COLEÇÃO APRENDER

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA

para o ensino médio – volume II

MANUAL DO PROFESSOR

Miguel Jorge

Mestre em Educação Matemática pela USU-RJ
Bacharel e licenciado em Matemática pela Uerj
Professor da Fundação Getulio Vargas – FGV-RJ
Professor do Colégio Santo Inácio – Rio de Janeiro – RJ
Engenheiro eletricista com especialização de Engenharia Econômica pela UFRJ

Ralph Costa Teixeira

Doutor em Matemática pela Universidade de Harvard, EUA
Mestre em Matemática pelo Impa-RJ
Engenheiro de Computação pelo IME-RJ
Professor adjunto da UFF-RJ

Thales do Couto Filho

Bacharel e licenciado em Matemática pela Sesni-RJ
Engenheiro mecânico pela UFRJ
Professor da PUC-RJ
Professor do Colégio Santo Inácio, Colégio Zacarias e da rede pública estadual do Rio de Janeiro

Felipe Ferreira da Silva

Licenciado em Matemática pela PUC-RJ
Professor do Colégio Santo Inácio e da Escola SESC de Ensino Médio – Rio de Janeiro – RJ

EDITORA do BRASIL

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Matemática para o ensino médio: volume II / Miguel Jorge... [et al.]. – 1. ed. – São Paulo: Editora do Brasil; Rio de Janeiro: Fundação Getulio Vargas, 2010. – (Coleção aprender)

Outros autores: Ralph Costa Teixeira, Thales do Couto Filho, Felipe Ferreira da Silva
Suplementado pelo manual do professor.
ISBN 978-85-10-04931-3 (aluno)
978-85-10-04932-0 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Jorge, Miguel. II. Teixeira, Ralph Costa. III. Couto Filho, Thales do. IV. Silva, Felipe Ferreira da. V. Série.

10–12904 CDD–510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática: Ensino médio 510.7

Projeto
FGV Ensino Médio da Fundação Getulio Vargas

Presidente da FGV
Carlos Ivan Simonsen Leal

Coordenadora do FGV Ensino Médio
Marieta de Moraes Ferreira

Assistente de coordenação
Renato Franco

Projeto gráfico
Osvaldo Moreira da Silva

Capa
Washington Dias Lessa

Diretoria Executiva
Maria Lúcia Kerr Cavalcante Queiroz

Superintendência
Frederico Wolfgang Wickert

Gerência Editorial
Cibele Mendes Curto Santos

Supervisão Editorial
Felipe Ramos Poletti e Rita Rodrigues

Coordenação de Artes e Editoração
Carolina Cerutti

Coordenação de Revisão de Textos
Fernando Mauro S. Pires

Coordenação de Iconografia
Monica de Souza

Supervisão de Processos Editoriais
Marta Dias Portero

Coordenação de Licenciamento de Textos
Marilisa Bertolone Mendes

Edição
Valéria Elvira Prete

Assistência Editorial
Alexandre Braga D'Avila, Alexandre Garcia Macedo e Cibeli de Oliveira Chibante Bueno

Produção Editorial e Diagramação
Conexão Editorial

Pesquisa Iconográfica
Angélica Nakamura e Elena Ribeiro

Ilustrações
Paulo César Pereira

Controle de Processos Editoriais
Leila P. Jungstedt, Carlos Nunes e Vanessa Ouros

1ª edição/1ª impressão – 2010
Impresso na Intergraf Indústria Gráfica

FGV ensino médio

Rua Jornalista Orlando Dantas, 37 – Rio de Janeiro/RJ – CEP 22231-010
Fone: (21) 3799-4434 – Fax: (21) 3799-4436
www.fgv.br/ensinomedio

EDITORA do BRASIL

Rua Conselheiro Nébias, 887 – São Paulo/SP – CEP 01203-001
Fone: (11) 3226-0211 – Fax: (11) 3222-5583
www.editoradobrasil.com.br

Apresentação

Este livro foi elaborado com a finalidade de oferecer subsídios de matemática elementar ao estudante brasileiro, visando introduzi-lo no ambiente universitário.

Fomos movidos pelo interesse de tratar com modernidade e rigor os conceitos fundamentais dessa linguagem universal. Em alguns momentos elevamos ligeiramente o nível de dificuldade dos exercícios e aprofundamos os conceitos com apêndices no final dos capítulos.

Este trabalho propõe-se também a complementar a bibliografia existente procurando compatibilizar os conceitos com os que deverão ser aprendidos na universidade.

Por outro lado, procuramos dar enfoques práticos, usados no cotidiano, contextualizando muitos exercícios para colocar o estudante a par das atividades mais frequentes durante a vida.

Assim, sem veleidades, entregamos aos nossos jovens este trabalho.

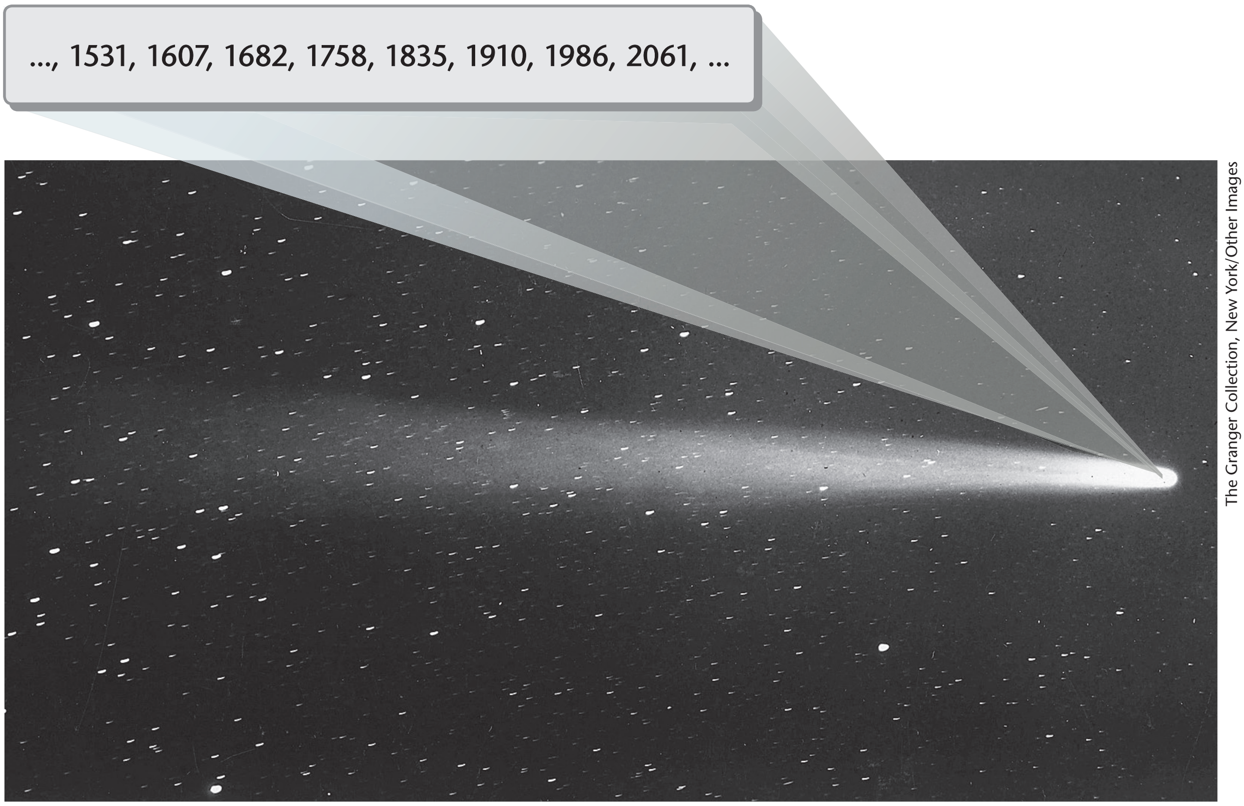
Os autores

Às nossas famílias, que, com paciência e incentivo, compreenderam os momentos de ausência, nos permitindo tornar realidade este trabalho.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

PROGRESSÕES



Progressões aritméticas e geométricas são versões discretas das funções afins e exponenciais, respectivamente. Na foto, o cometa Halley e alguns dos anos nos quais ele foi visível da Terra — note que a sequência de anos é quase uma progressão aritmética, de razão próxima a 75 anos.

1 – PROGRESSÕES

1.1 – Progressão aritmética

DEFINIÇÃO
Progressão aritmética.

Chama-se **progressão aritmética** (PA) toda sucessão de números em que a diferença entre cada termo a partir do segundo e o precedente é constante.

NOTA
Numa progressão aritmética, cada termo é a média aritmética entre o antecedente e o consequente.
Assim:
PA (..., a, b, c, ...)
$b - a = c - b$
$2b = a + c$
$b = \frac{a + c}{2}$
Essa propriedade é válida do segundo até o penúltimo elemento da progressão.

Representa-se uma progressão aritmética por $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...)$ em que a_{n-1} e a_n são dois termos consecutivos quaisquer. A diferença constante entre cada termo e o anterior chama-se **razão** da progressão aritmética e é representada por r.

Assim, temos:

$a_2 - a_1 = r,\ a_3 - a_2 = r,\ ...\ \boxed{a_n - a_{n-1} = r}$ ou $\boxed{a_n = a_{n-1} + r}$, $n \geq 2$

As progressões aritméticas são **crescentes**, **decrescentes** ou **estacionárias** conforme sua razão seja, respectivamente, positiva, negativa ou nula. Os exemplos a seguir ilustram essa classificação.

Exemplos:

i) $(1, 2, 3, ...) \Rightarrow r = 1$

ii) $(5, 1, -3, ...) \Rightarrow r = -4$

iii) $(2, 2, 2, ...) \Rightarrow r = 0$

Exercícios resolvidos:

1) Sabendo que a sequência $(3x - 1, x, x^2 - 11, ...)$ é uma PA, calcule o quarto termo.

Solução:

Devemos ter: $x - (3x - 1) = (x^2 - 11) - x$
$-2x + 1 = x^2 - x - 11 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$
que resulta em $x = 3$ ou $x = -4$.
Para $x = 3$, temos a PA $(8, 3, -2, ...)$ de razão $r = -5$. O quarto termo será $a_4 = -2 - 5 = -7$.
Para $x = -4$, temos a PA $(-13, -4, 5, ...)$ de razão $r = 9$. O quarto termo será $a_4 = 5 + 9 = 14$.

2) (FGV-RJ) Um automobilista viaja numa estrada em velocidade constante. Num dado instante passa por um marco de quilometragem com um número de dois algarismos. Uma hora depois passa por outro com os dois algarismos do marco anterior invertidos. Decorrida mais uma hora ele vê um marco com os algarismos do primeiro com um zero entre eles.

i) Que marcos foram vistos?

ii) Qual a velocidade do automobilista?

Solução:

Chamamos de ab o número do primeiro marco, onde a é o algarismo das dezenas e b o das unidades. Então:
$ab = 10a + b$ é o primeiro número visto;
$ba = 10b + a$ é o segundo número visto;
$a0b = 100a + b$ é o terceiro número visto.
Como eles foram vistos em intervalos iguais de uma hora, eles formam uma PA.
$(10a + b, 10b + a, 100a + b)$
Temos que: $(10b + a) - (10a + b) = (100a + b) - (10b + a)$
$9b - 9a = 99a - 9b \Rightarrow 18b = 108a \Rightarrow b = 6a$
Como a e b são inteiros e positivos menores do que 10, só existe a hipótese $a = 1$ e $b = 6 \cdot 1 = 6$. Os números serão então (16, 61, 106). A razão dessa PA é o espaço percorrido em uma hora, logo 61 – 16 = 45 km em 1 h. A velocidade será, então, 45 km/h.

3) Qual o menor valor inteiro de x que torna a sequência $(x, x^2 - 9x + 16, 2x^2 - 19x + 32, ...)$ uma progressão aritmética decrescente?

Solução:

Note que $(x^2 - 9x + 16) - x = (2x^2 - 19x + 32) - (x^2 - 9x + 16)$ para qualquer x, logo a sequência é uma PA. Resta saber o que ocorre quando a razão é negativa. Como a razão é a diferença entre um termo e seu anterior, temos: $(x^2 - 9x + 16) - x < 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 < 0$, logo $2 < x < 8$. Como x deve ser o menor inteiro pertencente a esse intervalo, devemos ter $x = 3$. A progressão então será: $(3, -2, -7, ...)$, cuja razão é $r = -5$.

NOTA
Um número ab de dois algarismos representa a dezenas e b unidades. Logo podemos escrever $10a + b$, sendo a e b números de um algarismo.

Observação:

Em uma progressão aritmética, para passarmos de um termo para o seguinte, basta somar a razão e, para passar de um termo para o anterior, basta subtrair a razão. Esse fato sugere, em alguns casos, representar as progressões aritméticas da seguinte maneira:

i) Quando a progressão tiver um número ímpar de termos:
$(..., x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r, ...)$

ii) Quando a progressão tiver um número par de termos:
$(..., x - 3m, x - m, x + m, x + 3m, ...)$
Note que nesse caso, a razão da PA é $r = 2m$.

Exercícios resolvidos:

1) Calcular os ângulos internos de um triângulo retângulo sabendo que eles estão em progressão aritmética.

Solução:

Temos: $(x - r, x, x + r)$
Como a soma dos ângulos é 180º, temos:
$x - r + x + x + r = 180^\circ \Rightarrow 3x = 180^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$
Por outro lado, um dos ângulos é 90º, então a razão da PA será
$90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.
Os ângulos terão, então (30º, 60º, 90º).

2) Calcular os ângulos internos de um quadrilátero convexo cujos ângulos estão em PA e o maior é o dobro do menor.

Solução:

Temos: $(x - 3m, x - m, x + m, x + 3m)$ e $r = 2m$. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º, temos:

$$\begin{cases} x - 3m + x - m + x + m + x + 3m = 360^\circ \\ x + 3m = 2x - 6m \end{cases}$$

Logo: $\begin{cases} 4x = 360^\circ \\ x + 3m = 2x - 6m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90^\circ \\ x = 9m \end{cases}$

$9m = 90^\circ \Rightarrow m = 10^\circ \Rightarrow r = 20^\circ$
A progressão aritmética será então: (60º, 80º, 100º, 120º).

3) (UFRJ) Achar 5 números em PA sabendo que sua soma é 20 e a soma dos seus quadrados é $82\,\frac{1}{2}$.

Solução:

Seja a progressão aritmética: $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$

Devemos ter: $\begin{cases} x - 2r + x - r + x + x + r + x + 2r = 20 \\ (x - 2r)^2 + (x - r)^2 + x^2 + (x + r)^2 + (x + 2r)^2 = 82\,\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x = 20 \\ 5x^2 + 10r^2 = \frac{165}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 5 \cdot 16 + 10r^2 = \frac{165}{2} \end{cases} \Rightarrow 10r^2 = \frac{5}{2}$$

Logo, $r = \pm\frac{1}{2}$. Temos então duas progressões aritméticas possíveis:

$$\begin{cases} x = 4 \\ r = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(3,\ 3\,\frac{1}{2},\ 4,\ 4\,\frac{1}{2},\ 5\right) \text{ ou}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ r = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(5,\ 4\,\frac{1}{2},\ 4,\ 3\,\frac{1}{2},\ 3\right)$$

4) Que relação deve existir entre os coeficientes da equação $ax^4 + bx^2 + c = 0$ de modo que suas raízes estejam em PA?

Solução:

Toda equação de quarto grau (ou biquadrada) tem quatro raízes. Logo, as raízes deverão ser: $(x - 3m,\ x - m,\ x + m,\ x + 3m)$
Como as raízes são simétricas duas a duas, vem:

$$\begin{cases} x - 3m = -(x + 3m) \\ x - m = -(x + m) \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

Logo, as raízes serão: $(-3m, -m, m, 3m)$. As raízes da equação do 2º grau reduzida serão os quadrados desses valores, logo: $x_1 = m^2$ e $x_2 = 9m^2$.

Como $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$, temos: $10m^2 = -\dfrac{b}{a}$ e $9m^4 = \dfrac{c}{a}$

Eliminando o parâmetro m:

$$m^2 = -\frac{b}{10a} \Rightarrow m^4 = \frac{b^2}{100a^2} \quad \text{e} \quad 9 \cdot \frac{b^2}{100a^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow 9b^2 = 100ac$$

que é a relação desejada.

1.1.1 – Termo geral da PA

Seja a PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$.
Podemos escrever:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ a_4 = a_3 + r \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_n = a_{n-1} + r \end{array}\right\} n - 1 \text{ igualdades}$$

Somando membro a membro essas $n - 1$ igualdades, vem:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)r}$$

A fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)r$ envolve quatro elementos; conhecidos três deles, a determinação do quarto reduz-se a uma simples equação do 1º grau.

NOTA
Qualquer termo a_n de uma PA é igual ao primeiro termo a_1 mais tantas vezes a razão r quantos forem os termos que o precedem, ou seja, $(n - 1)$.
Assim:
$a_{10} = a_1 + 9r$
$a_{203} = a_1 + 202r$
$a_{p+1} = a_1 + pr$

Exercícios resolvidos:

1) Um atleta corre 5 km no primeiro dia de treinamento, 7 km no segundo dia, 9 km no terceiro dia e a cada dia aumenta 2 km no seu treinamento para uma maratona com percurso de 42 195 m.

i) Quantos quilômetros ele correrá no 13º dia?

ii) Quantos dias ele deverá treinar para ter certeza de que está apto para a disputa?

Solução:

i) Os quilômetros corridos estão na PA (5, 7, 9, ...).
Deseja-se o 13º termo dessa PA, isto é, a_{13}.
Temos então: $a_{13} = a_1 + 12r = 5 + 12 \cdot 2 = 29$ km

ii) Para ter certeza de que está apto, o número de quilômetros percorridos neste dia deverá ser maior ou igual a 42,195 km, logo:
$a_n \geqslant 42{,}195 \Rightarrow a_1 + (n-1)r \geqslant 42{,}195$
$5 + (n-1)2 \geqslant 42{,}195 \Rightarrow (n-1)2 \geqslant 37{,}195$
$n - 1 \geqslant 18{,}5975 \Rightarrow n \geqslant 19{,}5975$; logo, o atleta deverá treinar por pelo menos 20 dias.

2) Ano bissexto é aquele cujo cardinal é múltiplo de 4, mas não é múltiplo de 100, incluindo, entretanto, os múltiplos de 400. Assim sendo:

i) Quantos serão os anos bissextos de 2010 até o ano 3000?

ii) Se 1º de janeiro de 2010 é uma sexta-feira, que dia da semana será 1º de janeiro de 3001?

Solução:

i) Calculemos os múltiplos de 4, 100 e 400 entre 2010 e 3000.
Temos: múltiplos de 4: (2012, 2016, ..., 3000)
múltiplos de 100: (2100, 2200, ..., 3000)
múltiplos de 400: (2400, 2800)
$3000 = 2012 + (n-1) \cdot 4 \Rightarrow 4n = 992 \Rightarrow n = 248$ múltiplos de 4
$3000 = 2100 + (n-1) \cdot 100 \Rightarrow 100n = 1000 \Rightarrow n = 10$ múltiplos de 100
Portanto, são $248 - 10 + 2 = 240$ anos bissextos.

ii) Um ano normal tem 365 dias ($365 = 7 \cdot 52 + 1$); logo, a cada ano normal o dia da semana adianta-se em um dia, isto é, o que era segunda-feira passa a ser uma terça-feira no ano seguinte.

Nos anos bissextos, há um adiantamento extra de um dia ($366 = 7 \cdot 52 + 2$).

Assim, o número total de adiantamentos de 2010 até 3001 é:

$3001 - 2010 = 991$ adiantamentos normais

Como são 240 adiantamentos extras, então $991 + 240 = 1\,231$.

$1\,231 = 7 \cdot 175 + 6$, teremos 6 adiantamentos.

Logo, se 1º de janeiro de 2010 é uma sexta-feira, então 1º de janeiro de 3001 é uma quinta-feira.

3) Inserir (ou interpolar) 49 meios aritméticos entre 100 e 200.

