$$

$$S = \frac{1}{2}|-26| = 13$$

Note que o valor associado à nova matriz é –26. Isto se deu porque o percurso foi no sentido horário.

iii) No primeiro exemplo, note que a área poderia ser obtida usando $S = \frac{1}{2}\left| \det(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \right|$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (6, -4)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = C - A = (5, 1)$

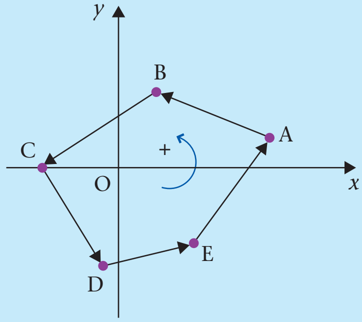
$$S = \frac{1}{2}\left| \det\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \right| \Rightarrow S = \frac{1}{2}|6 + 20| = 13$$

Se fizéssemos $S = \frac{1}{2}\left| \det(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}) \right|$, teríamos:

$$S = \frac{1}{2}\left| \det\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2}|-26| = 13$$

O valor do $\det(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = -\det(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB})$, pois teríamos uma rotação no sentido contrário.

iv) Calcular a área do pentágono ABCDE, sendo A = (5, 1), B = (1, 3), C = (–4, 0), D = (–1, –4) e E = (2, –3).



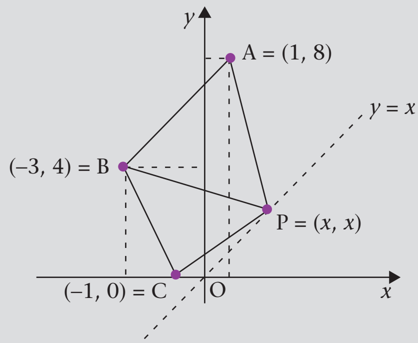
$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2}\left| 15 + 0 + 16 + 3 + 2 + 15 + 8 + 0 + 12 - 1 \right|$$

$$S = \frac{1}{2}|70| = 35$$

Exercício resolvido:

Determine sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares um ponto P tal que a área do quadrilátero convexo ABCP seja o triplo da área BCP.



Solução:

$$\text{ABCP:}\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & x & 1 \\ 8 & 4 & 4 & x & 8 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\left| 8x + 32 \right|$$

$$\text{BCP:}\begin{bmatrix} -3 & -1 & x & -3 \\ 4 & 0 & x & 4 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\left| 6x + 4 \right|$$

$$S_1 = 3S_2$$

$$\frac{1}{2}\left| 8x + 32 \right| = 3 \cdot \frac{1}{2}\left| 6x + 4 \right|$$

$$\left| 8x + 32 \right| = \left| 18x + 12 \right|$$

$$8x + 32 = \pm(18x + 12)$$

Se $8x + 32 = 18x + 12$, então:

$$x = 2$$

$$P = (2,\ 2)$$

Se $8x + 32 = -18x - 12$, então:

$$x = -\frac{22}{13}$$

$P = \left(-\frac{22}{13}, -\frac{22}{13}\right)$ não serve, pois $-\frac{22}{13} < -1 = x_c$.

Resposta: O ponto é P = (2, 2).

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Calcule a área do triângulo ABC, sendo A = (1, 3), B = (5, –1) e C = (–3, –3).

2 Calcule a área do triângulo ABC, sendo A = (1, 3), B = (–2, –1) e C = (4, 1).

3 Calcule a área do pentágono ABCDE, sendo A = (1, 3), B = (4, 1), C = (2, –2), D = (–2, –1) e E = (–1, 2).

4 Calcule a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{v} = (3,\ -2)$ e $\vec{w} = (1,\ 5)$.

5 Calcule *m* de modo que os pontos A = (1, 2), B = (2, *m*) e C = (3, 4) estejam em linha reta.

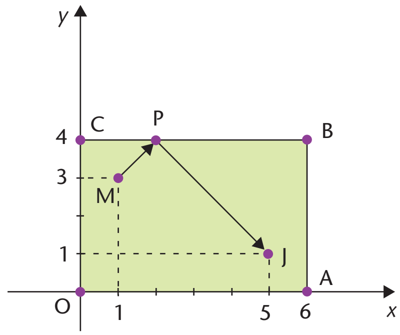
6 Determine sobre o eixo O*x* um ponto P tal que a área do triângulo ABP seja o dobro da área do triângulo ACP, sendo A = (1, 2), B = (0, 3) e C = (2, –2).

7 Verifique se os pontos P = (2, 3) e Q = (3, –1) estão no mesmo semiplano em relação à reta que passa pelos pontos A = (0, 1) e B = (2, 0).

8 Determine, sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares, um ponto P tal que a área do quadrilátero PABC seja o triplo da área do triângulo PAB, sendo A = (1, 3), B = (–2, 4) e C = (–1, 0).

9 Calcule o valor de *m* de modo que os pontos M = (*m*, 2*m* + 1), J = (1, 2) e Q = (3, –2) sejam colineares.

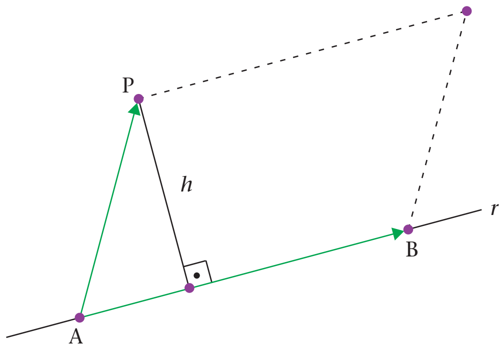
10 OABC é uma mesa de bilhar. M = (1, 3) e J = (5, 1) são as posições das bolas M e J. Determine sobre a tabela BC um ponto P tal que atirando-se a bola M em direção a P, ela reflita e atinja J.



2.6.4 – Distância de um ponto a uma reta

Seja uma reta r definida por dois pontos A e B e um ponto P. A distância h do ponto P à reta r é a altura do paralelogramo definido pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP}$.

DEFINIÇÃO
Distância de um ponto a uma reta.



Como a área $S = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot h$ e por outro lado $S = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\|$, segue-se que:

$\|\overrightarrow{AB}\| \cdot h = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\|$

Logo:

$$h = d(P,\ r) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|},\ A,\ B \in r$$

Exemplos:

i) Calcular a distância do ponto A = (5, –6, 2) à reta que passa pelos pontos B = (1, –1, 2) e C = (1, 3, –1).

$$h = d(A,\ BC) = \frac{\|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|}$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (0,\ 4, -3)$$

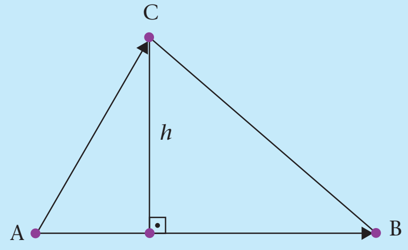
$$\overrightarrow{BA} = A - B = (4, -5,\ 0)$$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = 15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}$$

$$d(A,\ BC) = \frac{\sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2}}{\sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5$$

ii) Calcular a altura do triângulo ABC, relativa ao lado $\overline{AB}$, dados A = (2, 1), B = (6, –2) e C = (3, 4).



$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, -3) \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1, 3)$$

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = |\det(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})|$$

$$\det(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15$$

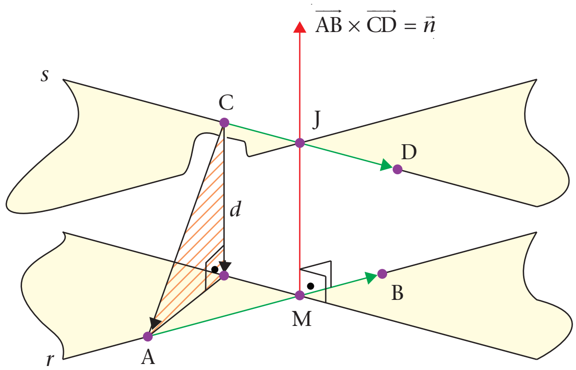
$$h = \frac{15}{5} = 3$$

2.6.5 – Distância entre duas retas reversas

DEFINIÇÃO
Distância entre duas retas reversas.

Sejam duas retas reversas r e s. Seja r definida por A e B e s por C e D.

A distância d = MJ = $d(r, s)$ será o módulo da projeção de $\overrightarrow{CA}$ sobre o vetor perpendicular comum a r e s. Tal vetor será o produto vetorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \vec{n}$.



NOTA
Poderíamos, em vez de $\overrightarrow{CA}$, tomar os vetores $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA}$ ou $\overrightarrow{DB}$.

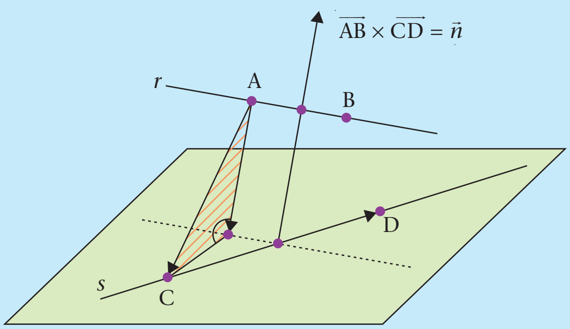
Temos:

$$d(r, s) = \|\text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{CA}\|$$

$$d(r, s) = |\overrightarrow{CA} \cdot \vec{u}_n| \Rightarrow \boxed{d(r, s) = \overrightarrow{CA} \cdot \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\|}}$$

Exemplo:

Calcular a distância entre as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ dadas pelos pontos A = (1, 2, 3), B = (–1, 0, 2), C = (0, 1, 7) e D = (3, 1, 10).



$$d(r, s) = \left\| \overrightarrow{AC} \cdot \vec{u}_n \right\|$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1, -1, 4)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, -2, -1)$$

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (3, 0, 3)$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\vec{u}_n = \frac{(-6, 3, 6)}{\sqrt{36 + 9 + 36}} = \frac{1}{9}(-6, 3, 6)$$

$$d(r, s) = \left| (-1, -1, 4) \cdot \frac{1}{9}(-6, 3, 6) \right| = \frac{1}{9}(6 - 3 + 24) = 3$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Calcule a distância entre o ponto (6, –4, 4) e a reta que passa por (2, 1, 2) e (2, –1, 4).

2 Calcule a distância entre duas arestas opostas de um tetraedro regular de aresta *a*.

3 No triângulo ABC, temos A = (0, –1), B = (1, 2) e C = (–2, –2). Determine a altura do vértice A em relação ao lado BC.

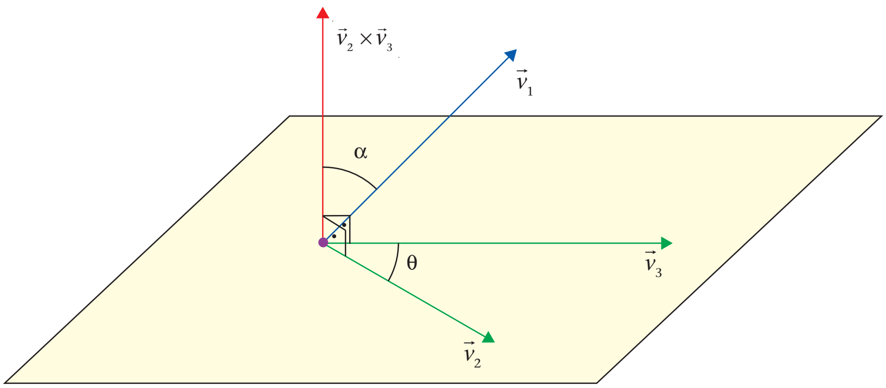
4 Calcule a distância do ponto P = (4, 5, –2) à reta que passa pelos pontos A = (1, –1, 2) e B = (2, 2, 1). Determine também a área do triângulo ABP, assim como o simétrico de P em relação à reta AB.

2.7 – Produto misto (triplo produto escalar)

Sejam três vetores v_1, v_2 e v_3. Chama-se **produto misto** dos vetores v_1, v_2 e v_3, nesta ordem, o número relativo que denotaremos por $[v_1,\ v_2 \text{ e } v_3]$, tal que:

$$\left[\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\right] = \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$$

DEFINIÇÃO
Produto misto entre três vetores.



Temos:

$$\left[\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\right] = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2 \times \vec{v}_3\| \cos\ \alpha$$

$$\left[\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\right] = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \|\vec{v}_3\| \text{sen}\ \theta\ \cos\ \alpha$$

em que $\theta = \text{ang}\ (\vec{v}_2,\ \vec{v}_3)$ e $\alpha = \text{ang}\,(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$.

Conforme os ângulos α e θ, temos:

a) $\theta = 0, \theta = \pi\ ou\ \alpha = \dfrac{\pi}{2}$

Neste caso, sen θ = 0 ou cos α = 0, portanto $\left[\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\right] = 0$.

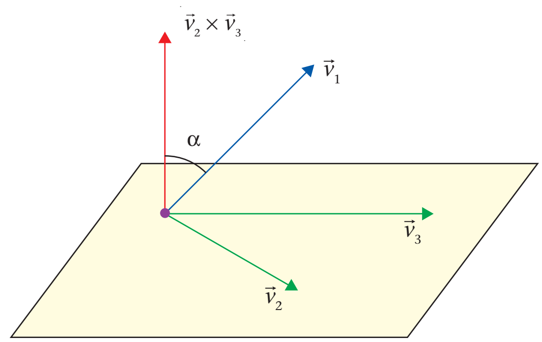
b) $0 < \theta < \pi \text{ e } 0 \leq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

Neste caso, $\text{sen}\,\theta > 0$ e $\cos\ \alpha > 0$, logo $\left[\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\right] > 0$.

Como $0 \leq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, o vetor $\vec{v}_1$ estará no mesmo semiespaço que $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3$ e o triedro $(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3)$ será direto. Podemos então concluir que se três vetores formam um triedro direto, o seu produto misto, na mesma ordem, será positivo.

NOTA
Os parênteses que destacam o produto vetorial $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3$ podem ser eliminados, pois ficaria destituída de sentido a expressão $(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \times \vec{v}_3$.
No produto $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \times \vec{v}_3$, o produto vetorial tem que ser realizado primeiro.

NOTA
Se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, os vetores $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ serão paralelos, e se $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\vec{v}_1$ estará no plano de $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$.
Nestes casos, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são coplanares.

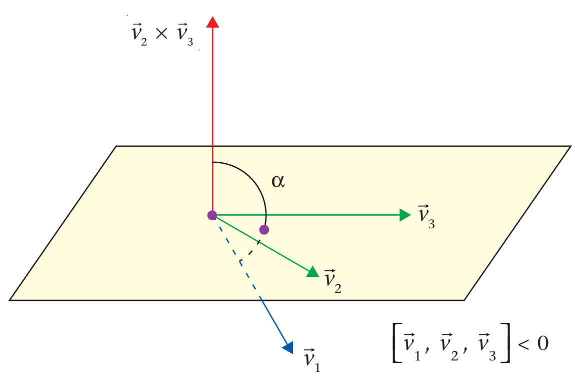


$\left[\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\right] > 0$

c) $0 < \theta < \pi$ e $\dfrac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$

Neste caso, $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\ \alpha < 0$, logo $\left[\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\right] < 0$.

Como $\dfrac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$, os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3$ estarão em semiespaços opostos em relação ao plano de $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ e o triedro $(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3)$ será negativo. Nesse caso, concluímos que o produto misto é negativo quando o triedro na mesma ordem for inverso.



$\left[\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\right] < 0$

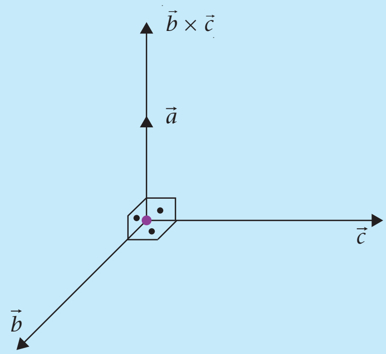
Como $-1 \leq \operatorname{sen}\ \theta \leq 1$ e $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, temos que $-1 \leq \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\alpha \leq 1$, o que nos permite garantir que $-\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \|\vec{v}_3\| \leq \left[\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\right] \leq \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \|\vec{v}_3\|$.

Exemplos:

i) Sabendo que os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são perpendiculares dois a dois, o triedro $(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c})$ é direto e $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 3$ e $\|\vec{c}\| = 4$, calcular o produto misto $\left[\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}\right]$.

Temos $\theta = 90°$ e $\alpha = 0°$, logo:

$$\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right] = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \operatorname{sen} 90° \cdot \cos 0° = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 24$$



ii) Sendo $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ a base canônica, calcular os produtos mistos:

a) $\left[\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right]$

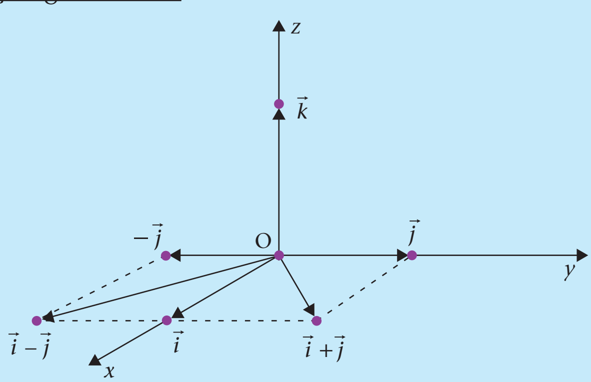
b) $\left[\vec{i}+\vec{j},\ \vec{i}-j,\ \vec{i}\right]$

c) $\left[\vec{i}+\vec{j},\ \vec{i}-\vec{j},\ \vec{k}\right]$

d) $\left[\vec{j},\ \vec{i}-\vec{j},\ \vec{k}\right]$

e) $\left[\vec{j},\ \vec{i},\ \vec{k}\right]$

<u>Resolução geométrica</u>:



a) $\left[\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right]=1$, pois o triedro é direto.

b) $\left[\vec{i}+\vec{j},\ \vec{i}-\vec{j},\ \vec{i}\right]=0$, pois os vetores são coplanares.

c) $\left[\vec{i}+\vec{j},\ \vec{i}-\vec{j},\ \vec{k}\right]=\|\vec{i}+\vec{j}\|\cdot\|\vec{i}-\vec{j}\|\cdot\|\vec{k}\|\cdot\operatorname{sen}90^\circ\cdot\cos 180^\circ$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 1\cdot 1\cdot(-1)=-2$$

(Basta ver que o triedro $\left[\vec{i}+\vec{j},\ \vec{i}-\vec{j},\ \vec{k}\right]$ é inverso e triortogonal.)

d) $\left[\vec{j},\ \vec{i}-\vec{j},\ \vec{k}\right]=\|\vec{j}\|\cdot\|\vec{i}-\vec{j}\|\cdot\|\vec{k}\|\cdot \text{sen } 90°\cdot\cos 135° =$

$$=1\cdot\sqrt{2}\cdot 1\cdot 1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1$$

(Observe que o triedro $\left[\vec{j},\ \vec{i}-\vec{j},\ \vec{k}\right]$ é inverso.)

e) $\left[\vec{j},\ \vec{i},\ \vec{k}\right]=-1$, pois o triedro é inverso e triortogonal.

Resolução algébrica:

a) $\left[\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right]=\vec{i}\cdot(\vec{j}\times\vec{k})=\vec{i}\cdot\vec{i}=1$

b) $\left[\vec{i}+\vec{j},\ \vec{i}-\vec{j},\ \vec{i}\right]=(\vec{i}+\vec{j})\cdot\left[(\vec{i}-\vec{j})\times\vec{i}\right]=(\vec{i}+\vec{j})\cdot\vec{k}=0+0=0$

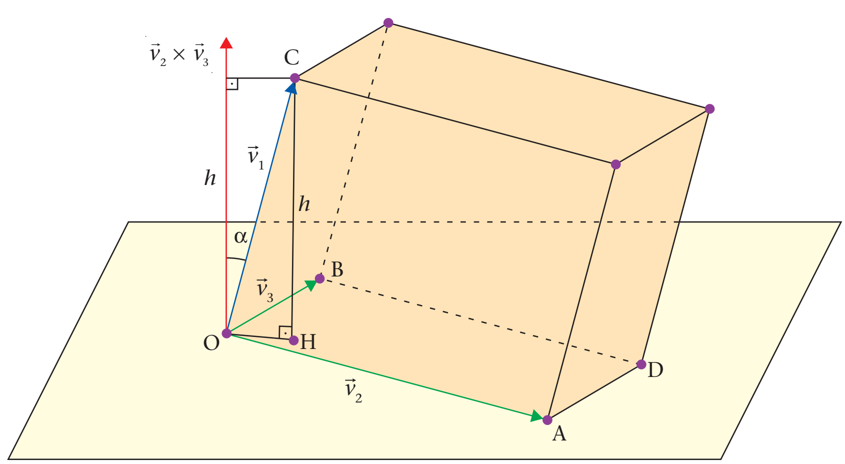
c) $\left[\vec{i}+\vec{j},\ \vec{i}-\vec{j},\ \vec{k}\right]=(\vec{i}+\vec{j})\cdot\left[(\vec{i}-\vec{j})\times\vec{k}\right]=(\vec{i}+\vec{j})\cdot(-\vec{j}-\vec{i})=0-1-1+0=-2$

d) $\left[\vec{j},\ \vec{i}-\vec{j},\ \vec{k}\right]=\vec{j}\cdot\left[(\vec{i}-\vec{j})\times\vec{k}\right]=\vec{j}\cdot\left[-\vec{j}-\vec{i}\right]=-1-0=-1$

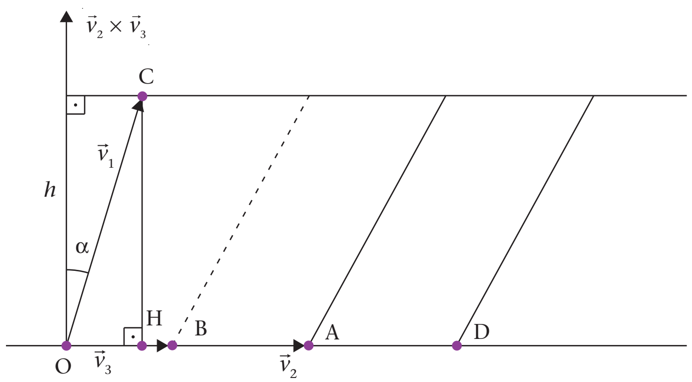
e) $\left[\vec{j},\ \vec{i},\ \vec{k}\right]=\vec{j}\cdot(\vec{i}\times\vec{k})=\vec{j}\cdot(-\vec{j})=-1$

2.7.1 – Interpretação geométrica do módulo do produto misto

Considere os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$.



De perfil:



Temos que:

$$\left[\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\right] = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \times \vec{v}_3$$
$$= \left\|\vec{v}_1\right\| \cdot \left\|\vec{v}_2 \times \vec{v}_3\right\| \cdot \cos\,\alpha$$

Sabemos que o módulo do produto vetorial $\left\|\vec{v}_2 \times \vec{v}_3\right\|$ representa a área do paralelogramo de base, S_{OADB}. Por outro lado, $\left|\,\left\|\vec{v}_1\right\| \cos\,\alpha\,\right|$ representa a altura h do paralelepípedo de arestas $\left\|\vec{v}_1\right\|$, $\left\|\vec{v}_2\right\|$ e $\left\|\vec{v}_3\right\|$. Temos então:

$$\left|\left[\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\right]\right| = S_{OADB} \cdot h$$

Logo:

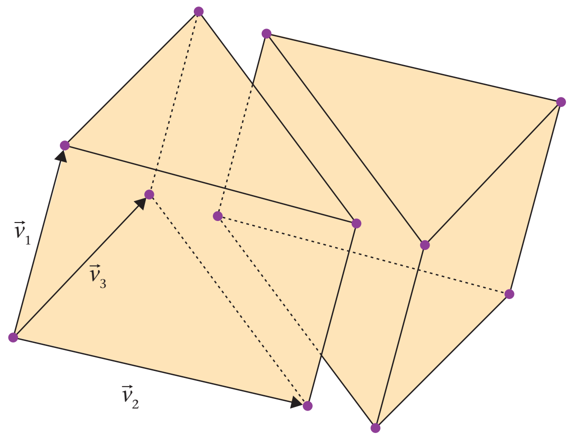
O módulo do produto misto de três vetores é o volume do paralelepípedo cujas arestas são os três vetores.

$$V_{\text{paralelepípedo}} = \left|\left[\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\right]\right|$$

O produto misto é então numericamente igual a esse volume, e o sinal será positivo ou negativo conforme o triedro seja direto ou inverso, respectivamente.

Consequências

Volume do prisma triangular

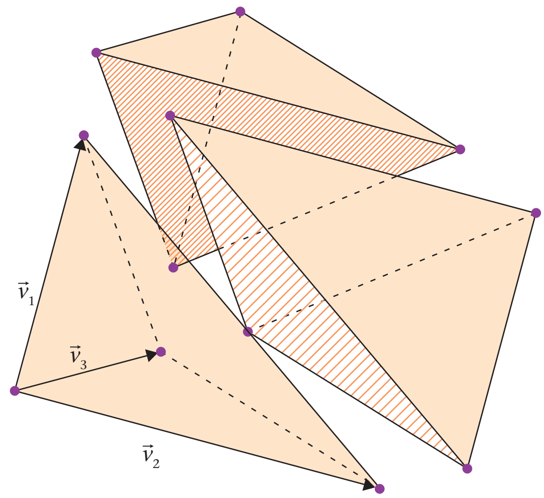


Seccionando-se o paralelepípedo por um plano diagonal, obtém-se dois prismas triangulares de volumes iguais, logo:

$$V_{\text{prisma triangular}} = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\right]\right|$$

NOTA
Esta divisão já foi feita no Volume 2 desta coleção no capítulo de pirâmides e cones.

Volume do tetraedro

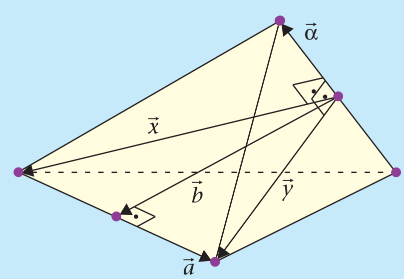


As seções, como indica a figura, dividem o prisma triangular em três tetraedros de volumes iguais, logo:

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left|\left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right]\right| \Rightarrow \boxed{V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right]\right|}$$

Exemplo:

Num tetraedro, duas arestas não concorrentes são ortogonais, têm comprimento a e são ambas perpendiculares ao segmento de comprimento b que une os seus pontos médios. Calcular o volume do tetraedro.



$$V = 2 \cdot \frac{1}{6}\left|\left[\frac{\vec{\alpha}}{2}, x, y\right]\right|$$

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{\alpha}\| = a \qquad \|\vec{b}\| = b$$

$$\vec{x} = \vec{b} - \frac{\vec{a}}{b} \qquad \vec{y} = \vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}$$

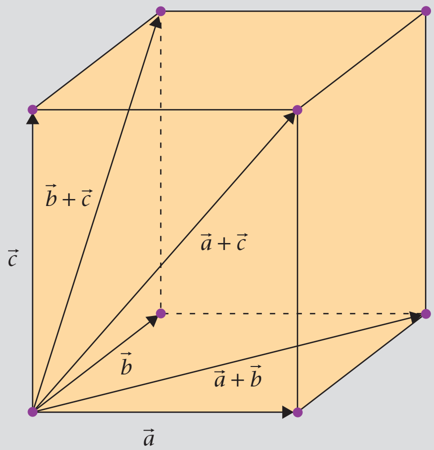
$$\vec{x} \times \vec{y} = \left(\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}\right) \times \left(\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}\right) = \vec{b} \times \vec{a}$$

$$\frac{\vec{\alpha}}{2} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = \frac{\|\alpha\|}{2} \cdot \|\vec{x} \times \vec{y}\| \cdot \cos 0° = \frac{\vec{a}}{2} \cdot \|\vec{b} \times \vec{a}\|$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \text{sen } 90° = \frac{a^2 b}{6}$$

Exercícios resolvidos:

1) As arestas de um paralelepípedo retângulo são *a*, *b* e *c*. Por um vértice traçam-se as diagonais das faces e constrói-se o paralelepípedo cujas arestas são essas diagonais. Calcule a relação entre os volumes dos dois paralelepípedos.



<u>Solução</u>:

Seja $V_1 = \left|\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right]\right| = abc$ o volume do primeiro.

O volume do segundo será:

$$V_2 = \left|\left[\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}+\vec{c},\ \vec{b}+\vec{c}\right]\right|$$

Como os produtos escalar e vetorial são distributivos em relação à adição, temos:

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{c}) =$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{a}\times\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}\times\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{b} =$$

$$= 0+0+\left[\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right]+0+\left[\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right]+0 =$$

$$= -abc - abc = -2abc$$

(triedros inversos)

$$V_2 = |-2abc| = 2abc = 2V_1 \Rightarrow V_2 = 2V_1$$

2) Mostre que se $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$, os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são coplanares.

<u>Solução</u>:

Basta multiplicar a equipotência acima, escalarmente, por $\vec{c}$.

$\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{c}\times\vec{a}=0$, logo $\left[\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right]+0+0=0 \Rightarrow \left[\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right]=0$, o que prova que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são coplanares.

2.8 – Expressão analítica do produto misto

Desejamos calcular $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$.

Sejam $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$.

Temos que:

$$\vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Como $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, segue-se que:

$$\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} y_1 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} z_1$$

Observe que o segundo membro desta igualdade se obtém substituindo-se os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente, por x_1, y_1 e z_1. O produto misto escreve-se, então, sob a forma de determinante:

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$$

O produto misto de três vetores é o determinante de terceira ordem cujas linhas são, ordenadamente, as coordenadas dos três vetores.

Temos:

$$V_{\text{paral.}} = |\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)|$$

$$V_{\text{pris. triang.}} = \frac{1}{2}|\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)|$$

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6}|\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)|$$

A condição para que três vetores sejam coplanares é que qualquer dos três volumes acima seja nulo, isto é:

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = 0$$

Exemplos:

i) Sendo $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{c} = 2\vec{j} + \vec{k}$:

a) calcular o volume do paralelepípedo gerado por $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ e dar o sentido do triedro $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;

b) aplicando-se os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ na origem, obtém-se os pontos A, B e C, respectivamente. Calcular a área do triângulo ABC;

c) com a área do triângulo ABC e o volume do tetraedro OABC, calcular a altura do tetraedro OABC relativa ao vértice O. (Distância da origem ao plano de ABC.)

a) $\left[\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}\,\right] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot 2 - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1 + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot 1 =$

$= (-2) \cdot 2 - (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = -5$

Como o produto misto $\left[\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}\,\right] = -5$ é negativo, o triedro $(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c})$ é inverso.

O volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\vec{a},\ \vec{b}$ e $\vec{c}$ é o módulo do produto misto, logo:

$V_{\text{paral.}} = |-5| = 5$

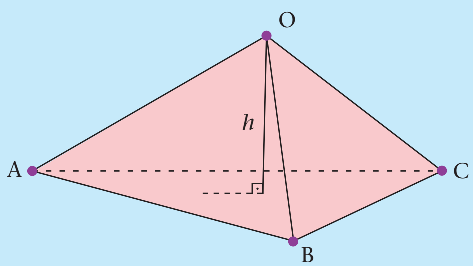
b) A = (2, 1, 1), B = (–1, 2, 2) e C = (0, 2, 1)

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-3,\ 1,\ 1) \qquad \overrightarrow{AC} = C - A = (-2,\ 1,\ 0)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,\ -2,\ -1)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{1+4+1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

c) $V_{\text{tetraedro}} = \dfrac{1}{6} \cdot 5 = \dfrac{5}{6}$. Por outro lado, sabemos da geometria que: $V_{OABC} = \dfrac{1}{3} S_{ABC} \cdot h$, logo:



$$\frac{5}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot h \Rightarrow h = \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

ii) Determinar o valor de x de modo que o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k},\ \vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{c} = x\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ seja unitário.

$$\left[\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}\,\right] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ x & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & 1 \end{vmatrix}$$

$\left[\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}\,\right] = 6 - 3 + 1 + x = 4 + x$

$|4 + x| = 1 \ \Rightarrow\ 4 + x = \pm 1 \ \Rightarrow\ x = -3$ ou $x = -5$

Exercícios resolvidos:

1) Determine sobre o eixo Oy um ponto P tal que o volume do tetraedro PABC seja o dobro do volume do tetraedro POAC.
Dados: O = (0, 0, 0), A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0) e C = (0, 0, 1)

Solução:

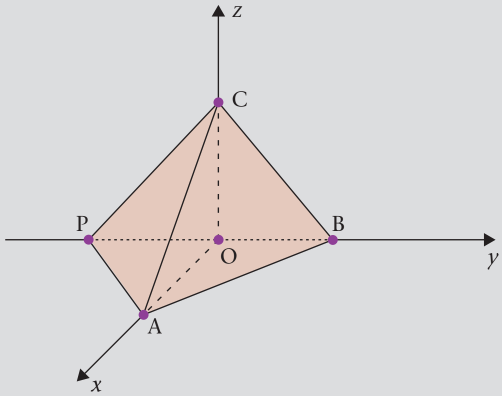
$P = (0,\ y,\ 0)$ $\quad \overrightarrow{AP} = P - A = (-1,\ y,\ 0)$ $\quad \overrightarrow{OP} = (0,\ y,\ 0)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 1,\ 0)$ $\quad \overrightarrow{OA} = (1,\ 0,\ 0)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1,\ 0,\ 1)$ $\quad \overrightarrow{OC} = (0,\ 0,\ 1)$

Devemos ter:

$$\left\|\left[\overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right\| = 2\left\|\left[\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OC}\right]\right\|$$



$$\left[\overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} -1 & y & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + y$$

$$\left[\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OC}\right] = \begin{vmatrix} 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -y$$

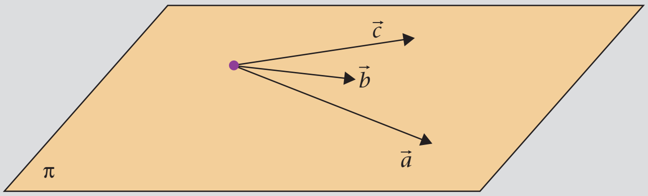
$$|-1 + y| = 2|-y| \;\Rightarrow\; -1 + y = \pm 2y \;\Rightarrow\; y = -1 \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{3}$$

Resposta: O ponto é $P = (0,\ -1,\ 0)$ ou $P = \left(0,\ \frac{1}{3},\ 0\right)$.

2) Calcule o valor de a de modo que os vetores $\vec{a} = (1,\ 2,\ a)$, $\vec{b} = (2,\ a,\ 1)$ e $\vec{c} = (1,\ a,\ 2)$ sejam coplanares.

Solução:

Devemos ter $\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right] = 0$



$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a & 1 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$a^2 + a - 6 = 0 \ \Rightarrow\ a = 2 \ \text{ ou } \ a = -3$$

Propriedades

A interpretação geométrica do produto misto permite estabelecer as seguintes propriedades.

1) **Ordem das operações:**
$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3$

2) **Permutações circulares:**
$\left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right] = \left[\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1\right] = \left[\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2\right]$

3) **Anticomutatividade**:
O produto misto troca de sinal quando se permutam dois quaisquer de seus vetores.
Por exemplo: $\left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right] = -\left[\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_2\right]$

4) **Associatividade em relação ao produto por escalares**:
$\left[\lambda_1\vec{v}_1, \lambda_2\vec{v}_2, \lambda_3\vec{v}_3\right] = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right]$

NOTA
Lembre-se de que $[\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3]$, em módulo, é o volume do paralelepípedo de arestas $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$.

2.8.1 – Prova da distributividade do produto vetorial

As propriedades acima permitem provar a distributividade do produto vetorial em relação à adição de uma forma muito simples. Queremos provar que:

$$\boxed{\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_3}$$

Basta provar que o vetor $\vec{w} = \vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) - \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \times \vec{v}_3$ é nulo.

Para isso, multipliquemos o vetor $\vec{w}$ por um vetor arbitrário $\vec{v}$ escalarmente:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) - \vec{v} \cdot \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 - \vec{v} \cdot \vec{v}_1 \times \vec{v}_3$$

Permutando-se os sinais · e × e mantendo-se fixos os vetores, temos:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{v}\times\vec{v}_1\cdot(\vec{v}_2+\vec{v}_3)-\vec{v}\times\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2-\vec{v}\times\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3$$

Pondo em evidência o fator comum, $\vec{v}\times\vec{v}_1$, pois o produto escalar é distributivo em relação à adição, vem:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{v}\times\vec{v}_1\cdot(\vec{v}_2+\vec{v}_3-\vec{v}_2-\vec{v}_3)=\vec{v}\times\vec{v}_1\cdot\vec{0}=0$$

Como $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$ e $\vec{v}$ é um vetor arbitrário, não obrigatoriamente perpendicular a $\vec{w}$ ou nulo, só resta a hipótese de $\vec{w}=\vec{0}$.

$$\vec{v}_1\times\left(\vec{v}_2+\vec{v}_3\right)-\vec{v}_1\times\vec{v}_2-\vec{v}_1\times\vec{v}_3=0$$

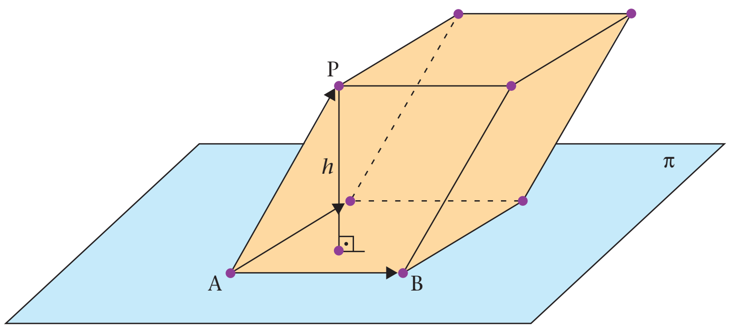
Logo:

$$\vec{v}_1\times(\vec{v}_2+\vec{v}_3)=\vec{v}_1\times\vec{v}_2+\vec{v}_1\times\vec{v}_3$$

Aplicação

Distância de um ponto a um plano

Para calcular a distância do ponto P ao plano definido pelos pontos A, B e C, basta calcular a altura do paralelepípedo gerado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AP}$.



Temos V = S · *h*, onde:

- V é o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AP}$, logo, $V=\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AP}\right]\right|$;
- S é a área do paralelogramo gerado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, logo, $S=\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$.

Da igualdade V = S · *h*, tira-se a altura do ponto P em relação ao plano de A, B e C.

$$h=d(P,\ \pi)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AP}\right]\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|}$$

Exemplos:

i) Calcular a distância do ponto P = (4, 1, 1) ao plano do triângulo ABC, em que A = (3, –1, 2), B = (–1, 1, –1) e C = (2, 3, 3).

Temos:

$$AB = B - A = (-4,\ 2,\ -3)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1,\ 4,\ 1)$$

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (1,\ 2,\ -1)$$

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AP}\right] = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 42$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (14,\ 7,\ -14) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = 21$$

$$h = \frac{42}{21} = 2$$

ii) Determinar a de modo que o ponto P = (a – 1, a, a + 1) seja coplanar com os pontos A = (9, –8, 3), B = (5, 2, 1) e C = (8, –4, 0). Devemos ter a distância de P ao plano de A, B e C igual a zero, logo, $\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AP}\right] = 0$ (vetores coplanares).

$$\overrightarrow{AB} = (-4,\ 10,\ -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1,\ 4,\ -3)$$

$$\overrightarrow{AP} = (a - 10,\ a + 8,\ a - 2)$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 10 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \\ a - 10 & a + 8 & a - 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 4$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Dados os vetores:
$\vec{a} = (2, 1, 1)$, $\vec{b} = (-1, 2, 2)$ e $\vec{c} = (0, 2, 1)$,
calcule o produto misto $[a, b, c]$ e o volume do tetraedro formado pelas arestas $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

2 Determine sobre o eixo Oy um ponto D sabendo que o volume do tetraedro ABCD é 5. Dados:
A = (2, 1, –1), B = (3, 0, 1) e C = (2, –1, 3)

3 Calcule o valor de a de modo que os vetores $(1, 2, a)$, $(2, a, 1)$ e $(1, a, 2)$ sejam coplanares.

4 Calcule a distância do ponto P ao plano do triângulo ABC. Dados: P = (4, 1, 1), A = (3, –1, 2), B = (–1, 1, –1) e C = (2, 3, 3)

5 Determine a de modo que o ponto $P = (a - 1, a, a + 1)$ seja coplanar com os pontos A = (9, –8, 3), B = (5, 2, 1) e C = (8, –4, 0).

6 Mostre, usando o produto misto, que os pontos P = (1, 0, 4) e Q = (–1, 2, –3) estão em semiespaços opostos em relação ao plano que passa pelos pontos A = (0, 1, 0), B = (0, 0, 1) e C = (1, 0, 0).

7 Ache o volume de um paralelepípedo do qual quatro vértices são: A = (0, 0, 1), B = (1, 0, 1), P = (1, 0, 1), C = (0, 1, 1) e D = (–1, –2, 0).

8 Para cada $t \in [0, 2\pi]$ considere o volume $V(t)$ do paralelepípedo gerado pelos vetores $(\operatorname{sen} t, 0, 1)$, $(0, 1, \operatorname{sen} t)$ e $(\cos t, 0, 1)$. Calcule t para que este volume seja máximo.

9 Calcule a de modo que o volume do tetraedro ABCD seja 10. Dados:
A = (1, 0, 0), B = (–1, 2, 3), C = (2, 4, 6) e $D = (1, 0, a)$

10 Um prisma oblíquo cuja base ABC é um triângulo retângulo de hipotenusa AC, tem suas arestas laterais paralelas ao vetor (2, 1, 2) e de comprimento igual a 6. Sabendo que A = (1, 1, 1), B está no eixo dos y e C = (2, 1, –2), determine:

a) o ponto B;

b) o volume do prisma.

2.8.2 – Dependência e independência linear

Chama-se **combinação linear** dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ de coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ o vetor $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_n\vec{v}_n$.

DEFINIÇÃO
Combinação linear de *n* vetores.

Por exemplo, qualquer vetor $\vec{v} = (x, y)$ do $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$: $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Analogamente, em $\mathbb{R}^3$, todo vetor $\vec{v} = (x, y, z)$ é combinação linear de $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$: $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

NOTA
No caso de combinação linear 1 vetor, $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1$, isto é, $\vec{v} \parallel \vec{v}_1$.

Exemplos:

i) Escrever o vetor $\vec{v} = (7, -7)$ como combinação linear de $\vec{v}_1 = (1, 2)$ e $\vec{v}_2 = (3, -1)$.
Queremos:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (7, -7) = (\alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 = 7 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = 3 \end{cases}$$

Portanto, $\vec{v} = -2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$.

ii) É possível escrever o vetor $\vec{v}_1 = (7, -7)$ como combinação linear de $\vec{v}_2 = (1, 2)$ e $\vec{v}_3 = (2, 4)$?
Queremos:

$$\vec{v}_1 = \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (7, -7) = (\alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_2 + 4\alpha_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 + 2\alpha_3 = 7 \\ 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = -7 \end{cases} \Rightarrow \text{ sistema impossível}$$

Os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ são ditos **linearmente dependentes** (LD) se for possível expressar algum deles como combinação linear dos demais. Caso contrário, eles são ditos **linearmente independentes** (LI).

DEFINIÇÃO
Dependência e independência linear de vetores.

Exemplos:

i) Os vetores $\vec{v}_1 = (5, 2)$ e $\vec{v}_2 = (10, 4)$ são LD, pois $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$ é uma combinação linear de $\vec{v}_1$.

ii) Os vetores $\vec{v}_1 = (7, -7)$, $\vec{v}_2 = (1, 2)$ e $\vec{v}_3 = (2, 4)$ são LD apesar de não ser possível escrever $\vec{v}_1$ como combinação linear de $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ (vide exemplo ii acima).
Temos $\vec{v}_3 = 0\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$, ou seja, $\vec{v}_3$ é uma combinação linear de $\vec{v}_1$ com $\vec{v}_2$.

Observe que, no exemplo i (acima, pode-se escrever $2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{0}$. Analogamente, no exemplo i) tem-se $0\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0}$. De uma maneira geral, se n vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ são LD, existirá uma relação entre eles do tipo:

$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + ... + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}$, onde algum λ não é zero.

Teorema

Os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ são LD se, e somente se, existe uma combinação linear $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}$, onde algum coeficiente λ não é zero.

Demonstração:

Suponhamos que algum dos vetores $\vec{v}_i$ é combinação linear dos outros, digamos $\vec{v}_i = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ ... \ + \alpha_{i-1}\vec{v}_{i-1} + \alpha_{i+1}\vec{v}_{i+1} + \ ... \ + \alpha_n\vec{v}_n$.

Então $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_{i-1}\vec{v}_{i-1} + (-1)\vec{v}_i + \alpha_{i+1}\vec{v}_{i+1} + ... + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$ e, nesta combinação linear, o coeficiente $\lambda_i = -1$ não é zero. Por outro lado, tem-se $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ ... \ + \lambda_i\vec{v}_i + \ ... \ + \lambda_n\vec{v}_n = 0$, onde algum coeficiente (digamos λ_i) não é zero, então:

$$\vec{v}_i = \frac{-\lambda_1}{\lambda_i}\vec{v}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i}\vec{v}_2 \ ... \ - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\vec{v}_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\vec{v}_{i+1} \ ... \ - \frac{\lambda_n}{\lambda_i}\vec{v}_n$$

e $\vec{v}_i$ é uma combinação linear dos outros vetores.

Exemplos:

i) Verificar se os vetores $\vec{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\vec{v}_2 = (2, 2, 1)$ e $\vec{v}_3 = (1, 2, 2)$ são LI ou LD.

Verifiquemos se existem $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tais que:

$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ como a única solução. Como não foi possível encontrar um λ diferente de zero, os vetores não são LD, isto é, são LI.

ii) Verificar se os vetores $\vec{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{v}_2 = (3, 2, 1)$ e $\vec{v}_3 = (2, 0, -2)$ são LI ou LD.

Temos a combinação linear:

$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = \lambda_1(1, 2, 3) + \lambda_2(3, 2, 1) + \lambda_3(2, 0, -2) =$

$= (\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3, 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3, 3\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3) = (0, 0, 0)$

Então:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

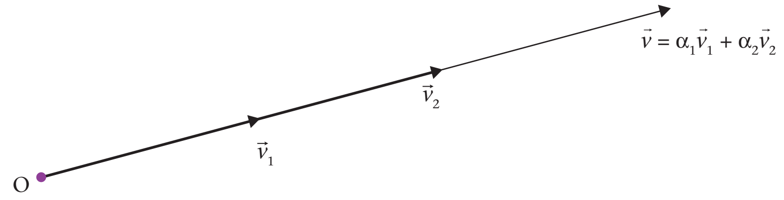
Resolvendo o sistema, temos $\lambda_1 = \lambda_3$ e $\lambda_2 = -\lambda_3$, o que mostra ser o sistema indeterminado.
Existem, pois, as soluções $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (k, -k, k)$ qualquer que seja o valor de k. Os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são LD. A relação de dependência será $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0$.

Dependência linear de dois vetores

Dois vetores são LD se, e somente se, são paralelos. De fato, teríamos $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$.

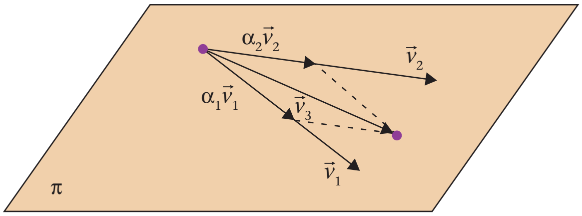
Neste caso, qualquer combinação linear $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2$ deles será colinear com $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 = \alpha_1(k\vec{v}_2) + \alpha_2\vec{v}_2 = (\alpha_1 k + \alpha_2)\vec{v}_2$$



Dependência linear de três vetores

Três vetores são LD se, e somente se, são coplanares. De fato, teríamos $\vec{v}_3 = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2$; logo $\vec{v}_3$ é a diagonal do paralelogramo formado por $\alpha_1\vec{v}_1$ e $\alpha_2\vec{v}_2$. Assim, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são coplanares:



Por outro lado, se $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são coplanares, o volume do paralelepípedo de arestas $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ é zero, isto é, o produto misto $\left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right] = 0$.

Escrevendo $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Mas isto significa que o sistema linear nas variáveis λ_1, λ_2 e λ_3:

$$\begin{cases} x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + x_3\lambda_3 = 0 \\ y_1\lambda_1 + y_2\lambda_2 + y_3\lambda_3 = 0 \\ z_1\lambda_1 + z_2\lambda_2 + z_3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

é possível e indeterminado, isto é, tem alguma solução $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ diferente de (0, 0, 0). Mas então:

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3,\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3,\ \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3) = \vec{0}$$

Assim, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são LI.

Método prático para verificação de dependência linear

No $\mathbb{R}^2$, os vetores $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$ e $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$ são LD se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

No $\mathbb{R}^3$, os vetores $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ são LD se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplos:

i) Verificar que os vetores $\vec{v}_1 = (3, -5)$ e $\vec{v}_2 = (2, 1)$ são LI.

Temos:

$$\frac{3}{2} \neq \frac{-5}{1} \text{ ou } \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 13 \neq 0, \text{ logo são LI.}$$

ii) Verificar que os vetores $\vec{a} = (3, -2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 1, -2)$ e $\vec{c} = (2, 1, -3)$ são LI.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0, \text{ logo são LI.}$$

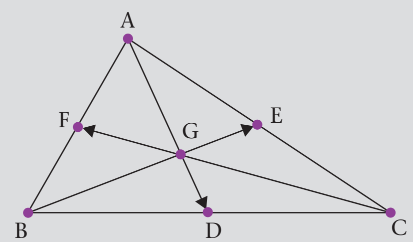
iii) Determinar o valor de m de modo que os vetores $\vec{a} = (-m, 1, 2)$, $\vec{b} = (2, m, -1)$ e $\vec{c} = (1, m, 0)$ sejam LD.

Devemos ter:

$$\begin{vmatrix} -m & 1 & 2 \\ 2 & m & -1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} m^2 - 2m + 1 = 0 \\ m = 1 \end{array}$$

Exercícios resolvidos:

1) Mostre que os vetores $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ correspondentes às medianas do triângulo ABC obedecem à relação $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.



Solução:

Seja G o ponto de concurso das medianas.

$$\overrightarrow{GD} = \frac{\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}{2}$$

Então: $2 \cdot \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$

Logo: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

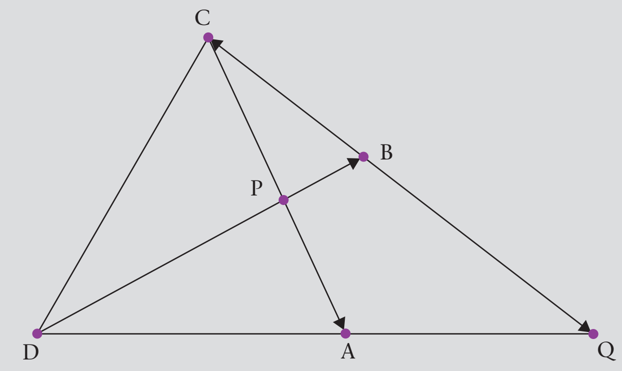
2) Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores LI. Mostre que a igualdade $x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}$ onde x_1, x_2, y_1, y_2, z_1 e z_2 são escalares, só se verifica se $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.

Solução:

Com efeito, transpondo o 2º membro para o 1º, temos:
$(x_1 - x_2)\vec{a} + (y_1 - y_2)\vec{b} + (z_1 - z_2)\vec{c} = \vec{0}$
O que implica:
$x_1 - x_2 = 0$, $y_1 - y_2 = 0$ e $z_1 - z_2 = 0$
Demonstrando que:
$x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$

3) Considere um quadrilátero convexo ABCD. Seja P a intersecção das diagonais AC e BD e seja Q a intersecção dos suportes dos lados CD e DA. Se $\overrightarrow{PC} = -2\overrightarrow{PA}$ e $2\overrightarrow{PB} = -3\overrightarrow{PD}$, mostre que $\overrightarrow{BQ} = -5\overrightarrow{BC}$.

Solução:



Basta calcular a relação linear entre $\overrightarrow{BQ}$ e $\overrightarrow{BC}$, que são LD. Sejam $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$ LI. Temos:

$\overrightarrow{PC} = -2\vec{a}$ e $\overrightarrow{PD} = -\dfrac{2}{3}\vec{b}$

Calculemos $\overrightarrow{BQ}$ e $\overrightarrow{BC}$ em função de $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB} = -2\vec{a} - \vec{b}$

$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{DA} - (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}) = m(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PD}) - \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA}$

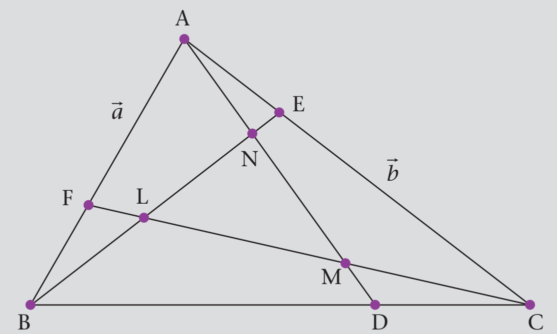
$\overrightarrow{BQ} = m\vec{a} + \dfrac{2m}{3}\vec{b} - \vec{b} + \vec{a} = (m+1)\vec{a} + \left(\dfrac{2m}{3} - 1\right)\vec{b}$

Como $\overrightarrow{BQ}$ e $\overrightarrow{BC}$ são paralelos, $\overrightarrow{BQ} = n\overrightarrow{BC} = n(-2\vec{a} - \vec{b}) = -2n\vec{a} - n\vec{b}$.
Igualando e levando em conta que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são LI, vem:

$$\begin{cases} m + 1 = -2n \\ \dfrac{2m}{3} - 1 = -n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + 2n = -1 \\ 2m + 3n = 3 \end{cases} \Rightarrow n = -5$$

Logo: $\overrightarrow{BQ} = -5\overrightarrow{BC}$

4)



Na figura acima temos:

$AE = \dfrac{1}{3}AC,\ BF = \dfrac{1}{3}AB$ e $CD = \dfrac{1}{3}BC$

Utilizando vetores, calcule a razão $\dfrac{\text{MD}}{\text{AD}}$ e conclua então que a área do triângulo LMN é $\dfrac{1}{7}$ do triângulo ABC.

Solução:

Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são LI, façamos $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.

Temos:

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\vec{b} \qquad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a})$$

Como $\overrightarrow{MD}$ e $\overrightarrow{AD}$ são LD, então $\overrightarrow{MD} = m\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b}) - n\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b}) - n(\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{MD} = \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b}) - n\left(-\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{1-2n}{3}\,\vec{a} + \left(n - \frac{1}{3}\right)\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \frac{1}{3}\,\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

Como:

$$\overrightarrow{MD} = m\overrightarrow{AD} = \frac{m}{3}\vec{a} + \frac{2m}{3}\vec{b}$$

Igualando, vem:

$$\begin{cases} \dfrac{1-2n}{3} = \dfrac{m}{3} \\[2mm] \dfrac{3n-1}{3} = \dfrac{2m}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + 2n = 1 \\ 2m - 3n = -1 \end{cases} \Rightarrow n = \frac{3}{7} \text{ e } m = \frac{1}{7}$$

Seja S a área do triângulo ABC. Temos:

$$S_{LMN} = S - S_{ABN} - S_{BCL} - S_{CAM}$$

Calculemos a área:

$$S_{CAM} = S_{ADC} - S_{MDC} = \|\overrightarrow{AD}\| \cdot \|\overrightarrow{DC}\| \text{ sen D} - \|\overrightarrow{MD}\| \cdot \|\overrightarrow{DC}\| \text{ sen D} =$$

$$= \|\overrightarrow{AD}\| \cdot \|\overrightarrow{DC}\| \text{ sen D} - \frac{1}{7}\|\overrightarrow{AD}\| \cdot \|\overrightarrow{DC}\| \text{ sen D}$$

Colocando $\|\overrightarrow{AD}\| \cdot \|\overrightarrow{DC}\| \cdot \text{sen D}$

em evidência, temos:

$$\left(1 - \frac{1}{7}\right)\|\overrightarrow{AD}\| \cdot \|\overrightarrow{DC}\| \cdot \text{sen D} = \frac{6}{7} \cdot \|\overrightarrow{AD}\| \cdot \|\overrightarrow{DC}\| \cdot \text{sen D}$$

Como $\|\overrightarrow{DC}\| = \dfrac{1}{3} \cdot \|\overrightarrow{BC}\|$, temos:

$$\frac{6}{7}\|\overrightarrow{AD}\| \cdot \frac{1}{3}\|\overrightarrow{BC}\| \cdot \text{sen D} = \frac{2}{7}\|\overrightarrow{AD}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\| \cdot \text{sen D} = \frac{2}{7}S$$

Concluímos, portanto, que:

$S_{ABN} = S_{BCL} = S_{CAM}$,

pois são iguais a $\dfrac{2}{7}$S. Logo, $S_{LMN} = S - 3 \cdot \dfrac{2}{7}S = \dfrac{1}{7}S$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Determine as relações lineares existentes entre os vetores:

a) $\vec{v}_1$ (1, 7), $\vec{v}_2$ (3, −5) e $\vec{v}_3$ (2, 1)

b) $\vec{v}_1$ (3, −1, 6), $\vec{v}_2$ (2, 1, 1), $\vec{v}_3$ (−1, 7, 3) e $\vec{v}_4$ (2, 0, 3)

2 Determine, quando possível, o valor de K de modo que os grupos de vetores abaixo sejam LD.

a) $\vec{u}$ e $3\vec{u} + K\vec{v}$

b) $\vec{u}$ e $K\vec{u} + \vec{v}$

3 Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores do $\mathbb{R}^2$, verifique se são LD os conjuntos de vetores abaixo. Suponha que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI.

a) $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u}$

b) $-\vec{u}$ e $-4\vec{v}$

4 Verifique se os pares de vetores são LI ou LD.

a) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (-2, -4, -6)$

b) $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (4, -1)$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 Verifique se cada sentença é verdadeira (V) ou falsa (F).

a) Se $\vec{a}=\vec{b}$, então $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

b) Se $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, então $\vec{a}=\vec{b}$.

c) Se $\vec{a}=k\vec{b}\ (k\in\mathbb{R})$, então $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm o mesmo sentido.

d) Se $\vec{a}=k\vec{b}\ (k\in\mathbb{R})$, então $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm a mesma direção.

e) Se $\vec{a}=k\vec{b}\ (k\in\mathbb{R})$, então $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos.

f) Os vetores $\vec{a}$ e $-\vec{a}$ têm o mesmo módulo.

g) Os vetores $\vec{a}$ e $-\vec{a}$ têm sentidos contrários.

h) Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos, então $\vec{a}+\vec{b}=0$.

i) Se $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, então $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos.

j) Os vetores (–1, 2) e (2, –4), do $\mathbb{R}^2$, são paralelos.

k) Os vetores (3, 6) e (5, 10), do $\mathbb{R}^2$, são paralelos.

l) Se $|\vec{u}|=2$ e $|\vec{v}|=3$, então $|\vec{u}+\vec{v}|=5$.

m) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares, então $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

n) Se $|\vec{u}|=|\vec{v}|$, então $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

o) Os vetores (1, –2) e (4, 2) são perpendiculares.

2 Sendo $\vec{u}=(1,1,0)$ e $\vec{v}=(0,1,1)$ vetores do $\mathbb{R}^3$, pode-se afirmar que:

(A) $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$
(B) $\vec{u}-\vec{v}=(1,0,1)$
(C) $|\vec{u}|=|\vec{v}|=\sqrt{2}$
(D) $\vec{u}+\vec{v}=(2,2,2)$
(E) $|\vec{u}+\vec{v}|=3\sqrt{2}$

3 Sendo $\vec{u}=(3,4)$ e $\vec{v}=(1,7)$ vetores do $\mathbb{R}^2$, pode-se afirmar que $|\vec{u}|+|\vec{v}|$ vale:

(A) $5(\sqrt{2}-1)$
(B) $5(\sqrt{2}+1)$
(C) 10
(D) $\sqrt{137}$
(E) $10\sqrt{2}$

4 O módulo do vetor $\vec{u}=6\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$ é dado por:

(A) 3 (B) 4 (C) 7 (D) 5 (E) 11

5 O ângulo formado pelos vetores (1, 1, 0) e (0, 1, 1) é:

(A) 45° (B) 60° (C) 30° (D) 90° (E) 0°

6 O cosseno do ângulo formado pelos vetores $\vec{a}=(2,-4,4)$ e $\vec{b}=(-3,2,6)$ é:

(A) $\frac{7}{13}$
(B) $\frac{14}{27}$
(C) $\frac{1}{2}$
(D) $\frac{10}{13}$
(E) $\frac{5}{21}$

7 (EN-RJ) O módulo do vetor $3(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})+2(\vec{i}+\vec{k})$ é:

(A) 7
(B) 13
(C) $\sqrt{59}$
(D) $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$
(E) 5

8 Se os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ formam um ângulo $\theta=\frac{2\pi}{3}$, sabendo-se que $|\vec{a}|=3$ e $|\vec{b}|=4$, determine $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

(A) –6
(B) 12
(C) $\frac{-7}{2}$
(D) 6
(E) $\frac{23}{2}$

9 (EN-RJ) Sabendo-se que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são ortogonais e $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$, o valor de $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})$ é:

(A) 18 (B) –12 (C) –10 (D) –24 (E) –20

10 (Cesgranrio-RJ) Dados os vetores $\vec{u}=(1,0,0)$, $\vec{v}=(0,1,0)$ e $\vec{w}=(0,0,1)$, do $\mathbb{R}^3$, o ângulo formado por $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{v}-\vec{w}$ mede:

(A) 45° (B) 30° (C) 90° (D) 60° (E) 120°

11 (Cesgranrio-RJ) Considere os pontos P = (1, 0), Q = (630, 1), R = (2, 4) e S = (0, 1 260) do $\mathbb{R}^2$. O ângulo entre os vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$ é:

(A) nulo.
(B) agudo.
(C) reto.
(D) obtuso.
(E) raso.

12 O ângulo interno $\hat{Q}$ de um triângulo PQR, onde P(1, 1), Q(–1, 2) e R(2, 3), é:

(A) 25° (B) 30° (C) 45° (D) 60° (E) 90°

13 Determinando-se o ângulo interno $\hat{A}$ de um triângulo ABC, onde A(1, 0, 1), B(2, 1, 5) e C(–1, 4, 5), obtemos:

(A) 45° (B) 60° (C) 30° (D) 90° (E) 0°

14 Calculando o ângulo interno $\hat{A}$ do triângulo ABC, onde A(2, 3, 4), B(3, 3, 5) e C(3, 4, 4), obtemos:

(A) 45° (B) 60° (C) 30° (D) 90° (E) 0°

15 O valor de k de modo que os vetores (1, k, –3) e (2, –5, 4) sejam perpediculares é:

(A) –3 (B) –5 (C) –2 (D) –1 (E) 2

16 Para que os vetores (3, k, –2) e (6, –4, 3) sejam ortogonais, o valor de k deve ser igual a:

(A) 2 (B) 6 (C) –6 (D) 3 (E) –3

17 (Cesgranrio-RJ) O valor de α para que os vetores $\vec{u} = (1,\ 2)$ e $\vec{v} = (\alpha,\ 1)$, do $\mathbb{R}^2$, sejam perpendiculares é:

(A) 1 (D) 2

(B) 0 (E) –1

(C) –2

Considere as seguintes opções referentes às questões 18, 19 e 20.

(A) $c = 0$ (D) $a + b = 0$

(B) $a = 0$ (E) $a + b + c = 0$

(C) $b = 0$

18 Para que o vetor (a, b, c) seja perpendicular ao vetor (0, 1, 0), é necessário que:

19 Para que o vetor (a, b, c) seja perpendicular ao vetor (0, 0, 1), é necessário que:

20 Para que o vetor (a, b, c) seja perpendicular ao vetor (1, 1, 1), é necessário que:

21 A projeção algébrica do vetor $\vec{a} = (1,\ 0,\ 1)$ sobre o vetor $\vec{b} = (1,\ 1,\ 1)$ é:

(A) 2 (D) 1

(B) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ (E) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(C) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

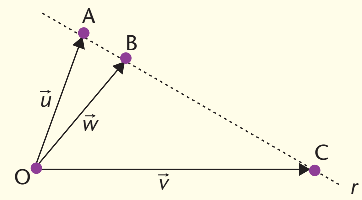
22 Sendo θ o ângulo entre a diagonal de um cubo e a diagonal de uma face, podemos afirmar que:

(A) $\cos\ \theta = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$ (D) $\cos\ \theta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(B) $\cos\ \theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (E) $\cos\ \theta = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

(C) $\cos\ \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

23 (UFRJ) Os pontos A, B e C estão sobre uma reta r e B está entre A e C. Sendo O um ponto fora de r, considere os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$. Sabendo que $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AB}$, determine x e y de forma que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.



24 (Unificado-RJ) A área do triângulo cujos vértices são os pontos (1, 2), (3, 5) e (4, –1) vale:

(A) 4,5 (B) 6 (C) 7,5 (D) 9 (E) 15

25 (Unificado-RJ) A área do triângulo cujos vértices são (1, 2), (3, 4) e (4, –1) é igual a:

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

26 (UFRJ) As coordenadas dos vértices do triângulo isósceles T_1 são dadas por A = (–1, 1), B = (9, 1) e C = (4, 6). As coordenadas dos vértices do triângulo isósceles T_2 são dadas por D = (4, 2), E = (2, 8) e F = (6, 8). Determine a área do quadrilátero $T_1 \cap T_2$.

27 (Unirio-RJ) Dados dois vetores $\vec{u} = (a,\ b)$ e $\vec{v} = (c,\ d)$, define-se o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de duas formas diferentes, mas com igual resultado: $ac + bd$ ou $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\ \theta$, onde θ é o ângulo formado pelos vetores. Assim sendo, o ângulo formado pelos vetores $\vec{u} = (3\sqrt{3},\ 3)$ e $\vec{v} = (0,\ -2)$ mede:

(A) 150° (D) 60°

(B) 120° (E) 30°

(C) 90°

28 (Unificado-RJ) Se $|\vec{u} + \vec{v}| = 7$ e $|\vec{u} - \vec{v}| = 5$, o valor do produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é:

(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 4

29 (Unirio-RJ) O ângulo formado pelos vetores $\vec{u} = (3,\ 0)$ e $\vec{v} = (-2,\ 2\sqrt{3})$ mede:

(A) 210°

(B) 150°

(C) 120°

(D) 60°

(E) 30°

30 (Uerj) Dois vetores $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ do $\mathbb{R}^2$ tais que $|\vec{u}| = 1$ e $|\vec{v}| = 2$ são ortogonais. Para que os vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $t \cdot \vec{u} + 2\vec{v}$ ($t \in \mathbb{R}$) sejam também ortogonais, o valor de t é:

(A) –8 (B) –6 (C) –4 (D) 0 (E) 4

31 Para que valor de k os pontos A(k, 3), B(8, 6) e C(–1, –3) estarão alinhados?

32 Determine x para que os pontos A(x, –3), B(2, 4) e C(5, 1) sejam colineares.

33 Calcule a área do quadrilátero ABCD, dados A(–2, 1), B(3, 2), C(1, –4) e D(–1, –3).

34 Determine os valores de x para que o triângulo de vértices A(x, 2), B(1, 4) e C(0, 3) tenha área igual a 6 unidades.

35 Calcule a altura relativa ao lado AB do triângulo cujos vértices são A(2, –5), B(6, –2) e C(5, –1).

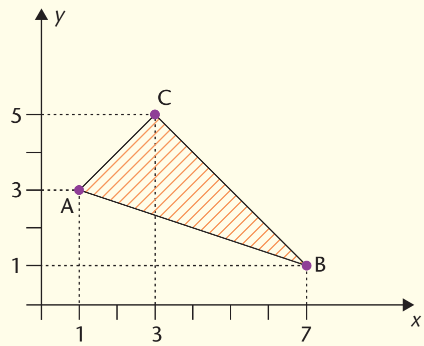
36 (Unirio-RJ) Considere os vetores $\vec{u} = \left(\sqrt{3}, \dfrac{5}{2}\right)$ e $\vec{v} = \left(-\sqrt{3}, \dfrac{1}{2}\right)$. A secante do ângulo formado pelos vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ é:

(A) 2 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (D) $\dfrac{1}{2}$ (E) –2

37 (UFF-RJ) Considere os vetores $\vec{u} = (0, -2)$ e $\vec{v} = (-1, 0)$. Determine um vetor unitário $\vec{w}$ tal que os vetores $(\vec{u} + \vec{w})$ e $(\vec{v} + \vec{w})$ sejam perpendiculares.

38 (UFRJ) Sejam O = (0, 0), P = (5, 2) e P' = (2, 5). Girando em torno de O, no sentido trigonométrico (anti-horário), o segmento OP de um certo ângulo θ, o ponto P transforma-se no ponto P'. Determine cos θ.

39 (UENF-RJ) No sistema de coordenadas cartesianas abaixo está representado o triângulo ABC.



Em relação a esse triângulo:

a) demonstre que ele é retângulo;

b) calcule a sua área.

40 (UFRJ) $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ e $\vec{V}_4$ são vetores não nulos. Cada elemento a_{ij} da matriz A, apresentada a seguir, é o produto escalar de $\vec{V}_i$ por $\vec{V}_j$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 1 & \dfrac{1}{2} \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & \dfrac{1}{2} & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Determine o ângulo entre os vetores $\vec{V}_2$ e $\vec{V}_3$.

41 Os vértices de um tetraedro são os pontos O = (0, 0, 0); A = (2, 0, 0); B = (0, 3, 0) e C = (0, 0, 4).
A maior aresta do tetraedro mede:

(A) 6,5 (B) 6,0 (C) 5,5 (D) 5,0 (E) 4,5

42 Consideremos os seguintes pontos do $\mathbb{R}^3$: O = (0, 0, 0), A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0) e C = (0, 0, 1). A área total da superfície OABC é um número s tal que:

(A) $2{,}5 < s < 2{,}7$

(B) $2{,}1 < s < 2{,}3$

(C) $1{,}9 < s < 2{,}1$

(D) $2{,}7 < s < 2{,}9$

(E) $2{,}3 < s < 2{,}5$

43 Sejam $\vec{x} = (1, 1, 0)$, $\vec{y} = (2, 0, -1)$ e $\vec{z} = (-4, 2, 3)$ vetores do $\mathbb{R}^3$. Sobre a igualdade $\alpha\,\vec{x} + \beta\,\vec{y} = \vec{z}$, podemos afirmar que:

(A) é verdadeira se $\alpha\beta = -1$.

(B) é verdadeira para uma infinidade de valores de $\alpha\beta$.

(C) nunca é verdadeira.

(D) é verdadeira se $\alpha + \beta = 2$.

(E) é verdadeira se $\alpha + \beta = -1$.

44 Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores unitários e ortogonais, então o produto escalar de $(\vec{u} + \vec{v})$ por $(\vec{u} - \vec{v})$ vale:

(A) 0

(B) 1

(C) –1

(D) $2\vec{u}$

(E) $2(\vec{u} - \vec{v})$

45 (Uerj) As contas correntes de um banco são codificadas através de um número sequencial seguido de um dígito controlador. Esse dígito controlador é calculado conforme o quadro abaixo:

PROCESSO DE CODIFICAÇÃO DE CONTAS CORRENTES	
Número sequencial:	$abc \rightarrow$ vetor $\vec{u} = (a,\ b,\ c)$
Ano de abertura:	$xyzw \rightarrow$ vetor $\vec{v} = (y,\ z,\ w)$
Produto escalar:	$\vec{u} \cdot \vec{v} = a \cdot y + b \cdot z + c \cdot w$
Dígito controlador:	$d \rightarrow$ é o resto da divisão do produto $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pela constante 11; para resto 0 ou 10, $d = 0$.

A conta 643–5, aberta na década de 1980, foi cadastrada no ano de:

(A) 1985

(B) 1986

(C) 1987

(D) 1988

46 (Unificado-RJ) Se o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}(2x,\ 4,\ 3)$ e $\vec{v}(-x,\ x,\ 0)$ é agudo, então:

(A) $x < -1$

(B) $x < 0$ ou $x > 2$

(C) $-1 < x < 1$

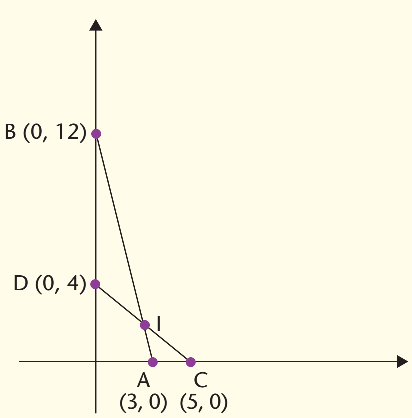
(D) $0 < x < 2$

(E) $2 < x < 3$

47 (PUC-RJ) Se $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{v}$, o produto vetorial $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 3\vec{b})$ é igual a:

(A) $4\vec{v}$ (B) $5\vec{v}$ (C) $6\vec{v}$ (D) $7\vec{v}$ (E) $12\vec{v}$

48 (Unificado-RJ) Considerando a figura abaixo, no plano XOY:

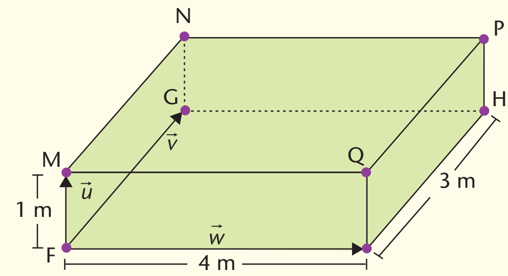


a) calcule o produto vetorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$;

b) obtenha as coordenadas do ponto I.

49 (PUC-RJ) Ache um vetor $(x,\ y,\ z)$ em $\mathbb{R}^3$ tal que o produto vetorial $(1,\ 1,\ 1) \times (x,\ y,\ z)$ seja igual a $(1,\ 0,\ -1)$.

50 (UFF-RJ) Considere o paralelepípedo retângulo de dimensões 1 m, 4 m e 3 m e os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{FM}$, $\vec{v} = \overrightarrow{FG}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{FI}$ representados na figura.



É incorreto afirmar que:

(A) o produto escalar entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é zero.

(B) o produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem módulo 3.

(C) o módulo do produto misto entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vale 12.

(D) o módulo de $(\vec{v} + \vec{w})$ é igual a 5.

(E) o módulo de $(\vec{u} + \vec{v})$ é igual à norma de $\vec{w}$.

51 (Unificado-RJ) O menor valor do parâmetro k para o qual os vetores $\vec{u}\ (2,\ 1,\ 0)$, $\vec{v}\ (1,\ k,\ 4)$ e $\vec{z}\ (3,\ 1,\ -4k)$ são coplanares é:

(A) -1

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) 0

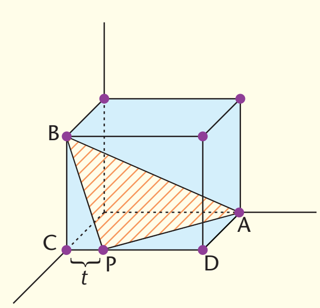
(D) $\frac{1}{2}$

(E) 1

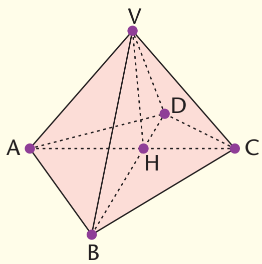
52 Considere os vetores, do $\mathbb{R}^3$, $\vec{u} = (3,\ -2,\ 0)$ e $\vec{v} = (0,\ -2,\ 3)$, determine o vetor $\vec{w}$ de modo que:

$$\begin{cases} \vec{w} \cdot \vec{u} = 6 \\ \vec{w} \times \vec{u} = (4,\ 0,\ 0) \end{cases}$$

53 Um cubo tem 2 cm de aresta. Toma-se um ponto P da aresta CD tal que $CP = t$ e constrói-se o triângulo ABP. Calcule t de modo que a área desse triângulo seja mínima.



54 (Uerj) A figura do $\mathbb{R}^3$ abaixo representa uma pirâmide de base quadrada ABCD em que as coordenadas são A(0, 0, 0), B(4, 2, 4) e C(0, 6, 6), e o vértice V é equidistante dos demais.



A partir da análise dos dados fornecidos, determine:

a) as coordenadas do vértice D e a medida de cada aresta de base;

b) as coordenadas cartesianas do ponto V, considerando que o volume da pirâmide é igual a 72.

55 Determine, quando possível, o número k de modo que os grupos de vetores abaixo sejam LD.

a) $\vec{u} - 2\vec{v}$ e $3\vec{u} - k\vec{v}$

b) $(k - 1)\vec{u} + \vec{v}$ e $4\vec{u} + (k + 1)\vec{v}$

56 Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores do $\mathbb{R}^2$, verifique se os conjuntos de vetores são LD, supondo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam LI.

a) $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$

b) $2\vec{u} - 3\vec{v}$ e $5\vec{u} - 7\vec{v}$

57 Determine as relações existentes entre os vetores:

a) $\vec{v}_1(3, -2)$ e $\vec{v}_2\left(-2, \dfrac{4}{3}\right)$

b) $\vec{v}_1(3, 1, 2)$, $\vec{v}_2(5, -1, 4)$ e $\vec{v}_3(1, -5, 2)$

58 Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores tais que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente independentes. Podemos afirmar que:

(A) os vetores $\vec{a} + \vec{c}$ e $\vec{b} + \vec{c}$ são LI.

(B) os vetores $\vec{a} + \vec{c}$ e $\vec{b} + \vec{c}$ são LD.

(C) se $\vec{c} = x\vec{a}$, $x \neq -1$, então $\vec{a} + \vec{c}$ e $\vec{b} + \vec{c}$ são vetores LI.

(D) se $\vec{c} \neq \vec{0}$, então $\vec{a} + \vec{c}$ e $\vec{b} + \vec{c}$ são vetores LI.

(E) nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

59 Dados $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $b = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, considere as afirmações a seguir:

I) $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são linearmente dependentes.

II) $\vec{a}$ é ortogonal a $\vec{b}$.

III) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \dfrac{4}{\sqrt{15}}$

IV) $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são linearmente independentes.

Dentre elas:

(A) apenas a II é veradeira.

(B) duas são verdadeiras e duas falsas.

(C) a III e a IV são falsas.

(D) todas são falsas.

(E) todas são verdadeiras.

60 Considere as seguintes afirmações, onde $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j} + k$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{d} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$:

I) $\vec{a}$ e $\vec{c}$ são linearmente dependentes.

II) $\vec{a}$ e $\vec{b}$ geram um plano.

III) $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d})$ geram o espaço.

IV) $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são coplanares.

V) $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{d}$ são linearmente dependentes.

Conclui-se que:

(A) quatro são verdadeiras e uma é falsa.

(B) três são verdadeiras e duas são falsas.

(C) duas são verdadeiras e três são falsas.

(D) apenas uma é verdadeira.

(E) todas são verdadeiras.

61 Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores quaisquer. Então podemos afirmar que:

(A) se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são LD, então existe um único par(x, y) tal que $x\vec{a} + y\vec{b} = 0$.

(B) se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são LD, então existe mais de um par(x, y) tal que $x\vec{a} + y\vec{b} = 0$.

(C) se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são LI, então os vetores $x\vec{a}$ e $y\vec{b}$ são LI.

(D) se existem escalares x, y tais que $x\vec{a}$ e $y\vec{b}$ são LD, então $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são LI.

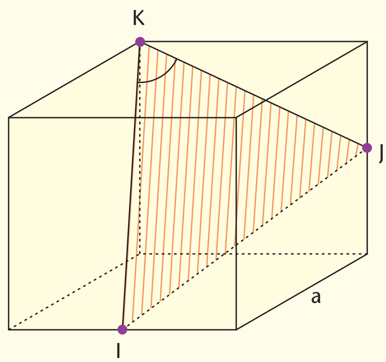
(E) nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

62 Mostre que os vetores $\vec{v}(a, b)$ e $\vec{w}(c, d)$ do $\mathbb{R}^2$ são linearmente dependentes (LD).

63 Mostre que os vetores $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ e $\vec{v}_3 = (a_3, b_3, c_3)$ do $\mathbb{R}^3$ são LD.

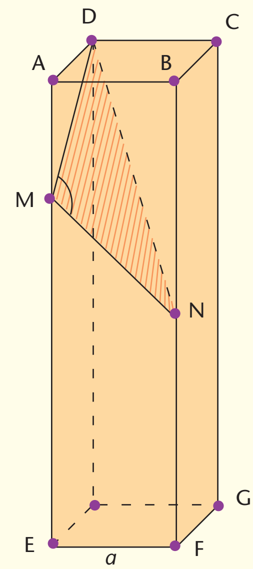
64 Calcule os valores de a de modo que os vetores $(8, 0, a)$, $(a^2, 0, -1)$ e $(0, a^2, 1)$ sejam coplanares.

65 I e J são pontos médios das arestas do cubo. Calcule o ângulo IKJ e a área do triângulo IJK.



66 Dois vértices A e B de um triângulo isósceles têm como coordenadas (3, 0) e (0, 3) respectivamente. Calcule as coordenadas do terceiro vértice C de forma que a área do triângulo seja 15.

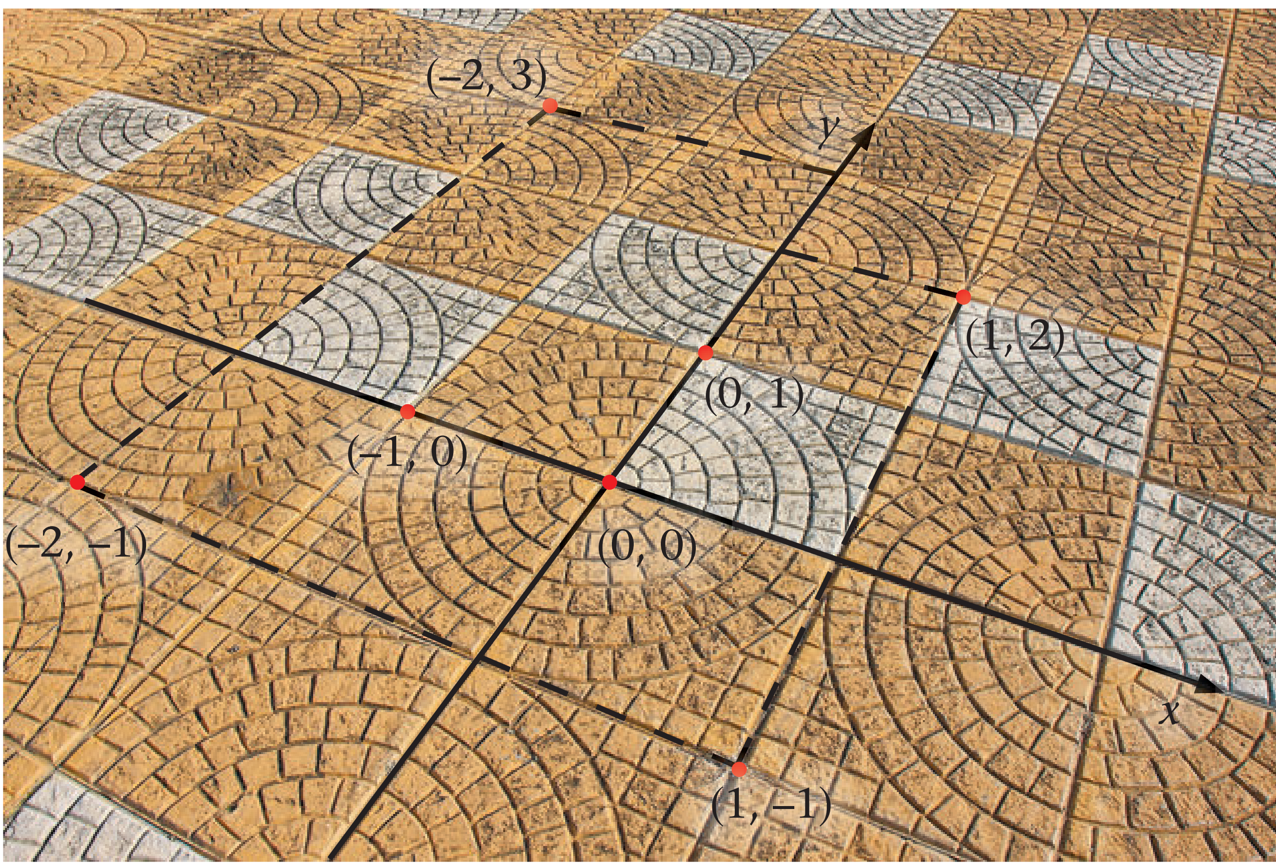
67 No prisma quadrangular regular abaixo, a altura é o quádruplo da aresta da base. M e N são tais que $AM = \frac{1}{4}AE$ e $BN = \frac{1}{2}BF$.



Calcule o ângulo DMN e a área do triângulo DMN.

CAPÍTULO III

GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO



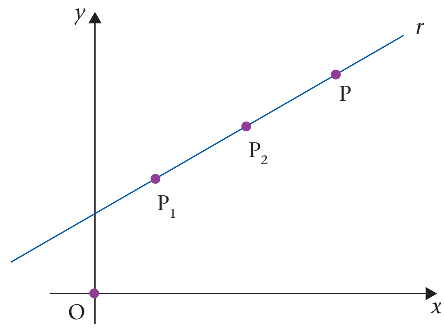
Rufous/Shutterstock

A Geometria Analítica é uma maneira de resolver problemas de geometria fazendo bom uso de álgebra. Neste capítulo, estudaremos a Geometria Analítica do plano, incluindo equações que representam retas, círculos e cônicas.

3 – GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO

3.1 – Reta no $\mathbb{R}^2$

3.1.1 – Equação da reta que passa por dois pontos



Seja P um ponto variável no plano $\mathbb{R}^2$ de coordenadas (x, y). P descreverá a reta suporte de P_1 e P_2 se em qualquer posição tivermos P_1, P_2 e P em linha reta; logo:

$$\det(\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Utilizando a regra prática para a área do triângulo:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x & x_1 \\ y_1 & y_2 & y & y_1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1y_2 + x_2y + xy_1 - x_1y - xy_2 - x_2y_1 = 0$$

que nos leva a: $\underbrace{(y_1 - y_2)}_{a}x + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{b}y + \underbrace{(x_1y_2 - x_2y_1)}_{c} = 0$

Ou seja: $ax + by + c = 0$. Todas as soluções desta equação são pontos da reta que passa por P_1 e P_2. Esta equação é a **equação geral da reta**: $ax + by + c = 0$

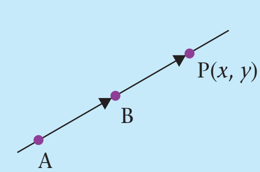
Exemplos:

i) Dar a equação da reta que passa pelos pontos A = (1, 3) e B = (2, –3).

$$\det(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - 1 & 1 \\ y - 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

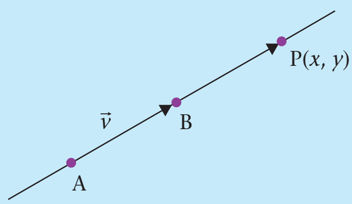
$$-6x + 6 - y + 3 = 0$$

$$AB:\ 6x + y - 9 = 0$$



ou $\begin{bmatrix} 1 & 2 & x & 1 \\ 3 & -3 & y & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -3+2y+3x-y+3x-6=0 \\ 6x+y-9=0 \end{array}$

ii) Dar a equação da reta que passa pelo ponto A = (2, 1) e é paralela ao vetor $\vec{v}=(3,\ 5)$.



O ponto B será: $B = A + \overrightarrow{AB} = A + \vec{v}$

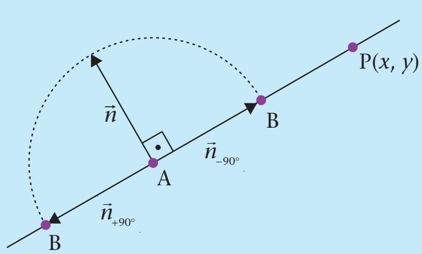
$B = (2,\ 1) + (3,\ 5) = (5,\ 6)$

Recaímos no problema anterior.