Solução:

Inserir 49 meios aritméticos entre 100 e 200 é formar uma PA com os números 100 e 200 nos extremos tendo entre eles 49 números. Temos então uma PA com $49 + 2 = 51$ termos, sendo $a_1 = 100$ e $a_{51} = 200$. Então, $a_{51} = a_1 + 50r \Rightarrow 200 = 100 + 50r$. Logo, $r = 2$.
A PA será: (100, 102, 104, ..., 200).

NOTA
Interpolar k termos entre dois termos a e b conhecidos é formar uma PA de $k + 2$ termos, onde a e b são extremos.

$$a\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{k \text{ termos}}b$$

4) Uma série de 10 pagamentos foi feita de modo que cada parcela excedesse a anterior em R$ 10,00. Se a última parcela foi de R$ 120,00, de quanto foi a primeira parcela?

Solução:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 120 = a_1 + 9 \cdot 10 \Rightarrow a_1 = 30$
A primeira parcela foi de R$ 30,00.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Dê a classificação das seguintes PAs, em face de sua razão:

a) (10, 12, 14, 16, 18, 20, ...)

b) (20, 12, 4, –4, –12, –20, ...)

c) (10, 10, 10, 10, 10, ...)

2 Na progressão aritmética (4, 6, 8, 10, ...) determine a sua lei de formação.

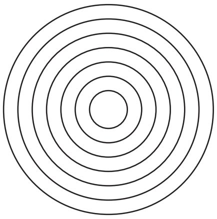
3 Qual o 40º termo da PA (2, 5, 8, ...)?

4 Determine o 1º termo da PA em que $a_{20} = 39$ e $r = 4$.

5 Quantos termos tem a PA (43, 38, ..., –2)?

6 Sabendo-se que em uma PA o 10º termo é a e a razão é b, determine o 17º termo em função de a e b.

7 Os diâmetros das circunferências que formam um anteparo para o tiro ao alvo estão em progressão aritmética de 7 termos, sendo os extremos iguais a 18 mm e 96 mm, conforme o desenho.



Determine, em mm, os diâmetros das 5 outras circunferências que formam o alvo.

8 O cometa Halley é visto pelos habitantes do planeta Terra de 76 em 76 anos. Ele foi visto em 1910. Quantas vezes ele foi visto durante a era cristã?

1.1.2 – Soma dos termos da PA

Dada a PA em n termos $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, desejamos calcular a soma S:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Escrevendo essa soma na ordem inversa, temos:

$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$$

Somando membro a membro essas duas igualdades, e agrupando as parcelas de duas em duas, temos:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$$
$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_n + a_1)$$

Como $a_2 + a_{n-1} = (a_1 + r) + (a_n - r) = a_1 + a_n$

$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2r) + (a_n - 2r) = a_1 + a_n$

A soma 2S se reduzirá a uma soma de n parcelas iguais a $(a_1 + a_n)$:

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n)$$
$$2S = (a_1 + a_n)n$$

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Exercícios resolvidos:

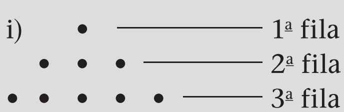
1) Um pomar tem suas árvores plantadas em forma de triângulo, havendo uma árvore na primeira fila, três árvores na segunda fileira, cinco árvores na terceira, e assim sucessivamente.

i) Quantas árvores haverá na quadragésima fila?

ii) Quantas árvores haverá em todo o pomar até a quadragésima fila?

Solução:

i)



As filas formam uma progressão aritmética de razão 2: $(1, 3, 5, ..., a_{40})$
O número de árvores da quadragésima fila será o termo a_{40} da progressão, logo:

$a_{40} = a_1 + 39r = 1 + 39 \cdot 2 = 79$ árvores

ii) O total de árvores do pomar será a soma das árvores de todas as filas até a quadragésima.

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_{40} = \frac{(a_1 + a_{40})40}{2} = \frac{(1 + 79)40}{2} = 1\,600 \text{ árvores}$$

2) Numa reunião compareceram 30 pessoas. Cada pessoa que chegava cumprimentava todas as que já tinham chegado. Quantos cumprimentos houve na reunião?

Solução:

O primeiro a chegar não cumprimentou ninguém.
O segundo a chegar cumprimentou apenas um.
O terceiro cumprimentou dois etc.; e o último a chegar cumprimentou os 29 já existentes. Assim, o número de cumprimentos foi:

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 29 = \frac{(0 + 29)30}{2} = 435 \text{ cumprimentos}$$

3) Num colégio há 20 comissões de alunos, todas têm o mesmo número de alunos. Cada aluno pertence a duas comissões e cada par de comissões possui exatamente um aluno em comum.

i) Quantos alunos participam de cada comissão?

ii) Quantos alunos participam de alguma comissão?

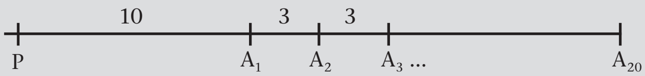
Solução:

A primeira comissão deverá ter x alunos.
A segunda comissão deverá ter um aluno em comum com a primeira e $x - 1$ novos alunos.
A terceira comissão deverá ter um aluno em comum com a primeira, um aluno em comum com a segunda e $x - 2$ novos alunos, e assim sucessivamente.
A vigésima comissão deverá ter um aluno de cada uma das 19 demais comissões e nenhum aluno novo. Como é a vigésima, ela terá 19 alunos, sendo cada um de uma das dezenove anteriores. O total de participantes então será:

$$19 + 18 + 17 + \ldots + 0 = \frac{(0 + 19)20}{2} = 190 \text{ alunos}$$

4) Num pomar são plantadas 20 árvores em linha reta e a 3 metros uma da outra. Um camponês as rega com água de um poço que está alinhado com essas árvores, mas a 10 m antes da primeira. Qual o percurso total percorrido pelo camponês sabendo que depois de regar a última árvore ele volta até o poço?

Solução:



Sejam P o poço e $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ as árvores do pomar.

No primeiro trajeto ele vai do poço até a árvore A_1 e volta ao poço. Caminha, portanto, 20 m. No segundo trajeto ele vai do poço até a árvore A_2 e volta ao poço. Caminha 26 m. No terceiro trajeto caminha 32 m e assim sucessivamente. Os trajetos formam a PA:
$(20, 26, 32, ..., a_{20})$
O vigésimo trajeto será $a_{20} = a_1 + 19r = 20 + 19 \cdot 6 = 134$ m.
O caminho total percorrido será, então, a soma dos termos dessa PA.

$$S = \frac{(a_1 + a_{20})20}{2} = \frac{(20 + 134)20}{2} = 1\,540 \text{ m}$$

5) Determinar a PA em que a soma dos n primeiros termos é $2n^2 + n$, para qualquer valor de n.

Solução:

Para $n = 1$, temos: $S_1 = a_1 = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3$.
Para $n = 2$, temos a soma dos dois primeiros termos, logo:
$S_2 = a_1 + a_2 = 2 \cdot 2^2 + 2 = 10$. Então,

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_1 + a_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \quad a_2 = 7 \Rightarrow r = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$$

A PA será então: (3, 7, 11, ...)
Verificando a soma dos n primeiros termos dessa PA:

$$S = \frac{(3 + (3 + (n - 1) \cdot 4)) \cdot n}{2} \Rightarrow S = 2n^2 + n$$

6) Uma dívida de R$ 7.500,00 foi paga em parcelas mensais e cada parcela excedia a anterior em R$ 50,00. Em quantas parcelas foi feito o pagamento, sabendo que a última parcela foi de R$ 850,00?

Solução:

Como cada parcela é R$ 50,00 a mais que a anterior, temos parcelas em progressão aritmética de razão R$ 50,00.
$(a_1, a_1 + 50, a_1 + 100, ..., 850)$. Temos $a_n = a_1 + (n - 1)50$
$850 = a_1 + 50n - 50 \Rightarrow 900 = a_1 + 50n \Rightarrow a_1 = 900 - 50n$
A dívida é a soma de todas as parcelas, logo:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad \Rightarrow \quad 7\,500 = \frac{(900 - 50n + 850)n}{2}$$

$15\,000 = (1\,750 - 50n)n \Rightarrow 50n^2 - 1\,750n + 15\,000 = 0$
$n^2 - 35n + 300 = 0 \Rightarrow n_1 = 15$ ou $n_2 = 20$
$n = 15 \Rightarrow a_1 = 900 - 50 \cdot 15 = 900 - 750 = 150$
$n = 20 \Rightarrow a_1 = 900 - 50 \cdot 20 = 900 - 1\,000 = -100$
Como as parcelas devem ser positivas, pois são pagamentos, temos que o número de parcelas é $n = 15$ e a primeira parcela é de R$ 150,00.

7) Mostrar que, quando se somam os termos correspondentes de duas PAs, a sequência formada é ainda uma PA cuja razão é a soma das PAs adicionadas.

Solução:

Sejam as progressões:
$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão r
$(b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...)$ de razão R
Somando termo a termo:
$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n, ...)$
$a_n + b_n = a_1 + (n - 1)r + b_1 + (n - 1)R$
$a_n + b_n = (a_1 + b_1) + (n - 1)(r + R)$, que é a expressão do termo geral de uma PA em que o primeiro termo é $a_1 + b_1$ e a razão é $r + R$.

OBSERVAÇÃO
Esse resultado será utilizado na determinação de volumes de sólidos geométricos.

8) Partindo da igualdade $(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, calcular a soma dos quadrados dos números naturais.

Solução:

Façamos na igualdade $(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$:

$$\left.\begin{array}{ll} n = 1 \Rightarrow & \cancel{2^3} = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ n = 2 \Rightarrow & \cancel{3^3} = \cancel{2^3} + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ n = 3 \Rightarrow & \cancel{4^3} = \cancel{3^3} + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ n = n \Rightarrow & (n+1)^3 = \cancel{n^3} + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \end{array}\right\}$$ somando membro a membro todas essas n igualdades.

$$(n + 1)^3 = 1^3 + 3 \cdot (1^2 + 2^2 + ... + n^2) + 3 \cdot (1 + 2 + ... + n) + + (1 + 1 + ... + 1)$$

$$(n + 1)^3 = 1 + 3 \cdot (1^2 + 2^2 + ... + n^2) + 3 \cdot \frac{(1 + n)n}{2} + n$$

$$(n + 1)^3 - 3 \cdot \frac{(n + 1)\, n}{2} - (n + 1) = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + ... + n^2)$$

$$(n + 1) \cdot \left[(n + 1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right] = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + ... + n^2)$$

$$(n + 1) \cdot \frac{2n^2 + 4n + \cancel{2} - 3n - \cancel{2}}{2} = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + ... + n^2)$$

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Um oficial comanda 325 soldados. Ele quer organizá-los em disposição triangular, de modo que a primeira fila tenha 1 soldado, a segunda 2, a terceira 3 e assim sucessivamente. Quantas filas o oficial irá formar?

2 Calcule a soma dos dez termos de uma PA, sabendo-se que a soma de seus extremos é 30.

3 O professor Felipe, em certo dia, escreveu as 20 primeiras linhas de um livro. A partir desse dia, ele escreveu, em cada dia, tantas linhas quantas havia escrito no dia anterior, mais 5 linhas. O livro foi escrito em 10 dias e 17 páginas. Quantas linhas há em cada página?

4 Qual o valor da soma de $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2 \cdot 10^{10}$?

5 A soma dos n primeiros termos de uma PA é igual a $3n^2$. Calcule o 8º termo da PA.

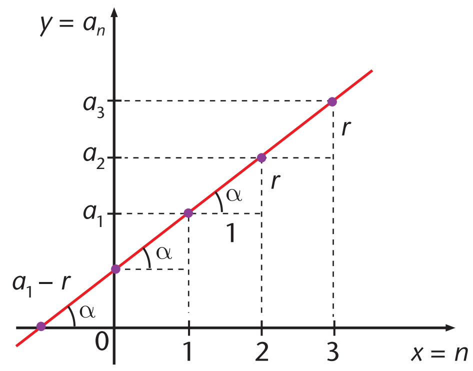
6 Dê o resultado da soma S da expressão:
$S = \log_2 \sqrt[2^{10}]{2} + \log_2 \sqrt[2^{10}]{2^2} + \ldots + \log_2 \sqrt[2^{10}]{2^{20}}$

7 Em uma PA, sabe-se que $a_5 + a_{22} = 71$. Qual o valor da soma dos 26 primeiros termos dessa PA?

NOTA
Quando o termo geral da sucessão é do primeiro grau ($a_n = a \cdot n + b$), a sucessão é uma progressão aritmética de razão a.
De fato:
$a_{n+1} - a_n = a(n + 1) + b - (an + b) = a = r$.
Note que o primeiro termo é $a_1 = a + b$.

1.1.3 – PA e função afim

Uma PA, sendo uma sucessão, é uma função definida no conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Como $a_n = a_1 + (n - 1)r$, que varia com n, temos:



$a_n = a_1 + nr - r$ ou ainda $\boxed{a_n = nr + (a_1 - r)}$, que é uma função polinomial do primeiro grau em n.

Isso significa que os pontos de coordenadas (n, a_n) estão sobre uma reta $y = ax + b$ em que o coeficiente angular é $a = r$ e a ordenada na origem é $b = a_1 - r$. Observe que se n varia de uma unidade a_n varia de r.

NOTA
A razão da progressão é o coeficiente angular da reta suporte dos pontos da progressão (n, a_n)
$a = \operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{1} = r$.

Esse fato caracteriza a *função afim*.

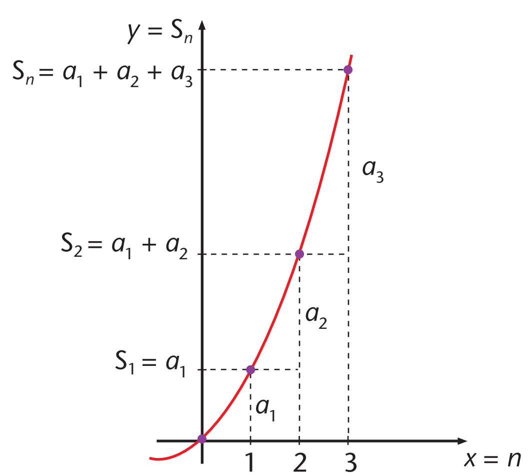
Já no caso da soma dos termos da PA,

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{1}{2}\left[a_1 + a_1 + (n - 1)\, r\right] n = \frac{1}{2}(2a_1 + rn - r) \cdot n$$

$\boxed{S_n = \frac{r}{2} n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right) n}$, temos uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola.

Os pontos (n, S_n) são tais que $S_n - S_{n-1} = a_n$. As diferenças dos valores assumidos pelas somas estão em progressão aritmética.

$(S_1, S_2 - S_1, S_3 - S_2, ..., S_n - S_{n-1})$ é uma PA.



1.2 – Progressão geométrica

Chama-se **progressão geométrica** (**PG**) a toda sucessão de números não nulos em que o quociente entre cada termo e o precedente é, a partir do segundo, constante.

DEFINIÇÃO
Progressão geométrica

Representa-se uma progressão geométrica por $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...)$ em que a_n e a_{n-1} são dois termos consecutivos quaisquer. O quociente constante entre cada termo e o anterior chama-se **razão** da progressão geométrica e representa-se por q.

Assim, temos: $\frac{a_2}{a_1} = q, \frac{a_3}{a_2} = q, ...$ $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ ou $a_n = a_{n-1}q$, $n \geq 2$

A progressão será **crescente** se $q > 1$, **decrescente** se $0 < q < 1$ e **estacionária** (constante) se $q = 1$ para $n \geq 2$.

Quando a razão é negativa ($q < 0$), a progressão geométrica é **alternada** (oscilante).

NOTA
Numa PG, para passar de um termo para o seguinte, basta multiplicá-lo pela razão q.
A PG fica:
$(a, aq, aq^2, aq^3, ...)$

Exemplos:

i) $(1, 2, 4, 8, ...) \Rightarrow q = 2 \Rightarrow$ progressão crescente

ii) $(5, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, ...) \Rightarrow q = \frac{1}{5} \Rightarrow$ progressão decrescente

iii) $(-2, -2, -2, ...) \Rightarrow q = 1 \Rightarrow$ progressão constante

iv) $(27, -18, 12, -8, \frac{16}{3}, ...) \Rightarrow q = -\frac{2}{3} \Rightarrow$ progressão oscilante

Exercícios resolvidos:

1) Sabendo que a sequência $(2x - 1, 2x + 2, 6x, ...)$ é uma PG, calcular o seu quarto termo.

Solução:

Como $\frac{2x+2}{2x-1} = \frac{6x}{2x+2} \Leftrightarrow (2x + 2)^2 = 6x(2x - 1)$

$4x^2 + 8x + 4 = 12x^2 - 6x \Leftrightarrow 8x^2 - 14x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 7x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -\frac{1}{4}$

NOTA
Numa progressão geométrica,
cada termo positivo, exceto o primeiro e o último, é a média geométrica dos termos adjacentes.
Temos:
$(..., a, b, c, ...)$

$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

$\boxed{b^2 = ac \Rightarrow b = \sqrt{ac}}$

Temos então as progressões:

Para $x = 2 \Rightarrow (3, 6, 12, ...) \Rightarrow q = 2$, logo: $a_4 = 12 \cdot 2 = 24$

Para $x = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}, ...\right) \Rightarrow q = -1$, logo: $a_4 = \left(-\dfrac{3}{2}\right)(-1) = \dfrac{3}{2}$

2) Três números estão em PG, mas também formam, na mesma ordem, uma PA. Se o primeiro termo é 2, encontre os outros.

NOTA
É possível mostrar que uma PA é uma PG se, e somente se, ela for constante.

Solução:

Seja a PG $(2, 2q, 2q^2)$, como ela deve ser também uma PA:

$2q = \dfrac{2 + 2q^2}{2} \Rightarrow 2q = 1 + q^2 \Rightarrow q^2 - 2q + 1 = 0$

$(q - 1)^2 = 0 \Rightarrow q - 1 = 0 \Rightarrow q = 1$

Logo a progressão é (2, 2, 2).

3) A soma de três números em progressão geométrica é 19. Subtraindo uma unidade do menor deles obtém-se uma progressão aritmética. Calcular a progressão.

Solução:

Seja a PG (x, xq, xq^2) crescente, isto é, x é o menor termo. Subtraindo uma unidade do menor, temos a PA:

$(x - 1, xq, xq^2)$, então, $xq = \dfrac{x - 1 + xq^2}{2}$

Formando então o sistema:

$$\begin{cases} x + xq + xq^2 = 19 & (1) \\ 2xq = xq^2 + x - 1 & (2) \end{cases}$$

Da equação (1) tiramos: $xq^2 + x = 19 - xq$

Substituindo em (2): $2xq = 19 - xq - 1$

$3xq = 18 \Rightarrow xq = 6$

Voltando à equação (1): $x + 6 + 6q = 19$

$$\begin{cases} x + 6q = 13 \\ xq = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 - 6q \\ xq = 6 \end{cases}$$

$(13 - 6q)q = 6 \Leftrightarrow 13q - 6q^2 = 6 \Leftrightarrow 6q^2 - 13q + 6 = 0$

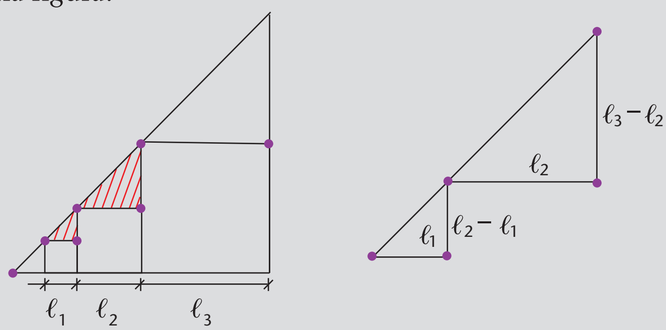
$q = \dfrac{2}{3}$ ou $q = \dfrac{3}{2}$

Temos então duas progressões:

Para $q = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x = 9 \Rightarrow (9, 6, 4)$

Para $q = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4, 6, 9)$

4) Mostrar que, na sequência de quadrados inscritos num ângulo, como indicado na figura:



i) os lados ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 estão em PG;

ii) as áreas ℓ_1^2, ℓ_2^2 e ℓ_3^2 também estão em PG.

<u>Solução:</u>

i) Os triângulos semelhantes nos dão:

$$\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_1} = \frac{\ell_3 - \ell_2}{\ell_2} \Rightarrow \ell_2^2 - \ell_1\ell_2 = \ell_1\ell_3 - \ell_1\ell_2$$

donde $\ell_2^2 = \ell_1\ell_3$ o que demonstra, pois ℓ_2 é média geométrica entre ℓ_1 e ℓ_3.

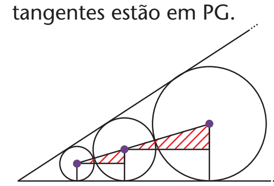
Temos a PG (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) de razão $q = \dfrac{\ell_2}{\ell_1}$.

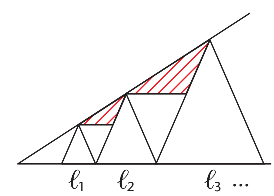
ii) Como as áreas são os quadrados dos lados, basta elevar ambos os membros da igualdade $\ell_2^2 = \ell_1\,\ell_3$ ao quadrado:

$(\ell_2^2)^2 = (\ell_1\ell_3)^2 \Rightarrow (\ell_2^2)^2 = \ell_1^2\,\ell_3^2$

Temos então a PG $(\ell_1^2, \ell_2^2, \ell_3^2)$, cuja razão é $Q = \dfrac{\ell_2^2}{\ell_1^2} = \left(\dfrac{\ell_2}{\ell_1}\right)^2 = q^2$.

NOTA
Áreas e comprimentos correspondentes de figuras inscritas num ângulo e tangentes estão em PG.





1.2.1 – Termo geral da PG

Seja a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$.
Temos que:

$$\frac{a_2}{a_1} = q,\ \frac{a_3}{a_2} = q,\ \frac{a_4}{a_3} = q,\ \ldots\ \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Multiplicando membro a membro essas $n - 1$ igualdades:

$$\frac{\cancel{a_2}}{a_1} \cdot \frac{\cancel{a_3}}{\cancel{a_2}} \cdot \frac{\cancel{a_4}}{\cancel{a_3}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{\cancel{a_{n-1}}} = \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n\,-\,1 \text{ fatores}} = q^{n-1}$$

$$\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1} \Rightarrow \boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$

A fórmula $a_n = a_1 q^{n-1}$ envolve 4 elementos a_n, a_1, q e n. Se forem conhecidos 3 deles, é possível calcular o 4º.

NOTA
Cada termo é o produto do primeiro pela razão elevada ao número de termos que o precedem.
Assim:
$a_7 = a_1 \cdot q^6$, $a_{100} = a_1 \cdot q^{99}$,
$a_{k+1} = a_1 \cdot q^k$.

Exercícios resolvidos:

1) Uma bola é lançada na vertical, de encontro ao solo, de uma altura h. Cada vez que bate no solo, ela sobe até $\frac{2}{3}$ da altura de que caiu. Que altura ela atingirá após bater no solo pela 20ª vez?

Solução:

Após bater pela 1ª vez ela atingirá a altura $h_1 = \frac{2}{3}h$.

Após bater pela 2ª vez ela atingirá a altura $h_2 = \frac{2}{3}h_1 = \frac{4}{9}h$.

E assim sucessivamente. As alturas atingidas pela bola, depois de bater no solo, estarão na PG $\left(\frac{2}{3}h, \frac{4}{9}h, ...\right)$ de razão $\frac{2}{3}$. Deseja-se h_{20}.

Temos: $h_{20} = h_1 \cdot q^{19} = \frac{2}{3}h \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{19} = \left(\frac{2}{3}\right)^{20} \cdot h$

2) O nível de álcool no sangue de um motorista alcançou 2 gramas por litro logo depois de ter bebido uma considerável quantidade de bebida alcoólica.
Considere que esse nível reduz-se à metade a cada hora. Que nível de álcool existirá no sangue no fim da 5ª hora?

Solução:

No fim da 1ª hora o nível será 1 g/L.

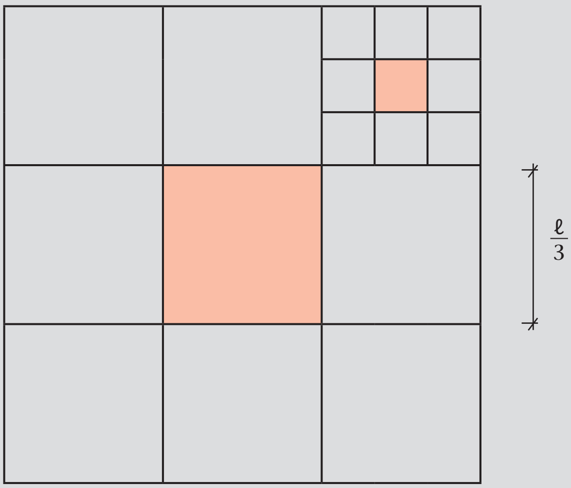
No fim da 2ª hora o nível será $\frac{1}{2}$ g/L.

E assim sucessivamente. Os níveis de álcool no sangue estarão no fim de cada hora na PG $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...\right)$, cujo termo geral é $a_n = 1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Ao final da 5ª hora, o nível de álcool será:

$$a_5 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{16} \text{ g/L} = 0{,}0625 \text{ g/L}$$

3) Divide-se um quadrado de lado ℓ em 9 quadrados iguais e retira-se o quadrado central. Deve-se proceder da mesma forma com os 8 quadrados restantes. Esse processo é repetido n vezes.



i) Qual o valor do lado do n-ésimo quadrado retirado?

ii) Quantos quadrados permanecem depois de n-ésima operação?

Solução:

i) O lado do quadrado retirado na 1ª operação é $\frac{1}{3} \cdot \ell = \ell_1$.

O lado do quadrado retirado na 2ª operação é $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\ell = \frac{1}{9}\ell = \ell_2$.

Os lados dos quadrados retirados estão na PG $\left(\frac{\ell}{3}, \frac{\ell}{9}, \ldots\right)$ de razão $q = \frac{1}{3}$.

Temos que $\ell_n = \ell_1 \cdot q^{n-1} = \frac{\ell}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{\ell}{3^n}$.

ii) Na primeira operação restam $r_1 = 8$ quadrados.
Na segunda operação restam $r_2 = 8 \cdot 8$ quadrados etc.
Os quadrados restantes estão na PG $(8, 8^2, 8^3, \ldots)$.
Permanecem ao final da n-ésima operação:
$r_n = r_1 \cdot q^{n-1} = 8 \cdot 8^{n-1} = 8^n$ quadrados.

4) Estabelecer uma fórmula para o produto dos termos de uma PG.

Solução:

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = a_1 \cdot (a_1 q)\,(a_1 q^2) \cdot \ldots \cdot (a_1 q^{n-1}) = a_1^n \cdot q^{1+2+\ldots+(n-1)}$$

$$P = a_1^n \cdot q^{\frac{(1+n-1)(n-1)}{2}} \quad \Rightarrow \quad P = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

5) Chama-se meia-vida de uma substância radioativa o tempo necessário para que se desintegre a metade de sua massa.

O carbono 14 (C^{14}) é um isótopo radioativo do carbono. Sua meia-vida é de 5 568 anos.

Sabendo que em uma amostra de osso animal foi encontrada 0,02 g de C^{14}, e a amostra do mesmo osso apresentava 10,24 g quando ele estava vivo, quando morreu o animal?

<u>Solução:</u>

Como para cada meia-vida a massa de C^{14} se reduz à metade, temos uma PG de razão $\frac{1}{2}$.

Temos que $a_1 = 10{,}24$ e $a_n = 0{,}02$. Então:

$0{,}02 = 10{,}24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ em que n é o número de períodos de 5 568 anos.

$$\frac{0{,}02}{10{,}24} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{512} = \frac{1}{2^n} \Rightarrow 2^n = 512 \Rightarrow n = 9$$

<u>Resposta</u>: O animal morreu há $9 \cdot 5\,568 = 50\,112$ anos.

6) Inserir entre $\frac{1}{4}$ e 8 nove meios geométricos.

<u>Solução:</u>

Devemos ter uma PG $\left(\frac{1}{4}, \underbrace{\ldots}_{9\text{ meios}}, 8\right)$. Calculamos a razão da PG de 11 termos em que $a_1 = \frac{1}{4}$ e $a_{11} = 8$.

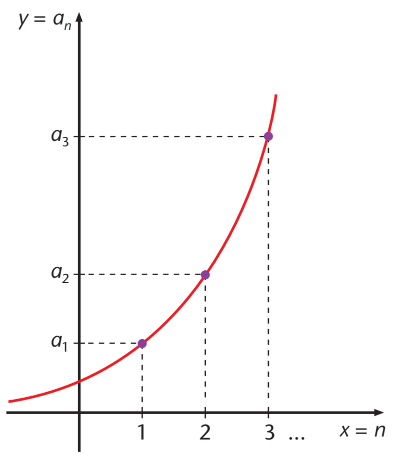
Temos: $8 = \frac{1}{4} \cdot q^{11-1} \Rightarrow 32 = q^{10} \Rightarrow q = \pm\sqrt{2}$.

$$q_1 = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8\right)$$

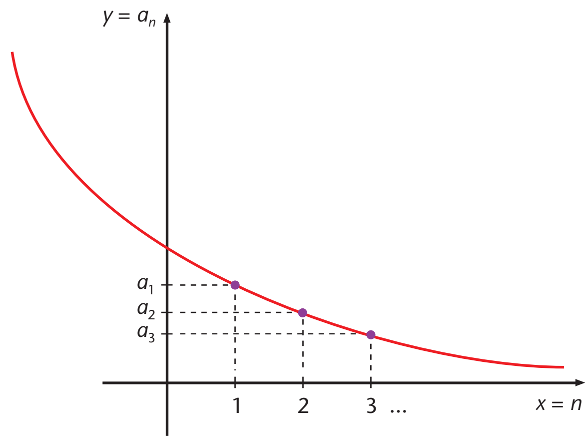
$$q_2 = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}, \frac{-\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 1, -\sqrt{2}, 2, -2\sqrt{2}, 4, -4\sqrt{2}, 8\right)$$

1.2.2 – PG e função exponencial

Como $a_n = a_1 q^{n-1}$, os pontos $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, ..., (n, a_n) estarão sobre a exponencial $y = \dfrac{a_1}{q} \cdot q^x$, $x \in \mathbb{N}^*$.

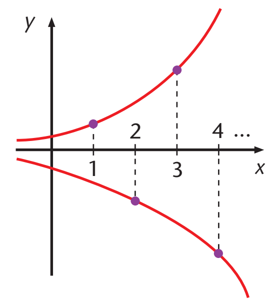


PG crescente



PG decrescente

NOTA
Se $q < 0$, a PG alternada terá seus pontos sobre duas exponenciais.



Uma progressão geométrica pode ser caracterizada pela variação sofrida ao se passar de um termo para o seguinte. De fato, seja uma PG $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$, a variação ao se passar de a_{n-1} para a_n é $a_n - a_{n-1}$. A **variação relativa** ou **taxa de variação** é:

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_{n-1}} - 1 = q - 1, \text{ que é constante.}$$

Chamando $q - 1 = k$, teremos:

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = k \Rightarrow \boxed{a_n = a_{n-1} + ka_{n-1}}$$

Cada termo de uma PG, a partir do segundo, é a soma desse termo com um valor diretamente proporcional a esse termo.

NOTA
Uma PG pode também ser definida como uma sequência em que a taxa de variação relativa é constante.
Veja a seção "Propriedade característica das funções exponenciais" no cap. 8 volume 1.

1.2.3 – Aplicações de progressões geométricas

As progressões geométricas se prestam à modelagem de vários fenômenos.

Demografia: crescimento populacional

A) Determinar a população de um conjunto de indivíduos sabendo que a população atual é P_0 e que esta cresce à taxa relativa de x ao ano.

NOTA
x deve ser escrito na forma decimal:
$2\% = \dfrac{2}{100} = 0{,}02$

Solução:

No final do 1º ano a população será:

$P_1 = P_0 + P_0x = P_0(1 + x)$

No final do 2º ano a população será:

$P_2 = P_1 + P_1x = P_1(1 + x) = P_0\,(1 + x)(1 + x) = P_0(1 + x)^2$

Observe que as populações estão numa PG em que a razão é $q = 1 + x$.

No final do n-ésimo ano teremos:

$P_n = P_1 \cdot q^{n-1} = P_0(1 + x)(1 + x)^{n-1} = P_0(1 + x)^n$.

NOTA
Observe que P_n é uma função exponencial em *n*.

$P_n = P_0\,(1 + x)^n$ em que x é a taxa de variação (crescimento) da população.

B) A população de uma cidade era, em 2000, de 40000 habitantes, e, em 2010, de 60000. Supondo o crescimento geométrico, qual será sua população em 2020?

Solução:

Tem-se $P_0 = 40000$, $P_{10} = 60000$ e deseja-se P_{20}.

NOTA
(40000, 60000, 90000) formam uma PG de razão $q = \frac{3}{2}$

$$\left.\begin{aligned} P_{10} = P_0\,(1 + i)^{10} \Rightarrow (1 + i)^{10} = \frac{P_{10}}{P_0} \\ P_{20} = P_0(1 + i)^{20} \Rightarrow (1 + i)^{20} = \frac{P_{20}}{P_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{P_{20}}{P_0} = \frac{P_{10}^2}{P_0^2}$$

Então: $P_{20} = \frac{P_{10}^2}{P_0} = \frac{60000^2}{40000} = \frac{36 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^4} = 9 \cdot 10^4 = 90000$

Resposta: A população será, em 2020, de 90000 habitantes.

Química: concentração de misturas

C) Um depósito de combustível tem um tanque completo com 10000 litros de uma mistura de 8000 litros de gasolina e 2000 litros de álcool. Um funcionário do depósito vende a cada hora 1000 litros da mistura e completa o tanque, por engano, com gasolina. Ao fim de 8 horas de trabalho, que quantidade de álcool restará no tanque?

Solução:

Como 1000 litros correspondem a $\frac{1000}{10000} = \frac{10}{100} = 10\%$ do tanque, a cada hora são retirados 10% de gasolina e também 10% do álcool. Como o álcool não é reposto, a cada hora a quantidade de álcool será $a_n = a_{n-1} - \frac{10}{100}\,a_{n-1} = \frac{90}{100}\,a_{n-1}$, isto é, as quantidades de álcool estarão na PG (1800, 1620, 1458, ...) de razão $\frac{90}{100}$. Observe que no fim da 1ª hora a quantidade de álcool era de $2000 - \frac{1}{10} \cdot 2000 = 1800$. Deseja-se obter a_8, sendo $a_1 = 1800$, $q = \frac{90}{100} = 90\%$ e $n = 8$.

$$a_8 = a_1q^7 = 1\,800 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^7 = 2 \cdot 9 \cdot 10^2 \cdot \frac{9^7}{10^7} = 2 \cdot \frac{9^8}{10^5} \text{ litros}$$

Resposta: Restarão $2 \cdot \dfrac{9^8}{10^5}$ litros de álcool.

Rede social: relacionamento virtual

D) (UFRJ) Ana e Bia participam de um *site* de relacionamentos. No dia 1º de abril de 2005, elas notaram que Ana tinha exatamente 128 vezes o número de amigos de Bia. Ana informou que para cada amigo que tinha no final de um dia, três novos amigos entravam para sua lista de amigos no dia seguinte. Já Bia disse que para cada amigo que tinha no final de um dia, cinco novos amigos entravam para sua lista no dia seguinte. Suponha que nenhum amigo deixe as listas e que o número de amigos aumente, por dia, conforme elas informaram.

a) No dia 2 de abril de 2005, 20 novos amigos entraram para a lista de Bia. Quantos amigos havia na lista de Ana em 1º de abril?

b) Determine a partir de que dia o número de amigos de Bia passa a ser maior que o número de amigos de Ana. Se precisar, use a desigualdade $1{,}584 < \log_2 3 < 1{,}585$.

Solução:

Amigos de Ana:
No dia 1º de abril Ana tinha a_1.
No dia 2 de abril Ana tinha $a_2 = a_1 + 3a_1 = 4a_1$.
No dia 3 de abril Ana tinha $a_3 = a_2 + 3a_2 = 4a_2 = 16a_1$.
Os amigos de Ana estão na PG $(a_1, 4a_1, 16a_1, ...)$ de razão $q_a = 4$.
Amigos de Bia:
No dia 1º de abril Bia tinha b_1.
No dia 2 de abril Bia tinha $b_2 = b_1 + 5b_1 = 6b_1$
No dia 3 de abril Bia tinha $b_3 = b_2 + 5b_2 = 6b_2 = 36b_1$
Os amigos de Bia estão na PG $(b_1, 6b_1, 36b_1, ...)$ de razão $q_b = 6$.

a) Como no dia 2 de abril entraram 20 novos amigos de Bia, temos:
$5b_1 = 20 \Rightarrow b_1 = 4$
O enunciado informa que em 1º de abril
$a_1 = 128b_1 \Rightarrow a_1 = 128 \cdot 4 = 2^7 \cdot 2^2 = 2^9 = 512$.
Resposta: Havia 512 amigos.

b) Temos então as progressões geométricas:
Ana: $(2^9, 2^{11}, 2^{13}, ...)$ $\quad a_n = 2^9 \cdot (2^2)^{n-1} = 2^{2n+7}$
Bia: $(2^2, 3 \cdot 2^3, 3^2 \cdot 2^4, ...)$ $\quad b_n = 2^2 \cdot (2 \cdot 3)^{n-1} = 2^{n+1} \cdot 3^{n-1}$

Devemos ter: $b_n > a_n$

$2^{n+1} \cdot 3^{n-1} > 2^{2n+7} \Rightarrow 3^{n-1} > 2^{n+6} \Rightarrow 3^{n-1} > 2^{n-1} \cdot 2^7$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} > 2^7$

Aplicando logaritmos na base 2:

$(n-1)\log_2 \frac{3}{2} > 7\log_2 2 \Rightarrow (n-1)(\log_2 3 - 1) > 7$

$n - 1 > \frac{7}{\log_2 3 - 1}$

Por outro lado, se $1{,}584 < \log_2 3 < 1{,}585$,

subtraindo 1 de todos os membros: $0{,}584 < \log_2 3 - 1 < 0{,}585$

Invertendo: $\frac{1}{0{,}584} > \frac{1}{\log_2 3 - 1} > \frac{1}{0{,}585}$

Multiplicando por 7: $\frac{7}{0{,}584} > \frac{7}{\log_2 3 - 1} > \frac{7}{0{,}585}$

Como $n - 1 > \frac{7}{\log_2 3 - 1} > \frac{7}{0{,}585} \Rightarrow n - 1 > 11{,}96 \Rightarrow n > 12{,}96$

<u>Resposta:</u> A partir de 13 de abril.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Dê a classificação das seguintes PGs, em face de sua razão:

a) (2, 4, 8, 16, 32, ...)

b) $\left(-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, ...\right)$

c) (–2, –4, –8, –16, –32, ...)

d) $\left(9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, ...\right)$

e) (–9, –9, –9, –9, ...)

f) (–3, 9, –27, 81, –243, ...)

2 Determine a lei de formação para a PG (2, 4, 8, ...).

3 Obtenha o nono termo da PG: $\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, ...$

4 Em uma PG, temos que o 20º termo é igual a 2048 e a razão é 2. Determine o primeiro termo.

5 Inserir 6 meios geométricos entre 2 e 256.

6 No preço de uma mercadoria há anualmente um acréscimo de 10%. Supondo que o preço atual seja de R$ 100,00, determine o preço daqui a 3 anos.