$\det(\overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{AB}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ y-1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} 5x-10-3y+3=0 \\ 5x-3y-7=0 \end{array}$

ou $\begin{bmatrix} 2 & 5 & x & 2 \\ 1 & 6 & y & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 12+5y+x-2y-6x-5=0 \\ 5x-3y-7=0 \end{array}$

iii) Dar a equação da reta que passa no ponto A e é normal ao vetor $\vec{n}$.
Dados: A = (1, 3) e $\vec{n}=(3,\ -2)$



$\overrightarrow{AB} = \vec{n}_{\pm 90°}$
Tomemos $\vec{n}_{-90°} = (-2,\ -3)$:

$B = A + \overrightarrow{AB} = (1,\ 3) + (-2,\ -3)$

$B = (-1,\ 0)$

$\det(\overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{AB}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ y-3 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$-3x+3+2y-6=0 \Rightarrow 3x-2y+3=0$

NOTA
Os coeficientes de x e y são as coordenadas do vetor $\vec{n}$.

ou $\begin{bmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ 3 & 0 & y & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 0 - y + 3x - y - 0 + 3 = 0 \Rightarrow 3x - 2y + 3 = 0$

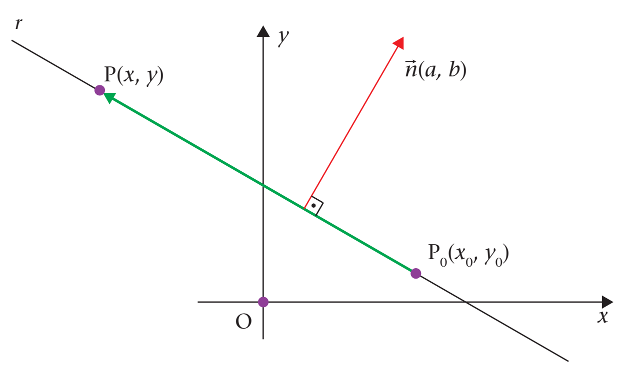
Se tivéssemos tomado $\overrightarrow{AB} = \vec{n}_{+90°} = (2,\ 3)$, teríamos:
$B = A + \vec{n}_{+90°} = (1,\ 3) + (2,\ 3) = (3,\ 6)$

Logo, $\det(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AP}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & x-1 \\ 3 & y-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2y - 6 - 3x + 3 = 0$
$3x - 2y + 3 = 0$

ou $\begin{bmatrix} 1 & 3 & x & 1 \\ 3 & 6 & y & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 6 + 3y + 3x - y - 6x - 9 = 0$
$3x - 2y + 3 = 0$

que resulta na mesma equação.

3.1.2 – Reta que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e é normal a um vetor $\vec{n} = (a, b)$



A reta r é o conjunto dos pontos P tais que $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$, isto é:

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - x_0,\ y - y_0) \cdot (a,\ b) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ax - ax_0 + by - by_0 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$$

Chamando de $c = -(ax_0 + by_0)$, temos:

$$ax + by + c = 0$$

que é a **equação cartesiana da reta** r.

Note que multiplicando ambos os membros da equação por $k \neq 0$, temos outra equação que representa a mesma reta:

$$kax + kby + kc = 0$$

NOTA
Esta dedução também poderia ser obtida girando o vetor normal 90° como feito no exemplo anterior.

NOTA
Os coeficientes de x e y são, respectivamente, as coordenadas do vetor normal $\vec{n} = (a,\ b)$. Para se obter c, dá-se a x e y as coordenadas de um ponto da reta $P_0 = (x_0, y_0)$.

Assim, a condição para que as retas $ax + by + c = 0$ e $Ax + By + C = 0$ representem a mesma reta é que seus coeficientes sejam proporcionais:

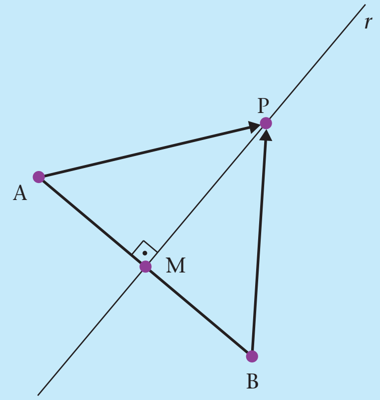
$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$

NOTA
Convencionaremos que se um dos denominadores for 0, o coeficiente também será 0.

Exemplos:

i) Dar a equação da reta normal ao vetor $\vec{n} = (2,\ 3)$ e que passa pelo ponto $A = (-1, 4)$.
Como $\vec{n} = (2,\ 3)$ é normal à reta, sua equação será $2x + 3y + c = 0$. Por outro lado, o ponto $(-1, 4)$ pertencendo à reta satisfará sua equação, logo:
$2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = -10$
A equação da reta será então:
$2x + 3y - 10 = 0$

ii) Determinar a equação da mediatriz do segmento AB, onde $A = (1, 4)$ e $B = (5, -2)$.



O ponto de passagem da reta é o ponto M, médio do segmento AB, então:

$$M = \frac{A+B}{2} = (3,\ 1)$$

O vetor normal $\vec{n}$ é o próprio vetor $\overrightarrow{AB}$, logo:
$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = B - A = (4,\ -6)$
A equação da mediatriz será então:
$4x - 6y + c = 0$
Como $M = (3, 1)$ pertence à reta, vem:
$4 \cdot 3 - 6 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = -6$
A equação ficará:
$4x - 6y - 6 = 0$
que, dividindo ambos os membros por 2, dará:
$2x - 3y - 3 = 0$

<u>Outra solução:</u>

O presente exercício poderia ser resolvido tendo em vista que a mediatriz de um segmento é o "lugar geométrico dos pontos de um plano equidistante dos extremos do segmento".

Assim, os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BP}$ têm o mesmo módulo, logo:

$\mathrm{R} = \left\{ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{BP}\| \right\}$

$\overrightarrow{AP} = \mathrm{P} - \mathrm{A} = (x-1,\ y-4) \ \Rightarrow\ \|\overrightarrow{AP}\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$

$\overrightarrow{BP} = \mathrm{P} - \mathrm{B} = (x-5,\ y+2) \ \Rightarrow\ \|\overrightarrow{BP}\| = \sqrt{(x-5)^2 + (y+2)^2}$

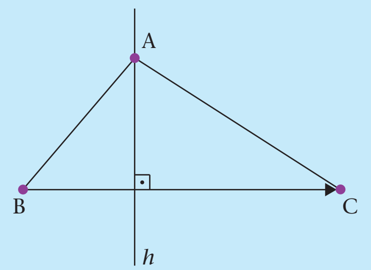
Igualando, vem:

$\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+2)^2}$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4$

$8x - 12y - 12 = 0 \ \Rightarrow\ 2x - 3y - 3 = 0$

iii) Determinar a equação da altura relativa ao vértice A do triângulo ABC em que A = (1, 3), B = (–1, 2) e C = (3, 0).



O vetor normal será $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = \mathrm{C} - \mathrm{B} = (4,\ -2)$, logo a equação da altura h será:

$4x - 2y + c = 0$

Como A ∈ h, suas coordenadas satisfarão esta equação, logo:

$4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow c = 2$

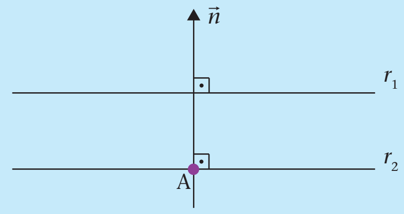
A equação da altura será então:

$4x - 2y + 2 = 0$

que, simplificada, dará:

$2x - y + 1 = 0$

iv) Dar a equação da reta r_2 paralela à reta r_1 de equação $x + 2y - 3 = 0$, que passa pelo ponto A = (–3, 0).

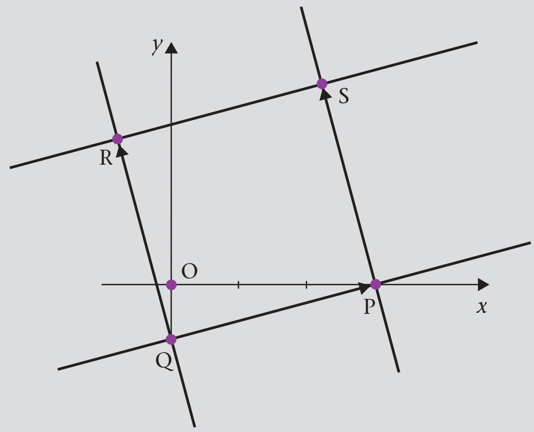


Como r_2 é paralela a r_1, tem o mesmo vetor normal que r_1.
Assim, $\vec{n}_2 = \vec{n}_1 = (1,\ 2)$ (coeficientes de x e y).
A equação de r_2 será: $x + 2y + c = 0$
Como o ponto de passagem é A = (–3, 0), suas coordenadas satisfazem esta equação, então:
$-3 + 2 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow r_2\colon x + 2y + 3 = 0$

Exercícios resolvidos:

1) O quadrado PQRS tem a origem no seu interior. Os vértices P e Q são: P = (3, 0) e Q = (0, –1). Determine os vértices R e S assim como as equações das retas RS e QR.

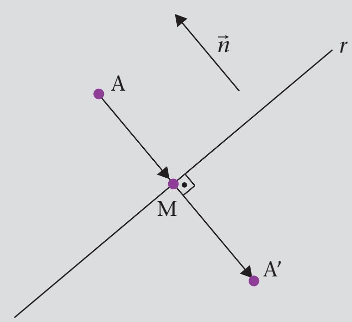
Solução:



Devemos ter: $R = Q + \overrightarrow{QR}$
Como $\overrightarrow{QR}$ se obtém de $\overrightarrow{QP}$ por uma rotação de 90º, vem:
$\overrightarrow{QP} = P - Q = (3,\ 1) \ \Rightarrow \ \overrightarrow{QR} = (-1,\ 3)$ de onde:
$R = (0, -1) + (-1, 3) = (-1, 2)$
Analogamente:
$S = P + \overrightarrow{QR} = (3,\ 0) + (-1,\ 3) = (2,\ 3)$
Para obter a equação do lado RS, o vetor normal será $\vec{n} = \overrightarrow{QR} = (-1,\ 3)$ e o ponto de passagem R = (–1, 2), logo a equação será:
$-x + 3y + c = 0$ com $-(-1) + 3 \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow c = -7$
$-x + 3y - 7 = 0.$
Para o lado QR, o vetor normal será $\overrightarrow{QP} = (3,\ 1)$ e o ponto de passagem Q = (0, –1), logo a equação será:
$3x + y + c = 0$ com $3 \cdot 0 - 1 + c = 0 \Rightarrow c = 1$
$3x + y + 1 = 0$
Resposta: RS: $-x + 3y - 7 = 0$ e QR: $3x + y + 1 = 0$

2) Determinar as coordenadas do ponto simétrico de A = (–1, 3) em relação à reta de equação $x - 2y + 5 = 0$.

Solução:



Vejamos se o ponto A = (–1, 3) pertence à reta. Para isso, basta verificar se as coordenadas do ponto A satisfazem a equação da reta:

$-1 - 2 \cdot 3 + 5 = -2 \neq 0$

Logo o ponto A não pertence à reta.

Para determinar o ponto A', calculemos primeiramente o ponto M pertencente à reta r. O vetor $\overrightarrow{AM}$ é normal à reta, logo:

$\overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{n} = k \cdot (1,\ -2) = (k,\ -2k)$

(multiplicamos por k porque não sabemos o seu comprimento)

O ponto M será então:

$M = A + \overrightarrow{AM} = (-1,\ 3) + (k,\ -2k) = (-1 + k,\ 3 - 2k)$

Como M deve pertencer à reta, suas coordenadas satisfazem a equação da reta, logo:

$$(-1 + k) - 2 \cdot (3 - 2k) + 5 = 0 \ \Rightarrow\ k = \frac{2}{5} \ \Rightarrow\ M = \left(-\frac{3}{5},\ \frac{11}{5}\right)$$

O ponto A', simétrico a A em relação à reta, será:

$$A' = M + \overrightarrow{AM} = \left(-\frac{3}{5},\ \frac{11}{5}\right) + \left(\frac{2}{5},\ -\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right)$$

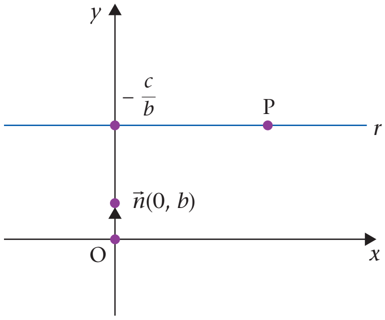
Posições particulares da reta

Conforme o valor dos coeficientes a, b e c, temos:

1) $a = 0$

$0x + by + c = 0$

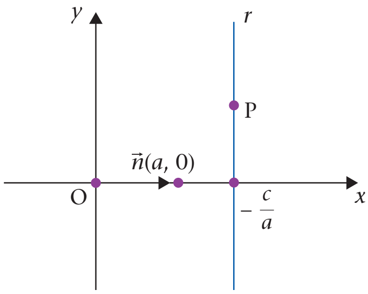
$y = \frac{-c}{b}$ → reta paralela ao eixo Ox



2) $b = 0$

$ax + 0y + c = 0$

$x = \frac{-c}{a}$ → reta paralela ao eixo Oy



3) $c = 0$

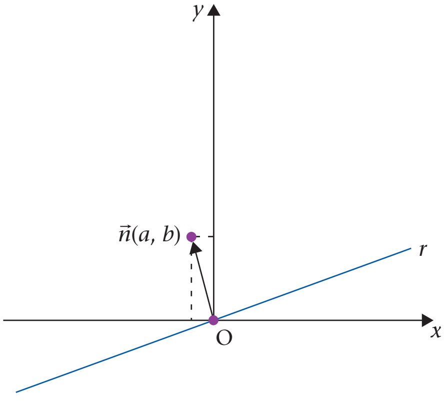
$ax + by + 0 = 0$

$ax + by = 0$

NOTA
Quando $a = c = 0$, temos $y = 0$, que é a equação do eixo Ox. Analogamente, $x = 0$ é o eixo Oy.

Como esta equação tem seu termo independente nulo, o ponto O = (0, 0) a satisfará, uma vez que $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$.

Logo, a equação $ax + by = 0$ representa uma reta que passa na origem das coordenadas.



Exercício resolvido:

O que significam as equações no $\mathbb{R}^2$?

a) $(2y + 3)(x + 2y - 1) = 0$

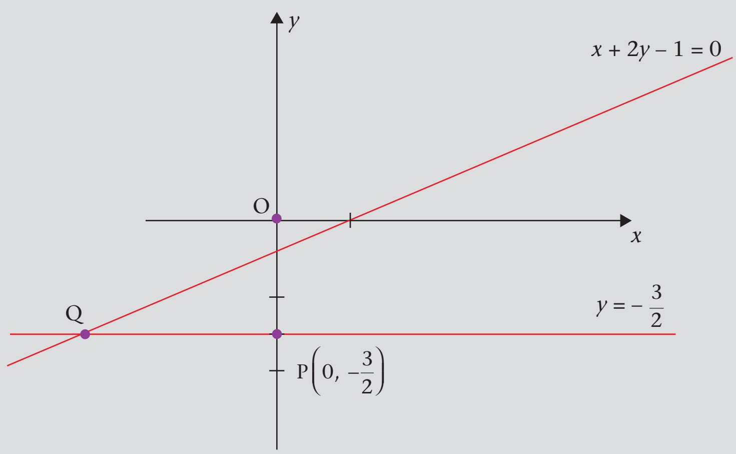
b) $y(x^2 - 5x + 6) = 0$

c) $x(x^2 - 5xy - 6y^2) = 0$

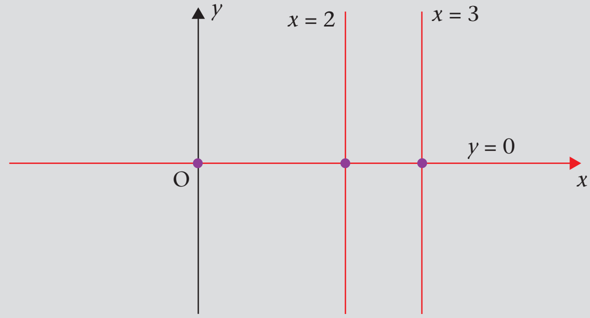
Solução:

a) Temos $2y + 3 = 0$ ou $x + 2y - 1 = 0$.

A primeira é uma reta paralela ao eixo Ox, passando por $P\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$. A segunda é uma reta perpendicular ao vetor $\vec{n} = (1, 2)$. Assim, a equação inicial representa a união das duas retas.



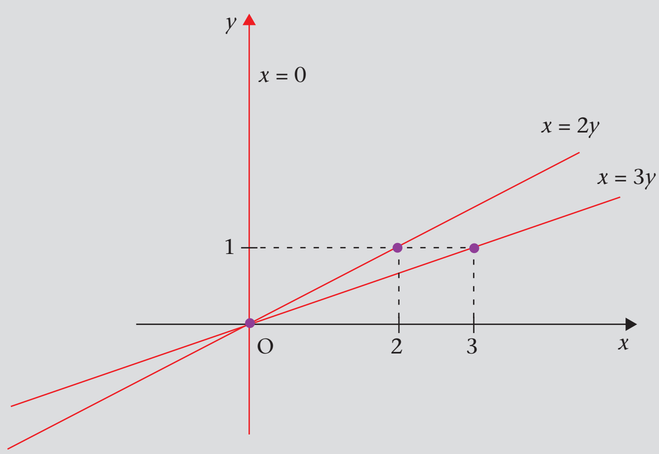
b) Temos $y = 0$ ou $x^2 - 5x + 6 = 0$.
A equação $y = 0$ representa o eixo Ox.
A outra nos dá $x = 2$ ou $x = 3$, que são duas retas paralelas ao eixo Oy, passando por $(2, 0)$ e $(3, 0)$.
Assim, o lugar dos pontos é a união do eixo Ox com as retas $x = 2$ e $x = 3$.



c) Agora temos $x = 0$ ou $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$.
A primeira equação é o eixo Oy.
A segunda nos dá:

$$x = \frac{5y \pm \sqrt{25y^2 - 24y^2}}{2} = \frac{5y \pm y}{2} \Leftrightarrow x = 3y \text{ ou } x = 2y$$

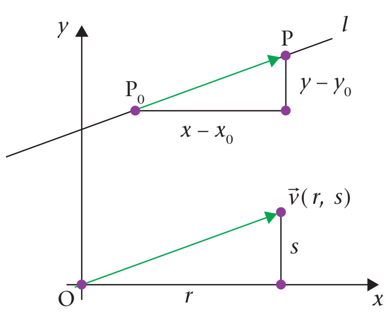
que são duas retas que passam pela origem.
O lugar dos pontos que satisfazem a equação inicial é a união das três retas citadas.



NOTA
O módulo não é necessário, pois já temos ambas as opções de sinal à frente da raiz.

3.1.3 – Reta paralela a um vetor

Seja $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto de passagem da reta l e $\vec{v} = (r, s)$ um vetor paralelo à reta l.



Seja P = (x, y) o ponto descrevente da reta l. Temos que, para qualquer ponto P da reta, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ será paralelo ao vetor $\vec{v}$. Como $\overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (x - x_0, y - y_0)$ e $\vec{v} = (r, s)$:

$$\frac{x - x_0}{r} = \frac{y - y_0}{s}$$

que é a **equação simétrica da reta**.

NOTA
Se um dos denominadores desta equação for nulo, convencionaremos que o numerador correspondente também o será.

Os números r, s são chamados **parâmetros diretores da reta** e o vetor $\vec{v} = (r,\ s)$ é o **vetor diretor**.

3.1.4 – Equações paramétricas da reta

Consideremos as razões que definem a reta l e a chamemos de t. Temos então:

$$\frac{x - x_0}{r} = \frac{y - y_0}{s} = t \quad (t \text{ é o parâmetro})$$

Daí, igualando cada razão a t, vem:

$$\frac{x - x_0}{r} = t \;\Rightarrow\; x - x_0 = rt \;\Rightarrow\; x = x_0 + rt$$

$$\frac{y - y_0}{s} = t \;\Rightarrow\; y - y_0 = st \;\Rightarrow\; y = y_0 + st$$

que são as **equações paramétricas da reta**: $\begin{cases} x = x_0 + rt \\ y = y_0 + st \end{cases}$

Exemplos:

i) Dar as equações simétrica e paramétricas da reta que passa por A = (1, 2) e é paralela ao vetor $\vec{v} = (2,\ -2)$.

Temos:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2}$$

que é a forma simétrica.

Igualando essas razões ao parâmetro t, vem:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{2} = t \quad \Rightarrow \quad x = 1 + 2t \\[2ex] \dfrac{y-2}{-2} = t \quad \Rightarrow \quad y = 2 - 2t \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$$

que são as equações paramétricas.

ii) Achar um vetor paralelo à reta $2x + 3y - 6 = 0$. Determinar então as equações simétrica e paramétricas desta reta.

Tomemos dois pontos da reta. Por exemplo:

a) $x = 0 \;\Rightarrow\; 3y - 6 = 0 \;\Rightarrow\; y = 2$

$A = (0,\ 2)$

b) $y = 0 \ \Rightarrow \ 2x - 6 = 0 \ \Rightarrow \ x = 3$

$B = (3,\ 0)$

O vetor $\overrightarrow{AB} = B - A = (3,\ -2)$ será o vetor $\vec{v}$ paralelo à reta; $\vec{v} = (3,\ -2)$.

O ponto P_0 de passagem será o ponto A ou o ponto B.

Tomemos A = (0, 2). A equação simétrica será:

$$\frac{x-0}{3} = \frac{y-2}{-2}$$

Igualando ao parâmetro t, vem:

$\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-2} = t$, resultando em:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -2t + 2 \end{cases}$$

que são as equações paramétricas.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Em cada item abaixo, determine a equação da reta que passa pelo ponto A e é perpendicular ao vetor $\vec{n}$.

a) A (2, 3) e $\vec{n}$ = (4, 3)

b) A (5, –2) e $\vec{n}$ = (7, –1)

c) A (5, 0) e $\vec{n}$ = (–5, 2)

d) A (2, 4) e $\vec{n}$ = (1, 0)

e) A (6, 1) e $\vec{n}$ = (0, 3)

f) A (0, 0) e $\vec{n}$ = (5, 7)

2 Determine a equação da reta que passa pelo ponto (5, 2) e é paralela ao eixo das abscissas.

3 Considere os pontos A (3, 1), M (1, 3) e N (5, 2). Determine a equação da reta que contém A e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{MN}$.

4 Determine a equação da reta que passa pelo ponto (–2, 7) e é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

5 Qual a equação da reta que passa pelo ponto (3, 4) e é paralela à reta $3x - y + 2 = 0$?

6 Considere o vetor $\vec{v} = (7, 2)$ e o ponto P (5, 5). Qual a equação da reta que contém P e é paralela ao vetor $\vec{v}$?

7 Determine a equação da reta que passa pelo ponto (–6, –2) e é perpendicular à reta $5x + 3y + 1 = 0$.

8 Determine a equação da reta que passa pelos pontos (10, 1) e (11, 5).

9 Dados os pontos A (–1, 5) e B (5, 7), pede-se a equação da mediatriz do segmento AB.

10 Considere o triângulo ABC, cujos vértices são A (1, 7), B (5, –2) e C (9, 4). Pede-se:

a) a equação da altura relativa ao vértice A.

b) a equação da mediana relativa ao vértice A.

11 Dê as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto P e que é paralela ao vetor $\vec{v}$ em cada caso:

a) P = (1, 2) e $\vec{v}$ = (7, 6)

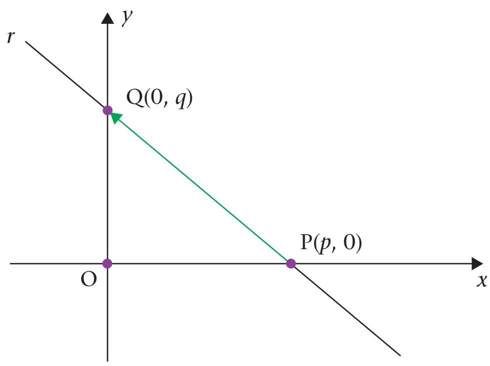
b) P = (–1, 4) e $\vec{v}$ = (3, 3)

12 Dê a equação geral da reta definida por: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 - 4t \end{cases}$

13 Seja a reta r que passa pelos pontos A (4, 0) e B (0, 2). Encontre a equação da reta simétrica de r em relação ao eixo dos x e ao eixo dos y.

3.1.5 – Forma segmentar da reta

É a equação da reta em função dos segmentos que a mesma determina sobre os eixos.



Sejam P = $(p, 0)$ e Q = $(0, q)$ os pontos que a reta r define sobre os eixos coordenados. A reta r é paralela ao vetor $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-p, q)$ e passa pelo ponto P = $(p, 0)$.

Temos:

$$\frac{x-p}{-p} = \frac{y-0}{q} \Rightarrow -\frac{x}{p} + 1 = \frac{y}{q}$$

Então: $\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$ que é a forma segmentar.

NOTA
A forma segmentar se presta à marcação da reta no referencial xOy com facilidade.

Exemplos:

i) Escrever a equação $2x - 5y + 10 = 0$ sob a forma segmentar.
Calculemos as coordenadas na origem p e q:

$x = 0 \Rightarrow -5y + 10 = 0 \Rightarrow y = 2 = q$
$y = 0 \Rightarrow 2x + 10 = 0 \Rightarrow x = -5 = p$

Logo, a forma segmentar será: $\frac{x}{-5} + \frac{y}{2} = 1$

Podemos obter esta equação também como segue:

$$2x - 5y + 10 = 0 \Rightarrow 2x - 5y = -10 \Rightarrow \frac{2x}{-10} + \frac{-5y}{-10} = 1$$

Logo: $\frac{x}{-5} + \frac{y}{2} = 1$

ii) Determinar a equação da reta r que passa pelo ponto A = $(-3, 10)$ e define com os eixos um triângulo de área 7,5.

Devemos ter: $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$ e $\dfrac{pq}{2} = \pm\dfrac{15}{2}$

Como o ponto A = (–3, 10) pertence à reta r, vem:

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{p} + \dfrac{10}{q} = 1 \\ pq = \pm 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3q + 10p = pq \\ pq = \pm 15 \end{cases}$$

Substituindo o valor de $p = \pm\dfrac{15}{q}$:

$$-3q \pm \frac{150}{q} = \pm 15 \quad \Rightarrow \quad q^2 \pm 5q \pm 50 = 0$$

Temos então quatro equações: $q^2 + 5q - 50 = 0$ de raízes $q = 5$ ou $q = -10$, $q^2 + 5q + 50 = 0$, que não tem raízes reais, $q^2 - 5q + 50 = 0$, que também não tem raízes reais e $q^2 - 5q - 50 = 0$ de raízes $q = 10$ ou $q = -5$. Podemos então escrever:

para $q = 5 \quad \Rightarrow \quad p = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{\pm 3} + \dfrac{y}{5} = 1$

para $q = -10 \quad \Rightarrow \quad p = \pm\dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{\pm\dfrac{3}{2}} + \dfrac{y}{-10} = 1$

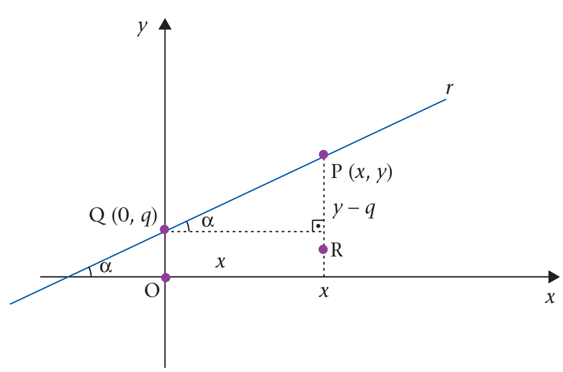
para $q = 10 \quad \Rightarrow \quad p = \pm\dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{\pm\dfrac{3}{2}} + \dfrac{y}{10} = 1$

para $q = -5 \quad \Rightarrow \quad p = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{\pm 3} + \dfrac{y}{-5} = 1$

3.1.6 – Equação reduzida da reta

É a equação da reta em que se explicita y como função de x.

Para obtê-la, consideremos a reta r que passa pelo ponto Q = (0, q) e forma um ângulo $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$ com o eixo Ox.



NOTA
Se $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ rad, tgα não existirá e a equação reduzida fica sem sentido.

NOTA
Se for obtuso, a demonstração é análoga.

Seja P = (x, y) o ponto descrevente da reta no triângulo retângulo QRP. Tem-se:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{y - q}{x}$$

Chamando $\operatorname{tg}\alpha$ de m, a equação fica:

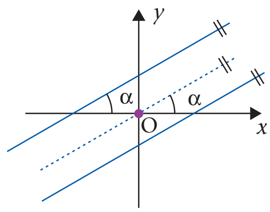
$$m = \frac{y-q}{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = mx + q}$$

NOTA
Esta é, exatamente, a equação da função afim cujo gráfico é uma reta.

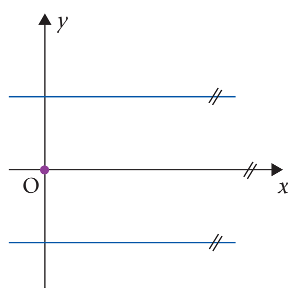
que é a **equação reduzida da reta**. O número real m é chamado **coeficiente angular** e o número q é chamado **coeficiente linear** da reta.

Conforme o valor do coeficiente m, temos:

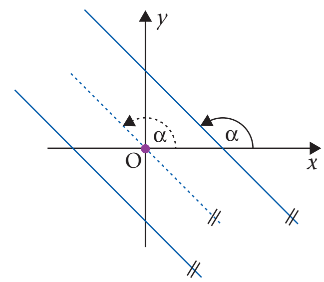
1) Se $m > 0 \Rightarrow \alpha$ é agudo $\Rightarrow$ a função representada pela reta é crescente.
2) Se $m = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow$ a função é constante.
3) Se $m < 0 \Rightarrow \alpha$ é obtuso $\Rightarrow$ a função é descrescente.



$m > 0$

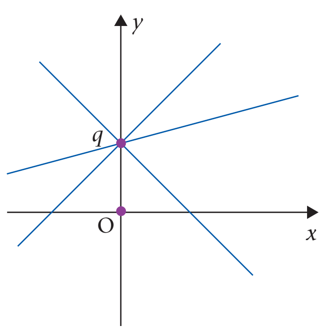


$m = 0$

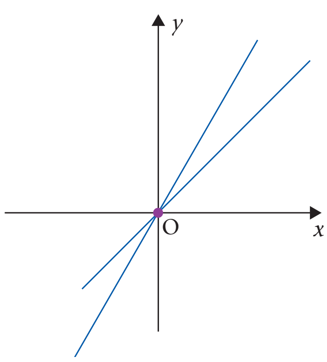


$m < 0$

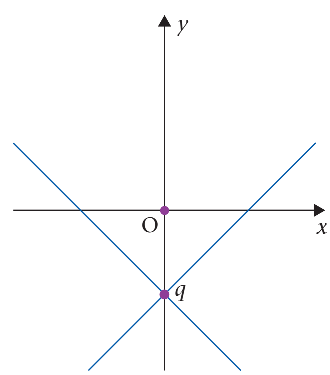
O coeficiente q é a ordenada do ponto da reta sobre o eixo Oy.



$q > 0$

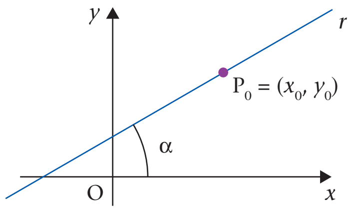


$q = 0$



$q < 0$

3.1.7 – Equação da reta que passa por um ponto com inclinação α em relação a Ox



Devemos ter: $y = mx + q$

Como a reta deve passar por um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$, sua equação deverá ser satisfeita para as coordenadas do ponto, logo $y_0 = mx_0 + q$. Eliminando o parâmetro q, subtraindo membro a membro essas duas equações, vem:

$y - y_0 = m(x - x_0)$, que é a **equação da reta que passa por um ponto**.

Exemplos:

i) Calcular a equação da bissetriz dos quadrantes pares.
A inclinação em relação a Ox é $\alpha = 135°$ e $m = \text{tg}\,135° = 1$. Como a reta passa pela origem, $q = 0$, o que dá $y = -x$.

ii) Determinar a forma reduzida da reta de equação $3x - 2y + 6 = 0$.

Basta tirar o valor de y. Então $2y = 3x + 6$, o que nos dá $y = \frac{3}{2}x + 3$.

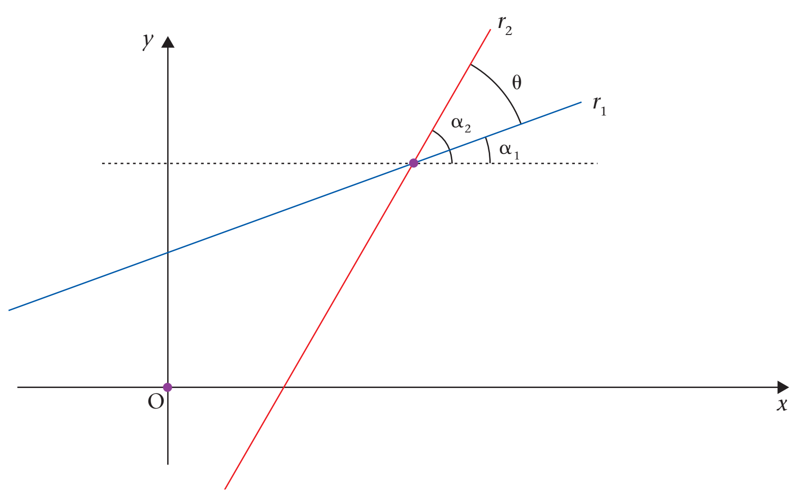
Como $m = \frac{3}{2} > 0$, esta reta forma com o eixo Ox um ângulo agudo e, como $q = 3 > 0$, ela corta o eixo Oy acima da origem.

iii) Calcular a equação da reta que passa pelo ponto A = (–1, 5) e forma 30º com o eixo Ox.
$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 5 = (\text{tg}\,30°) \cdot (x + 1)$

Logo: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)+5$

3.1.8 – Ângulo entre duas retas

Consideremos as retas r_1 e r_2 de coeficientes angulares, respectivamente m_1 e m_2, formando um ângulo θ:



Sabemos que $\text{tg}\,\alpha_1 = m_1$ e $\text{tg}\,\alpha_2 = m_2$. Assim, se $\alpha_2 > \alpha_1$:

$$\text{tg}\,\theta = \text{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\text{tg}\,\alpha_2 - \text{tg}\,\alpha_1}{1 + \text{tg}\,\alpha_2 \cdot \text{tg}\,\alpha_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Se $\alpha_1 > \alpha_2$, a ordem dos coeficientes se inverte. Em geral:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$$

Casos particulares:

Retas paralelas

Duas retas $y = m_1x + q_1$ e $y = m_2x + q_2$ serão paralelas se, e somente se, $m_1 = m_2$.

Retas perpendiculares

Duas retas $y = m_1x + q$ e $y = m_2x + q_2$ serão perpendiculares se, e somente se, $m_1 \cdot m_2 = -1$.

NOTA

Neste caso, $\theta = \frac{\pi}{2}$ e, portanto, $\nexists \operatorname{tg}\theta$, ou seja, o denominador $1 + m_1 \cdot m_2 = 0$.

Exemplos:

i) Calcular o ângulo das retas de equações:
$3x - y + 5 = 0$ e $4x + 2y - 1 = 0$

$3x - y + 5 = 0$ | $4x + 2y - 1 = 0$
$-y = -3x - 5$ | $2y = -4x + 1$
$y = 3x + 5$ | $y = -2x + \frac{1}{2}$
$m_1 = 3$ | $m_2 = -2$

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{-2 - 3}{1 + 3\cdot(-2)}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 45°$$

ii) Determinar a equação da reta que passa por (–1, 2) e forma 45° com a reta de equação $6x - 2y + 5 = 0$.
Temos que $\theta = 45°$, então $\operatorname{tg}\theta = 1$ e $y = \frac{-6x}{-2} - \frac{5}{-2}$, então $m_1 = 3$

Logo, $\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| \Rightarrow 1 = \left|\frac{m_2 - 3}{1 + 3m_2}\right| \Rightarrow m_2 - 3 = \pm(1 + 3m_2)$

que dá: $m_2 = \frac{1}{2}$ ou $m_2 = -2$.

As retas possíveis serão: $y - y_0 = m(x - x_0)$

a) $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow x - 2y + 5 = 0$

b) $y - 2 = -2(x + 1) \Rightarrow 2x + y = 0$

iii) Determinar a reta que passa por A = (2, –1) e que:

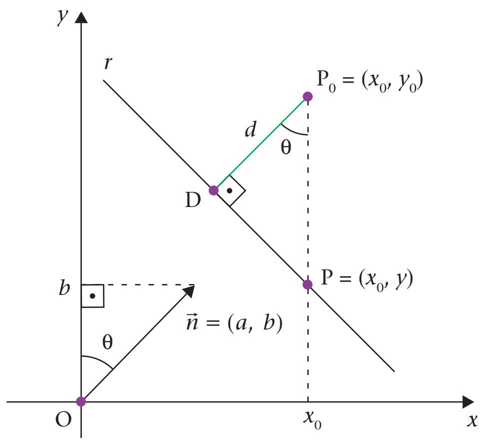
a) é paralela a $y = 3x - 5$.

b) é perpendicular a $y = 2x + 1$.

a) Como a reta deve ser paralela, o seu coeficiente angular deve ser o mesmo ($m_2 = m_1$), logo $m = 3$ e a equação fica: $y + 1 = 3(x - 2)$.

b) Se a reta deve ser perpendicular, o seu coeficiente angular deve ser o simétrico do inverso do coeficiente angular da reta dada $\left(m_2 = -\dfrac{1}{m_1}\right)$, logo $m = -\dfrac{1}{2}$ e a equação fica: $y + 1 = -\dfrac{1}{2}(x - 2)$.

3.1.9 – Distância de um ponto a uma reta



Seja r a reta de equação $ax + by + c = 0$ e o ponto $P_0 = (x_0, y_0)$. A distância d do ponto P_0 à reta r é o cateto P_0D do triângulo retângulo P_0DP.

Temos:

$d = PP_0 \ \cos\theta = (y_0 - y)\ \cos\theta$

Como o vetor normal à reta $\vec{n} = (a,\ b)$ forma com o eixo Oy o mesmo ângulo θ, temos: $\cos\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Logo: $d = (y_0 - y) \cdot \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{by_0 - by}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Por outro lado, como o ponto P é da reta r, suas coordenadas satisfazem a equação da reta, logo:

$$ax_0 + by + c = 0 \quad \Rightarrow \quad by = -\,ax_0 - c$$

Substituindo em d, vem:

$$d = \frac{by_0 - (-ax_0 - c)}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Como o numerador pode ser negativo, devemos ter:

$$\boxed{d = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|}$$

Exercícios resolvidos:

1) Calcule a distância do ponto P = (–1, 5) à reta $3x + 4y + 3 = 0$.

Solução:

$$d = \frac{|3\cdot(-1)+4\cdot 5+3|}{\sqrt{9+16}} = \frac{20}{5}$$

$$d = 4$$

2) Dê a equação do lugar geométrico dos pontos que distam duas unidades da reta $5x - 12y + 1 = 0$.

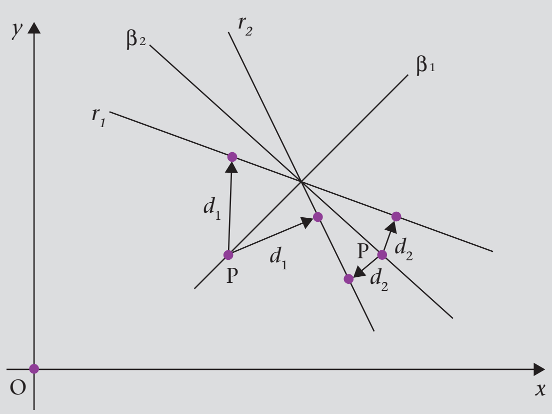
Solução:

$$\frac{5x-12y+1}{\sqrt{25+144}} = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad 5x-12y+1=\pm 26$$

Resposta: Temos, então, duas retas: $5x - 12y - 25 = 0$ ou $5x - 12y + 27 = 0$, paralelas à reta dada.

3) Calcule as equações das bissetrizes dos ângulos das retas $r_1 = A_1x + B_1y + C_1 = 0$ e $r_2 = A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Solução:



A bissetriz do ângulo de duas retas é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes das duas retas.
Sejam:

r_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ e
r_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

$$\beta: \frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

$$\beta: \frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

4) Ache as equações das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas $3x - 4y + 5 = 0$ e $5x + 12y - 26 = 0$.

Solução:

De acordo com o exercício anterior, temos:

$$\frac{3x-4y+5}{\sqrt{9+16}} = \pm\frac{5x+12y-26}{\sqrt{25+144}}$$

$39x - 52y + 65 = \pm(25x + 60y - 130)$
Então:
$39x - 52y + 65 = 25x + 60y - 130$
$14x - 112y + 195 = 0$
ou
$39x - 52y + 65 = -25x - 60y - 130$
$64x + 8y - 65 = 0$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Os pontos $A = (k, 0)$, $B = (1, -2)$ e $C = (3, 2)$ são vértices de um triângulo. Calcule k.

2 Dê a equação da reta que passa pelos pontos (0, 1) e (1, 0).

3 A reta $x + 3y - 2 = 0$ intercepta os eixos Ox e Oy, respectivamente nos pontos P e Q. Calcule-os.

4 Calcule os valores de k, para os quais a equação $(k - 3)\,x - (4 - k^2)\,y + (k^2 - 7k + 6) = 0$ representa uma reta que passa na origem.

5 A reta $y = ax + b$ é tal que:

x	y
–3	2
5	0

Calcule o valor de y quando $x = -2$.

6 A reta que passa pelos pontos $A = (-2, 1)$ e $B = (5, 3)$ intersecta os eixos coordenados nos pontos $M = (m, 0)$ e $N = (0, n)$. Calcule o valor de $E = \frac{14}{11}(n - m)$.

7 Três pontos A, B e C, pertencentes à reta r de equação $3x - y + 1 = 0$, tem suas abscissas em progressão aritmética. O ponto A é a intersecção de r com o eixo das abscissas, a ordenada de C é 8 e B está entre A e C. Calcule B.

8 Determine o ponto de intersecção das retas $x + y - 2 = 0$ e $x - y + 1 = 0$.

9 Se o ponto (a, b) é a intersecção das retas $x + 2y = 5$ e $2x - y = 10$, então qual é o valor de $a + b$?

10 Para que as retas $6my + 3nx = -13$ e $20my + 3nx = -34$ passem pelo ponto (2, –3), quais devem ser os valores de m e n?

11 Calcule a equação da reta que passa pela origem e pela intersecção das retas $2x + y - 6 = 0$ e $x - 3y + 11 = 0$.

12 Calcule o perímetro do triângulo formado pelas intersecções das retas $x + y - 6 = 0$, $x = 1$ e $y = 1$.

13 Calcule a equação da reta paralela ao eixo Oy, que passa pela intersecção das retas

$y = 2x + 1$ e $3y + 2x - 2 = 0$.

14 Se o ponto (1, –3) pertence à reta $2x + ay - 3 = 0$, então quanto vale o coeficiente a?

15 São dados os pontos $A = (1, 3)$ e $B = (-2, 1)$. Calcule a equação da reta perpendicular a $\overline{AB}$ que passa em A.

16 Determine a distância entre as retas r: $x + 2y + 3 = 0$ e s: $x + 2y + 13 = 0$.

17 Encontre os pontos da reta $y = 2x$ que distam 3 unidades da reta $3x - 4y = 0$.

18 Determine a distância da origem do sistema cartesiano à reta de equação $\frac{x}{12} + \frac{y}{5} = 1$.

19 Determine a medida dos ângulos formados pelas retas $2x + y + 1 = 0$ e $3x - y - 1 = 0$.

20 Determine o valor de k para que as retas $y = \frac{x}{k} + k^2$ e $y = 2k^2x - 1$ sejam:

a) paralelas;

b) perpendiculares.

3.2 – Circunferência no $\mathbb{R}^2$

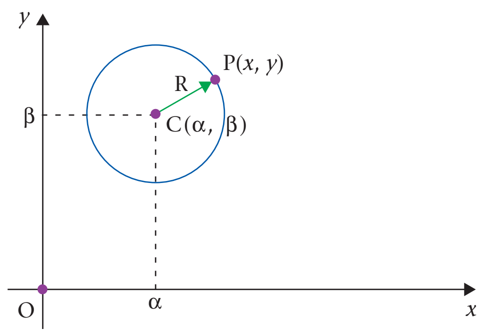
3.2.1 – Equação cartesiana da circunferência

DEFINIÇÃO
Circunferência.

Definimos como circunferência o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo do mesmo plano, chamado **centro**.

Seja C = (α, β) o centro e R o raio.

NOTA
Embora circunferência e círculo sejam conceitos distintos alguns autores usam o termo círculo com sentido de circunferência.



Seja P = (x, y) o ponto descrevente do lugar geométrico.
Temos então:
$\|\overrightarrow{CP}\| = R$. Mas $\overrightarrow{CP} = P - C = (x - \alpha,\ y - \beta)$, logo:

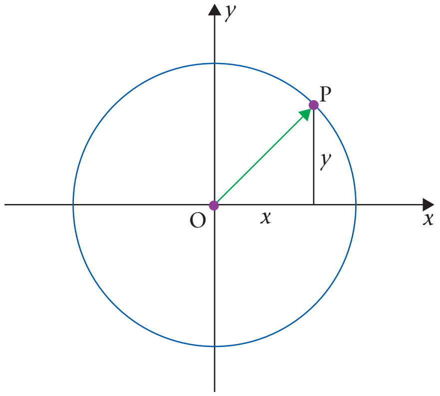
$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = R \quad \Rightarrow \quad \boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2}$$

Esta equação é a **equação da circunferência** de centro C = (α, β) e raio R. Desenvolvendo os quadrados, temos a forma polinomial da equação da circunferência.

$$C: x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0$$

Caso particular:

Se o centro C = (α, β) for coincidente com a origem O = (0, 0), temos α = β = 0 e a equação fica:

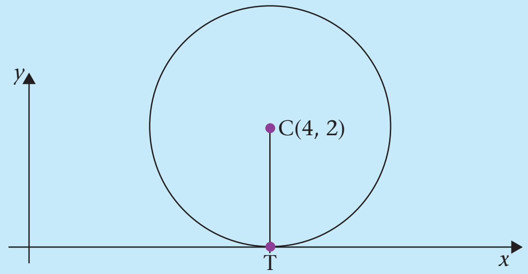


$$C: x^2 + y^2 = R^2$$

Exemplos:

i) Encontrar a equação da circunferência que tem centro no ponto (3, 4) e R = 6.
$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 6^2$ ou $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$.

ii) Dar a equação da circunferência tangente ao eixo Ox de centro (4, 2) representada na figura.



R = 2
$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 2^2$

iii) Determinar a equação da circunferência de diâmetro AB, sendo A = (1, 3) e B = (5, –1).

Seja M o centro, logo $M = \dfrac{A+B}{2} = (3,\ 1)$.

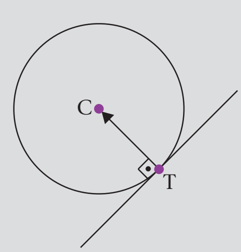
$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 2R = 4\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad R = 2\sqrt{2}$

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (2\sqrt{2})^2$

Exercícios resolvidos:

1) Determine a equação da circunferência tangente à reta de equação $2x - y + 6 = 0$, cujo centro é o ponto (3, 2).

Solução:



O raio será a distância do centro à reta, logo:

$$R = \frac{|2 \cdot 3 - 2 + 6|}{\sqrt{4+1}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

A equação da circunferência será, então:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=(2\sqrt{5})^2$$

$$x^2-6x+9+y^2-4y+4=20$$

$$x^2+y^2-6x-4y-7=0$$

2) A equação $(x + 1)^2 + (y - k)^2 = k^2 + 2k + 1$ representa, para cada valor de k, uma circunferência. Determine a circunferência dessa família que:

a) passa pela origem;

b) passa pelo ponto A = (–1, 2);

c) passa pelo ponto B = (–1, –1);

d) possui raio 3;

e) tem centro na reta $x + y - 4 = 0$;

f) o centro dista do ponto P = (–1, 5) 3 unidades;

g) tem raio mínimo.

Solução:

a) Como a circunferência passa na origem, o ponto O = (0, 0) deverá satisfazer a equação da circunferência, logo:
$(0 + 1)^2 + (0 - k)^2 = k^2 + 2k + 1$
$1 + k^2 = k^2 + 2k + 1 \Rightarrow k = 0$, e a equação fica:
$(x + 1)^2 + y^2 = 1$ de centro (–1, 0) e raio 1.

b) A equação agora deverá ser satisfeita para o ponto A = (–1, 2):

$$(-1+1)^2+(2-k)^2=k^2+2k+1 \quad \Rightarrow \quad k=\frac{1}{2}$$

e a equação fica: $(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

que é uma circunferência de centro $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$ e raio $\frac{3}{2}$.

c) Substituindo as coordenadas (–1, –1) na equação da circunferência:
$(x + 1)^2 + (y - k)^2 = k^2 + 2k + 1$, vem:
$(-1 + 1)^2 + (-1 - k)^2 = k^2 + 2k + 1 \Rightarrow 0 = 0$

Esta identidade mostra que o ponto (–1, –1) satisfaz todas as circunferências da família, logo, elas passam por um ponto fixo.

d) Basta fazer $R^2 = 9$, ou seja, $k^2 + 2k + 1 = 9$, que dá:
$k = -4$ ou $k = 2$
$k = -4 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 9 \Rightarrow C = (-1, -4)$ e $R = 3$
$k = 2 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9 \Rightarrow C = (-1, 2)$ e $R = 3$

e) Calculemos o centro C = (–1, k) e de forma que pertença à reta $x + y - 4 = 0$. Temos:
$-1 + k - 4 = 0 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 36$
que é uma circunferência de centro (–1, 5) e raio 6.

f) O módulo do vetor $\overrightarrow{CP}$ deverá ser igual a 3.

$$\overrightarrow{CP} = P - C = (-1,\ 5) - (-1,\ k) = (0,\ 5-k)$$

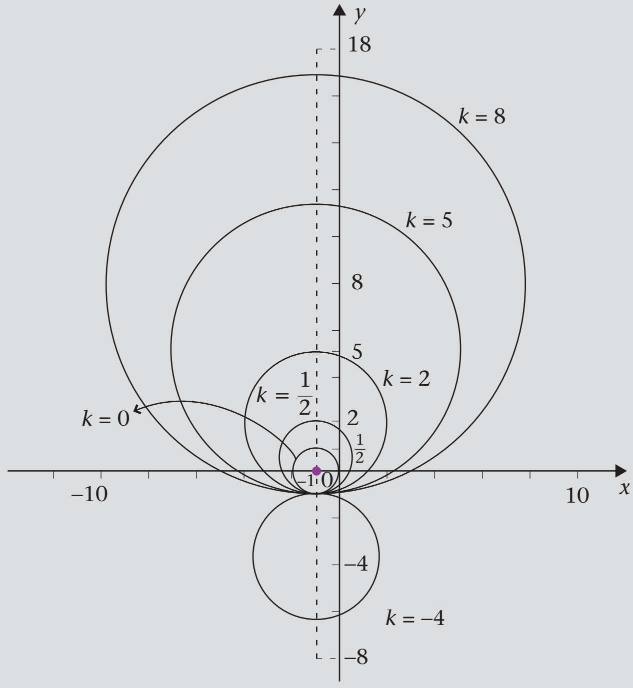
$$\left\|\overrightarrow{CP}\right\| = \sqrt{0^2 + (5-k)^2} = 3 \quad \Rightarrow \quad |5-k| = 3 \quad \Rightarrow \quad k = 2 \ \text{ ou } \ k = 8$$

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad C = (-1,\ 2) \text{ e } R = 3$$

$$k = 8 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 + (y-8)^2 = 81 \quad \Rightarrow \quad C = (-1,\ 8) \text{ e } R = 9$$

g) Como o raio deve ser mínimo, temos:
$R^2 = k^2 + 2k + 1 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{k^2 + 2k + 1}$ que será mínimo quando
$y = k^2 + 2k + 1$ for mínimo.
y será mínimo para $k = -1$, que dará $y = 0$, logo, o raio será nulo, o que reduz a circunferência a um ponto.

A figura a seguir representa todas as circunferências encontradas nos itens anteriores.



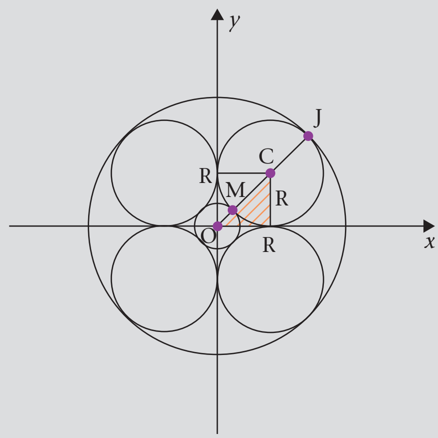
3) Calcule as equações das circunferências:

a) tangentes aos eixos coordenados (4 circunferências) de raio R;

b) tangentes às circunferências do item anterior.

NOTA
Você consegue explicar o porquê de todos os centros estarem alinhados?

Solução:



a) Temos: C = (R, R)

$(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2$

Então as quatro circunferências tangentes aos eixos serão dadas pelas equações:

$(x \pm R)^2 + (y \pm R)^2 = R^2$ com todas as hipóteses para os sinais.

b) Temos que $OC = R\sqrt{2}$, logo: $OM = R\sqrt{2} - R$ e $OJ = R\sqrt{2} + R$.

Assim:

a) Circunferência de raio OM: $x^2 + y^2 = R^2(\sqrt{2} - 1)^2$

b) Circunferência de raio OJ: $x^2 + y^2 = R^2(\sqrt{2} + 1)^2$

3.2.2 – Determinação do centro e raio da circunferência a partir da sua equação geral

NOTA
Se os coeficientes de x^2 e y^2 forem diferentes, a equação representa uma cônica, como veremos nas próximas seções.

Seja a equação $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$, $A \neq 0$.
Dividindo-a por A, temos:

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0 \qquad \text{(I)}$$

Comparando-a com a equação da circunferência de centro C = (α, β) e raio R:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0 \qquad \text{(II)}$$

vemos que (I) representa uma circunferência. Temos:

$$\begin{cases} -2\alpha = \dfrac{D}{A} \Rightarrow \alpha = -\dfrac{D}{2A} \\ -2\beta = \dfrac{E}{A} \Rightarrow \beta = -\dfrac{E}{2A} \end{cases} \Rightarrow \text{Centro} = \left(-\dfrac{D}{2A}, -\dfrac{E}{2A}\right)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - R^2 = \frac{F}{A} \Rightarrow R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \frac{F}{A}} \quad (R > 0)$$

Exemplo:

Dizer se as equações a seguir representam circunferências e, em caso positivo, determinar o centro e o raio.

a) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 25 = 0$

Solução:

a) As coordenadas do centro são:

$$\alpha = -\frac{D}{2A} = -\frac{(-2)}{2} = 1 \quad \text{e} \quad \beta = -\frac{E}{2A} = -\frac{(-8)}{2} = 4$$

e o raio é:

$$R = \sqrt{1^2 + 4^2 - \frac{1}{1}} = 4$$

b) As coordenadas do centro são:

$$\alpha = -\frac{(-4)}{2} = 2 \quad \text{e} \quad \beta = -\frac{6}{2} = -3$$

e o raio é:

$$R = \sqrt{2^2 + (-3)^2 - \frac{13}{1}} = 0$$

Neste caso, a circunferência se reduz a um ponto: (2, –3).

c) O centro é (α, β), onde:

$$\alpha = -\frac{(-4)}{2} = 2 \quad \text{e} \quad \beta = \frac{-8}{2} = -4$$

e o raio é:

$$R = \sqrt{2^2 + (-4)^2 - \frac{25}{1}} = \sqrt{-5}$$

Como este raio não é real, não existe tal circunferência. Assim, a equação representa o conjunto vazio.

Outra solução:

Em vez de usar as fórmulas, os resultados acima podem ser obtidos completando quadrados:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 1 = 0$
$x^2 - 2x + \square + y^2 - 8y + \square = -1$
$x^2 - 2x + 1^2 + y^2 - 8y + 4^2 = -1 + 1^2 + 4^2$
$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 4^2 \Rightarrow$ centro (1, 4) e raio 4

b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$
$x^2 - 4x + \square + y^2 + 6y + \square = -13$
$x^2 - 4x + 2^2 + y^2 + 6y + 3^2 = 2^2 + 3^2 - 13$
$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0 \Rightarrow$ centro (2, –3) e raio 0 [isto é, apenas o ponto (–2, 3)]

NOTA
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

c) $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 25 = 0$
$x^2 - 4x + \square + y^2 + 8y + \square = -25$
$x^2 - 4x + 2^2 + y^2 + 8y + 4^2 = 2^2 + 4^2 - 25$
$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = -5$
Como a soma de quadrados não pode ser negativa, esta equação representa o conjunto vazio.

Exercício resolvido:

Encontre a equação da circunferência que passa pelos 3 pontos: A = (0, 2), B = (–2, 0) e C = (3, 1).

<u>Solução:</u>

Consideremos a circunferência $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
Para (0, 2): $0^2 + 2^2 + a \cdot 0 + b \cdot 2 + c = 0 \;\Rightarrow\; 2b + c = -4$
Para (–2, 0): $(-2)^2 + 0^2 \; -2a + b \cdot 0 + c = 0 \;\Rightarrow\; -2a + c = -4$
Para (3, 1): $3^2 + 1^2 + a \cdot 3 + b \cdot 1 + c = 0 \;\Rightarrow\; 3a + b + c = -10$

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} 2b + c = -4 \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{-4 - c}{2} \\ -2a + c = -4 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{c + 4}{2} \\ 3a + b + c = -10 \end{cases}$

$$3 \cdot \frac{c+4}{2} + \frac{-4-c}{2} + c = -10 \quad \Rightarrow \quad 3c + 12 - 4 - c + 2c = -20$$

$$4c = -28 \quad \Rightarrow \quad c = -7$$

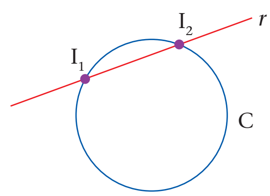
$$a = -\frac{3}{2}$$

$$b = \frac{3}{2}$$

Circunferência: $x^2 + y^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2}y - 7 = 0$

ou $2x^2 + 2y^2 - 3x + 3y - 14 = 0$

3.2.3 – Intersecção de reta e circunferência no $\mathbb{R}^2$



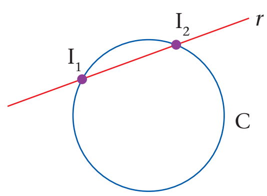
Seja uma reta r: $\dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q}$
e uma circunferência C: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

As intersecções da reta r com a circunferência C serão as soluções do sistema:

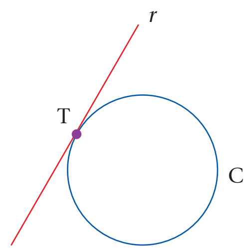
$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{p} = \dfrac{y-y_0}{q} = t \\ x^2+y^2+ax+by+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \\ x^2+y^2+ax+by+c=0 \end{cases}$$

Este sistema gera uma equação do segundo grau em t, $At^2 + Bt + C = 0$, onde $\Delta = B^2 - 4AC$:

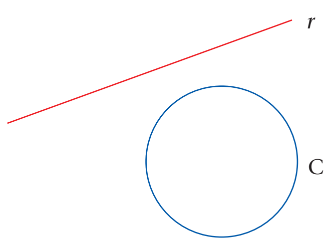
1) Se $\Delta > 0$, teremos dois valores reais distintos para t e a reta será secante à circunferência.



2) Se $\Delta = 0$, teremos dois valores reais iguais para t e a reta será tangente à circunferência.



3) Se $\Delta < 0$, não teremos valores reais para t e a reta não terá ponto em comum com a circunferência.



Exemplos:

i) Determinar os pontos de intersecção da reta $x + y - 1 = 0$ com a circunferência $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$.

Temos: $x - 1 = -y \Rightarrow \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-0}{-1} = t$

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \end{cases}$$

Substituindo na equação da circunferência, vem:
$(t + 1)^2 + t^2 - 2t - 2 - 2t - 23 = 0$
$2t^2 - 2t - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 - t - 12 = 0$
cujas raízes são $t = 4$ ou $t = -3$.

Temos então as intersecções:

$$t_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \begin{cases} x_1 = 4 + 1 \\ y_1 = -4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I_1 = (5,\ -4)$$

$$t_2 = -3 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \begin{cases} x_2 = -3 + 1 \\ y_2 = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I_2 = (-2,\ 3)$$

ii) Dê a posição da reta $2x + y - 1 = 0$ em relação à circunferência de equação $x^2 + y^2 - x + y + \frac{9}{20} = 0.$

Basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ x^2 + y^2 - x + y + \frac{9}{20} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 + (1 - 2x)^2 - x + (1 - 2x) + \frac{9}{20} = 0$$

$$5x^2 - 7x + \frac{49}{20} = 0$$

$$\Delta = 49 - 4 \cdot 5 \cdot \frac{49}{20} = 0$$

Logo, a reta é tangente ao círculo.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Qual é a equação da circunferência de centro (1, 3) e raio igual a 2?

2 Qual é a equação da circunferência de centro (–2, 1) e raio igual a 4?

3 Dê a equação da circunferência de centro (0, –3) e raio 2.

4 Dê a equação da circunferência de centro (1, –3) e tangente ao eixo dos x.

5 Dê equação da circunferência de centro (2, 5) e tangente ao eixo dos y.

6 Determine a equação da circunferência cujas extremidades de um diâmetro são os pontos P(–2, 1) e Q(4, 3).

7 Determine a equação da circunferência de centro C(3, 2) e tangente à reta $x + 2y - 2 = 0$.

8 Qual a equação da circunferência de centro no ponto (2, –1) e raiz $\sqrt{2}$?

9 Uma circunferência tem centro em (–3, 4) e tangencia o eixo Ox. Calcule sua equação.

10 Sejam A(–2, 1) e B(0, –3) as extremidades de um diâmetro de uma circunferência. Calcule sua equação.

11 Determine o ponto da circunferência $(x-2)^2+(y+4)^2=4$ que tem ordenada máxima.

12 Uma circunferência passa pela origem, tem raio 2 e centro sobre a reta $y = 2x$. Calcule a equação desta circunferência sabendo que seu centro tem coordenadas positivas.

13 Dê o centro da circunferência que passa pelos pontos (2, 2), (3, 3) e (3, 2).

14 Dê o centro e o raio das circunferências:

a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2y = 0$

15 Calcule o comprimento da corda que a reta $x + y = 3$ determina na circunferência $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$.

16 Escreva a equação da circunferência que:

a) possui o centro sobre Ox, tangencia o eixo dos y, tendo raio igual a 4.

b) tem o centro sobre Ox, tangencia a reta $y = x$, tendo raio igual a $\sqrt{2}$.

c) tangencia o eixo dos y, tem o centro no 2º quadrante sobre a reta $x = -y$, tendo raio igual a 2.

d) tangencia as retas $3y = 4x$ e $y = 0$, tem raio igual a 5 e centro no 3º quadrante.

e) passa pelos pontos (2, 3) e (3, 6) e tangencia a reta $2x + y - 2 = 0$.

f) tangencia as retas $x = 0$, $y = 0$ e $4x + 3y - 12 = 0$ e tem o centro no 2º quadrante.

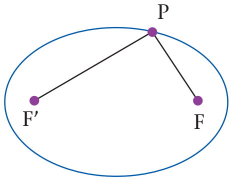
g) tangencia as retas $4x - 3y + 12 = 0$ e $6x + 8y - 4 = 0$ e tem o centro sobre o eixo dos x.

h) é inscrita no triângulo formado pelas retas: $x + 2y - 5 = 0$, $2x - y - 15 = 0$ e $2x + y + 11 = 0$.

3.3 – Elipse no $\mathbb{R}^2$

DEFINIÇÃO
Elipse.

Uma **elipse** é uma curva plana tal que, para cada um de seus pontos, a soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados **focos**, é constante.

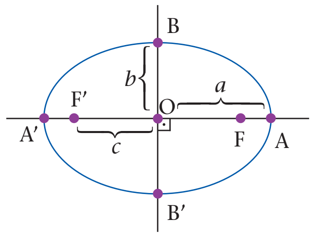


$\forall P \in \text{elipse}, |PF| + |PF'| = 2a$ (constante)

DEFINIÇÃO
Elementos principais da elipse.

A elipse admite dois eixos de simetria: a reta que passa pelos focos e a mediatriz do segmento focal.

Os segmentos desses eixos limitados pela curva são chamados, respectivamente, **eixo maior** e **eixo menor**. Os extremos desses segmentos são os **vértices**, e sua intersecção é o **centro** da elipse.



F e F′ — focos
O — centro
A, A′, B e B′ — vértices
$\overline{AA'}$ — eixo maior
$\overline{BB'}$ — eixo menor

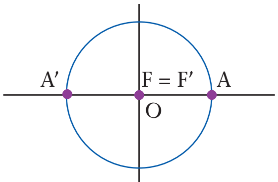
Representaremos o comprimento do eixo menor por $2b$, e a distância focal por $2c$:

$|BB'| = 2b$ $\qquad$ $|FF'| = 2c$

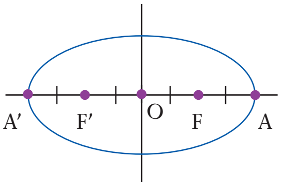
NOTA
Na elipse, tem-se $c < a$, isto é, $e < 1$.

Chama-se **excentricidade** (e) da elipse a razão: $e = \dfrac{c}{a}$

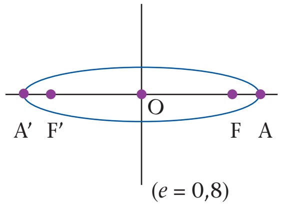
A excentricidade mede quão "achatada" é a elipse.



($e = 0$)



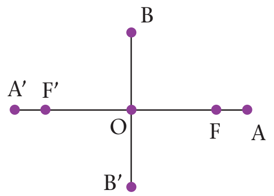
($e = 0,5$)



($e = 0,8$)

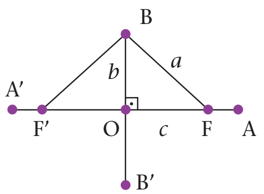
Relações métricas

1) $|AA'| = 2a$



$A \in$ elipse $\Rightarrow |AF| + |AF'| = 2a$
Pela simetria: $|AF| = |A'F'|$, logo:
$|AF'| + |A'F'| = |AA'| = 2a$

2) $a^2 = b^2 + c^2$



$B \in$ elipse $\Rightarrow |BF| + |BF'| = 2a$
Pela simetria: $|BF| = |BF'|$, logo:
$|BF| + |BF| = 2a \Rightarrow |BF| = a$
Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle FOB$:

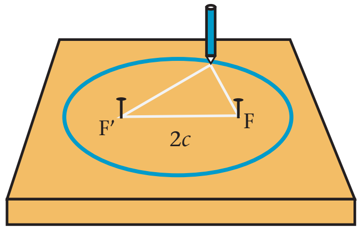
$a^2 = b^2 + c^2$

3.3.1 – Construção mecânica

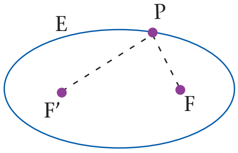
Fixe, numa superfície, dois pregos que serão os pontos F e F'.

Tome um barbante de comprimento maior que o dobro da distância $|FF'| = 2c$ e amarre suas pontas uma na outra.

Coloque o barbante em volta dos pregos e use a ponta do lápis para esticar o barbante como na figura:

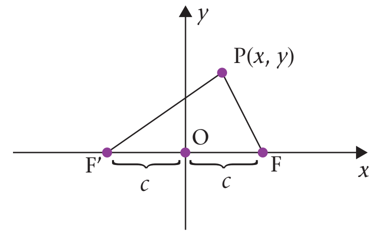


À medida que o lápis se move mantendo o barbante esticado, a ponta do lápis desenhará uma elipse na superfície. De fato, sendo L o comprimento do barbante, teremos $|PF| + |PF'| = L$, que é constante.



3.3.2 – Equação da elipse

Seja P(x, y) um ponto da elipse de focos F(c, 0) e F'($-c$, 0) e eixo maior $2a$.



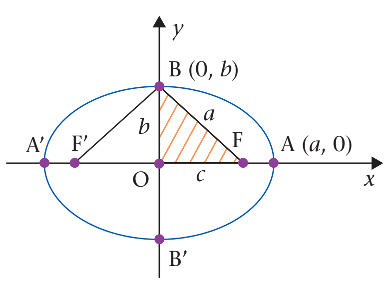
Pela definição:

$$|PF| + |PF'| = 2a \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a \quad \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-c)^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2 + \cancel{y^2} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cancel{4}a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \cancel{4}a^2 + \cancel{4}xc \quad \Rightarrow a^2\left[(x+c)^2+y^2\right] = (a^2+xc)^2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + \cancel{2xc} + c^2 + y^2 = a^2 + \cancel{2xc} + \frac{x^2c^2}{a^2} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow \frac{a^2x^2 - c^2x^2}{a^2} \cdot \frac{1}{a^2-c^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = \frac{a^2-c^2}{a^2-c^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

NOTA
Lembre que $a^2 - c^2 > 0$.

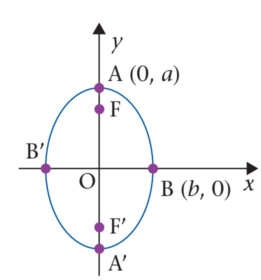
Usando $a^2 - c^2 = b^2$, temos:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



A equação acima é de uma elipse de centro na origem e focos em Ox. Caso os focos estejam em Oy, a equação fica:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



Exemplos:

i) Escrever a equação da elipse de focos F(5, 0) e F'(–5, 0) e de eixo maior $2a = 16$.
Temos $a = 8$ e $c = 5$, então $b^2 = a^2 - c^2 = 64 - 25 = 39$.
Assim, a equação pedida é:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$$

ii) Escrever a equação da elipse de focos F(0, 4) e F'(0, –4) e eixo maior 12.
Agora, $a = \frac{12}{2} = 6$ e $c = 4$, portanto $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$. Como os focos estão no eixo Oy, a equação é:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ isto é, } \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Exercício resolvido:

Os pontos $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ e $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pertencem a uma elipse de centro na origem e focos no eixo Oy. Determine a distância entre os focos e a excentricidade.

<u>Solução:</u>

Como os focos estão em Oy, a elipse terá equação:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Mas:

$$A \in \text{elipse} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{b^2} + \frac{1^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{a^2} = 1 \qquad \text{(I)}$$

$$B \in \text{elipse} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2} + \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{3}{4b^2} + \frac{1}{2a^2} = 1 \qquad \text{(II)}$$

Multiplicando a equação (II) por 2 e subtraindo a (I):

$$2 \cdot \frac{3}{4b^2} - \frac{1}{2b^2} = 2 - 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$$

Então:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

Enfim:

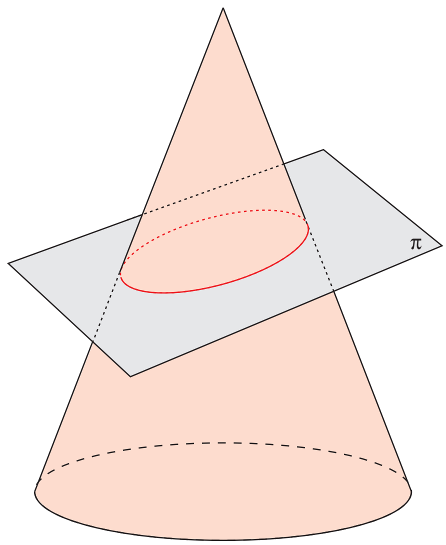
$$c^2 = a^2 - b^2 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow 2c = 2 \text{ e } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

<u>Resposta:</u> A distância entre os focos é 2 e a excentricidade é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

NOTA
Lembre que $a, b > 0$.

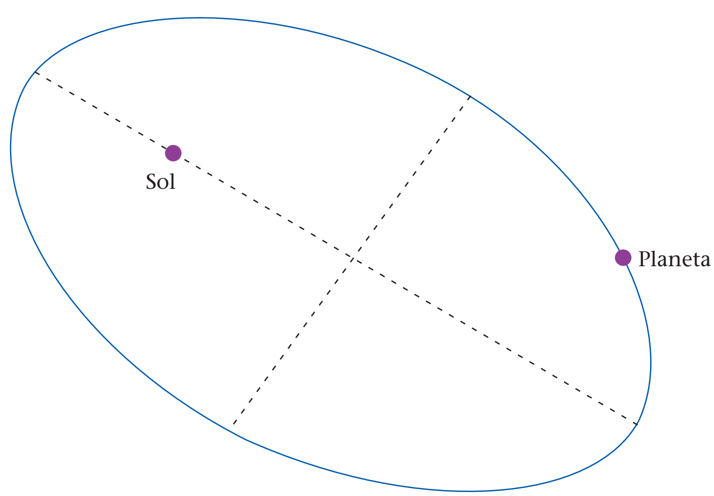
Observação:

A elipse é uma curva que pertence à família das **cônicas**. Ela é assim chamada porque é obtida pela secção de um cone por um plano π que intersecta todas as geratrizes.



Quando um planeta orbita em torno de uma estrela, o formato da órbita é uma elipse, e um dos focos é a posição dessa estrela. Esta é uma consequência da lei da gravitação de Newton aplicada a corpos celestes e vale sempre que a massa do planeta é muito menor que a massa da estrela.

NOTA
Se a excentricidade da órbita elíptica for pequena, ela pode ser aproximada por uma circunferência.



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Um ponto P se desloca de tal forma que a qualquer momento a soma de suas distâncias aos pontos (–4, 0) e (4, 0) é igual a 10. Qual a equação da curva descrita por P?

2 Determine a equação da elipse definida por:

a) focos (±20, 0), excentricidade $= \frac{4}{5}$;

b) vértices (±2, 0) e (0, ±4);

c) diretrizes $7y \pm 64 = 0$, eixo maior = 16 e centro na origem;

d) parâmetro $= \frac{1}{2}$, excentricidade $= \frac{\sqrt{3}}{2}$, sendo simétrica em relação aos eixos coordenados;

e) vértices (±5, 0) e focos (±4, 0);

f) distância focal = 8 e soma dos semieixos = 8, tendo os focos sobre $x'x$, simétricos em relação à origem.

3 Determine a equação da elipse que admite xx' e yy' como eixos de simetria e passa pelos pontos:

a) (6, 4) e (–8, 3)

b) (6, –6) e $(9, \sqrt{6})$

4 Determine as coordenadas dos focos, a excentricidade e as equações das diretrizes da elipse de equação:

a) $25x^2 + 16y^2 = 1600$

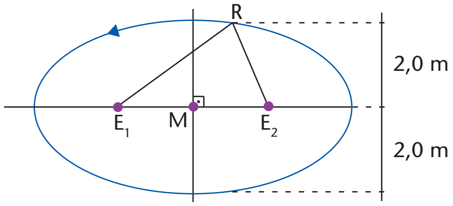
b) $4x^2 + 3y^2 = 48$

c) $3x^2 + 2y^2 = 24$

d) $x^2 + 4y^2 = 16$

5 Determine a equação do lugar geométrico dos pontos que dividem as ordenadas dos pontos de $x^2 + y^2 = 36$ na razão $\frac{1}{2}$.

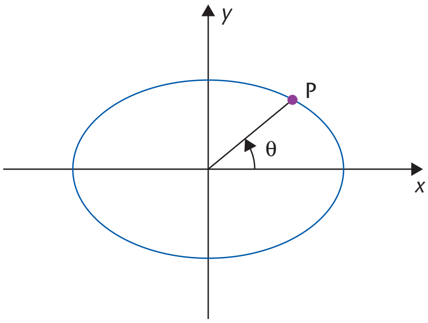
6 (UFF-RJ) Haroldo, ao construir uma piscina, amarra as extremidades de uma corda de 6,0 m de comprimento nas estacas E_1 e E_2. Com o riscador R, estica a corda, de modo a obter o triângulo E_1RE_2. Deslizando o riscador R de forma que a corda fique sempre esticada e rente ao chão, obtém o contorno da piscina desenhado na figura abaixo:



Se M é ponto médio de $\overline{E_1E_2}$, a distância entre as estacas é:

(A) $\sqrt{5}$ m (B) $\sqrt{6}$ m (C) $2\sqrt{5}$ m (D) $2\sqrt{6}$ m (E) $6\sqrt{2}$ m

7 (PUC-RJ) Escreva as coordenadas cartesianas do ponto P em função de θ, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$, sabendo que P pertence à curva $x^2 + 4y^2 = 4$.



8 (Cesgranrio-RJ) Na elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, seja PQ uma corda de comprimento igual ao semieixo maior, paralela a Ox. Determine a distância do centro da elipse à corda PQ.

9 (Unicamp-SP) Dada uma elipse de semieixos a e b, calcule, em termos destes parâmetros, a área do quadrado nela inscrito, com lados paralelos aos eixos da elipse.

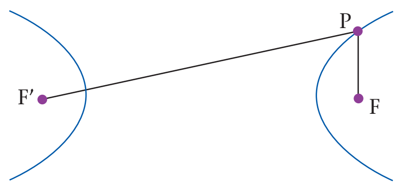
10 (PUC-SP) Na elipse de equação $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, inscreve-se um quadrado. Um dos vértices do quadrado tem abscissa:

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{5}{4}$ (E) $\frac{12}{5}$

3.4 – Hipérbole no $\mathbb{R}^2$

DEFINIÇÃO
Hipérbole.

Uma **hipérbole** é uma curva plana tal que, para cada um de seus pontos, a diferença (em valor absoluto) das distâncias a dois pontos fixos, chamados **focos**, é constante.



$\forall P \in$ hipérbole, $|PF'| - |PF| = 2a$ (constante)

A hipérbole possui dois ramos. Na figura, para o ramo da direita,

$$|PF'| > |PF| \quad \Rightarrow \quad |PF'| - |PF| = 2a$$

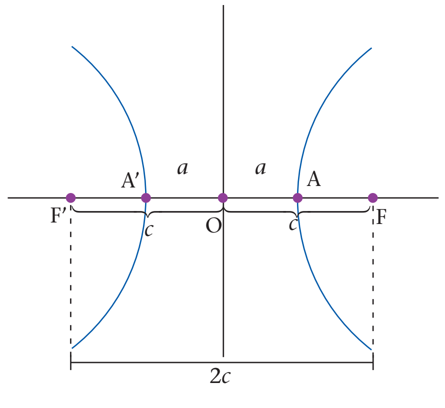
e para o ramo da esquerda,

$$|PF| > |PF'| \quad \Rightarrow \quad |PF| - |PF'| = 2a$$

DEFINIÇÃO
Elementos principais da hipérbole.

A hipérbole admite dois eixos de simetria: a reta que contém os focos e a mediatriz do segmento focal.

O segmento do primeiro eixo, limitado pela curva, é chamado **eixo real** ou **eixo focal**. Os extremos desse segmento são os **vértices** e o ponto médio é o centro da hipérbole.



F e F′ — focos

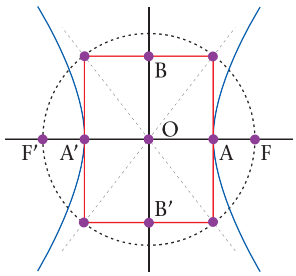
O — centro

A e A′ — vértices

$\overline{AA'}$ — eixo real ou focal

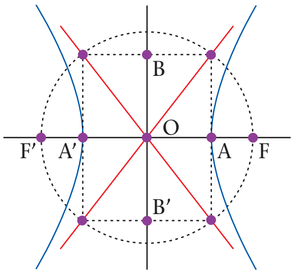
Convenção: $|FF'| = 2c$

Considere a circunferência de centro em O e raio de comprimento c. Chamamos de **retângulo fundamental da hipérbole**, o retângulo inscrito nessa circunferência, que tem dois lados tangentes à hipérbole nos vértices A e A'. Esse retângulo limita no outro eixo um segmento chamado **eixo imaginário** ou **eixo não focal**.



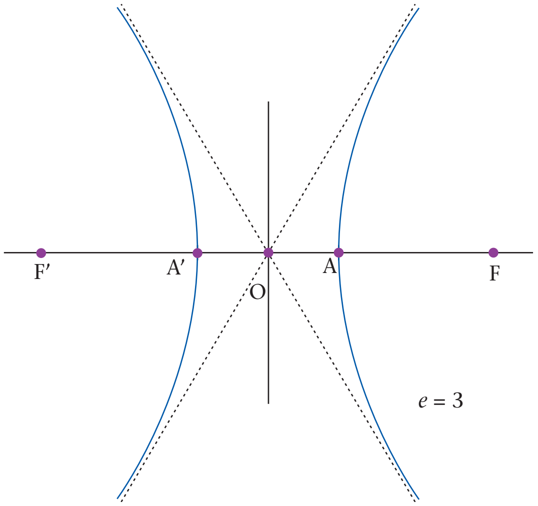
$\overline{BB'}$ — eixo imaginário
Convenção: $|BB'| = 2b$

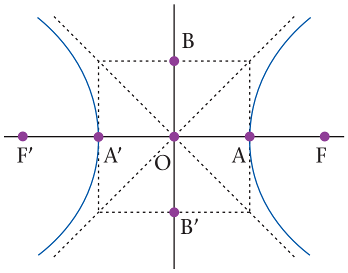
As retas suporte das diagonais do retângulo fundamental são as **assíntotas** da hipérbole.



Chama-se **excentricidade** (e) da hipérbole a razão: $e = \dfrac{c}{a}$

NOTA
Na hipérbole, tem-se $c > a$, isto é, $e > 1$.



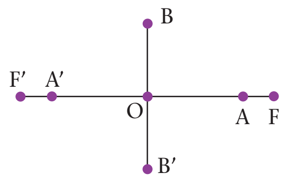


$e = \sqrt{2}$
(hipérbole equilátera)

Quando o retângulo fundamental é um quadrado, as assíntotas são perpendiculares entre si e a hipérbole é dita **equilátera**.

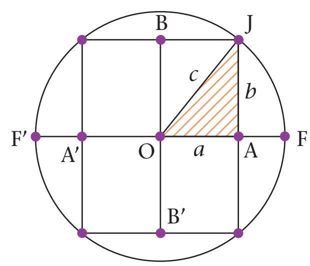
Relações métricas

1) $\boxed{|AA'| = 2a}$



$A \in$ hipérbole $\Rightarrow |AF'| - |AF| = 2a$
Pela simetria: $|AF| = |A'F'|$, logo:
$|AF'| - |A'F'| = |AA'| = 2a$

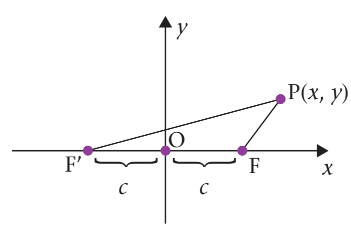
2) $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$



Basta aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo OAJ.

3.4.1 – Equação da hipérbole

Seja $P(x, y)$ um ponto da hipérbole de focos $F(c, 0)$ e $F'(-c, 0)$, tal que $|PF'| - |PF| = 2a$. Temos:



$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}+2a \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x+c)^2+\cancel{y^2}=(x-c)^2+\cancel{y^2}+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2 \quad \Rightarrow$$

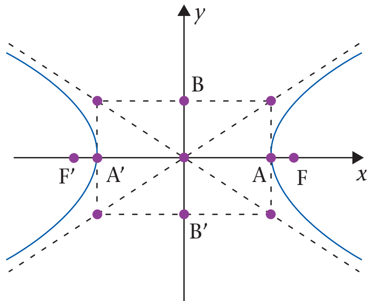
$$\Rightarrow \quad \cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\cancel{4}xc-\cancel{4}a^2 \quad \Rightarrow \quad a^2\left[(x-c)^2+y^2\right]=(xc-a^2)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2-\cancel{2xc}+c^2+y^2=\left(\frac{xc}{a}-a\right)^2=\frac{x^2c^2}{a^2}-\cancel{2xc}+a^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

Usando $a^2 - c^2 = -b^2$, temos:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$



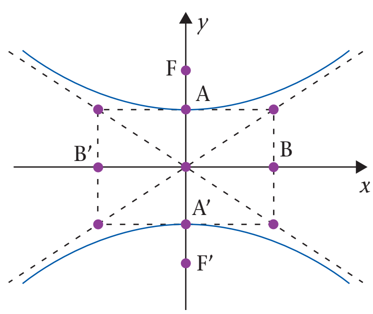
Como as inclinações das assíntotas são $\pm\frac{b}{a}$, suas equações são $y=\pm\frac{b}{a}x$.

NOTA
Na hipérbole equilátera, as assíntotas são $y = \pm x$.

A equação da hipérbole apresentada anteriormente tem centro na origem e focos no eixo Ox. Caso os focos estejam no eixo Oy, a equação será:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Assíntotas: $y=\pm\frac{a}{b}x$



Exemplos:

i) Determinar a equação da hipérbole de focos $F'\left(-\sqrt{13},\ 0\right)$ e $F\left(\sqrt{13},\ 0\right)$ e eixo real medindo 4.

Temos $2a=4$ e $2c=2\sqrt{13}$, então $a=2$ e $c=\sqrt{13}$.
Assim, $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 13 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$, e a equação pedida é:

$$\left\{\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1\right.$$

ii) Encontrar a equação e a excentricidade da hipérbole de focos $F'\left(0,\ -\sqrt{17}\right)$ e $F\left(0,\ \sqrt{17}\right)$ e eixo focal 6.

Agora $a=3$, $c=\sqrt{17}$ e $b^2=c^2-a^2=8 \quad\Rightarrow\quad b=2\sqrt{2}$.
Como os focos estão no eixo Oy, devemos usar:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{8}=1$$

A excentricidade é $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{17}}{3}$.

NOTA
Para a equação ficar na forma padrão, isolamos "1" do lado direito.

Exercício resolvido:

Encontre os focos e as equações das assíntotas da hipérbole definida por $4y^2 - 9x^2 + 144 = 0$.

Solução:

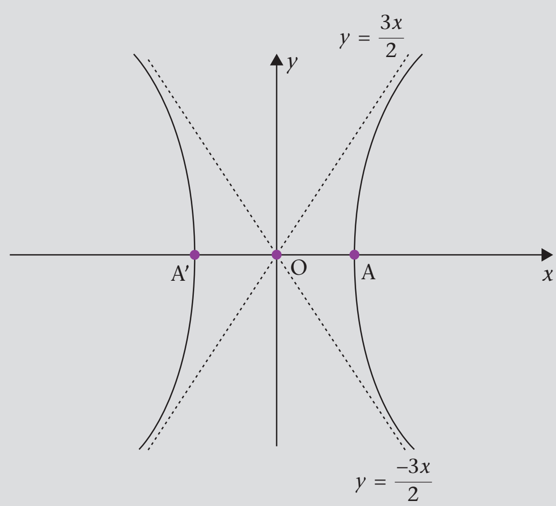
Dividindo por 144 e rearranjando:

$$\frac{4y^2}{144} - \frac{9x^2}{144} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{144}{9}\right)} - \frac{y^2}{\left(\frac{144}{4}\right)} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$$

que representa uma hipérbole com $a^2 = 16$ e $b^2 = 36$.

Assim, $c^2 = a^2 + b^2 = 52 \Rightarrow c = 2\sqrt{13}$. Portanto, os focos são $F'(-2\sqrt{13},\ 0)$ e $F(2\sqrt{13}, 0)$, e as assíntotas são $y = \pm\frac{6}{4}x \Leftrightarrow y = \pm\frac{3x}{2}$.



Para desenhar uma hipérbole, é conveniente iniciar o esboço pelas assíntotas, que dão uma boa aproximação da curva para valores grandes de x e y.

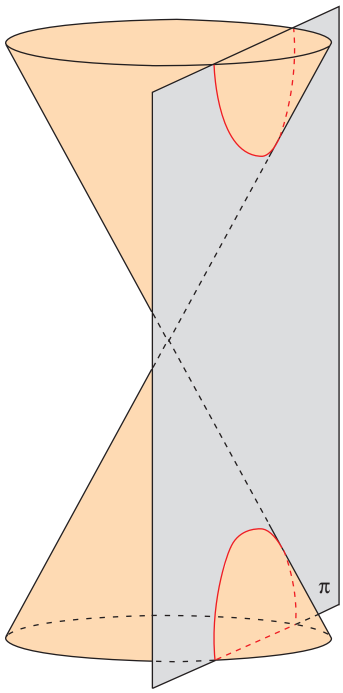
Isto ocorre porque:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{x^2}$$

Quando x tende a infinito, $\frac{b^2}{x^2}$ tende a zero, portanto:

$$\frac{y^2}{x^2} \approx \frac{b^2}{a^2}, \text{ isto é, } y \approx \pm\frac{bx}{a}$$

Assim como as elipses, as hipérboles também são cônicas. Uma hipérbole é obtida pela secção de um cone por um plano π que secciona as duas folhas do cone.



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Um ponto P se desloca de tal forma que a qualquer momento a diferença de suas distâncias aos pontos (–6, 0) e (6, 0) é igual a 10. Qual é a equação da curva descrita por P?

2 Determine as equações das hipérboles que satisfazem as seguintes condições:

a) Focos (±13, 0); passa pelo ponto (22, 12).

b) Focos sobre o eixo das ordenadas; passa pelos pontos (4, 6) e (1, –3); centro na origem.

c) Vértices $\left(\pm\sqrt{6},\ 0\right)$; equilátera.

d) Conjugada com a do item anterior.

e) Excentricidade $=\sqrt{2}$; diretriz $x = 5$; centro: (0, 0).

f) Focos $\left(\pm\sqrt{10},\ 0\right)$; assíntota $x \pm 2y = 0$.

g) Assíntotas $3x \pm 4y = 0$; passa por (2, 1).

h) Conjugada com a do item *f*.

i) Conjugada com a do item *g*.

j) Focos F(0, c) e F'(0, $-c$); assíntotas $x \pm 3y = 0$; distância do foco F à assíntota igual a 3.

k) Conjugada com a do item anterior.

3 Determine a equação da hipérbole cujos vértices são os focos da elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$, sendo os vértices da elipse os focos da hipérbole.

4 Determine as coordenadas dos focos, a excentricidade, as equações das diretrizes e das assíntotas da hipérbole de equação:

a) $7x^2 - 9y^2 = 63$

b) $2x^2 - 9y^2 = 18$

c) $x^2 - 4y^2 = 16$

d) $5y^2 - 4x^2 = 20$

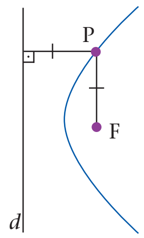
5 Duas hipérboles simétricas em relação aos eixos coordenados são conjugadas. A que tem focos sobre $x'x$ tem comprimento do eixo transverso igual a 4 e excentricidade igual ao dobro da outra. Determine as equações das hipérboles.

6 Uma hipérbole simétrica em relação aos eixos coordenados admite para assíntota a reta de coeficiente angular $\frac{4}{3}$. Determine as excentricidades da curva e da hipérbole conjugada.

3.5 – Parábola no $\mathbb{R}^2$

Uma **parábola** é uma curva plana tal que cada um de seus pontos equidista de um ponto fixo, chamado **foco**, e de uma reta fixa, chamada **diretriz**.

DEFINIÇÃO
Parábola.

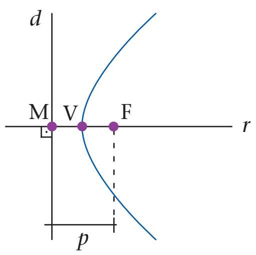


$\forall P \in$ parábola, $|PF| =$ distância de P a d

A reta perpendicular à diretriz, passando pelo foco F, é um eixo de simetria da parábola e é chamado **eixo** da parábola.

O ponto médio V do segmento do eixo entre o foco e a diretriz (que é, evidentemente, um ponto da parábola) é chamado de **vértice**. A distância entre o foco e a diretriz é o **parâmetro** da parábola.

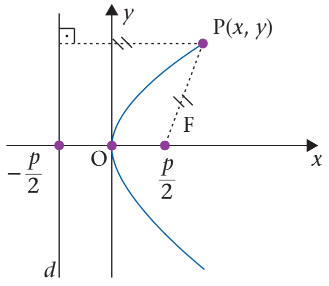
DEFINIÇÃO
Elementos principais da parábola.



F — foco
d — diretriz
V — vértice
r — eixo
Convenção: $|FM| = p$

3.5.1 – Equação da parábola

Seja P(x, y) um ponto da parábola de foco F$\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ e diretriz d: $x = -\dfrac{p}{2}$. Pela definição:



$$|PF| = d(P,\ d) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \quad \Rightarrow$$

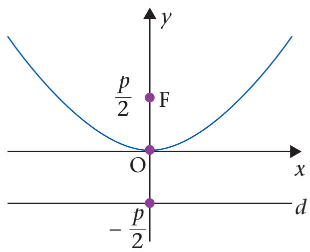
$$\Rightarrow \quad \left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \cancel{x^2} - px + \cancel{\frac{p^2}{4}} + y^2 = \cancel{x^2} + px + \cancel{\frac{p^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y^2 = 2px}$$

Note que, com esta escolha de eixos, a origem é o vértice da parábola.

Se o foco for $F\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$ e a diretriz for d: $y = -\frac{p}{2}$, basta trocar as variáveis x e y na equação:

$$\boxed{x^2 = 2py}$$

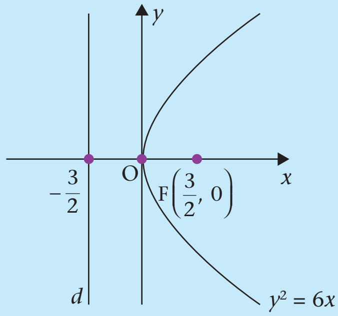


Em outras palavras, $y = \dfrac{x^2}{2p}$, que é um caso particular de função quadrática, com vértice na origem.

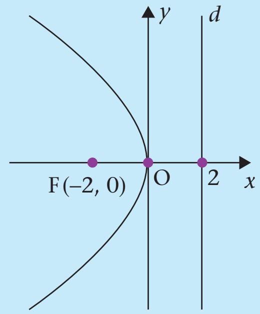
Exemplo:

Determinar a equação das parábolas:

a) Foco $F\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ e diretriz d: $x = -\frac{3}{2}$.
Temos foco no eixo Ox e $p = 3$. Assim, a equação é: $y^2 = 6x$



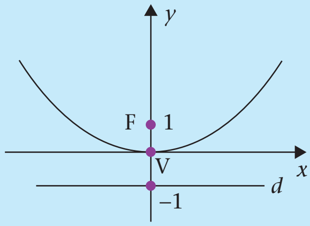
b) Foco F(–2, 0) e diretriz d: $x = 2$.



A distância do foco à diretriz é $p = 4$. No entanto, como o foco está no eixo Ox negativo, a equação da parábola será $y^2 = -2px$ (trocamos x por $-x$ na equação padrão para refleti-la em torno do eixo Oy). Em suma, a equação pedida é:

$$y^2 = -8x$$

c) Foco F(0, 1) e diretriz $y = -1$.

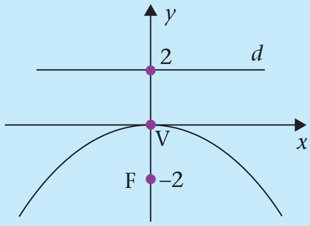


Agora, $p = d(\mathrm{F}, d) = 2$ e a parábola tem eixo vertical. Assim, a equação é:

$x^2 = 4y$

Ou seja: $y = \dfrac{x^2}{4}$

d) Foco F(0, –2) e diretriz y = 2.



Como $p = d(\mathrm{F}, d) = 4$ e o foco está no eixo Oy negativo, a equação da parábola é $x^2 = -2py = -8y$. Então: $y = -\dfrac{x^2}{8}$

NOTA
Este raciocínio mostra que o gráfico da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ (com $a \neq 0$) é uma parábola.

Exercício resolvido:

Considere a parábola de equação $y = x^2 - 4x + 3$. Determine seu foco, diretriz e parâmetro.

Solução:

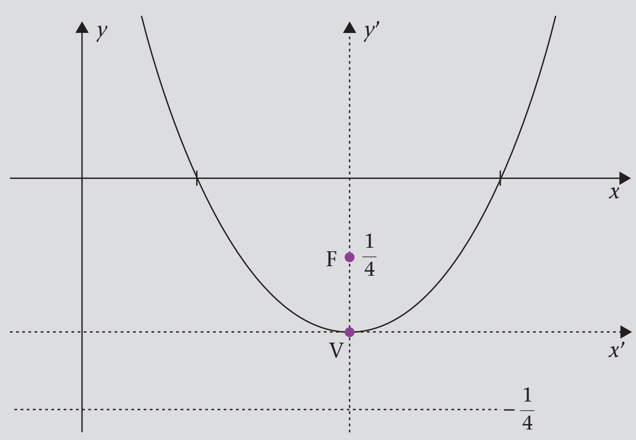
Note que a equação dada não está na forma padrão $x^2 = 2py$. Por outro lado, completando quadrados, temos:

$y = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 3$
$y = (x - 2)^2 - 1$

$y + 1 = (x - 2)^2$

Fazendo $y' = y + 1$ e $x' = x - 2$, vem $y' = x'^2$,

que é uma parábola de parâmetro $p = \frac{1}{2}$ no sitema $x'y'$:



No sistema $x'y'$, o vértice da parábola é (0 , 0), o foco é $F\left(0,\ \frac{p}{2}\right) = \left(0,\ \frac{1}{4}\right)$ e a diretriz é $y' = -\frac{1}{4}$.

Voltando para o sistema xy:

$$\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

Então $F\left(0+2,\ \frac{1}{4}-1\right) = F\left(2,\ -\frac{3}{4}\right)$ e $y = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$.

Resposta: O foco é $F\left(2,\ -\frac{3}{4}\right)$, a diretriz é $y = -\frac{5}{4}$ e o parâmetro ainda é $p = \frac{1}{2}$.

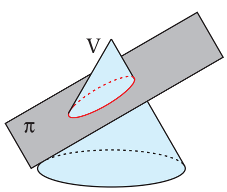
3.6 – Secções cônicas

Quando um plano π intersecta uma superfície cônica circular, a intersecção é uma **secção cônica**.

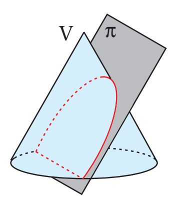
Se o plano não passa pelo vértice do cone, a secção será uma elipse, parábola ou hipérbole, dependendo do ângulo α que o plano π forma com a base do cone:

NOTA

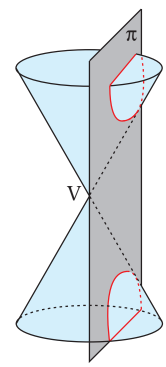
Se $\alpha = 0$, a secção cônica é uma circunferência.



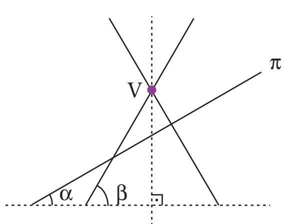
elipse



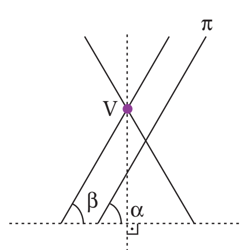
parábola



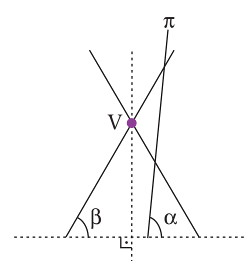
hipérbole



$0 < \alpha < \beta$

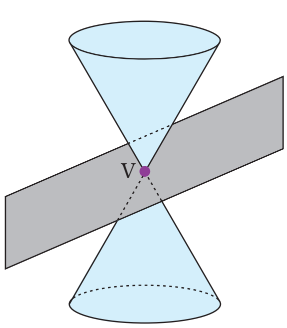


$\alpha = \beta$

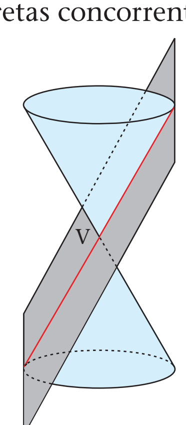


$\alpha > \beta$

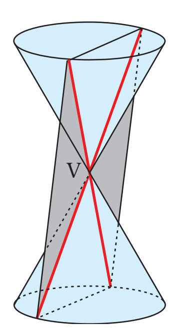
Se o plano passa pelo vértice, a secção será uma cônica degenerada, que pode ser um ponto, uma reta ou duas retas concorrentes.



ponto
$0 < \alpha < \beta$



reta
$\alpha = \beta$



duas retas concorrentes
$\alpha > \beta$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Um ponto P se desloca de tal forma que a qualquer momento a razão de suas distâncias à reta $x = -2$ e ao ponto (2, 0) é igual a 1.
Qual a equação da curva descrita por P?

2 Determine a equação da parábola de vértice na origem e:

a) foco (4, 0).

b) foco (0, –7).

c) diretriz $x = -3$.

d) diretriz $y = -5$.

e) parâmetro igual a 3, simétrica em relação a Ox, não possuindo pontos no 1º quadrante.

f) simétrica em relação a Oy, passando pelo ponto (–3, 2).

g) simétrica em relação a Ox, passando pelo ponto (–2, 4).

h) passando pelos pontos P_1 (–3, –2) e P_2 (3, –2).

i) passando pelos pontos A(3, 2) e B(3, –2).

j) passando por um ponto P(8, y), cujo raio mede 10.

3 Duas parábolas, de vértices na origem e cujos eixos coincidem com os eixos coordenados, interceptam-se no ponto (2, –3). Determine as equações das duas curvas.

4 Determine as coordenadas do foco, o parâmetro e a equação da diretriz das seguintes parábolas:

a) $y^2 = 20x$

b) $y^2 = -24x$

c) $x^2 = \frac{6}{5}y$

d) $x^2 = -36y$

e) $2x^2 - 3y = 0$

f) $4y^2 + 21x = 0$

5 Calcule o parâmetro da parábola cujo eixo é Ox e que passa pela origem e pelo ponto (6, 6).

6 O que representa a equação $(y - x)(y^2 - 4x) = 0$?

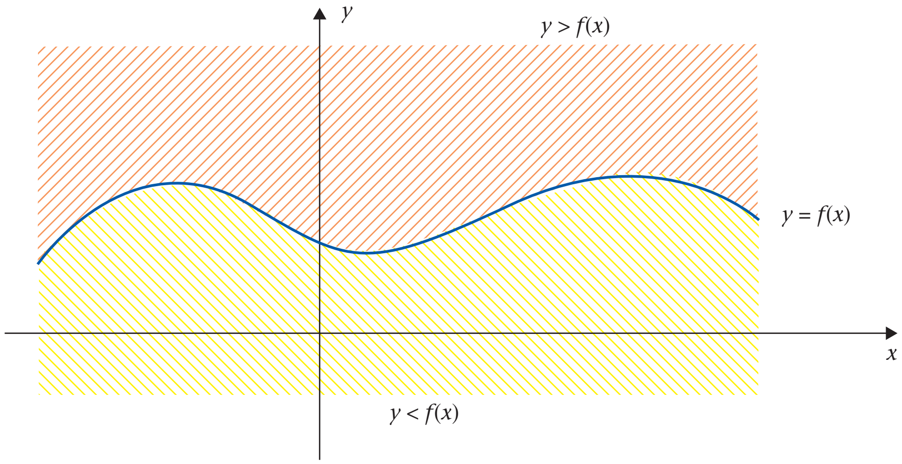
3.7 – Desigualdades no $\mathbb{R}^2$

Uma desigualdade com as variáveis x e y pode ser usada para representar uma região do plano. Para identificá-la, comece identificando o conjunto representado pela **igualdade** correspondente.

Se for possível isolar uma das variáveis, há quatro casos a serem considerados:

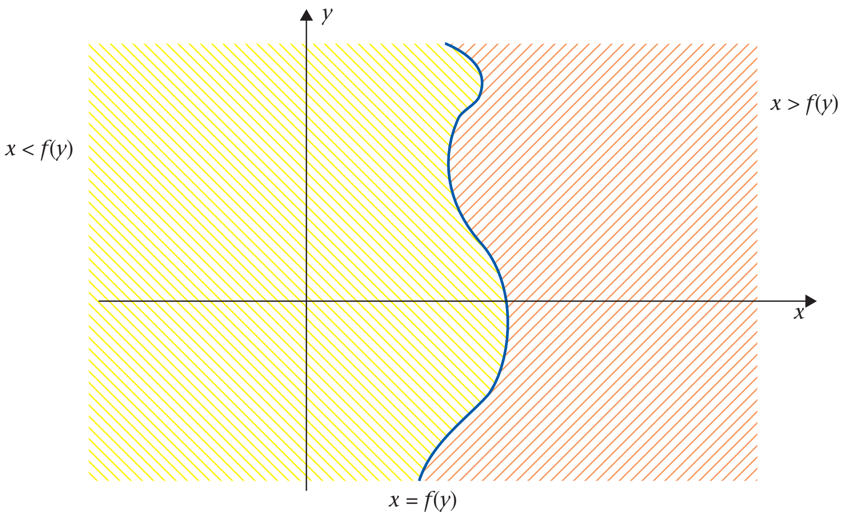
1) $y > f(x) \Rightarrow$ região acima de $y = f(x)$

2) $y < f(x) \Rightarrow$ região abaixo de $y = f(x)$



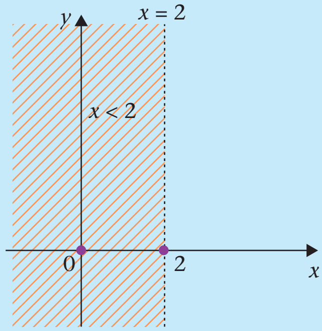
3) $x > f(y) \Rightarrow$ região à direita de $x = f(y)$

4) $x < f(y) \Rightarrow$ região à esquerda de $x = f(y)$

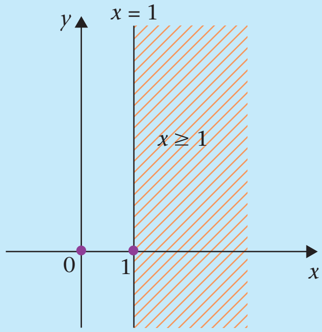


Exemplos:

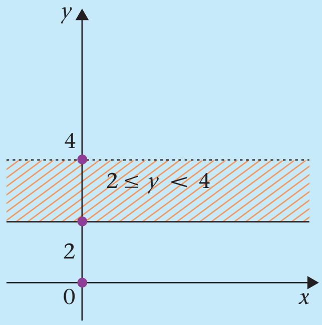
i)



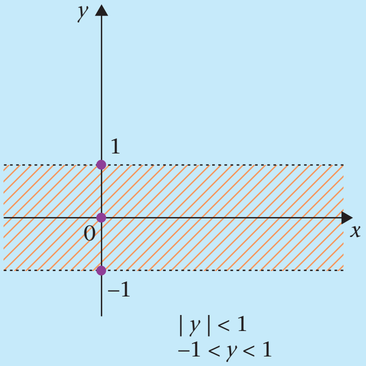
ii)



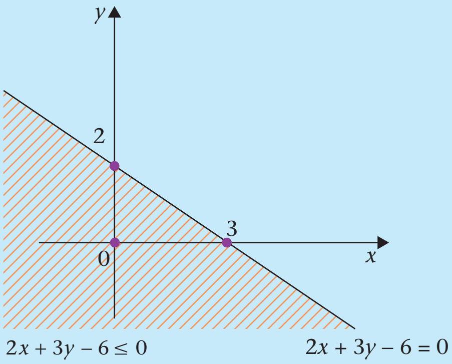
iii)



iv)

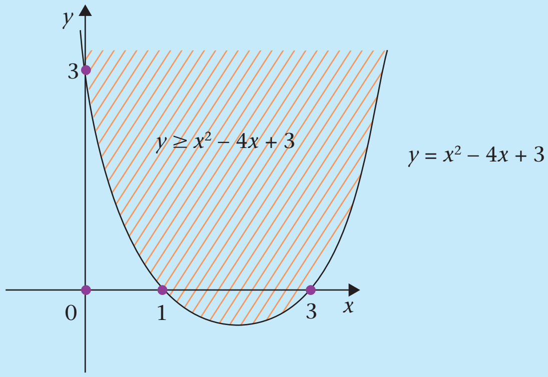


v)

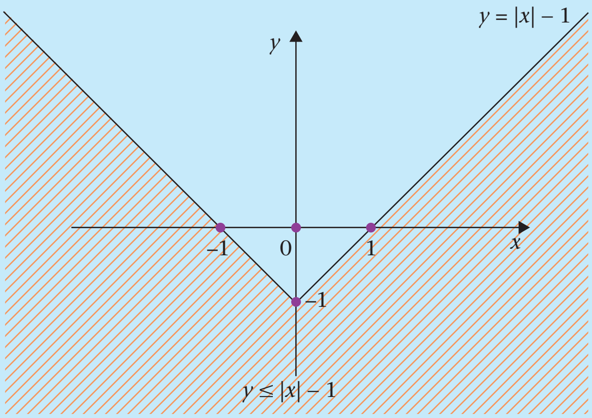


$y \leq -\frac{2}{3}x + 2$

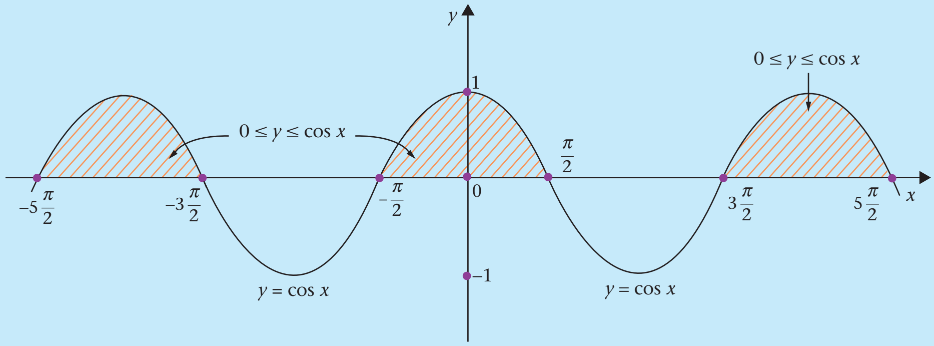
vi)


y
3
$y \geq x^2 - 4x + 3$
$y = x^2 - 4x + 3$
0
1
3
x

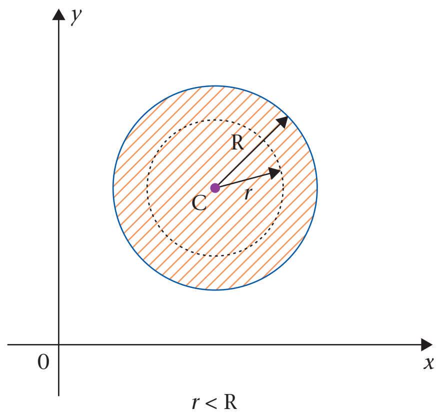
vii)


$y = |x| - 1$
y
–1
0
1
x
–1
$y \leq |x| - 1$

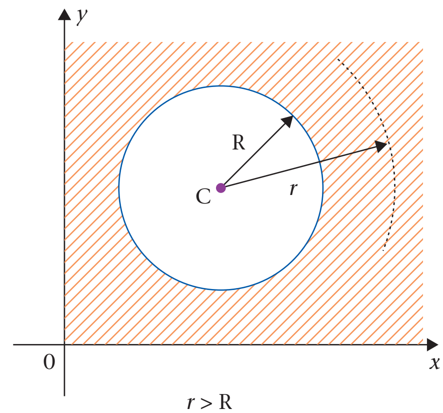
viii)


y
$0 \leq y \leq \cos x$
1
$0 \leq y \leq \cos x$
$\frac{\pi}{2}$
$-5\frac{\pi}{2}$
$-3\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$3\frac{\pi}{2}$
$5\frac{\pi}{2}$
x
–1
$y = \cos x$
$y = \cos x$

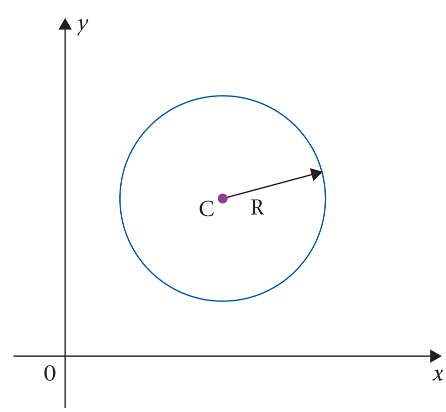
No caso de desigualdades provenientes da equação da circunferência, é mais fácil analisar as seguintes situações:



$r < R$
$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 < R^2$



$r > R$
$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 > R^2$



$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$

1) Se $r < R$, temos os pontos internos ao círculo $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$. (disco aberto)

2) Se $r > R$, temos os pontos externos ao círculo $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$. (todos os pontos do plano $\mathbb{R}^2$ exceto o disco fechado)

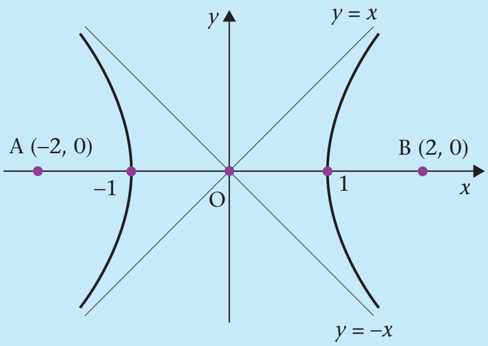
NOTA
Este método funciona para funções ditas **contínuas**, que incluem todas as que vimos neste capítulo.

Em geral, a equação $f(x, y) = 0$ usualmente define uma curva que separa o plano em regiões. Para identificar quais regiões satisfazem $f(x, y) > 0$ e quais regiões satisfazem $f(x, y) < 0$, basta testar um ponto de cada região.

Exemplo:

Identificar a região S descrita pela equação $y^2 - x^2 \geq 1$.

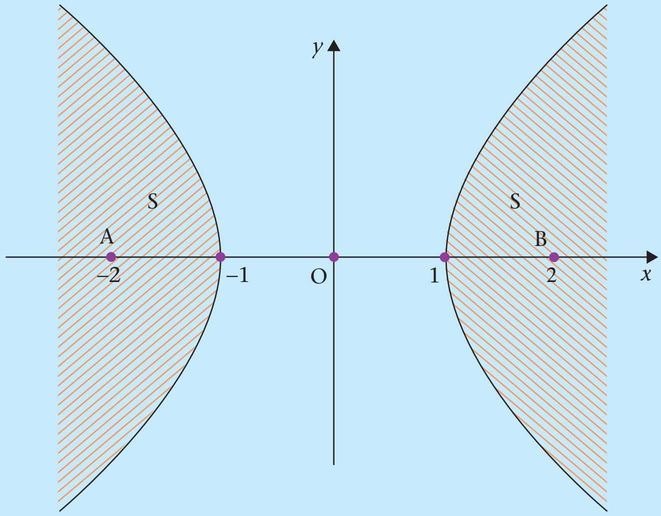
Sabemos que $y^2 - x^2 = 1$ é uma hipérbole equilátera, que divide o plano em três regiões:



Escolhendo os pontos A(–2, 0), O(0, 0) e B(2, 0), um em cada região, e testando-os, temos:

A: $y^2 - x^2 = 4 - 0 = 4 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad A \in S$
O: $y^2 - x^2 = 0 - 0 = 0 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad O \notin S$
B: $y^2 - x^2 = 4 - 0 = 4 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad B \in S$

Assim, S é a região esboçada abaixo.

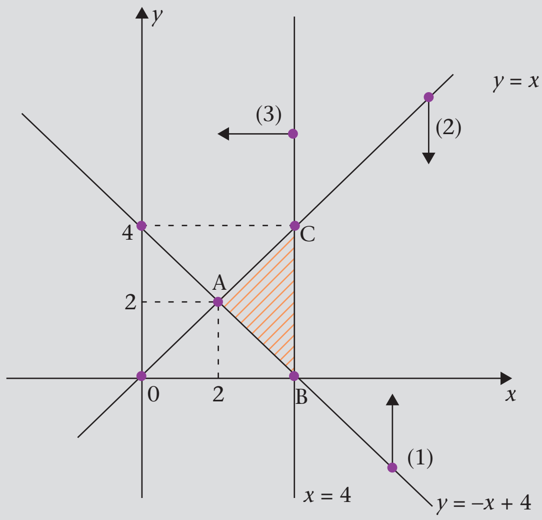


Exercícios resolvidos:

1) Calcule a área da região definida pelo sistema $\begin{cases} y \geq -x+4 & (1) \\ y \leq x & (2) \\ x \leq 4 & (3) \end{cases}$

$A = (1) \cap (2) = (2,\ 2)$
$B = (1) \cap (3) = (4,\ 0)$
$C = (2) \cap (3) = (4,\ 4)$

Solução:



$$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2}|\Delta|$$

$$S = \frac{1}{2}|0+16+8-8-0-8|$$

$$S = 4$$

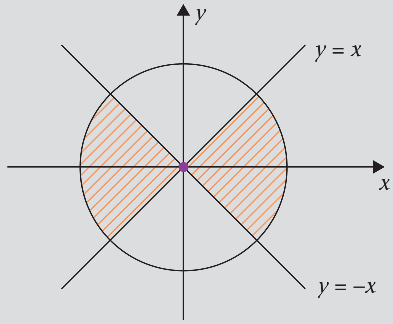
2) O que representa a inequação $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 < 0$?

Solução:

A fronteira é a circunferência $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$.
Como $(x-1)^2 + (y+2)^2 < 9$, temos um disco aberto de centro $(1, -2)$ e raio 3.

3) Calcule a área da região representada pelas inequações: $\begin{cases} x^2+y^2-16 \leq 0 \\ x^2-y^2 \geq 0 \end{cases}$

Solução:



$x^2+y^2 \leq 16$ é um disco fechado de centro na origem e raio 4.
$x^2-y^2 \geq 0$ representa dois ângulos retos opostos pelo vértice e de lados sobre as diagonais do plano $y=x$ e $y=-x$. Temos $y^2 \leq x^2 \Rightarrow \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2}$,

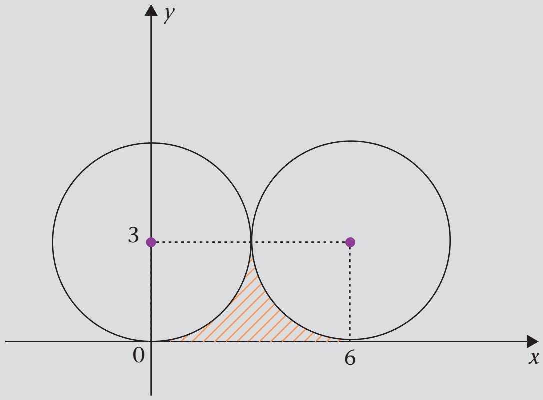
ou seja, $|y| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq y \leq |x| \Rightarrow \begin{cases} y \geq -|x| \\ y \leq |x| \end{cases}$

A intersecção será a união de dois setores circulares de 90° congruentes, ou seja, um semicírculo de raio 4. A área será:

$$S=\frac{1}{2}\pi R^2=\frac{1}{2}\pi \cdot 16=8\pi$$

4) Calcule a área da região definida pelo sistema: $\begin{cases} y \geq 0 \\ x^2+y^2-6y \geq 0 \\ x^2+y^2-12x-6y+36 \geq 0 \end{cases}$

Solução:



Solução:

$y \geq 0$ representa os pontos acima do eixo Ox.

$x^2 + y^2 - 6y \geq 0$ representa os pontos fora do círculo de centro (0, 3) e raio 3.

$x^2 + y^2 - 12x - 6y + 36 \geq 0$ representa os pontos fora do círculo de centro (6, 3) e raio 3.

A área pedida será a de um retângulo de base 6 e altura 3, menos meio círculo de raio 3. Logo:

$$S = 6 \cdot 3 - \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = 9\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$$

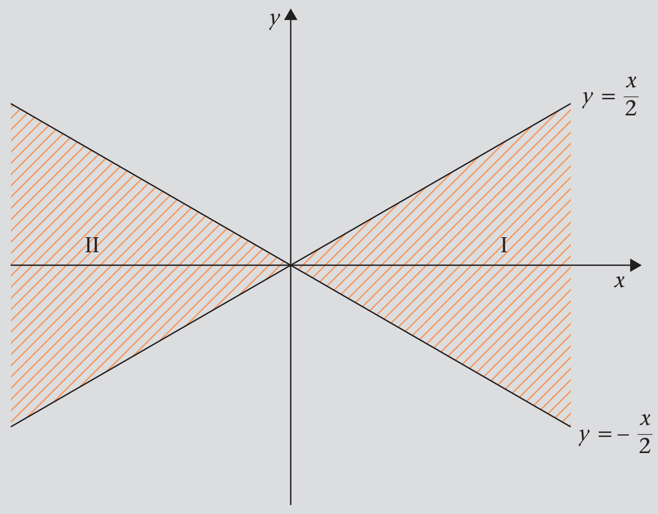
5) Esboce o gráfico da região representada por:
$x^2 - 4y^2 \geq 0$

Solução:

Fatorando o 1º membro, temos:
$(x - 2y) \cdot (x + 2y) \geq 0$

Caso I: $x - 2y \geq 0$ e $x + 2y \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{x}{2}$ e $y \geq -\frac{x}{2}$

Caso II: $x - 2y \leq 0$ e $x + 2y \leq 0 \Rightarrow y \geq \frac{x}{2}$ e $y \leq -\frac{x}{2}$



6) (FGV-SP) Para manter a saúde de seus filhos, uma mulher dá a eles diariamente dois tipos de biscoitos, I e II. Esses biscoitos apresentam na sua composição três tipos de nutrientes: cálcio, proteínas e calorias. A tabela abaixo indica as quantidades desses nutrientes por unidade, o mínimo diário necessário e o custo unitário desses biscoitos.

	Tipo I	**Tipo II**	**Mínimo diário necessário**
Cálcio	10 mg	4 mg	20 mg
Proteínas	5 mg	5 mg	20 mg
Calorias	2 kcal	6 kcal	12 kcal
Preço	R$ 0,60	R$ 1,00	———

Considere x o número de biscoitos do tipo I e y o número de biscoitos do tipo II consumidos por uma criança.

a) Usando x e y, escreva as desigualdades que garantam a quantidade mínima necessária de cada nutriente.

b) Esboce, no plano cartesiano, a região R representada pelas desigualdades do item anterior.

c) Determine os valores de x e y que cumprem os mínimos diários necessários de nutrientes, com o menor custo possível. Que custo é esse?

Solução:

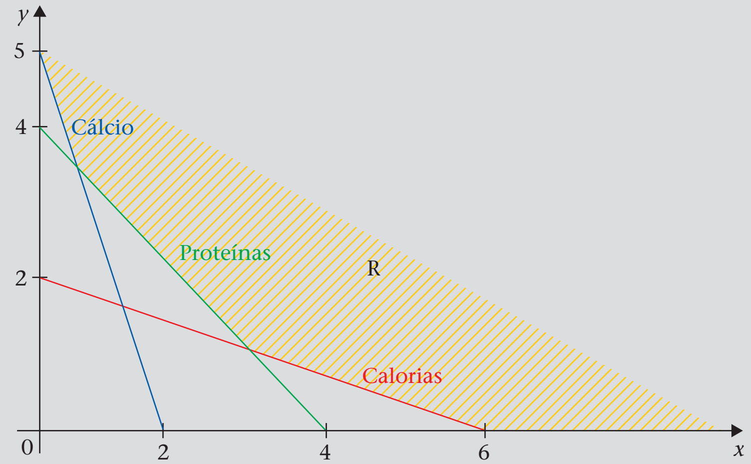
Só faz sentido considerar: $x \geq 0$ e $y \geq 0$ (primeiro quadrante).

a) Quantidade de cálcio: $10x+4y \geq 20 \iff y \geq 5 - \frac{5}{2}x$

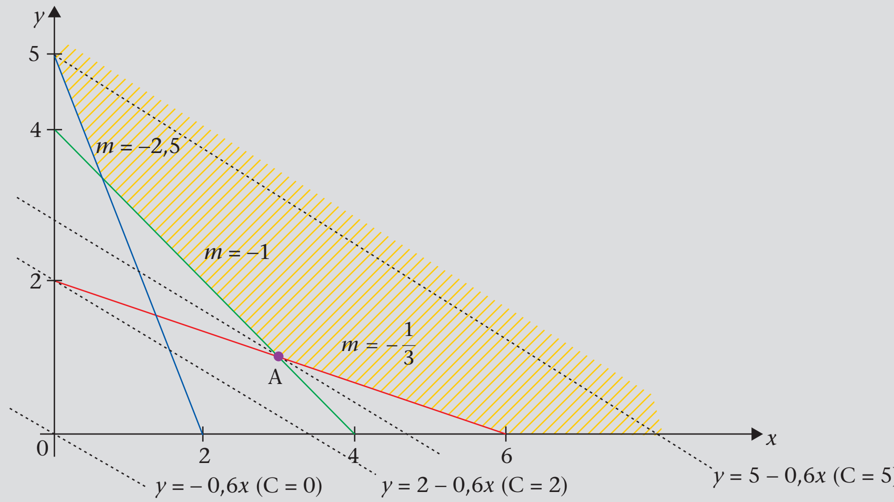
Quantidade de proteínas: $5x+5y \geq 20 \iff y \geq 4 - x$

Quantidade de calorias: $2x+6y \geq 12 \iff y \geq 2 - \frac{x}{3}$

b)



c) O custo é C = 0,6x + y. Para C fixo, isto representa a reta y = C – 0,6x, de coeficiente angular –0,6. À medida que C varia, a reta desliza:



NOTA
Escolhemos o ponto A, pois o coeficiente angular –0,6 está entre $-\frac{1}{3}$ e -1.

Note que, para custos pequenos, não há pontos da região R na reta. O menor custo possível é aquele para o qual a reta passa pelo ponto A, intersecção das retas:

$$\begin{cases} 5x+5y=20 \\ 2x+6y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ x+3y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

<u>Resposta:</u> Assim, a opção de menor custo é 3 biscoitos do tipo I e 1 biscoito do tipo II, com custo C = 0,6x + y = 1,8 + 1 = R$ 2,80 (por criança).

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Represente geometricamente as desigualdades.

a) $x < 3$

b) $x \geq 2$

c) $3 \leq y < 5$

d) $|y| < 2$

e) $4x + 6y - 12 \leq 0$

f) $|y - x| \leq 1$

g) $\begin{cases} y \leq 2x + 2 \\ y \geq -\dfrac{3x}{2} + 3 \end{cases}$

2 Represente graficamente o sistema: $\begin{cases} x + 2y \geq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

3 (Cesgranrio-RJ) A região hachurada da figura é descrita analiticamente por:

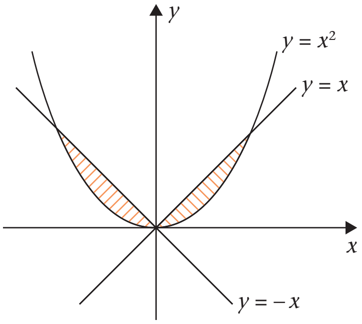
(A) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \text{ e } y \leq |x|\}$

(B) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq x^2 \text{ e } |y| \leq x\}$

(C) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x \text{ e } y + x \geq 0\}$

(D) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2 \text{ e } y \leq x\}$

(E) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$



EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (PUC-SP) A reta $x + y = 1$ no plano xy passa pelos pontos:

(A) $(5, -4)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(B) $(0, 0)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(C) $(0, 0)$ e $(1, 1)$

(D) $(1, 0)$ e $(1, 1)$

(E) $(5, -4)$ e $(4, -5)$

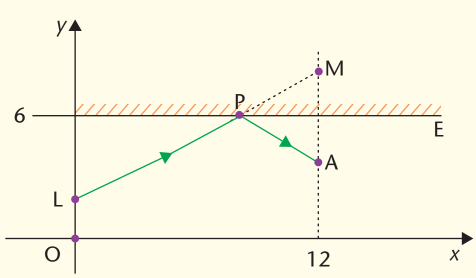
2 (PUC-SP) O valor de x para que os pontos $(1, 3)$, $(-2, 4)$ e $(x, 0)$ do plano sejam colineares é:

(A) 8 (B) 9 (C) 11 (D) 10 (E) 5

3 (PUC-SP) Os pontos $(0, 8)$, $(3, 1)$ e $(1, y)$ do plano são colineares. O valor de y é igual a:

(A) 5 (B) 6 (C) $\frac{17}{3}$ (D) $\frac{11}{2}$ (E) 5,3

4 (IBMEC-RJ) Com a finalidade de estudar as propriedades da reflexão da luz, um estudante representa seus elementos em um par de eixos coordenados.
Assim, um espelho E é representado pela reta de equação $y = 6$; a fonte luminosa é um ponto L, de coordenadas $(0, 2)$; a luz, emitida a partir de L, deve iluminar um ponto A, de coordenadas $(12, 4)$.



Para que isso aconteça, a luz deve ser direcionada para um ponto M, simétrico de A, em relação ao espelho, de modo a atingir o espelho no ponto P.
Determinar:

a) as coordenadas do ponto M;

b) as coordenadas do ponto P.

5 (PUC-SP) A distância do ponto $P = (1, 1)$ à reta de equação paramétrica $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \end{cases}$, é:

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (E) $\frac{\sqrt{2}}{5}$

6 (FCC-SP) Qual é o simétrico do ponto $(-3, 1)$ em relação à reta $x - 2y = 0$?

(A) $(-1, -3)$

(B) $(-1, 3)$

(C) $(1, 3)$

(D) $(-3, -1)$

(E) $(3, -1)$

7 (Mack-SP) Os pontos pertencentes à reta $y - 5 = 0$ e que distam 2 unidades da reta $4x - 3y + 1 = 0$ são:

(A) $(6, 5)$ e $(3, 5)$

(B) $(1, 5)$ e $(6, 5)$

(C) $(3, 1)$ e $(1, 5)$

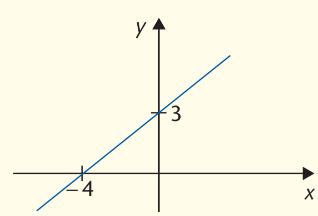
(D) $(6, 5)$ e $(-3, 5)$

(E) n.d.a.

8 (FCC-SP) O coeficiente angular da reta de equações $x = 2t - 1$ e $y = t + 2$, $t \in \mathbb{R}$, é:

(A) -2 (B) -1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) 2

9 (Unificado-RJ) A equação da reta mostrada na figura abaixo é:



(A) $3x + 4y - 12 = 0$

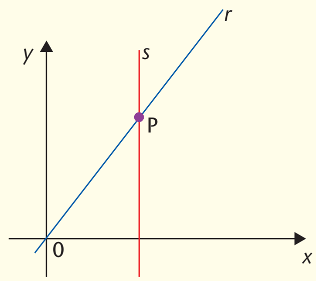
(B) $3x - 4y + 12 = 0$

(C) $4x + 3y + 12 = 0$

(D) $4x - 3y - 12 = 0$

(E) $4x - 3y + 12 = 0$

10 (UFF-RJ) Na figura a seguir estão representadas as retas r e s.



Sabendo que a equação da reta s é $x = 3$ e que $\overline{OP}$ mede 5 cm, a equação de r é:

(A) $y = \frac{3}{4}x$

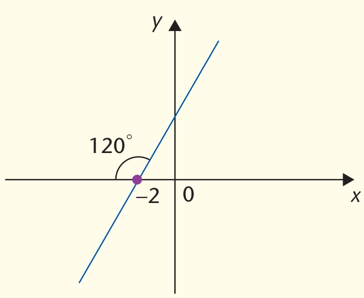
(B) $y = \frac{4}{3}x$

(C) $y = \frac{5}{3}x$

(D) $y = 3x$

(E) $y = 5x$

11 (Unirio-RJ)



A equação geral da reta representada é:

(A) $3x - \sqrt{3}y + 6 = 0$

(B) $3x + \sqrt{3}y + 6 = 0$

(C) $\sqrt{3}x - y - 2 = 0$

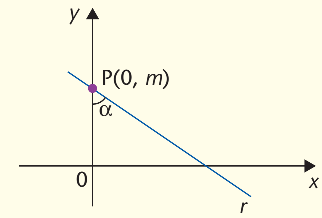
(D) $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$

(E) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2)$

12 (UFF-RJ) A reta r contém o ponto P(–5, 0), tem coeficiente angular negativo e forma, com os eixos coordenados, um triângulo de área igual a 20.

Determine a equação de r.

13 (UFF-RJ) A figura representa a reta r que intercepta o eixo y no ponto P(0, m), formando com esse eixo o ângulo α.



A equação de r é dada por:

(A) $y = (\text{cotg}\,\alpha)x + \frac{1}{m}$

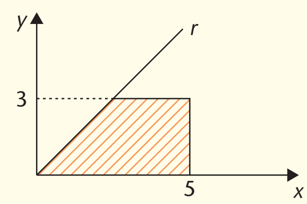
(B) $y = -(\text{cotg}\,\alpha)x + m$

(C) $y = (\text{tg}\,\alpha)x + m$

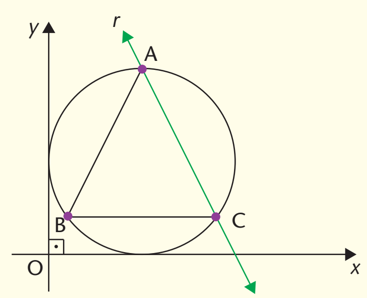
(D) $y = (\text{cotg}\,\alpha)x + m$

(E) $y = (\text{tg}\,\alpha)x + \frac{1}{m}$

14 Se o trapézio da figura abaixo tem área 9, determine o coeficiente angular da reta r.

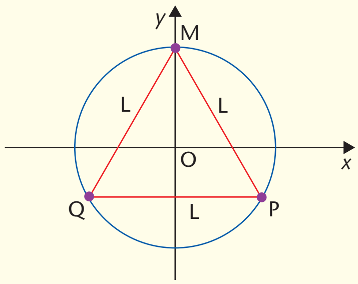


15 (UFF-RJ) Na figura abaixo, o triângulo ABC é equilátero, o lado $\overline{BC}$ é paralelo ao eixo x e a circunferência, tangente aos eixos coordenados, tem raio 1.



Determine a equação da reta r que contém o lado $\overline{AC}$.

16 (UFF-RJ) Considere o triângulo equilátero MPQ, de lado L, inscrito na circunferência centrada na origem do sistema de eixos coordenados, conforme a figura abaixo:



A equação da reta que contém o lado $\overline{MP}$ é:

(A) $y + x = L\sqrt{3}$

(B) $y - \sqrt{3}x = L$

(C) $\sqrt{3}y + 3x = L$

(D) $\sqrt{3}y - 3x = L$

(E) $2\sqrt{3}y + 6x = L$

17 (PUC-RJ) As retas dadas pelas equações $x + 3y = 3$ e $2x + y = 1$ se interceptam:

(A) em nenhum ponto.

(B) num ponto da reta $x = 0$.

(C) num ponto da reta $y = 0$.

(D) no ponto (3, 0).

(E) no ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

18 (UFF-RJ) Uma reta r é paralela ao eixo x e contém a intersecção das parábolas $y = (x - 1)^2$ e $y = (x - 5)^2$.
A equação de r é:

(A) $x = 3$

(B) $y = 4$

(C) $y = 3x$

(D) $x = 4y$

(E) $y = \frac{x}{3}$

19 (PUC-SP) O ponto de intersecção entre a reta que passa por (4, 4) e (2, 5) e a reta que passa por (2, 7) e (4, 3) é:

(A) (3, 5)

(B) (4, 4)

(C) (3, 4)

(D) $\left(\frac{7}{2}, 4\right)$

(E) $\left(\frac{10}{3}, \frac{13}{3}\right)$

20 (PUC-SP) Seja r_1 a reta que passa pelos pontos cujas coordenadas são $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ e (0, 1) e seja r_2 a reta que passa pelos pontos $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ e $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. As coordenadas do ponto de intersecção de r_1 e r_2 são:

(A) $\left(\frac{-1}{5}, \frac{11}{10}\right)$

(B) $\left(\frac{1}{5}, \frac{9}{10}\right)$

(C) $\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{6}\right)$

(D) $\left(\frac{-1}{3}, \frac{7}{6}\right)$

(E) nenhuma das respostas anteriores.

21 (Unirio-RJ) Considere um retângulo cujas equações das retas-suporte de dois de seus lados e de uma de suas diagonais são, respectivamente, $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ e $7x + y - 15 = 0$.
Determine:

a) as coordenadas dos vértices do retângulo que estão sobre esta diagonal;

b) a equação da reta-suporte da outra diagonal.

22 (PUC-SP) Num sistema de eixos perpendiculares, seja D a região limitada pelas retas $y = x\sqrt{a}$, $y = x\sqrt{a} + a$, $x = 0$ e $x = \sqrt{a}$, sendo a positivo.
Calcule a área de D.

23 (UFMT) Num determinado instante t (em minutos), as posições de duas partículas P e Q são dadas, respectivamente, pelas equações paramétricas das retas $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -3 + 6t \end{cases}$. A partir das informações dadas, julgue os itens.

a) As trajetórias se interceptam no ponto (5, 3).

b) As partículas se chocam no ponto (5, 3).

c) A partícula Q passa, em (5, 3), um minuto depois que a partícula P.

24 (UFF-RJ) Duas retas perpendiculares interceptam-se no ponto (2, 3). Se o triângulo formado por essas retas e o eixo Ox é isósceles, quais são as equações das retas?

25 (IBMEC-RJ) As retas $x + y = 2$ e $x + y = 4$ determinam com os eixos um trapézio de área igual a:

(A) 12 (B) 10 (C) 9 (D) 8 (E) 6

26 (UEL-PR) A trajetória de um móvel no plano cartesiano pode ser descrita, em função do tempo t, pelas equações $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \end{cases}$. Essa trajetória determina uma reta:

(A) que contém os pontos (3, 9) e (–2, 6).

(B) paralela à reta de equação $6x - 2y - 1 = 0$.

(C) perpendicular à reta de equação $3x - y + 1 = 0$.

(D) que contém os pontos (1, 3) e (7, 3).

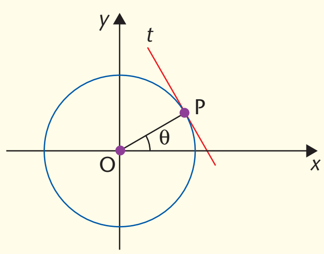
(E) perpendicular à reta de equação $5x - y = 0$.

27 (FGV-SP) No plano cartesiano, o triângulo de vértices A = (1, –2), B = (*m*, 4) e C = (0, 6) é retângulo em A. O valor de *m* é igual a:

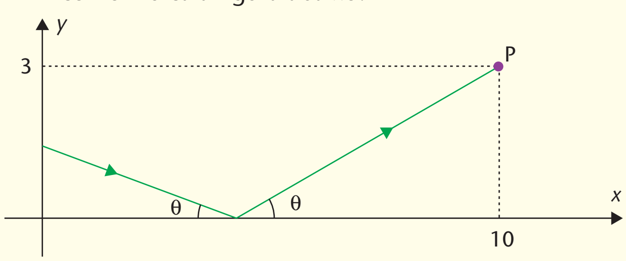
(A) 47 (B) 48 (C) 49 (D) 50 (E) 51

28 A equação da reta *t*, tangente à circunferência de raio *r* no ponto P, conforme figura abaixo, é dada por:

(A) $x \text{ sen } \theta + y \cos \theta = r$
(B) $x \text{ sen } \theta - y \cos \theta = -r$
(C) $x \cos \theta - y \text{ sen } \theta = -r$
(D) $x \cos \theta + y \text{ sen } \theta = r$
(E) $x \cos \theta + y \text{ sen } \theta = -r$



29 (Uerj) Um raio de luz incide em um espelho plano, como indica a figura abaixo:



O espelho perpendicular ao eixo *y* contém o eixo *x*. A equação da reta suporte desse raio é $y = -\frac{1}{2}x + k$. A equação da reta suporte do raio refletido é $y = ax + b$. Portanto $a + b$ é igual a:

(A) $-\frac{3}{2}$ (B) –2 (C) –1 (D) $-\frac{1}{2}$

30 (UFF-RJ) Com relação ao triângulo ABC, sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo das abscissas;
- o ponto B pertence ao eixo das ordenadas;
- a equação da reta que contém os pontos A e C é $x + y + 5 = 0$;
- a equação da reta que contém os pontos B e C é $2x - y - 2 = 0$.

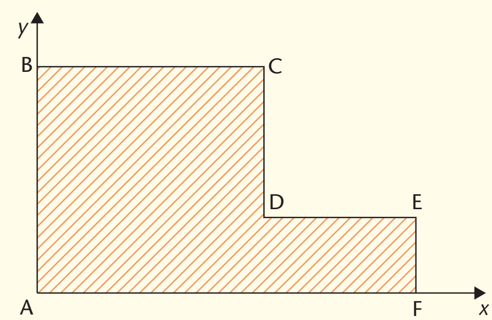
Determine as coordenadas dos pontos A, B e C.

31 (UFRJ) Existe um único $b \in \mathbb{R}$ para o qual a reta de equação $y = 2x + b$ divide o triângulo de vértices A = (0, 0), B = (1, 0) e C = (0, 1) em dois polígonos de áreas iguais. Determine *b*.

32 (FEI-SP) A área *a* do triângulo cujos vértices são os pontos A = (0, 0), B = (0, 2) e C = (*x*, 2) é representada pela expressão:

(A) $a = \frac{|x|}{2}$
(B) $a = \frac{2}{|x|}$
(C) $a = |x|$
(D) $a = 2x$
(E) $a = x^2$

33 (UFRJ) Considere uma peça metálica cuja forma é representada pela figura a seguir, com vértices nos pontos A = (0, 0), B = (0, 3), C = (3, 3), D = (3, 1), E = (5, 1) e F = (5, 0).



a) A reta AD divide a peça numa razão $k = \frac{\text{Área (ADEF)}}{\text{Área (ABCD)}}$.
Determine o valor de *k*.

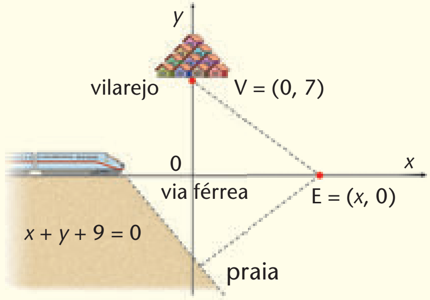
b) Uma reta *r*, passando pelo ponto A, divide a peça metálica em duas partes de mesma área.
Determine a equação da reta *r*.

34 (PUC-SP) As retas r_1 e r_2 têm coeficientes angulares respectivamente iguais a 2 e 3. Uma das bissetrizes de r_1 e r_2 tem coeficiente angular igual a:

(A) $\sqrt{6}$
(B) $\sqrt{2}+1$
(C) 2,5
(D) $\sqrt{3}+1$
(E) $\sqrt{10}-1$

35 (UnB-DF) Pretende-se construir uma estação em uma via férrea que passa entre um vilarejo e uma praia. Para evitar animosidades entre os habitantes das duas localidades, a estação deve ser localizada de modo que esteja equidistante de ambas, conforme ilustra a figura. Equacionando o problema, introduz-se um sistema

de coordenadas cartesianas xOy, em que o vilarejo corresponde ao ponto V = (0, 7), a praia é aproximada pela reta de equação $x + y + 9 = 0$ – tracejada na figura –, a linha férrea corresponde ao eixo das abscissas e a localização da estação, a determinar, ao ponto E = (x_0, 0).



Com base nessas suposições e sabendo que a distância do ponto E à praia é dada por $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |x_0 + 9|$, julgue os itens seguintes:

a) A reta que passa pelo ponto E e é perpendicular à praia tem declividade igual a 1.

b) Há duas localizações possíveis para a construção da estação.

c) Uma estrada em linha reta ligando a estação ao vilarejo seria paralela à praia.

36 Calculando-se a distância do ponto (–2, 7) à reta $8x + 6y - 6 = 0$, encontraremos:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

37 O círculo que tem centro no ponto (3, 4) e é tangente à reta $x + 2y = 6$ tem raio igual a:

(A) $\sqrt{5}$
(B) $2\sqrt{5}$
(C) $3\sqrt{5}$
(D) $4\sqrt{5}$
(E) $5\sqrt{5}$

38 A área do círculo com centro em (3, 4) e que tangencia a reta $y = \frac{x}{2}$ é:

(A) $\sqrt{5}\pi$
(B) 4π
(C) 6π
(D) 5π
(E) 2π

39 (Cesgranrio-RJ) O lugar geométrico dos pontos de coordenadas (x, y) do $\mathbb{R}^2$, tais que $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$, é uma:

(A) circunferência situada no 4º quadrante.

(B) circunferência situada no 1º quadrante.

(C) circunferência que contém a origem.

(D) parábola.

(E) elipse centrada na origem.

40 No $\mathbb{R}^2$, qual é a equação do círculo de centro (3, –2) e tangente à reta $x + 2y = 4$?

41 Qual dos itens abaixo corresponde à equação da circunferência de centro (3, 2) e tangente à reta $3x - 4y + 9 = 0$?

(A) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$

(B) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 9 = 0$

(D) $x^2 + y^2 = 13$

(E) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$

42 (Cesgranrio-RJ) O raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 + 6x = 0$ é:

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5 (E) 6

43 (Mack-SP) O centro da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ é o ponto:

(A) (–3, 0)
(B) (0, 3)
(C) (6, 0)
(D) (3, 0)
(E) (0, 0)

44 Um círculo tem centro na reta $x + y = 0$ e é tangente à reta $x + y - 4 = 0$. Seu raio mede:

(A) 2
(B) $\sqrt{2}$
(C) $2\sqrt{2}$
(D) $3\sqrt{2}$
(E) $4\sqrt{2}$

45 Calcule o raio do círculo simultaneamente tangente às retas $x + y - 1 = 0$ e $x + y - 5 = 0$.

(A) $\sqrt{2}$
(B) $2\sqrt{2}$
(C) $3\sqrt{2}$
(D) $4\sqrt{2}$
(E) $5\sqrt{2}$

46 Determine a equação de um círculo cujo diâmetro é um segmento de extremidades P = (2, 0) e Q = (–2, 2).

47 As retas tangentes ao círculo $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ e que são paralelas ao eixo dos x têm equações:

(A) $y = 3$ ou $y = 1$

(B) $y = 5$ ou $y = 1$

(C) $y = 5$ ou $y = -1$

(D) $y = 3$ ou $y = -1$

(E) $y = -5$ ou $y = 1$

48 (Cesgranrio-RJ) Seja C o círculo de centro (–1, –1) e raio 1. O ponto C que está à maior distância da origem é:

(A) $\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(B) $\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(C) $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

(D) (–2, –2)

(E) (–2, –1)

49 (Cesgranrio-RJ) O círculo C tem centro na reta $y = x$ e somente o ponto $(0, 2\sqrt{2})$ em comum com a reta $y = x + 2\sqrt{2}$. Então, o raio de C é:

(A) $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

(B) $2\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{2}$

(D) 1

(E) 2

50 (Cesgranrio-RJ) O ponto (–1, –2) é um vértice do triângulo equilátero que tem um lado sobre a reta $x + 2y - 5 = 0$. O comprimento do lado do triângulo é:

(A) 4

(B) 5

(C) $2\sqrt{3}$

(D) $9\frac{\sqrt{5}}{4}$

(E) $4\frac{\sqrt{15}}{3}$

51 Calculando-se a medida da altura AH do triângulo ABC, onde A = (1, 1), B = (–1, –3) e C = (2, 7), encontramos:

(A) 2

(B) 7

(C) 4

(D) 5

(E) $\sqrt{3}$

52 Calculando-se a área do triângulo ABC, da questão anterior, encontramos:

(A) 20 (B) 10 (C) 15 (D) 5 (E) 25

53 O valor de k tal que o círculo $x^2 + y^2 - 2x - 4y + k = 0$ tenha raio igual a 3 é:

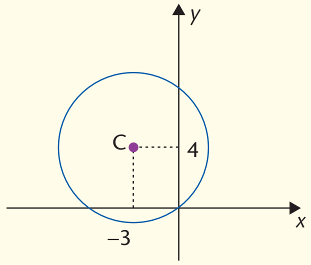
(A) 4 (B) 2 (C) –3 (D) –4 (E) 5

54 (FOC-SP) Determine b de modo que a reta $y - 2x - b = 0$ seja tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

55 (Unirio-RJ) A equação $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ é de uma circunferência cuja soma do raio e das coordenadas do centro é igual a:

(A) –2 (B) 3 (C) 5 (D) 8 (E) 15

56 (Unificado-RJ)



A equação da circunferência cuja representação cartesiana está indicada pela figura acima é:

(A) $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$

(B) $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$

(C) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

(D) $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$

(E) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

57 (Unificado-RJ) A equação da circunferência de raio 5, cujo centro é o ponto comum às retas $x - y + 1 = 2$ e $x + y - 1 = 2$ é:

(A) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

(B) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 20 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 20 = 0$

(D) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$

(E) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$

58 (Unirio-RJ) O menor valor inteiro de m para que a equação $x^2 + y^2 + 8x - 2y - m = 0$ represente uma circunferência é:

(A) –17 (B) –16 (C) 0 (D) 16 (E) 17

59 (AFA-SP) A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$ e centro C é tangente ao eixo das abscissas no ponto A e é tangente ao eixo das ordenadas no ponto B. A área do triângulo ABC vale:

(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16

60 (Cefet-RJ) A equação da reta que passa pelo centro da circunferência $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 16 = 0$ e pelo ponto P(0, 7) é:

(A) $2x + y = 7$

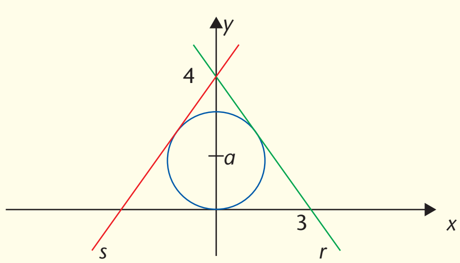
(B) $y = 2x + 7$

(C) $x + 2y = 14$

(D) $y = 3x - 21$

(E) $3x + 2y = 14$

61 (UFF-RJ) Na figura abaixo, a circunferência de centro $(0, a)$ é tangente às retas r e s e ao eixo x.



Determine a equação da circunferência.

62 Os pontos de intersecção do círculo $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ com a reta $y = x + 2$ são:

(A) (1, 3) e (–1, 1)

(B) (1, –1) e (3, 1)

(C) (3, 1) e (–1, 1)

(D) (1, 1) e (3, –1)

(E) (3, –1) e (–1, 1)

63 A reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 - 4x = 1$, pelo ponto P = (1, –2), tem por equação:

(A) $y = -3x + 1$

(B) $2x + y = 0$

(C) $3x - 3y + 2 = 0$

(D) $y = -x - 1$

(E) $x + 2y + 3 = 0$

64 Qual das circunferências abaixo tangencia ambos os eixos coordenados?

(A) $(x + a)^2 + (y + a)^2 = a^2$

(B) $x^2 + (y - a)^2 = a^2$

(C) $(x - a)^2 + y^2 = 4a^2$

(D) $x^2 - y^2 = a^2$

(E) $(x - a)^2 + (y + a)^2 = 4a^2$

65 Os pontos da circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$ que são equidistantes de Ox e Oy são em número de:

(A) três, sendo dois no primeiro quadrante.

(B) quatro, sendo um em cada quadrante.

(C) dois.

(D) quatro, sendo dois no 1º quadrante e dois no 2º.

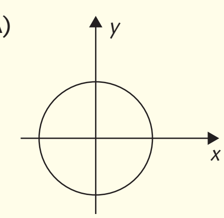
(E) três, sendo dois no 2º quadrante.

66 (Cesgranrio-RJ) Se (x, y) satisfaz a equação $3x + 4y = 12$, então o valor mínimo de $x^2 + y^2$ é:

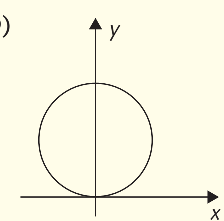
(A) 12 (B) $\frac{4}{3}$ (C) 3 (D) 4 (E) $\frac{12}{5}$

67 (Unirio-RJ) Dentre os gráficos abaixo, o que melhor representa a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4x$ é:

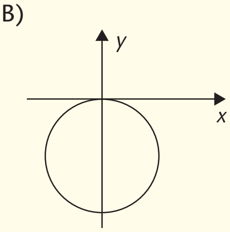
(A)



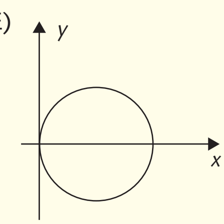
(D)



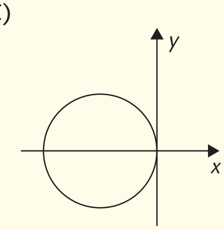
(B)



(E)



(C)



68 (Uerj) O MELHOR DE CALVIN / Bill Watterson

O Estado de São Paulo, 16/08/97

Considere os pontos A, B e C nas condições mencionadas na tirinha.

a) Se A, B e C pertencem a uma mesma reta, calcule a distância entre A e C quando:

- A está situado entre B e C;
- A está situado fora do segmento BC.

b) Se A, B e C estiverem no plano cartesiano, sendo A um ponto móvel, B um ponto do semieixo positivo das abscissas (x) e C a origem (0, 0), determine a equação da linha descrita pelo ponto A e identifique a curva correspondente.

69 (FGV-SP) Os números reais x e y satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 6x + 8y + 11$. O maior valor que x pode assumir é:

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

70 (PUC-RJ) Sejam R e S as regiões do plano delimitadas pelos círculos de equações $x^2 + y^2 = 1$ e $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, respectivamente. A área de $R \cap S$ é:

(A) $2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{3}\right)$

(D) $2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

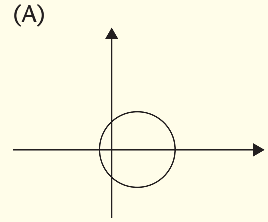
(E) $\frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{3}}{3}$

71 (Fuvest-SP) Considere o triângulo ABC, onde A = (0, 4), B = (2, 3) e C é um ponto qualquer da circunferência $x^2 + y^2 = 5$. A abscissa do ponto C que torna a área do triângulo ABC a menor possível é:

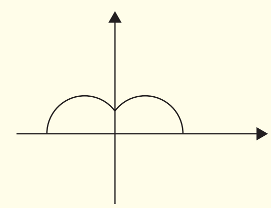
(A) –1 (B) $-\frac{3}{4}$ (C) 1 (D) $\frac{3}{4}$ (E) 2

72 (Unirio-RJ) A melhor representação de $x^2 + y^2 - 6\,|x| = 7$, no plano xOy, é:

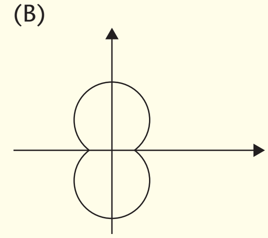
(A)



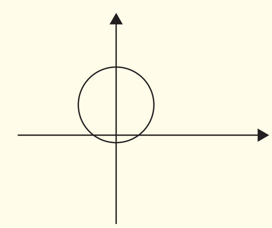
(D)



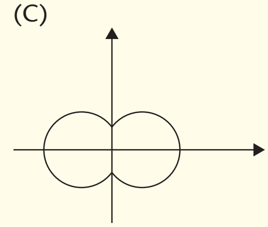
(B)



(E)



(C)



73 (UFF-RJ) Cada ponto P(x, y) de uma curva C no plano xy tem suas coordenadas descritas por:

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 2 + \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

a) Escreva uma equação de C relacionando, somente, as variáveis x e y.

b) Calcule o comprimento de C.

74 (Uerj) Um dado triângulo é formado pelas retas r, s e t, abaixo descritas.

r: $2x - 3y + 21 = 0$ s: $3x - 2y - 6 = 0$

t: $2x + 3y + 9 = 0$

Calcule, em relação a esse triângulo:

a) sua área;

b) a equação da circunferência circunscrita a ele.

75 (Unicamp-SP) Em um sistema de coordenadas ortogonais no plano são dados o ponto (5, –6) e o círculo $x^2 + y^2 = 25$. A partir do ponto (5, –6), traçam-se duas tangentes ao círculo. Faça uma figura representativa desta situação e calcule o comprimento da corda que une os pontos de tangência.

76 (Uerj) O ponto de coordenadas (0, 0) pertence às retas *r* e *s*, que são tangentes à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 12x - 16y + 75 = 0$.

a) Determine as coordenadas do centro e a medida do raio da circunferência.

b) Calcule a medida do menor ângulo formado entre *r* e *s*.

77 (UFRJ) Considere as retas paralelas de equações $y = x + 3$ e $y = x - 1$.
Determine a equação da circunferência tangente a essas retas e com centro no eixo *y*.

78 (Fuvest-SP) Para cada número real *m* seja $P_m = (x_m, y_m)$ o ponto de intersecção das retas $mx + y = 1$ e $x - my = 1$. Sabendo-se que todos os pontos P_m pertencem a uma mesma circunferência, qual é o centro dessa circunferência?

(A) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (C) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (E) (1, 1)

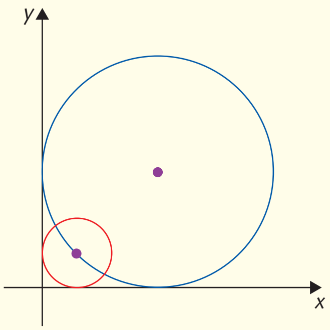
(B) (0, 0) (D) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

79 (Unicamp-SP) Os ciclistas A e B partem do ponto P(–1, 1) no mesmo instante e com velocidade de módulos constantes. O ciclista A segue a trajetória descrita pela equação $4y - 3x - 7 = 0$ e o ciclista B, a trajetória descrita pela equação $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. As trajetórias estão no mesmo plano e a unidade de medida de comprimento é o km. Pergunta-se:

a) Quais as coordenadas do ponto Q, distinto de P, onde haverá cruzamento das duas trajetórias?

b) Se a velocidade do ciclista A for de 20 km/h, qual deverá ser a velocidade do ciclista B para que cheguem no mesmo instante ao ponto Q?

80 (ESPM-SP) Duas circunferências são tangentes aos eixos coordenados, sendo que o centro da menor pertence à circunferência maior, como mostra a figura a seguir. Se o raio da maior é 2 cm, a medida, em centímetros, do raio da menor é:

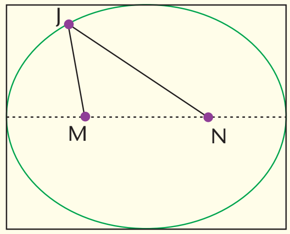


(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{3}{5}$

(B) $2-\sqrt{2}$ (E) $\frac{2}{3}$

(C) $\sqrt{2}-1$

81 Para delimitar um gramado, um jardineiro traçou uma elipse inscrita num terreno irregular de 20 m por 16 m. Para isso, usou um fio esticado preso por suas extremidades M e N, como na figura. A distância entre os pontos M e N é:



(A) 10 m (C) 12,5 m (E) 18 m

(B) 12 m (D) 15 m

82 Um ponto P da elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ dista 2 unidades de um dos focos. Qual a distância de P ao outro foco da elipse?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 7

83 (Ufam) As coordenadas dos focos F_1 e F_2 da elipse de equação $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1$, são respectivamente:

(A) (0, 4) e (0, –4)
(B) (0, 5) e (0, –5)
(C) (0, 12) e (0, –12)
(D) (0, 13) e (0, –13)
(E) (5, 0) e (–5, 0)

84 (Mack-SP) A reta de menor coeficiente angular, que passa por um dos focos da elipse $5x^2 + 4y^2 = 20$ e pelo centro da circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$, tem equação:

(A) $3x - y - 3 = 0$

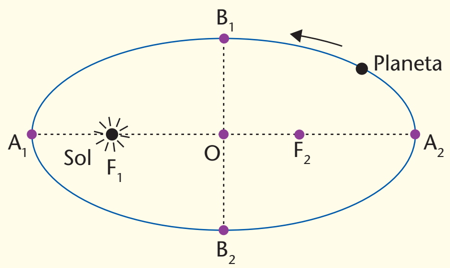
(B) $2x - y - 1 = 0$

(C) $x - 3y - 7 = 0$

(D) $x - 2y - 4 = 0$

(E) $x - y + 1 = 0$

85 (UFMT) A 1ª Lei de Kepler estabelece que qualquer planeta gira em torno do Sol, descrevendo uma órbita elíptica, da qual o Sol ocupa um dos focos.



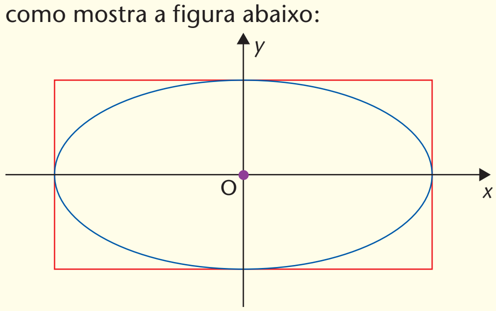
Admitindo que O se encontra na origem do plano cartesiano e que o eixo focal está sobre o eixo x, julgue os itens.

a) A soma da distância do centro do planeta ao centro do Sol com a distância do centro do planeta a F_2 é igual à distância de A_1 e A_2.

b) A distância de A_1 a O é igual à distância do centro do Sol a B_1.

c) Sendo a e b os semieixos maior e menor da elipse, respectivamente, sua equação é dada por $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

86 A elipse de equação $x^2 + 4y^2 = 16$ está inscrita em um retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados, como mostra a figura abaixo:



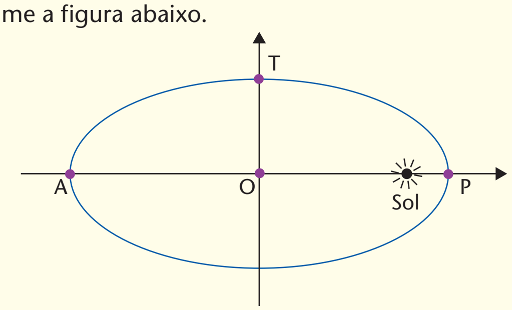
A área desse retângulo é igual a:

(A) 256 (B) 128 (C) 64 (D) 32 (E) 16

87 (UFPI) Considere a elipse de equação $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Se o ponto (x, y) é um dos vértices do quadrado inscrito nessa elipse, então $|x| + |y|$ é igual a:

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{20}{3}$ (C) $\frac{10}{7}$ (D) $\frac{4}{5}$ (E) $\frac{24}{5}$

88 (UnB-DF) Kepler, astrônomo alemão que viveu antes de Newton, foi o primeiro a enunciar leis que regem o movimento dos planetas em torno do Sol. A Primeira Lei de Kepler afirma que os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol em um dos focos. Em consequência, em alguns pontos, os planetas estão mais próximos do Sol do que em outros. Por exemplo, a Terra chega a $147 \cdot 10^6$ km do Sol, em seu periélio (o ponto mais próximo, P), e atinge $152 \cdot 10^6$ km do Sol, em seu afélio (o ponto mais afastado, A), conforme a figura abaixo.



Já a Terceira Lei de Kepler afirma que o período orbital de um planeta (o tempo necessário para ele dar uma volta em torno do Sol) depende da distância média desse planeta em relação ao Sol. De acordo com essa lei, a razão entre o quadrado do período orbital e o cubo da distância média é a mesma para todos os planetas. Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

a) Quando a Terra está na posição T, identificada na figura acima, sua distância do Sol é de $149{,}5 \cdot 10^6$ km.

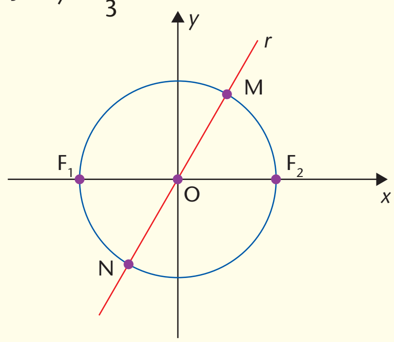
b) Sabe-se que a excentricidade da elipse é a razão entre a distância do foco ao centro da elipse e a medida do semieixo maior. Então, no caso da órbita da Terra, a excentricidade é menor que $\frac{1}{59}$.

c) Um planeta cuja distância média do Sol seja quatro vezes maior que a distância média entre a Terra e o Sol tem o período orbital de 16 anos.

89 (Cesgranrio-RJ) A equação $9x^2 + 4y^2 - 18x - 27 = 0$ representa, no plano cartesiano, uma curva fechada. A área do retângulo circunscrito a essa curva, em unidade apropriada, vale:

(A) 36 (B) 24 (C) 18 (D) 16 (E) 12

90 (UFF-RJ) Na figura abaixo estão representadas a circunferência C, de centro na origem e raio 5, e a reta *r*, de equação $y = \frac{4x}{3}$.



Sabendo que M e N são pontos de intersecção de *r* com C, e F_1 e F_2 são os pontos onde C intercepta o eixo *x*, determine a equação da elipse que passa por M e N e tem focos F_1 e F_2.

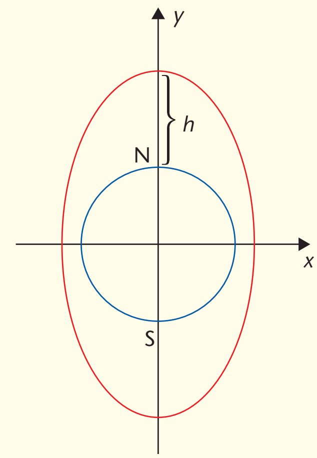
91 (Cefet-RJ) O conjunto de pontos no $\mathbb{R}^2$ com abscissa $5\cos\theta$ e ordenada $4\,\text{sen}\,\theta$ onde $0 \le \theta \le 2\pi$ representa graficamente uma:

(A) circunferência.
(B) senoide.
(C) hipérbole.
(D) parábola.
(E) elipse.

92 (Fuvest-SP) A elipse $x^2 + \left(\frac{y^2}{2}\right) = \frac{9}{4}$ e a reta $y = 2x + 1$, do plano cartesiano, se interceptam nos pontos A e B. Pode-se, pois, afirmar que o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é:

(A) $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$
(B) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right)$
(C) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$
(d) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
(e) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

93 (UFRJ) Um satélite é colocado em órbita elítica em torno da Terra (suposta esférica), tendo seus polos como focos. Em um certo sistema de medidas, o raio da Terra mede três unidades. Ao passar pelo plano do Equador, o satélite está, no mesmo sistema de medidas, a uma unidade acima da superfície terrestre.



Determine a que altura *h* o satélite estará quando passar diretamente sobre o polo Norte.

94 (Unicamp-SP) Uma elipse que passa pelo ponto (0, 3) tem seus focos nos pontos (–4, 0) e (4, 0). O ponto (0, –3) é interior, exterior ou pertence à elipse? Mesma pergunta para o ponto $\left(\frac{5}{2}, \frac{13}{5}\right)$. Justifique suas respostas.

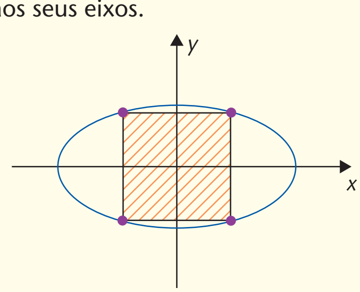
95 (PUC-SP) Qual o valor de *b*, dentre as opções abaixo, para o qual a reta $y = x + b$ e a elipse $x^2 + 4y^2 = 5$ têm somente um ponto de intersecção?

(A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
(B) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$
(C) $\frac{5}{\sqrt{2}}$
(D) $\frac{5}{2}$
(E) Nenhuma das opções.

96 (AFA-SP) Sobre o triângulo PF_1F_2, onde P = (2, 2) e F_1 e F_2 são focos da elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$, é correto afirmar que:

(A) é isósceles.
(B) é obtusângulo.
(C) tem área igual a 16.
(D) tem perímetro igual a $2\sqrt{2} + 8$.

97 (FGV-SP) Na figura, a equação da elipse é $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e o quadrado tem vértices sobre a elipse e lados paralelos aos seus eixos.

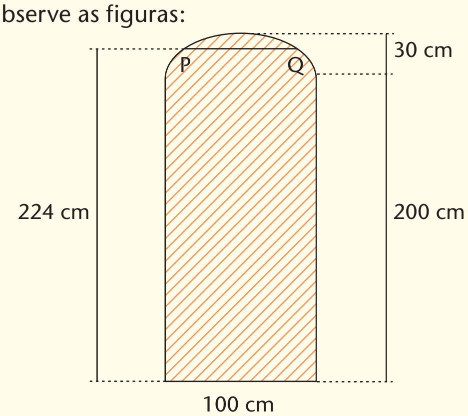


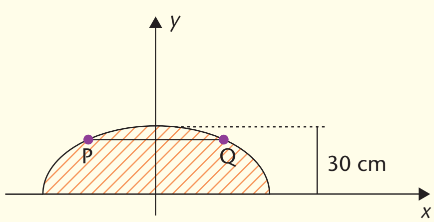
A área do quadrado é:

(A) 3,0 (B) 3,2 (C) 3,6 (D) 4,0 (E) 4,4

98 (UFRJ) Sejam F_1 e F_2 os pontos do plano cartesiano de coordenadas $F_1 = (-\sqrt{3},\ 0)$ e $F_2 = (\sqrt{3},\ 0)$. Determine as coordenadas dos pontos da reta *r* de equação $x - y = 1$ cujas somas das distâncias a F_1 e F_2 sejam iguais a 4 (isto é: determine as coordenadas dos pontos P sobre a reta *r* que satisfazem $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 4$).

99 (Uerj) Uma porta colonial é formada por um retângulo de 100 cm × 200 cm e uma semielipse.
Observe as figuras:





Na semielipse o eixo maior mede 100 cm e o semieixo menor, 30 cm.

Calcule a medida da corda $\overline{PQ}$, paralela ao eixo maior, que representa a largura da porta a 224 cm de altura.

100 (FGV-SP) Num sistema cartesiano ortogonal, a equação do lugar geométrico dos pontos que equidistam do eixo O*y* e do ponto (4, 0) é:

(A) $y^2 = 8(x - 1)$ (D) $y^2 = 8(x - 2)$

(B) $y^2 = 4(x - 2)$ (E) $y^2 = 2x - 1$

(C) $y^2 = 4x - 2$

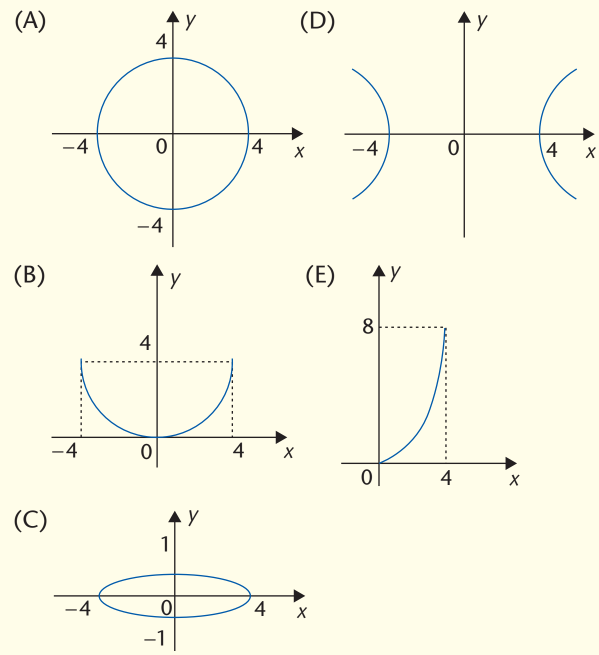
101 (FGV-SP) No plano cartesiano, a curva de equações paramétricas $x = 2 \cos t$ e $y = 5 \text{ sen } t$ com $t \in \mathbb{R}$ é:

(A) uma senoide. (D) uma circunferência.

(B) uma cossenoide. (E) uma elipse.

(C) uma hipérbole.

102 (Cesgranrio-RJ) O gráfico que melhor representa a curva de equação $x^2 + 16y^2 = 16$ é:



103 (Unirio-RJ) As equações $x^2 - 9y^2 - 6x - 18y - 9 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ e $x^2 - 4x - 4y + 8 = 0$ representam, respectivamente:

(A) uma hipérbole, uma elipse e uma parábola.

(B) uma hipérbole, uma circunferência e uma reta.

(C) uma hipérbole, uma circunferência e uma parábola.

(D) uma elipse, uma circunferência e uma parábola.

(E) uma elipse, uma circunferência e uma reta.

104 (UFF-RJ) Considere a equação $(m + n - 1)x^2 + (m - n + 1)\, y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$. Pode-se afirmar que:

(A) se $m = 0$ e $n = 2$, então a equação representa uma elipse.

(B) se $m = n = 0$, então a equação representa uma reta.

(C) se $m = 0$ e $n = 1$, então a equação representa uma parábola.

(D) se $m = 1$ e $n = 2$, então a equação representa uma hipérbole.

(E) se $m = n = 1$, então a equação representa uma circunferência.

105 (UFF-RJ) As equações $y - 2x = 0$, $y + x^2 = 0$ e $y^2 - x^2 + 1 = 0$ representam no plano, respectivamente:

(A) uma reta, uma hipérbole e uma parábola.

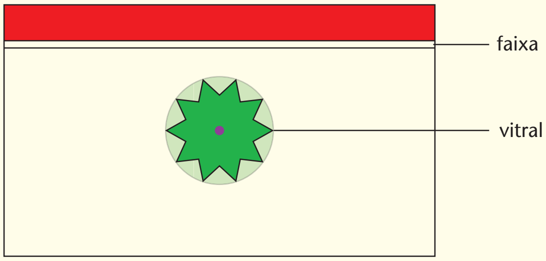
(B) uma parábola, uma hipérbole e uma reta.

(C) uma reta, uma parábola e uma elipse.

(D) uma elipse, uma parábola e uma hipérbole.

(E) uma reta, uma parábola e uma hipérbole.

106 (UFF-RJ) Na parede retangular de um palácio renascentista, há um vitral circular e, acima dele, na mesma parede, uma estreita faixa reta, conforme a figura abaixo.



Essa parede foi ornamentada com um elemento decorativo em forma de uma curva que tem a seguinte característica: cada ponto da curva está situado a igual distância do centro do vitral e da faixa. Pode-se afirmar que o elemento decorativo tem a forma de um arco:

(A) de elipse.

(B) de hipérbole.

(C) de parábola.

(D) de circunferência.

(E) de senoide.

107 (Cesgranrio-RJ) Uma montagem comum em laboratórios escolares de Ciências é constituída por um plano inclinado, de altura aproximadamente igual a 40 cm, com 4 canaletas paralelas e apoiado em uma mesa, forrada de feltro, cuja borda é curvilínea. Sobre a mesa há um ponto marcado no qual se coloca uma bola de gude. A experiência consiste em largar, do alto do plano inclinado, outra bola de gude, a qual, depois de rolar por uma das canaletas, cai na mesa e colide sucessivamente com a borda da mesa e com a primeira bola. A borda da mesa tem a forma de um arco de:

(A) elipse, e o ponto marcado é um dos seus focos.

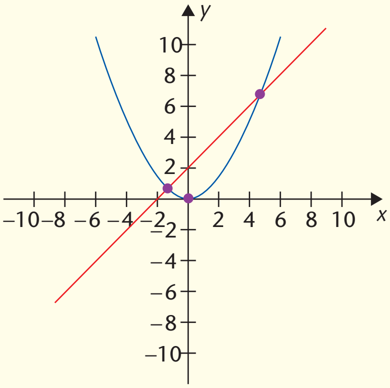
(B) parábola, e o ponto marcado é seu foco.

(C) hipérbole, e o ponto marcado é um de seus focos.

(D) hipérbole, e o ponto marcado é seu centro.

(E) circunferência, e o ponto marcado é seu centro.

108 (PUC-RS) A representação que segue é das funções f, g definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 2$.



A área do triângulo cujos vértices são os pontos de intersecção das duas curvas e o ponto (0, 0) é:

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 8

109 (Ufam) As coordenadas do centro da hipérbole de equação $9x^2 - 18x - 4y^2 - 16y = 43$ são:

(A) (2, 1)
(B) (–1, 2)
(C) (1, 2)
(D) (–1, –2)
(E) (1, –2)

110 (Uerj) Observe o sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

O menor valor inteiro de r para que o sistema acima apresente quatro soluções reais é:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

111 (Unirio-RJ) Considere a função real definida por $f(x) = 1 + \sqrt{18 - 2x^2}$ e um ponto A = (2, 1). Sabe-se que a distância de um ponto P do gráfico de f ao ponto A é $\sqrt{10}$. O ponto P encontra-se no:

(A) 1º quadrante.
(B) 2º quadrante.
(C) 3º quadrante.
(D) 4º quadrante.
(E) ponto de origem do sistema xOy.