7 Em uma PG de razão positiva, temos que: $a_5 = 10$ e $a_7 = 16$. Determine o sexto termo dessa PG.

8 (Mack-SP) Cada golpe de uma bomba de vácuo extrai 10% do ar de um tanque. Se a capacidade inicial do tanque é de 1 m^3, após o quinto golpe, o valor mais próximo para o volume de ar que permanece no tanque é:

(A) 0,590 m^3
(B) 0,500 m^3
(C) 0,656 m^3
(D) 0,600 m^3
(E) 0,621 m^3

9 Em uma PG de três termos, a soma deles vale 21 e o produto 216. Determine essa PG.

10 Suponha uma inflação mensal de 4% durante um ano. De quanto será a inflação acumulada nesse ano?

1.2.4 – Soma dos termos da PG finita

Consideremos a PG finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$ de razão $q \neq 1$.
Deseja-se calcular:
$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$
Multiplicando ambos os membros dessa igualdade pela razão q, temos:
$Sq = a_1q + a_2q + ... + a_{n-1}q + a_nq$
Fazendo a diferença $Sq - S$ e tendo em vista que $a_1q = a_2, a_2q = a_3, ..., a_{n-1}q = a_n$, vem:

$$Sq - S = a_nq - a_1 \Rightarrow S(q-1) = a_nq - a_1 \Rightarrow \boxed{S = \frac{a_nq - a_1}{q-1}}$$

NOTA
Se $q = 1$, a PG é $(a_1, a_1, a_1, ..., a_1)$ e então $S = n \cdot a_1$.

Como $a_n = a_1q^{n-1}$, substituindo em S, vem:

$$S = \frac{a_1q^{n-1} \cdot q - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} \Rightarrow \boxed{S = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}}$$

Exemplos:

i) $S = 1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{63} = \dfrac{1 \cdot (2^{64} - 1)}{2-1} = 2^{64} - 1$

ii) $S = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{32} = \dfrac{1 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^6 - 1}{-\dfrac{1}{2} - 1} = \dfrac{\dfrac{1}{64} - 1}{-\dfrac{3}{2}} =$

$= \left(-\dfrac{63}{64}\right) \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{21}{32}$

Exercícios resolvidos:

1) Calcular a expressão geral dos números da sequência:
$1, 11, 111, 1\,111, ..., \underbrace{11...1}_{n}$

Solução:

$a_1 = 1,\ a_2 = 1 + 10,\ a_3 = 1 + 10 + 100, ..., a_n = 1 + 10 + 100 + ... + 10^{n-1}$

$$a_n = \frac{10^{n-1} \cdot 10 - 1}{10 - 1} \Rightarrow a_n = \frac{10^n - 1}{9}$$

OBSERVAÇÃO
$22...2 = 2 \cdot \dfrac{10^n - 1}{9}$,

$33...3 = 3 \cdot \dfrac{10^n - 1}{9}$, ...

2) Um menino propôs ao seu pai que lhe desse R$ 1,00 no dia 15 de dezembro e fosse, a cada dia, dobrado o valor da quantia diária, até o dia 24 de dezembro. No dia 25 de dezembro, ele daria ao pai, com o dinheiro acumulado, um presente de Natal. O pai aceitou a proposta, desde que o

presente custasse o dobro da quantia que o filho recebesse no dia 24. Esse acordo é ou não vantajoso para o menino?

Solução:

Quantia acumulada do dia 15 ao dia 24, 10 dias.

$$Q = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9 = \frac{2^9 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = \text{R\$ } 1.023{,}00$$

Quantia recebida no dia 24: $a_{10} = a_1 q^9 = 1 \cdot 2^9 =$ R$ 512,00
Preço do presente do pai: $2 \cdot 512 =$ R$ 1.024,00

Resposta: O acordo é desvantajoso para o menino, pois faltará R$ 1,00 para comprar o presente.

3) Uma professora corrigiu suas provas em 9 dias da seguinte maneira: no 1º dia corrigiu metade das provas mais meia prova; no 2º dia corrigiu metade das restantes mais meia prova; no 3º dia corrigiu metade das que restavam mais meia prova e assim procedeu até o 9º dia, quando terminou a correção das provas. Quantas provas ela corrigiu?

Solução:

Seja x o número de provas.

No 1º dia foram corrigidas $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$ provas e restaram $x - \frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{2}$ provas.

No 2º dia foram corrigidas $\frac{x-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4}$ provas e restaram $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-3}{4}$ provas.

No 3º dia foram corrigidas $\frac{x-3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}$ provas.

As provas corrigidas formam a PG: $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x+1}{4}, \frac{x+1}{8}, \ldots\right)$ com nove termos. A soma das provas corrigidas é o total de provas x.

Temos: $a_1 = \frac{x+1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ e $a_9 = a_1 q^8 = \frac{x+1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{x+1}{2^9}$

$$S = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} \Rightarrow x = \frac{\frac{x+1}{2^9} \cdot \frac{1}{2} - \frac{x+1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow -\frac{1}{2}x = (x+1)\left(\frac{1}{2^{10}} - \frac{1}{2}\right)$$

$$x = (x+1) \cdot \left(1 - \frac{1}{2^9}\right) \Rightarrow x = x + 1 - \frac{x+1}{2^9} \Rightarrow \frac{x+1}{2^9} = 1$$

$$x = 2^9 - 1 = 511$$

Resposta: Ela corrigiu 511 provas.

1.2.5 – Limite da soma

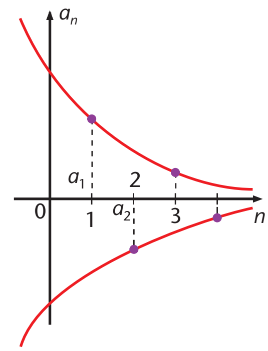
Consideremos uma PG infinita em que $|q| < 1$.

Sabemos que: $1 > |q| > |q|^2 > |q|^3 > \ldots > |q|^{n-1} > |q|^n$

Como $|a_n| = |a_1| \cdot |q|^{n-1}$, os $|a_n|$ vão diminuindo e se tornando cada vez menores, dizemos que $\lim a_n = 0$.

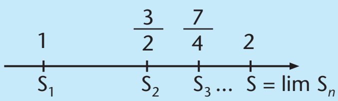
Assim, a soma $S = \dfrac{a_n q - a_1}{q - 1}$ vai se aproximando do valor que representamos

por: $\lim\limits_{n \to \infty} S = \dfrac{0 \cdot q - a_1}{q - 1} \Rightarrow \boxed{\lim S = \dfrac{a_1}{1 - q}}$



Exemplos:

i) $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2$



$S_1 = a_1 = 1$

$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4}$

$\vdots$

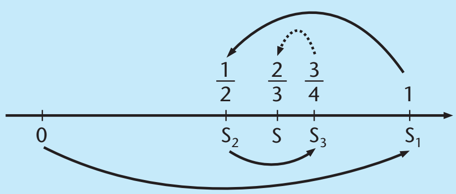
ii) $S = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \ldots = \dfrac{1}{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$

$S_1 = 1$

$S_2 = \dfrac{1}{2}$

$S_3 = \dfrac{3}{4}$

$\vdots$



iii) $0,999... = 0,9 + 0,09 + 0,009 + ... = \dfrac{0,9}{1 - 0,1} = \dfrac{0,9}{0,9} = 1$

$0,999... = 1 = 1,000...$

OBSERVAÇÃO
Analogamente:
1,999... = 2
2,999... = 3

Exercícios resolvidos:

1) Determinar a geratriz da dízima 3,2151515...

Solução:

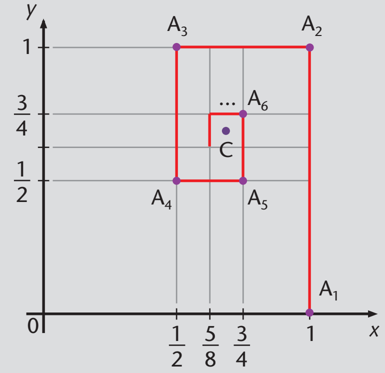
$d = 3,2151515... = 3,2 + 0,015 + 0,00015 + ...$

$$d = \frac{32}{10} + \frac{15}{10^3} + \frac{15}{10^5} + \frac{15}{10^7} + ... = \frac{32}{10} + \frac{15}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + ...\right)$$

$$d = \frac{32}{10} + \frac{15}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{32}{10} + \frac{15}{10^3} \cdot \frac{10^2}{99} = \frac{3\,183}{990}$$

$$d = \frac{1\,061}{330}$$

2) Considere a espiral A_1 A_2 A_3 A_4 ... prolongada infinitamente. Determine o ponto C para o qual ela converge.



Solução:

As abscissas convergem para o ponto:

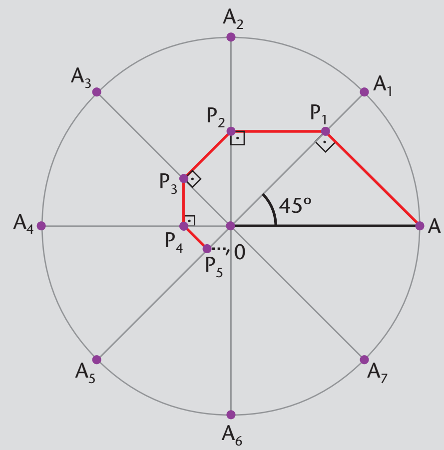
$$x = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ... = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

As ordenadas convergem para o ponto:

$$y = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ... = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

O ponto para o qual a poligonal converge é $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

3) Considere o octógono inscrito no círculo de raio 1, como indica a figura.



Projeta-se A sobre OA_1 obtendo P_1.
Projeta-se P_1 sobre OA_2 obtendo P_2.
Projeta-se P_2 sobre OA_3 obtendo P_3 e assim sucessivamente.
Calcular o comprimento da espiral $AP_1P_2P_3P_4...$ prolongada infinitamente.

<u>Solução:</u>

Deseja-se $S = AP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + ...$; com uma infinidade de parcelas.

Temos: $AP_1 = 1 \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $P_1P_2 = OP_1 \operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{2}$

$P_2P_3 = OP_2 \cos 45^\circ = OP_1 \cos 45^\circ \cos 45^\circ = \cos^3 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}$, ...

$S = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + ...$; que é a soma dos termos de uma PG de razão

$q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$S = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2} = \sqrt{2} + 1$$

4) Calcular $L = \sqrt{x \sqrt[3]{y \sqrt{x \sqrt[3]{y...}}}}$, em que $x > 0$ e $y > 0$.

<u>Solução:</u>

$$L = \sqrt{x \sqrt[3]{y \sqrt{x \sqrt[3]{y...}}}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{12}} \cdot y^{\frac{1}{36}} \cdot ...$$

$$L = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{72} + ...} \cdot y^{\frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216} + ...} = x^{\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{6}}} \cdot y^{\frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}}}$$

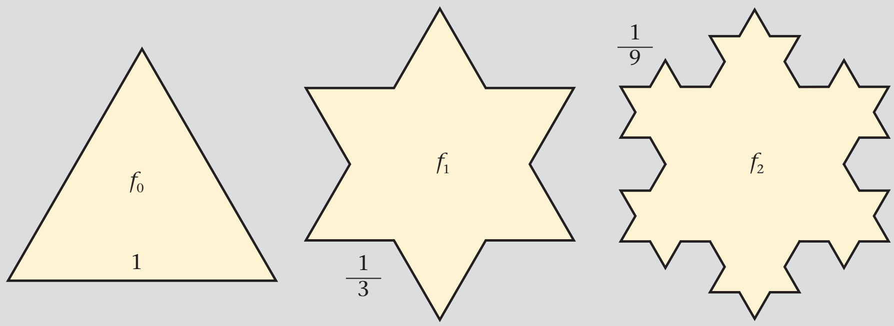
$$L = x^{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}} \cdot y^{\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}}} = x^{\frac{3}{5}} y^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x^3 y}$$

OBSERVAÇÃO
As únicas possibilidades de valores de L podem ser encontradas notando que:

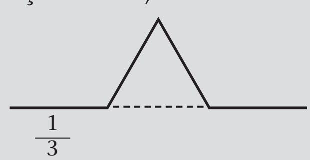
$L = \sqrt{x \sqrt[3]{y \underbrace{\sqrt{x \sqrt[3]{y...}}}_{L}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow L = \sqrt{x \sqrt[3]{yL...}} \Rightarrow$
$\Rightarrow L^6 = x^3 y L \Rightarrow$
$\Rightarrow L = 0$ ou $L = \sqrt[5]{x^3 y}$
Como $L \neq 0$, **se L existir**, será $L = \sqrt[5]{x^3 y}$.

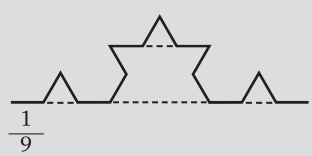
5)



As figuras acima representam os três primeiros passos da construção de um fractal a partir de um triângulo equilátero de lado 1.
1º passo: construção de um triângulo equilátero de lado 1. Figura f_0.
2º passo: divide-se cada lado do triângulo em 3 partes iguais e constrói-se um novo triângulo no terço central, retirando esse segmento. Figura f_1.



3º passo: repete-se o processo com os segmentos obtidos, e assim sucessivamente. Figura f_2 e seguintes.



Calcular:

i) o perímetro da figura f_n;

ii) a área da figura f_n;

iii) o limite da área quando n tende para infinito.

<u>Solução:</u>

i) Vemos que cada lado da figura f_{n-1} se transforma em 4 lados da figura f_n, logo $x_n = 4x_{n-1}$.
Os números de lados formam então uma PG, tal que:
$x_0 = 3$, $x_1 = 4x_0 = 12$, $x_2 = 4x_1 = 48$, ...
PG: (3, 12, 48, ...). Observe que x_n é o $(n + 1)^{\text{o}}$ termo dessa PG, logo:

$$x_n = 3 \cdot 4^{(n+1)-1} \Rightarrow x_n = 3 \cdot 4^n$$

OBSERVAÇÃO
De 0 a n existem $(n + 1)$ números naturais.

Seja ℓ_n o comprimento do lado do polígono f_n. Temos que: $\ell_n = \frac{1}{3}\ell_{n-1}$, então:

$$\ell_0 = 1,\ \ell_1 = \frac{1}{3}\ell_0 = \frac{1}{3},\ \ell_2 = \frac{1}{3}\ell_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9},\ \ldots$$

Os comprimentos dos lados formam a PG $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots\right)$ em que ℓ_n é o seu $(n + 1)^{\underline{o}}$ termo, logo:

$$\ell_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)-1} \Rightarrow \ell_n = \frac{1}{3^n}$$

Chamando p_n o perímetro do polígono f_n, temos:

$$p_n = x_n\ell_n = 3 \cdot 4^n \cdot \frac{1}{3^n} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \Rightarrow p_n = \frac{4^n}{3^{n-1}}$$

Observe que, ao ocorrer $q > 1$, $q < q^2 < q^3 < \ldots < q^n$, temos que o perímetro da figura cresce infinitamente.

ii) Seja agora S_n a área do polígono f_n. Essa área será a área anterior mais tantos triângulos equiláteros quantos forem os lados da figura f_{n-1}, isto é, x_{n-1}.

Assim: $S_n = S_{n-1} + x_{n-1} \cdot \frac{\ell_n^2\sqrt{3}}{4}$, então:

$$S_n = S_{n-1} + 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = S_{n-1} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{3^2}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Como $S_0 = \frac{1^2\sqrt{3}}{4}$, então $S_n = S_{n-1} + \frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}} \cdot S_0$

Fazendo $n = 1, 2, 3, \ldots, n$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = S_0 + \frac{1}{3} \cdot S_0 \\ S_2 = S_1 + \frac{4}{3^3} \cdot S_0 \\ S_3 = S_2 + \frac{4^2}{3^5} \cdot S_0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ S_n = S_{n-1} + \frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}} \cdot S_0 \end{array}\right\} \text{Somando membro a membro essas } n \text{ igualdades:}$$

$$S_n = S_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \frac{4^2}{3^5} + \ldots + \frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}}\right) S_0$$

Somando os termos da PG de razão $\frac{4}{3^2}$, vem:

$$S_n = S_0 + \frac{\frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}} \cdot \frac{4}{3^2} - \frac{1}{3}}{\frac{4}{3^2} - 1} = S_0\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{4^n}{3^{2n}} - 1}{-\frac{5}{9}}\right)$$

$$S_n = S_0\left[1 + \frac{3}{5}\left(1 - \frac{4^n}{3^{2n}}\right)\right] = S_0\left(\frac{8}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{4^n}{3^{2n}}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{5} S_0\left[8 - 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

iii) Como a razão da PG é $\frac{4}{3^2} < 1$, $\lim \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$, então $\lim S_n = \frac{8}{5} \cdot S_0$ ou

$\lim S_n = \frac{8}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$, uma vez que $S_0 = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Determine a soma dos cinco primeiros termos de uma PG, sabendo-se que $a_1 = 8$, e a razão é $q = 3$.

2 Calcule a soma dos 10 primeiros termos da PG (1, 3, 9, 27, ...).

3 Calcule a soma dos termos da PG $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\right)$.

4 ABCD é um quadrado de lado *a*. Com os vértices nos pontos médios de seus lados, constrói-se um novo quadrado, e procedendo assim, sucessivamente, constroem-se infinitos quadrados. Calcular a soma das infinitas áreas assim obtidas.

5 Uma bola de basquete é solta de uma altura de 9 m. Cada vez que bate no chão, sobe até $\frac{1}{3}$ da altura de onde caiu da última vez. Determine a distância total que a bola percorrerá até parar.

6 Determine a geratriz da dízima periódica, em cada caso:

a) 0,323232...

b) 1,2111...

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (UFRRJ) Se a sequência (a_n) é definida por: $a_1 = 4$ e $a_{n+1} = a_n + 3n$ para $n \geq 1$, então a_{51} é igual a:

(A) 3829 (B) 3891 (C) 3900 (D) 3999 (E) 4825

2 (ITA-SP) O valor de n que torna a sequência $2 + 3n$, $-5n$, $1 - 4n$ uma progressão aritmética pertence ao intervalo:

(A) $[-2, -1]$ (B) $[-1, 0]$ (C) $[0, 1]$ (D) $[1, 2]$ (E) $[2, 3]$

3 (Ufal) As idades de três pessoas são numericamente iguais aos termos de uma progressão aritmética de razão 5. Se daqui a 3 anos a idade da mais velha for o dobro da idade da mais jovem, nessa época, a soma das três idades será:

(A) 36 anos. (B) 38 anos. (C) 42 anos. (D) 45 anos. (E) 48 anos.

4 O segundo e o penúltimo termos de uma PA são iguais a 3 e 137, respectivamente. Calcule a média aritmética de todos os termos dessa PA.

5 (PUC-SP) Qual é o perímetro de um triângulo retângulo que tem área de 54 m² e cujos lados estão em progressão aritmética?

(A) 54 m (B) 48 m (C) 42 m (D) 36 m (E) 12 m

6 (UFPI) Se $\frac{1}{x+y}$, $\frac{1}{y+z}$, $\frac{1}{z+x}$ estão em progressão aritmética, também estarão em progressão aritmética:

(A) x^2, y^2, z^2 (B) x^2, z^2, y^2 (C) y^2, z^2, x^2 (D) z^2, x^2, y^2 (E) z^2, y^2, x^2

7 (UEL-PR) Se a sequência $(-8, a, 22, b, 52)$ é uma progressão aritmética, então o produto $a \cdot b$ é igual a:

(A) 273 (B) 259 (C) 124 (D) 42 (E) 15

8 (Uerj) Com palitos iguais constrói-se uma sucessão de figuras planas, conforme sugerem os desenhos a seguir:

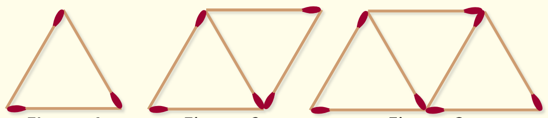


Figura 1 Figura 2 Figura 3

O número de triângulos congruentes ao da figura 1 existentes em uma figura formada com 135 palitos é:

(A) 59 (B) 60 (C) 65 (D) 66 (E) 67

9 (Unificado-RJ) A soma dos termos de uma PA de 5 termos é $\frac{k}{2}$. Então o terceiro termo dessa progressão é:

(A) $\frac{k}{10}$ (B) $\frac{k}{5}$ (C) k (D) 2k (E) $\frac{5k}{2}$

10 (UFSCar-SP) A soma dos cinco primeiros termos de uma PA vale 15 e o produto desses termos é zero. Sendo a razão da PA um número inteiro e positivo, o segundo termo dessa sequência vale:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

11 (UFPI) Se em uma progressão aritmética de razão positiva o produto dos três primeiros termos é 384 e a soma é 24, então o quarto termo é:

(A) 0 (B) 4 (C) 8 (D) 12 (E) 16

12 (Fatec-SP) Inserindo-se cinco números entre 18 e 96, de modo que a sequência $(18, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, 96)$ seja uma progressão aritmética, tem-se a_3 igual a:

(A) 43 (B) 44 (C) 45 (D) 46 (E) 47

13 (Mack-SP) A sequência $(2, a, b, \ldots, p, 50)$ é uma progressão aritmética de razão $r < \frac{2}{3}$, onde, entre 2 e 50, foram colocados k termos. Então, o valor mínimo de k é:

(A) 64 (B) 66 (C) 68 (D) 70 (E) 72

14 (Unirio-Ence-RJ) Um agricultor estava perdendo a sua plantação, em virtude da ação de uma praga. Ao consultar um especialista, foi orientado para que pulverizasse, uma vez ao dia, uma determinada quantidade de certo produto, todos os dias, da seguinte maneira:

- primeiro dia: 1,0 litro;
- segundo dia: 1,2 litro;
- terceiro dia: 1,4 litro;

e assim sucessivamente.

Sabendo-se que o total de produto pulverizado foi de 63 litros, o número de dias de duração deste tratamento nesta plantação foi de:

(A) 21 (C) 25 (E) 30
(B) 22 (D) 27

15 (UFRJ-RJ) Os ângulos internos de um quadrilátero convexo estão em progressão aritmética de razão igual a 20°. Determine o valor do maior ângulo desse quadrilátero.

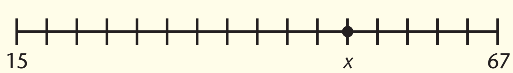
16 (Cesgranrio-RJ) As medidas dos ângulos A, B, C e D de um quadrilátero convexo estão em progressão aritmética. Sabendo-se que o menor ângulo é A = 30°:

a) encontre o maior ângulo;

b) calcule o valor da expressão:

$$y = \frac{\operatorname{sen} 3A + \cos 2A + \sec 8A}{1 + \operatorname{tg} \frac{3A}{2}}$$

17 (UFMG) Observe a figura:



Essa figura representa o intervalo da reta numérica determinado pelos números dados. Todos os intervalos indicados (correspondentes a duas marcas consecutivas) têm o mesmo comprimento. O número correspondente ao ponto *x* assinalado é:

(A) 47,50 (C) 48,75
(B) 50,75 (D) 54

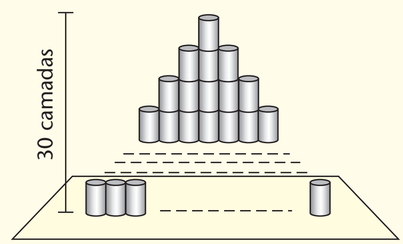
18 (Fatec-SP) Na compra a prazo de um aparelho eletrodoméstico, o total pago por uma pessoa foi R\$ 672,00. A entrada teve valor correspondente a $\frac{1}{6}$ do total, e o restante foi pago em 4 parcelas, cujos valores formaram uma progressão aritmética crescente de razão R\$ 40,00. O valor da última prestação foi:

(A) R\$ 220,00 (C) R\$ 210,00 (E) R\$ 200,00
(B) R\$ 215,00 (D) R\$ 205,00

19 (UFV-MG) Usando-se um conta-gotas, um produto químico é misturado a uma quantidade de água da seguinte forma: a mistura é feita em intervalos regulares, visto que no primeiro intervalo são colocadas 4 gotas e nos intervalos seguintes são colocadas 4 gotas mais a quantidade misturada no intervalo anterior. Sabendo-se que no último intervalo o número de gotas é 100, o total de gotas do produto misturadas à água é:

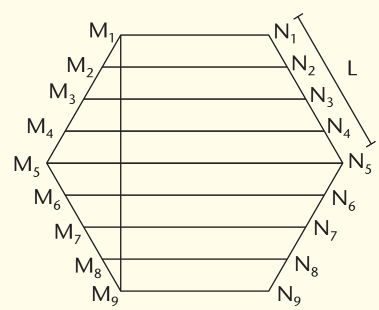
(A) 1 300 (C) 1 600 (E) 1 200
(B) 1 100 (D) 900

20 (UFF-RJ) Uma certa quantidade de latas de atum vai ser disposta em uma pilha de 30 camadas, conforme a figura abaixo.



Determine a quantidade de latas da pilha.

21 (UFF-RJ) O hexágono regular abaixo representado possui lado igual a L.

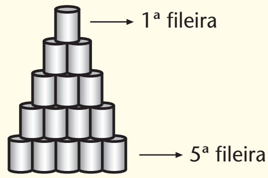


Sabendo-se que os 9 segmentos $\overline{M_1N_1}$, $\overline{M_2N_2}$, ..., $\overline{M_9N_9}$ são todos paralelos e dividem o segmento $\overline{M_1M_9}$ em 8 partes iguais, pode-se afirmar que a soma $\overline{M_1N_1}$ + + $\overline{M_2N_2}$ + ... + $\overline{M_9N_9}$ é igual a:

(A) 11L (C) 13L (E) 15L
(B) 12L (D) 14L

22 (UEL-PR) Em um supermercado, as latas de certos produtos são expostas em pilhas, encostadas em uma parede: com 1 lata na primeira fileira (a superior), 2 latas na segunda fileira, 3 latas na terceira, e assim por diante. Observe na figura a seguir uma dessas pilhas, com 5 fileiras.

Um funcionário deve fazer uma pilha de 1,60 m de altura, com latas de 4 cm de altura cada uma. Se as latas desse produto são embaladas em caixas com 75 latas em cada caixa, ele necessita retirar do estoque:



(A) 9 caixas e não haverá sobra de latas;
(B) 10 caixas, mas sobrarão 12 latas;
(C) 10 caixas, mas sobrarão 30 latas;
(D) 11 caixas, mas sobrarão 3 latas;
(E) 11 caixas, mas sobrarão 5 latas.

23 (Unirio-RJ) A soma dos termos da sequência finita $\left(\log_x \frac{x}{10}, \ \log_x x, \ \log_x 10x, \ \ldots, \ \log_x 10\,000x\right)$, onde $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ e $\log x = 0{,}6$, vale:

(A) 21,0 (B) 18,6 (C) 12,6 (D) 8,0 (E) 6,0

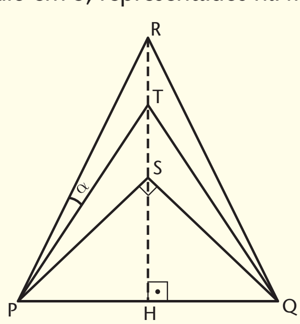
24 (Unirio-RJ) Numa caminhada, os participantes A e B desenvolveram os seguintes ritmos:

Intervalo de tempo (minutos)	Distância percorrida em cada intervalo (metros)	
	Participante A	Participante B
De 0 a 10	700	600
De 10 a 20	680	570
De 20 a 30	660	540
De 30 a 40	640	510
⋮	⋮	⋮

Sabendo-se que A e B iniciaram a caminhada juntos e de um mesmo ponto, e que as sequências estabelecidas foram mantidas, por ambos, até o final do passeio, a distância, em metros, entre o participante A e o B, no exato momento em que B parou de caminhar é:

(A) 3 330 (B) 3 610 (C) 3 900 (D) 4 200 (E) 4 510

25 (UFF-RJ) Considere o triângulo isósceles PRQ de base $\overline{PQ}$ e altura $\overline{HR}$, o triângulo equilátero PTQ e o triângulo PSQ, retângulo em $\hat{S}$, representados na figura abaixo.



Sabendo que as medidas dos ângulos $\hat{R}$, $\hat{T}$ e $\hat{S}$ estão, nesta ordem, em progressão aritmética, o ângulo α mede:

(A) 5° (B) 15° (C) 30° (D) 45° (E) 60°

26 (PUC-RJ) Seja f a função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ definida por $f(x)$ igual a $\begin{cases} 2x - 1, \text{ se } x \text{ é par} \\ 0, \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$

Nessas condições, a soma $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \ldots + f(999) + f(1\,000)$ é igual a:

(A) 50 150 (B) 100 500 (C) 250 500 (D) 500 500 (E) 1 005 000

27 (Fuvest-SP) A soma das frações irredutíveis, positivas, menores do que 10, de denominador 4, é:

(A) 10 (B) 20 (C) 60 (D) 80 (E) 100

28 (Puccamp-SP) Um veículo parte de uma cidade A em direção a uma cidade B, distante 500 km. Na 1ª hora do trajeto ele percorre 20 km; na 2ª hora, 22,5 km; na 3ª hora, 25 km; e assim sucessivamente. Ao completar a 12ª hora do percurso, a que distância esse veículo estará de B?

(A) 95 km (B) 115 km (C) 125 km (D) 135 km (E) 155 km

29 (Umesp) Fernando resolveu rifar seu aparelho de som. Para tanto, numerou etiquetas – somente com números pares – de 2 a 48. Cada participante sorteava uma das etiquetas e, conforme o número retirado, pagava o seu valor em reais (por exemplo: quem retirou a etiqueta com o número 14, pagou R$ 14,00) e no dia do sorteio concorria com o mesmo número que estava nessa etiqueta.
Sabendo-se que o valor do aparelho era de R$ 480,00 e que Fernando vendeu todas as etiquetas, o lucro porcentual obtido por ele foi de:

(A) 30% (B) 20% (C) 45% (D) 50% (E) 25%

30 (UFF-RJ) Sendo x um número real não nulo, a soma do terceiro termo da progressão aritmética $(x, 2x, \ldots)$ com o terceiro termo da progressão geométrica $(x, 2x, \ldots)$ é igual a:

(A) $4x$ (B) $5x$ (C) $6x$ (D) $7x$ (E) $8x$

31 Calcule a média geométrica dos 100 primeiros termos da progressão (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...).

32 (UFRN) A direção de uma escola decidiu enfeitar o pátio com bandeiras coloridas. As bandeiras foram colocadas em linha reta, na seguinte ordem: 1 bandeira vermelha, 1 azul, 2 vermelhas, 2 azuis, 3 vermelhas, 3 azuis, e assim por diante. Depois de colocadas exatamente 99 bandeiras, o número das de cor azul é:

(A) 55
(B) 60
(C) 50
(D) 45

33 (UFRGS) Se n é um natural ímpar, o número de elementos da sequência $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ..., \underbrace{n, n, ..., n}_{n \text{ vezes}}$ que são números pares é:

(A) $\frac{n^2 - 1}{4}$
(B) $\frac{n^2 - 1}{2}$
(C) $\frac{n(n + 1)}{4}$
(D) $\frac{n(n + 1)}{2}$
(E) $\frac{(n + 1)^2}{4}$

34 (Unifor-CE) Sabe-se que em uma progressão aritmética com $2n$ termos, a soma dos termos de ordem ímpar é S_1 e a soma dos de ordem par é S_2. A razão dessa progressão é:

(A) $\frac{S_2 - S_1}{n}$
(B) $\frac{S_1 + S_2}{n}$
(C) $\frac{S_1 - S_2}{n}$
(D) $n(S_1 + S_2)$
(E) $n(S_2 - S_1)$

35 (Ufes) Na progressão aritmética –177, –173, ..., um certo número de termos foi somado (–177 – 173 – ...) de forma a se obter a menor soma possível. Essa soma vale:

(A) –3 999
(B) –4 002
(C) –4 004
(D) –4 005
(E) –4 006

36 (UFRJ) Observe a sucessão de matrizes a seguir, constituída com os números ímpares positivos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 17 & 19 \\ 21 & 23 \end{bmatrix}, ...$$

a) Determine o maior número escrito ao se completar a 37ª matriz.

b) O número 661 aparece na N-ésima matriz. Determine N.

37 Considere a disposição triangular de números abaixo:

		1		
	2	3	4	
5	6	7	8	9
10	11	12	....	

a) Que número fica diretamente acima de 142?

b) Calcule a soma dos números da vigésima linha.

38 (UFF-RJ) Dadas as progressões aritméticas $(p_1, p_2, ..., p_{51})$ e $(q_1, q_2, ..., q_{51})$ tais que $p_1 + p_{51} = m$ e $q_1 + q_{51} = n$, então $\frac{p_1 + p_2 + ... + p_{51}}{q_1 + q_2 + ... + q_{51}}$ é igual a:

(A) $m + n$
(B) $\frac{m + n}{n}$
(C) $m \cdot n$
(D) $\frac{m}{n}$
(E) $\frac{m + n}{n \cdot n}$

39 (Fatec-SP) Se o lado, a altura e a área de um triângulo equilátero formam, nessa ordem, uma progressão geométrica, então a medida do lado desse triângulo é um número:

(A) irracional.
(B) racional.
(C) inteiro.
(D) real e maior que $\sqrt{3}$.
(E) real e compreendido entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

40 (UFV-MG) As medidas do lado, do perímetro e da área de um quadrado estão, nessa ordem, em progressão geométrica. A diagonal desse quadrado mede:

(A) $16\sqrt{2}$
(B) $10\sqrt{2}$
(C) $12\sqrt{2}$
(D) $14\sqrt{2}$
(E) $18\sqrt{2}$

41 (UFRGS) A sequência $(x, xy, 2x)$, $x \neq 0$, é uma progressão geométrica. Então, necessariamente:

(A) x é um número irracional.
(B) x é um número racional.
(C) y é um número irracional.
(D) y é um número racional.
(E) $\frac{x}{y}$ é um número irracional.

42 (ITA-SP) O conjunto de todos os números reais $q > 1$, para os quais a_1, a_2 e a_3 formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão q e representam as medidas dos lados de um triângulo, é:

(A) $\left]1, \frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right[$ (D) $\left]1, \frac{(1+\sqrt{5})}{4}\right[$

(B) $\left]1, \frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right]$ (E) $]1, 1+\sqrt{5}[$

(C) $\left]1, \frac{(1+\sqrt{5})}{\sqrt{5}}\right]$

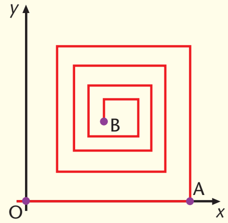
43 (UFRN) Um fazendeiro dividiu 30 km² de suas terras entre seus 4 filhos, de idades distintas, de modo que as áreas dos terrenos recebidos pelos filhos estavam em progressão geométrica, de acordo com a idade, tendo recebido mais quem era mais velho. Ao filho mais novo coube um terreno com 2 km² de área.
O filho que tem idade imediatamente superior à do mais novo recebeu um terreno de área igual a:

(A) 10 km² (C) 4 km²
(B) 8 km² (D) 6 km²

44 (UCDB-MS) Numa progressão geométrica crescente, qualquer termo é $\frac{1}{6}$ da soma dos dois termos que lhes são consecutivos. A razão dessa progressão é igual a:

(A) –6 (C) 1 (E) 2
(B) –3 (D) $\sqrt{2}$

45 (Fuvest-SP) No plano cartesiano, os comprimentos dos segmentos consecutivos da poligonal, que começa na origem O e termina em B (ver figura abaixo), formam uma progressão geométrica de razão p, com $0 < p < 1$. Dois segmentos consecutivos são sempre perpendiculares. Então, se OA = 1, a abscissa x do ponto B = (x, y) vale:



(A) $\frac{1-p^{12}}{1-p^4}$ (C) $\frac{1-p^{16}}{1-p^2}$ (E) $\frac{1-p^{20}}{1-p^4}$

(B) $\frac{1-p^{12}}{1+p^2}$ (D) $\frac{1-p^{16}}{1+p^2}$

46 (Uece) Seja (b_1, b_2, b_3, b_4) uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$. Se $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 20$, então b_4 é igual a:

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{7}{2}$

47 (UFRGS) A tabela abaixo apresenta, em cada linha, o número de cabeças de um rebanho no final do ano dado.

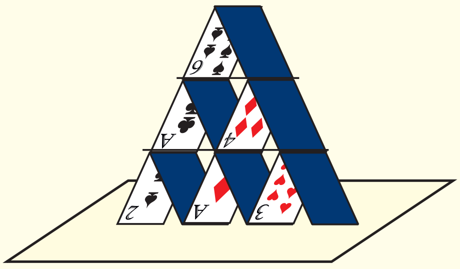
Ano	Cabeças
1997	2 000
1998	1 600
1999	1 280
...	...
...	...

Se o rebanho continuar decrescendo anualmente na progressão geométrica indicada pela tabela, no final de 2006 o número de cabeças do rebanho estará entre:

(A) 10 e 80 (C) 100 e 400 (E) 800 e 1 000
(B) 80 e 100 (D) 400 e 800

(Dado: log 2 = 0,3010.)

48 (UFRJ) Num Ka Kay, o oriental famoso por sua inabalável paciência, deseja bater o recorde mundial de construção de castelo de cartas.
Ele vai montar um castelo na forma de um prisma triangular no qual cada par de cartas inclinadas que se tocam deve estar apoiado em uma carta horizontal, excetuando-se as cartas da base, que estão apoiadas em uma mesa. A figura a seguir apresenta um castelo com três níveis.



Num Ka Kay quer construir um castelo com 40 níveis. Determine o número de cartas que ele vai utilizar.

49 (Uerj) Considere o número irracional 0,1010010001... onde a parte decimal foi construída justapondo-se os termos da progressão geométrica (10, 100, 1 000, ...). A quantidade de algarismos da parte decimal até o milésimo 1 (um) inclusive é:

(A) 500 000 (C) 500 499 (E) 500 501

(B) 500 001 (D) 500 500

50 (Unificado-RJ) O número de assinantes de um jornal de grande circulação no estado aumentou, nos quatro primeiros meses do ano, em progressão geométrica, segundo os dados de uma pesquisa constantes na tabela abaixo.

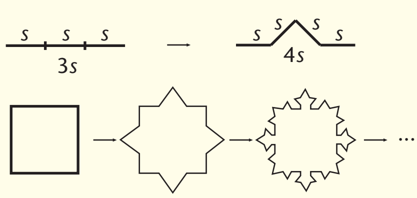
Mês	janeiro	fevereiro	março	abril
Número de assinantes	5 000	– – – –	6 050	– – – –

Em relação ao mês de fevereiro, o número de assinantes desse jornal no mês de abril teve um aumento de:

(A) 1 600 (C) 1 155 (E) 1 050

(B) 1 510 (D) 1 150

51 (UFF-RJ) Certas imagens captadas por satélites espaciais, quando digitalizadas, são representadas por formas geométricas de aspecto irregular ou fragmentado, conhecidas por fractais. Podem-se obter tais fractais pela alteração da forma original e uma curva por meio de um processo em que os resultados de uma etapa são utilizados como ponto de partida para a etapa seguinte.
Considere o processo tal que, em todas as etapas, cada segmento de reta é transformado em uma poligonal cujo comprimento é quatro vezes a terça parte do segmento original, como ilustrado na figura abaixo.

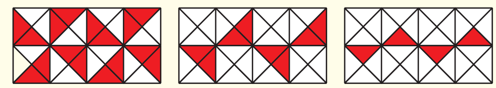


Por esse processo, a partir de um quadrado com 1 metro de lado, obtém-se a sequência de figuras apresentadas. O perímetro, em metros, do quinto polígono dessa sequência é:

(A) $\frac{4^4}{3^3}$ (C) $\frac{4^5}{3^4}$ (E) $\frac{3^4}{4^4}$

(B) $\frac{4^4}{3^5}$ (D) $\frac{3^5}{4^5}$

52 (UFF-RJ) Os retângulos R_1, R_2 e R_3, representados nas figuras abaixo, são congruentes e estão divididos em regiões de mesma área.



R_1 R_2 R_3

Ao se calcular o quociente entre a área da região pintada e a área total de cada um dos retângulos R_1, R_2 e R_3, verifica-se que os valores obtidos formam uma progressão geométrica (PG) decrescente de três termos. A razão dessa PG é:

(A) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (E) 4

(B) $\frac{1}{4}$ (D) 2

53 (Cesgranrio-RJ) Desde 1992, certo instituto de pesquisa vem monitorando, no início de cada ano, o crescimento populacional de uma pequena cidade do interior do Estado. Os itens a seguir mostram o resultado dos três primeiros anos, em milhares de habitantes.