112 (Unirio-RJ) A função linear $f(x) = ax + b$ é representada por uma reta que contém o ponto (2, –1) e que passa pelo vértice da parábola $y = 4x - 2x^2$. A função é:

(A) $f(x) = -3x + 5$
(B) $f(x) = 3x - 7$
(C) $f(x) = 2x - 5$
(D) $f(x) = x - 3$
(E) $f(x) = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{7}{3}$

113 (PUC-RJ) As parábolas dadas pelas equações $y = x^2$ e $x = y^2$:

(A) nunca se encontram.

(B) se encontram apenas na origem.

(C) se encontram em exatamente dois pontos.

(D) se encontram em três pontos.

(E) se encontram em quatro pontos.

114 (UFRJ) Considere os pontos $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 1)$ e $P_3 = (2, 6)$.

a) Determine a equação da parábola que passa por P_1, P_2 e P_3 e tem eixo de simetria paralelo ao eixo y das ordenadas.

b) Determine outra parábola que passe pelos pontos P_1, P_2 e P_3.

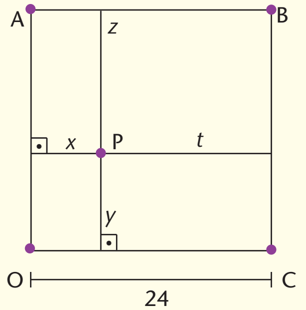
115 (UFF-RJ) Considere o triângulo com vértices A = (0, 0), B = (3, 0) e C = (x, y).

Se C está sobre a parábola $y = \frac{x^2}{2} - 2x + 4$, determine:

a) as suas coordenadas, de modo que a área do triângulo ABC seja mínima;

b) a área mínima.

116 (UFRJ) Considere um ponto P pertencente ao quadrado OABC, de lado 24, conforme a figura abaixo:



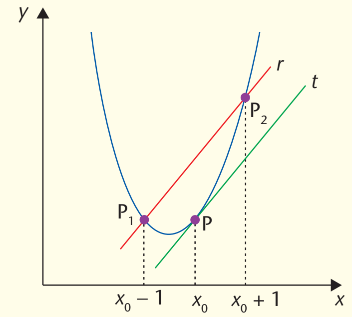
As distâncias x, y, z e t de P aos lados OA, OC, AB e BC, respectivamente, formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.

Encontre a equação da figura (lugar geométrico) determinada pelos pontos P = (x, y) que possuem essa propriedade.

117 (UFRJ) Seja $y = ax^2 + bx + c$ e P = (x_0, y_0) um ponto da parábola.

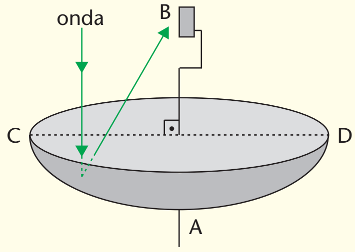
Podemos traçar a reta tangente à parábola que passa por P da seguinte forma:

Considere os pontos P_1 e P_2 da parábola que têm abscissas $(x_0 - 1)$ e $(x_0 + 1)$, respectivamente. A tangente t procurada é a reta paralela à reta r que passa por P_1 e P_2, como se vê na figura a seguir.



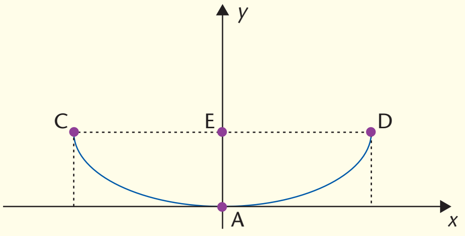
Usando a propriedade, determine a reta tangente a $y = x^2$ que passa pelo ponto (1, 1).

118 (Uerj) A superfície de uma antena parabólica pode ser gerada pela rotação completa de uma parábola ao redor do seu eixo. A intersecção dessa superfície com qualquer plano perpendicular ao eixo é um círculo. Observe a figura abaixo:



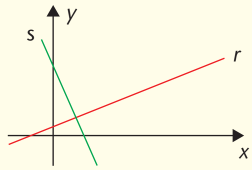
Considere um círculo de centro (E) e diâmetro (CD) de 4 metros de comprimento, cuja medida da distância do centro (E) ao vértice (A) do paraboloide é 0,5 metro.

a) Escreva a equação cartesiana da parábola de foco (B) contida no plano CAD, sendo o vértice (A) a origem do sistema cartesiano e o eixo das abscissas paralelo ao diâmetro CD, como mostra a figura abaixo:



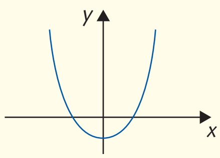
b) Calcule a distância do vértice (A) ao foco (B).

119 (UFV-MG) Na figura a seguir, a reta r: $y = ax + b$ tem coeficiente angular positivo, e a reta s: $y = cx + d$ tem coeficiente angular negativo.

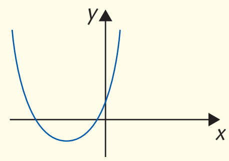


A alternativa que melhor representa o gráfico do trinômio $y = (ax + b)(cx + d)$ é:

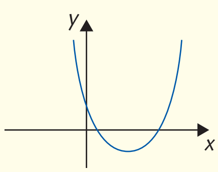
(A)



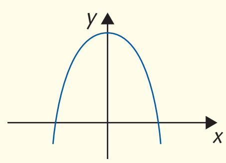
(D)



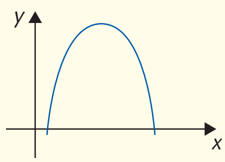
(B)



(E)



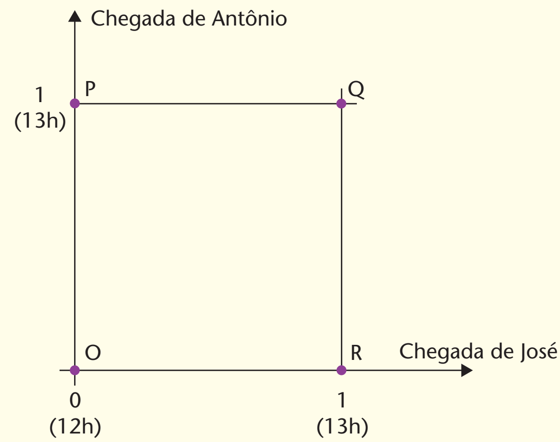
(C)



120 (UFC-CE) Um segmento de reta desloca-se no plano cartesiano de tal forma que uma de suas extremidades permanece sempre no eixo y e o seu ponto médio permanece sempre no eixo x. Então, a sua outra extremidade desloca-se ao longo de uma:

(A) circunferência.
(B) parábola.
(C) reta.
(D) elipse.
(E) hipérbole.

(Enem) Leia com atenção e responda às duas questões que seguem.
José e Antônio viajarão em seus carros com as respectivas famílias para a cidade de Serra Branca. Com intenção de seguir viagem juntos, combinam um encontro no marco inicial da rodovia, onde chegarão, de modo independente, entre meio-dia e 1 hora da tarde. Entretanto, como não querem ficar muito tempo esperando um pelo outro, combinam que o primeiro que chegar ao marco inicial esperará pelo outro, no máximo, meia hora; após esse tempo, seguirá viagem sozinho.
Chamando de x o horário de chegada de José e de y o horário de chegada de Antônio, e representando os pares $(x; y)$ em um sistema de eixos cartesianos, a região OPQR abaixo indicada corresponde ao conjunto de todas as possibilidades para o par $(x; y)$:



121 Na região indicada, o conjunto de pontos que representa o evento "José e Antônio chegam ao marco inicial exatamente no mesmo horário" corresponde:

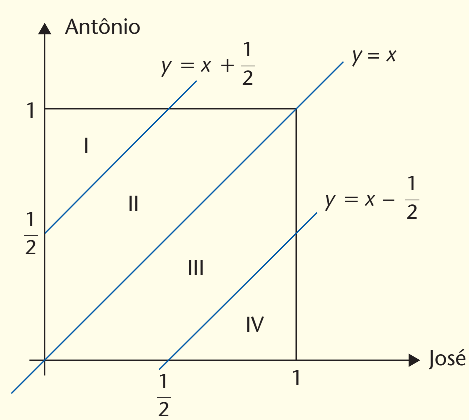
(A) à diagonal OQ.
(B) à diagonal PR.
(C) ao lado PQ.
(D) ao lado QR
(E) ao lado OR.

122 Segundo o combinado, para que José e Antônio viajem juntos, é necessário que:

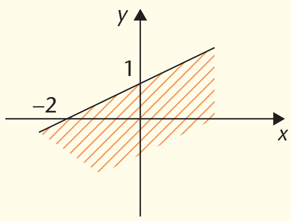
$$y - x \leq \frac{1}{2} \text{ ou que } x - y \leq \frac{1}{2}$$

De acordo com o gráfico e nas condições combinadas, as chances de José e Antônio viajarem juntos são de:

(A) 0%
(B) 24%
(C) 50%
(D) 75%
(E) 100%



123 O semiplano hachurado é o conjunto dos pontos (x, y) tais que:



(A) $x \geq 2y - 2$

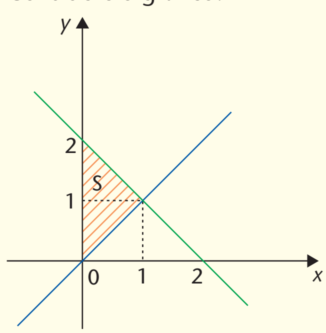
(B) $x \geq -2y - 2$

(C) $x \leq 2y + 2$

(D) $y \leq x + 2$

(E) $y \geq \frac{x}{2} + 1$

124 (UFF-RJ) Considere o gráfico:



S representa o conjunto-solução do sistema:

(A) $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq y \\ x \leq 2 - y \end{cases}$

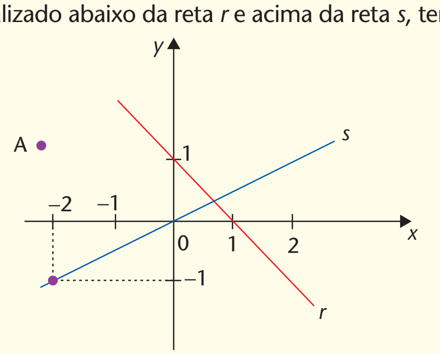
(B) $\begin{cases} y \geq 1 \\ x \leq y \\ x \leq 2 - y \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq y \\ x \geq 2 - y \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq y \\ x \leq 2 - y \end{cases}$

(E) $\begin{cases} y \geq 0 \\ x \leq y \\ x \geq 2 - y \end{cases}$

125 (Fuvest-SP) Na figura abaixo, A é um ponto do plano cartesiano, com coordenadas (x, y). Sabendo que A está localizado abaixo da reta r e acima da reta s, tem-se:



(A) $y < \frac{x}{2}$ e $y < -x + 1$

(B) $y < \frac{x}{2}$ ou $y > -x + 1$

(C) $\frac{x}{2} < y$ e $y > -x + 1$

(D) $-x + 1 < y < \frac{x}{2}$

(E) $\frac{x}{2} < y < -x + 1$

126 (Ufes) O lugar geométrico dos pontos P(x, y) do plano cartesiano, cujas coordenadas são soluções do sistema

$\begin{cases} 2y^2 - 8 = 0 \\ (xy)^2 - y^2 \leq 0 \end{cases}$, é:

(A) dois segmentos de reta.

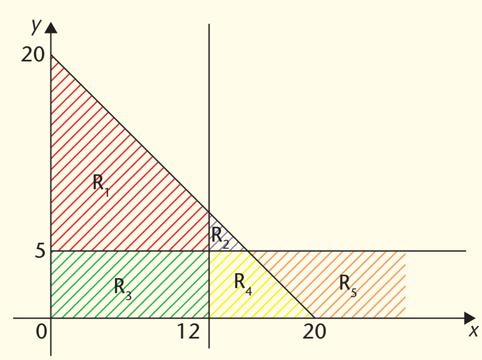
(B) o plano todo.

(C) um par de semirretas.

(D) um par de retas.

(E) o retângulo ABCD, onde A = (–1, 2), B= (1, 2), C= (1, –2) e D = (–1, –2).

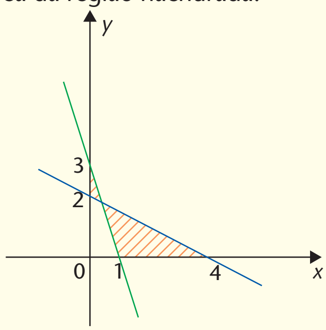
127 (UFF-RJ) O elenco de um filme publicitário é composto por pessoas com cabelos louros ou olhos verdes. Sabe-se que esse elenco tem, no máximo, vinte pessoas, dentre as quais pelo menos doze possuem cabelos louros e, no máximo, cinco possuem olhos verdes.
No gráfico a seguir, pretende-se marcar um ponto P (L, V), em que L representa o número de pessoas do elenco que têm cabelos louros e V o número de pessoas do elenco que têm olhos verdes.



O ponto P deverá ser marcado na região indicada por:

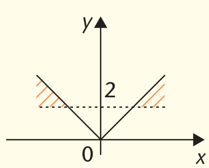
(A) R_1 (B) R_2 (C) R_3 (D) R_4 (E) R_5

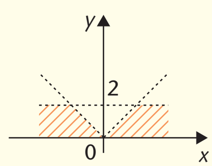
128 (PUC-RJ) Considere as retas desenhadas na figura. Calcule a área da região hachurada.

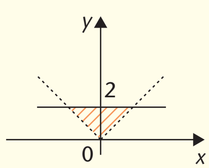


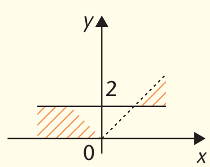
129 (UFF-RJ) Considere o sistema $\begin{cases} y > |x| \\ y \leq 2 \end{cases}$.

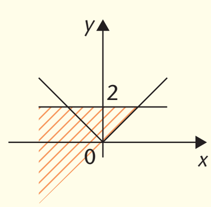
A região do plano que melhor representa a solução do sistema é:

(A)


(D)


(B)


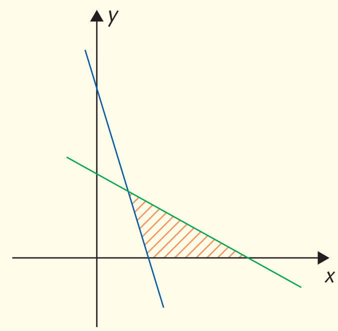
(E)


(C)


130 (UFRJ) Determine a área da região R definida por $R = R_1 \cap R_2 \cap R_3$, sendo:

- $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 4x + 5y - 16 \leq 0\}$
- $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 4x - 3y \geq 0\}$
- $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq 0\}$

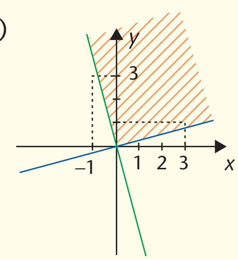
131 João e José têm, respectivamente, x e y moedas de R$ 1,00. Juntando essas quantias, não conseguiram os R$ 8,00 necessários para comprar dois lanches com o mesmo preço. Vanessa chegou e contribuiu com $(2x)$ moedas de R$ 1,00. Assim, os três puderam comprar 3 daqueles lanches e ainda sobrou dinheiro. A figura abaixo é uma representação gráfica, em $\mathbb{R}^2$, do sistema de inequações que soluciona esse problema.

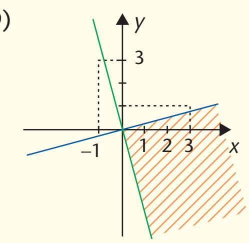


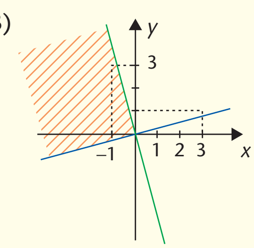
O menor número de moedas de R$ 1,00 com que Vanessa poderia contribuir para a solução deste problema é:

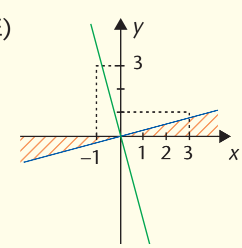
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

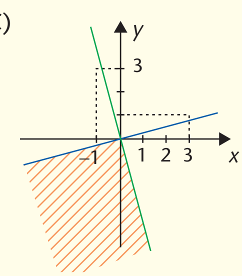
132 (FGV-RJ) Os pontos do plano que satisfazem simultaneamente às inequações: $x - 3y \leq 0$ e $3x + y \geq 0$, podem ser representados pela figura:

(A)


(D)


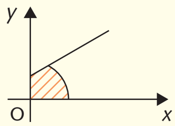
(B)


(E)


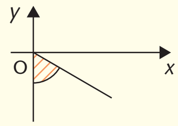
(C)


133 (Fuvest-SP) Das regiões sombreadas na sequência, a que melhor representa o conjunto dos pontos (x, y), do plano cartesiano, satisfazendo ao conjunto de desigualdades $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x - y + 1 \geq 0$; $x^2 + y^2 \leq 9$, é:

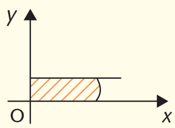
(A)



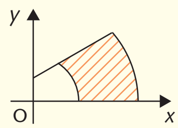
(D)



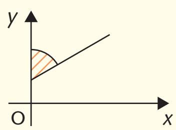
(B)



(E)



(C)



134 (Vunesp-SP) Seja $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16 \text{ e } x^2 + (y-1)^2 \geq 9\}$ uma região do plano. A área de S é:

(A) 5 (B) 7 (C) 5π (D) 7π (E) $7\pi^2$

135 (Mack-SP) Supondo $\pi = 3$, os pontos (x, y) do plano tais que $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2x \\ x^2 + y^2 \leq 2y \end{cases}$ definem uma região de área:

(A) 2,5 (B) 2,0 (C) 1,5 (D) 1,0 (E) 0,5

136 (PUC-RS) Se $\alpha \in [0, 2\pi]$ e sen $\alpha <$ cos α, então o ponto extremo do arco de comprimento α pertence ao conjunto:

(A) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ e } x > 0 \text{ e } y < 0\}$

(B) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ e } x < 0 \text{ e } y < 0\}$

(C) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ e } x > 0 \text{ e } y > 0\}$

(D) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y > x\}$

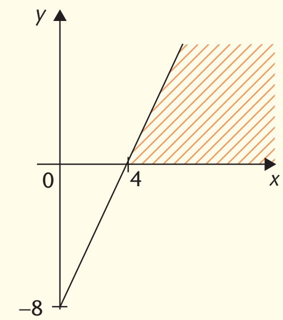
(E) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y < x\}$

137 (PUC-SP) Num modelo aplicado à Economia, em virtude de x e y representarem os preços, foram colocadas as seguintes restrições:

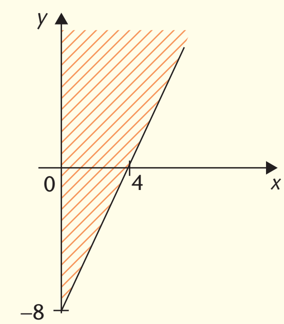
$$8 - 2x + y \geq 0,\ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0$$

Qual dos gráficos seguintes melhor representa essas restrições?

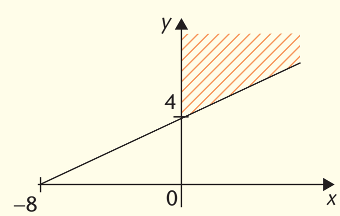
(A)



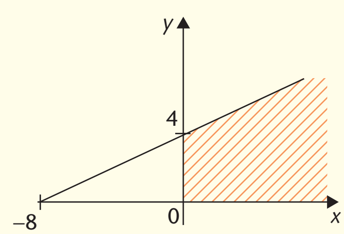
(B)



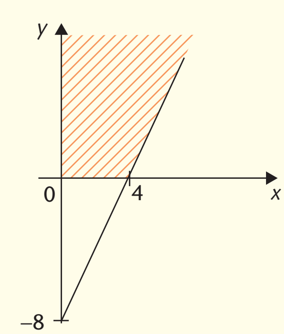
(C)



(D)



(E)



138 (UFU-MG) A área da região do primeiro quadrante delimitada pelas retas, que são soluções da equação $\cos(x + y) = 0$, com $0 \leq x + y \leq 2\pi$, é igual a:

(A) π^2 unidades de área.

(B) $4\pi^2$ unidades de área.

(C) $3\pi^2$ unidades de área.

(D) $8\pi^2$ unidades de área.

(E) $2\pi^2$ unidades de área.

139 (Unirio-RJ) Considerando uma circunferência de centro (2, 1), que passa pelo ponto (2, –2), assinale a opção correta.

(A) A equação da circunferência é $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 3$.

(B) O interior da circunferência é representado pela inequação $x^2 + 4x + y^2 + 2y < 4$.

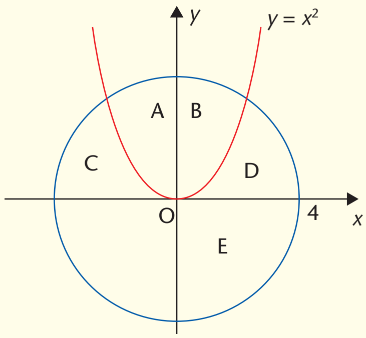
(C) O interior da circunferência é representado pela inequação $x^2 - 4x + y^2 - 2y < 4$.

(D) O exterior da circunferência é representado pela inequação $x^2 - 4x + y^2 - 2y > -2$.

(E) O ponto (5, –1) pertence à circunferência.

140 (Unifesp) A região do plano cartesiano, determinada simultaneamente pelas três condições $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ y \geq x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$

é aquela, na figura, indicada com a letra:



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

CAPÍTULO IV

GEOMETRIA ANALÍTICA NO ESPAÇO

Palê Zuppani / Pulsar Imagens

Neste capítulo, continuamos o estudo da Geometria Analítica, desta vez no espaço tridimensional. Trabalharemos as equações do plano, da reta e da esfera, e apresentamos interpretações geométricas para todas as situações em que um sistema de 3 equações a 3 incógnitas pode resultar.

4 – GEOMETRIA ANALÍTICA NO ESPAÇO

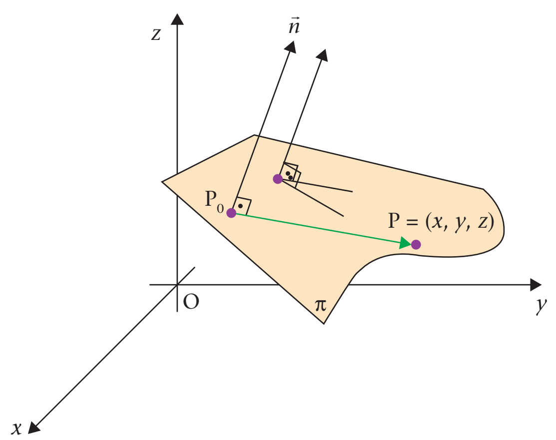
4.1 – Plano no $\mathbb{R}^3$

Consideremos um plano π que passa num ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é normal a um vetor $\vec{n} = (a, b, c)$, tal que $\vec{n} \neq \vec{0}$, no $\mathbb{R}^3$.

O plano π será o lugar geométrico dos pontos P do espaço tais que o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ seja ortogonal a $\vec{n}$, qualquer que seja P. Desta condição resulta que o produto escalar $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$, $\forall$P.

Temos então:

$\pi = \left\{ \left(x, y, z\right) \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \right\}$



De $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$, vem:

$$\overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \text{ e } \vec{n} = (a, b, c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0$$

NOTA
Quando se multiplica a equação do plano por uma constante diferente de zero, ela ainda representa o mesmo plano.

Chamando $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$, temos $ax + by + cz + d = 0$, logo, a equação do plano é:

$$ax + by + cz + d = 0$$

onde $(a, b, c) = \vec{n}$ é um vetor normal ao plano.

Exemplos:

i) Calcular a equação do plano perpendicular ao vetor $\vec{n} = (1, 2, 3)$ e que passa pelo ponto A = (–1, 2, 3).

Como $\vec{n} = (1, 2, 3)$, a equação do plano será:

$1x + 2y + 3z + d = 0$

Para calcular d, basta lembrar que as coordenadas de A satisfazem a equação do plano, pois A é do plano, logo:

$$1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + d = 0 \Rightarrow d = -12$$

donde a equação pedida é:

$$x + 2y + 3z - 12 = 0$$

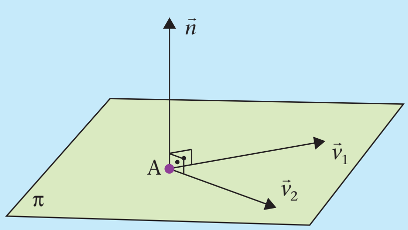
ii) Encontrar um vetor normal ao plano de equação $2x - y + 3z = 9$. Onde ele intersecta o eixo Oz?

Diretamente da equação, vê-se que $\vec{n} = (2, -1, 3)$ é normal ao plano. Para encontrar o ponto $P = (0, 0, c)$ onde o plano corta o eixo Oz, substituem-se suas coordenadas na equação:

$$2 \cdot 0 - 0 + 3 \cdot c = 9 \Rightarrow c = 3$$

Assim, (0, 0, 3) é o ponto do plano no eixo Oz.

iii) Determinar a equação do plano paralelo aos vetores $\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$ e $\vec{v}_2 = (2, 1, 1)$ que passa pelo ponto A = (–1, 2, 2).



Um vetor normal ao plano será o produto vetorial dos dois vetores, logo:

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -3, 1)$$

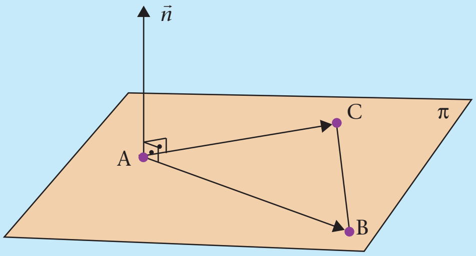
A equação do plano será $1x - 3y + 1z + d = 0$.

Como A pertence ao plano:

$$1 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + d = 0 \Rightarrow d = 5$$

Logo, a equação pedida é $x - 3y + z + 5 = 0$.

iv) Determinar a equação do plano do triângulo ABC em que A = (1, 3, 1), B = (–1, 2, 0) e C = (0, –2, –2).



Um vetor normal ao plano será o produto vetorial de dois vetores quaisquer, que se obtenham com os pontos A, B e C. Vamos escolher:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = (-2,\ -5,\ 9)$$

A equação do plano será $-2x - 5y + 9z + d = 0$.

Escolhendo um dos pontos A, B ou C como ponto de passagem (escolhemos A), vem:

$-2 \cdot 1 - 5 \cdot 3 + 9 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$

Logo, a equação do plano é:

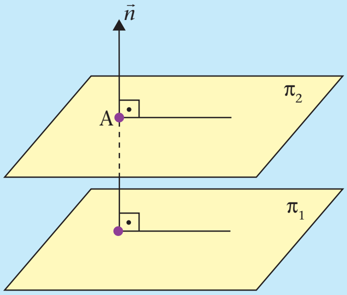
$-2x - 5y + 9z + 8 = 0 \Rightarrow 2x + 5y - 9z - 8 = 0$

<u>Outra solução:</u>

O ponto P = (x, y, z) está no plano do triângulo ABC se, e somente se, o volume do tetraedro PABC for zero, isto é, se:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x + 5y - 9z - 8 = 0$$

v) Dar a equação do plano paralelo ao plano π_1: $2x - y + 3z - 5 = 0$, que passa pelo ponto $A = (1, 2, 3)$.



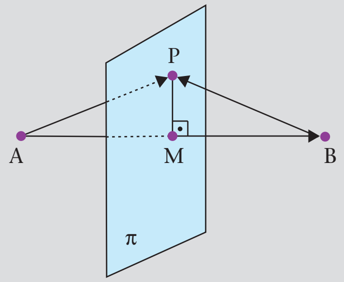
Seja π_2 o plano em questão.
Como os dois planos são paralelos, têm o mesmo vetor normal, logo:
π_2: $2x - y + 3z + d = 0$
O valor de d fica determinado pelo ponto A:
$2 \cdot 1 - 2 + 3 \cdot 3 + d = 0 \Rightarrow d = -9$, donde a equação pedida é:

$$2x - y + 3z - 9 = 0$$

Exercícios resolvidos:

1) Determine a equação do plano mediador do segmento AB em que $A = (1, -1, 3)$ e $B = (3, 1, -1)$.

Solução:



O plano mediador do segmento AB é o plano perpendicular ao segmento e que passa pelo seu ponto médio. Assim, um vetor normal ao plano será:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2, 2, -4)$$

e a equação do plano será:

$$2x + 2y - 4z + d = 0$$

O ponto médio de $\overline{AB}$ será:

$$M = \frac{A+B}{2} = (2, 0, 1)$$

que, pertencendo ao plano, dará o valor de d:

$$2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 0$$

Temos então:

$$2x + 2y - 4z = 0 \Rightarrow x + y - 2z = 0$$

donde $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$

NOTA
A ausência do termo independente garante que a origem O = (0, 0, 0) pertença ao plano, pois $0+0-2 \cdot 0 = 0$. O plano neste caso passa pela origem.

<u>Outra solução:</u>

Como o plano mediador é o lugar geométrico (LG) dos pontos do espaço equidistantes dos dois pontos A e B, o problema poderia ser resolvido da seguinte maneira:
Seja P = (x, y, z) um ponto pertencente ao LG, devemos ter:

$$\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \left\|\overrightarrow{BP}\right\|$$

$\overrightarrow{AP} = P - A = (x - 1, y + 1, z - 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2}$

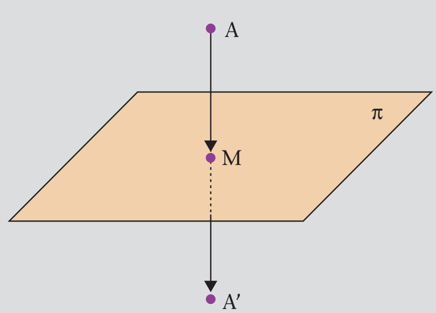
$\overrightarrow{BP} = P - B = (x - 3, y - 1, z + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\|\overrightarrow{BP}\right\| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$

Igualando e elevando ao quadrado:
$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 2z + 1$
$4x + 4y - 8z = 0 \Rightarrow x + y - 2z = 0$

2) Determine o ponto simétrico de A = (–1, 0, 2) em relação ao plano π: $2x - y + z - 6 = 0$.

<u>Solução:</u>



Um vetor normal ao plano será: $\vec{n} = (2, -1, 1)$

Tomemos um vetor paralelo a $\vec{n}$: $\overrightarrow{AM} = k\vec{n} = (2k, -k, k)$

Apliquemos em A e forcemos que o transladado de A seja M pertencente ao plano:

$M = A + k\vec{n} = (-1, 0, 2) + (2k, -k, k) = (2k - 1, -k, k + 2)$

Como este ponto pertence ao plano satisfaz a sua equação, logo:

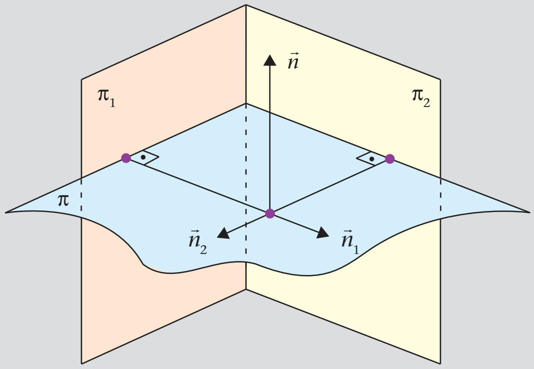
$2(2k - 1) - (-k) + (k + 2) - 6 = 0 \Rightarrow k = 1$

O ponto M será: $M = (1, -1, 3)$ e o vetor $\overrightarrow{AM}$ será $\overrightarrow{AM} = (2, -1, 1)$. Aplicando este vetor em M, transladaremos M para A' simétrico de A em relação a π.

$A' = M + \overrightarrow{AM} = (1, -1, 3) + (2, -1, 1) = (3, -2, 4)$

3) Determine a equação do plano perpendicular aos planos π_1: $2x + y - z + 1 = 0$ e π_2: $x - y - z + 2 = 0$, que passa pela origem.

Solução:



O vetor normal ao plano pedido é o produto vetorial dos vetores normais aos planos dados.

Temos:

$\vec{n}_1 = (2,\ 1,\ -1)$ e $\vec{n}_2 = (1,\ -1,\ -1)$

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,\ 1,\ -3)$$

A equação do plano pedida é:

$-2x + y - 3z + d = 0$

Como o plano passa pela origem, $d = 0$. Logo:

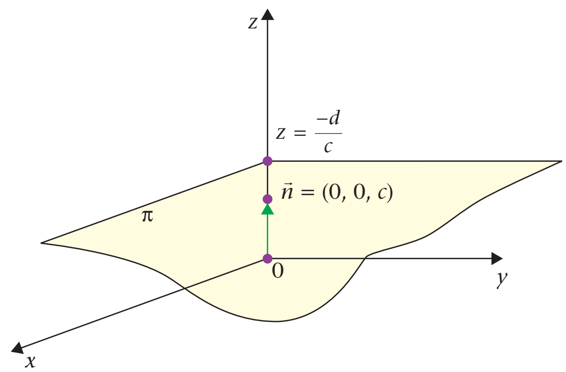
$-2x + y - 3z = 0 \Rightarrow 2x - y + 3z = 0$

4.1.1 – Posição relativa entre o plano e os eixos

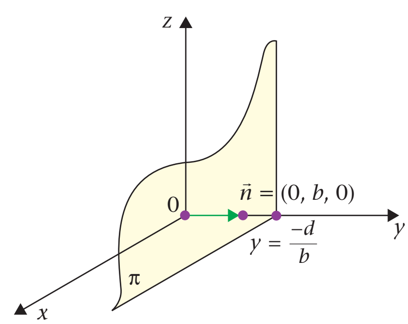
Considere o plano π de equação $ax + by + cz + d = 0$.

1) $a = b = 0$ e $c \neq 0$
Um vetor normal será $\vec{n} = (0, 0, c)$ e π será paralelo ao plano xOy.

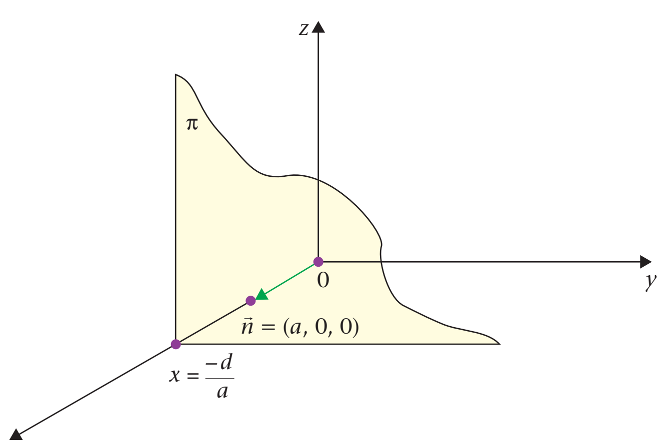
NOTA
Se $d = 0$, então o plano π será xOy.



2) $a = c = 0$ e $b \neq 0$
Um vetor normal será $\vec{n} = (0, b, 0)$ e π será paralelo ao plano xOz.

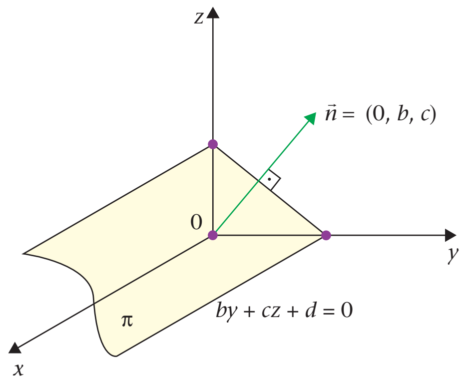


3) $b = c = 0$ e $a \neq 0$
Um vetor normal será $\vec{n} = (a, 0, 0)$ e π será paralelo ao plano yOz.

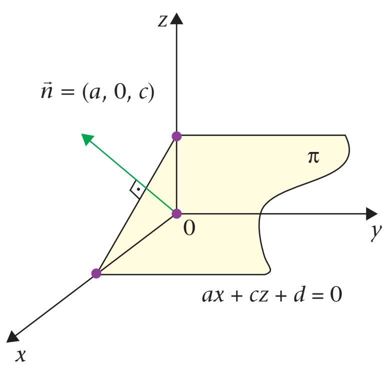


4) $a = 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$
Um vetor normal $\vec{n} = (0, b, c)$ é perpendicular ao eixo Ox, isto é, π é paralelo ao eixo Ox.

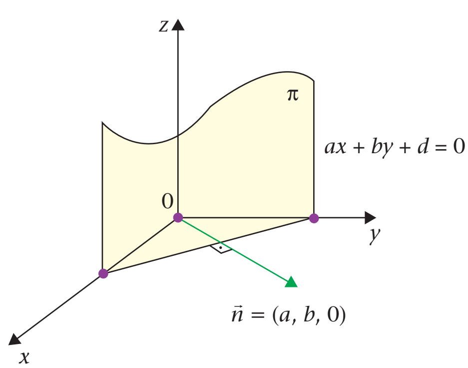
NOTA
Se $d = 0$, o plano π contém o eixo Ox.



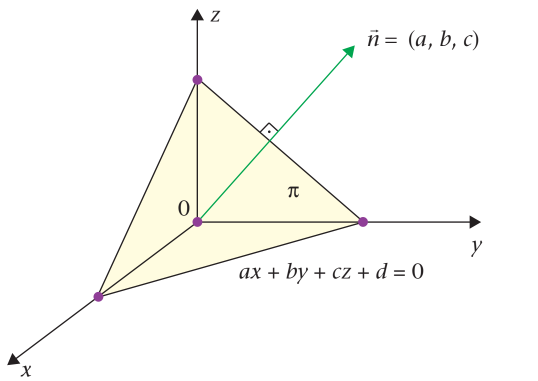
5) $b = 0$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$
Um vetor normal $\vec{n} = (a, 0, c)$ é perpendicular ao eixo Oy, isto é, π é paralelo ao eixo Oy.



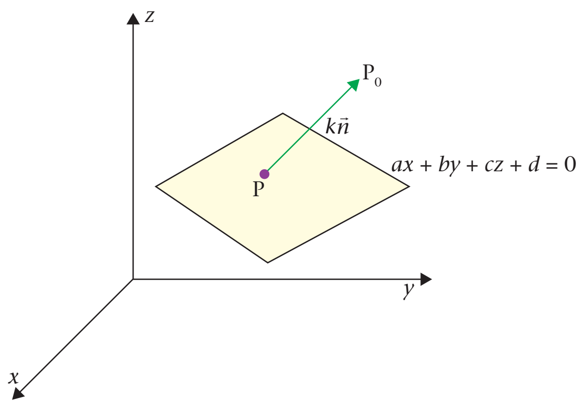
6) $c = 0$, $b \neq 0$ e $a \neq 0$
Um vetor normal $\vec{n} = (a, b, 0)$ é perpendicular ao eixo Oz, isto é, π é paralelo ao eixo Oz.



7) $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$
Um vetor normal será $\vec{n} = (a, b, c)$ e o plano não será paralelo a nenhum eixo.



Seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e π: $ax + by + cz + d = 0$.
Então $\vec{n} = (a, b, c)$ é normal a π.



Seja P (x, y, z) no plano tal que $\overrightarrow{PP_0}$ é normal.
Então $\overrightarrow{P_0P} = k\vec{n} \Rightarrow (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) = k(a, b, c) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 - ka \\ y = y_0 - kb \\ z = z_0 - kc \end{cases}$$

NOTA
Como $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, o módulo do denominador pode ser eliminado.

Substituindo na equação do plano:

$$a(x_0 - ka) + b(y_0 - kb) + c(z_0 - kc) + d = 0 \Rightarrow k = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Enfim, a distância pedida é:

$$\left\|\overrightarrow{P_0P}\right\| = \|k\vec{n}\| = |k| \cdot \|\vec{n}\| = \left|\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}\right| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemplos:

i) Determinar a distância do ponto P = (3, 3, –3) ao plano de equação $2x + 2y - z + 3 = 0$.

Temos: $D = \left|\dfrac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 - (-3) + 3}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}}\right| = \dfrac{18}{3} = 6$

ii) Determinar sobre o eixo Ox um ponto que diste 5 unidades do plano $2x + y + 2z - 1 = 0$.

Seja P = (x, 0, 0). Temos que $d(\text{P}, \pi) = 5$, logo:

$$\left|\frac{2x + 0 + 2 \cdot 0 - 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}}\right| = 5 \Rightarrow |2x - 1| = 15 \Rightarrow 2x - 1 = \pm 15$$

$$x = \frac{1 \pm 15}{2} \Rightarrow x = 8 \text{ ou } x = -7$$

Os pontos serão (8, 0, 0) ou (–7, 0, 0).

iii) Determinar o LG dos pontos que distam 2 unidades do plano $2x + 3y + 6z + 7 = 0$.

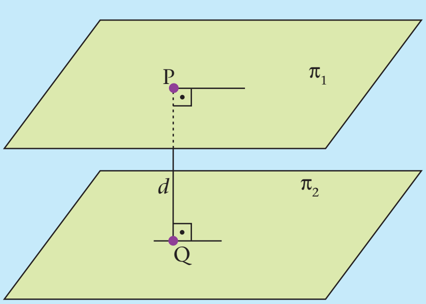
Temos que $d(\text{P}, \pi) = 2$.

$$\left|\frac{2x + 3y + 6z + 7}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}}\right| = 2 \Rightarrow 2x + 3y + 6z + 7 = \pm 14$$

π_1: $2x + 3y + 6z - 7 = 0$ ou π_2: $2x + 3y + 6z + 21 = 0$

iv) Calcular a distância entre os planos:

π_1: $2x + y - 2z - 6 = 0$ e π_2: $2x + y - 2z + 12 = 0$



Basta tomar um ponto sobre um deles e determinar sua distância ao outro. Tomemos P sobre π_1. Façamos, por exemplo:

$x = y = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 0 - 2z - 6 = 0$
$z = -3 \Rightarrow P = (0, 0, -3)$

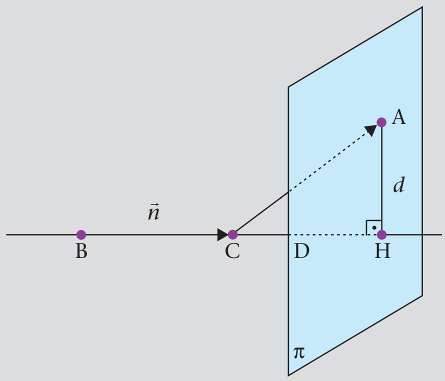
A distância do ponto P = (0, 0, –3) ao plano $2x + y - 2z + 12 = 0$ é:

$$d(P, \pi_2) = \left| \frac{2 \cdot 0 + 0 - 2 \cdot (-3) + 12}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} \right| = \frac{18}{3} = 6$$

Exercícios resolvidos:

1) Calcule a distância do ponto A = (2, 3, –2) à reta que passa pelos pontos B = (1, 1, 1) e C = (3, 3, 2).

Solução:



Calculemos a distância de um dos pontos B ou C ao plano que passa pelo ponto A e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{BC}$.

Escolhamos C, por exemplo. O vetor normal ao plano será o vetor $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = C - B = (2,\ 2,\ 1)$.

A equação do plano π será: $2x + 2y + z + p = 0$. Como A pertence ao plano π, temos: $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 2 + p = 0 \Rightarrow p = -8$
$\pi: 2x + 2y + z - 8 = 0$.
Calculemos a distância D do ponto C ao plano π:

$$d(C, \pi) = \left| \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 - 8}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \right| = \frac{6}{3} = 2 = \left\| \overrightarrow{CH} \right\|$$

Temos: $\overrightarrow{CA} = A - C = (-1,\ 0,\ -4) \Rightarrow \left\| \overrightarrow{CA} \right\| = \sqrt{1 + 0 + 16} = \sqrt{17}$

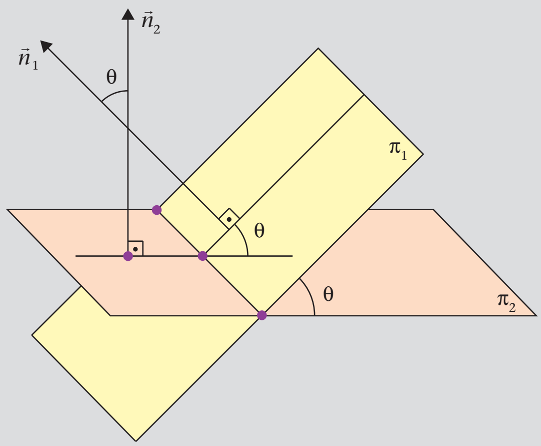
A distância pedida será obtida do triângulo retângulo CHA:

$AH^2 = CA^2 - CH^2 \Rightarrow d^2 = 17 - 4 \Rightarrow d = \sqrt{13}$

2) Determine o ângulo entre os planos:
π_1: $x + 2y - 3z + 1 = 0$ e π_2: $3x - y - 2z + 1 = 0$.

Solução:

O ângulo θ entre os planos será o ângulo entre seus vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$:



Como $\vec{n}_1 = (1,\ 2,\ -3)$ e $\vec{n}_2 = (3,\ -1,\ -2)$, fazendo o produto escalar:

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1|\ |\vec{n}_2| \cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) + (-3)\cdot(-2) = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}\cdot\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2}\cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow\ \theta = \dfrac{\pi}{3}\text{ rad} = 60°$, pois $0 \le \theta < \pi$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Determine a equação do plano que é ortogonal ao vetor $\vec{n}$ e contém o ponto P nos seguintes casos:

a) $\vec{n} = (2, 4, 1)$ e $P = (1, -1, 1)$

b) $\vec{n} = (1, 2, -1)$ e $P = (0, 0, 1)$

2 Dê a equação do plano que passa pelo ponto $P = (1, 2, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (2, 1, 3)$.

3 Calcule o ângulo do plano π: $x + y + z + 1 = 0$ com o plano xOy.

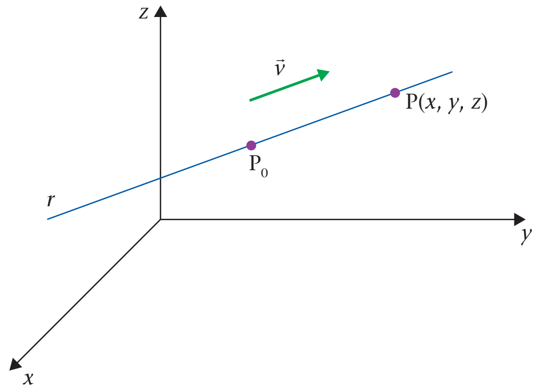
4 Encontre os valores de p e q para que os planos π: $px + qy + 4z = 3$ e π': $3x - 2y + 2z = 5$ sejam paralelos.

5 Determine a equação do plano que passa pelos pontos $A = (1, 2, 3)$; $B = (2, 3, 1)$ e $C = (3, 1, 2)$.

4.2 – Reta no $\mathbb{R}^3$

4.2.1 – Equações paramétricas da reta

Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto e $\vec{v} = (a, b, c)$ um vetor não nulo. Considere a reta r passando por P_0 e paralela a $\vec{v}$:



O ponto $P(x, y, z)$ está na reta r se, e somente se, $\overrightarrow{P_0P}$ é múltiplo de $\vec{v}$, isto é:

$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}$ (onde $t \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(a, b, c) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}}$$

que são as **equações paramétricas** da reta.

NOTA
t é chamado **parâmetro** da reta e $\vec{v}$ é um **vetor diretor** da reta no $\mathbb{R}^3$.

Exemplos:

i) Encontrar as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto (5, –1, 4) e é paralela ao vetor $\vec{v} = (2, 3, 4)$. Onde a reta corta o plano xOy?

O ponto $P(x, y, z)$ da reta satisfaz:

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 + 4t \end{cases}$$

onde t é um número real qualquer. Para que $P \in xOy$, devemos ter $z = 0$, isto é, $4 + 4t = 0 \Rightarrow t = -1$. Assim:

$$\left.\begin{aligned} x &= 5 + 2\,(-1) = 3 \\ y &= -1 + 3\,(-1) = -4 \\ z &= 4 + 4\,(-1) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{o ponto pedido é } (3, -4, 0)$$

ii) Dar as equações paramétricas da reta no $\mathbb{R}^3$ que passa pelos pontos A(2, 7, –1) e B(3, 0, 4).

Um vetor paralelo a esta reta é:
$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ -7,\ 5)$
Assim, as equações paramétricas da reta AB são:

$$\begin{cases} x = 2 + 1t \\ y = 7 - 7t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$$

Exercícios resolvidos:

1) Considere a reta r_1, que passa pelos pontos A(1, 2, 1) e B(2, 3, 3), e a reta r_2, que passa pelos pontos C(5, 6, 10) e D(6, 7, 13). Determine o ponto de intersecção delas, se houver.

Solução:

Um vetor paralelo à reta r_1 é $\vec{v}_1 = B - A = (1,\ 1,\ 2)$. Assim, a reta r_1 é representada por:

$$\begin{cases} x = 1 + 1 \cdot t_1 \\ y = 2 + 1 \cdot t_1 \\ z = 1 + 2 \cdot t_1 \end{cases}$$

Um vetor paralelo à reta r_2 é $\vec{v}_2 = D - C = (1,\ 1,\ 3)$. Assim a reta r_2 é dada por:

$$\begin{cases} x = 5 + 1 \cdot t_2 \\ y = 6 + 1 \cdot t_2 \\ z = 10 + 3 \cdot t_2 \end{cases}$$

NOTA
Observe que os parâmetros das duas retas não têm de ser iguais. Por isso, usamos notações diferentes.

Para que haja um ponto de intersecção, todas as equações devem ser satisfeitas para os mesmos valores de x, y e z:

$$\begin{cases} x = 1 + t_1 = 5 + t_2 \\ y = 2 + t_1 = 6 + t_2 \\ z = 1 + 2t_1 = 10 + 3t_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 - t_2 = 4 \\ t_1 - t_2 = 4 \\ 2t_1 - 3t_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow t_1 = 4 + t_2$$

$2(4 + t_2) - 3t_2 = 9 \Rightarrow 8 + 2t_2 - 3t_2 = 9 \Rightarrow -t_2 = 1 \Rightarrow t_2 = -1 \Rightarrow t_1 = 3$

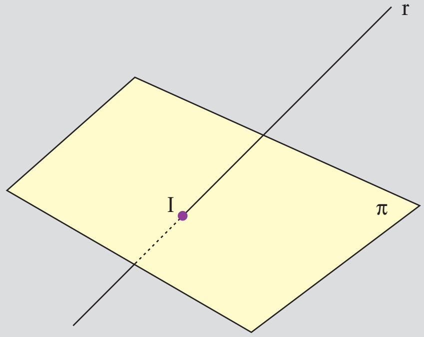
Verifica-se que as três equações são satisfeitas.

Então: $\begin{cases} x = 1 + t_1 = 4 \\ y = 2 + t_1 = 5 \\ z = 1 + 2t_1 = 7 \end{cases}$

<u>Resposta</u>: (4, 5, 7) é o ponto de intersecção das duas retas.

2) Encontre a intersecção do plano $2x - y + 3z + 4 = 0$ com a reta $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 2 \\ z = 4t + 3 \end{cases}$.

<u>Solução:</u>



Substituindo x, y e z na equação do plano, vem:
$2(2t + 1) - (3t + 2) + 3(4t + 3) + 4 = 0$
$13t + 13 = 0 \Rightarrow t = -1$
Substituindo t nas equações paramétricas da reta:
$x = 2(-1) + 1 = -1$
$y = 3(-1) + 2 = -1$
$z = 4(-1) + 3 = -1$

<u>Resposta</u>: O ponto de intersecção é (–1, –1, –1).

4.2.2 – Equações simétricas da reta

A partir das equações paramétricas da reta:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

no caso em que $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, podemos eliminar o parâmetro t, obtendo:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

que são as **equações simétricas** da reta.

NOTA
Esta representação de uma reta em $\mathbb{R}^3$ usa **duas** equações, enquanto para o plano bastava **uma** equação.

Exemplos:

i) Determinar as equações simétricas da reta que passa por A = (1, 2, –3) e é paralela ao vetor $\vec{v} = (2,\ -2,\ 1)$.

Temos:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{1}$$

ii) Determinar as equações da reta que passa por A = (1, –3, 0) e que é perpendicular ao plano de equação $2x + y + 3z - 5 = 0$.

Temos a equação do plano $2x + y + 3z - 5 = 0$ cujo vetor normal é $\vec{n} = (2,\ 1,\ 3)$, que será o vetor paralelo à reta pedida, logo:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-0}{3}$$

serão as equações simétricas da reta e fazendo $\frac{x-1}{2} = y+3 = \frac{z}{3} = t$, temos:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 3t \end{cases}$$

que serão as equações paramétricas da reta em questão.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Determine a equação da reta que passa pelo ponto P(2, 0, 3) e é paralela ao vetor $\vec{v} = (5, 1, 4)$.

2 Dê a equação da reta que passa pelos pontos A(1, 0, 2) e B(3, 1, –1).

3 Encontre a equação da reta r que passa pelo ponto A(1, 2, –1) e é perpendicular ao plano π: $3x - 2y + z = 1$.

4 Dê o ponto de intersecção da reta $\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{7} = \frac{z+2}{3}$ com o plano xOy.

5 Determine o ângulo formado pelas retas:

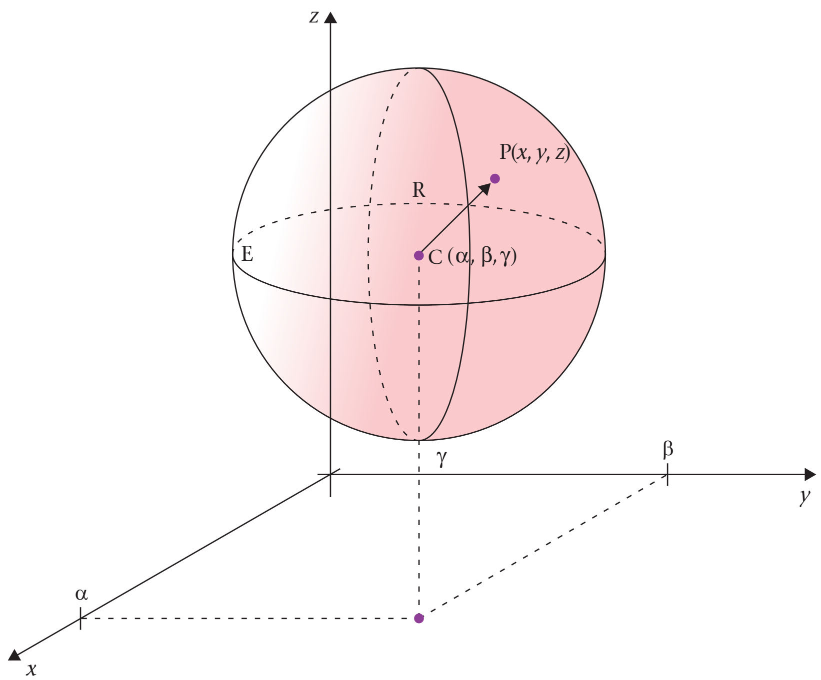
$$\frac{x+1}{\sqrt{2}} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1} \quad \text{e} \quad \frac{x-2}{\sqrt{2}} = \frac{y+2}{\sqrt{2}} = \frac{z}{1}$$

4.3 – Esfera

DEFINIÇÃO
Esfera.

Definimos como **esfera** o lugar geométrico dos pontos do espaço que são equidistantes de um ponto fixo, chamado **centro**. A distância entre o centro da esfera e um de seus pontos é denominada **raio** da esfera.

Seja C = (α, β, γ) o centro e R o raio. Chamemos P = (x, y, z) o ponto descrevente da esfera.



Temos então: $\forall P, \ \|\overrightarrow{CP}\| = R$

$\|\overrightarrow{CP}\| = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} = R$

que nos leva à equação da esfera no $\mathbb{R}^3$:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2 \quad \text{(equação reduzida)}$$

No caso particular em que o centro é a origem (0, 0, 0), vem:

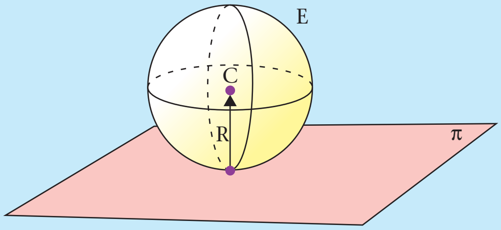
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Exemplos:

i) Determinar a equação da esfera de centro (1, –2, 3) e raio 2.
Basta fazer:
$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 2^2$

ii) Determinar a equação da esfera de centro na origem que passa pelo ponto (2, –2, –1).
O raio é $R = \sqrt{(2-0)^2 + (-2-0)^2 + (-1-0)^2} = 3$.
Assim, a equação da esfera é $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

iii) Determinar a equação da esfera tangente ao plano de equação $x - 2y + 2z - 6 = 0$ cujo centro é o ponto (3, 2, –1).

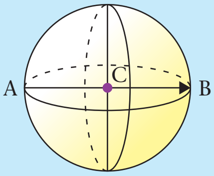


O raio da esfera será a distância do centro ao plano, logo:

$$R = \left| \frac{3 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 6}{\sqrt{1+4+4}} \right| = 3$$

A equação da esfera será:
$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$ ou
E: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 2z + 5 = 0$

iv) Determinar a equação da esfera cujo diâmetro tem extremos A = (4, 1, 1) e B = (5, 3, –1).



O centro será o ponto médio de $\overline{AB}$:

$$C = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{9}{2}, 2, 0 \right)$$

e o raio, a metade do módulo do vetor $\overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 2,\ -2)$.

$$R = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \| = \frac{1}{2} \sqrt{1+4+4} = \frac{3}{2}$$

A equação da esfera será:

$$E: \left(x - \frac{9}{2} \right)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2 = \frac{9}{4}$$

NOTA
Temos uma **esfera tangente** a um plano quando ambos possuem um único ponto em comum, ou quando a distância do plano ao centro da esfera é igual ao raio.

Exercícios resolvidos:

1) Calcule o centro e o raio das esferas dadas pelas equações:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z + \dfrac{13}{4} = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 8z + 29 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 18 = 0$

Solução:

a) Completando quadrados, temos:

$$x^2 - x + y^2 + 2y + z^2 - 4z = -\frac{13}{4}$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 = -\frac{13}{4} + \frac{1}{4} + 1 + 4$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + (x-2)^2 = 2$$

que é uma esfera de centro $\left(\dfrac{1}{2}, -1, 2\right)$ e raio $\sqrt{2}$.

b) Novamente, completamos os quadrados:
$x^2 + 4x + y^2 - 6y + z^2 + 8z = -29$
$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 8z + 16 = -29 + 4 + 9 + 16$
$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 0$
que representa apenas o ponto (–2, 3, –4) (esfera degenerada de raio 0).

c) Mais uma vez:
$x^2 - 6x + y^2 + 2y + z^2 - 2z = -18$
$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = -18 + 9 + 1 + 1$
$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = -7$

Como a soma de quadrados não pode ser negativa, não há ponto satisfazendo esta equação.

2) Determine os pontos de intersecção da esfera de centro (2, 1, 3) e raio 5 com a reta dada por:

$$\begin{cases} x = 8 + 3t \\ y = 13 + 8t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$$

Solução:

A equação da esfera será:
$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$

Substituindo as coordenadas do ponto $P(x, y, z)$ da reta:
$(8+3t-2)^2 + (13+8t-1)^2 + (6+3t-3)^2 = 25$
$(3t+6)^2 + (8t+12)^2 + (3t+3)^2 = 25$
$9t^2 + 36t + 36 + 64t^2 + 192t + 144 + 9t^2 + 18t + 9 = 25$
$82t^2 + 246t + 164 = 0$
$t^2 + 3t + 2 = 0$
$t = -1$ ou $t = -2$

Assim, os pontos de intersecção são:

$$\begin{cases} x_1 = 8 + 3 \cdot (-1) = 5 \\ y_1 = 13 + 8 \cdot (-1) = 5 \Rightarrow P_1\ (5, 5, 3) \\ z_1 = 6 + 3 \cdot (-1) = 3 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x_2 = 8 + 3 \cdot (-2) = 2 \\ y_2 = 13 + 8 \cdot (-2) = -3 \Rightarrow P_2\ (2, -3, 0) \\ z_2 = 6 + 3 \cdot (-2) = 0 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Dê a equação reduzida da esfera de centro C(–2, 0, 1) e raio igual a 4.

2 Determine o centro e o raio da esfera definida por $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 12z - 15 = 0$.

3 Determine o valor de k para que a esfera definida pela equação $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 10z + k = 0$ tenha o raio igual a 5.

4 Caso existam, encontre os pontos de intersecção da esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 6$ e a reta $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

5 Dê o centro e o raio das esferas de equações:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0$

4.4 – Apêndice

4.4.1 – Interpretação geométrica de sistemas lineares de 3 equações a 3 incógnitas

NOTA
Supõe-se nesta discussão que cada equação tem pelo menos um coeficiente não nulo.

Uma solução (x, y, z) do sistema linear:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$$

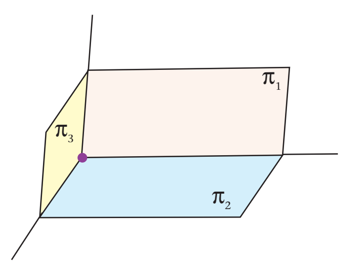
pode ser interpretada como um ponto de intersecção dos planos:
π_1: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$
π_2: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$
π_3: $a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$
Dependendo dos coeficientes, temos as seguintes possibilidades:

Sistema possível determinado

Os três planos se encontram num único ponto:

O produto misto dos vetores normais (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) e (a_3, b_3, c_3) é diferente de zero.

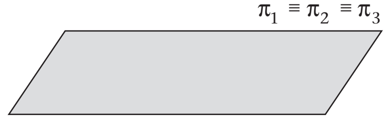
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$



Sistema possível indeterminado

Os três planos têm por intersecção uma reta ou são coincidentes. Mais especificamente, podemos ter:

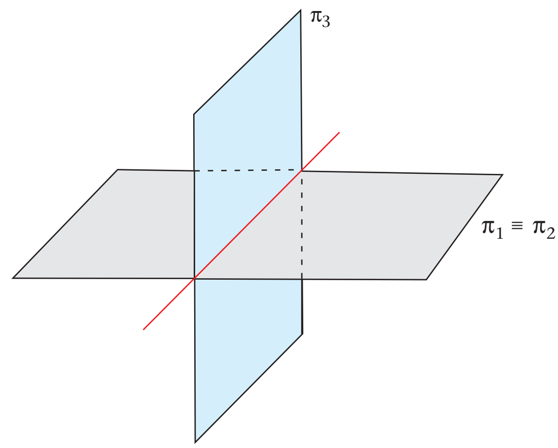
a) **Três planos coincidentes**



Neste caso, a segunda e a terceira equações são múltiplas da primeira:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z) + \lambda_1 d_1 = 0 \\ \lambda_2(a_1x + b_1y + c_1z) + \lambda_2 d_1 = 0 \end{cases} \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} \quad \text{e} \quad \frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{c_1}{c_3} = \frac{d_1}{d_3}$$

b) **Dois planos coincidentes e um transversal**



Por exemplo, isto ocorre no caso:

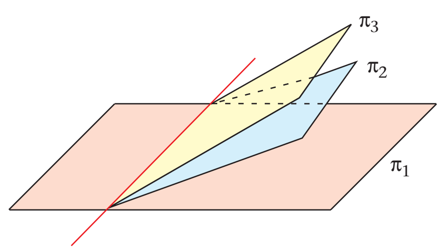
$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ \lambda(a_1x+b_1y+c_1z)+\lambda d_1=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \end{cases} \qquad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$$

e $(a_1, b_1, c_1) \neq k\,(a_3, b_3, c_3)$ $\quad k \neq 0$

Neste caso, uma das equações é múltipla da primeira e a terceira não é.

A intersecção será uma reta.

c) **Planos distintos com uma reta comum**



Isto ocorre quando uma equação é combinação linear de outras duas sem que cada duas delas sejam equivalentes:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \\ (a_1+\lambda a_2)x+(b_1+\lambda b_2)y+(c_1+\lambda c_2)z+d_1+\lambda d_2=0 \end{cases}$$

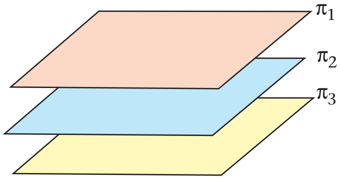
$(a_1,\ b_1,\ c_1) \neq k\ (a_2,\ b_2,\ c_2)$
$k \neq 0$
$a_3 = a_1 + \lambda a_2$, $b_3 = b_1 + \lambda b_2$,
$c_3 = c_1 + \lambda c_2$, $d_3 = d_1 + \lambda d_2$

A intersecção será uma reta.

Sistema impossível

Ocorre quando não há intersecção comum aos planos. Pode ser:

a) **Três planos paralelos**



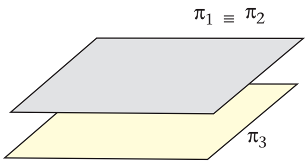
Por exemplo, isto ocorre para:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d_1=0 \\ ax+by+cz+d_2=0 \\ ax+by+cz+d_3=0 \end{cases}$$

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2} \quad \text{e} \quad \frac{a_2}{a_3}=\frac{b_2}{b_3}=\frac{c_2}{c_3}\neq\frac{d_2}{d_3}$$

$$\frac{a_1}{a_3}=\frac{b_1}{b_3}=\frac{c_1}{c_3}\neq\frac{d_1}{d_3}$$

b) **Dois planos coincidentes e um paralelo**



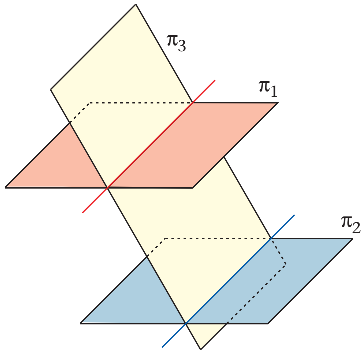
Por exemplo, isto ocorre para:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d_1=0 \\ \lambda(ax+by+cz+d_1)=0 \\ ax+by+cz+d_3=0 \end{cases}$$

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$$

$$\frac{a_1}{a_3}=\frac{b_1}{b_3}=\frac{c_1}{c_3}\neq\frac{d_1}{d_3}$$

c) **Dois planos paralelos e um transversal**



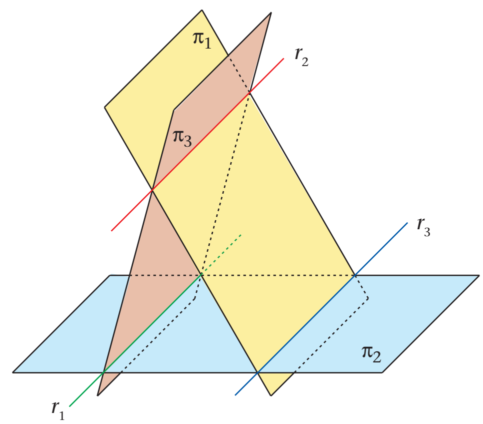
Por exemplo, isto ocorre para:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_1x+b_1y+c_1z+d_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \end{cases}$$

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$$

$$(a_1, b_1, c_1)\neq k\,(a_3, b_3, c_3) \quad k\neq 0$$

d) **Três planos que se intersectam dois a dois em retas paralelas**



Por exemplo, isto ocorre para:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + (c_1 + \lambda c_2)z + d_3 = 0 \end{cases}$$

onde $d_3 \neq d_1 + \lambda d_2$ e $(a_2, b_2, c_2) \neq k(a_1, b_1, c_1)$, $\forall\, k$.

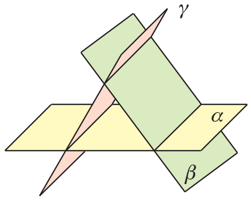
$(a_1, b_1, c_1) \neq k\,(a_2, b_2, c_2)$
$(a_1, b_1, c_1) \neq k'\,(a_3, b_3, c_3)$
$(a_2, b_2, c_2) \neq k''\,(a_3, b_3, c_3)$

e $a_3 = a_1 + \lambda a_2$; $b_3 = b_1 + \lambda b_2$;
$c_3 = c_1 + \lambda c_2 \quad \lambda \neq 0$
e $d_3 \neq d_1 + \lambda d_2$

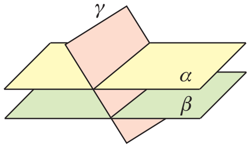
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Considere um sistema de três equações do primeiro grau, nas variáveis x, y e z. Se S é seu conjunto solução, quantas das configurações indicadas correspondem a $S = \varnothing$?

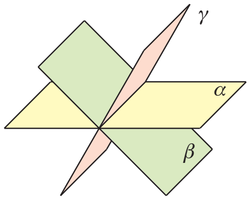
I



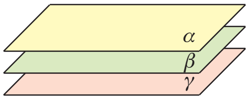
II



III



IV



(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

2 A respeito de duas retas, L_1 e L_2, de $\mathbb{R}^3$, dadas pelas equações:

$$L_1 \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - z = 2 \end{cases} \qquad L_2 \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

pode-se afirmar que:

(A) interceptam-se no ponto (2, 3, 4).

(B) não se interceptam.

(C) são coincidentes.

(D) interceptam-se no ponto (4, 4, 4).

(E) interceptam-se no ponto (1, 1, 1).

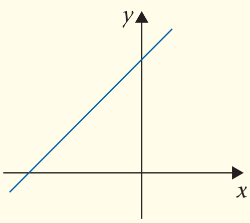
EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 Para que o plano $ax + by + cz + d = 0$ seja paralelo ao eixo Ox, é necessário que:

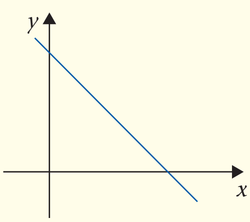
(A) $b = c = 0$
(B) $bc = 0$
(C) $d = 0$
(D) $a = 0$
(E) $a + b + c = 0$

2 O gráfico que melhor representa a intersecção do plano $\mathbb{R}^3$ de equação $x - y + z = 2$, com o plano xOy, é:

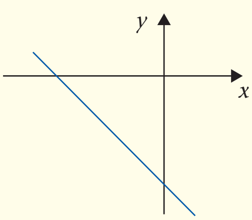
(A)



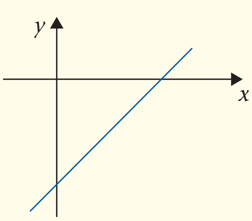
(B)



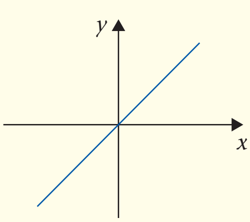
(C)



(D)



(E)



3 A distância do ponto A = (1, 2, –1) ao plano π: $x = 0$ é:

(A) $\frac{2}{3}$
(B) 3
(C) 0
(D) 1

4 (Unificado-RJ) O vetor unitário, normal ao plano de equação $x - y + \sqrt{2}\,z + 1 = 0$ é:

(A) $\vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\,\vec{k}$
(B) $\vec{i} - \vec{j}$
(C) $\sqrt{2}\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$
(D) $\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$
(E) $\frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$

5 Para que o vetor (4, 8, v) seja normal ao plano de equação $2x + 4y - 2z = 3$, v deve ser:

(A) –20
(B) 20
(C) –4
(D) 9
(E) 6

6 Um vetor perpendicular ao plano $4z + 3x - 5 = 0$ é:

(A) (4, 3, –5)
(B) (4, 3, 0)
(C) (4, 0, 3)
(D) (6, 0, 8)
(E) (3, 4, 0)

7 Em $\mathbb{R}^3$, um vetor paralelo ao plano $4x - 6z = 3$ é:

(A) (2, 0, –3)
(B) (4, –6, 3)
(C) (3, 7, 2)
(D) (–2, 0, 3)
(E) (–6, 1, 4)

8 O único ponto (x, y, z) do $\mathbb{R}^3$ pertencente aos três planos $2x + 3y - z = 24$, $x - y + z = 1$ e $3x - 2y + 2z = 0$ é:

(A) (1, 0, 3)
(B) (7, 7, 1)
(C) (7, 4, 2)
(D) (7, 2, 4)
(E) (7, 2, –4)

9 O plano que passa pela origem do sistema Oxyz e é paralelo aos vetores $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ é:

(A) $x = 0$
(B) $x - y + z = 0$
(C) $z = 0$
(D) $z = 1$

10 (Uerj) São dadas as coordenadas de três pontos no $\mathbb{R}^3$: A(1, 0, 0); B(–1, 2, 0) e C(2, 0, –1). Baseado nessas informações:

a) prove que esses três pontos não pertencem à mesma linha reta;

b) escreva a equação cartesiana do plano que contém esses pontos.

11 (UFF-RJ) Determine a equação do plano que contém, simultaneamente:

a) o eixo Z;

b) a reta $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3}t \\ z = 0 \end{cases}$.

12 A equação do plano que passa pela origem e é perpendicular ao vetor (1, –2, 1) é:

(A) $2x + y - z = 0$

(B) $x - 2y + z = 0$

(C) $-x + 2y + z = 0$

(D) $x + y + z = 0$

(E) $x + 2y + z = 0$

13 A equação do plano perpendicular à reta determinada pelos pontos (2, 2, –4) e (7, –1, 3) e que passa pelo ponto (–5, 1, 2) é:

(A) $5x - 3y + 7z - 12 = 0$

(B) $3x + 5y - 7z + 24 = 0$

(C) $5x - 3y + 7z + 14 = 0$

(D) $3x - 5y + 7z - 6 = 0$

(E) $5x + 3y - 7z + 36 = 0$

14 Uma reta que passa pela origem de $\mathbb{R}^3$ intercepta a esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ nos pontos P(u, v, w) e Q(r, s, t). Podemos afirmar que:

(A) $u = -r$, $v = -s$, $w = -t$

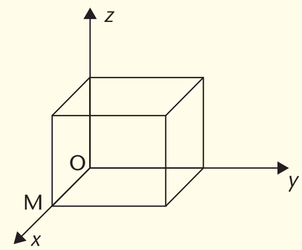
(B) $u = r$, $v = s$, $w = t$

(C) $u = -r$, $v = s$, $w = t$

(D) $u = r$, $v = -s$, $w = t$

(E) $u = r$, $v = s$, $w = -t$

15 (UFF-RJ) A figura abaixo representa um cubo de aresta 2.



A equação do plano que contém os pontos M, O e o ponto de encontro das diagonais internas do cubo é:

(A) $x + y + z = 0$

(B) $x - y = 0$

(C) $x + z = 0$

(D) $x - y - z = 0$

(E) $y - z = 0$

16 (Uerj) Considere os pontos A(0, 0, 0), B(1, 2, 3) e C(3, 2, 1) do $\mathbb{R}^3$. Utilizando esses pontos, determine:

a) as coordenadas de um vetor não nulo, do $\mathbb{R}^3$, perpendicular ao plano que contém os pontos A, B e C;

b) a equação cartesiana do plano que contém os pontos A, B e C.

17 Determine a equação do plano ortogonal ao segmento de extremos A(1, 2, –3) e B(3, 4, 9) passando pelo seu ponto médio.

18 Escreva a equação do plano determinado pelas retas concorrentes:

$$(r)\ \frac{x-2}{4} = y + 3 = \frac{4-z}{2}$$

$$(s)\ \begin{cases} x = t + 6 \\ y = 3t - 2 \\ z = 2 - t \end{cases}$$

19 A reta do $\mathbb{R}^3$ de equação $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = bt + 3,\ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$ é paralela ao plano $x + 4y + z + 9 = 0$. Qual o valor de b?

20 A reta de equação $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$ intercepta o plano $x + y + z = 0$ no ponto:

(A) (2, 1, 0)

(B) (1, 1, 1)

(C) (0, 0, 0)

(D) (–1, 4, –3)

(E) (2, 1, –3)

21 O conjunto solução do sistema de três variáveis $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$ é uma reta em $\mathbb{R}^3$. Determine a qual dos três planos coordenados XY, XZ ou YZ, a reta solução é paralela.

22 Dê a equação da reta que passa pelo ponto P(2, 8, –3) e é ortogonal ao plano $x + 2y - 3z = 2$.

23 Calcule as coordenadas do ponto em que a reta $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z}{1}$ fura o plano $x - 2y - 7 = 0$.

24 O conjunto dos pontos do $\mathbb{R}^3$ tais que $x^2 + y^2 + z^2 + 4y = 21$ é:

(A) uma superfície esférica de raio $\sqrt{21}$.

(B) vazio.

(C) uma superfície esférica passando pela origem.

(D) uma superfície esférica de raio 5.

(E) constituído de um só ponto.

25 A superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$:

(A) é tangente ao plano xOy.

(B) passa pelo ponto (1, 1, 1).

(C) é tangente ao eixo Ox.

(D) não possui pontos de cota negativa.

(E) é tangente ao plano yOz.

26 Uma esfera é tangente ao plano $z = 0$. Se (1, 1, 2) é o ponto da esfera diametralmente oposto ao ponto de tangência, o raio da esfera é:

(A) 4

(B) $2\sqrt{2}$

(C) 2

(D) $\sqrt{2}$

(E) 1

27 Para que a esfera de equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - m)^2 = 9$ seja tangente ao plano $z = 0$, é necessário que:

(A) $|m| = 9$

(B) $|m| = 3\sqrt{3}$

(C) $|m| = 2\sqrt{3}$

(D) $|m| = 3$

(E) $|m| = \sqrt{3}$

28 Determine a área da região de intersecção da esfera: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y + 2z - 20 \leq 0$ com o plano xOz.

29 (Uerj) Considere a reta do $\mathbb{R}^3$, representada pelas equações paramétricas abaixo.

$$\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=2\sqrt{2},\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Essa reta intercepta a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, nos pontos P e Q. A distância entre esses pontos é igual a:

(A) $\sqrt{2}$

(B) $2\sqrt{2}$

(C) 3

(D) 4

(E) 5

30 (Unirio-RJ) São dados os pontos O(0, 0, 0) e A(1, 0, 2). O produto vetorial $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}$, onde C é centro da esfera $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 10$, é o vetor:

(A) (–2, 4, 1)

(B) (–2, –4, 1)

(C) (2, 0, 0)

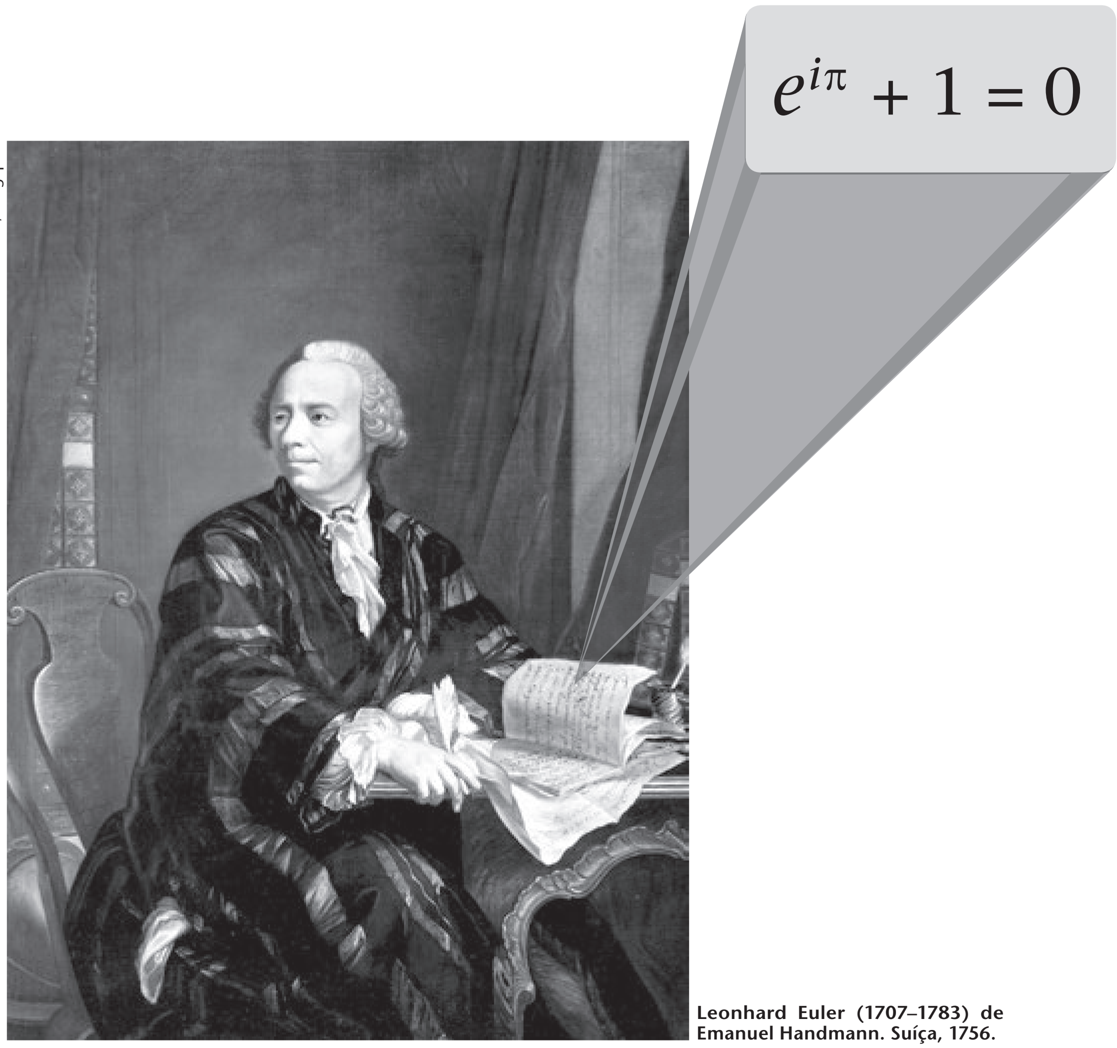
(D) (1, 1, –2)

(E) (1, –1, 2)

CAPÍTULO V

NÚMEROS COMPLEXOS

D. H. Teuffen Interfoto/Imageplus



Leonhard Euler (1707–1783) de Emanuel Handmann. Suíça, 1756.

Os números complexos foram criados para resolver equações que são impossíveis no universo dos reais. Apesar de seu caráter abstrato, os números complexos são surpreendentemente úteis em análise de sinais e eletromagnetismo, geometria, análise de sistemas e outras inúmeras áreas. Na imagem, o matemático suíço Leonhard Euler e a identidade de Euler, considerada por muitos a mais bela da Matemática, pois inclui as cinco principais constantes matemáticas e as três principais operações numa igualdade surpreendente.

5 – Números complexos

5.1 – O número *i*

A insuficiência do conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) para resolver as equações do tipo $x + a = b$, sendo $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ e $a > b$, levou à criação dos números negativos e à ampliação do conjunto dos naturais para o conjunto dos inteiros ($\mathbb{Z}$).

O conjunto $\mathbb{Z}$ mostrou-se também insuficiente para resolver as equações do tipo $qx = p$, com $q \in \mathbb{Z}^*$ e $p \in \mathbb{Z}$, quando q não divide p. Este fato levou à criação dos números racionais, do tipo $\frac{p}{q}$ em que $q \neq 0$, p e q inteiros, com a ampliação do conjunto dos inteiros para o conjunto dos racionais ($\mathbb{Q}$).

A descoberta dos irracionais (números que não se escrevem sob a forma $\frac{p}{q}$ acima) completa o conjunto dos reais ($\mathbb{R}$).

Mas o conjunto dos reais ainda se mostrou insuficiente para a resolução de equações que recaem no tipo $x^2 = -a$, com $a > 0$. Tornou-se, então, necessária a criação de novos números. São os números complexos. Tais números devem ser tais que os reais sejam um caso particular, de modo que suas propriedades formais sejam as mesmas dos reais.

DEFINIÇÃO
Unidade imaginária, ou seja, *i*. Número complexo *z*.

Cria-se então uma unidade chamada **unidade imaginária**, com a seguinte propriedade característica:

$$i^2 = -1$$

Define-se, então, como **número complexo** um número constituído de duas unidades diferentes, a unidade real 1 e a unidade imaginária i. Representando pela letra z este número complexo, temos:

$$z = a \cdot 1 + b \cdot i \text{ ou simplesmente } z = a + bi,$$

onde a é chamada parte real de z e b, parte imaginária do complexo z. Representa-se por:

$$\mathrm{Re}(z) = a \text{ e } \mathrm{Im}(z) = b$$

O conjunto de todos os números complexos é denotado por $\mathbb{C}$.

Exemplos:

i) $z = 3 + 4i$ é um número complexo cuja parte real é 3 e a parte imaginária é 4.

ii) $z = -1 + i\sqrt{3} \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = -1 \text{ e } \mathrm{Im}(z) = \sqrt{3}$

Quando $a = 0$ e $b \neq 0$, o número complexo $z = 0 + bi = bi$ é chamado **imaginário puro**.

Exemplos:

i) $z_1 = -2i,\ z_2 = \frac{1}{2}i,\ z_3 = i\sqrt{3}$ são imaginários puros.

ii) Calcular x real de modo que o número complexo $z = (x + 2) + 2xi$ seja um imaginário puro.

Basta fazer $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$. O número complexo fica então $z = 0 - 4i =$ $= -4i$.

Quando $b = 0$, o número complexo $z = a + 0i$ reduz-se ao número real $z = a$. Os reais são então um subconjunto do conjunto dos complexos $\mathbb{C}$.

5.1.1 – Números complexos conjugados

São números complexos com a mesma parte real e partes imaginárias simétricas.

Sendo $z = a + bi$, seu conjugado será $\bar{z} = a - bi$.

Exemplos:

i) $z = 3 + 5i \Leftrightarrow \bar{z} = 3 - 5i$

ii) Calcular x e y reais de modo que $(x + y - 1) + xi$ e $5 - 2yi$ sejam complexos conjugados.

Devemos ter: $\begin{cases} x + y - 1 = 5 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ x = 2y \end{cases}$

Logo, $y = 2$ e $x = 4$.

É fácil perceber que a conjugação é uma função involutiva, isto é, $\bar{\bar{z}} = z$.
Assim, $z = 3 + 4i \Rightarrow \bar{z} = 3 - 4i \Rightarrow \bar{\bar{z}} = 3 + 4i = z$.

NOTA
Uma função f involutiva é tal que $f(f(x)) = x$.

5.1.2 – Igualdade de números complexos

Dois números complexos $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ são iguais se, e somente se, $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$.

Dois números complexos são iguais quando têm partes reais iguais assim como partes imaginárias iguais.

Exemplo:

Calcular x e y reais sabendo que os complexos $z = (x + 1) + (2y - 2)i$ e $w = (y - 4) + (x + 3)i$ são iguais.

Devemos ter: $\begin{cases} x + 1 = y - 4 \\ 2y - 2 = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -5 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$

O sistema acima resolvido resulta em $y = 0$ e $x = -5$ e os números complexos ficam:
$z = -4 - 2i$ e $w = -4 - 2i$.

5.1.3 – Número complexo nulo

É o complexo cujos componentes real e imaginário são nulos.

$$0 = 0 + 0i$$

Temos $z = a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0$ e $b = 0$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Dê o valor do número real p para que o número complexo na forma $z = (p - 2) + 3i$ seja o de um imaginário puro.

2 Encontre os reais p e q para que o número complexo na forma $z = (p - 3) + (q^2 - 16)i$ seja:

a) um número real;

b) um número imaginário puro.

3 Dê o valor do número real p para que $z = \frac{2}{3} + (p - 4)$ seja um número real.

4 Encontre o real m para que o número complexo na forma $z = 1 + (m^2 - 64)i$ seja um número real.

5 Encontre os reais x e y tal que $(x + 1) + (y - 3)i = 4i$.

6 Encontre o real p tal que $(p^2 - 4) + (p + 2)i = 0$.

7 Quais os valores reais de x e y tais que $(2x - 6) + (y + 7)i = 0$?

8 Determine os reais x e y de modo que $5 + (x + 4y)i = (2x + y) + 6i$.

9 Dê o conjugado de cada um dos números complexos abaixo:

a) $z = 4 + 5i$

b) $z = 1 - 2i$

c) $z = -5 - 3i$

d) $z = -5i$

e) $z = i + 3$

f) $z = -2$

10 Se $z = a + bi$ é um número complexo, prove que:

a) $\overline{\overline{z}} = z$

b) $\overline{\overline{\overline{z}}} = \overline{z}$

5.2 – Operações com números complexos

5.2.1 – Adição

DEFINIÇÃO
Soma de dois números complexos.