I) Ano de 1992, população (em milhares) = 25,6.

II) Ano de 1993, população (em milhares) = 38,4.

III) Ano de 1994, população (em milhares) = 57,6.

Mantida essa mesma progressão de crescimento, o número de habitantes dessa cidade, no início do ano 2000, em milhares, seria, aproximadamente, de:

(A) 204 (C) 576 (E) 728

(B) 384 (D) 656

54 (UFRGS) Na sequência de figuras, cada quadrado tem 1 cm² de área. Supondo que as figuras continuem evoluindo no mesmo padrão aqui encontrado, a área da figura 20 terá valor:

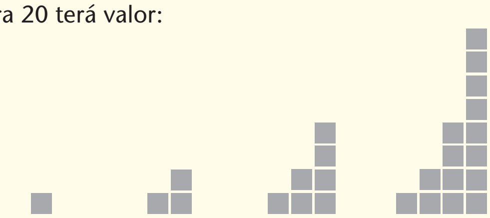


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

(A) entre 0 e 1 000.

(B) entre 1 000 e 10 000.

(C) entre 10 000 e 50 000.

(D) entre 50 000 e 100 000.

(E) maior que 100 000.

55 (PUC-RJ) O valor do produto $2 \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[16]{2}$ é:

(A) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (C) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ (E) ∞

(B) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

56 (Vunesp) No dia 1º de dezembro, uma pessoa enviou pela Internet uma mensagem para *x* pessoas. No dia 2, cada uma das *x* pessoas que recebeu a mensagem no dia 1º enviou a mesma para outras duas novas pessoas. No dia 3, cada pessoa que recebeu a mensagem no dia 2 também enviou a mesma para outras duas novas pessoas. E assim sucessivamente. Se, do dia 1º até o final do dia 6 de dezembro, 756 pessoas haviam recebido a mensagem, o valor de *x* é:

(A) 12 (C) 52 (E) 126

(B) 24 (D) 63

57 (PUC-RJ) Pai e filho fizeram a seguinte aposta: o pai premiaria o filho com R$ 1,00 pelo primeiro exercício que o filho acertasse, com R$ 2,00 pelo segundo exercício acertado, com R$ 4,00 pelo terceiro exercício, e assim por diante, sempre dobrando o prêmio. O filho, por sua vez, devolveria ao pai, usando o mesmo critério do pai, cada vez que errasse um exercício.
Se ao final de 10 exercícios o filho recebeu R$ 120,00, quantos exercícios ele acertou?

(A) 9 (C) 7 (E) 5

(B) 8 (D) 6

58 (UFMG) Uma criação de coelhos foi iniciada há exatamente um ano e, durante esse período, o número de coelhos duplicou a cada 4 meses. Hoje, parte dessa criação deverá ser vendida para ficar com a quantidade inicial de coelhos. Para que isso ocorra, a porcentagem da população atual dessa criação de coelhos a ser vendida é:

(A) 75% (C) 83,33%

(B) 80% (D) 87,5%

59 (UFJF-MG) Um aluno do curso de biologia estudou durante nove semanas o crescimento de uma determinada planta, a partir de sua germinação. Observou que, na primeira semana, a planta havia crescido 16 mm. Constatou ainda que, em cada uma das oito semanas seguintes, o crescimento foi sempre a metade do crescimento da semana anterior. Dentre os valores a seguir, o que melhor aproxima o tamanho dessa planta, ao final dessas nove semanas, em milímetros, é:

(A) 48 (C) 32 (E) 24

(B) 36 (D) 30

60 (UnB-DF) Conta uma lenda que o rei de certo país ficou tão impressionado ao conhecer o jogo de xadrez que quis recompensar seu inventor, dando-lhe qualquer coisa que ele pedisse. O inventor, então, disse ao rei: "Dê-me simplesmente 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, 2 grãos pela segunda casa, 4 grãos pela terceira, 8 grãos pela quarta, e assim sucessivamente, até a 64ª casa do tabuleiro". O rei considerou o pedido bastante simples e ordenou que fosse cumprido. Supondo que um grão de trigo tem massa igual a 0,05 g e que a produção mundial de trigo em 1997 foi de 560 milhões de toneladas, julgue os itens a seguir.

a) O número de grãos de trigo devido ao inventor apenas pela 11ª casa do tabuleiro é menor que 1000.

b) Até a 30ª casa seriam devidas ao inventor mais de 50 toneladas de grãos.

c) A quantidade de trigo devida apenas pela 31ª casa corresponde à quantidade recebida até a 30ª casa acrescida de um grão.

d) Seriam necessárias mais de 1000 vezes a produção mundial de trigo de 1997 para recompensar o inventor.

61 (ITA-SP) Um triângulo tem lados medindo 3, 4 e 5 centímetros. A partir dele, constrói-se uma sequência de triângulos do seguinte modo: os pontos médios dos lados de um triângulo são os vértices do seguinte. Dentre as alternativas abaixo, o valor, em centímetros quadrados, que está mais próximo da soma das áreas dos 78 primeiros triângulos assim construídos, incluindo o triângulo inicial, é:

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

62 (Ufal) Em uma cultura de bactérias, o número de microrganismos duplica a cada 20 minutos. Iniciando-se com uma população de 100 bactérias, o tempo *t* necessário para se alcançar uma população de 5000 bactérias é tal que:

(A) 1h < t < 1h40min

(B) 1h40min < t < 2h

(C) 2h < t < 2h30min

(D) 2h30min < t < 2h50min

(E) 2h50min < t < 3h

63 (Uerj) João propôs a seu filho Pedro que, a partir do primeiro dia daquele mês, lhe daria diárias da seguinte maneira: R$ 100,00 no primeiro dia, R$ 110,00 no segundo, R$ 120,00 no terceiro e assim por diante, ou seja, aumentando R$ 10,00 a cada dia.
Pedro pensou e fez uma contraproposta a seu pai: receberia R$ 2,00 no primeiro dia, R$ 4,00 no segundo, R$ 8,00 no terceiro e assim sucessivamente, ou seja, a cada dia a quantia seria o dobro da recebida no dia anterior.
João aceitou a proposta, pensando ser vantajosa. No entanto, na realidade, tal fato não ocorreu. Realizados os cálculos necessários, pode-se afirmar que Pedro acumulou um total superior ao total que teria recebido, até então, pela proposta de seu pai, a partir do seguinte dia:

(A) sexto.

(B) oitavo.

(C) décimo.

(D) décimo segundo.

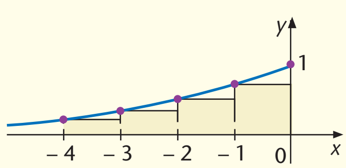
(E) décimo quarto.

64 (PUC-RJ) A soma $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{999} + 2^{1000}$ é igual a:

(A) $2^{1001} - 1$ (C) 2^{1001} (E) $2^{1001} + 1$

(B) $2^{1002} - 1$ (D) $2^{1000} - 1$

65 (Ufes) A figura abaixo representa o gráfico da função $y = 2^x$, $x \leq 0$, e os primeiros elementos de uma sequência infinita de retângulos.



A soma das áreas de todos os retângulos dessa sequência infinita é:

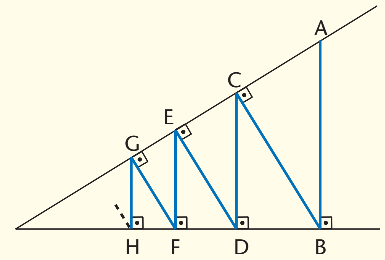
(A) $\frac{1}{2}$ ua (D) 2 ua

(B) 1 ua (E) maior que 2 ua

(C) $\frac{3}{2}$ ua

(Dado: ua = unidade de área.)

66 (Mack-SP) Na figura a seguir, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem, respectivamente, 5 e 4. Então o valor mais próximo da medida de AB + BC + CD + DE + EF + ... é:



(A) 17 (C) 21 (E) 25

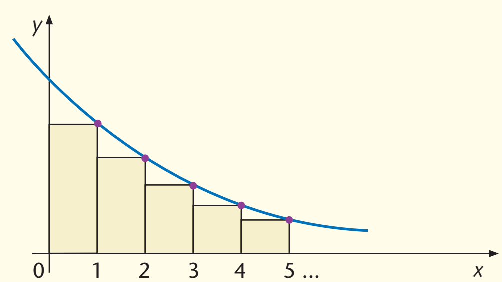
(B) 19 (D) 23

67 (FGV-RJ) Na equação $1 + \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{(1 + x^2)^2} + ... = 2$, o 1º membro é a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. A soma das raízes da equação é:

(A) 0 (C) 2 (E) 4

(B) 1 (D) 3

68 Considere a função definida por $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e os retângulos construídos sob seu gráfico, conforme a figura:

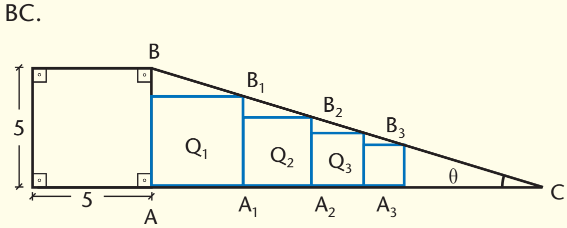


Um dos vértices de cada retângulo pertence ao gráfico de f e o número de retângulos tende para infinito. A soma das áreas desses retângulos tende a:

(A) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (E) 4

(B) $\frac{1}{3}$ (D) 2

69 (UFRJ) Na figura abaixo, os quadrados Q_1, Q_2, Q_3, ... estão apoiados no cateto AC do triângulo retângulo ABC, e possuem vértices B_1, B_2, B_3, ... na hipotenusa BC.



a) Determine a razão entre o lado do quadrado Q_{n+1} e o lado do quadrado Q_n em função do ângulo $A\hat{C}B = \theta$.

b) Determine o comprimento de AC para que a soma das áreas dos quadrados Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n, ... seja igual à metade da área do triângulo ABC.

70 (UFF-RJ) São dadas duas progressões: uma aritmética (PA) e outra geométrica (PG).

Sabe-se que:

- a razão da PG é 2;
- em ambas o primeiro termo é igual a 1;
- a soma dos termos da PA é igual à soma dos termos da PG;
- ambas têm 4 termos.

Pode-se afirmar que a razão da PA é:

(A) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{7}{6}$ (E) $\frac{11}{6}$

(B) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{9}{6}$

71 (PUC-RJ) Considere uma progressão geométrica crescente, cujo primeiro termo é diferente de zero, e uma progressão aritmética decrescente, cujo primeiro termo é zero. Somando-se os termos correspondentes das duas progressões, obtém-se a sequência (2, 1, 2, a_4, a_5, ..). A diferença $a_5 - a_4$ é igual a:

(A) 13 (C) 18 (E) 22

(B) 15 (D) 20

72 (Cesgranrio-RJ) O professor G. Ninho, depois de formar uma progressão aritmética de 8 termos, começando pelo número 3 e composta apenas de números naturais, notou que o segundo, o quarto e o oitavo termos formavam, nessa ordem, uma progressão geométrica. G. Ninho observou ainda que a soma dos termos dessa progressão geométrica era igual a:

(A) 42 (C) 32 (E) 24

(B) 36 (D) 28

73 (UFF-RJ) Considere x, y e z três números reais positivos, distintos entre si, tais que

$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)(x - y + z)$.

Pode-se afirmar que:

(A) x, y e z estão, nessa ordem, em PA.

(B) x, y e z estão, nessa ordem, em PG.

(C) $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ e $\frac{1}{z}$, estão, nessa ordem, em PA.

(D) $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$ estão, nessa ordem, em PG.

(E) x^2, z^2 e y^2 estão, nessa ordem, em PA.

Desafios

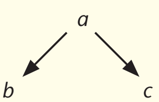
1 (UFRJ) João Esperto organizou um clube de investimentos denominado Pirâmide das Ilusões. Como fundador do clube, João Esperto tornou-se o sócio com inscrição de número 1.

Pelo estatuto do clube, cada sócio deve indicar oportunamente dois novos membros. O sócio que indica os dois novos membros é chamado de padrinho destes dois novos sócios e estes são denominados seus afilhados.

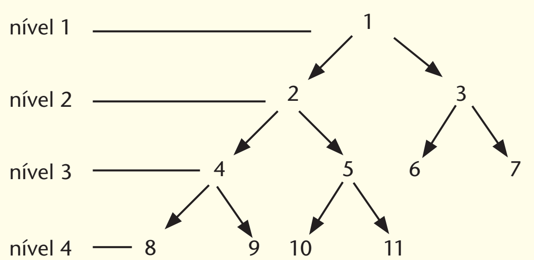
Cada novo sócio recebe também seu respectivo número de inscrição no clube. De acordo com o estatuto, o sócio com número de inscrição n indica seus afilhados após a indicação e inscrição dos afilhados do sócio de número ($n - 1$).

Os novos sócios são sempre inscritos um a um, cada um deles recebendo como número de inscrição o número inteiro seguinte ao número total de sócios já inscritos.

Para representar o fato de que "o sócio a é padrinho dos sócios b e c" usamos o diagrama:



A figura abaixo ilustra a organização do clube no momento em que o número total de sócios era igual a onze, indicando também a sucessão de níveis na organização dos sócios.



O clube Pirâmide das Ilusões tem hoje mais de 13 000 sócios.

Em relação ao sócio número 5 017 determine:

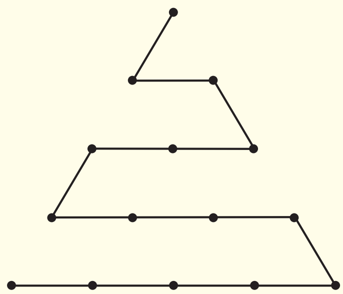
a) o número de inscrição de cada um dos seus afilhados;

b) o número de inscrição do seu padrinho;

c) o seu nível na organização dos sócios;

d) a quantidade de sócios no mesmo nível que ele, mas com número de inscrição inferior a 5 017.

2 (UFRJ) Cem fileiras de pontos são formadas de modo que a primeira linha tenha apenas um ponto e cada linha subsequente contenha um ponto a mais do que a anterior. Todos os pontos são unidos, por segmentos de comprimento 1, de acordo com a lei de formação indicada, para as cinco primeiras fileiras, na figura.



Determine o número total de segmentos unitários obtidos com essa construção.

3 (UFF-RJ) Um projeto estabelece que, em uma parede retangular com 3,5 m de altura, sejam colocadas, do chão ao teto, placas quadradas, com 50 cm de lado. Essas placas formarão fileiras superpostas do seguinte modo:

- a primeira fileira ocupará toda a base da parede com as placas colocadas com um dos lados junto ao chão;
- na segunda fileira haverá a metade do número de placas da primeira, na terceira fileira haverá a metade do número de placas da segunda, e assim sucessivamente;
- na última fileira haverá apenas uma placa com um dos lados encostado no teto;
- as placas serão colocadas lado a lado em todas as fileiras em que houver mais de uma placa.

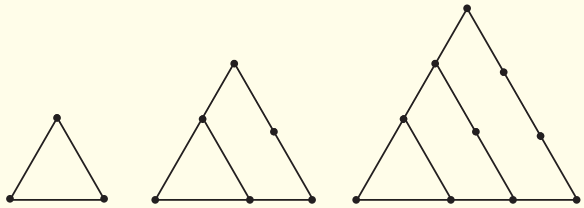
Qual o total de placas que serão utilizadas na execução desse projeto?

4 (Uerj) Geraldo contraiu uma dívida que deveria ser paga em prestações mensais e iguais de R$ 500,00 cada uma, sem incidência de juros ou qualquer outro tipo de correção monetária. Um mês após contrair essa dívida, Geraldo pagou a 1ª prestação e decidiu que o valor de cada uma das demais prestações seria sempre igual ao da anterior, acrescido de uma parcela constante de K reais, sendo K um número natural. Assim, a dívida poderia ser liquidada na metade do tempo inicialmente previsto.

a) Considerando t o tempo, em meses, inicialmente previsto, $t > 2$ e $t - 2$ como um divisor par de $2\,000$, demonstre que $K = \dfrac{2\,000}{t-2}$.

b) Se a dívida de Geraldo for igual a R$ 9.000,00, calcule o valor da constante K.

5 Os números 1, 3, 6, 10, 15, ... são chamados de **números triangulares**. Tal nomenclatura está justificada pela sequência de triângulos.



a) Determine uma expressão algébrica para o n-ésimo número triangular.

b) Prove que o quadrado de todo número inteiro maior que 1 é a soma de dois números triangulares consecutivos.

CAPÍTULO II

NOÇÕES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

Estrangeiro já tem mais de 10% da dívida do País

Em agosto, não residentes detinham R$ 150 bilhões em papéis da dívida; porcentual subiu de 9,54% em julho para 10,06%

Fabio Graner
Adriana Fernandes
BRASÍLIA

Pela primeira vez na história, a participação de investidores estrangeiros na dívida interna em títulos superou a marca dos 10%.

Segundo dados divulgados ontem pelo Tesouro Nacional, investidores não residentes no Brasil detinham em agosto mais de R$ 150 bilhões em papéis da Dívida Pública Mobiliária Federal interna (DPMFi), que encerrou o mês passado em R$ 1,524 trilhão, com alta de 1% sobre o mês anterior. Os estrangeiros, que em julho detinham uma parcela de 9,54% da dívida, em agosto estavam com 10,06%.

Há um ano, quando a crise já começava a ficar no retrovisor, o estoque em mãos de estrangeiros era de 6,36%. O Tesouro acompanha e divulga a posição dos não residentes na dívida desde 2006, ano em que foi retirada a cobrança de imposto de renda para estimular as aplicações desses investidores em papéis da dí-

Investidores no Tesouro Direto somam 200,6 mil

● O número de investidores cadastrados no programa Tesouro Direto (programa de venda de títulos para pessoas físicas na internet) ultrapassou em agosto a marca de 200 mil pessoas, atingindo 200.648 investidores, que detinham até o mês passado um estoque de R$ 3,9 bilhões em títulos públicos. "Esse estoque deverá superar os R$ 4 bilhões neste mês", disse o coordenador geral de operações da dívida pública, Fernando Garrido.

Em agosto, as emissões de títulos no Tesouro Direto somaram [illegible] bilhões.

vida [illegible]
Se[illegible] orden[illegible]
de O[illegible] Dívi[illegible]
Ferr[illegible]
mos[illegible]

cia de aumento da presença estrangeira na dívida interna. A expectativa, disse ele, é de que essa parcela siga com um "crescimento gradual". Garrido afirmou que não há meta para esse indicador, mas destaca que, ao se comparar com outros países, há espaço para a continuidade dessa expansão. No México, a parcela de estrangeiros na dívida interna é superior a 15% e nos países do Leste Europeu, acima de 20%.

Fatores. O aumento da presença estrangeira nos papéis do governo vendidos no mercado interno reflete a combinação de diversos fatores. Um deles é a taxa básica de juros, que está entre as maiores do mundo. Isso é reforçado em um ambiente em que os países centrais operam com taxas próximas ou igual a zero, o que leva a uma grande oferta de dinheiro à procura de rentabilidade maior.

Além disso, o Brasil [illegible]

Reprodução Leo Burgos/Fabio Graner e Adriana Fernandes, publicado no jornal O Estado de São Paulo, em 24/09/2010, pág. B10, Caderno Economia

Neste capítulo, estudaremos proporcionalidades (e regras de três) e Matemática Financeira.

2 – NOÇÕES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

2.1 – Grandezas proporcionais

DEFINIÇÃO
Razão.

A **razão** de duas grandezas a e b ($b \neq 0$) de mesma espécie é o quociente de a por b.

NOTA
A razão de duas grandezas é o número que mede a primeira tomada a segunda como unidade.

Por exemplo:

Quando se diz que a razão entre duas áreas, s_1 e s_2, é 4, isso significa que a primeira é 4 vezes a segunda.