Chama-se **soma de dois números complexos** $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ o complexo

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

em que a parte real é a soma das partes reais e a parte imaginária é a soma das partes imaginárias dos dois complexos.

Exemplos:

i) $(1 + 2i) + (5 + 3i) = (1 + 5) + (2 + 3)i = 6 + 5i$

ii) $(2 + 3i) + (5 - 3i) = (2 + 5) + (3 - 3)i = 7 + 0i = 7$

iii) $(3 + 4i) + (-3 + 6i) = (3 - 3) + (4 + 6)i = 0 + 10i = 10i$

iv) $(3 + 5i) + (0 + 0i) = 3 + 5i$

A soma de dois complexos conjugados é um número real.

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi \Rightarrow z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (b - b)i = 2a + 0i = 2a$$

Propriedades da adição

1) Comutatividade
$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

2) Associatividade
$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
Neste caso escreve-se apenas $z_1 + z_2 + z_3$.

5.2.2 – Subtração

Simétrico de um número complexo

DEFINIÇÃO
Simétrico de um número complexo.

Chama-se **simétrico de um número complexo** $z = a + bi$ o complexo $-z$ tal que $z + (-z) = 0 + 0i$.

Se $z = a + bi$ e $-z = x + yi$, temos:
$(a + bi) + (x + yi) = 0 + 0i$

$$\begin{cases} a + x = 0 \\ b + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -a \\ y = -b \end{cases}, \text{ logo: } \boxed{-z = -a + -bi}$$

O simétrico de um complexo é outro complexo cujos componentes são os simétricos dos correspondentes real e imaginário do complexo dado.

Exemplos:

i) $z = 2 + 3i \Rightarrow -z = -2 - 3i$

ii) $z = 3 - 2i \Rightarrow -z = -3 + 2i$

Subtração

Chama-se **diferença de dois números complexos** $z_1 - z_2$ a soma de z_1 com o simétrico de z_2.

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

DEFINIÇÃO
Diferença de dois números complexos.

Assim, se $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, temos:

$$z_1 - z_2 = a_1 + b_1 i + (-a_2 - b_2 i)$$

$$\boxed{z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i}$$

Exemplos:

i) $(2 + 3i) - (1 + i) = (2 - 1) + (3 - 1)i = 1 + 2i$

ii) $(8 + 4i) - (3 - 2i) = 8 + 4i - 3 + 2i = 5 + 6i$

5.2.3 – Multiplicação

Denomina-se **produto de dois números complexos** $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ o complexo que se obtém multiplicando-se como binômios algébricos e levando em conta que $i^2 = -1$.

DEFINIÇÃO
Produto de dois números complexos.

Assim, $z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2$.
Como $i^2 = -1$, vem:

$$\boxed{z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i}$$

Exemplos:

i) $(1 + i)(4 - i) = 4 - i + 4i - i^2 = 4 + 3i - (-1) = 5 + 3i$

ii) $(3 + 4i)(3 - 4i) = 3^2 - (4i)^2 = 9 - 16i^2 = 9 - 16(-1) = 25$

iii) $(1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 = 1 + 1 = 2$

Norma de um número complexo

Chama-se **norma de um número complexo** o produto desse complexo por seu conjugado.

DEFINIÇÃO
Norma de um número complexo.

Se $z = a + bi \Rightarrow \mathrm{N}(z) = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$, então:

$$\boxed{\mathrm{N}\,(z) = a^2 + b^2 \geqslant 0}$$

Exemplos:

i) $z = 2 + 3i \Rightarrow N(z) = 2^2 + 3^2 = 13$

ii) $z = 1 - i \Rightarrow N(z) = 1^2 + (-1)^2 = 2$

Propriedades da multiplicação

1) Associatividade
$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3),\ \forall\ z_1,\ z_2 \text{ e } z_3 \in \mathbb{C}$

2) Comutatividade
$z_1z_2 = z_2z_1,\ \forall\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$

3) Distributividade
$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3,\ \forall\ z_1,\ z_2 \text{ e } z_3 \in \mathbb{C}$

Inverso de um número complexo

DEFINIÇÃO
Inverso de um número complexo.

Chama-se **inverso de um número complexo** $z = a + bi \neq 0$ o complexo z^{-1} tal que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1 + 0i$.

Para determiná-lo, suponhamos $z^{-1} = x + yi$.
Devemos ter:
$(a + bi)(x + yi) = 1 + 0i$
$ax + ayi + bxi + byi^2 = 1 + 0i$
Como $i^2 = -1$, vem $(ax - by) + (ay + bx)i = 1 + 0i$, donde:

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{a}{a^2 + b^2} \text{ e } y = -\frac{b}{a^2 + b^2} \Rightarrow z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Então:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{N(z)}$$

O inverso de um complexo é o quociente do seu conjugado por sua norma.

Exemplos:

i) $z = 1 + i \Rightarrow z^{-1} = \frac{1 - i}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

ii) $(3 - 4i)^{-1} = \frac{3 + 4i}{3^2 + 4^2} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$

iii) $\frac{1}{2 + i} = \frac{2 - i}{2^2 + 1^2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$

5.2.4 – Divisão

Sejam $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ dois números complexos. Para efetuar a divisão $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)}{(a_2 + b_2 i)}$, basta multiplicar ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador z_2:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = (a_1 + b_1 i)\frac{\overline{z_2}}{\mathrm{N}(z_2)}$$

Como $\frac{\overline{z_2}}{\mathrm{N}(z_2)} = z_2^{-1}$ é o inverso de z_2, isto é equivalente a multiplicar z_1 pelo inverso de z_2.

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}}$$

Exemplos:

i) $$\frac{3+5i}{1+i} = \frac{(3+5i)}{(1+i)}\frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{3-3i+5i-5i^2}{1^2+1^2} = \frac{3+2i+5}{2}$$

$$\frac{3+5i}{1+i} = \frac{8+2i}{2} = 4+i$$

ii) $$z = \frac{10+20i}{3-i} = \frac{(10+20i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{30+10i+60i+20i^2}{3^2+1^2}$$

$$z = \frac{30+70i-20}{10} = \frac{10+70i}{10} = 1+7i$$

iii) $$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{1^2+\ 1^2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Efetue.

a) $(2 + 3i) + (4 + 5i)$

b) $(3 + 4i) - (1 + 2i)$

c) $(6 + 5i) + (1 - i)$

d) $\left(\frac{1}{2} + i\right) - \left(\frac{2}{3} - i\right) + (6 - 2i)$

e) $(\sqrt{3} + i) - (\sqrt{5} + i)$

f) $(7 + 3i) - (5 - 3i) + (4 - 7i)$

2 Calcule p e q reais, tais que $(4 + 5i) - (-1 + 3i) = p + qi$.

3 Encontre x e y reais, tais que $(3 + xi) + (y - 4i) = 7 + 3i$.

4 Efetue.

a) $(4 + 3i) \cdot (2 - 5i)$

b) $(1 + 3i) \cdot (2 + 4i)$

c) $(3 - 6i) \cdot (1 - 2i)$

d) $\left(\frac{1}{2} - 2i\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + i\right)$

e) $(4 + 3i)^2$

5 Encontre $z \in \mathbb{C}$, tal que $z^2 = 2i$.

6 Seja $z = 3 + 4i$ um número complexo, encontre:

a) $\overline{z}$

b) z^2

c) $\overline{z^2}$

d) $(\overline{z})^2$

e) Compare os itens **c** e **d**.

7 Sendo $z_1 = 3 + i$ e $z_2 = 2 + i$, obtenha $\frac{z_1}{z_2}$.

8 Efetue.

a) $\frac{3+2i}{1+i}$

b) $\frac{6}{5i}$

c) $\frac{2+i}{5-3i}$

d) $\frac{5+i}{i}$

e) $\frac{2-5i}{i}$

9 Seja o número complexo $z = 3 - 4i$. Encontre:

a) $\overline{z}$;

b) o inverso de z;

c) o conjugado do inverso de z^2;

d) o inverso do produto $z \cdot i$.

10 Dado o número complexo $z = 1 + \sqrt{2}i$, escreva o complexo z^{-1}.

5.3 – Potências sucessivas de *i*

Convencionamos $\boxed{i^0 = 1}$, $\boxed{i^1 = i}$ e $\boxed{i^2 = -1}$.
Assim, temos:

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i \Rightarrow \boxed{i^3 = -i}$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1 \Rightarrow \boxed{i^4 = 1}$

$i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$

etc.

Qualquer potência de expoente natural n de i é igual à que tem como expoente o resto da divisão de n por 4.

Com efeito, quando se divide um número natural por 4, obtêm-se um quociente q e um resto $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Então:

$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r$

Por outro lado, o resto da divisão de um número natural por 4 é o mesmo resto que o do número formado pelos algarismos das dezenas e das unidades.

Basta ver que, se $n = kl \ldots cdu = kl \ldots c00 + du$

Como $kl \ldots c00 = kl \ldots c \cdot 100$, sendo múltiplo de 100 será múltiplo de 4, logo o responsável pelo resto da divisão será o número $du = 10d + u$.

Assim:

$i^{45720} = i^{20} = i^0 = 1$

$i^{32283} = i^{83} = i^3 = -i$

$i^{123458} = i^{58} = i^2 = -1$

$i^{181} = i^{81} = i^1 = i$

Em suma:

$$\boxed{i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i,\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

Se as potências tiverem expoentes negativos:

$i^{-1} = 1 \cdot i^{-1} = i^4 \cdot i^{-1} = i^3 = -i$

$i^{-2} = 1 \cdot i^{-2} = i^4 \cdot i^{-2} = i^2 = -1$

$i^{-3} = 1 \cdot i^{-3} = i^4 \cdot i^{-3} = i^1 = i$

etc.

Exemplos:

i) $$z = \frac{i^{10} + i^{11} + i^{12} + i^{13} + i^{14}}{i^{20} + i^{21} + i^{22} + i^{23} + i^{24} + i^{25}}$$

Como $i^{10} + i^{11} + i^{12} + i^{13} = 0$ e $i^{20} + i^{21} + i^{22} + i^{23} = 0$, temos:

$$z = \frac{0 + i^{14}}{0 + i^{24} + i^{25}} = \frac{i^2}{i^0 + i} = \frac{-1}{1+i} = \frac{-1 \cdot (1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1+i}{2}$$

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

NOTA
A soma de 4 potências consecutivas de i é nula. Por exemplo, $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} + i^{4n+3} = 1 + i - 1 - i = 0$.

ii) Calcular a soma $z = 1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{99}$.

Agrupando de 4 em 4, temos 100 parcelas, ou seja, 25 grupos de 4 potências consecutivas.

Logo: $z = (1 + i + i^2 + i^3) + (i^4 + i^5 + i^6 + i^7) + ... + (i^{96} + i^{97} + i^{98} + i^{99})$

$z = 0 + 0 + ... + 0 = 25 \cdot 0 = 0$

Outra solução:

Observando que temos uma PG de razão i, aplicaremos a fórmula da soma dos termos $S_n = \dfrac{a_n q - a_1}{q - 1}$.

Logo:

$$z = \frac{i^{99} \cdot i - 1}{i - 1} = \frac{i^{100} - 1}{i - 1} = \frac{1 - 1}{i - 1} = 0$$

Exercício resolvido:

Calcule a soma $z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + ... + 99i^{98}$.

Solução:

Multiplicando z por i, vem:

$z \cdot i = i + 2i^2 + 3i^3 + ... + 98i^{98} + 99i^{99}$

$z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + ... + 99i^{98}$

Subtraindo $z - zi$, vem:

$$z - zi = 1 + i + i^2 + ... + i^{98} - 99i^{99}$$

$$z(1 - i) = i^{96} + i^{97} + i^{98} - 99 \cdot i^3$$

$$z(1 - i) = 1 + i - 1 + 99i = 100i$$

$$z = \frac{100i}{1 - i} = 100i\frac{1 + i}{1^2 + 1^2} = -50 + 50i$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Calcule:

a) i^{23}

b) i^{46}

c) i^{678}

d) $(-i)^{28}$

e) i^{229}

2 Qual é o valor de $i^0 + i^1 + i^2 + \ldots + i^9 + i^{10}$?

3 Calcule:

a) $i \cdot i^{18}$

b) $\dfrac{i^{79}}{i^{32}}$

c) $i^5 + i^2$

d) $i^{180} + i^{123}$

e) $3i^{-1} + i^{-2}$

4 Seja o número complexo:
$z = i^{101} + i^{102} + i^{103} + i^{104} + i^{105} + i^{106}$.
Calcule z^2.

5 Calcule a soma $1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{27}$.

5.4 – Raiz quadrada

DEFINIÇÃO
Módulo de um número complexo.

Chama-se **módulo de um número complexo** $z = a + bi$ o número positivo ou nulo $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ ou $|z| = \sqrt{N(z)}$.

Exemplos:

i) $z = 3 - 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{9+16} = 5$

ii) $|5-12i| = \sqrt{25+144} = 13$

iii) $|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$

Para calcular a raiz quadrada de um complexo $z = a + bi$, esperamos que seja um complexo $x + yi$ com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

Queremos:

$a + bi = (x + yi)^2$

$a + bi = x^2 + 2xyi + y^2i^2$

$a + bi = (x^2 - y^2) + 2xyi$

Devemos ter: $\begin{cases} x^2 - y^2 = a & \text{(I)} \\ 2xy = b & \text{(II)} \end{cases}$

Se $b \neq 0$, de (II) tiramos $y = \dfrac{b}{2x}$, com $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Substituindo em (I), vem:

$$x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a \Rightarrow 4x^4 - b^2 = 4ax^2 \text{ ou ainda } 4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2+16b^2}}{8} = \frac{4a \pm 4\sqrt{a^2+b^2}}{8} = \frac{a \pm |z|}{2}$$

Como $z \neq 0$, então $a < |z|$, ou seja, $a - |z| < 0$, o que mostra que o sinal negativo leva a $x \notin \mathbb{R}$, que não serve como solução. Temos então:

$$x^2 = \frac{a+|z|}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a+|z|}{2}}$$

Com isto, de (I), temos:

$$y^2 = x^2 - a = \frac{a+|z|}{2} - a = \frac{|z|-a}{2} \text{ e a raiz quadrada fica:}$$

$$\sqrt{a+bi} = \pm\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} \pm \sqrt{\frac{|z|-a}{2}} \cdot i$$

De (II), vem que $xy = \dfrac{b}{2}$. Assim, se b é positivo, x e y devem ter o mesmo sinal. Se b é negativo, x e y devem ter sinais contrários.

NOTA
Se $b = 0$, então $z = a + bi = a$ é real. Neste caso:
$a > 0 \Rightarrow \sqrt{z} = \sqrt{a}$.
$a < 0 \Rightarrow \sqrt{z} = \pm(\sqrt{a})\,i$.

Em suma:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + \left(\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)i\right] \quad \text{se} \quad b>0$$

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} - \left(\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)i\right] \quad \text{se} \quad b<0$$

NOTA
Observe que, exceto pelo caso em que $z \in \mathbb{R}$ e $z > 0$, não faz sentido discutir raiz positiva de z. Todo complexo tem duas raízes quadradas (exceto 0).

Exemplos:

i) $\sqrt{3-4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{3+5}{2}} - \sqrt{\frac{5-3}{2}}i\right)$

$\sqrt{3-4i} = \pm(2-i)$

ii) $\sqrt{-15-8i}$

Temos $|-15-8i| = \sqrt{225+64} = 17$

$\sqrt{-15-8i} = \pm\left(\sqrt{\frac{17+(-15)}{2}} - \sqrt{\frac{17-(-15)}{2}}i\right) = \pm(1-4i)$

iii) $\sqrt{5+12i}$. Temos $|5+12i| = \sqrt{25+144} = 13$

$\sqrt{5+12i} = \pm\left(\sqrt{\frac{13+5}{2}} + \sqrt{\frac{13-5}{2}}i\right) = \pm(3+2i)$

iv) $\sqrt{-4} = \pm 2i$

v) $\sqrt{16} = 4$

Exercícios resolvidos:

1) Calcule o complexo z tal que $iz + 2\bar{z} = i - 1$.

Solução:

Suponhamos $z = x + yi$ com x, y reais. Substituindo na equação, vem:

$i(x+yi) + 2(x-yi) = -1+i$

$ix + yi^2 + 2x - 2yi = -1+i$

Como $i^2 = -1$, vem:

$ix - y + 2x - 2yi = -1+i$

$(2x-y)+(x-2y)i = -1+i \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=-1 \\ x-2y=1 \end{cases}$

Resolvendo o sistema: $y = -1$ e $x = -1$

Resposta: O complexo será $z = -1 - i$.

2) Calcule x real de modo que $\dfrac{2-xi}{1+2xi}$ seja um imaginário puro.

Solução:

Temos $\dfrac{2-xi}{1+2xi}=\dfrac{(2-xi)(1-2xi)}{(1+2xi)(1-2xi)}=\dfrac{2-4xi-xi+2x^2i^2}{1+4x^2}$,

então $\dfrac{2-xi}{1+2xi}=\dfrac{2-2x^2}{1+4x^2}+\dfrac{-5xi}{1+4x^2}$

Para este complexo ser um imaginário puro devemos ter:

$\dfrac{2-2x^2}{1+4x^2}=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

Resposta: O complexo fica $0\pm\dfrac{-5i}{5}=\pm i$.

3) Sendo $u = 1 + i$ e $v = 1 - i$, calcule $u^{52} \cdot v^{-51}$.

Solução:

$u^{52}\cdot v^{-51}=u^{52}\cdot v^{-52}\cdot v^{1}=(uv^{-1})^{52}\cdot v$

$uv^{-1}=(1+i)\cdot(1-i)^{-1}=(1+i)\cdot\dfrac{1+i}{2}=\dfrac{1+2i+i^2}{2}=i$

$(uv^{-1})^{52}=i^{52}=i^{0}=1$ então $u^{52}\cdot v^{-51}=1^{52}\cdot v=v=1-i$

Resposta: $u^{52} \cdot v^{-51} = 1 - i$

4) Resolva a equação $|\,z\,| + z = 2 + i$.

Solução:

Suponhamos $z=x+yi \Rightarrow |z|=\sqrt{x^2+y^2}$, então:

$\sqrt{x^2+y^2}+x+yi=2+i$, logo:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+x=2\\ y=1\end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2+1}=2-x \quad (x\le 2)$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$x^2+1=4-4x+x^2 \Rightarrow 4x=3 \Rightarrow x=\dfrac{3}{4} \Rightarrow z=\dfrac{3}{4}+i$

Testando-o na equação original, vemos que ele a satisfaz:

$\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+1^2}+\dfrac{3}{4}+i=2+i \Rightarrow \sqrt{\dfrac{25}{16}}+\dfrac{3}{4}+i=2+i \Rightarrow \dfrac{5}{4}+\dfrac{3}{4}+i=$
$=2+i \Rightarrow 2+i=2+i$

Resposta: O complexo será $z=\dfrac{3}{4}+i$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Dê o módulo de $z = \sqrt{3} - i$.

2 Calcule o módulo de cada um dos números complexos:

a) $z = 4 + i$

b) $z = 2 - i$

c) $z = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}i$

d) $z = -6i$

e) $z = \sqrt{3} + i$

f) $z = -3$

3 Encontre o número complexo z, tal que $|z| = 2$ e $|z - i| = 1$.

4 Determine as raízes quadradas de:

a) i

b) -5

c) $4i$

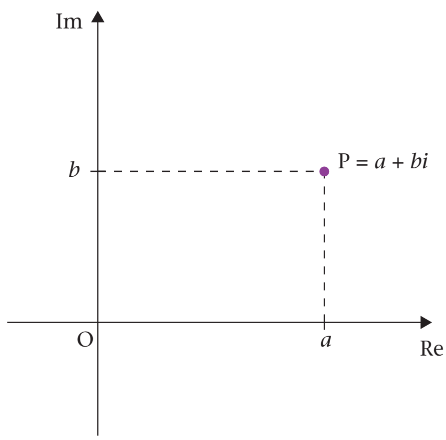
d) $2i$

e) $5 - 12i$

5.5 – Forma geométrica de um número complexo

Como o complexo z é constituído de dois números distintos, podemos representá-lo por um par ordenado de números reais (a, b). Assim:

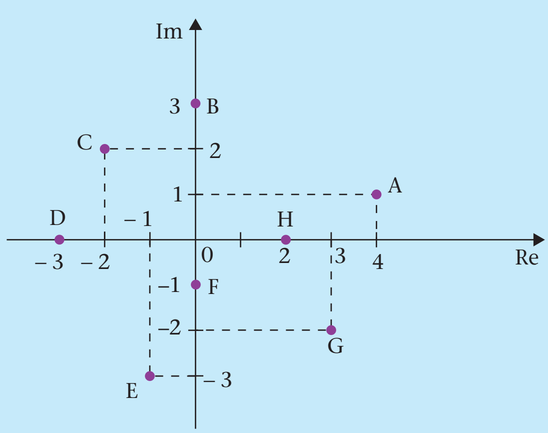
$z = a + bi$ corresponde ao par ordenado (a, b)



NOTA
O sistema de coordenadas em questão é chamado de **plano de Argand-Gauss** e os eixos são o eixo real (Re) e o eixo imaginário (Im).

Se considerarmos um sistema de coordenadas e marcarmos no mesmo o ponto $P = (a, b)$, ele será chamado de **imagem** do complexo z. Por outro lado, a cada ponto $P = (a, b)$ corresponderá um complexo $z = a + bi$ que será chamado de **afixo** do ponto $P = (a, b)$. A expressão $a + bi$ é chamada **forma algébrica** do complexo z.

Exemplos:



i) O ponto $A = (4, 1)$ é imagem do complexo $z = 4 + i$.

ii) O ponto $B = (0, 3)$ é imagem do complexo $z = 0 + 3i = 3i$.

iii) O complexo $z = -2 + 2i$ é o afixo do ponto $C = (-2, 2)$.

iv) O complexo $z = -3 + 0i$ é o afixo do ponto $D = (-3, 0)$.

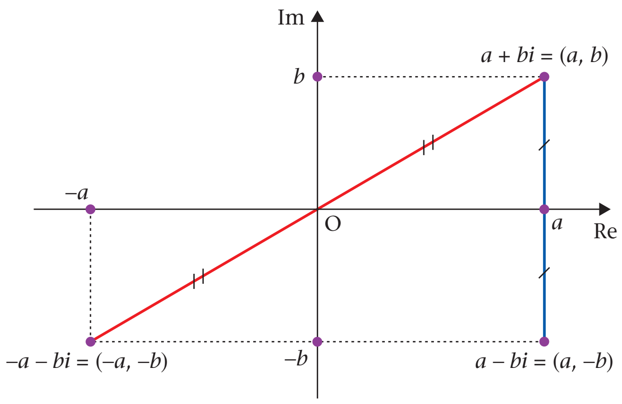
v) O ponto E = (–1, –3) é a imagem do complexo $z = -1 - 3i$.

vi) O ponto F = (0, –1) é a imagem do complexo $z = -i$.

vii) O complexo $z = 3 - 2i$ é o afixo do ponto G = (3, –2).

viii) O complexo $z = 2$ é o afixo do ponto H = (2, 0).

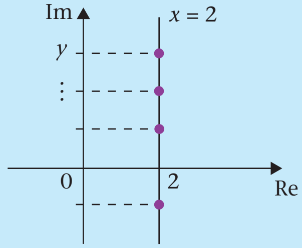
As imagens de dois complexos conjugados são simétricas em relação ao eixo dos reais.



As imagens de dois complexos simétricos são simétricas em relação à origem.

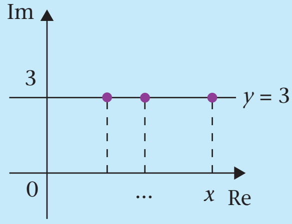
Exemplos:

i) Qual o lugar geométrico das imagens dos complexos $z = 2 + yi$, $\forall y \in \mathbb{R}$.



Basta notar que as imagens dos complexos são pontos do tipo (2, y), isto é, $x = 2$ para todo y. A equação $x = 2$ é uma reta paralela ao eixo Im.

ii) Qual o lugar geométrico das imagens dos complexos $z = t + 3i$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

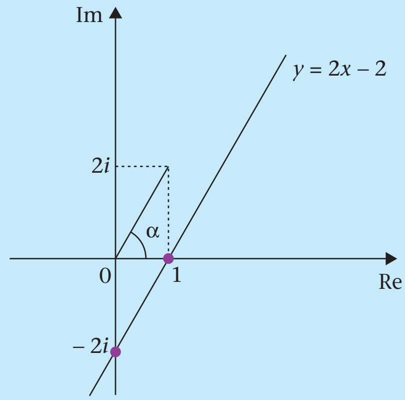


Neste caso os pontos do tipo $(t, 3)$ são de uma reta de equação $y = 3$ que é paralela ao eixo Re.

iii) Qual o lugar geométrico das imagens dos complexos $z = (t + 1) + 2ti$ variáveis com o parâmetro real t?

Basta notar que $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \end{cases}$ são as equações paramétricas da reta cuja equação se obtém eliminando-se o parâmetro t.

$t = x - 1 \Rightarrow y = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2$

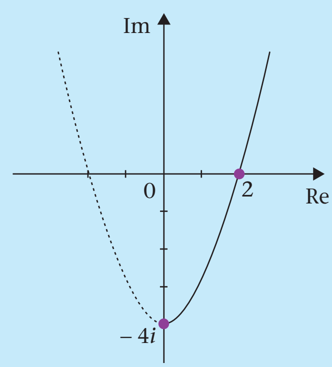


Temos $\operatorname{tg} \alpha = 2$ e o corte no eixo Im no ponto $(0, -2) = -2i$.

iv) Qual o lugar geométrico das imagens dos complexos $z = (\sqrt{t},\ t - 4),\ \forall t \in \mathbb{R}_+$.

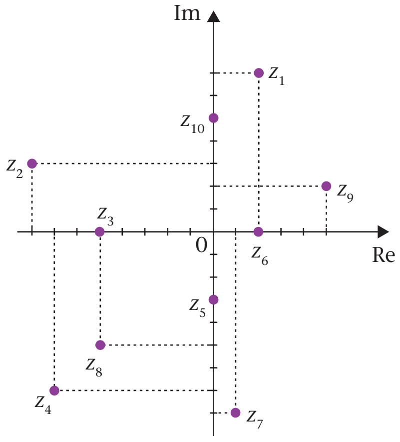
Basta fazer $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t - 4 \end{cases}$ $t \geq 0$.

Eliminando o parâmetro t, vem $x^2 = t$ e $y = x^2 - 4$, que é uma semiparábola, pois $\sqrt{t} \geq 0$, logo $x \geq 0$.



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 No plano de Argand-Gauss, estão representadas as imagens de alguns números complexos. Dê a forma algébrica de cada um desses complexos.



2 Determine, no plano de Argand-Gauss, a imagem de cada um dos seguintes números complexos.

a) $z_1 = 1 + 2i$

b) $z_2 = -2 - i$

c) $z_3 = -4 + 3i$

d) $z_4 = 5 - 2i$

e) $z_5 = -4i$

3 Encontre a área do triângulo ABC, sendo os pontos A, B e C as imagens de $-2 + i$; $1 + 5i$; e $4 + i$, respectivamente.

4 Qual é o lugar geométrico das imagens dos complexos?

a) $z = -2 + yi$, $y \in \mathbb{R}$

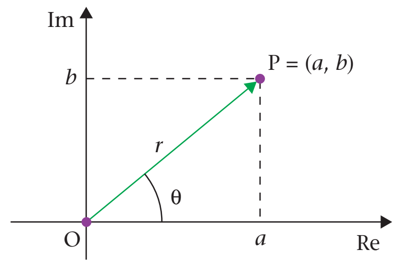
b) $z = t - 3i$, $t \in \mathbb{R}$

5.6 – Forma trigonométrica de um número complexo

5.6.1 – Módulo de um número complexo

DEFINIÇÃO
Módulo de um número complexo.

Consideremos um complexo $z = a + bi$ e sua imagem $P = (a, b)$ no plano.



NOTA
Esta definição de módulo de um número complexo coincide com a apresentada anteriormente.

Chama-se **módulo do complexo** z e representa-se por $|z| = r$ a distância da origem $O = (0, 0)$ até a imagem $P = (a, b)$ do complexo.

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{N(z)}$$

O módulo de um complexo é a raiz quadrada de sua norma. É o módulo do vetor $\overrightarrow{OP} = (a, b)$.

Exemplos:

i) $z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{9 + 16} = 5$

ii) $z = -5 + 12i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$

iii) $z = 3i = 0 + 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$

O módulo de um complexo é sempre positivo ou nulo.

5.6.2 – Argumento de um número complexo

NOTA
Para $z = 0$ (ou $P = (0, 0)$) não está definida a noção de argumento de z.

Chama-se **argumento de um complexo** o ângulo trigonométrico do segmento OP com o eixo real (Re).

Temos:

$$\theta = k \cdot 2\pi + \theta_0 \quad \text{em que } 0 \le \theta_0 < 2\pi$$

O ângulo θ_0, menor determinação do ângulo, é chamado **argumento principal** do número complexo.

Para o argumento, usamos a notação $\theta = \arg z$, enquanto o argumento principal θ_0 é denotado por Arg z.

DEFINIÇÃO
Argumento principal de um número complexo.

NOTA
Alguns autores consideram $-\pi < \theta_0 \leq \pi$. O argumento principal se escreve com A maiúsculo.

Para calcular o argumento do complexo $z = a + bi$ $(z \neq 0)$, basta ver que

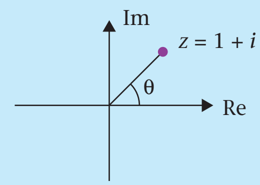
$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Este argumento pode ser também calculado utilizando a tangente do ângulo θ associada ao quadrante onde se situa a imagem do complexo $P = (a, b)$. Assim, $\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$ juntamente com o quadrante de (a, b).

Exemplos:

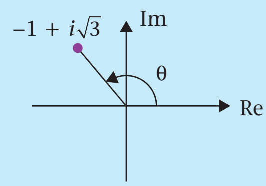
i) $z = 1 + i$

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = k\cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}$$



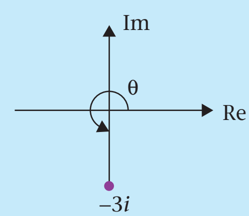
ii) $z = -1 + i\sqrt{3}$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \\ \left(-1, \sqrt{3}\right) \in 2^{\underline{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \theta = k\cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3}$$



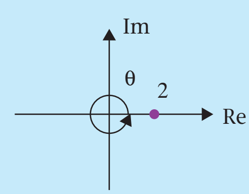
iii) $z = -3i = 0 - 3i$

$$r = \sqrt{0+9} = 3, \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{0}{3} = 0 \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{-3}{3} = -1 \end{cases} \Rightarrow \theta = k\cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}$$



iv) $z = 2 = 2 + 0i$

$$r = \sqrt{2^2+0^2} = 2, \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2}{2} = 1 \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{0}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = k\cdot 2\pi$$



5.6.3 – Forma trigonométrica ou polar de um número complexo

Consiste em expressar o complexo $z = a + bi$ em função do módulo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e do argumento θ. Assim:

$$a + bi = r\left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r}i\right) = r(\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta)$$

NOTA
A expressão **cis** é uma simplificação de cos + *i*sen.

A soma $\cos\theta + i\text{sen}\theta$ é comumente representada por cis θ. Com isto, o complexo fica:

$$z = r(\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta) \text{ ou } z = r\ \text{cis}\theta$$

que é a forma trigonométrica do complexo.

Exemplos:

Escrever na forma trigonométrica os complexos.

i) $z_1 = 1 + i$

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\ \theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = k \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow z = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(k \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

ii) $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$

$r = \sqrt{1+3} = 2$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-1}{2} \\ \text{sen}\ \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = k \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z = 2\ \text{cis}\left(k \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

iii) $z_3 = -1 - i$

Utilizando a tangente do ângulo para calcular, temos:

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \text{tg}\ \theta = \dfrac{-1}{-1} = 1 \\ (-1,\ -1) \in 3^{\underline{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \theta = k \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{4} \Rightarrow z = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(k \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{4}\right)$$

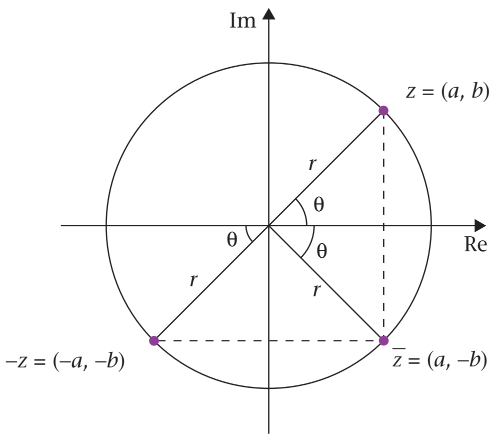
iv) $z = 2 - 2i$

$r = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \text{tg}\ \theta = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ (2,\ -2) \in 4^{\underline{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \theta = k \cdot 2\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow z = 2\sqrt{2}\ \text{cis}\left(k \cdot 2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

Dois complexos conjugados têm o mesmo módulo e argumentos de extremidades simétricas em relação ao eixo Ox.

$$z = r \text{ cis } \theta \Rightarrow \bar{z} = r \text{ cis } (-\theta)$$



Dois complexos simétricos têm o mesmo módulo e argumentos de extremidades simétricas em relação à origem.

$$z = r \text{ cis } \theta \Rightarrow -z = r \text{ cis } (\pi + \theta)$$

Exemplos:

i) $z = 2 \text{ cis } \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \bar{z} = 2 \text{ cis } \left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ e $-z = 2 \text{ cis } \left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$

ii) $z = 5 \text{ cis } 120° \Rightarrow \bar{z} = 5 \text{ cis } (-120°) = 5 \text{ cis } 240°$ e $-z = 5 \text{ cis } 300°$

Dois complexos, z_1 e z_2, serão então iguais se tiverem a mesma imagem, isto é, $P_1 = P_2$, o que acarreta $r_1 = r_2$ e $\theta_1 - \theta_2 = k \cdot 2\pi$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Determine o argumento dos seguintes números complexos:

a) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$

c) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$

d) $z = \sqrt{3} - i$

e) $z = -1 + i$

f) $z = 3i$

2 Represente cada número complexo a seguir na forma trigonométrica.

a) $z = 1 + \sqrt{3}i$

b) $z = \sqrt{3} + i$

c) $z = -3i$

d) $z = -2 - 2i$

e) $z = \frac{1}{1-i}$

3 Escreva a forma algébrica dos seguintes números complexos:

a) $z = 4(\cos 120° + i\ \text{sen}\ 120°)$

b) $z = 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i\ \text{sen}\ \frac{3\pi}{2}\right)$

c) $z = 2(\cos 300° + i\ \text{sen}\ 300°)$

d) $z = \cos \frac{\pi}{3} + i\ \text{sen}\ \frac{\pi}{3}$

4 Se $z = \frac{1}{i} + \frac{i}{i+1}$, obtenha a forma trigonométrica de z e de z^2.

5 Dê a forma trigonométrica de $z = i^{21} \cdot i^{22} \cdot i^{23} \cdot \ldots \cdot i^{29}$.

5.7 – Operações com números complexos na forma trigonométrica

5.7.1 – Multiplicação

Sejam dois complexos $z_1 = r_1$ cis θ_1 e $z_2 = r_2$ cis θ_2.

Efetuando o produto, temos:

$z_1z_2 = (r_1 \text{ cis } \theta_1) \cdot (r_2 \text{ cis } \theta_2) = r_1r_2 (\cos \theta_1 + i \text{ sen } \theta_1) (\cos \theta_2 + i \text{ sen } \theta_2)$

Ou ainda:

$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2) + i (\text{sen } \theta_1 \cos \theta_2 + \text{sen } \theta_2 \cos \theta_1)]$

Logo:

$z_1z_2 = r_1r_2[\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \text{ sen } (\theta_1 + \theta_2)]$

$$z_1z_2 = r_1r_2 \text{ cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

Para multiplicar dois complexos na forma trigonométrica, multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos.

NOTA
Como a adição e a subtração não trazem nenhum resultado vantajoso, não as estudaremos na forma trigonométrica em especial.

Exemplos:

i)

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = 2 \text{ cis } \dfrac{5\pi}{4} \\ z_2 = 3 \text{ cis } \dfrac{3\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow z_1z_2 = 2 \cdot 3 \text{ cis}\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_1z_2 = 6 \text{ cis } \frac{8\pi}{4} = 6 \text{ cis } 2\pi$$

$$z_1z_2 = 6(\cos 2\pi + i \text{ sen } 2\pi) = 6(1 + 0i) = 6$$

ii)

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = \text{cis } 30° \\ z_2 = \text{cis } 120° \end{array}\right\} \Rightarrow z_1z_2 = \text{cis } (30° + 120°) = \text{cis } 150°$$

$$z_1z_2 = \cos 150° + i \text{ sen } 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

iii)

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = 2 \text{ cis } 10° \\ z_2 = 4 \text{ cis } 30° \\ z_3 = 8 \text{ cis } 50° \end{array}\right\} \Rightarrow z_1z_2z_3 = 2 \cdot 4 \cdot 8 \text{ cis } (10° + 30° + 50°)$$

$$z_1z_2z_3 = 64 \text{ cis } 90° = 64(\cos 90° + i \text{ sen } 90°)$$

$$z_1z_2z_3 = 64(0 + 1i) = 64i$$

5.7.2 – Divisão

Sendo $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1$ e $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$, devemos ter:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{\overline{z_2}}{N(z_2)} = z_1 \cdot \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} \text{, logo:}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = r_1 \operatorname{cis} \theta_1 \cdot \frac{r_2 \operatorname{cis}(-\theta_2)}{r_2^2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)}$$

Para dividir dois complexos na forma trigonométrica, dividem-se os módulos e subtraem-se os argumentos.

Exemplos:

i) $\dfrac{8 \operatorname{cis} 120^\circ}{2 \operatorname{cis} 30^\circ} = \dfrac{8}{2} \operatorname{cis}(120^\circ - 30^\circ) = 4 \operatorname{cis} 90^\circ = 4i$

ii) $\dfrac{(2 \operatorname{cis} 10^\circ)(3 \operatorname{cis} 20^\circ)(4 \operatorname{cis} 30^\circ)}{(6 \operatorname{cis} 60^\circ)(2 \operatorname{cis} 120^\circ) \operatorname{cis} 180^\circ} =$

$= \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4 \operatorname{cis}(10^\circ + 20^\circ + 30^\circ)}{6 \cdot 2 \cdot 1 \operatorname{cis}(60^\circ + 120^\circ + 180^\circ)} =$

$= 2 \operatorname{cis}(60^\circ - 360^\circ) = 2 \operatorname{cis}(-300^\circ) = 2 \operatorname{cis} 60^\circ =$

$= 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2} + i \dfrac{\sqrt{3}}{2} \right) =$

$= 1 + i\sqrt{3}$

iii) Calcular o módulo e o argumento de $\dfrac{2 + 2i}{-1 + i}$.

Temos que o módulo do quociente é o quociente dos módulos, logo $\dfrac{|2 + 2i|}{|-1 + i|} = \dfrac{\sqrt{4 + 4}}{\sqrt{1 + 1}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2.$

Como $(2 + 2i)$ tem sua imagem $(2, 2)$ na bissetriz do 1º quadrante, seu argumento será $k \cdot 360^\circ + 45^\circ$.

Por outro lado, a imagem de $(-1 + i)$ está na bissetriz do 2º quadrante $(-1, 1)$ e seu argumento será então $k' \cdot 360^\circ + 135^\circ$. O argumento do quociente é $(k \cdot 360^\circ + 45^\circ) - (k' \cdot 360^\circ + 135^\circ) = k'' \cdot 360^\circ - 90^\circ = k''' \cdot 360^\circ + 270^\circ$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Considere os números complexos a seguir:

$z_1 = 2\text{cis}\,\dfrac{\pi}{2}$ e $z_2 = 3\text{cis}\,\dfrac{\pi}{3}$

Escreva na forma trigonométrica $z_1 \cdot z_2$ e $\dfrac{z_1}{z_2}$.

2 Sejam os números complexos $z_1 = 6$ cis $240°$; $z_2 =$ cis $30°$ e $z_3 = 2$ cis $150°$. Obtenha na forma trigonométrica:

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $\dfrac{z_1}{z_2}$

c) $z_2 \cdot z_3$

d) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$

e) $\dfrac{z_1 \cdot z_3}{z_2}$

3 Dados os complexos $z_1 = 6$ cis $85°$ e $z_2 = 3$ cis $25°$, calcule:

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $\dfrac{z_1}{z_2}$

c) $z_2 \cdot z_1$

d) $\dfrac{z_2}{z_1}$

5.8 – Potenciação – Fórmula de De Moivre

Convencionaremos que $z^0 = (r \operatorname{cis}\theta)^0 = 1$ e $z^1 = (r \operatorname{cis}\theta)^1 = r \operatorname{cis}\theta$.
Temos que:

$(r \operatorname{cis}\theta)^2 = (r \operatorname{cis}\theta)\cdot(r \operatorname{cis}\theta) = r^2 \operatorname{cis} 2\theta$

$(r \operatorname{cis}\theta)^3 = (r \operatorname{cis}\theta)^2\cdot(r \operatorname{cis}\theta) = (r^2 \operatorname{cis} 2\theta)(r \operatorname{cis}\theta) = r^3 \operatorname{cis} 3\theta$

etc.

Suponhamos que $(r \operatorname{cis}\theta)^n = r^n \operatorname{cis} n\theta$. Completemos a indução:

$(r \operatorname{cis}\theta)^{n+1} = (r \operatorname{cis}\theta)^n\cdot(r \operatorname{cis}\theta) = (r^n \operatorname{cis} n\theta)(r \operatorname{cis}\theta)$, logo:

$(r \operatorname{cis}\theta)^{n+1} = r^{n+1} \operatorname{cis}(n+1)\theta$, o que completa a indução.

Para elevar um complexo na forma trigonométrica a um expoente inteiro e positivo, eleva-se o módulo a esse expoente e multiplica-se o argumento por esse expoente:

$$z = r \operatorname{cis}\theta \;\Rightarrow\; z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

No caso do expoente negativo, temos:

$$(r \operatorname{cis}\theta)^{-n} = \left[(r \operatorname{cis}\theta)^{-1}\right]^n = \left[\frac{r \operatorname{cis}(-\theta)}{r^2}\right]^n = \left[\frac{1}{r} \operatorname{cis}(-\theta)\right]^n$$

logo:

$$(r \operatorname{cis}\theta)^{-n} = [r^{-1} \operatorname{cis}(-\theta)]^n = r^{-n} \operatorname{cis}(-n\theta)$$

o que mostra que a fórmula de De Moivre se mantém para expoentes negativos.

Exemplos:

i) $(2 \operatorname{cis} 10°)^6 = 2^6 \operatorname{cis} 60° = 64\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 32 + 32\sqrt{3}\cdot i$

ii) Calcular $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{30}$.

Passando $1 - i\sqrt{3}$ para a forma trigonométrica, temos $1 - i\sqrt{3} = 2 \operatorname{cis}(-60°)$, pois $\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$ e $\operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$ com $\left(1,\ -\sqrt{3}\right)$ no 4º quadrante.

Assim:

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{30} = [2 \operatorname{cis}(-60°)]^{30} = 2^{30} \operatorname{cis}(-1\,800°) = 2^{30} \operatorname{cis} 0° = 2^{30}$$

NOTA
Observe que o desenvolvimento do binômio de Newton seria excessivamente trabalhoso.

iii) Calcular os complexos não nulos cuja 5ª potência reproduza o seu conjugado.

Devemos ter $z^5 = \bar{z}$. Escrevendo na forma trigonométrica, vem:

$(r \operatorname{cis}\theta)^5 = r \operatorname{cis}(-\theta) \Rightarrow r^5 \operatorname{cis} 5\theta = r \operatorname{cis}(-\theta)$

Esta igualdade nos dará:

$$\begin{cases} r^5 = r \Rightarrow r^4 = 1 \Rightarrow r = 1 \qquad (\text{pois } r > 0) \\ 5\theta - (-\theta) = k \cdot 2\pi \Rightarrow 6\theta = k \cdot 2\pi \Rightarrow \theta = \dfrac{k \cdot 2\pi}{6} = \dfrac{k\pi}{3} \end{cases}$$

Com k inteiro, logo:

$z = 1 \operatorname{cis} \dfrac{k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0 \Rightarrow z_0 = 1 \operatorname{cis} 0 = 1$

$k = 1 \Rightarrow z_1 = 1 \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

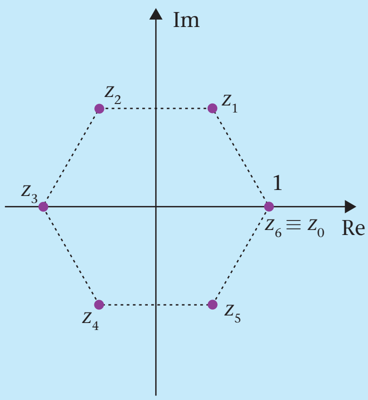
$k = 2 \Rightarrow z_2 = 1 \operatorname{cis} \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$k = 3 \Rightarrow z_3 = 1 \operatorname{cis} \pi = -1$

$k = 4 \Rightarrow z_4 = 1 \operatorname{cis} \dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$k = 5 \Rightarrow z_5 = 1 \operatorname{cis} \dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$k = 6 \Rightarrow z_6 = 1 \operatorname{cis} \dfrac{6\pi}{3} = 1 \operatorname{cis} 0 = 1$



Observe que a partir de $k = 6$ os valores de z começam a se repetir, havendo portanto exatamente 6 complexos não nulos e distintos que satisfazem a propriedade.

NOTA
As seis soluções somam um hexágono regular no plano de Argand-Gauss.

5.9 – Radiciação

Chama-se **raiz *n*-ésima de um complexo** $z = r \operatorname{cis}\theta$ um outro complexo $w = \rho \operatorname{cis}\alpha$ tal que:

$$w^n = z, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad w = \sqrt[n]{z}$$

NOTA
A letra grega ρ se lê "rô".

Temos:

$\sqrt[n]{r \operatorname{cis}\theta} = \rho \operatorname{cis}\alpha \Rightarrow (\rho \operatorname{cis}\alpha)^n = r \operatorname{cis}\theta$

$\rho^n \operatorname{cis} n\alpha = r \operatorname{cis}\theta$

NOTA
Lembre que $\theta = k \cdot 2\pi + \theta_0$.

A igualdade de complexos permite escrever:

$\rho^n = r \;\Rightarrow\; \rho = \sqrt[n]{r}$

$\text{cis}\, n\alpha = \text{cis}\,\theta \;\Rightarrow\; n\alpha = \theta \;\Rightarrow\; \alpha = \dfrac{\theta}{n} = \dfrac{k \cdot 2\pi + \theta_0}{n}$

em que θ_0 é a menor determinação positiva do ângulo θ. Então temos:

$$\sqrt[n]{r\ \text{cis}\,\theta} = \sqrt[n]{r}\ \text{cis}\ \frac{k \cdot 2\pi + \theta_0}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Como k pertence aos inteiros, atribuímos a k valores a partir de k = 0 e calculamos os valores do argumento $\alpha = \dfrac{k \cdot 2\pi + \theta_0}{n} = k \cdot \dfrac{2\pi}{n} + \dfrac{\theta_0}{n}$.

$k = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_0 = \dfrac{\theta_0}{n}$

$k = 1 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = 1 \cdot \dfrac{2\pi}{n} + \dfrac{\theta_0}{n}$

$k = 2 \;\Rightarrow\; \alpha_2 = 2 \cdot \dfrac{2\pi}{n} + \dfrac{\theta_0}{n}$

$k = 3 \;\Rightarrow\; \alpha_3 = 3 \cdot \dfrac{2\pi}{n} + \dfrac{\theta_0}{n}$

$\quad\vdots \qquad \vdots$

$k = n - 1 \;\Rightarrow\; \alpha_{n-1} = (n-1) \cdot \dfrac{2\pi}{n} + \dfrac{\theta_0}{n}$

Quando dermos a k o valor n, teremos $\alpha_n = n \cdot \dfrac{2\pi}{n} + \dfrac{\theta_0}{n} = 2\pi + \dfrac{\theta_0}{n}$, que é côngruo de $\alpha_0 = \dfrac{\theta_0}{n}$.

Como os valores dos α_k formam uma progressão aritmética de razão $\dfrac{2\pi}{n}$, a partir de $k = n$ os ângulos α_k serão côngruos respectivamente de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ para os valores de k iguais a n, $n + 1$, $n + 2$, ... etc. Existirão portanto n valores distintos para os α_k, que serão obtidos atribuindo-se a k os valores 0, 1, 2, ..., n – 1, logo as raízes n-ésimas de um complexo são n valores distintos.

Chamando essas raízes de $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, temos:

$r_0 = \sqrt[n]{r}\ \text{cis}\ \dfrac{\theta_0}{n}$

$r_1 = \sqrt[n]{r}\ \text{cis}\left(1 \cdot \dfrac{2\pi}{n} + \dfrac{\theta_0}{n}\right)$

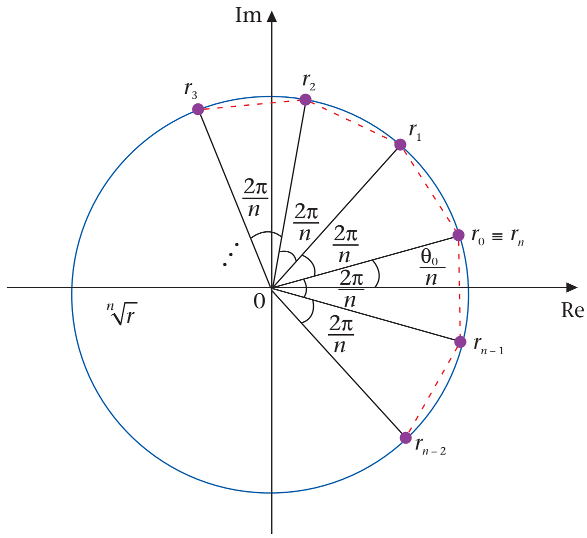
$r_2 = \sqrt[n]{r}\ \text{cis}\left(2 \cdot \dfrac{2\pi}{n} + \dfrac{\theta_0}{n}\right)$

$\vdots$

$r_{n-1} = \sqrt[n]{r}\ \text{cis}\left[(n-1)\dfrac{2\pi}{n} + \dfrac{\theta_0}{n}\right]$

5.9.1 – Interpretação geométrica das $\sqrt[n]{z}$

Observando as raízes da página anterior, nota-se que seus módulos são todos iguais a $\sqrt[n]{r}$, fato que as coloca sobre uma mesma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{z}$



Por outro lado, como os argumentos estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$, as imagens dessas raízes estarão igualmente afastadas sobre a circunferência. Como a raiz r_n tem imagem coincidente com r_0, todas as raízes r_0, r_1, r_2, ..., r_{n-1} terão como imagens os pontos que dividem uma circunferência de raio $\sqrt[n]{r}$ em n partes congruentes. Tais raízes serão vértices de um polígono regular de n lados inscrito nessa circunferência. A primeira raiz r_0 estará com uma defasagem de $\frac{\theta_0}{n}$ em relação ao eixo Re dos reais.

Exemplo:

Calcular $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}\cdot i}$.

Passemos $-8+8\sqrt{3}\cdot i$ para a forma trigonométrica.

$$r=\sqrt{64+192}=\sqrt{256}=16$$

$$\begin{cases} \cos\ \theta=\dfrac{-8}{16}=\dfrac{-1}{2} \\ \text{sen}\ \theta=\dfrac{+8\sqrt{3}}{16}=+\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_0=120°$$

Devemos ter: $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}\cdot i}=\sqrt[4]{16\ \text{cis}(k\cdot 360°+120°)}$

então $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}\cdot i}=2\ \text{cis}\dfrac{k\cdot 360°+120°}{4}=2\ \text{cis}\,(k\cdot 90°+30°)$

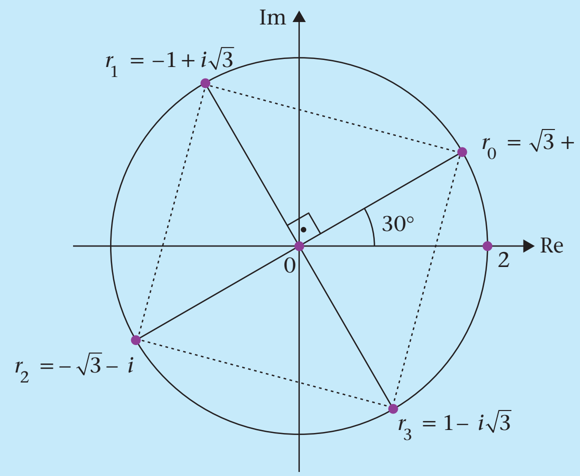
para $k\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

$k = 0 \Rightarrow r_0 = 2 \text{ cis } 30° = 2\,(\cos 30° + i \text{ sen } 30°) = \sqrt{3} + i$

$k = 1 \Rightarrow r_1 = 2 \text{ cis}(1 \cdot 90° + 30°) = 2\,(\cos 120° + i \text{ sen } 120°) = -1 + i\sqrt{3}$

$k = 2 \Rightarrow r_2 = 2 \text{ cis}(2 \cdot 90° + 30°) = 2\,(\cos 210° + i \text{ sen } 210°) = -\sqrt{3} - i$

$k = 3 \Rightarrow r_3 = 2 \text{ cis}(3 \cdot 90° + 30°) = 2\,(\cos 300° + i \text{ sen } 300°) = 1 - i\sqrt{3}$



Observe que as quatro raízes do complexo são vértices de um quadrado inscrito numa circunferência de raio 2.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Dado $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, obtenha z e z^8.

2 Dado $z = 4 \text{ cis } 30°$, obtenha z^8.

3 Dado $z = 2(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$, obtenha a forma algébrica de:

a) z^3

b) z^6

c) z^{10}

d) z^4

4 Calcule $\left(\sqrt{3} + i\right)^4$.

5 Se $z = 2 \text{ cis } \frac{7\pi}{3}$, calcule z^9 e z^{-9}.

6 Calcule $\left(\frac{3+i}{1+2i}\right)^7$.

7 Encontre o menor número natural n, maior do que 10, tal que $(\sqrt{3} + i)^n$ seja um número imaginário puro.

8 O número $\bar{z}$ é o conjugado do complexo z. Qual é o número de soluções da equação $z^2 = \bar{z}$?

9 Determine o menor inteiro positivo n, para o qual $z \cdot z^2 \cdot z^3 \cdot \ldots \cdot z^n$ seja real positivo, onde $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

10 Encontre todas as raízes complexas do número 1.

5.9.2 – Aplicações da radiciação e logaritmos

Equações binomiais

São equações que se reduzem à forma $ax^n + b = 0$, sendo a e b complexos quaisquer, com $a \neq 0$.

Para resolvê-la, temos:

$$ax^n + b = 0 \Rightarrow x^n = -\frac{b}{a} \Rightarrow x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$$

Passa-se $-\frac{b}{a}$ para a forma trigonométrica e calculam-se as raízes $\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$.

Exemplo:

Resolver a equação $x^5 + 27x^2 = 0$.
Temos:
$x^5 + 27x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^3 + 27) = 0 \Rightarrow x^2 = 0$ ou $x^3 = -27$

A equação $x^2 = 0$ dá duas raízes nulas $x_0 = x_1 = 0$.
Vamos então resolver a equação $x^3 = -27$.

Passando -27 para a forma trigonométrica, temos:
$-27 = 27 \cdot (-1) = 27 \text{ cis}(k \cdot 360° + 180°)$, então:

$$x^3 = 27 \text{ cis}(k \cdot 360° + 180°) \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} \text{ cis} \frac{k \cdot 360° + 180°}{3}$$

$$x = 3 \text{ cis}(k \cdot 120° + 60°),\ k \in \{0,\ 1,\ 2\}$$

$$k = 0 \Rightarrow x_0' = 3 \text{ cis } 60° = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 1 \Rightarrow x_1' = 3 \text{ cis } 180° = 3(-1 + 0i) = -3$$

$$k = 2 \Rightarrow x_2' = 3 \text{ cis } 300° = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

Equações trinomiais

São equações que se reduzem à forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, sendo $a \neq 0$, $b \neq 0$ e c complexos quaisquer.

Sua solução se obtém fazendo $x^n = y$ recaindo na equação $ay^2 + by + c = 0$.

Resolvendo esta equação obtemos duas raízes, y_1 e y_2, que nos levam a duas equações binomiais $x^n = y_1$ e $x^n = y_2$. Conforme vimos no caso anterior, cada uma dessas equações nos dá n raízes que darão as $2n$ raízes da equação $ax^{2n} + bx^n + c = 0$.

$x^n = y_1 \Rightarrow x = \sqrt[n]{y_1}$ com n valores

$x^n = y_2 \Rightarrow x = \sqrt[n]{y_2}$ com n valores

Exemplo:

Resolver a equação $x^8 - 7x^5 - 8x^2 = 0$.
Colocando x^2 em evidência, temos $x^2(x^6 - 7x^3 - 8) = 0$, que nos dá $x^2 = 0$ ou $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$.
A equação $x^2 = 0$ tem duas raízes nulas.
Na equação $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$, façamos $x^3 = y$. A equação fica $y^2 - 7y - 8 = 0$, que tem as raízes 8 e –1.
Temos agora duas equações binomiais.

a) $x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8 \text{ cis } k \cdot 2\pi} = 2 \text{ cis } \dfrac{k \cdot 2\pi}{3} \quad (k \in \{0, 1, 2\})$

$k = 0 \Rightarrow x_0 = 2;\ k = 1 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ cis } \dfrac{2\pi}{3} = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$

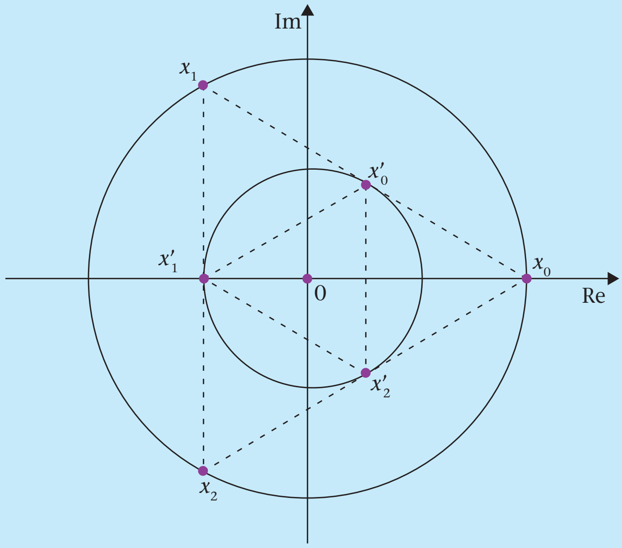
e $k = 2 \Rightarrow x_2 = 2 \text{ cis } \dfrac{4\pi}{3} = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$

b) $x^3 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{\text{cis } (k \cdot 2\pi + \pi)} = \text{cis}\left(\dfrac{k \cdot 2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right) \quad (k \in \{0, 1, 2\})$

$k = 0 \Rightarrow x'_0 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2},$

$k = 1 \Rightarrow x'_1 = -1$ e

$k = 2 \Rightarrow x'_2 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



A interpretação geométrica das raízes é que duas delas estão na origem e as outras seis nos vértices de dois triângulos equiláteros, um deles inscrito numa circunferência de raio 1 e o outro inscrito numa circunferência de raio 2.

Logaritmação

A logaritmação de um número complexo se faz utilizando a **forma exponencial** de um número complexo. Demonstra-se no cálculo diferencial que:

$\text{cis}\,\theta = e^{i\theta}$ ou $\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta = e^{i\theta}$, θ em rad.

Para passarmos um número complexo $z = r\,\text{cis}\,\theta$ para a forma exponencial, faremos $z = r \cdot e^{i\theta}$. Com isto, basta calcular o módulo r e o argumento θ e substituir na nova forma.

NOTA
O número $e \approx 2{,}7182818...$ é a **constante de Euler**, já utilizada anteriormente.

Exemplos:

i) $1 + i = \sqrt{2}\,\text{cis}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot e^{i\left(k2\pi + \frac{\pi}{4}\right)}$

ii) $1 = \text{cis}\,k2\pi = e^{i\,k2\pi}$

iii) Mostrar que $e^{i\pi} + 1 = 0$ (Identidade de Euler).
Basta ver que $e^{i\pi} = \text{cis}\,\pi = -1$, logo $e^{i\pi} + 1 = -1 + 1 = 0$.

iv) Mostrar que os valores de i^i são números reais.
Passando a base i para a forma exponencial e mantendo o expoente i, vem:

$i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$, que é real.

Os outros valores vêm de $\left(e^{\left(k2\pi + \frac{\pi}{2}\right)i}\right)^i = e^{-k\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$.

v) Calcular $\ln(1 - i\sqrt{3})$.
Passando $1 - i\sqrt{3}$ para a forma exponencial, vem:

$1 - i\sqrt{3} = 2\,e^{\left(i\frac{5\pi}{3} + k2\pi\right)}$. Aplicando ln a ambos os membros, vem:

$$\ln\left(1 - i\sqrt{3}\right) = \ln\left(2 \cdot e^{i\frac{5\pi}{3} + k2\pi}\right) = \ln 2 + \ln e^{i\frac{5\pi}{3} + k2\pi} = \ln 2 + i\left(\frac{5\pi}{3} + k2\pi\right)$$

$$\ln\left(1 - i\sqrt{3}\right) = \ln 2 + \left(k2\pi + \frac{5\pi}{3}\right)i, \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

vi) Calcular x e y reais na equação:

$$\ln(x + yi) = \frac{\pi}{4}(1 - i)^2$$

Devemos ter:

$$\ln(x + yi) = \frac{\pi}{4}(1 - 2i + i^2) = -\frac{\pi}{2}i$$

$$x + yi = e^{-\frac{\pi}{2}i} \Rightarrow x + yi = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 - i$$

Então $x = 0$ e $y = -1$.

NOTA
A identidade de Euler é uma das mais belas fórmulas da Matemática; ela envolve suas principais constantes $(e, \pi, i, 1, 0)$ e sinais de operações $(+, \cdot, \wedge, =)$.
Por este motivo, o físico norte-americano Richard Feynman a chamou de “a fórmula mais notável da Matemática”.

NOTA
Quando o expoente é complexo, a expressão $z_1^{z_2}$ assume vários valores distintos.

NOTA
O logaritmo de um número complexo não é único. Existem infinitos valores distintos para ele.

NOTA
Para calcular o logaritmo numa base qualquer basta mudar para a base e.

Assim: $\log_a z = \frac{\ln z}{\ln a}$

$$\log_i 1 = \frac{\ln 1}{\ln i} = \frac{\ln e^{k2\pi i}}{\ln e^{i\left(k'2\pi + \frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{(k2\pi i)\ln e}{i\left(k'2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\ln e}$$

$$\log_i 1 = \frac{4k}{4k'+1} \quad \forall\, k, k' \in \mathbb{Z}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Resolva as equações no conjunto dos números complexos.

a) $x^3 + 8 = 0$

b) $x^4 + 1 = 0$

c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

2 Considere o número complexo $w = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}$.

a) Represente graficamente w e w^2 indicando os seus módulos e argumentos.

b) Ache todas as soluções complexas da equação $z^6 + 1 = 0$.

c) Calcule a soma $1 + w + w^2 + \ldots + w^{11}$.

3 Resolva as equações no campo dos números complexos.

a) $2x^2 + 8 = 0$

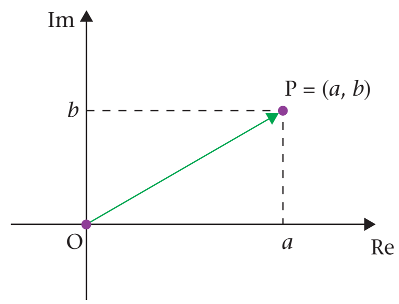
b) $x^4 + 16 = 0$

c) $5x^2 - 5i = 0$

d) $z^4 + z = 0$

5.10 – Forma vetorial de um número complexo

Todo número complexo $z = a + bi$ é determinado por um par ordenado de números reais $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, sobre os quais foram definidos operações já descritas. Por outro lado, todo vetor do $\mathbb{R}^2$ é também representado por um par ordenado de números reais cujas operações de adição e multiplicação por um número são análogas. Por esta razão, identifica-se o complexo $z = a + bi$ com o par ordenado (a, b), representação do vetor $\overrightarrow{OP}$ em que $P = (a, b)$ é a imagem do complexo $z = a + bi$.



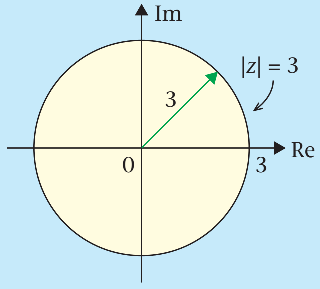
Assim, $|z| = \|\overrightarrow{OP}\|$ e podemos representar o complexo $z = a + bi$ pelo par ordenado (a, b), isto é, pelo vetor (a, b).

Exemplos:

i) Qual é o lugar geométrico das imagens dos complexos z tais que:

a) $|z| = 3$

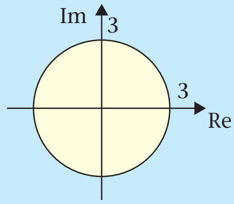
Como $|z| = 3$, o vetor $\overrightarrow{OP}$ tem módulo constante igual a 3, logo suas imagens descrevem um círculo de centro na origem e raio 3.



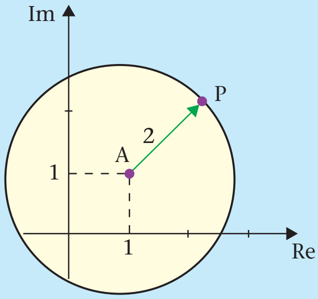
Este resultado poderia também ser obtido supondo $z = x + yi = (x, y)$ e igualando o módulo a 3. Temos $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$, que é a equação de um círculo de centro na origem e raio 3.

b) $|z| \leq 3$

Quando $|z| \leq 3$, temos $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 3$, que indica que todos os pontos (x, y) distam da origem de um valor menor ou igual a 3. Temos então os pontos do círculo abaixo e também todos os pontos interiores ao mesmo.



c) $|z - (1 + i)| = 2$



Se $|z - (1 + i)| = 2$, consideremos as imagens de z iguais a $P = (x, y)$ e de $z_0 = 1 + i = (1, 1)$. Temos então que $z - (1 + i)$ é a diferença $P - A = \overrightarrow{AP}$. Isto significa que o módulo do vetor $\overrightarrow{AP}$ é igual a 2, sendo o ponto $A = (1, 1)$ fixo e o ponto $P = (x, y)$ variável. O lugar de P será então um círculo de centro $A = (1, 1)$ e raio 2.

Este resultado pode ser também obtido supondo $z = x + yi$. Então:
$z - (1 + i) = (x + yi) - (1 + i) = (x - 1) + (y - 1)i$
que é o vetor $(x - 1, y - 1)$. O módulo deste vetor deve ser igual a 2, logo:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

que é a equação de um círculo de centro (1, 1) e raio 2.

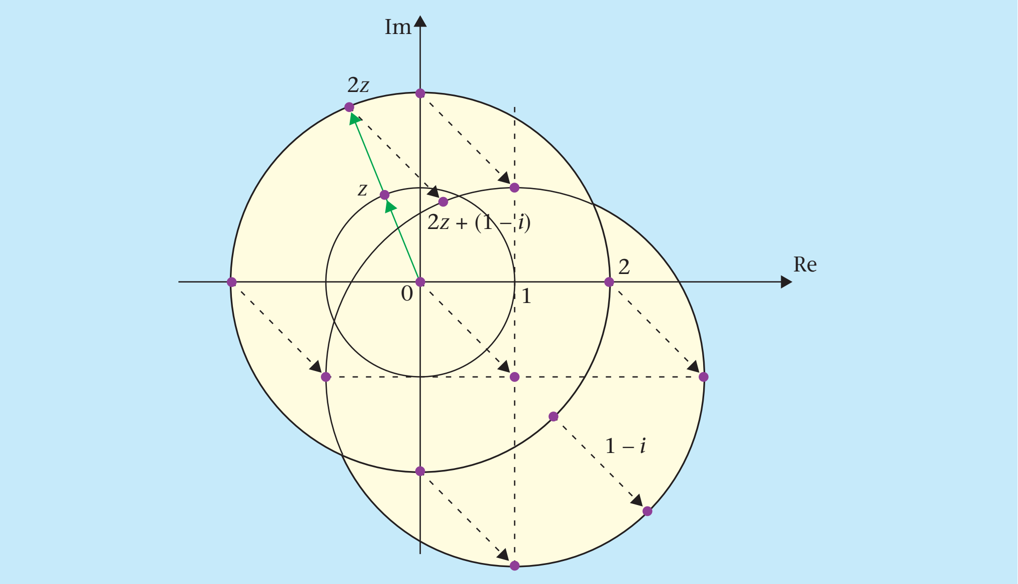
ii) Qual é o lugar geométrico das imagens do complexo $2z + (1 - i)$ quando $|z| = 1$?

Como $|z| = 1$, z descreve um círculo de centro na origem e raio 1, logo $2z$ descreverá, então, um círculo de centro na origem e raio 2. $2z + (1 - i)$ corresponde a efetuar nas imagens de $2z$ uma translação segundo o vetor (1, –1). Com isto, o círculo $2z$ se desloca e seu centro sai da origem para o ponto (1, –1), logo o lugar geométrico de $z' = 2z + (1 - i)$ é um círculo de centro em (1, –1) e raio 2.
Este resultado poderia ser obtido supondo $z = x + yi$. Deseja-se o lugar de $z' = 2(x + yi) + (1 - i) = (2x + 1) + (2y - 1)i$. Façamos $z' = x' + y'i$. Temos então:

$$\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x' - 1}{2} \\ y = \dfrac{y' + 1}{2} \end{cases}$$

Como $|z| = 1$, $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{x' - 1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y' + 1}{2}\right)^2 = 1.$

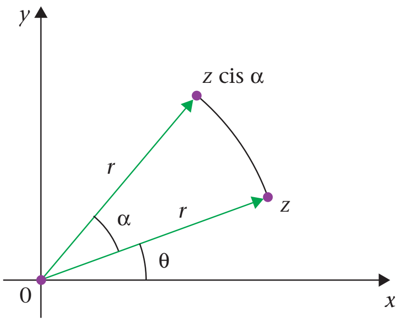
$(x' - 1)^2 + (y' + 1)^2 = 4$, que representa um círculo de centro em (1, –1) e raio 2.



5.10.1 – Operador cis $\theta = e^{i\theta}$

No caso da multiplicação de complexos, tem particular importância o complexo $\text{cis}\,\alpha$. Este número complexo, quando multiplicado por $z = r\ \text{cis}\,\theta$, nos dá:

$$r\ \text{cis}\,\theta \cdot \text{cis}\,\alpha = r\ \text{cis}\,(\theta + \alpha)$$



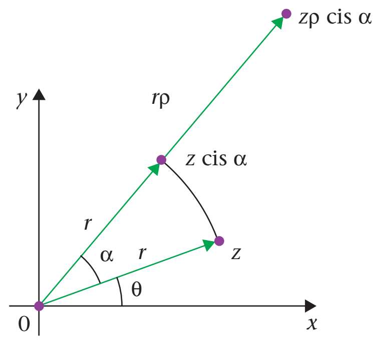
NOTA

A multiplicação por $i = \text{cis}\,\frac{\pi}{2}$ efetua uma rotação de +90° em torno da origem do vetor *z*.

Observe que o módulo *r* não se altera, mas o argumento θ sofre uma rotação igual a α.

Então o complexo $\text{cis}\,\alpha$ opera sobre o complexo $z = r\ \text{cis}\,\theta$ efetuando na sua imagem uma rotação de um ângulo α.

Generalizando, quando se multiplica um complexo $z = r\ \text{cis}\,\theta$ por outro $z' = \rho\ \text{cis}\,\alpha$ obtém-se $zz' = r\rho\ \text{cis}\,(\theta + \alpha)$. Isto significa que o módulo multiplicou-se por ρ e o argumento aumentou de α.

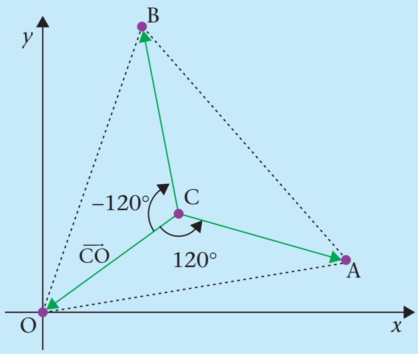


Este resultado equivale a uma rotação de um ângulo α acompanhada de uma homotetia de razão ρ (dilatação ou contração).

NOTA
Em outras palavras, a multiplicação de um número complexo por outro resulta em uma **roto-homotetia**.

Exemplo:

Um triângulo equilátero tem centro no ponto C = (1, 1). Sabendo que um dos seus vértices é a origem, calcular os outros vértices.



Temos:

$$A = C + \overrightarrow{CA} \qquad C = (1,\ 1) = 1 + i$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CO}\ \text{cis}\,120°$$

$$\overrightarrow{CA} = (O - C)\ (\cos 120° + i\ \text{sen}\,120°)$$

$$\overrightarrow{CA} = (-1 - i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$A = C + \overrightarrow{CA} = (1 + i) + \frac{1}{2}(-1 - i)\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{3}\right)i$$

$$A = \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2},\ \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right)$$

$$B = C + \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO}\ \text{cis}(-120°) = (-1 - i)[\cos(-120°) + i\ \text{sen}(-120°)]$$

$$\overrightarrow{CB} = (-1 - i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

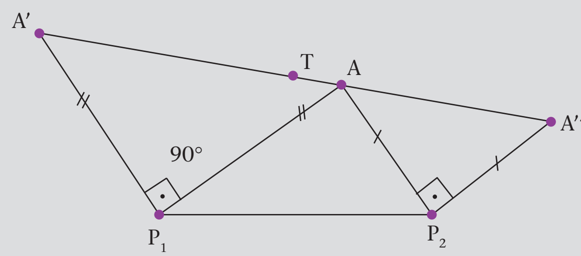
$$B = (1 + i) + \frac{1}{2}(-1 - i)\left(-1 - i\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right)i$$

$$B = \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2},\ \frac{3 + \sqrt{3}}{2}\right)$$

NOTA
Lembrar que cis $\theta = e^{i\theta}$. Por esta razão $e^{i\theta}$ é também chamado de **operador de rotação** de um ângulo θ.

Exercício resolvido:

(Problema clássico do náufrago) Um náufrago chegou a uma ilha com um tesouro. Para enterrá-lo, visualizou duas pedras, P_1 e P_2, e construiu o seguinte "mapa do tesouro":



a) Tomou como ponto de partida uma grande árvore A.

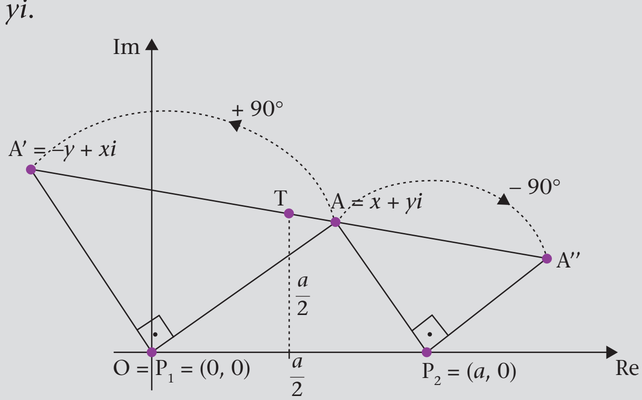
b) Colocou-se na pedra P_1 e de frente para a árvore A deslocou-se para a esquerda em linha reta de uma distância igual a P_1A e marcando o ponto A' tal que $P_1A' = P_1A$.

c) Colocando-se na pedra P_2 de frente para a árvore A e deslocou-se para a direita em linha reta de uma distância igual a P_2A e marcando o ponto A'' tal que $P_2A'' = P_2A$.

d) Caminhou de A' até A'' e enterrou o tesouro no meio do caminho A'A'', no ponto T.
Ao voltar à ilha para resgatar o tesouro, o náufrago não encontrou a árvore A e pensou tê-lo perdido.
Ao consultar um matemático, este lhe disse que era possível encontrar o tesouro sem precisar da posição da árvore. Encontre-o.

<u>Solução:</u>

Coloquemos um sistema de eixos coordenados com a origem P_1 e o eixo Ox coincidente com P_1P_2. O ponto A passará a ter coordenadas $A = (x, y) = x + yi$.



O vetor $\overrightarrow{P_1A}$ será o complexo $x + yi$ e o vetor P_1A', o vetor $\overrightarrow{P_1A} \cdot i = (x+yi)i = xi + yi^2 = -y + xi$, pois se obtém de uma rotação de 90° no vetor $\overrightarrow{P_1A}$ $\left(\text{note que } i = \text{cis}\,\frac{\pi}{2}\right)$.

O vetor $\overrightarrow{P_2A}$ será $\overrightarrow{P_2A} = A - P_2 = (x-a) + yi$. Como $\overrightarrow{P_2A''}$ se obtém fazendo uma rotação de –90° no vetor $\overrightarrow{P_2A}$, temos $\overrightarrow{P_2A''} = \overrightarrow{P_2A} \cdot (-i) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overrightarrow{P_2A''} = [(x-a) + yi](-i) = -(x-a)i - yi^2 = y - (x-a)i.$$

O ponto A′ terá coordenadas $A' = (-y, x)$.
O ponto A″ terá coordenadas $A'' = (a, 0) + (y, -x + a) = (y + a, -x + a)$.
O ponto T será médio de A′A″, logo:

$$T = \frac{A' + A''}{2} = \frac{(-y,\ x) + (y + a,\ -x + a)}{2} = \left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right).$$

<u>Resposta</u>: Para encontrar o tesouro T, basta caminhar de P_1 até o meio da distância P_1P_2 e dobrar à esquerda caminhando a mesma distância.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Represente no plano de Argand-Gauss os conjuntos:

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-5| \leq 4\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+2| < 5\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$

e) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| = 3\}$

2 Dada a expressão $2z + \bar{z} = 2zi - 7$, sendo z um número complexo, determine $|z|^2$.

5.11 – Apêndice

5.11.1 – Forma matricial

Se representarmos o número 1 pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, o número real *a* será representado pela matriz $a = a \cdot 1 = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

Neste caso, o número *i* pode ser representado pela matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Basta ver que: $i^2 = i \cdot i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1$

Com isto, o complexo $z = a + bi$ fica:

$$z = a + bi = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

Logo $\boxed{a + bi = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}}$.

Todas as operações com matrizes se aplicam aos números complexos.
O caso particular de $\text{cis}\,\theta = e^{i\theta}$ fica então:

$\text{cis}\,\theta = \cos\,\theta + i\,\text{sen}\,\theta = \begin{bmatrix} \cos\,\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\,\theta \end{bmatrix}$ que é a matriz de rotação de um ângulo θ.

Exemplos:

i) Efetuar no vetor representado pelo complexo $z = 1 + i$ uma rotação de $+\,60°$.
Devemos escrever o vetor representativo do complexo como uma matriz coluna e multiplicá-lo por cis 60°.

Temos que: $z = 1 + i = (1,\ 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\text{cis}\,60° = \cos\,60° + i\ \text{sen}\,60° = \begin{bmatrix} \cos\,60° & -\text{sen}\,60° \\ \text{sen}\,60° & \cos\,60° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$z\ \text{cis}\,\theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & +\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

ii) Calcular o inverso do complexo $z = 1 + i$.

Escrevendo-o como uma matriz, temos: $z = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Calculando sua inversa, vem: $z^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -(-1) \\ (-1) & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(1 - i)$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (Mack-SP) Se $i^2 = -1$, o complexo $z = \frac{i^{2003} - i}{i - 1}$ é:

(A) um número de módulo 1.

(B) um imaginário puro.

(C) um número real.

(D) um número de módulo $\sqrt{2}$.

(E) da forma $a + bi$, com $a + b = 1$.

2 (FEI-SP) Se $a = 1 + 2i$, $b = 2 - i$ e $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} = 0$, então o número complexo c é:

(A) $2i$ (D) $1 + 2i$

(B) $1 - 2i$ (E) $3i$

(C) $2 - i$

3 (Puccamp-SP) Seja o número complexo $z = \frac{(3 - i)\cdot(2 + 2i)^2}{3 + i}$. O conjugado de z é igual a:

(A) $4,8 - 6,4i$ (D) $-6,4 - 4,8i$

(B) $6,4 - 4,8i$ (E) $-4,8 - 6,4i$

(C) $-4,8 + 6,4i$

4 (Puccamp-SP) Considere a sequência cujo termo geral é dado por $a_n = 2^{3-n} + i \cdot 2^{4-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Se i é a unidade imaginária, o módulo da soma dos infinitos termos dessa sequência é:

(A) $\sqrt{5}$ (D) $6\sqrt{5}$

(B) $2\sqrt{5}$ (E) $8\sqrt{5}$

(C) $4\sqrt{5}$

5 (PUC-PR) Sabendo-se que o complexo $z = a + bi$ satisfaz a expressão $iz + 2z = 2i - 11$, então z^2 é igual a:

(A) $16 - 9i$ (D) $25 + 24i$

(B) $17 - 24i$ (E) $7 - 24i$

(C) $25 - 24i$

6 Prove que $(1 + i)^2 = 2i$. Aproveitando o resultado, calcule $(1 + i)^{20}$.

7 (PUC-RJ) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^2$ é igual a:

(A) 1 (D) $-i$

(B) -1 (E) 0

(C) i

8 (Unirio-RJ) Se $\frac{2+i}{1+i} = a + bi$, onde $i = \sqrt{-1}$, então o valor de $a + b$ é:

(A) 1 (D) -1

(B) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{3}{2}$

(C) 2

9 Dados os números complexos $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$ e $z_3 = \frac{\overline{z}_1}{(z_2)^2}$, pode-se afirmar que a parte real de z_3 vale:

(A) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{1}{2}$

10 (UFRN) Considere os números complexos $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 2 - 2i$. Se $w = (z_1 - z_2)^2$, então:

(A) $w = 10 - 6i$ (C) $w = -8 + 6i$

(B) $w = -8 - 6i$ (D) $w = 10 + 6i$

11 (UFRRJ) Para que a equação $2x^2 + px + q = 0$, com p e q reais, admita o número complexo $z = 3 - 2i$ como raiz, o valor de q deverá ser:

(A) 10 (D) 26

(B) 12 (E) 28

(C) 13

12 (UFSM-RS) Se $(1 + ai)(b - i) = 5 + 5i$, com a e $b \in \mathbb{R}$, então a e b são raízes da equação:

(A) $x^2 - x - 6 = 0$

(B) $x^2 - 5x - 6 = 0$

(C) $x^2 + x - 6 = 0$

(D) $x^2 + 5x + 6 = 0$

(E) $x^2 - 5x + 6 = 0$

13 (Vunesp-SP) Considere o número complexo $z = i$, onde i é a unidade imaginária. O valor de $z^4 + z^3 + z^2 + z + \frac{1}{z}$ é:

(A) -1 (D) i

(B) 0 (E) $-i$

(C) 1

14 (Ufam) Os números x e y são reais. Os complexos $3x - 2 + yi - 5i$ e $4y + 1 - xi + 3i$ são iguais. Então $x - 3y$ é igual a:

(A) 5
(B) –4
(C) 3
(D) –5
(E) 4

15 Calcule o número real m de modo que $\dfrac{2+i}{1+mi}$ seja real.

16 (Fuvest-SP) Sendo i a unidade imaginária ($i^2 = -1$) pergunta-se: quantos números reais a existem para os quais $(a + i)^4$ é um número real?

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) infinitos

17 (UFF-RJ) Sendo i a unidade imaginária, para que $z = \dfrac{4x-i}{4-xi}$, $x \in \mathbb{R}$ seja um número real, é necessário que x seja igual a:

(A) $\pm\dfrac{1}{4}$
(B) ± 1
(C) $\pm\sqrt{2}$
(D) ± 4
(E) $\pm 3\sqrt{2}$

18 Calcule o complexo z sabendo que $2z - 3i\bar{z} = 2 - 4i$.

19 (Cefet-RJ) Seja a_n o termo geral de uma progressão aritmética, cuja razão é –2 e a soma dos 4 primeiros termos vale 8. Considere a sequência complexa de termo geral $z_n = n + ia_n$, onde i é a unidade imaginária. Calcule o inverso de z_3.

20 Determine os números complexos z tais que $z \cdot \bar{z} + (z - \bar{z}) = 13 + 6i$.

21 Quantos valores distintos tem a expressão $\dfrac{i^n}{i^{-n}}$, onde $n \in \mathbb{N}$?

22 Calcule $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{30}$.

23 Calcule.

a) $\sum_{p=0}^{51} i^p$ b) $\sum_{p=10}^{120} i^p$ c) $\sum_{p=1}^{100} p \cdot i^p$

24 (Cefet-PR) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$, na qual i é a unidade imaginária. É correto afirmar que A^9 é igual a:
($I_3 \Rightarrow$ identidade de ordem 3)

(A) A
(B) –A
(C) $i \cdot A$
(D) I_3
(E) $-I_3$

25 (Ufam) Seja $z = x + iy$ um complexo, onde $x > 0$ e $y > 0$, e seja $\bar{z}$ o seu conjugado. A área do quadrilátero de vértices z, $\bar{z}$, $-z$ e $-\bar{z}$ é:

(A) $2x^2y^2$
(B) $x^2 + y^2$
(C) $(x + y)^2$
(D) $4xy$
(E) $4\sqrt{xy}$

26 (FEI-SP) Os números complexos z_1, z_2 e z_3 são tais que $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{z_3}{z_2} = i$ (i é a unidade imaginária). É correto afirmar que:

(A) z_1 é oposto de z_3.
(B) z_1 é o conjugado de z_3.
(C) z_1 é o quadrado de z_3.
(D) z_1 é igual a z_3.
(E) z_1 é igual a $z_3 + z_2$.

27 (FEI-SP) Se o número complexo z satisfaz a relação $\dfrac{z}{z+1} = i$, então:

(A) $2z = 1 + 8i$
(B) $2z = -1 + i$
(C) $2z = 2 - i$
(D) $z = 2 - 8i$
(E) $z = -8 - 4i$

28 (UFU-MG) Se $S = i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2003}$, em que $i^2 = -1$, então S é igual a:

(A) 0
(B) –1
(C) i
(D) $i - 1$

29 (UCDB-MS) O valor do número real x para que o conjugado do número complexo $(x + 3i)(1 + xi)$ seja igual a $2 - 4i$ é:

(A) –2
(B) –1
(C) $-\frac{1}{2}$
(D) 2
(E) 3

30 (UFPI) Se $x = \frac{1}{i-1}$, onde $i = \sqrt{-1}$, é solução da equação $x^2 + x + b = 0$ e b é um número real, então o valor de b é igual a:

(A) 2
(B) 1
(C) $\frac{2}{3}$
(D) $\frac{1}{2}$
(E) $\frac{1}{4}$

31 (Cefet-MG) O número complexo dado por $\frac{(2+i)(3-2i)}{3-i}$ é igual a:

(A) $\frac{5-i}{2}$
(B) $\frac{5+i}{2}$
(C) $\frac{9+i}{10}$
(D) $\frac{11+i}{10}$
(E) $\frac{23+5i}{10}$

32 (UFRRJ) Sendo $a = 2 + 4i$ e $b = 1 - 3i$, o valor de $\left|\frac{a}{b}\right|$ é:

(A) $\sqrt{3}$
(B) $\sqrt{2}$
(C) $\sqrt{5}$
(D) $2\sqrt{2}$
(E) $1+\sqrt{2}$

33 (UEPG-PR) Sobre o complexo $z = \frac{1-i}{i^{54}}$, calcule a soma dos números associados às proposições verdadeiras.

(01) $z^2 = -2i$

(02) z é uma das raízes da equação $x^2 + 2x - 2 = 0$.

(04) $|z| = \sqrt{2}$

(08) Seu conjugado é $-1 + i$.

(16) $\frac{1}{z} = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{i}{2}\right)$

34 (UFV-MG) Se z é um número complexo tal que $|z - 3| = |z - 7| = |z - 3i|$, então é correto afirmar que:

(A) $\text{Re}(z) > 5$
(B) $\text{Im}(z) < 5$
(C) $\bar{z} = 5 - 5i$
(D) $|z| = 2\sqrt{5}$
(E) $|z| = 5\sqrt{2}$

35 (UFC-CE) Seja z_0 o número complexo que é raiz da equação $\frac{iz + (1-3i)}{1+i} = 4i$ (lembre-se que $i^2 = -1$). Então, $|z_0|$ é igual a:

(A) $2\sqrt{11}$
(B) $3\sqrt{6}$
(C) 8
(D) $\sqrt{74}$
(E) $2\sqrt{21}$

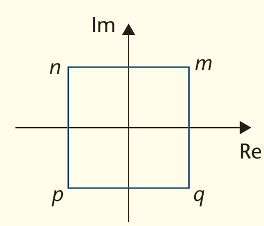
36 Calcule $\sqrt{-15 - 8i}$.

37 Calcule:

a) $\sqrt{-2}$

b) $\sqrt{1 - 2i\sqrt{2}}$

38 (UFF-RJ) Considere os números complexos m, n, p e q, vértices de um quadrado com lados paralelos aos eixos e centro na origem, conforme a figura abaixo.



Pode-se afirmar que o número $m + n + p + q$:

(A) é um real não nulo.

(B) é igual a zero.

(C) possui módulo unitário.

(D) é um imaginário puro.

(E) é igual a $1 + i$.

39 Sabendo que $z \cdot \bar{z} = 100$, calcule $|z|$.

40 Escreva na forma algébrica os números:

a) $z = 8 \text{ cis } 45°$

b) $z = 10 \text{ cis } 330°$

41 (UFRJ) As raízes da equação $x^2 - 4x + 8 = 0$ são números complexos que, representados no plano, têm afixos A e B.

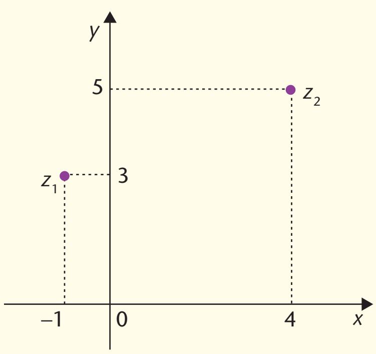
a) Mostre que $2 + 2i$ é uma das raízes dessa equação.

b) Determine a medida do menor ângulo AÔB, onde O representa origem.

42 Represente no plano complexo os afixos (x, y) dos números complexos $z = x + yi$ que tornam verdadeiras as sentenças:

a) $|z| = 2$
b) $|z| \leq 2$
c) $1 < |z| \leq 2$
d) $\text{Re}(z) = 3$
e) $\arg(z) = 45°$

43 (Unirio-Ence-RJ)



Sejam z_1 e z_2 números complexos representados pelos seus afixos na figura acima. Então, o produto de z_1 pelo conjugado de z_2 é:

(A) $19 + 10i$
(B) $11 + 17i$
(C) 10
(D) $-19 + 17i$
(E) $-19 + 7i$

44 (Unicamp-SP) Seja $z = x + yi$ um número complexo $(x, y \in \mathbb{R})$. Representamos por $\text{Re}(z)$ a componente real do número z. Desse modo, resolva a equação $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$, representando-a graficamente no plano complexo.

45 (PUC-RJ) Seja A o conjunto dos números complexos definido abaixo:

$$A = \left\{ p + iq \mid \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p+q}, p \text{ e } q \text{ reais} \right\}$$

Represente graficamente A.

46 (Unirio-RJ) Considere um número complexo z, tal que o seu módulo é 10, e a soma dele com o seu conjugado é 16. Sabendo que o afixo de z pertence ao 4º quadrante, pode-se afirmar que z é igual a:

(A) $6 + 8i$
(B) $8 + 6i$
(C) 10
(D) $8 - 6i$
(E) $6 - 8i$

47 (Cesgranrio-RJ) Um complexo z possui módulo igual a 2 e argumento $\frac{\pi}{3}$. Sendo $\bar{z}$ conjugado de z, a forma algébrica do complexo $\bar{z}$ é:

(A) $1 - i\sqrt{3}$
(B) $\sqrt{3} - i$
(C) $\sqrt{3} + i$
(D) $1 + \sqrt{3}i$
(E) $2(\sqrt{3} - i)$

48 (Cesgranrio-RJ) O lugar geométrico das imagens dos complexos z, tais que z^2 é real, é:

(A) um par de retas paralelas.
(B) um par de retas concorrentes.
(C) uma reta.
(D) uma circunferência.
(E) uma parábola.

49 As imagens dos complexos z que têm o inverso igual ao conjugado formam uma:

(A) reta.
(B) circunferência.
(C) elipse.
(D) hipérbole.
(E) parábola.

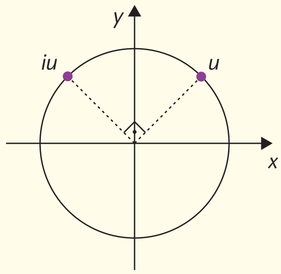
50 (Fatec-SP) Sejam os números complexos $z_1 = \frac{1}{2} + i$ e $z_2 = 1 - \frac{1}{2}i$.

O argumento principal de $z_1 - \bar{z}_2$ é:

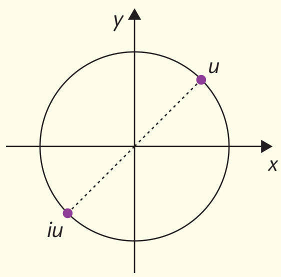
(A) $\frac{3\pi}{4}$
(B) $\frac{5\pi}{4}$
(C) $\frac{7\pi}{4}$
(D) $\frac{\pi}{4}$
(E) $\frac{\pi}{8}$

51 (UFRGS) Se u é um número complexo, as representações gráficas de u e iu podem ser:

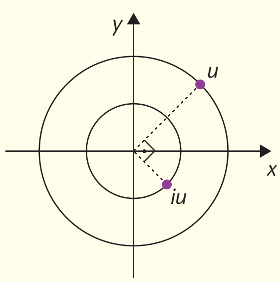
(A)



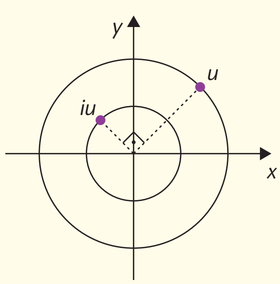
(B)



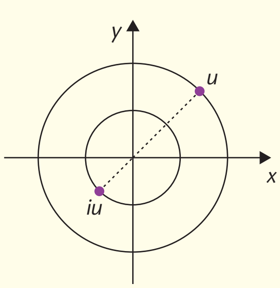
(C)



(D)



(E)



52 (Ufam) Dado o número complexo $z = a(\cos\beta + i \text{ sen } \beta)$ com a = 4, $\beta = \frac{\pi}{8}$. Então, o conjugado do número complexo z^2 é:

(A) $4\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$

(B) $8\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$

(C) $2\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$

(D) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

(E) $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

53 (UnB-DF) No plano complexo, considere a curva β descrita pelos pontos $z = (1 + \cos\theta) \cdot (\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$, para $\theta \in [-\pi, \pi]$, em que $i = \sqrt{-1}$, e julgue os seguintes itens.

a) $|z| \leq 2$ para todo $z \in \beta$.

b) Se z é um número real e $z \in \beta$, então $z = 0$.

c) Se $z \in \beta$, então o conjugado de z pertence a β.

54 (UFU-MG) Seja o número complexo $z = \cos 15° +$ $+ i \text{ sen } 15°$, onde $i^2 = -1$. Se w é um outro número complexo tal que $|w| = |z| = |z - w|$, então pode-se afirmar que um valor possível para w nessas condições é:

(A) $w = \cos 315° + i \text{ sen } 315°$

(B) $w = \cos 60° + i \text{ sen } 60°$

(C) $w = \cos 165° + i \text{ sen } 165°$

(D) $w = \cos 225° + i \text{ sen } 225°$

55 (UFSC) Assinale V (verdadeiro) ou F (falso) em cada uma das proposições adiante:

a) O valor numérico do polinômio $p(x) = x^2 - 4x + 5$ para $x = i$ é $p(i) = 4 - 4i$.

b) O conjugado do número complexo $z = \frac{2+i}{i}$ é $1 + 2i$.

c) A forma trigonométrica do número complexo $z = 1 - i\sqrt{3}$ é $z = 2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{5\pi}{3}\right)$.

d) O determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1+i & 1-i & 0 \end{vmatrix}$ define um número complexo. O módulo desse número complexo é 1 (um).

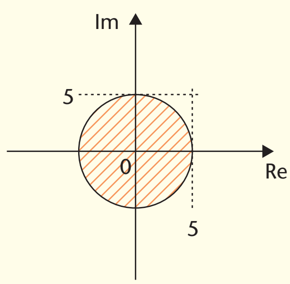
e) Dadas as funções $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + x$, o valor do quociente $\left[\dfrac{f(2+i)}{g(1-i)}\right]$ é $\left(-\dfrac{3}{5}\right) + \left(\dfrac{i}{5}\right)$.

56 (UFRGS) Se $w = \cos 30° + i \text{ sen } 30°$ e $z = \cos 120° + i \text{ sen } 120°$, então:

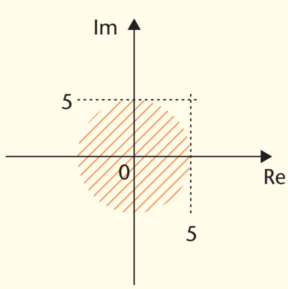
(A) $w^2 + z^2 = 0$
(B) $w + z = 0$
(C) $w^2 - z^2 = 0$
(D) $w - z = 0$
(E) $w^4 + z^4 = 0$

57 (Cefet-PR) Os números complexos $z = a + bi$ podem ser representados graficamente no plano de Argand-Gauss. Sendo $|z|$ o módulo de z, o gráfico que representa todos os números complexos com $|z| < 5$ é:

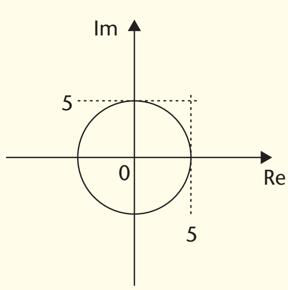
(A)



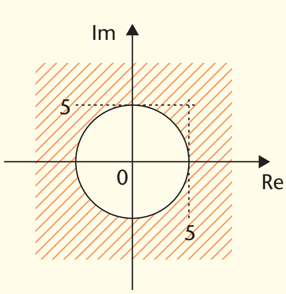
(B)



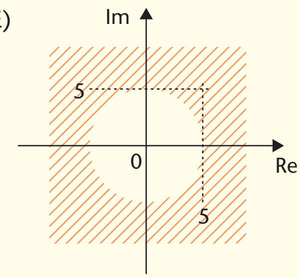
(C)



(D)



(E)



58 (Unirio-RJ) Seja $z = x + yi$ um número complexo, não nulo, com argumento θ e módulo indicado por $|z|$, isto é, $z = |z|(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$. Para que se tenha $z^2 = a + bi$, com $b \neq 0$, é necessário que:

(A) $\cos 2\theta = 0$
(B) $\text{sen } 2\theta = 0$
(C) $\text{sen } \theta + \cos\theta \neq 0$
(D) $\text{sen } \theta \neq 0$
(E) $\cos\theta = 0$

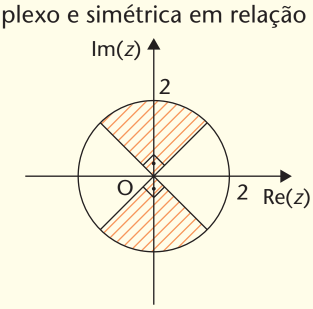
59 (Unicamp-SP) Dado um número complexo $z = x + iy$, o seu conjugado é o número complexo $\bar{z} = x - iy$.

a) Resolva as equações $z \cdot \bar{z} = 4$ e $(\bar{z})^2 = z^2$.

b) Ache os pontos de interseção dos lugares geométricos que representam as soluções dessas equações.

60 (PUC-RJ) Se i for um dos vértices de um hexágono regular centrado na origem, então quais são os outros vértices?

61 (UFRGS) A região sombreada da figura é parte do plano complexo e simétrica em relação à origem O.



Se o número complexo z, de argumento θ, está na região, então:

(A) $|z| \leq 2$ e $\left(\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{7\pi}{4}\right)$

(B) $|z| = 2$ e $\left(\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{7\pi}{4}\right)$

(C) $|z| \leq 2$ e $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

(D) $|z| = 2$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

(E) $|z| \leq 2$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

62 (Puccamp-SP) Sejam x e y os números reais que satisfazem a igualdade $i(x - 2i) + (1 - yi) = (x + y) - i$, onde i é a unidade imaginária. O módulo do número complexo $z = (x + yi)^2$ é igual a:

(A) $\sqrt{5}$

(B) $2\sqrt{5}$

(C) 5

(D) $5\sqrt{5}$

(E) 25

63 (Mack-SP) Considere o complexo $z = a + bi$, $a > 0$ e $b > 0$, e o polígono dado pelos afixos de z, $-z$ e $-bi$. Se a área desse polígono é 5, então z pode ser:

(A) $\frac{1}{2} + 8i$

(B) $\frac{1}{2} + 4i$

(C) $\frac{1}{3} + 9i$

(D) $\frac{1}{3} + 15i$

(E) $\frac{1}{2} + 14i$

64 (Mack-SP) Dentre os complexos $z = (x, y)$ tais que $\begin{cases} |z-1| \leq 1 \\ x - y \geq 1 \end{cases}$, aquele de maior módulo tem:

(A) $x > 0$ e $y = 0$

(B) $x < 0$ e $y = 0$

(C) $x > 0$ e $y < 0$

(D) $x > 0$ e $y > 0$

(E) $x = 0$ e $y > 0$

65 (Mack-SP) Sabe-se que dentre os complexos z tais que $|z - (1 + i)^2| = k$, o de maior módulo é $z = 5i$. Então o de menor módulo é:

(A) $z = -i$

(B) $z = i$

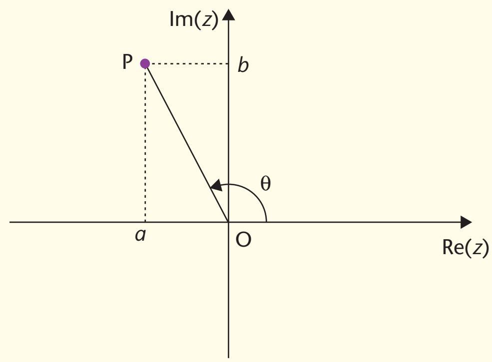
(C) $z = 2i$

(D) $z = -2i$

(E) $z = \frac{i}{2}$

66 (Uerj) Os afixos de três números complexos são equidistantes de (0, 0) e vértices de um triângulo equilátero. Um desses números é $1 + i\sqrt{3}$. Calcule os outros números na forma $a + bi$.

67 (Unirio-RJ) No plano de Argand-Gauss (a seguir), o ponto P = (a, b) representa o número complexo $z = a + bi$, onde $i = \sqrt{-1}$. Um relógio com visor circular que marca 11 horas e 15 minutos, e cujo ponteiro das horas tem comprimento igual a 2, é colocado sobre o plano de Argand-Gauss, de forma que o centro do relógio coincida com a origem 0 = (0, 0) e que o ponteiro dos minutos permaneça sobre a parte positiva do eixo real Re(z). Se o ponto P coincide com a extremidade do ponteiro das horas, determine a forma trigonométrica do número complexo z.



68 (Cesgranrio-RJ) Seja o complexo $z = \rho \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ escrito na forma trigonométrica. Então $z \cdot \bar{z}$ é:

(A) 2ρ

(B) $2\rho(\cos 2\theta - i \operatorname{sen} 2\theta)$

(C) ρ^2

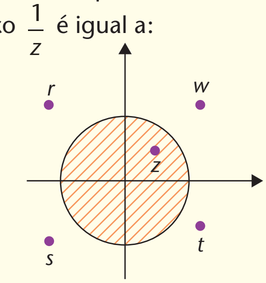
(D) $\rho^2(\cos\theta^2 + i \operatorname{sen}\theta^2)$

(E) $\cos^2\theta + i \operatorname{sen}^2\theta$

69 Escreva na forma $a + bi$ o quociente de $12 \cdot \operatorname{cis}\pi$ por $4 \cdot \operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$.

70 (Cesgranrio-RJ) A figura mostra, no plano complexo, o círculo de centro na origem e raio 1, e as imagens de cinco números complexos.

O complexo $\frac{1}{z}$ é igual a:



(A) z

(B) w

(C) r

(D) s

(E) t

71 (UFRJ) Dados os números complexos $a = 2(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$ e $b = 3(\cos x + i \text{ sen } x)$, determine o menor valor positivo de x, de modo que o produto $a \cdot b$ seja um número real.

72 (Cesgranrio-RJ) Sendo $z = x + iy$ um número complexo,

a) represente graficamente a região correspondente a $|z - 4 - 3i| \leq 5$;

b) apresente $z = 5 - 5\sqrt{3}\,i$ na forma trigonométrica.

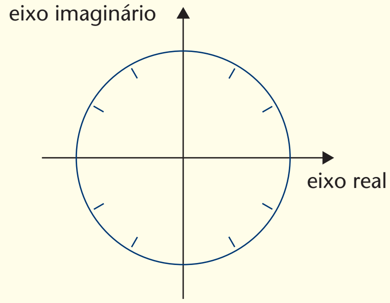
73 (Uerj) Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Se i é a unidade imaginária dos números complexos, então o produto $(\cos \hat{A} + i \text{ sen } \hat{A}) \cdot (\cos \hat{B} + i \text{ sen } \hat{B})$ é igual a:

(A) $-i$
(B) i
(C) -1
(D) 0
(E) 1

74 (UFRJ) Um jantar secreto é marcado para a hora em que as extremidades dos ponteiros do relógio forem representadas pelos números complexos z e w a seguir:

$$z = \alpha\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right],\ w = z^2$$

sendo α um número real fixo, $0 < \alpha < 1$.



Determine a hora do jantar.

75 Calcule o menor valor natural de n para o qual $(-\sqrt{3} + i)^n$ é um número imaginário puro.

76 (UFRJ) Determine o menor inteiro $n \geq 1$ para o qual $(\sqrt{3} + i)^n$ é um número real positivo.

77 (Fuvest-SP) Dado o número complexo $z = \sqrt{3} + i$ qual é o menor valor do inteiro $n \geq 1$ para o qual z^n é um número real?

(A) 2
(B) 4
(C) 6
(D) 8
(E) 10

78 (UFRJ) z é um número complexo tal que $z^7 = 1$, $z \neq 1$. Calcule: $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$.

79 (UFF-RJ) Considere o polinômio $p(x) = x^3 - 1$.

a) Encontre, em $\mathbb{C}$, todas as raízes do polinômio $p(x)$.

b) Calcule a área do polígono cujos vértices são os pontos que representam as raízes do polinômio $p(x)$, no plano complexo.

c) Sejam z_1 e z_2 as raízes complexas, não reais, do polinômio $p(x)$. Determine o valor de $(z_1^{3000} + \bar{z}_2^{3000})$.

80 (UFRJ) A representação trigonométrica de um número complexo z é dada por $z = \rho(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$. Se z é um número complexo e $\bar{z}$ seu conjugado, resolva a equação:

$z^3 = \bar{z}$

81 (Unirio-RJ) Uma das raízes cúbicas de um número complexo é 2(cis 300°). Determine o conjugado da soma das outras raízes.

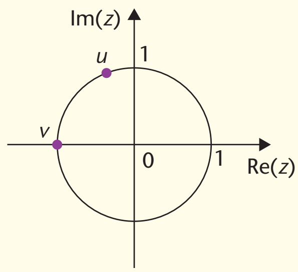
82 (ITA-SP) Seja z_0 o número complexo $1 + i$. Sendo S o conjunto solução no plano complexo de $|z - z_0| = |z + z_0| = 2$, então o produto dos elementos de S é igual a:

(A) $4(1 - i)$
(B) $2(2 + i)$
(C) $2(i - 1)$
(D) $-2i$
(E) $2i$

83 (ITA-SP) Seja S o conjunto de números complexos que satisfazem, simultaneamente, as equações $|z - 3i| = 3$ e $|z + i| = |z - 2 - i|$.
O produto de todos os elementos de S é igual a:

(A) $-2 + i\sqrt{3}$
(B) $2\sqrt{2} + 3i\sqrt{3}$
(C) $3\sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$
(D) $-3 + 3i$
(E) $-2 + 2i$

84 (UFRGS) Considere a figura abaixo, onde u e v são números complexos.



Se $v = u + \frac{1}{u}$, então u vale:

(A) $-1 + i$

(B) $-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$

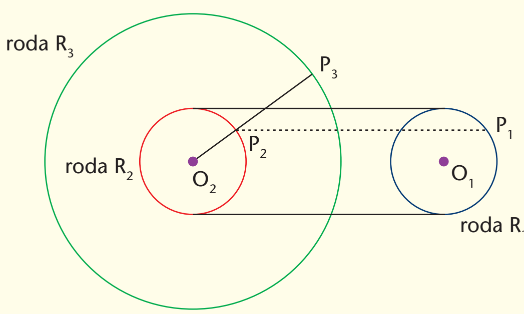
(C) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

(D) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$

(E) $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

85 (UFRJ) Em um sistema de eixos cartesianos fixo, o ponto A (3, 2) foi girado de 30° no sentido anti-horário em torno da origem, obtendo-se, assim, o ponto A'. Quais as coordenadas de A' nesse mesmo sistema?

86 (UFF-RJ) A figura representa uma bicicleta ergométrica com as seguintes características:



as rodas dentadas R_1 e R_2 de centros, respectivamente, O_1 e O_2 possuem, ambas, 8 cm de raio e estão ligadas por uma corrente; a roda R_3 tem 24 cm de raio, centro O_2 e está fixada em R_2.
Considere o plano da figura representando o plano complexo onde O_1 é identificado a $z_1 = 0 + 0i$, O_2 a $z_2 = -40 + 0i$ e P_1 a $z = 4\sqrt{3} + 4i$.
Seja P_2 um ponto de R_2 tal que $P_1\ P_2\ O_2\ O_1$ é um paralelogramo.
Determine o número complexo w que identifica o ponto P_3, sobre R_3, obtido pelo prolongamento do raio $O_2\ P_2$.

87 (UnB-DF) Considerado os números complexos $w = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{i}{2}\right)$ e $u = w^4$, julgue os itens seguintes.

a) $w^{-1} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

b) $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 = \frac{2}{(1-w)}$

c) $1 + \left(\frac{u}{2}\right) + \left(\frac{u^2}{4}\right)$ pertence ao conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$.

d) Os números complexos $x + yi$ para os quais o produto $(x + yi)w$ é imaginário puro estão localizados sobre um círculo de centro na origem.

88 (ITA-SP) Sejam a_n e b_n números reais com $n = 1, 2, ..., 6$. Os números complexos $z_n = a_n + ib_n$ são tais que $|z_n| = 2$ e $b_n \ge 0$, para todo $n = 1, 2, ..., 6$. Se $(a_1, a_2, ..., a_6)$ é uma progressão aritmética de razão $-\frac{1}{5}$ e soma 9, então z_3 é igual a:

(A) $2i$

(B) $\frac{8}{5} + \frac{6i}{5}$

(C) $\sqrt{3} + i$

(D) $-\frac{3\sqrt{3}}{5} + \frac{\sqrt{73}i}{5}$

(E) $\frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{17}i}{5}$

89 (ITA-SP) O número complexo

$$z = \frac{1 - \cos a}{\text{sen } a \cos a} + i\frac{1 - 2\cos a + 2\ \text{sen } a}{\text{sen } 2a},\ a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

tem argumento $\frac{\pi}{4}$. Nesse caso, a é igual a:

(A) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{5}$

(E) $\frac{\pi}{9}$

90 (Ufam) O valor da potência $(1 - i)^{10}$ é:

(A) $-32i$

(B) $32i$

(C) $16i$

d) i

e) $-i$

91 (UFV-MG) Seja i a unidade imaginária, $i=\sqrt{-1}$. O valor da expressão $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$ é:

(A) 1
(B) –2
(C) 2
(D) $-2i$
(E) $2i$

92 (UFRN) O número complexo $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{25}$ é igual a:

(A) i (B) 1 (C) –1 (D) $-i$

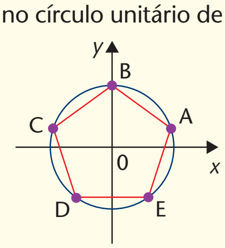
93 (Cesgranrio-RJ) Dados os números complexos $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$ e $z_3 = \dfrac{z_2^3}{z_1^4}$, pode-se afirmar que a parte real de z_3 vale:

(A) $+\dfrac{1}{2}$
(B) $+\dfrac{1}{4}$
(C) $-\dfrac{1}{4}$
(D) $-\dfrac{1}{2}$
(E) -1

94 (ITA-SP) Considere, no plano complexo, um polígono regular cujo vértices são as soluções da equação $z^6 = 1$. A área desse polígono, em unidades de área, é igual a:

(A) $\sqrt{3}$
(B) 5
(C) π
(D) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
(E) 2π

95 (UFRGS) O polígono ABCDE da figura é um pentágono regular inscrito no círculo unitário de centro na origem.



As coordenadas polares ρ e θ do vértice A são, respectivamente:

(A) 1 e $\dfrac{\pi}{5}$
(B) 1 e $\dfrac{\pi}{6}$
(C) 1 e $\dfrac{\pi}{8}$
(D) 1 e $\dfrac{\pi}{10}$
(E) 1 e $\dfrac{\pi}{12}$

96 (UnB-DF) Considere P_1 o pentágono regular cujos vértices são determinados pelas raízes complexas z_k do polinômio $z^5 - 1$, com $k = 0, 1, 2, 3, 4$ e P_3 o pentágono regular cujos vértices são determinados pelas raízes complexas w_k do polinômio $w^5 - 3^5$, com $k = 0, 1, 2, 3$ e 4, nos quais se supõe que as raízes estejam ordenadas por ordem crescente de seus argumentos. Julgue os seguintes itens.

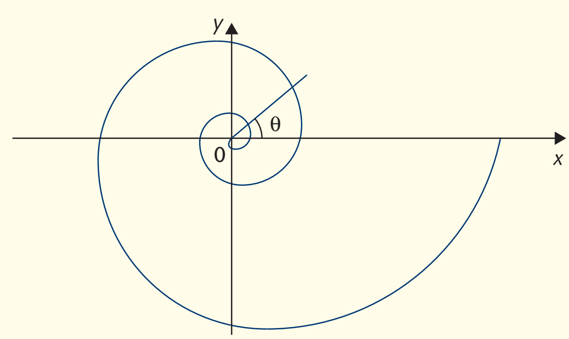
a) O número complexo $\dfrac{w^3}{z^3}$ tem parte imaginária não nula.

b) Para $k = 0, 1, 2$ e 3, tem-se $w_{k+1} = w_k \cdot z_1$.

c) Se D é o decágono determinado pelas raízes complexas do polinômio $z^{10} - 3^{10}$, então todos os cinco vértices de P_3 coincidem com vértices de D.

d) P_1 e P_3 são polígonos regulares semelhantes.

97 Uma das mais belas curvas matemáticas que se conhece é a espiral logarítmica, descoberta por René Descartes (1596 – 1650).



Matemáticos e naturalistas assinalaram a presença dessa curva, denominada "curva harmoniosa", em muitos organismos vivos.
Identificando o plano xOy com o plano complexo, os pontos de uma espiral logarítmica podem ser descritos pelas imagens dos números pertencentes ao conjunto

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = 2^{\frac{\theta}{3}}(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),\ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Com base nessas informações:

a) Calcule $|z|$ para $\theta = \pi$.

b) Se $\{z_1, z_2\} \in A$, $\arg(z_1) = 3$ e $\arg(z_2) = 3 + 2\pi$, calcule $|z_2 - z_1|$.

98 (UFC-CE) Considere o número complexo $z=(1+i)\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)$. Assinale a opção na qual consta o menor inteiro positivo n, tal que z^n seja um número real positivo.

(A) 6
(B) 12
(C) 18
(D) 24
(E) 30

99 (Mack-SP) As representações gráficas dos complexos z tais que $z^3 = -8$ são os vértices de um triângulo:

(A) inscrito numa circunferência de raio 1.
(B) que tem somente dois lados iguais.
(C) equilátero de lado 2.
(D) equilátero de altura $2\sqrt{3}$.
(E) de área $3\sqrt{3}$.

100 (Mack-SP) Se $3 + 4i$ é raiz cúbica de um complexo z, então o produto das outras raízes cúbicas de z é:

(A) $-7 + 24i$
(B) $7 - 24i$
(C) $24 + 7i$
(D) $-24 - 7i$
(E) $-7 - 24i$

101 (Mack-SP) A solução da equação $|z| + z - 18 + 6i = 0$ é um complexo z de módulo:

(A) 6
(B) 8
(C) 18
(D) 12
(E) 10

102 (Fatec-SP) Seja a equação $x^2 + 4 = 0$ no conjunto Universo U = $\mathbb{C}$, onde $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos. Sobre as sentenças:

I) A soma das raízes dessa equação é zero.

II) O produto das raízes dessa equação é 4.

III) O conjunto solução dessa equação é {–2, 2}.

é verdade que:
(A) somente a I é falsa.
(B) somente a II é falsa.
(C) somente a III é falsa.
(D) todas são verdadeiras.
(E) todas são falsas.

103 (ITA-SP) Seja a equação em $\mathbb{C}$: $z^4 - z^2 + 1 = 0$. Qual dentre as alternativas a seguir é igual à soma de duas das raízes dessa equação?

(A) $2\sqrt{3}$

(B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $+\frac{\sqrt{3}}{2}$

(D) $-i$

(E) $\frac{i}{2}$

104 (Esam-RN) Uma das raízes sextas do número complexo $z = -1$ é:

(A) $w=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

(B) $w = -1$

(C) $w = 1$

(D) $w=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(E) $w=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

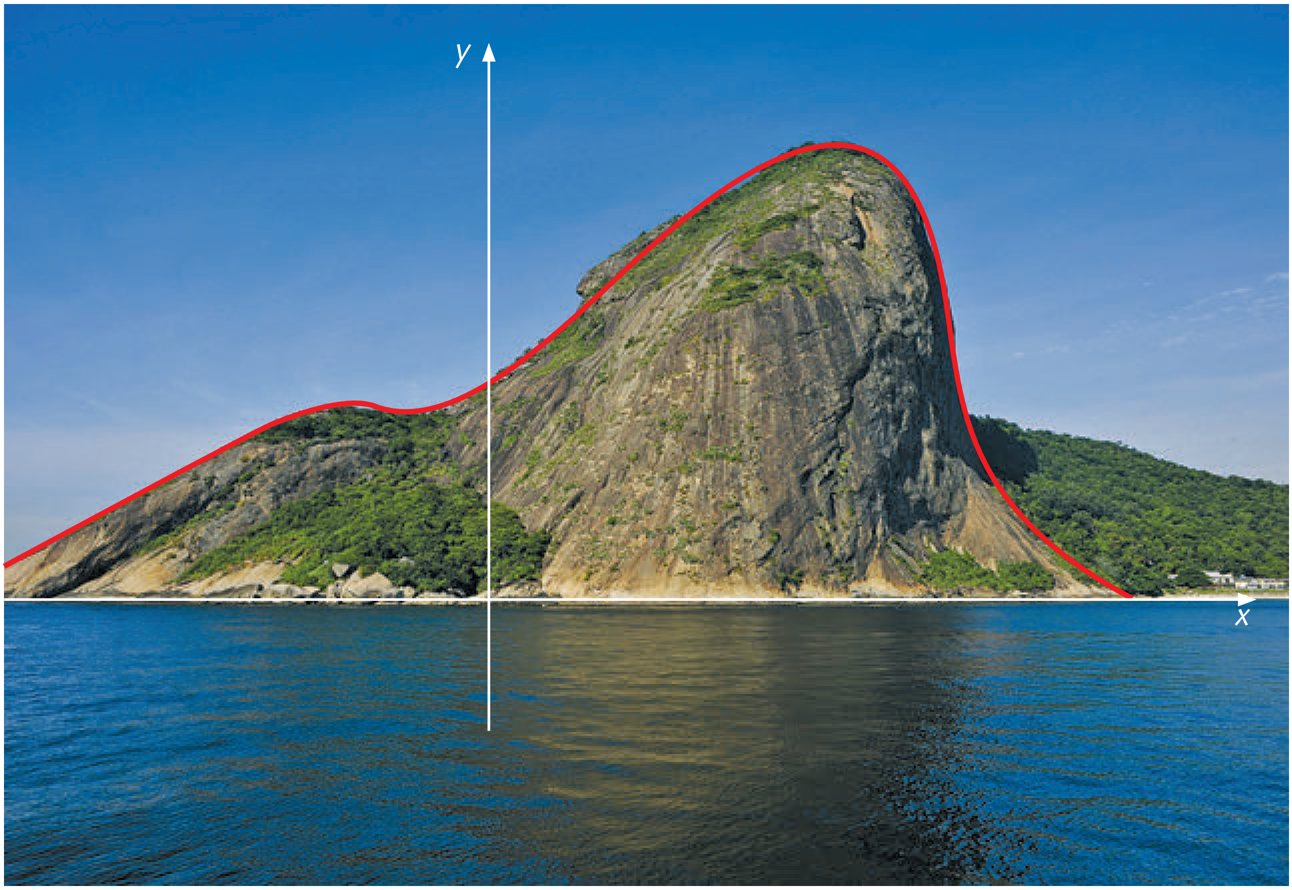
105 (UFBA) Determine a soma das soluções da equação $x^4=-8+8\sqrt{3}i$.

106 (UFPE) As soluções complexas da equação $z^6 = 1$ são vértices de um polígono regular no plano complexo. Calcule o perímetro deste polígono.

107 Resolva a equação em $\mathbb{C}$: $x^2 - 10x + 29 = 0$.

CAPÍTULO VI

POLINÔMIOS



Ricardo Azoury/Tyba

Fatorar polinômios e encontrar suas raízes é uma tarefa extremamente comum na resolução de problemas – e que pode ser surpreendentemente difícil, já que não há fórmula com radicais que determine as raízes de um polinômio qualquer de grau maior ou igual a 5. Neste capítulo, aprenderemos a identificar alguns casos em que a fatoração é possível, e encontraremos novas relações entre as raízes de um polinômio e seus coeficientes.

6 – POLINÔMIOS

6.1 – Introdução

DEFINIÇÃO
Polinômio de uma variável.

Chamamos **polinômio de uma variável** toda expressão da forma:

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, para $n \in \mathbb{N}$, em que os coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots a_1, a_0$ são números quaisquer, reais ou complexos.

Exemplos:

i) $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x - 1$

ii) $p(x) = 12x^5 - x^3 + 2x - 1 = 12x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 + 2x - 1$

NOTA
Não se define o grau no polinômio nulo.

Em geral, estudaremos os polinômios ordenados segundo as potências decrescentes de x (que devem ser de expoentes inteiros e positivos).

O maior expoente de x, com coeficiente não nulo, é o grau do polinômio.

Assim:

$p(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 7x + 1$ é um polinômio do 4º grau

$q(x) = x^5 - 1$ é um polinômio do 5º grau

$r(x) = 3x^2 - 5x + 1$ é um polinômio do 2º grau

Quando o polinômio tem mais de uma variável, escolhe-se uma delas como principal e tratam-se as outras como constantes. Neste caso, ordena-se o polinômio em relação a esta variável principal, que será chamada **variável ordenatriz**.

Exemplos:

i) $4x^2y^3 - 5xy^2 + 4x^4y - 3$
Neste exemplo, o polinômio, que é do 3º grau em y, está ordenado segundo as potências decrescentes de y.

ii) O polinômio $(y^2 + 1)x^3 + 3y^4x^2 + 7x - (2y + 3)$ é do 3º grau em x. Seus coeficientes serão então $y^2 + 1$, $3y^4$, 7 e $-(2y + 3)$.

6.1.1 – Valor numérico de um polinômio

O **valor numérico de um polinômio** é o número que resulta ao substituirmos a variável x pelo número a. Usaremos a notação $p(a)$.

Assim, para o polinômio $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 10$:

$p(1) = 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 10 = -6$

$p(2) = 2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 10 = 0$

DEFINIÇÃO
Raiz de um polinômio.

Se $p(a) = 0$ dizemos que $x = a$ é uma **raiz** do polinômio.

Exemplos:

i) O polinômio $p(x) = 2x^4 - 5x^3 + 5x - 2$ tem a raiz $x = 1$, pois $p(1) = 2 \cdot 1^4 - 5 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1 - 2 = 0$.

ii) O polinômio $q(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 10$ tem a raiz $x = 2$, pois $q(2) = 2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 10 = 0$.

iii) Calcular o valor de a de modo que o polinômio $2x^3 + 4x^2 - 5x + a$ tenha uma raiz igual a 3.

Basta fazer $p(3) = 0$, logo:

$2 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + a = 0 \Rightarrow a = -75$

iv) Calcular os valores de a e b de modo que o polinômio $x^4 + ax + b$ tenha a raiz $x = 1$ e assuma o valor 30 no ponto $x = 2$.

Devemos ter: $p(1) = 0$ e $p(2) = 30$, logo:

$$\begin{cases} 1^4 + a + b = 0 \\ 16 + 2a + b = 30 \end{cases} \Rightarrow a = 15 \text{ e } b = -16$$

6.1.2 – Identidades

Uma **identidade** é uma igualdade que se verifica para quaisquer valores de suas variáveis.

As igualdades $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ são identidades, mas $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$, $(x + 1)^2 = 16$ não são identidades, pois só se verificam para certos valores de x. Para as identidades usaremos a notação $\equiv$.

6.1.3 – Polinômio identicamente nulo

Um **polinômio** $p(x)$ é **identicamente nulo** quando seus coeficientes são todos nulos.

Escrevemos $p(x) \equiv 0$. Neste caso, $p(x)$ se anula para todos os valores de x.

O teorema a seguir mostra que, se um polinômio $p(x)$ se anula para todos os valores de x, ele deve ser identicamente nulo.

Teorema

Todo polinômio do grau n que se anula para $n + 1$ valores de sua variável é identicamente nulo.

Demonstração:

Seja o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Atribuímos a x, $n + 1$ valores distintos $x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1}$ e calculamos a condição para ele se anular para todos esses valores. Devemos ter:

$$\begin{cases} a_n x_1^n + \ldots + a_1 x_1 + a_0 = 0 \\ a_n x_2^n + \ldots + a_1 x_2 + a_0 = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_n x_{n+1}^n + \ldots + a_1 x_{n+1} + a_0 = 0 \end{cases}$$

NOTA
Este é um determinante de Vandermonde com valor $\Delta = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots$ $\ldots(x_n - x_{n+1})$, como veremos no apêndice sobre Indução Finita.

Temos então um sistema homogêneo cujo determinante é:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^n & x_n^{n-1} \ldots x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} \ldots x_2 & 1 \\ \vdots & & \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} \ldots x_{n+1} & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

pois os valores $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ são todos diferentes.

Assim, o sistema terá uma única solução, que é $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$ e o polinômio se reduz a $p(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x + 0$.

Exemplos:

i) Calcular os valores de a, b e c de modo que o polinômio $(a + b + 2)x^2 +$ $+ (a + c + 4)x + (b + c - 10)$ seja nulo para todo valor de x.

O polinômio deve ser identicamente nulo, então:

$$\begin{cases} a + b + 2 = 0 \\ a + c + 4 = 0 \\ b + c - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 6 \\ c = 4 \end{cases}$$

ii) Seja f uma função real tal que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para todo x real em que a, b, c e d são reais.
Se $f(x) = 0$ para todo x do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, calcular $f(6)$.
Como $f(x)$ é um polinômio do 3º grau e se anula para mais do que 3 valores reais de x (5 valores), isto significa que $f(x)$ é um polinômio identicamente nulo. Assim sendo, se anulará para qualquer valor de x, donde $f(6) = 0$.

6.1.4 – Polinômios idênticos

Dois polinômios, $p_1(x)$ e $p_2(x)$, são ditos idênticos quando têm o mesmo grau e mesmos coeficientes de termos semelhantes.
Usamos a notação $p_1(x) \equiv p_2(x)$.

Teorema

A condição necessária e suficiente para que dois polinômios sejam idênticos é que assumam valores iguais para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

• A condição é necessária

É evidente, os polinômios coincidirão ($a_i = b_i$, $\forall i$), pois têm coeficientes dos termos semelhantes iguais.

• A condição é suficiente

$p_1(x) \equiv p_2(x) \Rightarrow p_1(x) - p_2(x) \equiv 0$

Sejam:

$p_1(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ e

$p_2(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$

Devemos ter:

$p_1(x) - p_2(x) = (a_n - b_n)x^n + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) \equiv 0$

Como $p_1(x) - p_2(x) = 0$ para qualquer valor de x, então o polinômio $p_1(x) - p_2(x)$ é identicamente nulo, isto é:

$$\begin{array}{l} a_n - b_n = 0 \Rightarrow a_n = b_n \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_1 - b_1 = 0 \Rightarrow a_1 = b_1 \\ a_0 - b_0 = 0 \Rightarrow a_0 = b_0 \end{array}$$

NOTA

Se os polinômios tiverem graus diferentes, completam-se com coeficientes nulos até ficarem do mesmo grau.

Exemplos:

i) Calcular os valores de m e n de modo que os polinômios $p(x) = (m + n)x^3 + (m + 2n)x^2 + (m^2 + 2n)x + 1$ e $q(x) = -x^2 - x + 1$ tenham os mesmos valores numéricos qualquer que seja o valor de x.

Os polinômios devem ser idênticos, logo:

$$\begin{cases} m + n = 0 \\ m + 2n = -1 \\ m^2 + 2n = -1 \\ 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ m = 1 \end{cases}$$

ii) Calcular os valores de m, n e p de modo que a fração $\dfrac{(m-1)x^3 + (n+3)x^2 + (p-2)x + 6}{2x^2 + x + 3}$ seja igual a 2, qualquer que seja o valor de x onde esteja definida.

Devemos ter $\dfrac{(m-1)x^3 + (n+3)x^2 + (p-2)x + 6}{2x^2 + x + 3} \equiv 2$

$$(m-1)x^3+(n+3)x^2+(p-2)x+6 \equiv 4x^2+2x+6, \text{ logo:}$$

$$\begin{cases} m-1=0 \\ n+3=4 \\ p-2=2 \end{cases} \Rightarrow m=1,\ n=1 \text{ e } p=4$$

Exercícios resolvidos:

1) Escreva o binômio $6x^2 - 3$ como diferença de dois quadrados do tipo $(x^2 + a)^2 - (x^2 + b)^2$.

Solução:

Devemos ter:

$$6x^2-3 \equiv (x^2+a)^2-(x^2+b)^2$$

$$6x^2-3 \equiv x^4+2ax^2+a^2-x^4-2bx^2-b^2$$

$$6x^2-3 \equiv (2a-2b)x^2+a^2-b^2$$

Igualando os coeficientes dos termos semelhantes:

$$\begin{cases} 2a-2b=6 \\ a^2-b^2=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ (a+b)(a-b)=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ a+b=-1 \end{cases}$$

que resulta em $a = 1$ e $b = -2$.

Temos então $6x^2-3 \equiv (x^2+1)^2-(x^2-2)^2$.

2) Determine uma progressão aritmética em que a soma dos n primeiros termos seja $3n^2 + n$, qualquer que seja n.

Solução:

A soma dos termos de uma progressão aritmética, em função de n, é dada por:

$$S=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{[a_1+a_1+(n-1)r]n}{2}=\frac{1}{2}rn^2+\frac{1}{2}(2a_1-r)n$$

Identificando as duas expressões, pois devem ser iguais para qualquer n, vem:

$$3n^2+n \equiv \frac{1}{2}rn^2+\frac{2a_1-r}{2}n \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}r=3 \\ \frac{2a_1-r}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} r=6 \\ a_1=4 \end{matrix}$$

A progressão será (4, 10, 16, ...).

3) Mostre que todas as retas da família $(a + 1)x + (3a - 1)y - (5a + 1) = 0$, variáveis com o parâmetro a, passam por um ponto fixo.

NOTA
Aqui, a variável n do polinômio é interpretada por $n \in \mathbb{N}$.

Solução:
Como a deve ser qualquer, esta igualdade deve ser uma identidade em a, para este ponto fixo P = (x, y), logo:

$$(a+1)x+(3a-1)y-(5a+1)\equiv 0$$

$$(x+3y-5)a+(x-y-1)\equiv 0 \iff$$

$$\begin{cases} x+3y-5=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+3y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \iff \begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}$$

O ponto fixo será então (2, 1).

4) Determine os polinômios do 4º grau que não se alteram com a substituição de x por $1-x$, qualquer que seja x.

Solução:
Devemos ter $p(x)\equiv p(1-x)$.
$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$p(1-x) = a(1-x)^4 + b(1-x)^3 + c(1-x)^2 + d(1-x) + e$
Desenvolvendo os binômios, vem:
$p(1-x) = ax^4 + (-4a-b)x^3 + (6a+3b+c)x^2 + (-4a-3b-2c-d)x + (a+b+$
$+c+d+e)$

Identificando $p(x)$ e $p(1-x)$, temos:

$$\begin{cases} -4a-b=b & \Rightarrow\ b=-2a \\ 6a+3b+c=c & \Rightarrow\ 0=0 \\ -4a-3b-2c-d=d & \Rightarrow\ 2a-2c=2d\ \Rightarrow\ c=a-d \\ a+b+c+d+e=e & \Rightarrow\ 0=0 \end{cases}$$

O polinômio fica:
$p(x) = ax^4 - 2ax^3 + (a-d)x^2 + dx + e = ax^2(x-1)^2 + dx(x-1) + e$

5) Chama-se polinômio mônico aquele em que o coeficiente do termo de maior grau é igual a 1. Sabendo que o polinômio acima é mônico e que $p(0) = 0$ e $p(2) = 4$, determine o polinômio.

Solução:
Como é mônico, $a = 1$ e o polinômio fica:
$p(x) = x^2(x-1)^2 + dx(x-1) + e$
Como $p(0) = 0$ então $e = 0$ e o polinômio se reduz a $p(x) = x^2(x-1)^2 +$
$+ dx(x-1)$.

Como $p(2) = 4$, vem: $2^2 \cdot 1^2 + d \cdot 2 \cdot 1 = 4$
que dá $2d = 0 \Rightarrow d = 0$, logo:

$p(x) = x^2(x-1)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$

NOTA
Neste problema, a é a variável do polinômio, enquanto (x, y) são as coordenadas fixas do ponto.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Quais das seguintes funções são funções polinomiais? A seguir, determine o grau de cada um dos polinômios.

a) $p(x) = -4x^3 + 7x^2 - 5x + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3} + 3x^2 - 4x + 7$

c) $g(x) = x^8 + 7x^7 + 1$

d) $h(x) = 3x^4 - 5x - 8$

e) $i(x) = 5x^7 - \frac{3}{\sqrt{x}} + 6$

f) $j(x) = x^6 + 2x^2 + 3x + 1$

2 Determine $p \in \mathbb{R}$, para que o polinômio $f(x) = (p - 4)x^3 + (p^2 - 16)x^2 + (p + 4)x + 4$ seja de grau 2.

3 Determine $p \in \mathbb{R}$, para que o polinômio $f(x) = (p - 2)x^4 + 6x^3 - 4x + 2$ seja do 4º grau.

4 Determine o valor numérico do polinômio $p(x) = x^2 - 5x + 6$ para:

a) $p(0)$

b) $p(2)$

c) $p\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $p(1 + i)$

e) $p(\sqrt{2})$

5 Sabendo-se que $p(x) = x^3 + x^2 + mx + n$ é do 3º grau e que $p(-1) = 0$ e $p(1) = 0$, determine $p(2)$.

6 Encontre m e p de tal modo que os dois polinômios $p(x) = (5m - 52)x^2 - (m - 4)x + 4$ e

$q(x) = (2p + 1)x^2 - 5px + 20$ admitam as mesmas raízes.

7 Seja $f(x)$ um polinômio de grau menor ou igual a 3. Sabendo-se que o gráfico da função $y = f(x)$ passa pelos pontos (0, 1); (–1, 0); (1, 0); (2, 0), calcule $f(6)$.

8 Seja $p(x)$ um polinômio tal que $p(2) = p(-1) = 0$. Se $p(x)$ possui grau igual a 2, determine sua forma geral.

9 Calcule os valores de a e b de modo que:

a) $x^3 + 1 \equiv (x + 1) \cdot (x^2 + ax + b)$

b) $(mx + n)^3 \equiv 8x^3 + ax^2 + bx + 27$

10 Considere os seguintes polinômios:
$p_1(x) = 3x^3 - 4bx^2 + 7b^3$
$p_2(x) = -6x^3 + 15bx^2 + 5b^3$
$p_3(x) = mx^3 + nbx^2 + pb^3$
Sendo $b \neq 0$ e $p_1(x) + p_2(x) + p_3(x) \equiv 0$, calcule $|m + n + p|$.

11 A soma de dois polinômios $p(x) + q(x)$ é um polinômio de grau 6 e a diferença $p(x) - q(x)$ é um polinômio de grau 4. Quais afirmações a seguir são verdadeiras?

I) A diferença $q(x)$ e $p(x)$ tem grau 6.

II) $p(x)$ e $q(x)$ têm o mesmo grau.

III) $p(x)$ tem grau 5.

IV) $q(x)$ tem grau 4.

V) $p(x)$ tem grau 4.

12 Calcule os valores de a e b de modo que: $(2 - a)x^3 - (b + 1)x \equiv 0$.

13 Sendo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, encontre os valores de a, b e c para os quais vale a decomposição $\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$

14 Para que valores reais de a, b e c as funções polinomiais f e g, definidas por:

$f(x) = x^3 + x^2 + x$ e

$g(x) = x^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + a - b - c$, são iguais?

15 O polinômio p é tal que: $p(x) + x \cdot p(2 - x) = x^2 + 3$ para todo x real.

a) Determine $p(0)$; $p(1)$ e $p(2)$.

b) Demonstre que o grau de $p(x)$ é 1.

6.2 – Divisão de polinômios

A identidade de polinômios se presta ao estudo da divisão de polinômios. Suponhamos que se deseje dividir um polinômio de grau m por outro de grau n, $n < m$. O quociente deverá ser do grau $m - n$ e o resto ou é nulo ou, no máximo, do grau $n - 1$ (uma unidade a menos que o divisor).

Exemplo:

Dividir o polinômio $p(x) = 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 5x - 6$ pelo polinômio $d(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

Como o dividendo é do 4º grau e o divisor do 2º grau, o quociente deverá ser do 2º grau, logo será do tipo $ax^2 + bx + c$. Por outro lado, com o divisor sendo do 2º grau, o resto será no máximo do 1º grau, logo, será do tipo $mx + n$.
Tendo em vista que $d(x) \equiv \mathrm{D}(x) \cdot \mathrm{Q}(x) + \mathrm{R}(x)$, em que $\mathrm{Q}(x) = ax^2 + bx + c$ e $\mathrm{R}(x) = mx + n$, vem:

$$2x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 5x - 6 \equiv (2x^2 - 3x + 1)(ax^2 + bx + c) + mx + n$$
$$2x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 5x - 6 \equiv 2ax^4 + (2b - 3a)x^3 + (a - 3b + 2c)x^2 + (b - 3c + m)x + (c + n)$$

Igualando os coeficientes, temos o sistema:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 2b - 3a = -5 \\ a - 3b + 2c = 8 \\ b - 3c + m = 5 \\ c + n = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Q}(x) = x^2 - x + 2 \\ \left.\begin{array}{l} m = 12 \\ n = -8 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{R}(x) = 12x - 8 \end{array}$$

NOTA
O dividendo é o produto do divisor pelo quociente somado ao resto da divisão: $d = \mathrm{DQ} + \mathrm{R}$

6.2.1 – Divisão por $x - a$

Consideremos o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ e o divisor $x - a$.
Devemos ter: $p(x) \equiv (x - a)\,\mathrm{Q}(x) + \mathrm{R}$
O quociente $\mathrm{Q}(x)$ será um polinômio do grau $n - 1$ e o resto R uma constante (R = 0 ou R tem grau 0).

Fazendo na identidade acima $x = a$, temos:

$p(a) \equiv (a - a)\mathrm{Q}(a) + \mathrm{R}$ ou ainda $p(a) = \mathrm{R}$

Temos então:

O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ pelo binômio $x - a$ é o valor numérico deste polinômio para $x = a$, a saber, $p(a) = \mathrm{R}$.

NOTA
$x = a$ é o valor que anula o binômio $x - a$.

Se $p(a) = 0$, isto é, se a é raiz do polinômio $p(x)$, o resto da divisão é nulo, o que indica que o polinômio $p(x)$ é divisível por $x - a$.

NOTA
Para a divisão por $x + a$, basta fazer $x + a = x - (-a)$. O resto é sempre o valor numérico para o número que anula o divisor $x \pm a$.

Exemplos:

i) Calcular o resto da divisão de $p(x) = 2x^3 - x + 5$ por $x - 2$.
Basta calcular $R = p(2) = 2 \cdot 2^3 - 2 + 5 = 19$.

ii) Verificar se o polinômio $p(x) = x^3 + 5x^2 + 5x + 1$ é divisível por $x + 1$.
Basta verificar se o resto é nulo.

$R = p(-1) = (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 1 = 0$, logo $p(x)$ é divisível por $x + 1$.

iii) Calcular o valor de a de modo que o polinômio $p(x) = 2x^3 - 4x + a$ seja divisível por $x + 2$.
Devemos ter $p(-2) = 0$, logo:

$$2 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) + a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 8$$

iv) Calcular os valores de a e b de modo que o polinômio $p(x) = 2x^3 + x^2 + ax + b$ tenha raízes 1 e -2.

$$\text{Devemos ter: } \begin{cases} p(1) = 0 \\ p(-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + 3 = 0 \\ -2a + b - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = -3 \\ -2a + b = 12 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} a = -5 \\ b = 2 \end{matrix}$$

6.2.2 – Divisão por $ax - b$ $(a \neq 0)$

Analogamente ao caso anterior, devemos ter:

$$p(x) \equiv (ax - b) \cdot Q(x) + R$$

O resto será ainda constante pois o divisor $ax - b$ é do primeiro grau.

Fazendo $x = \dfrac{b}{a}$, valor que anula o divisor, temos:

$$P\left(\frac{b}{a}\right) = \left(a \cdot \frac{b}{a} - b\right) \cdot Q\left(\frac{b}{a}\right) + R = 0 + R$$

$$R = p\left(\frac{b}{a}\right)$$

O resto da divisão de um polinômio por um binômio do primeiro grau é o valor numérico deste polinômio para o número que anula esse binômio do primeiro grau.

NOTA
Para a divisão por $ax + b$, o raciocínio é o mesmo: o resto será $p\left(\dfrac{-b}{a}\right)$.

Exemplos:

i) Calcular o resto da divisão do polinômio $p(x) = 8x^3 + 4x^2 + 6x - 1$ por $2x - 1$.
Temos que:

$$R = p\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 4$$

ii) Calcular m para que o polinômio $p(x) = x^3 + mx + 4$ seja divisível por $2x + 1$.

Devemos ter $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, logo:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + m\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{8} - \frac{m}{2} + 4 = 0$$

donde $m = \frac{31}{4}$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Qual é o resto da divisão de $p(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ por $x + 2$?

2 Dê o resto da divisão de $p(x) = x^2 + 4x + 5$ por $x - 1$.

3 Determine o resto e o quociente da divisão de $p(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1$ por $d(x) = x^2 + 3x - 2$.

4 Calcule o valor de a de modo que o polinômio $p(x) = -3x^2 + 4x + a$ seja divisível por $x - 2$.

5 Um polinômio $p(x)$, quando dividido por $(x^2 - x)$, tem como quociente $(x^2 + 5x + 3)$ e resto $(3x)$. Qual é o resto da divisão de $p(x)$ por $(x + 1)$?

6 Se o polinômio $p(x) = x^3 + px + q$ é divisível por $d(x) = x^2 + 2x + 5$; encontre os valores de p e q.

7 Seja $p(x)$ um polinômio tal que $p(2) = -1$. Suponhamos que o quociente $Q(x)$ da divisão $p(x)$ por $x - 2$ seja tal que $Q(3) = 3$. Determine o resto $R(x)$ da divisão de $p(x)$ por $(x-2)\cdot(x-3)$.

8 (UFBA) Determine os polinômios da forma $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ que são divisíveis por $x - 1$ e $x + 1$, sabendo que b, c e $d \in \mathbb{R}$ e $bd = -1$.

9 O quociente da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x^2 + x + 1$ é igual a $2x^3 + 3x^2 - 1$, e o resto dessa divisão é $11x - 7$. Qual é o polinômio $p(x)$?

10 Qual é o resto da divisão de $(x^{12}+1)\cdot(-2x^{15}-x^{19}+3)$ por $x - 1$?

11 (Unicamp-SP) Efetuando a divisão do polinômio $p(x) = 4x^3 + 2x^2 - mx + 5$ pelo binômio $Q(x) = x + 2$, foi obtido um resto, $R(x) = 1$. Qual é o valor de m?

12 A divisão de $p(x)$ por $x^2 + 2x + 3$ tem quociente $2x - 3$ e resto $mx + n$. O resto da divisão de $p(x)$ por $x + 3$ é zero. Sabendo-se que $p(0) = 3$, calcule $p(3)$.

13 (ITA-SP) A divisão de um polinômio $p(x)$ por $x^2 - x$ resulta no quociente $6x^2 + 5x + 3$ e resto $-7x$. Qual o resto da divisão de $p(x)$ por $2x + 1$?

14 (Ufop-MG)

a) Determine o quociente e o resto da divisão do polinômio $p(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 4x + 12$ por $(x - 3)$.

b) Determine $a, b \in \mathbb{R}$ em $p(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$, de modo que $p(x) + 1$ seja divisível por $(x + 1)$ e $p(x) - 1$ seja divisível por $(x - 1)$.

15 Determine p de modo que o polinômio $A(x) = x^3 - x^2 + px - 1$ dividido por $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ dê resto 0.

6.2.3 – Algoritmo de Ruffini

Na divisão de $p(x)$ por $x - a$, devemos ter $p(x) \equiv (x-a)Q(x) + R$ em que o quociente $Q(x)$ deverá ser um polinômio de grau $n - 1$ (dado $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$).

Suponhamos então que $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$.

Temos a identidade:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv (x-a)(b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0) + R$$

Efetuando as operações no 2º membro, vem:

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (b_0 - ab_1)x + (R - ab_0)$$

Igualando os coeficientes, temos:

$$\begin{cases} a_n = b_{n-1} \\ a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_1 = b_0 - ab_1 \\ a_0 = R - ab_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = ab_{n-1} + a_{n-1} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ b_0 = ab_1 + a_1 \\ R = ab_0 + a_0 \end{cases}$$

Estas relações levaram o matemático Ruffini a estabelecer o seguinte algoritmo:

	a_n	a_{n-1}	...	a_1	a_0
a	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_0	R

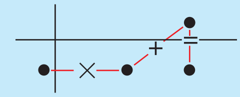
O primeiro termo obtido (b_{n-1}) é igual ao 1º termo do polinômio (a_n). A partir daí, para obter b_{n-2}, soma-se ao produto ab_{n-1}. Ao final do processo, o resto fica abaixo de a_0.

$$\begin{array}{c|c} & a_n \\ & \parallel \\ \hline a & b_{n-1} \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{c|ccc} & a_n & a_{n-1} & \ldots \\ & & + \ \parallel & \\ \hline a & \xrightarrow{\times} b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots \end{array}$$

Exemplos:

i) Calcular o quociente e o resto da divisão do polinômio $p(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 5$ por $x - 1$.
Primeiramente devemos completar o polinômio com todos os graus, isto é, $p(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 + 0x - 5$. Temos então o algoritmo de Ruffini:

	2	−1	3	0	−5
1	2	1	4	4	−1 = R



valor que anula $x - 1$ $\quad Q(x) = 2x^3 + 1x^2 + 4x + 4$ e $R = -1$

ii) Calcular o valor numérico do polinômio $p(x) = 2x^3 - 5x + 3$ para $x = -2$. Como $p(-2)$ é o resto da divisão de $p(x)$ por $x + 2$, basta usar o algoritmo de Ruffini para $a = -2$.

	2	0	−5	3
−2	2	−4	3	$-3 = p(-2)$

O quociente da divisão de $p(x)$ por $x + 2$ será:
$Q(x) = 2x^2 - 4x + 3$

NOTA
Substituir $x = -2$ diretamente em $p(x)$ também dá a resposta correta. No entanto, para polinômios de grau alto ou coeficientes grandes, o algoritmo de Ruffini pode facilitar os cálculos.

iii) Calcular o valor numérico do polinômio $Q(x) = x^{200} - 6x^{199} + 9x^{198} - x + 1$ para $x = 3$.

	1	−6	9	0	0	0	...	0	−1	1
3	1	−3	0	0	0	0	...	0	−1	−2

Então $Q(3) = -2$.

6.2.4 – Quociente da divisão por $ax - b$ $(a \neq 0)$

Devemos ter: $p(x) \equiv (ax - b)\,Q(x) + R$ onde $Q(x)$ é do grau $n - 1$. Por outro lado, a identidade acima pode ser escrita:

$$p(x) \equiv \left(x - \frac{b}{a}\right)\left[a \cdot Q(x)\right] + R$$

Esta expressão mostra que se dividirmos o polinômio $p(x)$ por $x - \frac{b}{a}$ obteremos o quociente $Q(x)$ multiplicado por a.

Basta então dividir $p(x)$ por $\left(x - \frac{b}{a}\right)$ e dividir todos os coeficientes do quociente encontrado (que é $aQ(x)$) por a.

NOTA
Se a divisão for por $ax + b$, use a raiz $x = -\frac{b}{a}$.

Exemplo:
Dividir o polinômio $8x^3 - 4x^2 + 6x - 3$ por $2x - 3$.
Façamos o algoritmo de Ruffini para a raiz do divisor $\frac{3}{2}$.

	8	−4	6	−3
$\frac{3}{2}$	8	8	18	24

O resto será 24. Como o quociente fica multiplicado por 2, temos: $2Q(x) = 8x^2 + 8x + 18$, logo $Q(x) = 4x^2 + 4x + 9$.

6.2.5 – Divisão de $x^n \pm a^n$ por $x \pm a$

1º caso: $x^n - a^n$ por $x - a$

Temos $p(x) = x^n - a^n$ e $d(x) = x - a$. O resto será $R = p(a) = a^n - a^n = 0$, o que significa que a divisão é sempre exata.

O quociente será, por Ruffini:

	1	0	0	...	0	$-a^n$
a	1	a	a^2	...	a^{n-1}	0

Logo:

$Q(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}$

Ou seja:

$$(x^n - a^n) = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-1})$$

Exemplos:

i) Dividir $x^4 - 81$ por $x - 3$.
Temos o caso $x^4 - 3^4$ por $x - 3$.

	1	0	0	0	-3^4
3	1	3	9	27	0

A divisão é exata e o quociente é $x^3 + 3x^2 + 9x + 27$.

ii) Resolver a equação $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.
Como $x = 1$ não é raiz desta equação (pois $1^5 + 1^4 + \ldots + 1 = 6 \neq 0$), podemos multiplicar ambos os membros por $x - 1$ obtendo o produto:

$$(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1) = x^6 - 1 = 0$$

Resolvendo a equação $x^6 - 1 = 0 \Rightarrow x^6 = 1$ vem:

$x = \text{cis}\,\dfrac{k \cdot 2\pi}{6}$ em que $k = 1, 2, 3, 4$ e 5. Não usamos $k = 0$ porque $x \neq 1$.

2º caso: $x^n - a^n$ por $x + ax^n$

Teremos $R = p(-a) = (-a)^n - a^n$. Se n for ímpar, $R = -2a^n$ e a divisão só é exata no caso trivial $a = 0$.

Se n for par, podemos trocar a por $-a$ na fórmula do caso anterior:

1º caso: $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1})$

Trocando a por $-a$: $x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots + a^{n-2}x - a^{n-1})$, para n par.

Assim, a divisão é exata e o quociente é o dado acima.

3º caso: $x^n + a^n$ por $x + a$

Teremos R = $p(-a) = (-a)^n + a^n$. Se n for par, R = $2a^n$ e a divisão só é exata no caso trivial $a = 0$.

Se n for ímpar, podemos novamente trocar a por $-a$ na fórmula do 1º caso:

1º caso: $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$

Trocando a por $-a$: $x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$, para n ímpar.

Exemplos:

i) $x^8 - 1 = (x + 1)(x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$

ii) $x^7 + 1 = (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

Exercícios resolvidos:

1) Calcule o valor de a para que o polinômio $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x + a$ seja divisível por $x + 1$.

Solução:
Devemos ter o resto igual a zero, logo:

	2	-4	6	a
-1	2	-6	12	$a - 12 = 0 \Rightarrow a = 12$

2) Calcule os valores de a e b de modo que o polinômio $x^3 + ax^2 + bx - 8$ seja divisível pelo produto $(x - 2)(x + 2)$.

Solução:

Devemos ter $\begin{cases} p(2) = 0 \\ p(-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 + 4a + 2b - 8 = 0 \\ -8 + 4a - 2b - 8 = 0 \end{cases}$

que nos dá $a = 2$ e $b = -4$

Outra solução:
Usando Ruffini:

	1	a	b	-8
2	1	$2 + a$	$4 + 2a + b$	$8 + 4a + 2b - 8$
-2	1	a	$4 + b = 0$	

que dá $b = -4$ e $a = 2$.

3) Calcule os valores de a, b e c de modo que o polinômio $p(x) = x^4 + 3x^3 + ax^2 + bx + c$ seja divisível por $(x - 1)^2$ e que o valor numérico do quociente Q(x) para $x = 1$ seja 2.

NOTA
Observe que quando a divisão for exata, podemos utilizar os coeficientes do primeiro quociente para realizar a segunda divisão, para simplificar.

Solução:
Devemos ter, usando Ruffini:

	1	3	a	b	c
1	1	4	$4 + a$	$4 + a + b$	$4 + a + b + c = 0$
1	1	5	$9 + a$	$13 + 2a + b = 0$	
1	1	6	$15 + a = 2$		

Q(1) — Quociente de $p(x)$ por $(x - 1)^2 = Q(x)$

$$\begin{cases} 15 + a = 2 \\ 2a + b + 13 = 0 \\ a + b + c + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -13 \\ b = 13 \\ c = -4 \end{cases}$$

4) O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x + 1$ é -1 e por $x - 2$ é 2. Qual é o resto da divisão desse polinômio pelo produto $(x + 1)(x - 2)$?

Solução:
Como o divisor $(x + 1)(x - 2)$ é do 2º grau, o resto da divisão pelo produto deverá ser de 1º grau, logo, do tipo $R(x) = Ax + B$.

Devemos então ter: $\begin{cases} p(-1) = -1 \\ p(2) = 2 \end{cases}$

Por outro lado, $p(x) \equiv (x + 1)(x - 2)\, Q(x) + Ax + B$

Fazendo, agora:
$x = -1 \Rightarrow p(-1) = (-1 + 1)(-1 - 2)\, Q(-1) - A + B \Rightarrow -A + B = -1$
$x = 2 \Rightarrow p(2) = (2 + 1)(2 - 2)\, Q(2) + 2A + B \Rightarrow 2A + B = 2$
que dá: A = 1 e B = 0.

O resto será então $R(x) = 1x + 0$ ou $R(x) = x$.

5) Determine o valor de a de modo que $(x^3 - 2a + m + 1)x^2 + (a^2 - am + 10a - 3m)x - 3a(a - m)$ seja divisível por $x - 1$, qualquer que seja m.

Solução:
Devemos ter inicialmente $p(1) = 0$, logo:
$$(1 - 2a + m + 1) \cdot 1^2 + (a^2 - am + 10a - 3m) \cdot 1 - 3a^2 + 3am \equiv 0$$

Esta função polinomial deve estar associada ao polinômio identicamente nulo para a variável m, já que m é qualquer.
$$2 - 2a + m + a^2 - am + 10a - 3m - 3a^2 + 3am \equiv 0$$
$$(2a - 2)m + (-2a^2 + 8a + 2) \equiv 0$$
Devemos ter: $\begin{cases} 2a = 2 \\ -2a^2 + 8a + 2 = 0 \end{cases}$

que é um sistema impossível, logo não existe a que satisfaça a condição acima.

NOTA
No algoritmo, dividimos $p(x)$ por $(x - 1)$ duas vezes para encontrar $Q(x) = \dfrac{p(x)}{(x-1)^2}$, depois usamos Ruffini uma terceira vez para encontrar Q(1).

6) Na divisão de certo polinômio por um binômio do 1º grau, encontrou-se o seguinte algoritmo de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccccccc|c} & 3 & 0 & -147 & c & d & e & f & 80 \\ \hline a & 3 & 21 & b & 0 & -1 & -4 & -12 & \text{R} \end{array}$$

Calcule o divisor, o quociente e o resto.

Solução:
Devemos ter:

$3a + 0 = 21 \Rightarrow a = 7$

O algoritmo fica então:

$$\begin{array}{c|ccccccc|c} & 3 & 0 & -147 & c & d & e & f & 80 \\ \hline 7 & 3 & 21 & b & 0 & -1 & -4 & -12 & \text{R} \end{array}$$

$7 \cdot 21 - 147 = b \;\Rightarrow\; b = 0$

$7 \cdot 0 + c = 0 \;\Rightarrow\; c = 0$

$d = -1$

$-7 + e = -4 \;\Rightarrow\; e = 3$

$-28 + f = -12 \;\Rightarrow\; f = 16$

$-84 + 80 = \text{R} \;\Rightarrow\; \text{R} = -4$

O divisor será $x - 7$.
O quociente será $3x^6 + 21x^5 + 0x^4 + 0x^3 - x^2 - 4x - 12$.
O resto será -4.

7) Fatore o polinômio $2x^3 + 5x^2 + bx - 2$ sabendo que ele é divisível por $2x - 1$.

Solução:
Usando Ruffini, o resto será zero, logo:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 5 & b & -2 \\ \hline \frac{1}{2} & 2 & 6 & 3+b & \frac{3+b}{2} - 2 = 0 \;\Rightarrow\; b = 1 \end{array}$$

Devemos ter então:
$2\text{Q}(x) = 2x^2 + 6x + 4 \Rightarrow \text{Q}(x) = x^2 + 3x + 2$

Como $p(x) = (2x - 1)\,\text{Q}(x) = (2x - 1)(x^2 + 3x + 2)$
Fatorando $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$ vem:
$p(x) = (2x - 1)(x + 1)(x + 2)$

6.2.6 – Decomposição de uma fração (frações parciais)

Consideremos a fração $\dfrac{D(x)}{d(x)}$. Se o grau de $D(x)$ for maior ou igual ao grau de $d(x)$, efetuamos a divisão obtendo: $D(x) = d(x)\,Q(x) + R(x)$.

A fração fica então:

$$\frac{D(x)}{d(x)} = \frac{d(x)Q(x)+R(x)}{d(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$$

Exemplos:

i) $\dfrac{2x^3+5x^2+7x-4}{x+1} \equiv 2x^2+3x+4-\dfrac{8}{x+1}$

ii) $\dfrac{2x^3+5x^2+7x-4}{x^2+x+1} \equiv 2x+3+\dfrac{2x-7}{x^2+x+1}$

Agora, na fração $\dfrac{R(x)}{d(x)}$, o grau do numerador é menor que o grau do denominador. Em alguns casos, é possível simplificar ainda mais a decomposição:

NOTA
Se o grau de $D(x)$ já for menor que o grau de $d(x)$, tome $Q(x) = 0$ e $R(x) = D(x)$.

Caso 1: O denominador é um produto de fatores do 1º grau distintos.

Exemplo:

$$\frac{2x+8}{(x+1)(x-2)} \equiv \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$$

$$2x+8 \equiv a(x-2)+b(x+1)$$

$$2x+8 \equiv (a+b)x+(-2a+b) \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ -2a+b=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}$$

$$\frac{2x+8}{(x+1)(x-2)} \equiv \frac{-2}{x+1} + \frac{4}{x-2}$$

Caso 2: O denominador é uma potência de um binômio do 1º grau.

Exemplo:

$$\frac{3x-1}{(x-1)^2} \equiv \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1}$$

$$3x-1 \equiv A+B(x-1)$$

$$3x-1 \equiv A+Bx-B \Rightarrow \begin{cases} B=3 \\ A-B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \end{cases}$$

$$\frac{3x-1}{(x-1)^2} \equiv \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1}$$

NOTA
Quando o denominador for de grau 2 e raízes complexas, o numerador correspondente deverá ser do 1º grau para que a identidade possa ser realizada.

Caso 3: O denominador é um produto de trinômios distintos do 2º grau de raízes complexas.

Exemplo:

$$\frac{3x^3+2x^2+6x+1}{(x^2+x+1)(2x^2+4)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{2x^2+4}$$

Efetuando e igualando, temos A = 1, B = 0, C = 1 e D = 1.

$$\frac{3x^3+2x^2+6x+1}{(x^2+x+1)(2x^2+4)} \equiv \frac{x}{x^2+x+1} + \frac{x+1}{2x^2+4}$$

Caso 4: O denominador é uma potência de um trinômio do 2º grau de raízes complexas.

Exemplo:

$$\frac{x^3-x^2+3x-1}{(x^2+1)^2} \equiv \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Efetuando e igualando, temos: A = 2, B = 0, C = 1 e D = –1.
A decomposição fica:

$$\frac{x^3-x^2+3x-1}{(x^2+1)^2} \equiv \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

Pode acontecer que o denominador tenha vários fatores. A decomposição se fará obedecendo aos casos anteriores.

Exemplos:

i) $$\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)x} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{x}$$

ii) $$\frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)^2} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}$$

Exercício resolvido:

Decomponha a fração $\frac{x^3-1}{(x^2+x+1)^2} \equiv \frac{Ax+B}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$.

Solução:

$x^3 - 1 \equiv Ax + B + (Cx + D)(x^2 + x + 1)$

$x^3 - 1 \equiv Cx^3 + (C + D)x^2 + (C + D + A)x + (D + B)$

Identificando:
C = 1
C + D = 0 ⇒ D = –1
C + D + A = 0 ⇒ A = 0
D + B = 1 ⇒ B = 2

e a decomposição fica:

$$\frac{x^3-1}{(x^2+x+1)^2} \equiv \frac{2}{(x^2+x+1)^2} + \frac{x-1}{x^2+x+1}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Usando o algoritmo de Ruffini, obtenha o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ em cada caso a seguir:

a) $A(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ e $B(x) = x - 2$

b) $A(x) = -2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 1$ e $B(x) = x + 2$

c) $A(x) = x^9 + x^6 - 2x^4 + x - 1$ e $B(x) = x + 1$

d) $A(x) = 2x^3 - 4x^2 - 5x - 3$ e $B(x) = x - 3$

2 No polinômio $p(x) = x^3 - x^2 + mx + n$, encontre os valores de m e n para que $p(x)$ seja divisível por $(x - 2)^2$.

3 Calcule o valor de a para que o polinômio

$p(x) = x^4 - 3x^2 - ax + 6$ seja divisível por $(x - 2)$.

4 Determine os valores de a e b de modo que o polinômio $3x^3 - 4ax^2 + x + b$ seja divisível por $(x - 1)(x - 2)$.

5 (UFRN) Encontre o valor numérico de k que torna o polinômio $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 5x + k$ divisível por $x + 2$.

6 (EEM-SP) Quais são os valores de p e q de modo que $p(x) = x^3 - 2px^2 + (p + 3)x + 2p + q$ seja divisível por x e por $x - 2$.

7 (PUC-SP) Qual é o número real que se deve adicionar a $p(x) = x^3 - 2x^2 + x$, para se obter um polinômio divisível por $x - 3$?

8 Seja $p(x) = x^3 + 4x^2 + kx + (k - 51)$. Determine o valor de k, sabendo que $p(x)$ é divisível por $x - 1$.

9 O polinômio $p(z) = z^3 + mz + n + p$ é divisível por $z + i$ e deixa resto p na divisão por $z - i$ onde i é a unidade imaginária.
Para m, n e p reais, determine o valor de $m + n + p$.

10 O polinômio $p(x) = x^4 - ax^2 + bx$ é divisível por $x + 3$ e o resto de sua divisão por $x - 1$ é a abscissa do ponto médio do segmento $\overline{MN}$, onde $M(-9, 3)$ e $N(-15, -4)$. Encontre os valores de a e b.

11 (Ufop-MG)

a) Determine o valor de c para que o polinômio $p(x) = x^4 - x^3 + cx + 2$ seja divisível por $x + 1$.

b) Sendo $p(x) = Q(x) + x^3 + x - 1$ e sabendo que 2 é a raiz de $p(x)$ e que 1 é raiz de $Q(x)$, então quanto vale $p(1) - Q(2)$?

12 Sabe-se que o polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + mx + n$ é divisível por $(x+1)(x-2)$. Determine o produto mn.

13 Encontre a e b para que o polinômio $p(x) = 2x^3 - x^2 + ax + b$ seja divisível por $(x - 1)^2$.

14 Os esquemas representam aplicações de Ruffini; calcule os valores dos elementos desconhecidos em cada um deles.

a)

	a	b	c	d
3	2	3	1	0

b)

	a	b	c	d
2	3	1	3	4

15 (Fuvest-SP) Determinar um polinômio $p(x)$ de grau 4, divisível por $(x - 1)(x + 1)(x - 2)$, sabendo-se que $p(0) = 0$ e que o resto da divisão de $p(x)$ por $x + 2$ é 48.

16 Dado o polinômio $p(x) = 4x^4 - 5x^2 - 3bx + a$, calcule a e b, de modo que $p(x)$ seja divisível por $(x^2 - 1)$.

17 Calcule os valores de A, B e C.

$$\frac{x+5}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

18 Encontre A, B e C na decomposição:

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

19 Calcule A + B, na igualdade $\frac{2x+1}{x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$, para que a mesma seja verdadeira para todo número real x.

20 (FGV-RJ) O polinômio $p(x) = x^2 + x + a$ é divisível por $x + b$ e por $x + c$, em que a, b e c são números reais distintos e não nulos. Nestas condições, calcule $b + c$.

6.3 - Decomposição de um polinômio

Aceitaremos que:

NOTA
Este teorema é chamado **teorema fundamental da álgebra** e sua demonstração não é elementar.

Teorema

Todo polinômio não constante $p(x)$ admite alguma raiz real ou complexa.

A proposição acima nos diz que existe $x_1 \in \mathbb{C}$ tal que $p(x_1) = 0$. Como $p(x_1)$ é o resto da divisão de $p(x)$ por $x - x_1$, o polinômio $p(x)$ será divisível por $x - x_1$. Temos então:

$$p(x) = (x - x_1)\,Q_1(x)$$

Como $Q_1(x)$ é um polinômio do grau $n - 1$ ele admitirá uma raiz $x_2 \in \mathbb{C}$. Temos então que $Q_1(x) = (x - x_2)\,Q_2(x)$. Assim, sucessivamente, temos:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\
\hline
x_1 & a_n & & & & & 0 \\
x_2 & a_n & & & & 0 & \\
\vdots & \vdots & & & & & \\
x_n & a_n & 0 & & & &
\end{array}$$

Agrupando todas as identidades obtidas, vem:

$p(x) = (x - x_1)\,Q_1(x)$
$Q_1(x) = (x - x_2)\,Q_2(x)$
$Q_2(x) = (x - x_3)\,Q_3(x)$
$\vdots$
$Q_{n-1}(x) = (x - x_n)\,a_n$

Multiplicando membro a membro todas estas igualdades, temos

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\,\dots\,(x - x_n)$$

NOTA
Quando há 2 raízes iguais dizemos que o polinômio tem uma raiz dupla, se tem 3 iguais, tripla etc.

Na hipótese de haver raízes iguais, o polinômio poderá ser escrito sob a forma:

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2}\dots(x - x_k)^{\alpha_k}$$

em que há α_1 raízes iguais a x_1, há α_2 raízes iguais a x_2 etc., com $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$.

O número α_i é chamado **multiplicidade** da raiz x_i.

Exemplo:
Determinar o polinômio de menor grau que tem uma raiz tripla igual a 3 e raízes simples 1 e 2, sabendo que o polinômio assume o valor 12 para $x = 4$.

Devemos ter: $p(x) = a_n(x - 3)^3(x - 1)(x - 2)$. Como $p(4) = 12$, vem:

$12 = a_n(4 - 3)^3(4 - 1)(4 - 2) \Rightarrow a_n = 2$

O polinômio fica então: $p(x) = 2(x - 3)^3(x - 1)(x - 2)$ na forma fatorada.

NOTA
Note que a_n deve ser uma constante, pois especificamos que $p(x)$ deve ter o menor grau possível.

A equação $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ é chamada **equação algébrica de grau n**, se $a_n \neq 0$.

DEFINIÇÃO
Equação algébrica de grau *n*.

Teorema

Toda equação algébrica de grau n tem n raízes, reais ou complexas, consideradas com suas multiplicidades.

Demonstração:
Como $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$, $p(x) = 0$ nos dará: $a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots$ $\ldots (x - x_n) = 0$ com $a_n \neq 0$.
Assim, os valores que anulam a equação $(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = 0$ são as raízes $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Exemplos:

i) Qual é o grau da equação $(x - 1)^2(x - 2)(x - 3) = 0$?
Basta ver quantas raízes tem a equação. Uma raiz dupla igual a 1, ou seja, duas raízes iguais a 1, uma raiz igual a 2 e uma raiz igual a 3, logo a equação tem 4 raízes, sendo, portanto, do 4º grau.
Bastaria, também, contar quantos fatores do 1º grau a equação fatorada tem. No caso em questão, 4.

ii) Qual é o grau da equação $(x^2 - 7x + 3)(x^2 - 1)(x^2 + 4) = 0$?
Como temos 3 fatores do 2º grau, a equação é do 6º grau.

iii) Quais as raízes da equação $(x+1)(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0$?
Basta ver os valores que anulam os fatores, que são -1, 2 e $\frac{1}{2}$.

iv) Compor uma equação cujas raízes são 3, -4 e $\frac{1}{2}$.
Basta multiplicar os fatores relativos a estas raízes $(x-3)(x+4)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ e igualar a 0.
Temos então $2x^3 + x^2 - 25x + 12 = 0$, por exemplo.

Exercício resolvido:

1) Sabendo que $2 + i$ é uma das raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$, encontre as outras duas raízes.

Solução:
Usando Ruffini:

	1	-7	17	-15
$2 + i$	1	$-5 + i$	$6 - 3i$	0

Portanto, as outras raízes são raízes de:

$$x^2 + (-5+i)x + (6-3i) = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Delta = (-5+i)^2 - 4(6-3i) = 2i \;\Rightarrow\; x = \frac{-(-5+i) \pm \sqrt{2i}}{2}$$

NOTA
Veremos a seguir que se $a + bi$ é raiz de um polinômio de coeficientes reais, então $a - bi$ também é.

Mas $2i = 2\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{2i} = \pm\sqrt{2}\text{ cis}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) =$

$$= \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \pm\,(1+i)$$

Então: $x = \dfrac{+5 - i \pm (1+i)}{2} \Rightarrow x = 3$ ou $x = 2 - i$

As raízes de $p(x)$ são 3, $2 - i$ e $2 + i$.

Propriedade

Se num polinômio de coeficientes reais atribuirmos a x valores complexos conjugados, os valores encontrados serão complexos conjugados, isto é:

$p(a + bi) = \text{A} + \text{B}i \Leftrightarrow p(a - bi) = \text{A} - \text{B}i$

Demonstração:

NOTA
Lembre que $\cos(-\theta) = \cos\theta$ e $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$.

Seja $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Façamos $x = a + bi = r\text{cis}\,\theta$. Temos então:

$$p(a+bi) = p(r\,\text{cis}\,\theta) = a_n r^n \text{cis}\, n\theta + \ldots + a_1 r\,\text{cis}\,\theta + a_0 =$$
$$= (a_n r^n \cos n\theta + \ldots + a_1 r\cos\theta + a_0) + i(a_n r^n\,\text{sen}\,\theta + \ldots + a_1 r\ \text{sen}\ \theta) = \text{A} + \text{B}i$$
$$p(a-bi) = p[r\,\text{cis}\,(-\theta)] = a_n r^n \text{cis}\,(-n\theta) + \ldots + a_1 r\,\text{cis}\,(-\theta) + a_0 =$$
$$= (a_n r^n \cos n\theta + \ldots + a_1 r\cos\theta + a_0) - i(a_n r^n\,\text{sen}\, n\theta + \ldots + a_1 r\,\text{sen}\,\theta) = \text{A} - \text{B}i$$

Exemplo:

$p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$

Façamos:

$p(1 + i) = (1 + i)^3 + 2(1 + i)^2 - 3(1 + i) + 4 = -1 - i$

$p(1 - i) = (1 - i)^3 + 2(1 - i)^2 - 3(1 - i) + 4 = -1 + i$

NOTA
Também vale que: "Se uma equação de coeficientes inteiros admitir uma raiz irracional do tipo $a + \sqrt{b}$ com $a, b \in \mathbb{Q}$ então admitirá também a raiz $a - \sqrt{b}$.

Teorema

Se uma equação de coeficientes reais admitir uma raiz complexa, admitirá também a complexa conjugada.

Demonstração:

Basta ver que:

$p(a + bi) = 0 \Rightarrow \text{A} + \text{B}i = 0 \Rightarrow \text{A} = \text{B} = 0$, então:

$p(a - bi) = \text{A} - \text{B}i = 0 - 0i = 0$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Escreva o polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ em um produto de fatores do 1º grau, sabendo que uma de suas raízes é 2.

2 O polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ admite a raiz complexa $1 + 2i$. Encontre a outra raiz complexa.

3 O polinômio $p(x) = x^2 - 6x + 13$ possui a raiz $3 - 2i$. Quais serão as demais raízes?

4 Sabendo que o polinômio $p(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 10x + 2$ admite as raízes $2 - \sqrt{3}$ e $1 + i$, encontre as outras raízes.

5 Sabendo que $1 + i$ é uma das raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 2x + a$, sendo a real, calcule o valor de a.

6 Construa (escreva) o polinômio do 3º grau que possui as raízes i, $-i$, 1.

7 Encontre p e q de modo que $3i$ seja raiz do polinômio $p(x) = x^3 + px^2 + qx + 3$.

8 Fatore o polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, sabendo que -1 é uma de suas raízes.

9 Decomponha num produto de fatores do 1º grau cada um dos polinômios.

a) $x^3 - 7x^2 + 36$, sabendo que admite a raiz -2.

b) $x^4 + 14x^3 + 71x^2 + 154x + 120$, sabendo que admite as raízes -2 e -3.

10 Escreva o polinômio $1 - 14x + 71x^2 - 154x^3 + 120x^4$ na forma fatorada, sabendo que admite as raízes $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$.

6.4 – Relações entre coeficientes e raízes

Consideremos o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, de grau n, e sua forma fatorada $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$. Efetuando as multiplicações temos:

$$p(x) = a_n[x^n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)x^{n-1} + (x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} + \ldots + (-1)^n(x_1x_2 \ldots x_n)]$$

Identificando os dois polinômios, temos:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 \equiv a_n[x^n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)x^{n-1} + (x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} + \ldots + (-1)^n x_1x_2 \ldots x_n]$$

Dividindo ambos os membros por a_n, vem:

$$x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}x^{n-2} + \ldots + \frac{a_1}{a_n}x + \frac{a_0}{a_n} \equiv x^n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)x^{n-1} + (x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} + \ldots + (-1)^n x_1x_2 \ldots x_n$$

Temos então:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

que podem ser escritas da seguinte maneira:

$$S_k = (-1)^k \cdot \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

NOTA
Em particular quando $k = n$, $S_k = S_n$ é o produto das n raízes.

onde cada somatório S_k é composto por C_n^k parcelas, cada uma delas sendo o produto de k raízes.
Para a equação do 3º grau, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com raízes x_1, x_2 e x_3, temos:

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ S_3 = x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Para a equação do 4º grau, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, com raízes x_1, x_2, x_3 e x_4, temos:

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a} \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a} \\ S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a} \\ S_4 = x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{e}{a} \end{cases}$$

e assim sucessivamente.