Escrevemos $\frac{s_1}{s_2} = 4$ ou $s_1 = 4s_2$.

Se $\frac{a}{b} = k$, dizemos que a está para b assim como k.

NOTA
Na razão $\frac{a}{b}$, o a é o **antecedente** e o b é o **consequente**.

DEFINIÇÃO
Proporção.

Chama-se **proporção** a igualdade de duas razões: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Lê-se: a está para b assim como c está para d.

Propriedades

1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c \quad (b, d \neq 0)$

2) Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então:

i) $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$, pois

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1 \Rightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

ii) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$, pois

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \\ \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \end{cases}$$

dividindo membro a membro, temos:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

Exercícios resolvidos:

1) Que número deve ser somado aos termos da razão $\frac{3}{5}$ para que a nova razão seja $\frac{5}{6}$?

Solução:

$$\frac{3+x}{5+x}=\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{3+x}{(5+x)-(3+x)}=\frac{5}{6-5}$$

$$\frac{3+x}{2}=\frac{5}{1} \Rightarrow 3+x=10 \Rightarrow x=7$$

2) Determinar a, b e c na sucessão de razões $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$, sabendo que $a + b - c = 10$.

Solução: Chamando as razões iguais de k:

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=k \Rightarrow \begin{cases} a=3k \\ b=4k \\ c=5k \end{cases}$$

Então:
$3k + 4k - 5k = 10$
$2k = 10 \Rightarrow k = 5$
Logo, $a = 3 \cdot 5 \Rightarrow a = 15$
$b = 4 \cdot 5 \Rightarrow b = 20$
$c = 5 \cdot 5 \Rightarrow c = 25$

3) Sabendo que $\frac{3}{a}=\frac{4}{b}=\frac{5}{c}=\frac{6}{d}$ e $abcd = 29\,160$, calcular a, b, c e d.

Solução: Como as razões são iguais, chamemos de k.
Temos, então:

$$\frac{3}{a}\cdot\frac{4}{b}\cdot\frac{5}{c}\cdot\frac{6}{d}=k\cdot k\cdot k\cdot k \quad \text{logo:}$$

$$\frac{360}{abcd}=k^4 \Rightarrow \frac{360}{29160}=k^4 \Rightarrow \frac{1}{81}=k^4 \Rightarrow k=\pm\frac{1}{3}$$

i) $$k=\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{a}=\frac{1}{3} \Rightarrow a=9 & \frac{5}{c}=\frac{1}{3} \Rightarrow c=15 \\ \frac{4}{b}=\frac{1}{3} \Rightarrow b=12 & \frac{6}{d}=\frac{1}{3} \Rightarrow d=18 \end{cases}$$

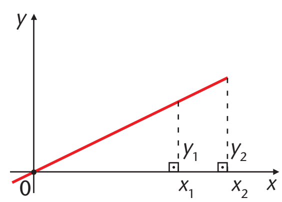
ii) $k = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = -9$, $b = -12$, $c = -15$ e $d = -18$.

2.1.1 – Grandezas diretamente proporcionais

DEFINIÇÃO
Proporcionalidade direta.

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando se correspondem de modo que uma delas duplicando, triplicando, quadruplicando etc., a outra, ao mesmo tempo, duplica, triplica, quadruplica etc. Se, no entanto, uma delas reduzir-se à metade, ao terço, à quarta parte etc., a outra também reduzir-se-á à metade, ao terço, à quarta parte etc.

Quando $y = ax$ $(a \in \mathbb{R}^*)$, y e x são diretamente proporcionais.
Chamamos o número a de **fator de proporcionalidade**.



$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \ldots = a$$

Exemplos:

i) Para fazer um bolo para 5 pessoas gastam-se 3 ovos; o mesmo bolo feito para 10 pessoas, 6 ovos; para 15 pessoas, 9 ovos etc. Assim, o número de ovos é diretamente proporcional ao número de pessoas, isto é: $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{9} = \ldots$

ii) Quando se compra uma quantidade Q de um produto por um preço V, uma quantidade 2Q custará 2V, 3Q custará 3V etc.
Assim, se Q custa V, Q' custará V', tais que:
$\frac{Q}{V} = \frac{2Q}{2V} = \frac{3Q}{3V} = \ldots$ ou seja $\frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'}$

2.1.2 – Grandezas inversamente proporcionais

DEFINIÇÃO
Proporcionalidade inversa.

Duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando se correspondem de modo que uma delas duplicando, triplicando, quadruplicando etc., a outra, ao mesmo tempo, reduz-se à metade, à terça parte, à quarta parte etc.

Se, no entanto, uma delas reduzir-se à metade, à terça parte, à quarta parte etc., a outra parte ampliar-se-á ao dobro, ao triplo, ao quádruplo etc.

Se duas grandezas Q e P são inversamente proporcionais, então uma será diretamente proporcional ao inverso da outra.

$$\frac{Q}{\frac{1}{P}} = \frac{Q'}{\frac{1}{P'}}$$

$$QP = Q'P'$$

ou

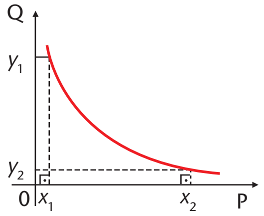
$$\frac{Q}{Q'} = \frac{\frac{1}{P}}{\frac{1}{P'}}$$

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{P'}{P}$$

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = k$$

ou

$$y = \frac{1}{x} \cdot k$$



Exemplos:

i) Quando se faz uma obra com 5 operários em 8 dias, a mesma obra será feita com 10 operários em 4 dias.

ii) Se dispomos de R$ 120,00 para comprar livros que custam R$ 20,00, compramos 6 livros; se os livros custam R$ 15,00 compramos 8 livros; se os livros custam R$ 10,00 compramos 12 livros.

Quando se dispõe de certa quantia e ela se presta para comprar uma quantidade Q de objetos, a um preço P cada um; para comprar 2Q objetos, o preço de cada um deverá ser $\frac{P}{2}$; para comprar 3Q objetos, o preço será $\frac{P}{3}$ etc.
Assim, a quantia disponível será:

$$QP = (2Q) \cdot \left(\frac{P}{2}\right) = (3Q) \cdot \left(\frac{P}{3}\right) = \ldots$$

Se a quantia disponível compra Q objetos ao preço P, ela compraria Q' objetos ao preço P', de modo que $QP = Q'P' \Leftrightarrow \frac{Q}{Q'} = \frac{P'}{P}$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Num automóvel *total flex*, mistura-se 10 litros de álcool com 40 litros de gasolina. Pedem-se as razões:

a) Entre o álcool e a gasolina.

b) Entre o álcool e a mistura.

c) Entre a gasolina e a mistura.

2 Felipe organizou uma festa para comemorar o seu aniversário. Convidou 60 moças e 40 rapazes. Sabendo-se que, às 22 horas, já estavam presentes todos os convidados, responda.

a) Qual a razão entre o número de moças e o de rapazes que estavam na festa às 22 horas?

b) Sabendo-se que até as 2 horas haviam saído da festa 18 moças e 4 rapazes, pode-se dizer que a razão, entre o número de moças e o de rapazes, permaneceu a mesma? Justifique.

c) Em qual dos horários Felipe tinha maior opção para escolher uma moça para dançar, às 22 horas ou às 2 horas?

3 A razão entre a velocidade de um ônibus e a de um carro de corrida é de 1 para 4. Sabendo-se que um ônibus anda 210 km em 3 horas, calcule a velocidade do carro de corrida.

4 (FGV-SP) Em uma sala de aula, a razão entre o número de homens e o de mulheres é $\frac{3}{4}$. Seja N o número total de pessoas (número de homens mais o de mulheres). Um possível valor para N é:

(A) 46
(B) 47
(C) 48
(D) 49
(E) 50

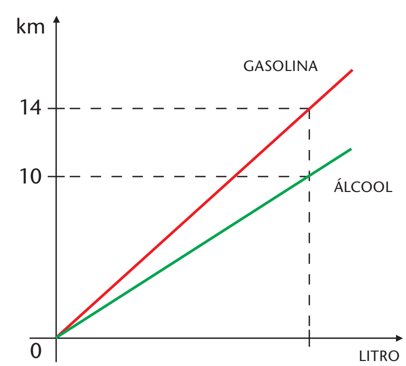
5 (Unifor-CE) Um caminhão-tanque com capacidade para transportar T litros faz a distribuição de um combustível em três postos: A, B e C. Partindo com o tanque cheio, deixou $\frac{3}{20}$ do total em A. Se em B deixou $\frac{5}{17}$ do que restou e em C os últimos 10 500 litros, então T é tal que:

(A) $16\,000 < T < 19\,000$
(B) $\sqrt{T} < 130$
(C) $T < 15\,000$
(D) $14\,000 < T < 17\,000$
(E) $T > 20\,000$

6 (Puccamp-SP) Um veículo vai da cidade A à cidade B e outro vai de B para A numa mesma estrada. Ambos partem num mesmo instante, mantêm velocidades constantes e se cruzam no ponto C, localizado a $\frac{3}{8}$ da distância de A para B. Nessas condições, se a velocidade do primeiro é 75 km/h, a velocidade do segundo é:

(A) 62 km/h
(B) 50 km/h
(C) 48 km/h
(D) 45 km/h
(E) 42 km/h

7 (Uerj) Analise o gráfico e a tabela:



Combustível	Preço por litro (em reais)
Gasolina	1,50
Álcool	0,75

De acordo com esses dados, a razão entre o custo do consumo, por km, dos carros a álcool e a gasolina é igual a:

(A) $\frac{4}{7}$
(B) $\frac{5}{7}$
(C) $\frac{7}{8}$
(D) $\frac{7}{10}$

8 Sessenta das 520 galinhas de um aviário *não* foram vacinadas; morreram 92 galinhas vacinadas. Para as galinhas vacinadas, a razão entre o número de mortas e vivas é:

(A) 1 : 4
(B) 1 : 5
(C) 4 : 1
(D) 4 : 5
(E) 5 : 4

9 (PUC-MG) Certa máquina de calcular faz 200 operações por minuto, enquanto um calculista consegue fazer 46 dessas operações no mesmo tempo. Pode-se afirmar que a calculadora é m vezes mais rápida que o calculista. O valor de m é tal que:

(A) $1 < m < 4$
(B) $4 < m < 7$
(C) $7 < m < 10$
(D) $10 < m < 13$

10 (Mack-SP) No setor de seleção de pessoal de uma empresa, 85 pessoas foram contratadas, a partir de 120 candidatos. Se dentre os pretendentes havia 3 homens para cada mulher, e se 20 mulheres foram contratadas, então o número de homens não aceitos foi de:

(A) 15
(B) 20
(C) 25
(D) 10
(E) 17

2.2 – Regra de três simples

DEFINIÇÃO
Regra de três.

Em uma proporção são relacionados quatro números dos quais conhecendo-se três deles se calcula o quarto. O processo de cálculo é chamado de **regra de três**.

A regra de três é simples quando se consideram apenas dois tipos de grandezas.

Ela é direta quando as grandezas são diretamente proporcionais e inversa quando as grandezas são inversamente proporcionais.

Exemplos:

i) *Regra de três direta.*
Se 5 kg de laranjas custam R$ 10,00, quanto custarão 18 kg de laranjas?

Solução:

1º método: Proporcional.
As grandezas são diretamente proporcionais, pois aumentando a quantidade de laranjas aumenta o valor a ser pago.

Assim: $\frac{5}{10} = \frac{18}{x} \Rightarrow 5x = 180 \Rightarrow x = 36$

Resposta: 18 kg custarão R$ 36,00.

2º método: Redução à unidade.

5 kg de laranjas custam R$ 10,00

1 kg de laranja custa $\frac{10}{5}$ reais

18 kg de laranjas custarão $18 \cdot \frac{10}{5} = 36$ reais

ii) *Regra de três inversa.*
Um navio leva víveres para uma tripulação de 10 pessoas durante 24 dias. Se a tripulação diminuir para 8 pessoas, por quantos dias os víveres durarão?

Solução:

1º método: Proporcional.

As grandezas são inversamente proporcionais, pois diminuindo o número de pessoas o número de dias aumenta.

Assim, $\frac{10}{8} = \frac{x}{24} \Rightarrow 8x = 240 \Rightarrow x = 30$ dias

ou $\frac{x}{24} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{10}} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{24}{8} \Rightarrow x = 30$ dias

2º método: Redução à unidade.

10 pessoas consomem os víveres em 24 dias

1 pessoa os consumiria em 240 dias

8 pessoas os consumirão em $\frac{240}{8} = 30$ dias

2.3 – Regra de três composta

Quando a proporção envolve um número qualquer de grandezas, algumas podem ser diretamente proporcionais e outras inversamente proporcionais. Quando a grandeza em questão depende de várias grandezas, a **regra de três** é **composta**.

Nesse caso, consideramos a grandeza principal relacionando-se com cada uma das outras grandezas supondo as demais constantes.

Exemplos:

i) Para construir um muro de 160 metros, são utilizados 10 operários trabalhando 8 horas por dia durante 15 dias. Quantos dias serão necessários para 15 operários trabalhando 10 horas por dia construírem um muro de 240 m, com a mesma altura e a mesma espessura?

Solução: A grandeza principal é o número de dias. Podemos dispor os dados da seguinte maneira.

Operários	Dias	Horas	Metros
10	15	8	160
15	x	10	240

1º método: Proporcional.

Vamos determinar de que tipo é a regra de três comparando o número de dias com o número de operários, considerando as demais variáveis como constantes.
Temos:

a) Se em 15 dias 10 operários fazem um muro, 15 operários farão o mesmo muro em menos dias. A regra de três é inversa (mais operários em menos dias).

b) Se em 15 dias são usadas 8 horas por dia para fazer um muro, com 10 horas por dia o mesmo muro será feito em menos dias.
A regra de três é inversa (mais horas em menos dias).

c) Se em 15 dias são feitos 160 m de um muro, nas mesmas condições de trabalho, 240 m de um muro serão feitos em mais dias. A regra de três é direta (mais muro em mais dias).
Assim:

$$\frac{15}{x} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{15}} \cdot \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{10}} \cdot \frac{160}{240} \Rightarrow \frac{15}{x} = \frac{15 \cdot 10 \cdot 160}{10 \cdot 8 \cdot 240} \Rightarrow x = 12 \text{ dias}$$

Poderemos raciocinar, também, da seguinte maneira:

NOTA
A flecha ↑ para cima significa que a grandeza aumentou e a flecha ↓ para baixo, que diminuiu.

	Operários	Dias	Horas	Metros
	10	15	8	160
Inversa	15↑	x_1↓	8	160
Inversa	15	x_2↓	10↑	160
Direta	15	x_3↑	10	240↑

$$\frac{10}{15} = \frac{x_1}{15} \qquad \frac{x_1}{x_2} = \frac{10}{8} \qquad \frac{x_2}{x_3} = \frac{160}{240}$$

NOTA
As regras de três parciais são feitas com as grandezas que não permanecem constantes.

Multiplicando essas razões membro a membro:

$$\frac{10}{15} \cdot \frac{\cancel{x_1}}{\cancel{x_2}} \cdot \frac{\cancel{x_2}}{x_3} = \frac{\cancel{x_1}}{15} \cdot \frac{10}{8} \cdot \frac{160}{240} \Rightarrow x_3 = \frac{\cancel{10} \cdot \cancel{15} \cdot 8 \cdot 240}{\cancel{15} \cdot \cancel{10} \cdot 160} = 12$$

NOTA
Observe que reduzimos à unidade o número de operários, depois o número de horas, em seguida, o número de metros de muro e, finalmente, calculamos o número de dias.

2º método: Redução à unidade.

a) Se 10 operários trabalhando 8 horas por dia fazem 160 m de muro em 15 dias, 1 operário precisaria, nas mesmas condições, 10 vezes mais dias, logo 15 · 10 dias.

b) Se 1 operário trabalhando 8 horas por dia necessita de 15 · 10 dias, trabalhando uma hora por dia necessitaria 15 · 10 · 8 dias.

c) Se um operário trabalhando 1 hora por dia faz um muro de 160 m em 15 · 10 · 8 dias, então ele fará o muro de 1 m em $\frac{15 \cdot 10 \cdot 8}{160}$ dias.

d) Portanto, 15 operários o farão em $\frac{15 \cdot 10 \cdot 8}{15 \cdot 160}$ dias.

e) Se eles trabalharem 10 horas por dia, precisarão de $\frac{15 \cdot 10 \cdot 8}{15 \cdot 10 \cdot 160}$ dias.

f) Como o muro tem 240 m, vão precisar de $\frac{15 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 240}{15 \cdot 10 \cdot 160}$ = 12 dias.

Esquematicamente:

Operários	Horas	Metros de muro	Dias
10	8	160	15
1	8	160	$15 \cdot 10$
1	1	160	$15 \cdot 10 \cdot 8$
1	1	1	$\frac{15 \cdot 10 \cdot 8}{160}$
15	1	1	$\frac{15 \cdot 10 \cdot 8}{15 \cdot 160}$
15	10	1	$\frac{15 \cdot 10 \cdot 8}{15 \cdot 10 \cdot 160}$
15	10	240	$\frac{15 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 240}{15 \cdot 10 \cdot 160} = 12$

ii) Se 10 kg de biscoitos são necessários para alimentar 8 crianças durante 5 dias, quantos quilogramas de biscoitos serão necessários para alimentar 12 crianças durante 16 dias?

Solução:

1º método: Proporcional.

kg	Crianças	Dias	
10	8	5	
$x\uparrow$	$12\uparrow$	$16\uparrow$	Todas são diretas.

Temos: $\frac{10}{x} = \frac{8}{12} \cdot \frac{5}{16} \Rightarrow x = \frac{10 \cdot 12 \cdot 16}{8 \cdot 5} = 48$

2º método: Redução à unidade.

kg	Crianças	Dias
10	8	5
$\frac{10}{8}$	1	5
$\frac{10}{8 \cdot 5}$	1	1
$\frac{10 \cdot 12}{8 \cdot 5}$	12	1
$\frac{10 \cdot 12 \cdot 16}{8 \cdot 5}$	12	16

Resposta: Serão necessários 48 kg de biscoitos.

NOTA
Se uma grandeza é proporcional a várias outras, ela é proporcional ao seu produto.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Seis pedreiros constroem uma ponte de 45 m de extensão em 9 dias. Em quantos dias, 10 pedreiros construirão uma ponte de 50 m de extensão e da mesma largura da outra, trabalhando no mesmo ritmo?

2 Uma máquina coloca rolhas em 2 500 garrafas, durante 6 dias, funcionando durante 10 horas diárias. Para colocar rolhas em 25 000 garrafas, durante 30 dias, quantas horas diárias a máquina deverá trabalhar?

3 Em 5 dias, funcionando 15 horas por dia, uma máquina produz 2 000 peças. Quantas peças ela produzirá em 8 dias, funcionando 12 horas por dia?

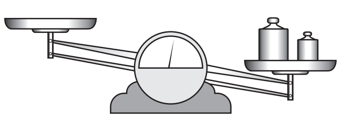
4 (PUC-RJ) Duas torneiras jogam água em um reservatório, uma na razão de 1 m^3 por hora e a outra na razão de 1 m^3 a cada 5 horas. Se o reservatório tem 12 m^3, em quantas horas ele estará cheio?

5 (FEI-SP) Utilizando-se simultaneamente dois guindastes A e B, um navio é carregado em 4 horas. Se apenas o guindaste A for utilizado, a operação demora 6 horas. Qual o tempo da operação se apenas o guindaste B for empregado?

(A) 5 horas
(B) 6 horas
(C) 8 horas
(D) 12 horas
(E) 16 horas

6 (Uerj) "Há mais truques entre o peixe e a balança do que imagina o consumidor...".
Com balanças mais antigas (aquelas que utilizam duas bandejas), muitas vezes o "peso" é oco, ou seja, marca apenas 500 g, mas pode pesar somente 300 g, por exemplo.

Adaptado de: *O Dia*, 28/8/1998.