NOTA
Não é comum encontrar as raízes de um polinômio usando somente estas relações. De fato, ao tentar resolver o sistema somos levados, após várias substituições, ao polinômio original!

Os somatórios S_k facilitam a escrita de um polinômio $p(x)$ quando são conhecidas suas raízes x_1, x_2, ... x_n. De fato:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = \\ &= a_n(x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} - S_3x^{n-3} \ldots + (-1)^nS_n) \end{aligned}$$

Exemplos:

i) Compor uma equação de raízes –1, 2 e 3.
Temos que:

$$S_1 = -1 + 2 + 3 = 4$$
$$S_2 = (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot 3 + 2\cdot 3 = 1$$
$$S_3 = (-1)\cdot 2\cdot 3 = -6$$

Uma equação será $x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$, logo:
$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

ii) Encontrar uma equação polinomial de grau 4 com raízes –1, 1, 2 (esta última sendo dupla).

Basta fazer
$$S_1 = -1 + 1 + 2 + 2 = 4$$
$$S_2 = -1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot 2 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2 + 2\cdot 2 = 3$$
$$S_3 = -1\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 2 = -4$$
$$S_4 = -1\cdot 1\cdot 2\cdot 2 = -4$$

Assim, uma possível equação é:
$x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$

NOTA
Se tomássemos $a_n \neq 1$ e $a_n \neq 0$, teríamos outra equação satisfazendo as condições dadas.

Exercícios resolvidos:

1) Resolver a equação $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ sabendo que uma das raízes é a soma das outras duas.

<u>Solução</u>:
Devemos ter:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{-4}{1} & \text{(I)} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{1}{1} & \text{(II)} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{6}{1} & \text{(III)} \end{cases}$$

A informação adicional é que $x_1 = x_2 + x_3$. Substituindo na equação (I), temos:
$x_1 + x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 2$

Pondo $x_1 = 2$ nas equações (I) e (III) temos:

$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_2x_3 = -6 \end{cases}$ que dá como soluções –1 e 3.

As raízes serão, então, –1, 2 e 3.

2) Resolva a equação $8x^3 - 42x^2 + 63x - 27 = 0$ sabendo que suas raízes estão em progressão geométrica.

<u>Solução</u>:
Temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{-42}{8} & \text{(I)} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{63}{8} & \text{(II)} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{-27}{8} & \text{(III)} \end{cases}$$

A condição adicional dada é $x_2^2 = x_1x_3$, pois (x_1, x_2, x_3) é uma progressão geométrica.
Substituindo na equação (III) vem:

$$x_2^2 \cdot x_2 = \frac{27}{8} \Rightarrow x_2^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}$$

Temos então:

$$\begin{cases} x_1x_3 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \\ x_1 + x_3 = \dfrac{42}{8} - \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

que dá $x_1 = 3$ e $x_3 = \dfrac{3}{4}$ ou $x_1 = \dfrac{3}{4}$ e $x_3 = 3$.

As raízes serão, portanto, 3, $\dfrac{3}{2}$ e $\dfrac{3}{4}$.

3) Sabendo que $2 + i$ é uma das raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$, encontre as outras duas raízes.

Solução:

Como o polinômio tem coeficientes reais, sendo $2 + i$ uma raiz, obrigatoriamente $2 - i$ também o será.
Como a soma das raízes é 7, a terceira raiz x_3 será:
$x_3 + (2 + i) + (2 - i) = 7 \Rightarrow x_3 = 3$

As raízes são, portanto, 3, $2 - i$ e $2 + i$.

NOTA
Esta solução é bem mais rápida que aquela oferecida na seção anterior.

4) Determine m de modo que a equação $x^4 + mx^2 + 8x - 3 = 0$ tenha uma raiz real tripla e resolva a equação.

Solução:

Temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & \text{(I)} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = m & \text{(II)} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -8 & \text{(III)} \\ x_1x_2x_3x_4 = -3 & \text{(IV)} \end{cases}$$

A condição adicional é que $x_1 = x_2 = x_3$ pois a raiz é tripla.
Substituindo em (I) e (IV) temos:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_4 = 0 \\ x_1^3 x_4 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -3x_1 \\ x_1^3 \cdot (-3x_1) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1^4 = 1 \\ x_1 = \pm 1 \quad (\text{pois } x \in \mathbb{R}) \end{array}$$

i) para $x_1 = x_2 = x_3 = 1 \Rightarrow x_4 = -3$

ii) para $x_1 = x_2 = x_3 = -1 \Rightarrow x_4 = 3$
Como as equações (II) e (III) não foram utilizadas, devemos testar esses resultados nas equações (II) e (III).
a) Na equação (II): $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ e $x_4 = -3$
$1 + 1 - 3 + 1 - 3 - 3 = m \Rightarrow m = -6$

Na equação (III) esses valores dão:
$1 - 3 - 3 - 3 = -8$, logo, servem. Temos $\begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 = -1 \\ m = 6 \\ x_4 = -3 \end{cases}$

b) Na equação (II): $x_1 = x_2 = x_3 = -1$ e $x_4 = 3$
$1 + 1 - 3 + 1 - 3 - 3 = m \Rightarrow m = -6$

Na equação (III) esses valores dão:
$-1 + 3 + 3 + 3 = -8 \Rightarrow 8 = -8$, logo, não servem.
Portanto, as raízes são 1, 1, 1 e -3.

5) Determine a relação que deve existir entre p e q reais, na equação $x^3 + px + q = 0$, de modo que ela admita uma raiz complexa (não real) de módulo igual a 2.

<u>Solução</u>:

Devemos ter:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p \\ x_1x_2x_3 = -q \end{cases}$$

A condição adicional é que $x_1 = a + bi$ com $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$.

Como a equação deve ter a raiz complexa conjugada $x_2 = a - bi$, ficamos então com:

$$\begin{cases} a + bi + a - bi + x_3 = 0 \\ (a+bi)(a-bi) + (a+bi)x_3 + (a-bi)x_3 = p \\ (a+bi)(a-bi)x_3 = -q \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases}$$

O sistema fica:

$$\begin{cases} 2a + x_3 = 0 \\ a^2 + b^2 + 2ax_3 = p \\ (a^2 + b^2)x_3 = -q \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + x_3 = 0 & \text{(I)} \\ 4 + 2ax_3 = p & \text{(II)} \\ 4x_3 = -q & \text{(III)} \end{cases}$$

De (I): $x_3 = -2a$ em (II) e (III) vem:

$$\begin{cases} 4 + 2a \cdot (-2a) = p \\ 4 \cdot (-2a) = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a^2 = p - 4 \\ a = -\dfrac{q}{8} \end{cases}$$

Substituindo a vem:

$$4 \cdot \frac{q^2}{64} = p - 4 \Rightarrow \frac{q^2}{16} = p - 4 \Rightarrow q^2 = 16p - 64$$

Por outro lado, se $q^2 + 16p = 64$, a equação fica: $x^3 + \left(4 - \dfrac{q^2}{16}\right)x + q = 0$

que tem a raiz $x_3 = -\dfrac{q}{4}$ como era de se esperar. Fatorando, vem:

$$\left(x + \frac{q}{4}\right)\left(x^2 - \frac{q}{4}x + 4\right) = 0$$

e vemos que as outras raízes são: $x_{1,\,2} = \dfrac{\dfrac{q}{4} \pm \sqrt{\dfrac{q^2}{16} - 16}}{2} = \dfrac{q}{8} \pm \dfrac{\sqrt{q^2 - 256}}{8}$.

Para que elas sejam complexas, precisamos ter $|q| < 16$. Neste caso, x_1 e x_2 seriam complexos conjugados, com norma $x_1x_2 = 4$, como pedido.

Assim, a condição necessária e suficiente em p e q para que a equação apresente uma raiz complexa de módulo 2 é: $\begin{cases} q^2 + 16p = 64 \\ |q| < 16 \end{cases}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 (UFMG) Se a equação $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$, de coeficientes a e b reais, tem $\sqrt{3}+i$ como uma de suas raízes, determine:

a) as outras raízes;

b) os valores de a e b.

2 (Vunesp-SP) Sabe-se que a unidade imaginária i é raiz do polinômio real $p(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + 2$. Nessas condições:

a) determine o valor de a;

b) encontre o conjunto solução da equação $p(x) = 0$.

3 Seja a equação $2x^3 - 4x^2 + x + 3 = 0$, cujas raízes são a, b e c. Determine:

a) $a + b + c$

b) $ab + ac + bc$

c) abc

d) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

e) $a^2 + b^2 + c^2$

f) $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{ac} + \dfrac{1}{bc}$

4 Ache as raízes da equação $72x^3 - 18x^2 - 11x + 1 = 0$, sabendo que uma das raízes é a média aritmética das outras.

5 Resolva a equação $x^3 - 15x^2 + 66x - 80 = 0$, sabendo que suas raízes estão em progressão aritmética.

6 Resolva a equação $x^3 + 9x^2 + 54x - 216 = 0$, sabendo que suas raízes estão em progressão geométrica.

7 Resolva a equação $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, sabendo que a soma de duas de suas raízes vale 5.

8 Resolva a equação $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$, sabendo que admite duas raízes iguais.

9 Encontre as raízes da equação
$x^4 - 11x^3 + 28x^2 + 36x - 144 = 0$,
sabendo que o produto de duas de suas raízes é o simétrico do produto das outras duas.

10 Encontre o valor de m de modo que a equação $x^3 + mx^2 + 12x + 8 = 0$ tenha as três raízes iguais.

11 Encontre as raízes da equação $x^3 - 7x + 6 = 0$ sabendo que a soma de duas de suas raízes é 3.

12 (FGV-RJ) Considere a equação polinomial
$x^3 - 3x^2 - kx + 12 = 0$

a) Encontre k de modo que haja duas raízes opostas.

b) Encontre k de modo que 1 seja raiz da equação; neste caso determine também as outras raízes.

13 As raízes da equação $x^3 - 7x^2 - 21x + d = 0$ estão em progressão geométrica. Encontre nesta equação:

a) o valor do termo independente de x;

b) as raízes.

14 Sendo a, b, c e d as raízes da equação
$x^5 - 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 14x - 12 = 0$, determine o valor de:
$\dfrac{1}{bcde} + \dfrac{1}{acde} + \dfrac{1}{abde} + \dfrac{1}{abce} + \dfrac{1}{abcd}$.

15 (Unicamp-SP) Sabendo que a equação $x^3 - 2x^2 + 7x - 4 = 0$ tem raízes a, b e c, escreva, com seus coeficientes numéricos, uma equação cúbica que tem como raízes $a + 1$, $b + 1$ e $c + 1$.

6.5 – Raízes inteiras e fracionárias

NOTA
Em particular, se $a_0 = \pm 1$, a equação não poderá ter raízes inteiras, exceto ± 1.

Teorema

Dada uma equação de coeficientes inteiros desprovida de raízes nulas, toda raiz inteira é divisor do termo independente.

Demonstração:

Suponhamos que x_1 seja uma raiz inteira.
Temos então:
$a_n x_1^n + \ldots + a_1 x_1 + a_0 = 0 \Rightarrow x_1 \ \ a_n x_1^{n-1} + \ldots + a_1 \ \ = -a_0$

donde: $\dfrac{a_0}{x_1} = - \ \ a_n x_1^{n-1} + \ldots + a_1$

Como a_n, ..., a_1 são coeficientes inteiros e x_1 também, o 2º membro desta igualdade é uma soma de inteiros, sendo, portanto, inteiro. Assim, x_1 é divisor de a_0, pois o quociente $\dfrac{a_0}{x_1}$ é inteiro.

Exemplos:

i) Considerar a equação $2x^3 - 7x^2 + 5x - 36 = 0$. Se houver alguma raiz inteira, ela deve ser divisor do termo independente.

Calculemos tais divisores:

		1
36	2	2
18	2	4
9	3	3, 6, 12
3	3	9, 18, 36
1		

As raízes inteiras, se existirem, estão entre os números:
$\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \pm 4, \ \pm 6, \ \pm 9, \ \pm 12, \ \pm 18$ e ± 36.

NOTA
Poderíamos testar as 18 possibilidades e descobrir que 4 é a única raiz inteira da equação.

ii) Resolver a equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

As raízes inteiras prováveis são os divisores de 6, isto é, ± 1, ± 2, ± 3, ± 6.
Testando esses valores pelo algoritmo de Ruffini:

	1	−6	11	−6	
−1	1	−7	18	$-24 \neq 0$	$\Rightarrow$ −1 não é raiz
1	1	−5	6	0	$\Rightarrow$ 1 é raiz

NOTA
Como −1 não é raiz, observe que os coeficientes utilizados para testar o valor 1 são os do polinômio original.

Quando for encontrada uma raiz, deverão, para maior simplicidade, ser usados os coeficientes dos quocientes das divisões exatas.
As outras raízes serão então as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, logo $x = 2$ ou $x = 3$.
Portanto, as raízes são 1, 2 e 3.

iii) Resolver a equação $x^4 - 4x^2 = 0$.

Pondo x^2 em evidência, temos $x^2(x^2 - 4) = 0$.
Daí tiramos $x^2 = 0$ ou $x^2 - 4 = 0$.
A equação $x^2 = 0$ nos dá duas raízes nulas.
A equação $x^2 - 4 = 0$ nos dá as raízes $x = 2$ ou $x = -2$.
Portanto, as raízes são 0, 2 e –2.

Teorema

Dada uma equação de coeficientes inteiros desprovida de raízes nulas, toda raiz **fracionária irredutível** racional tem como numerador um divisor do termo independente e como denominador, um divisor do coeficiente do termo de maior grau.

NOTA
Em particular, se o coeficiente do termo de maior grau for ± 1, todas as raízes racionais serão inteiras.

<u>Demonstração:</u>

Suponhamos agora que a equação admita uma raiz fracionária do tipo $\frac{p}{q}$ irredutível, isto é, p e q primos entre si.

Temos então:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0 \text{ e daí}$$

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

1) Isolando a_np^n no 1º membro e transpondo os demais termos, vem:

$$a_np^n = -\left(a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n\right)$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade por q, temos:

$$\frac{a_np^n}{q} = -\left(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}\right)$$

Como o 2º membro é uma soma de inteiros, $\frac{a_np^n}{q}$ será inteiro. Por outro lado p^n e q são primos entre si, logo q dividirá a_n. Então o denominador é divisor do coeficiente do termo de maior grau.

2) Isolando agora a_0q^n no 1º membro vem:

$$a_0q^n = -\left(a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1}\right)$$

Dividindo por p ambos os membros desta igualdade vem:

$$\frac{a_0q^n}{p} = -\left(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1q^{n-1}\right)$$

Como p não divide q^n, p dividirá a_0, pois o 2º membro é um número inteiro.
Logo, o numerador da raiz fracionária é um divisor do termo independente da equação.

Exemplo:

Procuremos as frações que podem ser raízes da equação $4x^3 - 5x^2 + 7x - 9 = 0$.
Os numeradores das possíveis frações deverão ser os divisores do termo independente 9, logo estarão entre os valores ± 1, ± 3 e ± 9.
Os denominadores deverão ser os divisores do coeficiente do termo de maior grau, nesse caso 4, logo estarão entre os números ± 1, ± 2 e ± 4.
Montando todas as frações irredutíveis possíveis, temos as prováveis raízes fracionárias:

$$\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{9}{2},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{3}{4}\ \text{e}\ \pm\frac{9}{4}$$

Para verificar quais são as raízes, testam-se estas frações pelo algoritmo de Ruffini.
Neste exemplo em particular, nenhuma destas frações serve como raiz.

NOTA
Em todas as hipóteses sobre as raízes, deverão ser tomados valores positivos e também negativos.

NOTA
Os valores ± 1, ± 3 e ± 9 também não satisfazem a equação dada.
Assim, concluimos que todas as suas raízes são irracionais.

Exercícios resolvidos:

1) Calcule as raízes da equação $12x^3 - 8x^2 - x + 1 = 0$.

Solução:

Como o termo independente é –1, as únicas raízes inteiras possíveis serão 1 e –1.
Verifiquemos se são raízes:

	12	–8	–1	1	
1	12	4	3	$4 \neq 0$	$\Rightarrow$ 1 não é raiz inteira
–1	12	–20	19	$-18 \neq 0$	$\Rightarrow$ –1 não é raiz inteira

Então não há raízes inteiras.

Verifiquemos agora as possíveis raízes fracionárias.
Os divisores do coeficiente do termo de maior grau, nesse caso 12, são: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 12$.
Formamos todas as possíveis frações:

$$\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{1}{6},\ \pm\frac{1}{12}$$

Testamos agora esses valores:

	12	–8	–1	1	
$\frac{1}{2}$	12	–2	–2	0	$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ é raiz

NOTA
Também poderíamos resolver a equação $12x^2 - 2x - 2 = 0$ para terminar o problema.

Vejamos se $x = \frac{1}{2}$ é raiz dupla.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 12 & -2 & -2 \\ \hline \frac{1}{2} & 12 & 4 & 0 \end{array} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ é dupla.}$$

A terceira raiz será a solução da equação $12x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

As raízes são, então, $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{3}$.

2) Sejam $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ inteiros pares e a_0 um inteiro ímpar. Mostre que a equação $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ não admite raízes inteiras.

Solução:
Suponha, por absurdo, que esta equação admite uma raiz inteira α. Teríamos:

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha = -a_0$$

Mas, como α é inteiro e todos os coeficientes do lado esquerdo são pares, o lado esquerdo é par. Como a_0 é ímpar, somos levados a um absurdo (ímpar = par).
Conclusão: a equação não tem raízes inteiras.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Calcule as raízes das seguintes equações:

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

b) $x^3 - 15x^2 + 74x - 120 = 0$

c) $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$

d) $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6 = 0$

e) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

2 Encontre as raízes das seguintes equações:

a) $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0$

b) $125x^3 - 150x^2 + 55x - 6 = 0$

c) $10x^4 - 13x^2 - 18x^2 - 5x + 2 = 0$

d) $20x^3 - 32x^2 - x + 6 = 0$

3 Ache todas as raízes de $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$.

4 Determine as raízes da equação $\dfrac{x^4 - 1}{x - 1} + 4x = (x + 2)^2 + 7$.

5 Encontre as raízes da equação $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$.

6.6 – Equações recíprocas

6.6.1 – Equações recíprocas de 1ª classe

Uma equação polinomial da forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ $(a_n \neq 0)$ é chamada **equação recíproca de 1ª classe** quando os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos são iguais, isto é:

$a_n = a_0$, $a_{n-1} = a_1$, $a_{n-2} = a_2$, etc.

DEFINIÇÃO
Equação recíproca de 1ª classe.

Exemplo:

As equações $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$ e $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$ são recíprocas de 1ª classe.

Propriedade

Toda equação recíproca de 1ª classe e grau ímpar admite a raiz –1.

Com efeito, seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Calculando $p(-1)$ e lembrando que $a_n = a_0$, $a_{n-1} = a_1$, ..., etc., vem:

$$p(-1) = a_n(-1)^n + a_{n-1}(-1)^{n-1} + ... + a_1(-1) + a_0 =$$
$$= -a_n + a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} \; ... - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 =$$
$$= -\cancel{a_n} + \cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}} + \cancel{a_{n-3}} \; ... - \cancel{a_{n-3}} + \cancel{a_{n-2}} - \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n} =$$
$$= 0$$

o que comprova que –1 é raiz.

NOTA
$(-1)^n = -1$, pois n é ímpar.

Exemplo:

$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$ é recíproca de 1ª classe e grau ímpar:

	1	2	2	1
–1	1	1	1	0

$\Rightarrow -1$ é raiz

Teorema

Se x é raiz de uma equação recíproca de 1ª classe, então $\frac{1}{x}$ também o será, com a mesma multiplicidade.

NOTA
Como $a_0 = a_n \neq 0$, não há raiz nula.

<u>Demonstração:</u>
Consideremos a equação recíproca de 1ª classe:
$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

Substituindo x por $\frac{1}{x}$, vem:

$$a_0\frac{1}{x^n} + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_2\frac{1}{x^{n-2}} + \ldots + a_2\frac{1}{x^2} + a_1\frac{1}{x} + a_0 = 0$$

Eliminando os denominadores se obtém:

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_2x^{n-2} + a_1x^{n-1} + a_0x^n = 0$

que é idêntica à equação original. Logo, se x é raiz, então $\frac{1}{x}$ também o será.

NOTA
Vê-se que, quando a soma dos coeficientes de um polinômio é 0, então 1 é raiz deste polinômio.

Exemplo:

Encontremos as raízes da equação recíproca $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$.

Como os coeficientes dos termos extremos são ambos iguais a 1 e todos os coeficientes são inteiros, as únicas possíveis raízes racionais são ± 1. Testando:

	1	–3	4	–3	1	
1	1	–2	2	–1	0	$\Rightarrow$ 1 é raiz
1	1	–1	1	0		$\Rightarrow$ 1 é raiz dupla!

Resta resolver a equação $x^2 - x + 1 = 0$. Já se vê que o produto destas raízes é 1 (veja o termo independente desta quadrática). Explicitamente:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

Então as raízes são 1, 1, $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$ $\left(\text{e } \frac{1}{\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}} = \frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)$.

Resolução das equações recíprocas de 1ª classe

Se o grau da equação for ímpar, use o algoritmo de Ruffini para eliminar a raiz –1. Assim, basta analisar o caso em que o grau é par:

$a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_nx^n + \ldots + a_{2n-1}x + a_{2n} = 0$

Dividindo ambos os membros por x^n, vem:

$$a_{2n}x^n + a_{2n-1}x^{n-1} + \ldots + a_n + \ldots + \frac{a_{2n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_{2n}}{x^n} = 0$$

Agrupando os termos inversos em x, vem:

$$a_{2n}\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + a_{2n-1}\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \ldots + a_{n+1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_n = 0$$

Nesta equação surgem as somas do tipo $x + \frac{1}{x}$, $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ etc.

Para reduzi-la ao grau n, utiliza-se o seguinte artifício:

$$x + \frac{1}{x} = x$$

Com isto, elevando ao quadrado membro a membro:

$$x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = y^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

Multiplicando $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)$ por $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = y^2 - 2$, vem:

$$y(y^2 - 2) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^3 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x^3} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

ou seja: $x^3 + \frac{1}{x^3} = y(y^2 - 2) - y \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$

e assim sucessivamente. Temos então:

$$x + \frac{1}{x} = y \qquad x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \qquad x^5 + \frac{1}{x^5} = y^5 - 5y^3 + 5y$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$$

que se obtém multiplicando-se cada valor encontrado por $x + \frac{1}{x}$ e subtraindo-se o valor anterior conveniente. Assim:

$$\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

Exemplo:

Voltemos à equação $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$, desta vez usando este método geral.

Dividindo ambos os membros por x^2 (x elevado à metade do grau da equação), vem:

$$x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

Agrupando os termos em x^2 e em x, vem:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$$

Chamando $x + \frac{1}{x} = y$ tem-se $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, que substituídos darão:

$$(y^2 - 2) - 3y + 4 = 0 \Rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = 2$$

Temos então:

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (dupla)}$$

Exercício resolvido:

Resolva a equação $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$.

Solução:
Dividindo a equação por x^2 e rearrumando, vem:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0$$

Fazendo $y = x + \frac{1}{x}$ $\left(\text{e lembrando que } y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$:

$(y^2 - 2) - 4y + 5 = 0$
$y^2 - 4y + 3 = 0$

Esta equação tem raízes $y = 1$ e $y = 3$. Assim:

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

ou

$$x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Então as raízes são $\frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$ e $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

6.6.2 – Equações recíprocas de 2ª classe

DEFINIÇÃO
Equação recíproca de 2ª classe.

Uma equação polinomial da forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ $(a_n \neq 0)$ é chamada **equação recíproca de 2ª classe** quando os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos são simétricos, isto é:

$a_n = -a_0$, $a_{n-1} = -a_1$, $a_{n-2} = -a_2$ etc.

NOTA
Para a equação ser recíproca de 2ª classe e ter grau par, o coeficiente do termo central tem de ser zero.

Exemplo:

As equações $2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 2 = 0$ e $3x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + 2x - 3 = 0$ são recíprocas de 2ª classe.

Propriedade

Toda equação recíproca de 2ª classe admite a raiz 1.
Se o grau for par, ela também admite a raiz –1.

Com efeito, seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Temos $p(1) = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 = a_n + a_{n-1} + ... - a_{n-1} - a_n = 0$ e, se n for par:

$$p(-1) = a_n - a_{n-1} + ... - a_1 + a_0 = a_n - a_{n-1} + ... + a_{n-1} - a_n = 0$$

Exemplo:

Voltando a $2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 2 = 0$, vê-se que 1 é raiz:

	2	–3	4	–4	3	–2	
1	2	–1	3	–1	2	0	$\Rightarrow$ 1 é raiz

Por outro lado, $3x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + 2x - 3 = 0$ tem grau par:

	3	–2	1	0	–1	2	–3	
1	3	1	2	2	1	3	0	$\Rightarrow$ 1 é raiz
–1	3	–2	4	–2	3	0		$\Rightarrow$ –1 é raiz

Exercícios resolvidos:

1) Calcule os valores de m e n de modo que a equação $3x^4 + (m + 2n - 6)x^3 + (m - 1)x^2 - x - 3 = 0$ seja recíproca e resolva-la para os valores de m e n encontrados.

Solução:

A equação deve ser recíproca de 2ª classe, pois os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos são simétricos. Então:

$$\begin{cases} m + 2n - 6 = 1 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1 \text{ e } n = 3$$

A equação fica: $3x^4 + x^3 - x - 3 = 0$.

Esta equação deve ter as raízes +1 e –1, logo retirando-as, vem:

	3	1	0	–1	–3	
1	3	4	4	3	0	$\Rightarrow$ 1 é raiz
–1	3	1	3	0		$\Rightarrow$ –1 é raiz

As outras raízes são as raízes da equação $3x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{35}\, i}{6}$

Em suma, as raízes são 1, -1 e $\dfrac{-1 \pm \sqrt{35}\, i}{6}$.

2) Resolva a equação $12x^6 - 4x^5 - 53x^4 + 53x^2 + 4x - 12 = 0$.

Solução:

Temos uma equação de 2ª classe e grau par, logo, temos as raízes +1 e –1. Retirando-as, temos:

	12	–4	–53	0	53	4	–12	
1	12	8	–45	–45	8	12	0	$\Rightarrow$ 1 é raiz
–1	12	–4	–41	–4	12	0		$\Rightarrow$ –1 é raiz

NOTA
Quando retiramos as raízes especiais 1 e –1, sempre se obtém uma equação recíproca de 1ª classe e grau par.

Temos agora uma equação recíproca de 1ª classe e grau par (que não tem raízes especiais).

$12x^4 - 4x^3 - 41x^2 - 4x + 12 = 0$

Dividindo por x^2, vem:

$12x^2 - 4x - 41 - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} = 0$

Agrupando os termos de mesmo coeficiente, vem:

$12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 41 = 0$

Fazendo $x + \frac{1}{x} = y \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, logo:

$12(y^2 - 2) - 4y - 41 = 0 \Rightarrow 12y^2 - 4y - 65 = 0$

Cujas raízes são: $y_1 = \frac{5}{2}$ e $y_2 = -\frac{13}{6}$

Substituindo em $x + \frac{1}{x}$, vem:

$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ ou $x_2 = \frac{1}{2}$

$x + \frac{1}{x} = -\frac{13}{6} \Rightarrow 6x^2 + 13x + 6 = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{2}{3}$ ou $x_4 = -\frac{3}{2}$

O conjunto das raízes será então: $\left\{1,\ -1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{3}{2}\right\}$

6.7 – Apêndice

6.7.1 – Condição de reciprocidade

Teorema

Seja $p(x)$ um polinômio. Suponha que zero não é raiz do polinômio e, para cada raiz x deste polinômio, o número $\frac{1}{x}$ também é raiz, com a mesma multiplicidade. Então a equação $p(x) = 0$ é recíproca (de 1ª ou 2ª classe).

Demonstração:

Já vimos que, se a equação é recíproca, então as raízes vêm em pares de recíprocos. Agora vamos demonstrar "a volta".

Sendo $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, façamos a substituição de x por $\frac{1}{x}$.

Temos:

$$\frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + ... + \frac{a_1}{x} + a_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_n}_{Q(x)} = 0$$

Mas ambas as equações $p(x) = 0$ e $Q(x) = 0$ têm exatamente as mesmas raízes com as mesmas multiplicidades. Então $p(x)$ é um múltiplo de $Q(x)$, isto é, $p(x) = \lambda Q(x),\ \lambda \neq 0$.

Assim:

$$a_n = \lambda a_0 \text{ e } a_0 = \lambda a_n$$
$$a_{n-1} = \lambda a_1 \text{ e } a_1 = \lambda a_{n-1}$$
$$a_{n-2} = \lambda a_2 \text{ e } a_2 = \lambda a_{n-2}$$
$$\vdots$$

Como $a_0 \neq 0$, temos $a_0 = \lambda a_n = \lambda(\lambda a_0) = \lambda^2 a_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Se $\lambda = 1$, $a_n = a_0$, $a_{n-1} = a_1$ etc. e a equação é recíproca de 1ª classe.
Se $\lambda = -1$, $a_n = -a_0$, $a_{n-1} = -a_1$ etc. e a equação é recíproca de 2ª classe.

NOTA
Por hipótese sobre $p(x)$, 0 não pode ser uma de suas raízes. Então $a_0 \neq 0$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Resolva a equação $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$.

2 Resolva a equação $x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$.

3 Resolva as equações:

a) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$

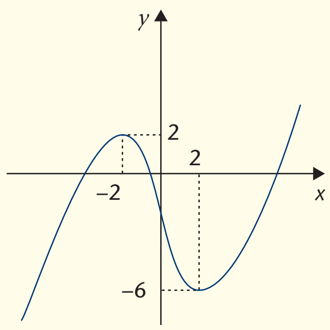
b) $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$

c) $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$

4 Encontre os valores de p e q, de modo que a equação $x^4 - 2x^3 + px + q = 0$ tenha raízes recíprocas.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (UFRJ) A figura abaixo representa o gráfico de uma certa função polinomial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que é decrescente em $[-2, 2]$ e crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[2, +\infty[$.
Determine todos os números reais c para os quais a equação $f(x) = c$ admite uma única solução.



2 (ITA-SP) Dividindo-se o polinômio $p(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por $(x - 1)$, obtém-se resto igual a 2. Dividindo-se $p(x)$ por $(x + 1)$, obtém-se resto igual a 3. Sabendo que $p(x)$ é divisível por $(x - 2)$, tem-se que o valor de $\frac{ab}{c}$ é igual a:

(A) –6
(B) –4
(C) 4
(D) 7
(E) 9

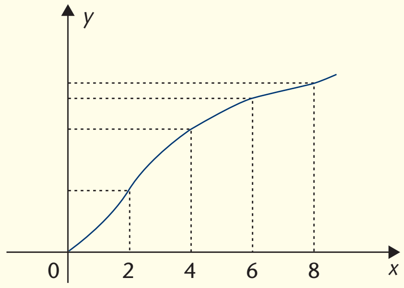
3 (Cefet-MG) Se $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = x - 2$, a igualdade $g \circ f \circ h(x) = h \circ g(x)$ é verdadeira para:

(A) nenhum valor real de x.
(B) valores de x irracionais com soma igual a 12.
(C) valores de x irracionais com soma igual a 4.
(D) valores de x racionais com produto igual a $\frac{7}{3}$.
(E) valores de x racionais com produto igual a $\frac{11}{3}$.

4 (UCDB-MS) Se o polinômio $q(x) = (ax + b)(x + 3) + (x - 3)^2 - c$ é idêntico a $p(x) = 3x^2 + x + 4$, então $a + b + c$ é igual a:

(A) 7
(B) 8
(C) 9
(D) 10
(E) 11

5 A figura a seguir mostra uma função que dá a quantidade total de peças que um operário monta em função do número de horas trabalhadas em um dia:
$y = -x^3 + 5x^2 + 180x$



Quantas peças o operário monta nas duas primeiras horas de trabalho? E dessas peças, quantas monta na primeira hora e quantas monta na segunda hora?

6 (Unirio-RJ) O grau do polinômio $(x + 2)^2(x - 4)^4(x + 6)^6(x - 8)^8 \ldots (x + 18)^{18}$ é:

(A) $2 \cdot 9!$
(B) 90
(C) $2^9 \cdot 9!$
(D) 180
(E) 18!

7 (Vunesp-SP) Para que valores reais de a, b e c as funções polinomiais f e g, definidas por:
$f(x) = x^3 + x^2 + x$
$g(x) = x^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + a - b - c$, são iguais?

8 (EEM-SP) Determine os valores de p e q na identidade:
$2x + 13 \equiv p(x + 2) - q(1 - x)$.

9 (UFRGS) Se $p(z)$ é um polinômio de coeficientes reais e $p(i) = 2 - i$, então $p(-i)$ vale:

(A) $-2 + i$
(B) $2 + i$
(C) $-2 - i$
(D) $1 + 2i$
(E) $1 - 2i$

10 (PUC-RS) Dado o polinômio $p(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$, onde n é ímpar, o valor de $p(-1)$ é:

(A) –2
(B) –1
(C) 0
(D) 1
(E) 2

11 (UFU-MG) Considere o polinômio $p(x) = ax^2 - 3(a + 5)x + a^2$, com $a \in \mathbb{R}$. Assim, o conjunto S dos valores positivos de a para os quais $p(1) < 0$ é igual a:

(A) $S = \{a \in \mathbb{R}: 0 < a < 5\}$

(B) $S = \{a \in \mathbb{R}: a > 5\}$

(C) $S = \{a \in \mathbb{R}: a < 0\}$

(D) $S = \{a \in \mathbb{R}: 3 < a < 5\}$

12 Sendo $p(x) = q(x) + x^2 + x + 1$, e sabendo que 2 é raiz de $p(x)$ e que 1 é raiz de $q(x)$, calcule $p(1) - q(2)$.

13 (Cefet-PR) Sejam os polinômios $A(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_nx + a_{n+1}$ e $B(x) = b_1x^m + b_2x^{m-1} + \dots + b_mx + b_{m+1}$ de mesmo grau. Se $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ nesta ordem formam uma P.A. onde $a_3 = 5$ e $r = n$, $n \in \mathbb{Z}$ com $3 \le n < 4$ e $(b_1, b_2, \dots, b_{m+1})$ formam nesta ordem uma P.G. onde $b_2 = a_2$ e $b_3 = -1$, então o termo independente da soma $A(x) + B(x)$ é:

(A) -1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{15}{2}$ (D) $\frac{9}{2}$ (E) $\frac{17}{2}$

14 (UEL-PR) O valor de k para que o polinômio $p(x) = kx^2 + kx + 1$ satisfaça a sentença $p(x) - x = p(x - 1)$ é:

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1 (E) $\frac{3}{2}$

15 (UFMG) Considere os polinômios $p(x) = ax^3 + (2a - 3b)x^2 + (a + b + 4c)x - 4bcd$ e $q(x) = 6x^2 + 18x + 5$, em que a, b, c e d são números reais. Sabe-se que $p(x) = q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim sendo, o número d é igual a:

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) 3

16 (Uece) Considere o polinômio $p(x) = x^5 - x^4 + x^2 - 1$. O valor do produto $5 \cdot [p(1) \cdot p(4) \cdot p(5)]$ é igual a:

(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 5

17 (UFRN) Para qualquer número inteiro n, se $p(n) = 1 - n + n^2 - n^3$, então $p(-1)$ é igual a:

(A) 2 (B) 0 (C) -2 (D) 4

18 (UEL-PR) O polinômio p tem grau $4n + 2$ e o polinômio q tem grau $3n - 1$, sendo n inteiro e positivo. O grau do polinômio pq é sempre:

(A) igual ao máximo divisor comum entre $4n + 2$ e $3n - 1$.

(B) igual a $7n + 1$.

(C) inferior a $7n + 1$.

(D) igual a $12n^2 + 2n + 2$.

(E) inferior a $12n^2 + 2n + 2$.

19 (UFMG) Considere o polinômio $p(x) = (x - 1)(x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4)$. O polinômio $p(x)$ é igual a:

(A) $x^4(x^3 - 1)(x^3 + 1)$

(B) $x^4(x^6 - 2x^4 + 1)$

(C) $x^4(x^3 - 1)^2$

(D) $x^4(x^6 - 2x^2 + 1)$

20 (UEL-PR) Se o polinômio $f = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$ é divisível por $g = 2x^2 - 3x - 2$, então ele também é divisível por:

(A) $x - 4$

(B) $x + 4$

(C) $x + 3$

(D) $2x + 1$

(E) $2x - 1$

21 (UEL-PR) O polinômio $f = x^3 - 2x^2 + kx - 3$ é divisível por $g = x^2 - x + 3$ se, e somente se, o número real k é igual a:

(A) 4 (B) 3 (C) 1 (D) -3 (E) -4

22 (Unicamp-SP) Determine o quociente e o resto da divisão de $x^{100} + x + 1$ por $x^2 - 1$.

23 (UFV-MG) Dividindo-se o polinômio $p(x)$ por $x^2 + 4x + 7$, obtêm-se $x^2 + 1$ como quociente e $x - 8$ como resto. É *correto* afirmar que o coeficiente do termo de grau 2 é:

(A) -1 (B) 4 (C) 8 (D) 5 (E) 1

24 (UFBA) Na questão a seguir calcule a soma dos números associados aos itens corretos.
Sobre polinômios, pode-se afirmar:

(01) O resto da divisão do polinômio $p(x) = x^{64} + 2x^{32} + 3x^{16} + x^8 + x^4 + x^2 + x$ por $x - 1$ é igual a 6.

(02) Dividindo-se o polinômio $p(x)$ pelo polinômio $g(x)$, obtêm-se quociente $q(x)$ e resto $r(x)$; então, o grau de $r(x)$ é menor que o grau de $g(x)$.

(04) Sendo $p(x) = 4x^5 + ax^4 + 2x^3 - x^2$, $q(x) = bx^5 + 2x^4 + cx^3 + x^2$ e, para todo x, $p(x) + q(x) = 0$, tem-se que $a \cdot b \cdot |c| = 2^4$.

(08) Sendo m o grau dos polinômios $p(x)$ e $q(x)$, então o grau do polinômio $p(x) + q(x)$ é igual a m.

(16) A soma de todos os zeros do polinômio $p(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2$ pertence ao intervalo $]0, 5]$.

(32) Se $p(x) = x^3 - ax^2 + bx + 2$ e $q(x) = ax^3 - bx^2 - 3x - 1$ são tais que $p(1) = 5$ e $q(-1) = 4$, então $(a + b)^2 = 2$.

25 (Fatec-SP) Dividindo-se o polinômio $M(x) = (2x - 1) \cdot (x^2 + 9)$ pelo polinômio $N(x) = x^2 - 3x + 1$, obtêm-se quociente $Q(x)$ e resto $R(x)$. É verdade que:

(A) $Q(-1) = 3$
(B) $Q(1) = 8$
(C) $Q(0) = 4$
(D) $R(-2) = -70$
(E) $R(2) = 40$

26 Calcule o resto da divisão do polinômio $p(x) = x^4 - 1$ pelo polinômio $x^3 - 1$.

27 (Cesgranrio-RJ) O resto da divisão do polinômio $p(x) = (x^2 + 1)^2$ pelo polinômio $d(x) = (x - 1)^2$ é igual a:

(A) 2
(B) 4
(C) $2x - 1$
(D) $4x - 2$
(E) $8x - 4$

28 O polinômio $x^3 + 2x^2 + mx + n$ é divisível por $x^2 + x + 1$. Calcule o valor de $m + n$.

29 (Faap-SP) Calcule a, b, c e d para que o polinômio $p_1(x) = a(x + c)^3 + b(x + d)$ seja idêntico a $p_2(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$.

30 (UFAL) Se f, g e h são polinômios de graus 2, 3 e 4, respectivamente, o grau do polinômio $f \cdot g + h$ é:

(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 6 (E) 5

31 (Fuvest-SP) Considere o polinômio não nulo $p(x)$ tal que $[p(x)]^3 = x^2[p(x)] = x\,p(x^2)$, para todo x real.

a) Qual é o grau de $p(x)$?

b) Determine $p(x)$.

32 (Cesgranrio-RJ) Se o polinômio $p(x) = 2x^3 - 4x + a$ é divisível por $d(x) = x - 2$, o valor de a é:

(A) –8 (B) –6 (C) –4 (D) –2

33 (FGV-SP) Se o polinômio $p(x) = x^3 - kx^2 + 6x - 1$ for divisível por $(x - 1)$, ele também será divisível por:

(A) $x^2 - 5x + 1$
(B) $x^2 - 5x + 3$
(C) $x^2 + 5x + 1$
(D) $x^2 + 5x + 3$
(E) $x^2 - 5x + 5$

34 (ITA-SP) Seja $p(x)$ um polinômio divisível por $x - 1$. Dividindo-o por $x^2 + x$, obtêm-se o quociente $Q(x) = x^2 - 3$ e o resto $R(x)$. Se $R(4) = 10$, então o coeficiente do termo de grau 1 de $p(x)$ é igual a:

(A) –5 (B) –3 (C) –1 (D) 1 (E) 3

35 (ITA-SP) Seja $p(x)$ um polinômio de grau 4 com coeficientes reais. Na divisão de $p(x)$ por $x - 2$ obtém-se um quociente $q(x)$ e resto igual a 26. Na divisão de $p(x)$ por $x^2 + x - 1$ obtém-se um quociente $h(x)$ e resto $8x - 5$. Sabe-se que $q(0) = 13$ e $q(1) = 26$.
Então, $h(2) + h(3)$ é igual a:

(A) 16 (B) zero (C) –47 (D) –28 (E) 1

36 (ITA-SP) Sejam $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ polinômios na variável real x de graus n_1, n_2 e n_3, respectivamente, com $n_1 > n_2 > n_3$. Sabe-se que $p_1(x)$ e $p_2(x)$ são divisíveis por $p_3(x)$. Seja $r(x)$ o resto da divisão de $p_1(x)$ por $p_2(x)$. Considere as afirmações:

I) $r(x)$ é divisível por $p_3(x)$.

II) $p_1(x) - \frac{1}{2}p_2(x)$ é divisível por $p_3(x)$.

III) $p_1(x) \cdot r(x)$ é divisível por $[p_3(x)]^2$.

Então:
(A) apenas I e II são verdadeiras.
(B) apenas II é verdadeira.
(C) apenas I e III são verdadeiras.
(D) todas as afirmações são verdadeiras.
(E) todas as afirmações são falsas.

37 (Fuvest-SP) Seja $p(x)$ um polinômio divisível por $x - 3$. Dividindo $p(x)$ por $x - 1$ obtemos quociente $q(x)$ e resto $r = 10$. O resto da divisão de $q(x)$ por $x - 3$ é:

(A) –5 (B) –3 (C) 0 (D) 3 (E) 5

38 (Fuvest-SP) Dividindo-se o polinômio $p(x)$ por $2x^2 - 3x + 1$, obtêm-se quociente $3x^2 + 1$ e resto $-x + 2$. Nessas condições, o resto da divisão de $p(x)$ por $x - 1$ é:

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) –1 (E) –2

39 (Mack-SP) Se R(x) é o resto da divisão $(x^{80}+3x^{79}-x^2-x-1):(x^2+2x-3)$, então R(0) vale:

(A) –2 (B) –1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

40 (Mack-SP) O polinômio $p(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + c$ é divisível por $x^2 - 3x + 2$ e por $x^2 - 2x + 1$. Então a soma dos números reais a, b e c é:

(A) 2
(B) –2
(C) 3
(D) –3
(E) zero

41 (Mack-SP) O resto da divisão de um polinômio de $p(x)$ por $x - k$ é R. Se o resto da divisão de $p(x)+\frac{R}{3}$ por $x - k$ é 24, então R vale:

(A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 20 (E) 22

42 (Unirio-RJ) Dividindo-se um polinômio $p(x)$ por outro D(x) obtêm-se quociente e resto $Q(x) = x^3 - 2x - 1$ e $R(x) = 5x + 8$, respectivamente.
O valor de $p(-1)$ é:

(A) –1 (B) 0 (C) 2 (D) 3 (E) 13

43 (Mack-SP) Considerando as seguintes divisões de polinômios:

$$\begin{array}{r|l} p(x) & x-2 \\ \hline 4 & Q(x) \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} Q(x) & x-6 \\ \hline 1 & Q_1(x) \end{array}$$

podemos afirmar que o resto da divisão de $p(x)$ por $x^2 - 8x + 12$ é:

(A) $3x - 2$
(B) $x + 1$
(C) $2x + 2$
(D) $2x + 1$
(E) $x + 2$

44 (Mack-SP)

$$\begin{array}{r|l} p(x) & 3x-2 \\ \hline 1 & q(x) \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} (x^2-1)\cdot p(x) & 3x-2 \\ \hline k & q_1(x) \end{array}$$

Nas divisões acima, de polinômios, podemos afirmar que o resto k vale:

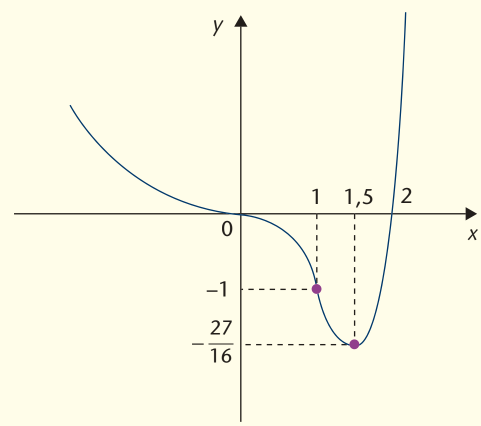
(A) $\frac{4}{9}$
(B) $-\frac{1}{9}$
(C) $-\frac{4}{9}$
(D) $-\frac{5}{9}$
(E) $-\frac{2}{9}$

45 (FEI-SP) Dadas as funções f e g, definidas no conjunto dos números reais por:

$$f(x)=\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} \text{ e } g(x)=\frac{1}{4}(x-3)(x+5),$$

determine as constantes a, b e c para que $f(x)\equiv g(x)$.

46 (Unirio-RJ) Seja f um polinômio de grau 4, cujo gráfico é dado pela seguinte figura:



Sabendo que zero é raiz tripla de f, determine:

a) a lei que define f.

b) os valores de $x < 1,5$ tais que $-1 < f(x) \leq 0$.

47 (ITA-SP) A divisão de um polinômio $p(x)$ por $x^2 - x$ resulta no quociente $6x^2 + 5x + 3$ e resto $-7x$. O resto da divisão de $p(x)$ por $2x + 1$ é igual a:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

48 (UFF-RJ) Considere o polinômio $p(x) = x^3 - 3x + 2$ e a função real de variável real f definida por $f(x)=\frac{1}{\sqrt{p(x)}}$.

Sabe-se que uma das raízes de $p(x)$ é 1. Escreva o domínio de f sob a forma de intervalo.

49 (Ufop-MG) Sejam os polinômios $p(x) = x - 3$ e $q(x) = 4(A + B)x^2 + 2(B + C - A)x + (A + C)$.

a) Determine A, B, C $\in \mathbb{R}$, de modo que $p(x - 3) = q\left(\frac{x}{2}\right)$.

b) Determine o quociente e o resto da divisão de $q(x)$ por $p(x)$.

50 (PUC-RJ) O resto da divisão do polinômio $x^3 + px + q$ por $x + 1$ é 4 e o resto da divisão deste mesmo polinômio por $x - 1$ é 8. O valor de p é:

(A) 5 (B) –4 (C) 0 (D) 1 (E) 8

51 (Puccamp-SP) Dividindo-se um polinômio f por $g = x^2 - 1$, obtêm-se quociente $p = 2x + 1$ e resto $r = kx - 9$, sendo $k \in \mathbb{R}$.
Se f é divisível por $x - 2$, então k é igual a:

(A) 6 (B) 3 (C) –1 (D) –3 (E) –6

52 (PUC-PR) Na divisão do polinômio F(x) pelo binômio $f(x)$, do 1º grau, usando o dispositivo de Ruffini, encontrou-se o seguinte:

	1	a	$2a$	$-2a$	8
				-4	0

Qual o dividendo dessa divisão?

(A) $x^4 + 3x^3 + 6x^2 - 12x + 8$

(B) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 8$

(C) $x - 2$

(D) $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - 8$

(E) $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 8$

53 (Unifesp) A divisão de um polinômio $p(x)$ por um polinômio $k(x)$ tem $q(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ como quociente e $r(x) = x^2 + x + 7$ como resto. Sabendo-se que o resto da divisão de $k(x)$ por x é 2, o resto da divisão de $p(x)$ por x é:

(A) 10 (B) 12 (C) 17 (D) 25 (E) 70

54 (Unirio-RJ) Dividindo-se um polinômio $p(x)$ por outro D(x) obtêm-se quociente e resto $Q(x) = x^3 - 2x - 1$ e $R(x) = 5x + 8$, respectivamente. O valor de $p(-1)$ é:

(A) –1 (B) 0 (C) 2 (D) 3 (E) 13

55 (UFSE) Dividindo-se o polinômio $A(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ pelo polinômio B(x) obtêm-se o quociente $Q(x) = x - 3$ e o resto $R(x) = 3x - 1$. É verdade que:

(A) B(2) = 2 (D) B(–1) = 1

(B) B(1) = 0 (E) B(–2) = 1

(C) B(0) = 2

56 (Unifor-CE) Dividindo-se um polinômio f por x^2 obtêm-se quociente $-x$ e resto x. A forma fatorada de f é:

(A) $(x - 1)^2 \cdot (x + 1)$

(B) $x \cdot (1 + x)^2$

(C) $x \cdot (1 - x)^2$

(D) $x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

(E) $x \cdot (1 - x) \cdot (1 + x)$

57 (Ufam) Se o polinômio $p(x) = x^3 + 2x^2 + mx + n$ é divisível por $h(x) = x^2 + x + 1$, então o valor de $m + n$ é:

(A) 5 (B) 2 (C) 1 (D) 8 (E) 3

58 (Ufam) Dividindo-se o polinômio $p_1(x) = x^5$ pelo polinômio $p_2 = x^2 - 1$, obtêm-se quociente e resto, respectivamente, iguais a:

(A) $x^3 - 1$ e x (D) $x^3 + x$ e 1

(B) $x^3 + x$ e x (E) $x^3 + x$ e –1

(C) $x^3 + x + 1$ e x

59 (Cefet-MG) Se na divisão do polinômio $p(x)$ por $x^2 - 3$ o quociente é $x + 1$ e o resto é $x - 1$, então o valor de P(3) é:

(A) 25 (B) 26 (C) 27 (D) 28 (E) 29

60 (Vunesp-SP) Se m é raiz do polinômio real $p(x) = x^6 - (m + 1)x^5 + 32$, determine o resto da divisão de $p(x)$ por $x - 1$.

61 Resolva a equação $p(x) = 9x^3 - 36x^2 + 26x + 3 = 0$, sabendo que o polinômio $p(x)$ é divisível por $x - 3$.

62 (Uerj) Considere o polinômio $p(n) = (n + 1) \cdot (n^2 + 3n + 2)$, $n \in \mathbb{N}$ e calcule:

a) a quantidade de paralelepípedos retângulos de bases quadradas e volumes numericamente iguais a $p(11)$, cujas medidas das arestas são expressas por números naturais.

b) o valor da expressão: $\dfrac{(7^9 + 4 \cdot 7^6 + 5 \cdot 7^3 + 2)}{344^2}$.

63 Qual o resto da divisão do polinômio $p(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix}$ por $x - b$?

64 (Faap-SP) Calcule a e b para que os polinômios $p(x) = x^2 + ax - 3b$ e $q(x) = -x^3 + 2ax - b$ sejam divisíveis por $x - 1$.

65 (UnB-DF) Seja $p(x) = x^3 + 4x^2 + kx + (k - 51)$. Determine o valor de k, sabendo que $p(x)$ é divisível por $x - 1$.

66 (Esam-RN) Utilizando-se o dispositivo de Briot-Ruffini na divisão de um polinômio $p(x)$ por $d(x)$, encontrou-se:

	3	a	b	c
–1	3	–5	5	2

Com base nessa informação e nos conhecimentos sobre polinômios, pode-se concluir:

(A) $p(x) = 3x^2 - 5x + 5$ e $d(x) = x - 1$

(B) $p(x) = 3x^2 - 2x + 7$ e $d(x) = x + 1$

(C) $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 2$ e $d(x) = x - 1$

(D) $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5x + 2$ e $d(x) = x + 1$

(E) $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7$ e $d(x) = x + 1$

67 (ITA-SP) A divisão de um polinômio $f(x)$ por $(x - 1)(x - 2)$ tem resto $x + 1$. Se os restos das divisões de $f(x)$ por $x - 1$ e $x - 2$ são, respectivamente, os números a e b, então $a^2 + b^2$ vale:

(A) 13 (B) 5 (C) 2 (D) 1 (E) 0

68 (UFRGS) Se $p(x) = 3x^3 - cx^2 + 4x + 2c$ é divisível por $x + 1$, então:

(A) $c = -\frac{1}{3}$

(B) $c = \frac{1}{3}$

(C) $c = 7$

(D) $c = 39$

(E) $c = -7$

69 (Unaerp-SP) Se $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x + a$ é divisível por $x - 2$, então os valores de a e de $p(2)$ são, respectivamente:

(A) –16 e –2

(B) –16 e 2

(C) 16 e –2

(D) 16 e 2

(E) –16 e zero

70 (Mack-SP) Se $p(x - 1) = x^2 - 2x + 3$, então o resto da divisão de $p(x)$ por $x - 3$ é:

(A) 3

(B) 5

(C) 7

(D) 9

(E) 11

71 (Puccamp-SP) Sabe-se que o polinômio $f = x^3 - x^2 + kx + 1$, no qual k e t são constantes reais, é divisível por x e por $x + 2$. Nessas condições, a forma fatorada de f é:

(A) $x(x + 2)(x - 1)$

(B) $x(x + 2)(x - 2)$

(C) $x(x + 2)(x - 3)$

(D) $x(x + 2)(x + 3)$

(E) $x(x + 2)(x + 1)$

72 (Unicap-PE) São dados dois polinômios:
$p_1(x) = 5x^2 - 2x + 4$ e $p_2(x) = (a + b)x^2 + (a - b + c)x + b - c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Julgue os itens.

a) $p_1(x)$ e $p_2(x)$ são polinômios do mesmo grau.

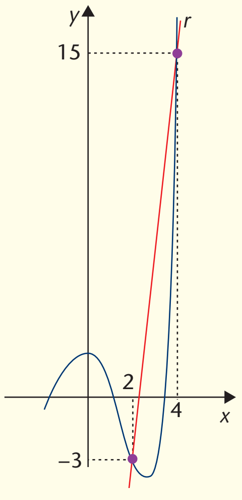
b) O polinômio $p_1(x)$ pode ser decomposto em um produto de dois polinômios do primeiro grau com coeficientes em $\mathbb{R}$.

c) Se $a = 2$ e $c = -1$, então $b = 3$ e $p_2(x) = p_1(x) \cdot q(x)$, onde $q(x)$ tem grau zero.

d) $p_1(x) = D(x)(x - 3) + p_1(3)$.

e) Se $-a = b$, $p_2(x)$ é um polinômio do primeiro grau.

73 (Uerj) A figura abaixo representa o gráfico de um polinômio p e uma reta r que lhe é secante nos pontos A(2, –3) e B(4, 15).



a) Determine o resto da divisão de $p(x)$ por $x - 4$.

b) Mostre que a reta r representa graficamente o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - 2)(x - 4)$.

74 (PUC-RJ) Calcule as raízes da equação $(x + 1)(x^2 - 2x + 1) = 1$.

75 (UFF-RJ) Uma fábrica utiliza dois tanques para armazenar combustível. Os níveis de combustível, H_1 e H_2, em cada tanque, são dados pelas expressões:
$H_1(t) = 150t^3 - 190t + 30$ e $H_2(t) = 50t^3 + 35t + 30$, sendo t o tempo em hora.
O nível de combustível de um tanque é igual ao do outro no instante inicial ($t = 0$) e, também, no instante:

(A) $t = 0,5$ h
(B) $t = 1,0$ h
(C) $t = 1,5$ h
(D) $t = 2,0$ h
(E) $t = 2,5$ h

76 (Uerj) Lembrando que:
$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ e $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$:

a) Demonstre as identidades:
I) $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$
II) $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

b) Usando a identidade $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, mostre que $\cos 40°$ é raiz da equação $8x^3 - 6x + 1 = 0$.

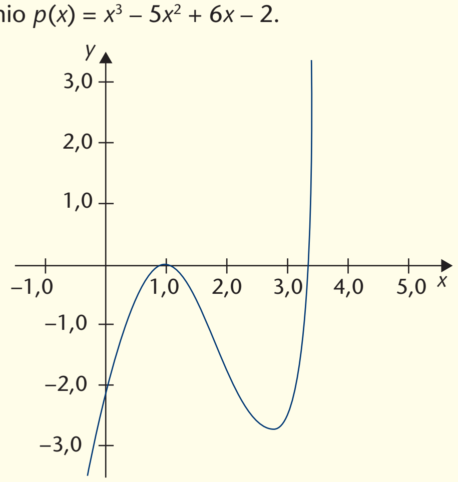
77 (Fuvest-SP) Seja $p(x) = x^3 - 12x + 16$.

a) Verifique que $x = 2$ é raiz de $p(x)$.

b) Use fatoração para mostrar que se $x > 0$ e $x \neq 2$, então $p(x) > 0$.

c) Mostre que, entre todos os prismas retos de bases quadradas que têm volume igual a 8 cm³, o cubo é o que tem menor área total.

78 (FGV-RJ) A figura abaixo mostra o gráfico do polinômio $p(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 2$.



a) Quantas são as raízes reais de $p(x)$?

b) Quais são estas raízes?

79 (UFC-CE) O polinômio $p(x) = 2x^3 - x^2 + ax + b$, em que a e b são números reais, possui o número complexo i como uma de suas raízes. Então o produto $a \cdot b$ é igual a:

(A) –2 (B) –1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

80 (PUC-MG) No polinômio $p(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$ uma das raízes é $2i$. Então, a raiz real de $p(x)$ é:

(A) –2 (B) –1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

81 (UFF-RJ) Três raízes de um polinômio $p(x)$ do 4º grau estão escritas sob a forma i^{576}, i^{42} e i^{297}. O polinômio $p(x)$ pode ser representado por:

(A) $x^4 + 1$
(B) $x^4 - 1$
(C) $x^4 + x^2 + 1$
(D) $x^4 - x^2 + 1$
(E) $x^4 - x^2 - 1$

82 (PUC-MG) Na função $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$, $f(a) = f(b) = f(-1)$. O valor de $a + b$ é:

(A) 0,5 (B) 1,0 (C) 1,5 (D) 2,5 (E) 3,0

83 (UFRGS) Os polinômios de $p(x) = x^4 - 5x^3$ e $q(x) = x^4 - 5$:

(A) têm exatamente as mesmas raízes.

(B) têm três raízes em comum.

(C) têm duas raízes em comum.

(D) têm uma raiz em comum.

(E) não têm raízes em comum.

84 (UFRGS) O polinômio $p(x) = ax^4 + 3x^3 - 4x^2 + dx - 2$, com $a \neq 0$, admite 1 e –1 como raízes. Então:

(A) $a = 6$ e $d = -3$
(B) $a = 3$ e $d = -3$
(C) $a = -3$ e $d = 3$
(D) $a = 9$ e $d = -3$
(E) $a = -3$ e $d = 6$

85 (FGV-SP) Dada a equação polinomial $x^3 - 5x^2 + 8x - m = 0$, onde m é um parâmetro real, obtenha m de modo que 3 seja raiz, e encontre as outras raízes.

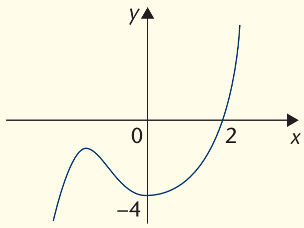
86 (Fuvest-SP) O polinômio $p(x) = x^3 - x^2 + x + a$ é divisível por $x - 1$. Ache todas as raízes complexas de $p(x)$.

87 (UFRJ) O polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + d$, $d \in \mathbb{R}$, é divisível por $(x - 2)$.

a) Determine d.

b) Calcule as raízes da equação $p(x) = 0$.

88 O gráfico do polinômio definido por $p(x) = x^3 - 2x + a$ ($a \in \mathbb{R}$) está representado abaixo.



Determine as três raízes desse polinômio.

89 Sabe-se que $x^3 - 2x^2 + 5x - 4 = 0$ tem uma raiz igual a 1. As outras duas raízes dessa equação são:

(A) racionais
(B) irracionais
(C) simétricas
(D) complexas não reais
(E) positivas

90 (PUC-SP) Sabe-se que –2 é raiz do polinômio

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & k & x \end{vmatrix}$$, no qual $x \in \mathbb{C}$ e $x \in \mathbb{R}$.

Nestas condições, determine:

a) o valor de k;

b) as demais raízes do polinômio.

91 (Cefet-RJ) O número complexo $1 + i$ é uma das raízes da equação $z^4 + k = 0$, onde k é uma constante real e positiva. A soma das OUTRAS três raízes da equação vale:

(A) 0
(B) $-1 - i$
(C) $2 + 2i$
(D) $-3 + i$
(E) 4

92 (UFF-RJ) Considere três números reais, m, n e p, tais que:

$$m + n + p = -\frac{1}{5},\quad mn + np + mp = \frac{2}{3},\quad mnp = -\frac{3}{5}$$

Pode-se afirmar que m, n e p são raízes do polinômio:

(A) $Q(x) = 10x^3 + 8x^2 + 3x + 15$
(B) $Q(x) = 8x^3 + 10x^2 + 15x + 3$
(C) $Q(x) = 3x^3 + 15x^2 + 10x + 8$
(D) $Q(x) = 8x^3 + 15x^2 + 3x + 10$
(E) $Q(x) = 15x^3 + 3x^2 + 10x + 9$

93 (Unificado-RJ) Se a, b e c são as raízes da equação $x^3 - 10x^2 - 2x + 20 = 0$, então o valor da expressão $a^2bc + ab^2c + abc^2$ é igual a:

(A) 400
(B) 200
(C) –100
(D) –200
(E) –400

94 (Unificado-RJ) Resolvendo-se a equação $x^3 - x^2 + 14x + m = 0$ encontramos as raízes x_1, x_2 e x_3, distintas e não nulas. Se $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{7}{12}$, m é igual a:

(A) –1
(B) –7
(C) –12
(D) –14
(E) –24

95 (Fuvest-SP) O polinômio $x^4 + x^2 - 2x + 6$ admite $1 + i$ como raiz, onde $i^2 = -1$. O número de raízes reais desse polinômio é:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

96 (ITA-SP) Seja $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x - (\log_4 m)y + 5z = 0 \\ (\log_2 m)x + y - 2z = 0 \\ x + y - (\log_2 m^2)z = 0 \end{cases}$$

O produto dos valores de m para os quais o sistema admite solução não trivial é:

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) $2 \log_2 5$

97 (ITA-SP) Considere o polinômio $p(x) = 2x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, cujos coeficientes 2, a_2, ..., a_n formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q > 0$. Sabendo que $-\frac{1}{2}$ é uma raiz de p e que $p(2) = 5\,460$, tem-se que o valor de $\frac{n^2 - q^3}{q^4}$ é igual a:

(A) $\frac{5}{4}$
(B) $\frac{3}{2}$
(C) $\frac{7}{4}$
(D) $\frac{11}{6}$
(E) $\frac{15}{8}$

98 (UFPR) Sobre o polinômio $p(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 5x + d$, onde d é número real, é correto afirmar:

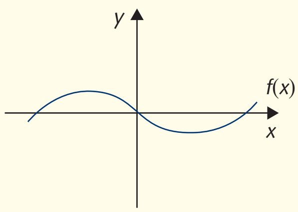
a) Se $d = 16$, então $p(x)$ é o desenvolvimento de $(x - 2)^4$.

b) Se $d = 0$, então zero é uma raiz de $p(x)$.

c) Se 1 for raiz de $p(x)$, então $d = 15$.

d) Se $d = -21$, então $p(x)$ é divisível por $x + 1$.

99 (Fuvest-SP)



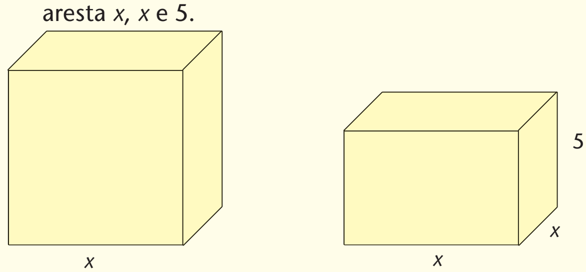
O gráfico acima pode representar a função $f(x)$ igual a:

(A) $x(x - 1)$
(B) $x^2(x^2 - 1)$
(C) $x^3(x - 1)$
(D) $x(x^2 - 1)$
(E) $x^2(x - 1)$

100 (Fuvest-SP) Seja $p(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ e um polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as quatro raízes de $p(x)$ são inteiras e que três delas são pares e uma ímpar. Quantos coeficientes pares tem o polinômio $p(x)$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

101 (Uerj) As figuras abaixo representam as formas e as dimensões, em decímetros, de duas embalagens: um cubo com aresta x e um paralelepípedo retângulo com aresta x, x e 5.



A diferença entre as capacidades de armazenamento dessas embalagens, em dm³, é expressa por $x^3 - 5x^2 = 36$. Considerando essa equação:

a) demonstre que 6 é uma de suas raízes;

b) calcule as suas raízes complexas.

102 (Fuvest-SP) P(x) é um polinômio cujas raízes formam uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 2. O coeficiente do termo de mais alto grau de P(x) é 1 e o termo independente é igual a 2^{21}. O grau do polinômio é:

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

103 (Fuvest-SP) As raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 + m$, onde m é um número real, estão em progressão aritmética. Determine:

a) o valor de m;

b) as raízes desse polinômio.

104 (ITA-SP) Sendo 1 e $1 + 2i$ raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais, então:

(A) $b + c = 4$
(B) $b + c = 3$
(C) $b + c = 2$
(D) $b + c = 1$
(E) $b + c = 0$

105 (Fuvest-SP) O produto de duas raízes do polinômio $p(x) = 2x^3 - mx^2 + 4x + 3$ é igual a -1. Determinar:

a) o valor de m;

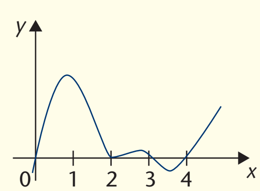
b) as raízes de $p(x)$.

106 (Unirio-RJ) Sabendo-se que o número 3 é raiz dupla da equação $ax^3 + bx + 18 = 0$, os valores de a e b são respectivamente:

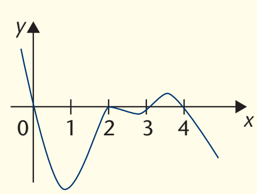
(A) $\frac{1}{3}$ e -9
(B) $\frac{1}{3}$ e 9
(C) $-\frac{1}{3}$ e -9
(D) $-\frac{1}{3}$ e 9
(E) 1 e -3

107 (Fuvest-SP) Dado o polinômio $p(x) = x^2(x - 1)(x^2 - 4)$, o gráfico da função $y = p(x - 2)$ é melhor representado por:

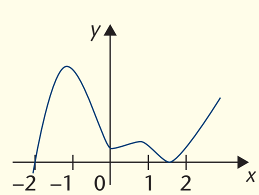
(A)



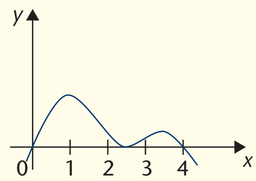
(B)



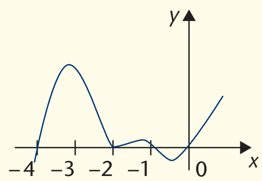
(C)



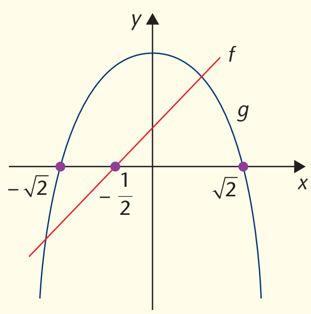
(D)



(E)



108 (Uerj) Sabe-se que o polinômio $p(x) = -2x^3 - x^2 + 4x + 2$ pode ser decomposto na forma $p(x) = (2x + 1)(-x^2 + 2)$. Representando as funções reais $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = -x^2 + 2$, num mesmo sistema de coordenadas cartesianas, obtém-se o gráfico abaixo.



Tendo por base apenas o gráfico, é possível resolver a inequação $-2x^3 - x^2 + 4x + 2 < 0$. Todos os valores de x que satisfazem a essa inequação estão indicados na seguinte alternativa:

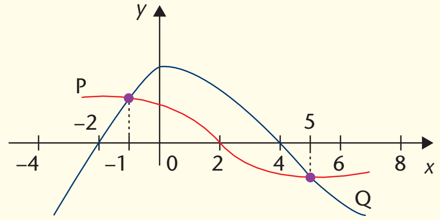
(A) $x < -\sqrt{2}$ ou $x > -\dfrac{1}{2}$

(B) $x < -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2}$

(C) $x < -\sqrt{2}$ ou $-\dfrac{1}{2} < x < \sqrt{2}$

(D) $-\sqrt{2} < x < -\dfrac{1}{2}$ ou $x > \sqrt{2}$

109 (Fuvest-SP) Os gráficos de duas funções polinomias P e Q estão representados na figura seguinte.



Então, no intervalo [–4, 8], P(x) · Q(x) < 0 para:

(A) $-2 < x < 4$

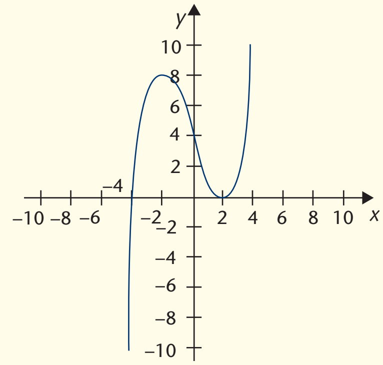
(B) $-2 < x < -1$ ou $5 < x < 8$

(C) $-4 \le x < -2$ ou $2 < x < 4$

(D) $-4 \le x < -2$ ou $5 < x \le 8$

(E) $-1 < x < 5$

110 (PUC-RS) Na figura abaixo, tem-se o gráfico de $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



Os valores de a, b, c e d são respectivamente:

(A) –4, 0, 4 e 2

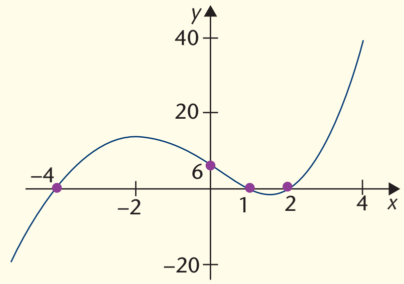
(B) –4, 0, 2 e 4

(C) $\dfrac{1}{4}$, 2, 10 e 4

(D) $\dfrac{1}{4}$, 0, –3 e 4

(E) 1, 0, –12 e 16

111 (UnB-DF) A curva abaixo representa o gráfico de uma função polinomial do terceiro grau $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



A partir da análise desse gráfico, julgue os itens seguintes.

a) Os números –4, 1, 2 e 6 são raízes do polinômio.

b) Se $f(x)$ é menor que zero, então $1 < x < 2$.

c) A equação $f(x) = 6$ possui exatamente três raízes.

d) Os elementos da imagem do intervalo (–4, 0] são positivos.

e) Admitindo-se $f(x) = k(x - a)(x - b)(x - c)$, em que a, b, c e k são constantes reais, então $k = \dfrac{3}{4}$.

112 (Fuvest-SP) O número de raízes complexas, que não são reais, do polinômio $p(x) = x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n+1}$ $(n > 1)$ é:

(A) $2n + 1$
(B) $2n$
(C) $n + 1$
(D) n
(E) 1

113 (UFF-RJ) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$, $m \neq 0$, é sempre crescente e possui raízes distintas. Sabendo-se que uma raiz é real, pode-se afirmar que as outras:

(A) são complexas.
(B) são nulas.
(C) têm módulo unitário.
(D) têm sinais contrários.
(E) são positivas.

114 (UFF-RJ) Considere as seguintes afirmações:

I) Todo polinômio de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real.

II) Um polinômio de grau par pode ter todas as raízes complexas.

III) $2 + i$ e $3 - i$ podem ser raízes de um mesmo polinômio do terceiro grau.

São verdadeiras:

(A) I e II
(B) I e III
(C) II e III
(D) todas
(E) nenhuma

115 (IBMEC-RJ) Considere:
$x^4 + bx^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$, onde b é um número real.
Sabe-se que uma das raízes dessa equação é o número complexo expresso por $2i^{1007}$ $\left(i = \sqrt{-1}\right)$. Então, a soma dos quadrados das raízes reais da equação é:

(A) 0
(B) 5
(C) 8
(D) 10
(E) 18

116 (UFRJ) Considere o polinômio p dado por
$p(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$.
Mostre que $i = \sqrt{-1}$ é uma de suas raízes e calcule as demais raízes.

117 (Unirio-Ence-RJ) Dado o polinômio $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, de coeficientes reais, e sabendo-se que i, -1 e 2 são algumas de suas raízes, o valor de $b + c + d + e$ é:

(A) 0
(B) -1
(C) -3
(D) -4
(E) -5

118 (ITA-SP) Sendo I um intervalo de números reais com extremidades em a e b, com $a < b$, o número real $b - a$ é chamado de comprimento de I. Considere a inequação $6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0$. A soma dos comprimentos dos intervalos nos quais ela é verdadeira é igual a:

(A) $\frac{3}{4}$
(B) $\frac{3}{2}$
(C) $\frac{7}{3}$
(D) $\frac{11}{6}$
(E) $\frac{7}{6}$

119 (UFMT) Seja $p(x)$ um polinômio de coeficientes reais e A(0, 0), B$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, C(1, 0) e D(2, 0) pontos do plano cartesiano.
A partir dessas informações, julgue os itens.

a) Admitindo $p(x) = -bx^2 + bx + c$ e que seu gráfico passa pelos pontos A e B, então $p\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{9}$.

b) Considerando que $p(x)$ é um polinômio do 4º grau cujo gráfico passa pelos pontos A, C e D, então $p(x)$ possui raízes complexas.

c) Supondo que $p(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$ e que seu gráfico passa pelo ponto A, o termo de $p(x)$, independente de x, é diferente de zero.

120 (UFMS) Considere a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, na qual a, b e c são números reais. Sabendo-se que -1 e $-1 + 3i$ são raízes da equação, calcule o valor da soma $a + b + c$.

121 (UFPE) Sabendo que $1 + i$ é raiz da equação $x^3 + ax^2 + bx - 12 = 0$ com a e b reais, qual o valor de $a + b$?

122 (UFPR) Com base nas propriedades de polinômios e equações, encontre as afirmativas corretas e calcule a soma dos números associados a elas.

(01) Se $p(x)$ é um polinômio com coeficientes reais tal que $1 + i$ é raiz de $p(x) = 0$, então $p(x)$ é divisível por $x^2 + 2x + 2$.

(02) No polinômio que se obtém efetuando o produto $(x + 1)^5(x - 1)^7$, o coeficiente de x^2 é igual a 4.

(04) Todo número que é raiz da equação $x^2 + 2x + 1 = 0$ é também raiz da equação $x + 1 = 0$.

(08) Dada a equação $(x^2 - 2)^5 = 0$, a soma das suas raízes é igual a zero.

123 (UFSCar-SP) Sabendo-se que a soma de duas das raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ é igual a 5, pode-se afirmar a respeito das raízes que:

(A) são todas iguais e não nulas.

(B) somente uma raiz é nula.

(C) as raízes constituem uma progressão geométrica.

(D) as raízes constituem uma progressão aritmética.

(E) nenhuma raiz é real.

124 (PUC-RJ) O número complexo $z = 1 + i$ é uma das raízes da equação $4z^4 - 8z^3 + 7z^2 + 2z - 2 = 0$. Esta equação tem:

(A) duas raízes reais distintas e duas complexas (não reais).

(B) uma única raiz real e três complexas (não reais).

(C) somente raízes complexas (não reais).

(D) uma raiz real dupla e duas complexas (não reais).

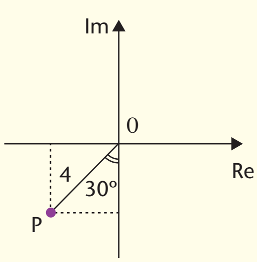
(E) três raízes reais e uma complexa (não real).

125 (PUC-RJ) Quais as soluções de $x(x^2 - 4x + 4) = 1$?

126 (IBMEC-RJ) O ponto P (figura abaixo) é o afixo (imagem) do número complexo z, que é uma das raízes do polinômio:

$p(x) = x^5 + 6x^4 + mx^3 + nx^2 + rx + t$

Se todos os coeficientes desse polinômio são números reais e se $p(x)$ é divisível por $x^2 - 1$, então, o valor de t é:



(A) 12

(B) 2

(C) –32

(D) –18

(E) –16

127 (Unioeste-PR) Sabendo que uma das raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$ é o número complexo $1 - i$, podemos concluir que:

(01) $1 + i$ também é raiz da equação.

(02) $-1 + i$ também é raiz da equação.

(04) A equação não possui raízes reais.

(08) A soma das raízes é 7.

(16) A soma dos quadrados das raízes é 9.

(32) O produto das raízes é um número real.

Calcule a soma dos números associados às proposições verdadeiras.

128 (UnB-DF) Julgue os itens seguintes, relativos às soluções das equações apresentadas.

a) A equação $(x + 3)^2 + (x - 3)^2 = 0$ possui duas soluções complexas.

b) A equação $(x + 177)^2 - (x - 177)^2 = 708x$ tem, no máximo, duas soluções reais distintas.

c) A equação $2x - 1 = \sqrt{(x)^2}$ tem exatamente duas soluções reais.

d) Se $x \in \mathbb{R}$ é solução da equação $x^2 + x - 1 = 0$, então x é também solução de $x^3 - 2x + 1 = 0$.

e) A equação $x^2 - y^2 = 31$ admite um único par $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como solução.

129 (ITA-SP) Seja S o conjunto de todas as raízes da equação $2x^6 - 4x^5 + 4x - 2 = 0$. Sobre os elementos de S podemos afirmar que:

(A) todos são números reais.

(B) 4 são números reais positivos.

(C) 4 não são números reais.

(D) 3 são números reais positivos e 2 não são reais.

(E) 3 são números reais negativos.

130 (UFRJ) Determine todas as raízes de $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$.

131 (Unirio-RJ) Determine k de modo que a equação polinomial $x^3 + kx^2 - 6x - 8 = 0$ tenha raízes reais em progressão geométrica.

132 (Uerj)

$x^3 + x + 10 = 0$

$x^3 - 19x - 30 = 0$

As equações acima, em que $x \in \mathbb{C}$, têm uma raiz comum. Determine todas as raízes não comuns.

133 (UFRJ) Dada a equação $x^3 - 7x^2 + 14x + k = 0$, determine o valor de k de modo que as raízes da equação sejam inteiras positivas e estejam em progressão geométrica.

134 (Uerj) Admita a possibilidade de contar objetos de duas maneiras, uma na base x e outra na base $(x + 3)$. Ao empregar essas duas maneiras para contar um determinado grupo de objetos, obtemos $(2343)_x = (534)_{x+3}$. Calcule o valor da base x e as outras duas raízes da equação resultante.

135 (UFRJ) Considere a equação $x^3 + 3x^2 + 9x + 9 = 0$.

a) Fazendo $x = y - 1$, obtenha uma equação equivalente tendo y como incógnita. Em seguida, faça $y = z - \dfrac{2}{z}$ e obtenha uma nova equação em z.

b) Calcule todas as soluções para a equação em z obtida no item *a*.

136 (ITA-SP) A identidade $\dfrac{x^3+4}{x^3+1} = 1 + \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ é válida para todo número real $x \neq -1$. Então $a + b + c$ é igual a:

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 (E) 1

137 (PUC-RJ) Os valores das constantes a e b, para os quais $\dfrac{1}{x^2-5x+6} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x-3}$ para todo $x \notin \{2, 3\}$, são tais que o produto ab vale:

(A) –2 (B) –1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

138 (UFRJ) Determine a e b de forma que, para todo x real e tal que $|x| \neq 1$, se tenha $\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{2x}{x^2-1}$.

139 (ITA-SP) O polinômio com coeficientes reais $p(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ tem duas raízes distintas, cada uma delas com multiplicidade 2, e duas de suas raízes são 2 e i. Então, a soma dos coeficientes é igual a:

(A) –4 (B) –6 (C) –1 (D) 1 (E) 4

140 (UFRGS) Se o polinômio $p(x)$ tem exatamente três raízes distintas a, b e c, o produto $p(x) \cdot p(x)$ terá como raízes:

(A) a^2, b^2, c^2

(B) $a, -a, b, -b, c, -c$

(C) a, b, c

(D) $2a, 2b, 2c$

(E) ab, ac, bc

141 (Cefet-PR) Seja o polinômio $p(x) = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$. Sabe-se que a_2 e a_4 são iguais, a soma de a_2, a_3 e a_4 é igual a –1, que a diferença entre a_3 e a_1 é igual a 10 e que a soma de a_1 com a_3 é igual ao oposto do dobro de a_2. Sendo assim podemos afirmar que as raízes reais de $p(x)$ são:

(A) 1 raiz tripla

(B) 1, 2, 3

(C) 1, 11, –3

(D) 1, 5, 6

(E) 1, 11, –6

142 (ITA-SP) Sejam a_1, a_2, a_3 e a_4 números reais formando, nesta ordem, uma progressão geométrica crescente com $a_1 \neq 0$. Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$. Se $x_1 = 2i$, então:

(A) $x_1 + x_2 + x_3 = -2$

(B) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

(C) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$

(D) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 8$

(E) $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = 5$

143 (ITA-SP) Seja $p(x)$ um polinômio de grau 3 tal que $p(x) = p(x+2) - x^2 - 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se –2 é uma raiz de $p(x)$, então o produto de todas as raízes de $p(x)$ é:

(A) 36 (B) 18 (C) –36 (D) –18 (E) 1

144 (ITA-SP) O valor da soma $a + b$ para que as raízes do polinômio $4x^4 - 20x^3 + ax^2 - 25x + b$ estejam em progressão aritmética de razão $\dfrac{1}{2}$ é:

(A) 36 (B) 41 (C) 26 (D) –27 (E) –20

145 (Mack-SP) Se $p(x) = 4x^3 - 16x^2 - x + m$, m real, admite duas raízes opostas, o valor de m é:

(A) 3 (B) –2 (C) 2 (D) –4 (E) 4

146 (UCDB-MS) Se x_1, x_2 e x_3 são as raízes da equação $2x^3 - 7x^2 + 6x - 8 = 0$, então $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}$ é igual a:

(A) $-\dfrac{7}{2}$ (B) $-\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{3}{8}$ (D) $\dfrac{3}{4}$ (E) $\dfrac{7}{2}$

147 (Cefet-PR) Sejam a, b e c raízes da equação $x^3 - 3x^2 + 9x - 2 = 0$. Então o valor de $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ é igual a:

(A) $\frac{69}{4}$ (B) $-\frac{48}{3}$ (C) $\frac{86}{3}$ (D) $-\frac{35}{4}$ (E) $\frac{59}{4}$

148 (ITA-SP) Considere as matrizes reais

$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, em que $a \neq 0$ e a, b e c formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q > 0$. Sejam λ_1, λ_2, e λ_3 as raízes da equação $\det(M - \lambda I) = 0$. Se $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = a$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7a$, então $a^2 + b^2 + c^2$ é igual a:

(A) $\frac{21}{8}$ (B) $\frac{91}{9}$ (C) $\frac{36}{9}$ (D) $\frac{21}{16}$ (E) $\frac{91}{36}$

149 (ITA-SP) Considere $a, b \in \mathbb{R}$ e a equação $2e^{3x} + ae^{2x} + 7e^x + b = 0$. Sabendo que as três raízes reais x_1, x_2, x_3 desta equação formam, nesta ordem, uma progressão aritmética cuja soma é igual a zero, então $a - b$ vale:

(A) 5 (B) –7 (C) –9 (D) –5 (E) 9

150 (Puccamp-SP) As raízes da equação $x^3 - 15x^2 + 71x + m = 0$, na qual m é um número real, são números ímpares e consecutivos. Nessas condições, o produto dessa equação é:

(A) 315 (B) 105 (C) 15 (D) 3 (E) –3

151 (PUC-SP) No universo $\mathbb{C}$, a equação

$\begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ -2 & x & 0 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = 2$ admite:

(A) três raízes racionais.

(B) duas raízes não reais.

(C) duas raízes irracionais.

(D) uma única raiz não inteira.

(E) uma única raiz positiva.

152 (Puccamp-SP) Sabe-se que a equação $2x^3 + x^2 - 6x - 3 = 0$ admite uma única raiz racional e não inteira. As demais raízes dessa equação são:

(A) irracionais e positivas.

(B) irracionais e de sinais contrários.

(C) inteiras e de sinais contrários.

(D) inteiras e positivas.

(E) não reais.

153 (UFPR) Calcule o valor de $\log_{10}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right)$, sendo a, b, c as raízes da equação $2x^3 - 30x^2 + 15x - 3 = 0$.

154 (Vunesp-SP) Os coeficientes do polinômio $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$ são números inteiros. Supondo que $f(x)$ tenha duas raízes racionais positivas distintas,

a) encontre todas as raízes desse polinômio;

b) determine os valores de a e b.

155 (Fuvest-SP) O polinômio $x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4m$ tem uma raiz igual a – 1.

a) Determine m.

b) Fatore o polinômio num produto de binômios de 1º grau.

156 (UFPR) Considere o número complexo $\alpha = \frac{1-i}{1+i}$.

a) Escreva a forma trigonométrica de α.

b) Resolva a equação $4x^4 + 4x^3 + x^2 + 4x - 3 = 0$, sabendo que α é uma das suas raízes.

157 (Mack-SP) As raízes da equação $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$, colocadas em ordem crescente, são os termos iniciais de uma progressão aritmética cuja soma dos 10 primeiros termos é:

(A) 80 (B) 90 (C) 100 (D) 110 (E) 120

158 (Cesgranrio-RJ) Se a, b e c são raízes da equação $x^3 - 10x^2 - 2x + 20 = 0$, então o valor da expressão $a^2bc + ab^2c$ é igual a:

(A) 400

(B) 200

(C) –100

(D) –200

(E) –400

159 (Fatec-SP) Foi apresentado a um exímio calculista, conhecido como o "homem que calculava", o sistema de equações

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{37}{30} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{1}{2} \\ x_1x_2x_3 = \frac{1}{15} \end{cases}$$

e ele rapidamente respondeu: "Uma solução do sistema é $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_3 = \frac{2}{5}$".

Em seguida perguntaram-lhe: qual a soma dos quadrados das raízes da equação $30x^3 - 37x^2 + 15x - 2 = 0$?
De pronto, ele respondeu corretamente.
A sua resposta foi:

(A) $\frac{7}{300}$ (B) $\frac{47}{450}$ (C) $\frac{101}{600}$ (D) $\frac{437}{750}$ (E) $\frac{469}{900}$

160 (Fuvest-SP)

a) Determine os números complexos z tais que $z+\bar{z}=4$ e $z\cdot\bar{z}=13$, onde $\bar{z}$ é o conjugado de z.

b) Resolva a equação $x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 19x + 10 = 0$, sabendo que o número complexo $z = 1 + 2i$ é uma das suas raízes.

161 (UEL-PR) Se -2 é uma das raízes da equação $x^3 + 4x^2 + x + k = 0$, onde $k \in \mathbb{R}$, o produto das outras duas raízes dessa equação é:

(A) -3 (B) -2 (C) 2 (D) 3 (E) 6

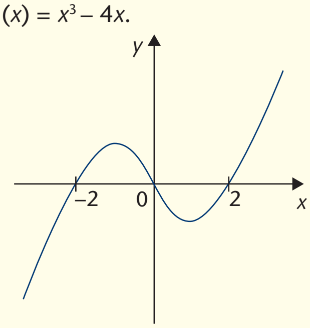
162 (PUC-SP) Dado o polinômio

$$f=\begin{vmatrix} x & x & x \\ x+1 & -2 & x-1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix}$$, pedem-se:

a) as raízes de f;

b) o quociente e o resto da divisão de f por $x^2 - 1$.

163 (Uerj) A figura abaixo representa o polinômio p definido por $p(x) = x^3 - 4x$.



a) Determine as raízes desse polinômio.

b) Substituindo-se, em $p(x)$, x por $x - 3$, obtém-se um novo polinômio definido por $y = p(x - 3)$.
Determine as raízes desse novo polinômio.

164 (Mack-SP) Na igualdade $[(x-2)^4 + 4(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 4(x-2) + 1] - x^4 = 0$, onde x é um número real, x^x vale:

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (E) 2

165 (UFPI) Assinale a alternativa que corresponde à equação cujas raízes são as recíprocas (inversas) das raízes da equação $5x^3 - x^2 - 85x + 17 = 0$.

(A) $x^3 - 5x^2 - 17x + 85 = 0$

(B) $5x^3 - 85x^2 - x + 17 = 0$

(C) $85x^3 - 5x^2 - 17x + 1 = 0$

(D) $17x^3 - 85x^2 - x + 5 = 0$

(E) $x^3 - 17x^2 - 5x + 85 = 0$

166 (UFV-MG) O polinômio $p(x) = x^3 - 8x^2 + 22x - 21$ possui uma única raiz real igual a 3. Portanto a equação $(5x-2)^3 - 8(5x-2)^2 + 22(5x-2) - 21 = 0$ tem como solução real o número:

(A) 0 (B) 1 (C) 10 (D) $\frac{2}{5}$ (E) 2

167 (Unifor-CE) A equação $x^3 + (a-2)x^2 + (1-2a)x + a = 0$, $a \in \mathbb{R}$, admite uma raiz dupla igual a 1 se, e somente se:

(A) $a = -1$

(B) $a < 0$

(C) $a > 2$

(D) $a \neq -1$

(E) $-2 < a < 0$

168 (UEL-PR) Sabe-se que a equação $2x^6 + 11x^5 + 20x^4 + 15x^3 + 10x^2 + 4x - 8 = 0$ admite a raiz -2 com multiplicidade 3. Sobre as demais raízes dessa equação é correto afirmar que:

(A) são números racionais.

(B) são números irracionais.

(C) são números não reais.

(D) duas são não reais e uma é racional.

(E) duas são irracionais e uma é racional.

169 (ITA-SP) Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que a equação $2x^3 + 7x^2 + 4x + k = 0$ possua uma raiz dupla e inteira x_1 e uma raiz x_2, distinta de x_1. Então, $(k + x_1)x_2$ é igual a:

(A) -6 (B) -3 (C) 1 (D) 2 (E) 8

170 (Cefet-MG) Se $\frac{x+3}{x^2-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$, então A e B são números:

(A) iguais.

(B) opostos.

(C) inteiros.

(D) negativos.

(E) fracionários.

171 (UFMG) Sejam A e B números reais que satisfazem à igualdade da expressão $\frac{1}{[x+2][2x+1]} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x+1}$ para todo valor de x que não anula nenhum dos denominadores. A soma A + B é:

(A) –1 (B) $-\frac{1}{3}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{3}{2}$

172 (ITA-SP) Determine os valores reais de a e b, para os quais as equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + bx + 12 = 0$ têm duas raízes comuns.

173 (ITA-SP) A equação polinomial $p(x) = 0$ de coeficientes reais e grau 6 é recíproca de 2ª espécie e admite i como raiz. Se $p(2) = -\frac{105}{8}$ e $p(-2) = \frac{255}{8}$, então a soma de todas as raízes de $p(x)$ é igual a:

(A) 10 (B) 8 (C) 6 (D) 2 (E) 1

174 (FEI-SP) Resolva a equação cúbica $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$.

175 (ITA-SP) Quais são as raízes inteiras da equação $x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0$?

APÊNDICE

INDUÇÃO FINITA


NatUlrich/Shutterstock

Se uma fila de dominós é colocada de maneira que a queda de um dominó certamente implique a queda do próximo, então basta que o primeiro dominó seja derrubado para que todos eles caiam. A formulação matemática deste princípio é o chamado Princípio da Indução Finita que, quando usado corretamente, é uma ferramenta eficaz para demonstrar propriedades que se apliquem aos números naturais.

Apêndice: Indução finita

Muitas vezes certas proposições nos parecem verdadeiras e somos levados a aceitá-las sem uma demonstração rigorosa. Tal fato pode nos levar a erros graves. Em geral essas proposições estão associadas a números naturais e temos a tendência de experimentar alguns valores e generalizar sem uma comprovação rigorosa. A intuição é importante nas pesquisas científicas mas exige técnicas de demonstração.

A indução é o método de comparar uma proposição geral a partir de casos particulares da mesma. Ele se enuncia:

Princípio da indução finita

DEFINIÇÃO
Princípio da indução finita.

Se uma proposição associada aos números naturais:
1) é verdadeira para $n = 1$; e
2) sempre que for verdadeira para um certo natural k, for também verdadeira para $k + 1$;
então a proposição será verdadeira para todo n natural.

Simbolicamente temos:
Seja $\mathrm{P}(n)$ uma proposição associada a $n \in \mathbb{N}$

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{P}(1) \text{ é verdadeira} \\ \forall k,\ \mathrm{P}(k) \Rightarrow \mathrm{P}(k+1)\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{P}(n) \text{ é verdadeira } \forall n \in \mathbb{N}$$

A implicação $\forall k,\ \mathrm{P}(k) \Rightarrow \mathrm{P}(k+1)$ é denominada passo de indução.

Exemplos:

i) Imaginemos uma fila infinita de bolas numeradas 1, 2, 3, ... da esquerda para a direita. Suponhamos que:
- a bola de número 1 é verde;
- sempre que uma bola qualquer é verde, a bola à sua direita tem de ser verde também, isto é, se a bola k é verde, então a bola $k + 1$ é verde (passo de indução).

O princípio da indução finita diz que, neste caso, todas as bolas são verdes.
Intuitivamente, o raciocínio lógico tem a seguinte forma:
- a bola 1 é verde.

Pelo passo de indução:
- como a bola 1 é verde, a bola 2 tem de ser verde.

Novamente pelo passo de indução:
- como a bola 2 é verde, a bola 3 tem de ser verde.

E assim sucessivamente.

ii) Mostremos que a soma dos n primeiros números naturais ímpares é n^2.
Em primeiro lugar, para entender o problema, vejamos se esta propriedade é verdadeira para pequenos valores de n:

$n = 1$: $S_1 = 1 = 1^2$ ✓
$n = 2$: $S_2 = 1 + 3 = 2^2$ ✓
$n = 3$: $S_3 = 1 + 3 + 5 = 3^2$ ✓
$n = 4$: $S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ ✓

Tudo indica que $S_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n – 1) = n^2$, mas os exemplos acima <u>não demonstram</u> tal fato para todo n. A demonstração vem da indução finita. Assim, seja $p(n)$ a frase "$1 + 3 + 5 + ... + (2n – 1) = n^2$", seria $p(n)$ verdadeira para todo n natural?

• **p(1) é verdadeira?**
Basta notar que $p(1)$: $1 = 1^2$ é verdadeira!

• **Passo de indução:**
Agora queremos mostrar que $p(k) \Rightarrow p(k + 1)$, isto é, **se** a propriedade vale para um certo k, valerá para o próximo $(k + 1)$.

De fato, **se** $p(k)$ vale, temos
$1 + 3 + 5 + ... + (2k – 1) = k^2$
Somando $2k + 1$ a ambos os lados da equação:
$1 + 3 + 5 + ... + (2k – 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1$
O lado esquerdo é S_{k+1} [pois $2(k + 1) – 1 = 2k + 1$]; o lado direito é $(k + 1)^2$. Em suma, vimos que:
$S_k = k^2 \Rightarrow S_{k+1} = (k + 1)^2$
ou seja,
$p(k) \Rightarrow p(k + 1)$

NOTA
O passo de indução, sozinho, não mostra $p(k)$ nem $p(k + 1)$. Ele apenas mostra que $p(k)$ implica $p(k + 1)$, isto é, que se $p(k)$ for verdadeira, então $p(k + 1)$ também o será.

• **Juntando tudo:**
O passo de indução $[p(k) \Rightarrow p(k + 1)]$ aliado ao fato de $p(1)$ ser verdadeira, mostram, pelo princípio da indução finita, que $p(n)$ é verdadeira para todo n natural.

NOTA
Esta igualdade também se prova usando a soma dos termos de uma PA.

iii) Usemos o princípio da indução finita para mostrar que, para qualquer n natural (não nulo), tem-se:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

<u>Demonstração:</u>
• Vale para $n = 1$: de fato, para $n = 1$, temos:

$$1=\frac{1(1+1)}{2}$$

que é claramente verdadeira.

• **Passo de indução:**
Se vale para $n = k$, vale para $n = k + 1$. De fato, suponha que vale:

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Então temos:

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=\frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

isto é, a propriedade vale para $n = k + 1$.
Por indução, concluímos que, para todo n natural (não nulo), temos:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

iv) Seriam os números do tipo $P(n) = n^2 + n + 41$ primos para todo $n \in \mathbb{N}$?
Experimentando valores pequenos de n:
$n = 1 \Rightarrow P(1) = 43$ é primo
$n = 2 \Rightarrow P(2) = 47$ é primo
$n = 3 \Rightarrow P(3) = 53$ é primo
$n = 4 \Rightarrow P(4) = 61$ é primo
$n = 5 \Rightarrow P(5) = 71$ é primo

De fato, pode-se observar que $P(n)$ é primo para $n = 1, 2, 3, ..., 39$. Entretanto, **não é verdade** que $P(n)$ é primo para todo n natural! De fato:
$n=40 \Rightarrow n^2+n+41=40^2+40+41=40(40+1)+41=40\cdot 41+41=41\cdot 41=$
$=1\,681$ **não é primo**.
Este exemplo mostra que ilustrar uma propriedade com vários casos **não comprova a sua veracidade**.

v) Outro exemplo clássico são os números de Fermat. Ele acreditava que os números $F(n)=2^{2^n}+1$ eram primos para todo $n \in \mathbb{N}$.
Temos: $F(0) = 3$, $F(1) = 5$, $F(2) = 17$, $F(3) = 257$, $F(4) = 65\,537$. Entretanto, Euler provou que $F(5) = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$, o que mostra que os números de Fermat não são primos para todo $n \in \mathbb{N}$.

vi) Seja P_n a proposição $2^n > 2^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Não é difícil mostrar que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.
De fato:

$$\underbrace{2^n > 2^{n+1}}_{P_n} \Rightarrow 2\cdot 2^n > 2\cdot 2^{n+1} \Rightarrow \underbrace{2^{n+1} > 2^{n+2}}_{P_{n+1}}$$

No entanto, a proposição P_n é **falsa** para todo n. Basta ver que P_1: $2^1 > 2^2$ é falsa.
Este exemplo mostra que não basta mostrar o passo de indução – é essencial que a proposição seja verdadeira para um primeiro valor de n.

Exercícios resolvidos:

1) Estabeleça e demonstre uma fórmula para a soma:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Solução:

Calculamos: $S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$\vdots$

Tudo indica que $S_n = \frac{n}{n+1}$.

Já vimos que $S_1 = \frac{1}{2}$. O passo de indução é:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \Rightarrow S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$$

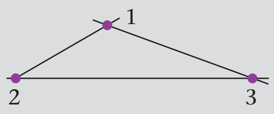
o que completa a demonstração de que $S_n = \frac{n}{n+1}$ para todo n natural.

2) Calcule a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados.

Solução:

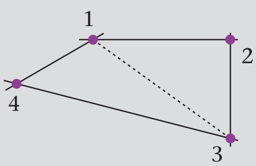
Comecemos com o triângulo:

$S_3 = 180^\circ$



Para o quadrilátero temos:

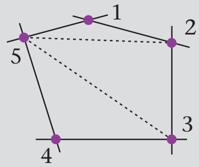
$S_4 = 2\cdot 180^\circ$



Pois o quadrilátero se decompõe em 2 triângulos.

Para o pentágono temos:

$S_5 = 3\cdot 180^\circ$

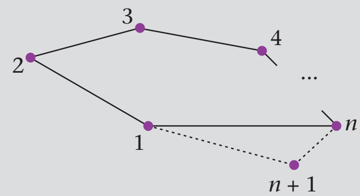


Pois o pentágono se decompõe em 3 triângulos.

NOTA
Neste caso, mostramos que a propriedade $S_n = 180^\circ\,(n-2)$ vale para $n = 3$ e, se vale para $n = k$, então vale para $n = k + 1$. Assim, a proposição será verdadeira para $n \geq 3$ (ela não faz sentido para $n = 1, 2$).

Podemos fazer a hipótese de indução:

$S_n = (n-2)\cdot 180^\circ$



Colocando mais um vértice no polígono, a soma dos ângulos internos aumenta da soma dos ângulos internos de um triângulo, logo:

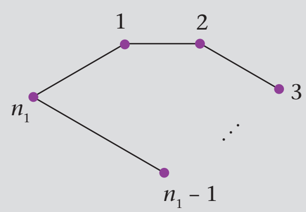
$$S_{n+1} = S_n + S_3 = (n-2)180^\circ + 180^\circ = (n-2+1)180^\circ = [(n+1)-2]180^\circ$$

o que completa a indução.

3) Mostre que em toda superfície poliédrica convexa aberta com A arestas, V vértices e F faces, V + F = A + 1.

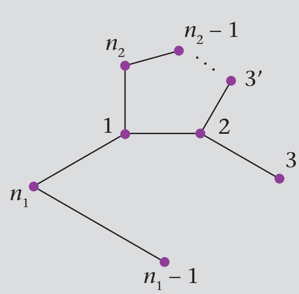
<u>Solução:</u>

Consideremos uma face com n_1 lados e n_1 vértices.



Temos:
$F_1 = 1 \quad V_1 + F_1 = A_1 + 1$
$V_1 = n_1$
$A_1 = n_1$

Coloquemos agora uma nova face com a aresta comum (1, 2), tendo n_2 lados e n_2 vértices.

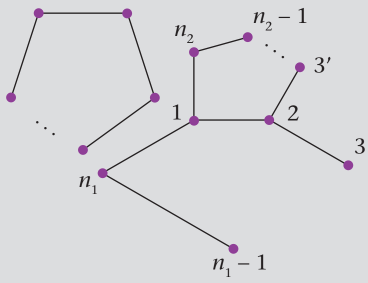


O número de vértices aumenta de $n_2 - 2$ já que os vértices 1 e 2 já foram contados. O número de arestas aumenta de $n_2 - 1$ uma vez que a aresta (1, 2) foi contada uma vez. Assim, temos:

$F_2 = 2$
$V_2 = V_1 + n_2 - 2 = n_1 + n_2 - 2$
$A_2 = A_1 + n_2 - 1 = n_1 + n_2 - 1$

Logo: $V_2 + F_2 = n_1 + n_2 \Rightarrow V_2 + F_2 = A_2 + 1$

Suponhamos a superfície poliédrica aberta com $F_p = p$ faces e façamos a hipótese de indução $V_p + F_p = A_p + 1$.



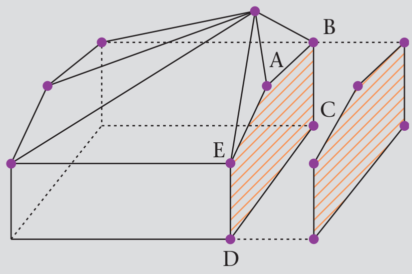
Coloquemos mais uma face com n vértices sendo k vértices em comum com os vértices existentes. Temos $F_{p+1} = F_p + 1$.
Como a nova face tem n vértices e k deles são comuns à superfície, o número de vértices aumenta de $n - k$. Temos então $V_{p+1} = V_p + n - k$.
Como k vértices consecutivos determinam $k - 1$ arestas que já estão contadas, o número de arestas aumenta de $n - (k - 1)$, e a nova superfície passa a ter $A_{p+1} = A_p + n - k + 1$.
Temos então:
$V_{p+1} + F_{p+1} = F_p + 1 + V_p + n - k = V_p + F_p + n - k + 1$

Substituindo a hipótese de indução $V_p + F_p = A_p + 1$ vem:
$V_{p+1} + F_{p+1} = A_p + 1 + n - k + 1$

Mas $A_p + n - k + 1 = A_{p+1}$, logo $V_{p+1} + F_{p+1} = A_{p+1} + 1$, o que completa a indução. De um modo geral, $V + F = A + 1$.

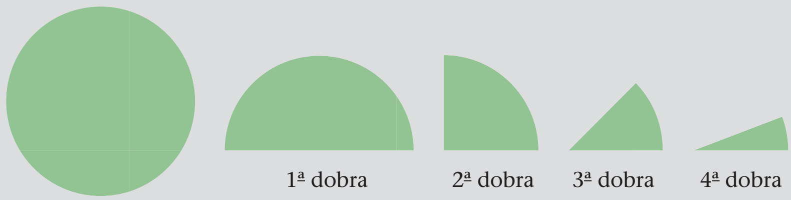
Teorema de Euler
Em todo poliedro convexo $V + F = A + 2$.

Demonstração:

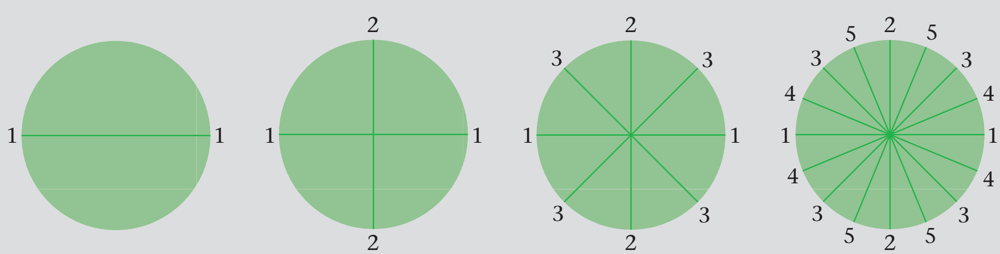


O exemplo anterior vale para uma superfície poliédrica aberta faltando apenas uma face ABCDE para fechá-la.
Quando colocamos esta última face, os vértices e as arestas não aumentam, só aumentando uma face que é a do fechamento do poliedro. Então:
$V + F = A + 1 + 1 \Rightarrow V + F = A + 2$

4) (Uerj) João recorta um círculo de papel com 10 cm de raio. Em seguida, dobra esse recorte ao meio várias vezes, conforme ilustrado abaixo.



Depois de fazer diversas dobras, abre o papel e coloca o número 1 nas duas extremidades da primeira dobra. Sucessivamente, no meio de cada um dos arcos formados pelas dobras anteriores, João escreve a soma dos números que estão nas extremidades de cada arco.
As figuras a seguir ilustram as quatro etapas iniciais desse processo.



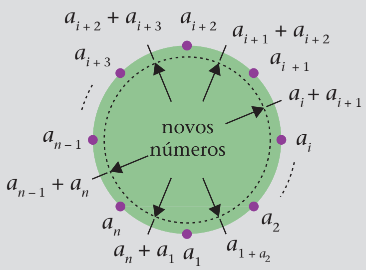
João continuou o processo de dobradura, escrevendo os números, conforme a descrição acima, até concluir dez etapas.
Calcule a soma de todos os números que estarão escritos na etapa 10.

<u>Solução:</u>

Observemos as somas das etapas acima.
Temos:
$S_1 = 1 + 1 = 2$
$S_2 = 1 + 1 + 2 + 2 = 6 = S_1 + 4$
$S_3 = 6 + 6 + 6 = 18 = S_2 + 12$
$S_4 = 18 + 18 + 18 = 54 = S_3 + 36$
$\vdots$

Estas somas sugerem estar em progressão geométrica.

Completamos a indução.
Consideremos a soma dos números da etapa n:
$S_n = a_1 + ... + a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + ... + a_n$



Para obtermos a soma dos números da etapa $n + 1$, devemos somar a esta soma S_n N números que serão colocados entre cada par de números consecutivos de S_n e valem a soma do anterior com o posterior.
Ao somarmos à etapa n esses novos números, a soma S_n sofrerá um aumento em que cada termo de S_n contribuirá com o seu dobro. Em S_n temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Em S_{n+1}, teremos, somando à S_n a soma do anterior com o posterior de cada termo:

$$S_{n+1} = S_n + [(\underbrace{a_1 + a_2) + \ldots + (a_i + \underbrace{a_{i+1}) + (a_{i+1}}_{2\text{ vezes}} + \underbrace{a_{i+2}) + (a_{i+2}}_{2\text{ vezes}} + a_{i+3}) + \ldots + (a_{n-1} + \underbrace{a_n) + (a_n}_{2\text{ vezes}} + a_1}_{2\text{ vezes}})]$$

então, como temos N parênteses,

$$S_{n+1} = S_n + [2a_1 + \ldots + 2a_{i+1} + 2a_{i+2} + \ldots + 2a_{n-1} + 2a_n]$$
$S_{n+1} = S_n + 2S_n = 3S_n$, o que completa a indução.

Assim, S_1, S_2, S_3, ... formam uma progressão geométrica de razão 3, logo $S_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$.

Como queremos S_{10}, $S_{10} = 2 \cdot 3^{10-1} = 2 \cdot 3^9 = 39\,366$.

5) Sendo f uma função tal que $f(0) = 1$, $f(1) = a$ e $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, calcule $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Solução:

Temos:
$f(n+1) = f(n) \cdot f(1)$, logo
$f(2) = f(1+1) = f(1) \cdot f(1) = a \cdot a = a^2$
$f(3) = f(2+1) = f(2) \cdot f(1) = a^2 \cdot a = a^3$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Façamos a hipótese de indução $f(n) = a^n$. Pelo enunciado, esta hipótese vale para $n = 0$ e $n = 1$.
Completando o passo de indução:
$f(n+1) = f(n) \cdot f(1) = a^n \cdot a = a^{n+1}$, o que completa a demonstração.

NOTA
Observe que $N = 2^n$, mas este fato não é necessário para resolver o problema.

6) Prove a desigualdade de Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx$ para $x > -1$ e n natural positivo.

Solução:

Note que para $n = 1$ temos $1+x \geq 1+x$, que é válida.
Considerando a hipótese de indução $(1+x)^n \geq 1+nx$, multiplicamos ambos os membros desta desigualdade por $1 + x > 0$.

$(1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)\,(1 + x)$

$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + nx + x + nx^2$

$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$, pois $nx^2 \geq 0$, o que completa a indução.

7) Mostre que os números do tipo $x_n = 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ são multiplos de 7, qualquer que seja $n \geq 0$.

NOTA
De acordo com as condições da situação proposta podemos começar verificando se a proposição é verdadeira para $n = 0$ em vez de $n = 1$.

Solução:

Façamos $n = 0$.
$x_0 = 2^{0+2} + 3^{2\cdot 0+1} = 4 + 3 = 7$ é verdadeira para $n = 0$.

Calculemos agora x_{n+1}:

$x_{n+1} = 2^{n+1+2} + 3^{2(n+1)+1} = 2^{n+3} + 3^{2n+3}$

Como a hipótese de indução é que:
$x_n = 2^{n+2} + 3^{2n+1} = 7k,\ k \in \mathbb{N}$,

fazemos a diferença:

$x_{n+1} - x_n = 2^{n+3} + 3^{2n+3} - 2^{n+2} + 3^{2n+1}$

$x_{n+1} - x_n = 2^{n+2}(2-1) + 3^{2n+1}(3^2 - 1) = 2^{n+2} + 3^{2n+1}\cdot 8$

$x_{n+1} - x_n = 2^{n+2} + 3^{2n+1}\cdot(1+7) = 2^{n+2} + 3^{2n+1} + 7\cdot 3^{2n+1}$

$x_{n+1} - x_n = x_n + 7\cdot 3^{2n+1} \;\Rightarrow\; x_{n+1} = 2x_n + 7\cdot 3^{2n+1}$

Como por hipótese x_n é multiplo de 7, vem:
$x_{n+1} = 2\cdot 7k + 7\cdot 3^{2n+1} = 7\cdot(2k + 3^{2n+1}) = 7\cdot k'$

Em suma, sendo P_n: "x_n é divisível por 7", mostramos que P_0 é verdadeira, e que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Portanto, P_n é verdadeira para todo $n \geq 0$, por indução.

8) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, calcule A^n, sendo $a \neq 0$.

Solução:

Façamos: $A^1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1+a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+a+a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}$$

A hipótese de indução será: $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1+a+a^2+\ldots+a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$

Completando a indução:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1+a+\ldots+a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+a+\ldots+a^{n-1}+a^n \\ 0 & a^{n+1} \end{bmatrix}$$

NOTA
A fórmula demonstrada

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1+a+\ldots+a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$$

vale também para $n = 0$, pois $A^0 = I$, por definição.

9) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule A^n.

Solução:

Em primeiro lugar, vejamos se há algum padrão:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = 3A \cdot A = 3A^2 = 3 \cdot 3A = 3^2 A$$

Este resultado induz a $A^n = 3^{n-1} \cdot A$. Vamos agora demonstrar este fato.
Para $n = 1$, temos $A^1 = 3^{1-1} \cdot A = A$.

• Passo de indução:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = 3^{n-1} A \cdot A = 3^{n-1} A^2 = 3^{n-1} \cdot 3A = 3^n A$$

Assim, a fórmula $A^n = 3^{n-1} \cdot A$ vale para todo n natural positivo, isto é:

$$A^n = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}$$

10) Sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, calcule A^n.

Solução:

Chamemos:

$$A_1 = A^1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 7 \\ -14 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 15 & 7 \\ -14 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 15 \\ -30 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Fazemos as diferenças:

$$A_2 - A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 - A_2 = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 - A_3 = \begin{bmatrix} 16 & 8 \\ -16 & -8 \end{bmatrix} = 8 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$A_n - A_{n-1} = \qquad\qquad = 2^{n-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Somando membro a membro:

$$A_n - A_1 = (2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1}) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = (2^n - 2) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_n = A_1 + (2^n - 2) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2^{n+1} + 4 & 2^n - 2 \\ -2^{n+1} + 4 & -2^n + 2 \end{bmatrix}$$

$$A_n = \begin{bmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ -2^{n+1} + 2 & -2^n + 2 \end{bmatrix}$$

Esta é a nossa conjectura. Vamos agora demonstrá-la por indução.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2^2 - 1 & 2^1 - 1 \\ -2^2 + 2 & -2^1 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

• **Passo de indução:**

$$A_{n+1} = A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{bmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{n+1} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2^{n+1}-3-2^{n+1}+2 & 2^{n+1}-1 \\ -3\cdot 2^{n+1}+6+2^{n+1}-4 & -2^{n+1}+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n+2}-1 & 2^{n+1}-1 \\ -2^{n+2}+2 & -2^{n+1}+2 \end{bmatrix}$$

o que completa a indução.

11) Mostre que o determinante:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x^n & a & ax & \dots & ax^{n-2} & ax^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & a & \dots & ax^{n-3} & ax^{n-2} \\ x^{n-2} & 0 & 1 & \dots & ax^{n-4} & ax^{n-3} \\ \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ x & 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-a)^n$$

<u>Solução:</u>

Vejamos se a propriedade é válida para $n = 1$.

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x - a = (x-a)^1$, logo P(1) é verdadeira.

Calculamos:

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} x^{n+1} & a & ax & \dots & ax^{n-1} & ax^n \\ x^n & 1 & a & \dots & ax^{n-2} & ax^{n-1} \\ x^{n-1} & 0 & 1 & \dots & ax^{n-3} & ax^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Somando à primeira coluna a última multiplicada por (–1), vem:

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} x^{n+1}-ax^n & a & \dots & ax^n \\ x^n - ax^{n-1} & 1 & \dots & ax^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x-a & 0 & \dots & a \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Resolvendo pela última linha, vem:

$$\Delta_{n+1} = 1 \cdot (-1)^{2(n+1)} \cdot \begin{vmatrix} x^n(x-a) & a & \dots & ax^{n-1} \\ x^{n-1}(x-a) & 1 & \dots & ax^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x-a & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{n+1} = (x-a) \cdot \begin{vmatrix} x^n & a & \dots & ax^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & \dots & ax^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (x-a)\Delta_n = (x-a)(x-a)^n = (x-a)^{n+1}$$

o que completa a indução.

Determinante de Vandermonde

DEFINIÇÃO
Determinante de Vandermonde.

Um determinante da forma:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

é chamado de **determinante de potências** ou **determinante de Vandermonde**.

Teorema

NOTA
Em particular, $n = 0 \Leftrightarrow x_i = x_j$ para algum par $i \neq j$.

NOTA
O símbolo Π é chamado de **produtório** e indica o produto de várias parcelas.

$$\begin{aligned}\Delta_n = (x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_4 - x_1) \dots (x_n - x_1) \cdot \\ \cdot (x_3 - x_2) \cdot (x_4 - x_2) \dots (x_n - x_2) \cdot \\ \cdot (x_4 - x_3) \dots (x_n - x_3) \cdot \\ \dots (x_n - x_{n-1})\end{aligned}$$

Isto é:

$$\Delta_n = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

<u>Demonstração</u>:

Para $n = 2$, vê-se diretamente que:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{i>j}(x_i - x_j) \quad (\text{com } i, j \in \{1, 2\})$$

Agora mostremos o passo de indução. Para tanto, vamos colocar Δ_{n+1} em função de Δ_n:

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_n & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & & x_n^2 & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & & x_n^n & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Somamos a cada linha a anterior vezes $\left(-x_{n+1}\right)$:

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 - x_{n+1} & x_2 - x_{n+1} & \dots & x_n - x_{n+1} & 0 \\ x_1^2 - x_1 x_{n+1} & x_2^2 - x_2 x_{n+1} & \dots & x_n^2 - x_n x_{n+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^n - x_1^{n-1} x_{n+1} & x_2^n - x_2^{n-1} x_{n+1} & \dots & x_n^n - x_n^{n-1} x_{n+1} & 0 \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo pela última coluna:

$$\Delta_{n+1} = (-1)^{n+1+1} \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x_{n+1} & x_2 - x_{n+1} & \dots & x_n - x_{n+1} \\ x_1(x_1 x_{n+1}) & x_2(x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_n(x_n - x_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1}(x_1 x_{n+1}) & x_2^{n-1}(x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) \end{vmatrix}$$

Pondo em evidência os fatores $x_i - x_{n+1}$ de cada coluna:

$$\Delta_{n+1} = (-1)^n (x_1 - x_{n+1})(x_2 - x_{n+1}) \dots (x_n - x_{n+1}) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}}_{\Delta_n}$$

Multiplicando cada fator do tipo $x_i - x_{n+1}$ por -1:

$$\Delta_{n+1} = (-1)^n \cdot (-1)^n \cdot (x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \dots (x_{n+1} - x_n)\Delta_n =$$

$$= (x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \dots (x_{n+1} - x_n)\Delta_n$$

Supondo, por hipótese de indução, que $\Delta_n = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$ para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, segue imediatamente que:

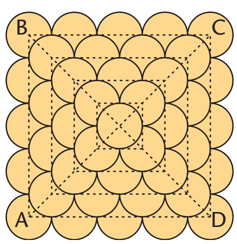
$$\Delta_{n+1} = \prod_{i>j}(x_i - x_j) \ (i, j \in \{1, 2, \dots, n+1\})$$

Assim, está demonstrada, por indução, a fórmula de Vandermonde.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Seja f uma função tal que $f(1) = 2$ e $f(x + 1) = f(x) - 3$, para todo valor real de x. Calcule $f(50)$.

2 Considere-se uma pilha quadrada de balas. Esta pilha terá na base um quadrado tendo, por exemplo, cinco balas por lado; este quadrado terá por cima outro, tendo por lado quatro balas; este terceiro quadrado estará coberto com outro, tendo três balas por lado, e assim por diante, de modo que a penúltima camada será formada por um quadrado com duas balas por lado, e a pilha terminar-se-á por uma única bala.
A soma das balas de uma pilha quadrada tendo n balas por lado será pois a soma $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots + n^2$ dos quadrados dos n primeiros números.
Calcule esta soma.



3 Prove que:

$$S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

4 Prove que $3n^2 - n > 23$, para todo $n > 2$.

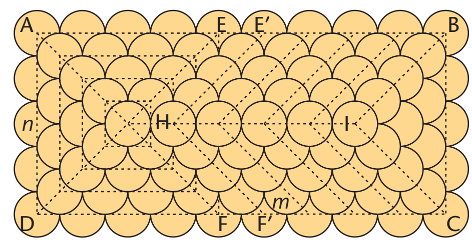
5 Prove que $2^n > n^2$, para todo natural $n > 4$.

6 Prove que $4n^2 - 3n > 2$, para $n > 1$.

7 Prove que $2^n < n!$, para $n \geq 4$.

8 Prove que $2^n - 1$ é multiplo de 3, para todo número natural n par.

9 Uma pilha retangular é formada do seguinte modo: a base é um retângulo de m balas por n, sendo m maior que n; sobre este retângulo, assenta outro tendo $m - 1$ balas por $n - 1$; em cima deste último retângulo assenta um terceiro retângulo tendo $m - 2$ balas por $n - 2$, e assim por diante. O cimo da pilha é formado por uma linha de $m - (n - 1)$ balas.



Uma tal pilha pode ser decomposta em uma pilha quadrada ADFE, tendo n balas por lado e uma pilha E'BICF'H formada por $m - n$ camadas oblíquas tais como BIC, cada uma das quais tem $1 + 2 + 3 + \ldots +$ $+ n$ balas.
A pilha quadrada tendo n balas por lado contém um número de balas indicado por:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Com base nesses dados, calcule a soma total das balas dessa pilha retangular.

10 Demonstre que:

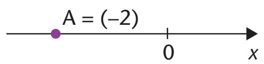
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \ldots + \frac{1}{200}$$

GABARITO

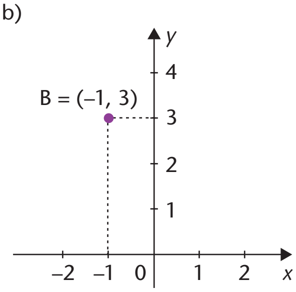
Capítulo 1
VETORES

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 27

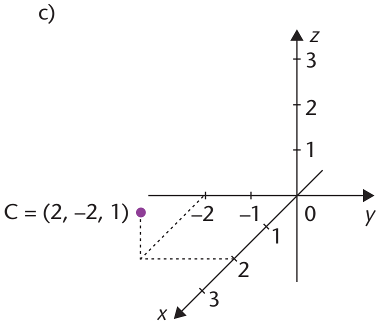
1 a)



b)



c)



2 a) (7), (1)
b) (–2, –3), (3, –2)
c) (1, 2, 2), (1, –2, –2)

3 a) $\overrightarrow{AB} = (5)$
b) $\overrightarrow{AB} = (-4, -3)$
c) $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 2)$

4 a) B = (4)
b) B = (2, 3)
c) B = (3, –1, 3)

5 a) M = (–1)
b) M = (2, 4)
c) M = (3, 2, –1)

6 a) A = (–5), B = (4)
b) A = (–4, 4), B = (5, 1)
c) A = (4, 0, 3), B = (–2, 3, –3)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 35

1 Sim.

2 a) B = (2, 3)

b) B = (5, –1, 3)

3 a) A = (–4, 4), B = (5, 1)

b) A = (4, 0, 3), B = (–2, 3, –3)

4 D = (2, 1)

5 (–5, –1, –1), (–3, –2, 0)

6 (1, –1, 4), (2, –3, 5)

7 (2, 0, 4), (2, 2, –4), (0, 0, 0)

8 (–2, –3)

9 (5, 2), (–1, 1)

10 Quadrado.

11 C = (2, 0, –2), D = (2, 1, –1)

12 C = (–4, 1), D = (–1, –3)

13 (–1, –1), (5, 5)

14 B = (3, 0), C = (2, 2), D = (4, 3)

15 B = (–3, 3), C = (0, 2) ou B = (–5, 5), C = (0, 8)

16 B = (–1, 1), C = (3, –2), D = (6, 2)

17 (–3, 4), (–5, –4)

18 (–6, 9), (2, 7)

19 Demonstração.

20 $\|\overrightarrow{AM}\| = 7$

21 (8, 0)

22 Demonstração.

23 (1, 1, 1)

24 M = (6, 0) ou M = (–2, 0)

25 Demonstração.

26 $k = -1$

27 C = (4, 4) ou C = (1, 1)

28 P = (1, 1, 2)

29 a) $\|\overrightarrow{MJ}\| = \sqrt{130}$

b) $\left(0, \frac{8}{9}\right)$

30 (–2, –1) e (1, 2)

31 $x = y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{-2}$

32 (0, –2) e (0, 2)

33 $(-1, \sqrt{2})$ ou $(-1, -\sqrt{2})$

34 $x = y = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 53

1 a) $\sqrt{2}$
b) 1
c) $\sqrt{10}$
d) $\sqrt{2}$

2 $\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{a}}{2} + \vec{b}$, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\vec{a} + \vec{b}$,

$\overrightarrow{MJ} = \frac{\vec{a}}{2} + \frac{5}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{JN} = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

3 a) $\vec{c} - \vec{d} + \vec{a} - \vec{b}$

b) $\vec{g} + \vec{f} - \vec{e} + \vec{d} + \vec{c} + \vec{b} - \vec{a}$

4 $\sqrt{130}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 67

1 $\left(\frac{8}{5}, -\frac{16}{5}\right)$

2 C = (15, –8)

3 M = (19, –2)

4 (2, –1) e (6, 3)

5 C = (–8, 0) e D = (0, 6)

6 $x = -3$, $y = 10$

7 $\left(\frac{5}{2}, -2\right)$

8 G = (2, 2)

9 A = (–1, 0, –1) ou $A = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

10 a) Sim.
b) Não.

11 $a = 5$

12 a) $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$
b) $\left(-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right)$

13 $\frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = -2$, P = (0, 2) e
Q = (–16, –10)

14 $C = \left(\frac{40}{9}, \frac{80}{9}, \frac{10}{9}\right)$ ou
$C = \left(-\frac{40}{9}, -\frac{80}{9}, -\frac{10}{9}\right)$

15 $x + y = 4$

16 a) t qualquer
b) nenhum

17 $t = 9$

18 (3, 6, –6)

19 $x = 0$

20 $A = \left(8, \frac{10}{3}\right)$

21 G = (1, 2, 3)

22 a) P = (2, 6)
b) $P = \left(\frac{14}{5}, 6\right)$ e $Q = \left(8, \frac{28}{9}\right)$

23 $x = 4$

24 A = (8, 8), B = (12, 4) e C = (8, 0) ou
A = (–8, –8), B = (–12, –4) e C = (–8, 0)

25 $a = -8$ e G = (–1, 1, 3)

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 69

1 A

2 E

3 a) D = (–2, –5)
b) (3, 1)
c) $2\sqrt{5}$ e $2\sqrt{61}$

4 C

5 D

6 $(-3, 4\sqrt{3})$

7 D

8 C

9 B(8, 0), C(11, 4), D(8, 8) e E(3, 8)

10 A

11 $P = (9\sqrt{3}, 9)$

12 B

13 13

14 (3, 7), (–1, –3) e (3, 1)

15 A

16 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

17 a) 130 km
b) $(130°, 30° + \text{arctg}\ \frac{5}{12})$

18 $8 + 4\sqrt{3}$

19 50 km/h

20 P = (3, 5, 3) e AP = 7

21 100 km/h

22 a) $\vec{x} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d} + \vec{e} + \vec{f}$
b) $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} + \vec{g}$

23 $k = 4$

24 O vento sopra de 15° leste do sul.

25 (–3, –1, –10), (–6, 5, –13), (1, 3, 4) e (4, –3, –3)

26 $x = -3$, $y = 10$

27 D ∈ {(–3, 3), (0, –5), (5, 1)}

28 G = (2, 3)

29 C = (15, –8)

30 ∅

Capítulo 2
PRODUTOS DE VETORES

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 91

1 a) 1
b) 0
c) ab

2 a) 13
b) 13
c) 0
d) –12
e) 6
f) 0

3 A(8, 8), B(12, 4), C(8, 0) e D(0, 0)

4 a) –9
b) –705

5 a) $x = 1$ e $x = 4$
b) Não existe x.
c) $x \in]-2, 2[$
d) $x \in \mathbb{R} - [1, 5]$

6 $k = -1$

7 a) 60°
b) 45°
c) 45°
d) 120°

8 $a = -1$ ou $a = \frac{13}{5}$

9 a) 10; (6, –8)
b) 6; (2, –4, 4)

10 a) 3
b) 3

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 106

1 a) 3
b) 6
c) $2\sqrt{5}$

2 (5, –1, 3); $\sqrt{35}$

3 3

4 $\pm\frac{1}{3}$ (1, 2, –2)

5 3

6 (2, –2, –3)

7 3; 5

8 1

9 3

10 (26, 1, 11)

11 $\frac{2a\sqrt{5}}{3}$; $S_{EBM} = a^2\sqrt{5}$

12 $18\sqrt{2}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 112

1 20

2 9

3 $\frac{37}{2}$

4 17

5 $m = 3$

6 $P = \left(\frac{9}{7}, 0\right)$

7 Opostos.

8 P = (–20, –20) ou P = (–8, –8)

9 $m = \frac{3}{4}$

10 P = (2, 4)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 116

1 3

2 $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

3 1

4 $2\sqrt{2}$; $\sqrt{22}$; (7, 15, –2)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 130

1 $-5; \frac{5}{6}$

2 D = (0, –7, 0) ou D = (0, 8, 0)

3 $a = 2$ ou $a = -3$

4 2

5 $a = 4$

6 Demonstração.

7 1

8 $t = \frac{3\pi}{4}$ ou $t = \frac{7\pi}{4}$

9 $a = \pm 10$

10 a) (0, 1, 0)
b) 4

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 138

1 a) $\vec{v_1} + \vec{v_2} - 2\vec{v_3} = 0$

b) $37\vec{v_1} + 30\vec{v_2} + \vec{v_3} - 85\vec{v_4} = 0$

2 a) K = 0
b) Impossível.

3 a) LI
b) LI

4 a) LD
b) LI

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 139

1 a) V
b) F
c) F
d) V
e) V
f) V
g) V
h) F
i) F
j) V
k) V
l) F
m) V
n) F
o) V

2 C

3 B

4 C

5 B

6 E

7 C

8 A

9 E

10 D

11 D

12 C

13 A

14 B

15 C

16 B

17 C

18 C

19 A

20 E

21 C

22 D

23 $x = \frac{4}{5}$ e $y = \frac{1}{5}$

24 C

25 A

26 4

27 B

28 C

29 C

30 A

31 $k = 5$

32 $x = 9$

33 $\frac{35}{2}$

34 $x = 11$ ou $x = -13$

35 $\frac{7}{5}$

36 A

37 $\vec{w} = (1, 0)$ ou $\vec{w} = \left(-\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right)$

38 $\cos\theta = \frac{20}{29}$

39 a) Demonstração.
b) 8

40 45°

41 D

42 E

43 E

44 A

45 B

46 D

47 B

48 a) $48\vec{k}$
b) $I = \left(\frac{5}{2}, 2\right)$

49 $(t, t-1, t), \forall t \in \mathbb{R}$

50 E

51 B

52 $\vec{w} = \left(0, -3, \frac{13}{2}\right)$

53 $t = 1$

54 a) $D(-4, 4, 2)$; $a = 6$
b) $V = (-2, -1, 7)$ ou $V = (2, 7, -1)$

55 a) $k = 6$
b) $k = 1$ ou $k = -3$

56 a) LI
b) LI

57 a) Não há.
b) $3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0$

58 C

59 B

60 B

61 B

62 Demonstração.

63 Demonstração.

64 $a = 0$ ou $a = -2$

65 $\cos\theta = \frac{4}{5}$; $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

66 $C = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right)$

67 120°; $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Capítulo 3
GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 158

1 a) $4x + 3y - 17 = 0$
b) $7x - y - 37 = 0$
c) $5x - 2y - 25 = 0$
d) $x - 2 = 0$
e) $y = 1$
f) $5x + 7y = 0$

2 $y = 2$

3 $4x - y - 11 = 0$

4 $x + y - 5 = 0$

5 $3x - y = 5$

6 $2x - 7y + 25 = 0$

7 $3x - 5y + 8 = 0$

8 $4x - y = 39$

9 $3x + y - 12 = 0$

10 a) $2x + 3y - 23 = 0$
b) $x + y - 8 = 0$

11 a) $\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 2 + 6t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$

12 $4x + 3y - 23 = 0$

13 Do eixo dos x: $\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1$

Do eixo dos y: $\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Página 167

1 $k \neq 2$

2 $x + y = 1$

3 $P = (2,\ 0)$ e $Q = \left(0,\ \frac{2}{3}\right)$

4 $k = 1$ e $k = 6$

5 $y = \frac{7}{4}$

6 E = 9

7 B = (1, 4)

8 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

9 $a + b = 5$

10 $m = \frac{1}{2}$ e $n = -\frac{2}{3}$

11 $4x - y = 0$

12 $4\left(2 + \sqrt{2}\right)$

13 $4x + 1 = 0$

14 $a = -\frac{1}{3}$

15 $3x + 2y - 9 = 0$

16 $2\sqrt{5}$

17 (3, 6) e (–3, –6)

18 $\frac{60}{13}$

19 45° e 135°

20 a) $k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

b) $k = -\frac{1}{2}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Página 177

1 $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$

2 $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$

3 $x^2 + (y + 3)^2 = 4$

4 $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$

5 $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 4$

6 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$

7 $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$

8 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$

9 $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$

10 $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 20$

11 (2, –2)

12 $\left(x - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 4$

13 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

14 a) (–1, 2) e raio 1
b) (0, –1) e raio 1

15 $2\sqrt{2}$

16 a) $x^2 + y^2 - 8x = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4x + 2 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 20x + 10y + 100 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 26x - 2y + 45 = 0$ e
$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 21 = 0$
f) $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$

g) $\left(x - \frac{10}{7}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{44}{35}\right)^2$ e (

$(x + 14)^2 + y^2 = \left(\frac{44}{35}\right)^2$

h) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Página 183

1 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

2 a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{225} = 1$

b) $4x^2 + y^2 = 16$
c) $64x^2 + 15y^2 = 960$
d) $x^2 + 4y^2 = 4$ ou $4x^2 + y^2 = 4$
e) $9x^2 + 25y^2 = 225$
f) $9x^2 + 25y^2 = 225$

3 a) $x^2 + 4y^2 = 100$
b) $2x^2 + 3y^2 = 180$

4 a) $(0,\ \pm 6)$; $\frac{3}{4}$; $3y \pm 32 = 0$

b) $(0,\ \pm 2)$; $\frac{1}{2}$; $y \pm 8 = 0$

c) $(0,\ \pm 2)$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $y \pm 6 = 0$

d) $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $3x \pm 8\sqrt{3} = 0$

5 $x^2 + 4y^2 = 36$

6 C

7 $x_p = \frac{2\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + 4\,\text{sen}^2\theta}}$

$y_p = \frac{2\,\text{sen}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + 4\,\text{sen}^2\theta}}$

8 $\sqrt{3}$

9 $\frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$

10 D

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 190

1 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$

2 a) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{48} = 1$

b) $5y^2 - 9x^2 = 36$

c) $x^2 - y^2 = 6$

d) $x^2 - y^2 = -6$

e) $x^2 - y^2 = 50$

f) $x^2 - 4y^2 = 8$

g) $9x^2 - 16y^2 = 20$

h) $x^2 - 4y^2 = -8$

i) $9x^2 - 16y^2 = -20$

j) $x^2 - 9y^2 = -9$

k) $x^2 - 9y^2 = 9$

3 $9x^2 - 7y^2 = 63$

4 a) $(\pm 4,\ 0)$; $\frac{4}{3}$; $x = \pm\frac{9}{4}$; $\sqrt{7}x \pm 3y = 0$

b) $(\pm\sqrt{11},\ 0)$; $\frac{\sqrt{11}}{3}$; $x = \pm\frac{9}{\sqrt{11}}$; $\sqrt{2}x \pm 3y = 0$

c) $(\pm 2\sqrt{5},\ 0)$; $\frac{2\sqrt{5}}{4}$; $x = \pm\frac{8\sqrt{5}}{5}$; $x \pm 2y = 0$

d) $(0,\ \pm 3)$; $\frac{3}{2}$; $y = \pm\frac{4}{3}$; $2x \pm \sqrt{5}y = 0$

5 $4x^2 - y^2 = \pm 16$

6 $\frac{5}{3}$ e $\frac{5}{4}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 196

1 $y^2 = 8x$

2 a) $y^2 = 16x$

b) $x^2 = -28y$

c) $y^2 = 12x$

d) $x^2 = 20y$

e) $y^2 = -6x$

f) $2x^2 = 9y$

g) $y^2 = -8x$

h) $2x^2 + 9y = 0$

i) $3y^2 - 4x = 0$

j) $y^2 - 8x = 0$ ou $x^2 + 8y = 0$

3 $2y^2 - 9x = 0$; $3x^2 + 4y = 0$

4 a) $(5,\ 0)$; 10; $x = -5$

b) $(-6,\ 0)$; 12; $x = -6$

c) $\left(0,\ \frac{3}{10}\right)$; $\frac{3}{5}$; $y = -\frac{3}{10}$

d) $(0,\ -9)$; 18; $y = 9$

e) $\left(0,\ \frac{3}{8}\right)$; $\frac{3}{4}$; $8y + 3 = 0$

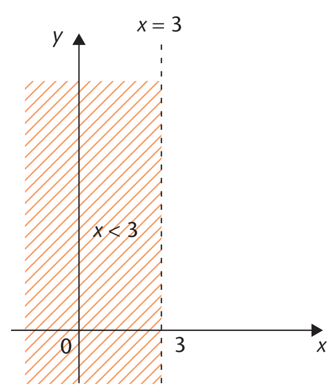
f) $\left(-\frac{21}{16},\ 0\right)$; $\frac{21}{8}$; $16x - 21 = 0$

5 3

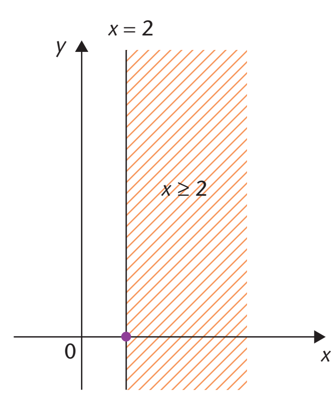
6 A reta $y - x = 0$ e a parábola $y^2 = 4x$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 207

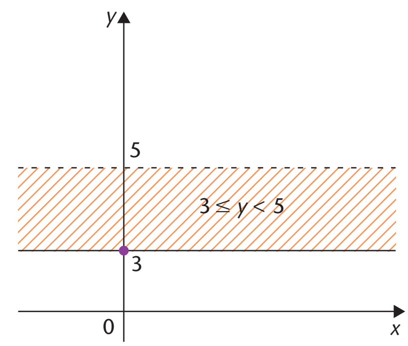
1 a)



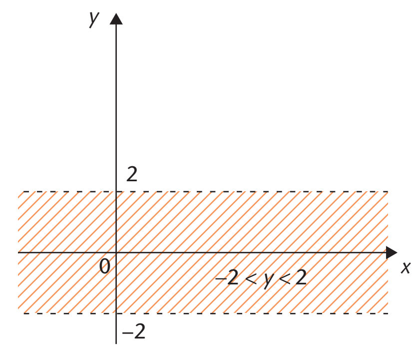
b)



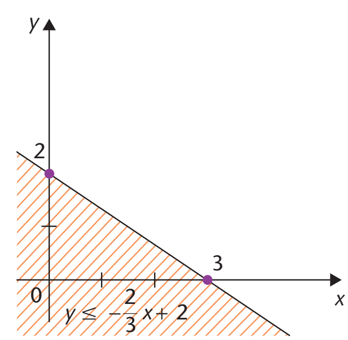
c)



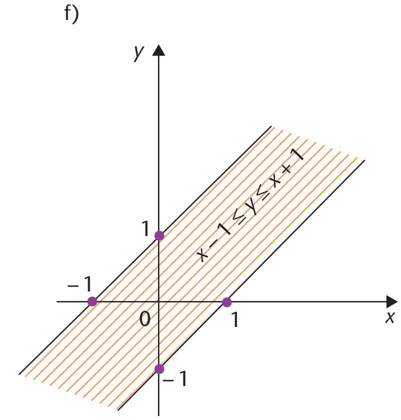
d)



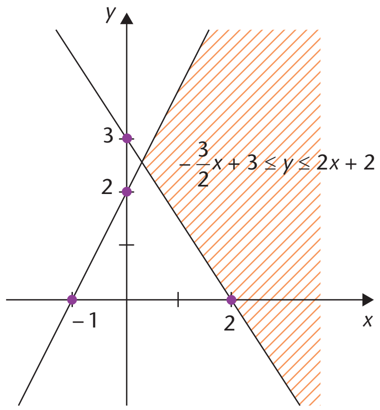
e)



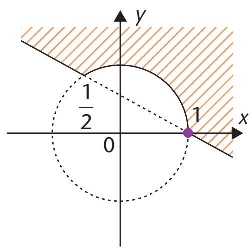
f)



g)



2



3 A

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

Página 208

1 A

2 D

3 C

4 a) M = (12, 8)
b) P = (8, 6)

5 A

6 A

7 B

8 D

9 B

10 B

11 A

12 $y = -\frac{8}{5}x - 8$

13 B

14 $\frac{3}{4}$

15 $\sqrt{3}x + y - 2 - \sqrt{3} = 0$

16 C

17 B

18 B

19 E

20 C

21 a) (2, 1) e (1, 8)
b) $x + y - 6 = 0$

22 $a\sqrt{a}$

23 a) V
b) F
c) V

24 $x - y + 1 = 0$
$x + y - 5 = 0$

25 E

26 B

27 C

28 D

29 A

30 A(–5, 0); B(0, –2); C(–1, –4)

31 $b = \sqrt{3} - 2$

32 C

33 a) $k = \frac{7}{15}$
b) $7x - 9y = 0$

34 B

35 a) V
b) V
c) F

36 B

37 A

38 D

39 A

40 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5$

41 B

42 C

43 D

44 C

45 A

46 $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$

47 C

48 A

49 E

50 E

51 C

52 B

53 D

54 $b = \pm\sqrt{5}$

55 B

56 C

57 A

58 B

59 B

60 C

61 $x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

62 A

63 E

64 A

65 A

66 E

67 E

68 a) $\frac{10}{3}$ cm e 10 cm

b) $3x^2 + 3y^2 - 40x + 100 = 0$

69 C

70 A

71 C

72 C

73 a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

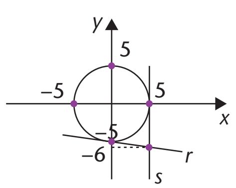
$0 \le x \le 2$ e $1 \le y \le 3$

b) π

74 a) 97,5

b) $\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\left(y-\frac{17}{2}\right)^2=\frac{2\,197}{16}$

75



$\frac{60\sqrt{61}}{61}$

76 a) C = (6, 8) e R = 5

b) 60°

77 $x^2 + (y-1)^2 = 2$

78 A

79 a) Q = (7, 7)

b) 10π km/h

80 B

81 B

82 C

83 B

84 E

85 a) V

b) V

c) F

86 D

87 E

88 a) V

b) V

c) F

89 B

90 $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$

91 E

92 D

93 $h = 2$ unidades

94 (0, –3) pertence à elipse e $\left(\frac{5}{2}, \frac{13}{5}\right)$ é exterior a ela.

95 D

96 B

97 B

98 (0, –1) e $\left(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right)$

99 $\overline{PQ} = 60$ cm

100 D

101 E

102 C

103 C

104 E

105 E

106 C

107 B

108 B

109 E

110 B

111 A

112 A

113 C

114 a) $y = 2x^2 - x$

b) $k=-\frac{2}{15}y^2+\frac{17}{5}y$

115 a) C = (2, 2)

b) 3

116 $x - 3y + 24 = 0$

117 $y = 2x - 1$

118 a) $x^2 = 8y$

b) 2 m

119 E

120 D

121 A

122 D

123 A

124 D

125 E

126 A

127 E

128 $\frac{29}{10}$

129 B

130 4

131 C

132 A

133 A

134 D

135 E

136 E

137 E

138 A

139 C

140 B

Capítulo 4
GEOMETRIA ANALÍTICA NO ESPAÇO

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 240

1 a) $2x + 4y + z + 1 = 0$
b) $x + 2y - z + 1 = 0$

2 $2x - y - z = 0$

3 $\theta = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

4 $p = 6$ e $q = -4$

5 $x + y + z = 6$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 245

1 Na forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Na forma simétrica:

$$\frac{x-2}{5} = y = \frac{z-3}{-2}$$

2 $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - 3t \end{cases}$

3 $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -1 + t \end{cases}$

4 $\left(\frac{14}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)$

5 60°

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 250

1 $(x + 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 16$

2 C(2, 3, –6) e raio 8

3 $k = 1$

4 (1, 2, 0) e (–1, –2, 2)

5 a) C(0, 0, 0) e raio 2
b) C(1, –1, 0) e raio 3

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 255

1 D

2 E

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 256

1 D

2 D

3 D

4 D

5 C

6 D

7 C

8 E

9 C

10 a) Demonstração.
b) $x + y + z = 1$

11 $y = x\sqrt{3}$

12 B

13 C

14 A

15 E

16 a) (–4, 8, –4) ou $k(1, -2, 1)$; $k \in \mathbb{R}$
b) $x - 2y + z = 0$

17 $x + y + 6z = 23$

18 $5x + 2y + 11z = 48$

19 $b = -\frac{3}{2}$

20 D

21 XZ

22 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-8}{2} = \frac{z+3}{-3}$

23 (3, –2, 1)

24 D

25 E

26 E

27 D

28 25π

29 A

30 A

Capítulo 5
NÚMEROS COMPLEXOS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 263

1 $p = 2$

2 a) $q' = 4$ ou $q'' = -4$
b) $p = 3$

3 $p = 4$

4 $m = \pm 8$

5 $x = -1$ e $y = 7$

6 $p = -2$

7 $x = 3$ e $y = -7$

8 $x = 2$ e $y = 1$

9 a) $\bar{z} = 4 - 5i$
b) $\bar{z} = 1 + 2i$
c) $\bar{z} = -5 + 3i$
d) $\bar{z} = 5i$
e) $\bar{z} = 3 - i$
f) $\bar{z} = -2$

10 a) Demonstração.
b) Demonstração.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 268

1 a) $6 + 8i$
b) $2 + 2i$
c) $7 + 4i$
d) $\frac{35}{6}$
e) $\sqrt{3} - \sqrt{5}$
f) $6 - i$

2 $p = 5$ e $q = 2$

3 $x = 7$ e $y = 4$

4 a) $23 - 14i$
b) $-10 + 10i$
c) $-9 - 12i$
d) $\frac{13 - i}{6}$
e) $7 + 24i$

5 $z = 1 + i$ ou $z = -1 - i$

6 a) $\bar{z} = 3 - 4i$
b) $z^2 = -7 + 24i$
c) $\overline{z^2} = -7 - 24i$
d) $(\bar{z})^2 = -7 - 24i$
e) São iguais.

7 $\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$

8 a) $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$
b) $-\frac{6i}{5}$
c) $\frac{7}{34} + \frac{11}{34}i$
d) $1 - 5i$
e) $-5 - 2i$

9 a) $3 + 4i$
b) $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$
c) $\frac{-7}{625} - \frac{24}{625}i$
d) $\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$

10 $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 271

1 a) $-i$
b) -1
c) -1
d) 1
e) i

2 i

3 a) $-i$
b) $-i$
c) $-1 + i$
d) $-i + 1$
e) $-1 - 3i$

4 $-2i$

5 0

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 275

1 $|z| = \sqrt{4} = 2$

2 a) $\sqrt{17}$
b) $\sqrt{5}$
c) $\frac{\sqrt{13}}{6}$
d) 6
e) 2
f) 3

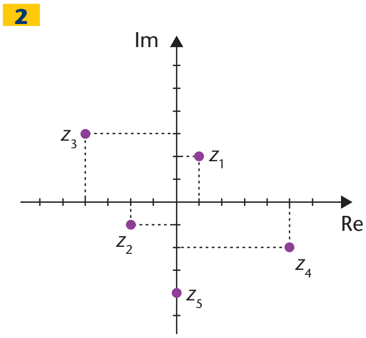
3 $z = 2i$

4 a) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
b) $\sqrt{5}i;\ -\sqrt{5}i$
c) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i;\ -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$
d) $1 + i; -1 - i$
e) $3 - 2i; -3 + 2i$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 279

1 $z_1 = 2 + 7i$
$z_2 = -8 + 3i$
$z_3 = -5$
$z_4 = -7 - 7i$
$z_5 = -3i$
$z_6 = 2$
$z_7 = 1 - 8i$
$z_8 = -5 - 5i$
$z_9 = 5 + 2i$
$z_{10} = 5i$

2



3 12 u.a.

4 a) $x = -2$. Uma reta paralela ao eixo dos Im.
b) $y = -3$. Uma reta paralela ao eixo dos Re.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 284

1 a) $\theta = 60°$ ou $\frac{\pi}{3}$
b) $\theta = 60°$ ou $\frac{\pi}{3}$
c) $\theta = 120°$ ou $\frac{2\pi}{3}$
d) $\theta = 330°$ ou $\frac{11\pi}{6}$
e) $\theta = 135°$ ou $\frac{3\pi}{4}$
f) $\theta = 90°$ ou $\frac{\pi}{2}$

2 a) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$
b) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$
c) $z = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)$
d) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right)$
e) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$

3 a) $-2 + 2\sqrt{3}i$
b) $-2i$
c) $1 - i\sqrt{3}$
d) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

4 $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$
$z^2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)$

5 $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 287

1 $z_1 \cdot z_2 = 6\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{6}$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3} \cdot \text{cis}\,\frac{\pi}{6}$

2 a) 6 cis 270°
b) 6 cis 210°
c) 2 cis 180°
d) 12 cis 60°
e) 12 cis 0°

3 a) $z_1 \cdot z_2 = 18$ cis 110°
b) $\frac{z_1}{z_2} = 2$ cis 60°
c) $z_2 \cdot z_1 = 18$ cis 110°
d) $\frac{z_2}{z_1} =$ cis 300°

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 293

1 $z = \text{cis}\,\frac{\pi}{3}$
$z^8 = \text{cis}\,\frac{8\pi}{3}$ ou $z^8 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2 $z^8 = 4^8 \cdot \text{cis}\,240°$ ou $z^8 = 2^{15}\left(-1 - \sqrt{3}i\right)$

3 a) $z^3 = 8i$
b) $z^6 = -64$
c) $z^{10} = 512\left(1 - \sqrt{3}i\right)$
d) $z^4 = 8\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$

4 $-8 + 8\sqrt{3}i$

5 $z^9 = 512\,\text{cis}\,21\pi$
$z^{-9} = -\frac{1}{512}$

6 $8 + 8i$

7 $n = 15$

8 4

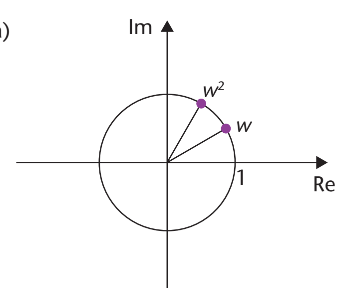
9 $n = 3$

10 $\left\{\pm 1;\ \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 297

1 a) $-2;\ 1 \pm \sqrt{3}i$
b) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{i\sqrt{2}}{2}$
c) $2;\ -1 \pm \sqrt{3}i;\ -1;\ \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2 a)

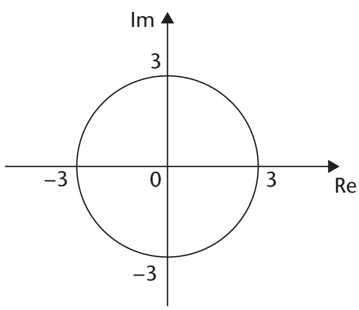


b) $\left\{\frac{\sqrt{3} \pm i}{2};\ \pm i;\ \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$
c) 0

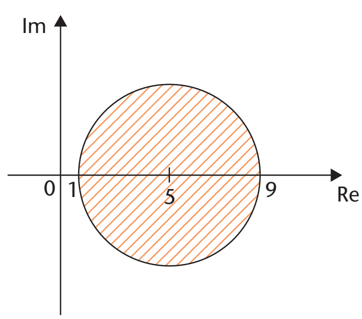
3 a) $\{2i; -2i\}$
b) $\left\{\sqrt{2} + \sqrt{2}i;\ -\sqrt{2} + \sqrt{2}i;\ -\sqrt{2} - \sqrt{2}i;\ \sqrt{2} - \sqrt{2}i\right\}$
c) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$
d) $\left\{0;\ -1;\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 304

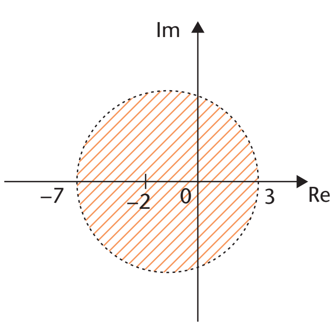
1 a)



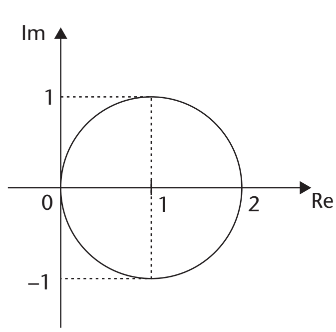
b)



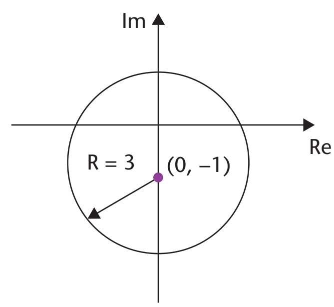
c)



d)



e)



2 $|z|^2 = 5$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 306

1 D

2 D

3 A

4 E

5 E

6 –1 024

7 C

8 A

9 A

10 B

11 D

12 E

13 E

14 B

15 $m = \frac{1}{2}$

16 C

17 B

18 $z = \frac{8}{5} + \frac{2}{5}i$

19 $\frac{3}{10} - \frac{i}{10}$

20 $z = \pm 2 + 3i$

21 2

22 –1

23 a) 0
b) –1
c) $50 - 50i$

24 A

25 D

26 A

27 B

28 B

29 B

30 D

31 B

32 B

33 (01 + 04 + 16) = 21

34 C

35 D

36 $1 - 4i$ ou $-1 + 4i$

37 a) $\pm i\sqrt{2}$
b) $\sqrt{2} - i$ ou $-\sqrt{2} + i$

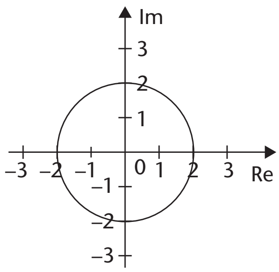
38 B

39 $|z| = 10$

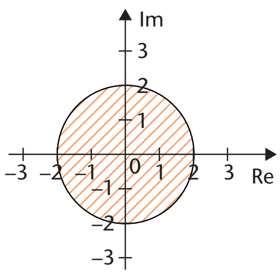
40 a) $z = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$
b) $z = 5\sqrt{3} - 5i$

41 a) Basta substituir x por $2 + 2i$.
b) 90°

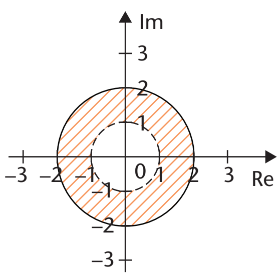
42 a)



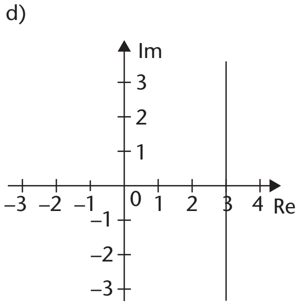
b)



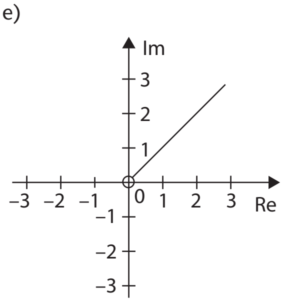
c)



d)

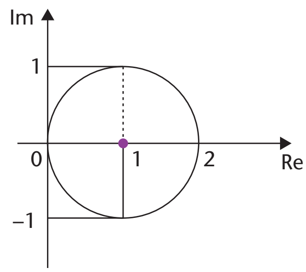


e)



43 B

44



45 $A \neq \varnothing$

46 D

47 A

48 B

49 B

50 A

51 A

52 B

53 a) V
b) F
c) V

54 A

55 a) V
b) V
c) V
d) F
e) V

56 A

57 B

58 D

59 a) $\{-2, 2, -2i, 2i\}$
b) Nos eixos coordenados.

60 $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2};\ -i;\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$

61 A

62 C

63 D

64 A

65 A

66 -2 e $1 - i\sqrt{3}$

67 $z = 2\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{8}$

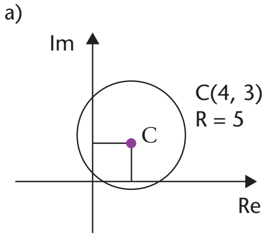
68 C

69 $\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

70 E

71 $x = 150°$

72 a)



b) $z = 10\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{3}$

73 B

74 21h

75 $n = 3$

76 $n = 12$

77 C

78 0

79 a) 1; cis 120°; cis 240°

b) $\frac{3\sqrt{3}}{4}\,u.a.$

c) 2

80 V = {–1; 0, 1, i, –i}

81 $-1-\sqrt{3}i$

82 E

83 D

84 E

85 $A' = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-1;\ \frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)$

86 $w = 12\sqrt{3}-40+12i$

87 a) V
b) V
c) V
d) F

88 B

89 A

90 B

91 C

92 D

93 A

94 D

95 D

96 a) F
b) V
c) V
d) V

97 a) $|z| = 2^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2^{\pi}}$

b) $|z_2 - z_1| = 2\cdot\left(\sqrt[3]{2^{\pi}}-1\right)$

98 D

99 E

100 A

101 E

102 C

103 D

104 A

105 0

106 6 unidades

107 {5 – 2i; 5 + 2i}

Capítulo 6
POLINÔMIOS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 324

1 a) Do 3º grau.
b) Não é um polinômio.
c) Do 8º grau.
d) Do 4º grau.
e) Não é um polinômio.
f) Do 6º grau.

2 $\nexists\ p \in \mathbb{R} \mid gr(f) = 2$

3 $p \neq 2$

4 a) 6
b) 0
c) $\frac{15}{4}$
d) 1 – 3i
e) $8-5\sqrt{2}$

5 9

6 $m = 11$ e $p = 7$

7 70

8 $p(x) = ax^2 - ax - 2a;\ a \in \mathbb{C}^*$

9 a) $a = -1$ e $b = 1$
b) $a = 36$ e $b = 54$

10 20

11 Somente a II.

12 $a = 2$ e $b = -1$

13 $a = \frac{1}{2};\ b = -\frac{1}{2}$ e $c = \frac{1}{2}$

14 $a = 1$; $b = 0$ e $c = 1$

15 a) $p(0) = 3$; $p(1) = 2$; $p(2) = 1$
b) Demonstração.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 328

1 0

2 10

3 $r(x) = 2x + 1$
$q(x) = x^2 - 2x + 1$

4 $a = 4$

5 $r(x) = -5$

6 $p = 1$ e $q = -10$

7 $R(x) = 3x - 7$

8 $p(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ ou
$p(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

9 $p(x) = 2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 10x - 8$

10 0

11 $m = 10$

12 24

13 $r(x) = 5$

14 a) $Q(x) = x^4 + 3x^2 - 4$; $R(x) = 0$

b) $a = 0$ e $b = -2$

15 $p = -\frac{11}{4}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 337

1 a) $Q(x) = 3x^2 + x + 3$; $R(x) = 4$

b) $Q(x) = -2x^3 + 5x^2 - 15x + 29$;
$R(x) = -57$

c) $Q(x) = x^8 - x^7 + x^6 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3$;
$R(x) = -4$

d) $Q(x) = 2x^2 + 2x + 1$; $R(x) = 0$

2 $m = -8$ e $n = 12$

3 $a = 5$

4 $a = -\frac{11}{4}$ e $b = 7$

5 $k = -42$

6 $p = \frac{7}{3}$ e $q = -\frac{14}{3}$

7 -12

8 $k = 23$

9 $m + n + p = 1$

10 $a = 10$ e $b = -3$

11 a) $c = 4$

b) 10

12 $mn = 30$

13 $a = -4$ e $b = 3$

14 a) $a = 2$; $b = -3$; $c = -8$ e $d = -3$

b) $a = 3$; $b = -5$; $c = 1$ e $d = -2$

15 $p(x) = 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x$

16 $a = 1$ e $b = 0$

17 $A = \frac{1}{3}$; $B = -\frac{1}{3}$ e $C = 2$

18 $A = \frac{1}{3}$; $B = -\frac{1}{3}$ e $C = -\frac{2}{3}$

19 $A + B = 2$

20 $b + c = 1$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 341

1 $p(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$

2 $1 - 2i$

3 $3 + 2i$

4 $2 + \sqrt{3}$ e $1 - i$

5 $a = 4$

6 $p(x) = (x - i)(x + i)(x - 1) = x^3 - x^2 - x - 1$

7 $p = \frac{1}{3}$ e $q = 9$

8 $p(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 1)$

9 a) $p(x) = (x + 2)(x - 3)(x - 6)$

b) $p(x) = (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5)$

10 $p(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right)$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 347

1 a) $-\frac{1}{4}$ e $\sqrt{3} - i$

b) $a = \frac{1}{4} - 2\sqrt{3}$ e $b = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

2 a) -3

b) $\{-i, i, 1, 2\}$

3 a) 2

b) $\frac{1}{2}$

c) $-\frac{3}{2}$

d) $-\frac{1}{3}$

e) 3

f) $-\frac{1}{3}$

4 $\left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{12}; \frac{1}{2}\right\}$

5 2; 5; 8

6 -3; 6; -12

7 2; 3; 4

8 1; 1; 3

9 -2; 3; 4; 6

10 $m = 6$

11 -3; 1; 2

12 a) $k = 4$

b) $k = 10$; $1 + \sqrt{13}$; $1 - \sqrt{13}$

13 a) 27

b) -3; 1; 9

14 $\frac{1}{4}$

15 $a_n(x^3 - 5x^2 + 14x - 14) = 0$; com $a_n \neq 0$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 352

1 a) 1; 2; 3

b) 4; 5; 6

c) 3; 5; –2

d) 1; 1, –2; –3

e) –1; –2; –3

2 a) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}$

c) $-1; -\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{5}$

d) $\frac{3}{2}; -\frac{2}{5}; \frac{1}{2}$

3 $2; \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}; \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

4 $2; -1 + 2i; -1 - 2i$

5 1, 3 e $\frac{1}{3}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 360

1 $2; \frac{1}{2}; 3; \frac{1}{3}$

2 $1; \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}i\right); \frac{1}{2}\left(3\pm\sqrt{5}\right)$

3 a) $-1; 2; \frac{1}{2}$

b) $-1; 3; \frac{1}{3}$

c) $1; 3; \frac{1}{3}$

4 I) Com $p = -2$ e $q = 1$

$x_1 = 1; x_2 = \sqrt{3}; x_3 = 1; x_4 = -\sqrt{3}$

II) Com $p = 2$ e $q = -1$

$x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 1; x_4 = 1$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 361

1 $c < -6$ ou $c > 2$

2 E

3 C

4 E

5 372 peças na 1ª hora e 188 peças na 2ª hora

6 B

7 $a = 1$; $b = 0$ e $c = 1$

8 $p = 5$ e $q = -3$

9 B

10 C

11 A

12 10

13 E

14 C

15 A

16 A

17 D

18 B

19 A

20 D

21 A

22 $Q(x) = x^{98} + x^{96} + x^{94} + ... + x^2 + 1$

$R(x) = x + 2$

23 C

24 06 (02 + 04)

25 A

26 $R(x) = x - 1$

27 E

28 $m + n = 3$

29 $a = 1$; $b = 3$; $c = 2$ e $d = 2$

30 E

31 a) 1

b) $P(x) = x$ ou $P(x) = -x$

32 A

33 A

34 C

35 A

36 E

37 A

38 B

39 B

40 D

41 C

42 D

43 E

44 D

45 $a = \frac{1}{4}$; $b = \frac{1}{2}$ e $c = -\frac{15}{4}$

46 a) $f(x) = x^4 - 2x^3$

b) $0 \leq x < 1$

47 E

48 $\text{Domf} =]-2, 1[\cup]1, +\infty[$

49 a) $A = -\frac{7}{3}$; $B = \frac{7}{3}$ e $C = \frac{-11}{3}$

b) 2 e 0

50 D

51 D

52 E

53 C

54 D

55 E

56 E

57 E

58 B

59 B

60 $R(x) = 30$

61 $\left\{3;\ \frac{3 \pm \sqrt{13}}{6}\right\}$

62 a) 6 paralelepípedos

b) 345

63 0

64 $a = \frac{4}{5}$ e $b = \frac{3}{5}$

65 $k = 23$

66 E

67 A

68 C

69 E

70 E

71 C

72 a) F

b) F

c) F

d) V

e) F

73 a) $R(x) = 15$

b) Demonstração.

74 $\left\{0;\ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

75 D

76 a) Demonstração.

b) Demonstração.

77 a) $p(2) = 0$

b) Demonstração.

c) Demonstração.

78 a) 3

b) $\left\{1;\ 2 \pm \sqrt{2}\right\}$

79 A

80 D

81 B

82 D

83 E

84 A

85 $m = 6$; $1 + i$; $1 - i$

86 $\{1; -i; i\}$

87 a) $d = 10$

b) $\left\{2;\ \pm\sqrt{5}\right\}$

88 $\left\{2;\ -1 \pm 2i\right\}$

89 D

90 a) $k = 10$

b) $1 + 2i$; $1 - 2i$

91 B

92 E

93 D

94 E

95 A

96 A

97 C

98 a) F

b) V

c) F

d) V

99 D

100 D

101 a) Demonstração.

b) $\frac{-1 \pm i\sqrt{23}}{2}$

102 C

103 a) $m = 2$

b) $\left\{1;\ 1 \pm \sqrt{3}\right\}$

104 C

105 a) $m = 7$

b) $\left\{\frac{3}{2};\ 1 \pm \sqrt{2}\right\}$

106 A

107 A

108 D

109 C

110 D

111 a) F

b) F

c) V

d) V

e) V

112 B

113 A

114 C

115 D

116 Demonstração. As outras raízes são: $-i$ e $2 \pm i$.

117 E

118 D

119 a) V

b) F

c) F

120 25

121 6

122 14

123 C

124 A

125 1; $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

126 C

127 49 (01 + 16 + 32)

128 a) V

b) F

c) F

d) V

e) V

129 B

130 $\left\{-1;\ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

131 $k = 3$

132 $1 \pm 2i$ são da 1ª equação e –3 e 5 são da 2ª equação

133 $k = -8$

134 $x = 5$ e as outras raízes são $\frac{-4 \pm i\sqrt{6}}{2}$

135 a) $y^3 + 6y + 2 = 0$

$z^6 + 2z^3 - 8 = 0$

b) $z_1 = \sqrt[3]{2}$; $z_2 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$;

$z_3 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$;

$z_4 = -\sqrt[3]{4}$; $z_5 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$;

$z_6 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

136 D

137 B

138 $a = b = 1$

139 A

140 C

141 B

142 A

143 C

144 B

145 E

146 D

147 A

148 A

149 D

150 B

151 C

152 B

153 1

154 a) {–1; 1; 3}

b) $a = -3$ e $b = -1$

155 a) $m = 1$

b) $(x+1)^2(x-1)(x+2)(x-2)$

156 a) $\alpha = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}$

b) $\left\{-i;\ i;\ -\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right\}$

157 C

158 D

159 E

160 a) $z = 2 \pm 3i$

b) $\{1;\ 2;\ 1 + 2i;\ 1 - 2i\}$

161 A

162 a) $\left\{0;\ \pm\sqrt{3}\right\}$

b) $Q(x) = R(x) = -2x$

163 a) $\{0;\ -2;\ 2\}$

b) $\{1;\ 3;\ 5\}$

164 A

165 D

166 B

167 D

168 D

169 B

170 C

171 D

172 $a = 1$ e $b = 2$

173 C

174 $\left\{-\sqrt{3};\ \sqrt{3};\ 2\right\}$

175 -2

Apêndice
INDUÇÃO FINITA

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 392

1 $x = -145$

2 $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3 Demonstração.

4 Demonstração.

5 Demonstração.

6 Demonstração.

7 Demonstração.

8 Demonstração.

9 $\frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6}$

10 Demonstração.

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

Símbolo	Significado	Seção (página)
$\overrightarrow{AB}$ ou $\vec{v}$	vetor	1.1 (p. 12)
$\lVert\vec{v}\rVert$	módulo de um vetor $\vec{v}$	1.1 (p. 12)
$\vec{u}$	vetor unitário	1.1 (p. 12)
$\forall$	para todo; qualquer que seja; para cada	1.1 (p. 12)
$\in$	pertence a; é elemento de	1.1 (p. 12)
$C\ell$	classe	1.1 (p. 12)
$\mid$	tal que	1.1 (p. 12)
$\Rightarrow$	implica; acarreta; se... então...	1.1 (p. 12)
$\Leftrightarrow$	se, e somente se; é equivalente a	1.1 (p. 12)
R ou ~	relação de equivalência	1.1 (p. 12)
$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^1$	espaço unidimensional	1.2.1 (p. 13)
$\mathbb{R}^2$	espaço bidimensional	1.2.2 (p. 14)
$\mathbb{R}^3$	espaço tridimensional	1.2.3 (p. 15)
$\lVert\overrightarrow{AB}\rVert$	módulo de um vetor $\overrightarrow{AB}$	1.3.2 (p. 32)
$\vec{0}$	vetor nulo	1.3.2 (p. 33)
$>$	maior que	1.3.2 (p. 34)
$<$	menor que	1.3.2 (p. 34)
$\leq$	menor ou igual a	1.4.1 (p. 39)
$\nearrow\swarrow$	sentidos opostos	1.4.1 (p. 39)
//	paralelo	1.4.2 (p. 42)
$\nearrow\nearrow$	mesmo sentido	1.4.2 (p. 42)
$-\infty$	menos infinito	1.4.2 (p. 47)
$+\infty$	mais infinito	1.4.2 (p. 47)
$\neq$	diferente	1.5.1 (p. 55)

$\not\parallel$	não paralelo	1.5.2 (p. 58)
$\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$	vetores unitários dos eixos	2.1 (p. 74)
$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$	produto escalar (ou interno) de dois vetores	2.2.1 (p. 78)
$\text{proj}_{\vec{v}_1} \vec{v}_2$	projeção ortogonal do vetor $\vec{v}_2$ sobre o vetor $\vec{v}_1$	2.2.2 (p.81)
$\text{alg proj}_{\vec{v}_1} \vec{v}_2$	valor algébrico de projeção de $\vec{v}_2$ sobre $\vec{v}_1$	2.2.2 (p. 81)
$\perp$	perpendicular	2.3.1 (p. 88)
$\geq$	maior ou igual a	2.3.1 (p. 88)
$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$	produto vetorial de $\vec{v}_1$ com $\vec{v}_2$	2.4.2 (p. 93)
$\left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right]$	produto misto (ou triplo) dos vetores v_1, v_2 e v_3	2.7 (p. 117)
$\nexists$	não existe	3.1.8 (p. 163)
$\notin$	não pertence a; não é elemento de	3.7 (p. 201)
$\cap$	intersecção	3.7 (p. 202)
i	unidade imaginária	5.1 (p. 260)
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos	5.1 (p. 260)
$\text{Re}(z)$	parte real de um número complexo	5.1 (p. 260)
$\text{Im}(z)$	parte imaginária de um número complexo	5.1 (p. 260)
$\bar{z}$	conjugado do número complexo z	5.1.1 (p. 261)
$\text{N}(z)$	norma do número complexo z $(\text{N}(z) = z \cdot \bar{z})$	5.2.3 (p. 265)
$\lvert z \rvert$	módulo do número complexo z $\left(\lvert z \rvert = \sqrt{\text{N}(z)}\right)$	5.4 (p. 272)
$\arg(z)$	argumento de um número complexo z	5.6.2 (p. 281)
$\text{cis}\,\theta$	forma polar de um número complexo $(\text{cis}\,\theta = \cos\theta + i \text{ sen } \theta)$	5.6.3 (p. 282)
e	número de Euler	5.10.1 (p. 300)
$\equiv$	coincidente	6.1.3 (p. 319)
$\prod$	produtório	Apêndice (p. 390)

ALFABETO GREGO

Letra maiúscula	Letra minúscula	Nome em português
Α	α	Alfa
Β	β	Beta
Γ	γ	Gama
Δ	δ	Delta
Ε	ε	Épsilon
Ζ	ζ	Zeta
Η	η	Eta
Θ	θ	Teta
Ι	ι	Iota
Κ	κ	Capa
Λ	λ	Lambda
Μ	μ	Mi
Ν	ν	Ni
Ξ	ξ	Csi
Ο	ο	Ômicron
Π	π	Pi
Ρ	ρ	Rô
Σ	σ	Sigma
Τ	τ	Tau
Υ	υ	Ípsilon
Φ	φ	Fi
Χ	χ	Qui
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Ômega

SIGNIFICADO DAS SIGLAS

AFA-SP – Academia da Força Aérea (São Paulo)
Cefet-MG – Centro Federal de Educação Tecnológica (Minas Gerais)
Cefet-PR – Centro Federal de Educação Tecnológica (Paraná)
Cefet-RJ – Centro Federal de Educação Tecnológica (Rio de Janeiro)
Cesgranrio-RJ – Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio (Rio de Janeiro)
EEM-SP – Escola de Engenharia Mauá (São Paulo)
EN – Escola Naval (Rio de Janeiro)
Esam-RN – Escola Superior de Agricultura de Mossoró
ESPM-SP – Escola Superior de Propaganda e Marketing (São Paulo)
Faap-SP – Fundação Armando Alvares Penteado (São Paulo)
Fatec-SP – Faculdade de Tecnologia de São Paulo
FEI-SP – Faculdade de Engenharia Industrial (São Paulo)
FGV-RJ – Fundação Getúlio Vargas (Rio de Janeiro)
FGV-SP – Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)
FOC-SP – Faculdade Oswaldo Cruz (São Paulo)
Fuvest-SP – Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)
IBMEC-RJ – Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais (Rio de Janeiro)
ITA-SP – Instituto Tecnológico da Aeronáutica (São Paulo)
Mack-SP – Universidade Presbiteriana Mackenzie (São Paulo)
Puccamp-SP – Pontifícia Universidade Católica de Campinas (São Paulo)
PUC-MG – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-PR – Pontifícia Universidade Católica do Paraná
PUC-RJ – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC-RS – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUC-SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
UCDB-MS – Universidade Católica Dom Bosco (Mato Grosso do Sul)
Uece – Universidade Estadual do Ceará
UEL-PR – Universidade Estadual de Londrina (Paraná)
UENF – Universidade Estadual do Norte Fluminense (Rio de Janeiro)
UEPG-PR – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Uerj – Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Ufal – Universidade Federal de Alagoas
Ufam – Universidade Federal do Amazonas
UFBA – Universidade Federal da Bahia

UFC-CE – Universidade Federal do Ceará
Ufes – Universidade Federal do Espírito Santo
UFF-RJ – Universidade Federal Fluminense (Rio de Janeiro)
UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais
UFMS – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFMT – Universidade Federal de Mato Grosso
Ufop-MG – Universidade Federal de Ouro Preto
UFPE – Universidade Federal de Pernambuco
UFPI – Universidade Federal do Piauí
UFPR – Universidade Federal do Paraná
UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFRRJ – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina
UFSCar-SP – Universidade Federal de São Carlos (São Paulo)
UFSE – Universidade Federal de Sergipe
UFSM-RS – Universidade Federal de Santa Maria (Rio Grande do Sul)
UFU-MG – Universidade Federal de Uberlândia (Minas Gerais)
UFV-MG – Universidade Federal de Viçosa (Minas Gerais)
Unaerp-SP – Universidade de Ribeirão Preto (São Paulo)
UnB-DF – Universidade de Brasília (Distrito Federal)
Unicamp-SP – Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)
Unicap-PE – Universidade Católica de Pernambuco
Unifesp – Universidade Federal de São Paulo
Unificado-RJ – Vestibular unificado (Rio de Janeiro)
Unifor-CE – Universidade de Fortaleza (Ceará)
Unioeste-PR – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Unirio-Ence-RJ – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Escola Nacional de Ciências Estatísticas (Rio de Janeiro)
Unirio-RJ – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Vunesp-SP – Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista (São Paulo)