Uma balança de dois pratos é usada para medir 2,5 kg de peixe, da seguinte forma: em um prato está o peixe, no outro um "peso" e 2 kg e mais um "peso" de 500 g. O peixe contém, em suas vísceras, um pedaço de chumbo de 200 g. O "peso" de 500 g, por ser oco, tem na verdade 300 g. Se 1 kg desse peixe custa R$ 12,60, o consumidor pagará, na realidade, o preço de:

(A) R$ 14,60
(B) R$ 15,00
(C) R$ 15,50
(D) R$ 16,00

7 (UFPE) Júnior possui uma fazenda onde recolhe 45 litros de leite de cabra por dia, que são utilizados na fabricação de queijo. Com cada 5 litros de leite, ele fabrica 1 kg de queijo. O queijo fabricado é então dividido em porções de 125 g que são empacotadas em dúzias. Cada pacote é vendido por R$ 6,00. Quanto Júnior arrecada por dia com a venda do queijo?

8 (Mack-SP) Na tabela a seguir, de valores positivos, F é diretamente proporcional ao produto de L pelo quadrado de H.

F	L	H
2000	3	4
3000	2	x

Então x vale:

(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

9 (ESPM-SP) Quando um automóvel é freado, a distância que ele ainda percorre até parar é diretamente proporcional ao quadrado de sua velocidade. Se um automóvel a 40 km/h é freado e para depois de percorrer mais 8 metros, se estivesse a 60 km/h, pararia após percorrer mais:

(A) 12 metros.
(B) 14 metros.
(C) 16 metros.
(D) 18 metros.
(E) 20 metros.

10 (UFJF-MG) Em um certo restaurante, as *pizzas* são feitas em formas de base circular. Os preços das *pizzas* do mesmo tipo variam proporcionalmente em relação à área da base da forma. Se uma *pizza* feita numa forma cuja base tem 20 cm de diâmetro custa R$ 3,60, então uma outra *pizza*, do mesmo tipo, feita numa forma cuja base tem 30 cm de diâmetro, deve custar:

(A) R$ 5,40
(B) R$ 7,90
(C) R$ 8,10
(D) R$ 8,50
(E) R$ 8,90

11 (Fatec-SP) Um certo setor de uma empresa tem várias máquinas, todas com o mesmo custo operacional por hora. Se o custo da operação de 3 delas, em 2 dias, funcionando 6 horas por dia, é de R reais, então o custo

de operação, em reais, de duas delas, em 4 dias, funcionando 5 horas por dia, é igual a:

(A) $\frac{8R}{9}$ (C) 2R (E) 5R

(B) $\frac{10R}{9}$ (D) 2,5R

12 (Uerj) Uma máquina que, trabalhando sem interrupção, fazia 90 fotocópias por minuto foi substituída por outra 50% mais veloz. Suponha que a nova máquina tenha que fazer o mesmo número de cópias que a antiga, em uma hora de trabalho ininterrupto, fazia.

Para isso, a nova máquina vai gastar um tempo mínimo, em minutos, de:

(A) 25 (C) 35

(B) 30 (D) 40

13 (Faap-SP) Quatro impressoras iguais imprimem 600 cartazes em 2,5 h. O tempo necessário para se imprimir o triplo de cartazes, utilizando apenas duas dessas máquinas, será:

(A) 2 h (D) 12 h 30 min

(B) 5 h (E) 15 h

(C) 7 h 30 min

2.4 – Divisão em partes proporcionais

Dividir um número N em partes proporcionais aos números $a_1, a_2, ..., a_n$ é determinar as partes $x_1, x_2, ..., x_n$ de N tais que $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = ... = \frac{x_n}{a_n}$ e $x_1 + x_2 + ... + x_n = N$.

Como $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = ... = \frac{x_n}{a_n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{a_1 + a_2 + ... + a_n} = \frac{N}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$,

então:

$$x_1 = \frac{a_1 N}{a_1 + ... + a_n}, x_2 = \frac{a_2 N}{a_1 + ... + a_n}, \; ..., \; x_n = \frac{a_n N}{a_1 + ... + a_n}.$$

Exemplos:

i) Dividir o número 600 em partes proporcionais a 3, 5 e 7.

Devemos ter: $\frac{x_1}{3} = \frac{x_2}{5} = \frac{x_3}{7} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3+5+7} = \frac{600}{15} = 40.$

Então: $x_1 = 120$, $x_2 = 200$ e $x_3 = 280$.

ii) A pólvora é uma mistura de 76 partes de nitrato de potássio, 14 partes de carvão e 10 partes de enxofre. Quanto de cada componente deve ser misturado para se obter 150 kg de pólvora?

Devemos ter: $\frac{x}{76} = \frac{y}{14} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{76+14+10} = \frac{150}{100}.$

Então: $x = \frac{76 \cdot 150}{100}$ = 114 kg de nitrato de potássio

$y = \frac{14 \cdot 150}{100}$ = 21 kg de carvão

$z = \frac{10 \cdot 150}{100}$ = 15 kg de enxofre

Exercícios resolvidos:

1) Um combustível é a mistura de gasolina e álcool na proporção de 4 para 1, respectivamente. Se o preço do litro da gasolina é R$ 2,50 e do álcool R$ 1,50, quanto custará o litro do combustível?

Solução:

Podemos pensar em 100 litros de combustível sendo g e a as quantidades de gasolina e álcool na mistura; assim temos:

$$\frac{g}{4} = \frac{a}{1} = \frac{g+a}{4+1} = \frac{100}{5} = 20$$

Logo, teremos: $g = 4 \cdot 20 = 80$ litros
$a = 1 \cdot 20 = 20$ litros

O custo de 100 litros de combustível será:
$80 \cdot 2{,}50 + 20 \cdot 1{,}50 = 200 + 30$, ou seja, R$ 230,00.

Resposta: O litro do combustível custará $\frac{230}{100}$, ou seja, R$ 2,30.

2) Um tipo de bronze é uma liga de cobre e estanho na proporção de 8,5 para 1,5. Uma moeda formada com essa liga tem massa de 20 g. Se o grama do cobre custa R$ 0,10 e do estanho R$ 0,20, qual deverá ser o valor mínimo dessa moeda para cobrir seu custo?

Solução:

Sendo c e e as quantidades de cobre e estanho em uma moeda, temos:

$$\frac{c}{8{,}5} = \frac{e}{1{,}5} = \frac{c+e}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

Então, as quantidades de cobre e estanho são:

$c = 8{,}5 \cdot 2 = 17$ g $\qquad$ $e = 1{,}5 \cdot 2 = 3$ g

Valor da liga:

$17 \cdot 0{,}10 + 3 \cdot 0{,}20 = 1{,}70 + 0{,}60 = 2{,}30$

Resposta: Essa moeda deve valer pelo menos R$ 2,30.

NOTA
Estamos pensando em 100 litros (ao invés de 1 litro) apenas para facilitar os cálculos.

Aplicação:

Regra de sociedade

Quando várias pessoas quotizam para formar uma sociedade, o lucro ou prejuízo deve ser repartido em partes proporcionais à participação de cada uma. Essa participação se chama ENTRADA de cada sócio e o valor total, que é a soma das entradas, se chama CAPITAL.

Quando os sócios participam da sociedade pelo mesmo tempo, a regra da sociedade é SIMPLES, pois a divisão em partes proporcionais não dependerá do tempo, dependendo, apenas, das entradas de cada sócio.

NOTA
Procure no dicionário o significado da palavra **quotizar.**

Exercícios resolvidos:

1) João e Pedro fizeram uma sociedade com entradas de R$ 120.000,00 e R$ 80.000,00, respectivamente. Ao fim de dois anos o lucro foi de R$ 60.000,00. Quanto coube a cada sócio?

Solução:

Devemos dividir R$ 60.000,00 em partes proporcionais a 120000 e 80000, ou, para ficar mais simples 120 e 80 ou, ainda, 3 e 2, respectivamente.

Assim: $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{x+y}{5} = \frac{60\,000}{5} = 12\,000$

Então:
$x = 36\,000$ reais e $y = 24\,000$ reais.

2) Os três primeiros colocados em uma Olimpíada de Matemática tiveram 20, 40 e 90 acertos, respectivamente, e vão repartir entre si, proporcionalmente ao seu desempenho, R$ 300,00. Que quantia cada um deve receber?

Solução:

Sejam x, y e z as quantias que cabem a cada um, então:

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{40} = \frac{z}{90} = \frac{x+y+z}{20+40+90} = \frac{300}{150} = 2$$

Portanto:
$x = 20 \cdot 2 = 40$ reais
$y = 40 \cdot 2 = 80$ reais
$z = 90 \cdot 2 = 180$ reais

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 (UFRN) Um café é preparado e, logo depois, é servido em quatro xícaras, nas quais é colocado o mesmo tipo de açúcar. A primeira xícara recebe 50 mL de café e 2 g de açúcar; a segunda, 70 mL de café e 3 g de açúcar; a terceira, 90 mL de café e 4 g de açúcar; a quarta, 120 mL de café e 5 g de açúcar.
O café se apresentará mais doce na:

(A) primeira xícara.
(B) segunda xícara.
(C) terceira xícara.
(D) quarta xícara.

2 Comprei refrigerante de uva, laranja e guaraná em quantidades proporcionais a 6, 4 e 2. Quantos refrigerantes de cada tipo eu comprei, se ao todo eram 60 refrigerantes?

3 Divida 260 em partes inversamente proporcionais a 3, 4 e 2.

4 Divida 132 em partes inversamente proporcionais a 2, 5 e 8.

5 (PUC-PR) Uma construtora edificou 6 residências com as seguintes áreas construídas, em m^2: 110, 112, 120, 116 e 102 e destinou uma área comum para lazer de 51 m^2, que deve ser dividida em partes proporcionais à área de cada residência.
Assim, a área correspondente à residência de 110 m^2, em m^2, é igual a:

(A) 9,00
(B) 8,70
(C) 8,40
(D) 8,25
(E) 7,65

6 (Faap-SP) Dois sócios lucraram R$ 5.000,00. O primeiro entrou para a sociedade com o capital de R$ 18.000,00 e o segundo com R$ 23.000,00. Se os lucros de cada sócio são proporcionais aos capitais, a diferença entre os lucros foi de aproximadamente:

(A) R$ 509,00
(B) R$ 609,00
(C) R$ 709,00
(D) R$ 809,00
(E) R$ 1.009,00

7 (UFRN) Um prêmio em dinheiro estava para ser dividido, em partes iguais, entre 10 ganhadores. Inesperadamente, surgiram mais 2 ganhadores, devendo o prêmio ser dividido, portanto, em 12 partes iguais.
Sabendo que a parcela cabível a cada um dos 10 primeiros ganhadores foi reduzida em R$ 700,00, marque a opção correspondente ao valor do prêmio.

(A) R$ 42.000,00
(B) R$ 50.400,00
(C) R$ 84.000,00
(D) R$ 35.000,00

8 (Puccamp-SP) Certa empresa paga parcialmente um plano de saúde para seus funcionários. Ela contribui com uma quantia que é diretamente proporcional ao tempo de serviço do funcionário e inversamente proporcional ao seu salário. Se, para um funcionário que trabalha há 10 anos e recebe R$ 1.200,00 de salário a empresa contribui com R$ 50,00, qual será a contribuição no caso de um funcionário cujo salário é de R$ 960,00 e tem 8 anos de serviço na empresa?

DEFINIÇÃO
Porcentagem.

2.5 – Porcentagem

Chama-se **porcentagem** a uma razão de denominador 100. É também chamada de taxa percentual e é representada por %, que se lê *por cento.*

NOTA
Lembrar que "$\frac{a}{b}$ de N" é o produto de $\frac{a}{b}$ por N, isto é: $\frac{a}{b} \cdot N = \frac{aN}{b}$

Assim, $5\% = \frac{5}{100}$, que se lê 5 por cento. Isso significa que tem-se 5 em cada 100 unidades.

Muitas vezes, escreve-se 5% na forma decimal; então $5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$.

Para calcular uma porcentagem $p\%$ de um número qualquer N basta fazer o produto:

$$p\% \text{ de } N = \frac{p}{100} \cdot N = \frac{pN}{100}$$

NOTA
Quando se calcula $p\%$ de um número N, esse número N é chamado de **principal**, o resultado $\frac{pN}{100}$ é a **porcentagem** e $p\%$ é a **taxa percentual.**

Observe que, por costume, é mais fácil ter a noção de uma fração quando a mesma está referida a 100.

Assim: $\frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\%$; $0{,}325 = \frac{32{,}5}{100} = 32{,}5\%$; $2 = \frac{200}{100} = 200\%$; $1 = \frac{100}{100} = 100\%$

e $1{,}235 = \frac{123{,}5}{100} = 123{,}5\%$

Exemplos:

i) Num vestibular em que concorreram 25 000 estudantes, foram aprovados 30%. Quantos foram aprovados?

$30\% \text{ de } 25\,000 = \frac{30}{100} \cdot 25\,000 = 7\,500$ alunos

ii) Os 3,5% de uma importância é R$ 210,00. Qual é a importância?

Temos que: $\frac{3{,}5}{100} \cdot x = 210 \Rightarrow x = \frac{210 \cdot 100}{3{,}5} \Rightarrow x = 6\,000$ reais

iii) Reduzir 225% a fração ordinária.

Basta escrever $225\% = \frac{225}{100} = \frac{9}{4}$

DEFINIÇÃO
Acréscimo percentual.

2.5.1 – Acréscimos

Quando uma grandeza aumenta, isto é, sofre uma variação positiva, é comum referir-se esse aumento ao valor da própria grandeza. A fração equivalente, de denominador 100, é o **acréscimo percentual** da grandeza.

Se uma caixa-d'água que tinha 800 litros de água recebe mais 200 litros, ela teve um acréscimo de $\frac{200}{800}=\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=25\%$.

Essa caixa-d'água passa a ter $\frac{1000}{800}=\frac{5}{4}=1{,}25=\frac{125}{100}=125\%$ do que tinha.

Se uma grandeza G_0 sofre um acréscimo de $p\%$, ela passa a ter um valor G igual a:

$$G = G_0 + \frac{p}{100}G_0 = G_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

O fator $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ é chamado **fator de aumento**.

Quando se deseja obter o valor aumentado, basta multiplicar o valor inicial por $\left(1+\frac{p}{100}\right)$. Em geral, a fração $\frac{p}{100}$ se escreve na forma decimal.

Exemplo:

Se uma caixa-d'água com 800 litros sofre um aumento de 25%, que ela passa a ter?

$V = V_0\left(1+\frac{p}{100}\right) = 800\left(1+\frac{25}{100}\right) = 800 \cdot (1 + 0{,}25) = 800 \cdot 1{,}25$

$V = 1000$ L

Observe que se o aumento for de 3%, multiplica-se por 1,03; se for de 17%, multiplica-se por 1,17; se for de 100% multiplica-se por 1 + 1 = 2; se for de 225% multiplica-se por 1 + 2,25 = 3,25.

2.5.2 – Redução

Quando uma grandeza diminui, isto é, sofre uma variação negativa, é comum referir-se essa redução ao valor da própria grandeza. A fração equivalente, de denominador 100, é a **redução percentual** ou **desconto** sofrido pelo valor da grandeza.

Se uma caixa-d'água que tinha 800 litros perde 200 litros, ela teve uma redução de $\frac{200}{800}=\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=25\%$. Essa caixa-d'água passou a ter $\frac{600}{800}=\frac{3}{4}=0{,}75=\frac{75}{100}=75\%$ do que tinha.

Se uma grandeza G_0 sofre uma redução ou desconto de $p\%$, ela passa a ter um valor G tal que:

$$G = G_0 - \frac{p}{100}G_0 = G_0\left(1-\frac{p}{100}\right)$$

O fator $\left(1-\frac{p}{100}\right)$ é chamado **fator de redução** ou **fator de desconto**.

NOTA
Quando se fala na razão de duas grandezas, na verdade, está se falando na razão dos números que as medem na **mesma unidade.**

NOTA
As grandezas G são frequentemente preços de compra ou venda de mercadorias.

DEFINIÇÃO
Redução percentual ou desconto.

NOTA
Quando a grandeza é uma importância em dinheiro, a redução é chamada de **abatimento** ou **desconto**.

Se desejarmos obter o valor reduzido, multiplicamos o valor inicial por $\left(1-\frac{p}{100}\right)$.

Exemplo:
Uma caixa-d'água com 800 litros sofre uma redução de 25%. Qual a quantidade de água restante?

$$V = V_0\left(1-\frac{p}{100}\right) = 800\left(1-\frac{25}{100}\right) = 800 \cdot 0{,}75 = 600 \text{ litros}$$

Exercícios resolvidos:

1) Aumentos sucessivos de 20% e 30% equivalem a um aumento único de quantos por cento?

Solução:

O fator de aumento de 20% é $1+\frac{20}{100} = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$.

O fator de aumento de 30% é $1+\frac{30}{100} = 1 + 0{,}3 = 1{,}3$.

O fator de aumento único será então:

$1{,}2 \cdot 1{,}3 = 1{,}56 = 1 + 0{,}56 = 1 + \frac{56}{100}$. Logo, o aumento equivalente é de 56%.

Observe que $1{,}2 \cdot 1{,}3 = 1{,}3 \cdot 1{,}2$ o que mostra que o aumento final não depende da ordem em que se aplicam os aumentos sucessivos.

NOTA
Outra solução:
Suponhamos uma grandeza igual a 100.
Como 20% de 100 = 20, depois do primeiro aumento passamos a ter 120. Em seguida, 30% de 120 são 36, logo, depois do segundo aumento o valor final será 120 + 36 = 156. Então, o aumento sobre 100 é 56, que corresponde a 56%.

NOTA
Repare que o aumento final não é a soma de 20% com 30%.

2) Um comerciante comprou uma mercadoria por R$ 1.800,00. Aplicou um aumento de 20% e a vendeu. O comprador resolveu vendê-la 2 meses depois e constatou que sua desvalorização com o uso foi de 10% ao mês. Por quanto deverá vendê-la?

Solução:

O valor final será $V = 1\,800 \cdot 1{,}20 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}90 = 1\,749{,}60$ reais.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 (Faap-SP) Uma pessoa colocou à venda uma residência avaliada em R$ 500.000,00. Um corretor conseguiu vendê-la por 85% desse valor, cobrando do proprietário 8% de comissão de corretagem. O proprietário recebeu pela venda:

(A) R$ 391.000,00
(B) R$ 375.000,00
(C) R$ 425.000,00
(D) R$ 382.500,00
(E) R$ 467.500,00

2 (PUC-MG) Em um município com 12600 eleitores, uma pesquisa indicou que o candidato A deverá ter 40% dos votos das mulheres e 30% dos votos dos homens, enquanto o candidato B deverá ter 30% dos votos dos eleitores femininos e 40% dos votos masculinos. Sabendo-se que, desses eleitores, 6600 são mulheres, pode-se afirmar que o número de votos que o candidato B deverá ter, de acordo com a pesquisa, é:

(A) 4380
(B) 4440
(C) 4520
(D) 4610

3 (PUC-MG) Em maio de cada ano, certa empresa reajusta os salários de seus funcionários pelo índice de aumento de preços ao consumidor, apurado no ano anterior. Em 2001, esse índice foi de 6,2%. Com base nesses dados, pode-se estimar que um funcionário que, em maio de 2001, recebia R$ 540,00 passou a receber, em maio de 2002:

(A) R$ 573,48
(B) R$ 575,20
(C) R$ 577,28
(D) R$ 580,34

4 (Puccamp-SP) Na loja Compre Mais, um modelo de aparelho de som tem o preço de R$ 520,00 e pode ser comprado de duas formas:

- à vista, com desconto correspondente a 15% do preço;
- a prazo, com entrada correspondente a 20% do preço e saldo, acrescido de 30% de seu valor, pago em 5 parcelas iguais.

Carlos e Heitor compraram esse aparelho, o primeiro à vista e o outro a prazo. Quanto Heitor pagou a mais que Carlos?

(A) R$ 202,80
(B) R$ 178,00
(C) R$ 157,50
(D) R$ 124,80
(E) R$ 98,80

5 (Vunesp-SP) Para manter funcionando um chuveiro elétrico durante um banho de 15 minutos e um forno de micro-ondas durante 5 minutos, as quantidades de água que precisam passar pelas turbinas de certa usina hidrelétrica são, respectivamente, 4000 litros e 200 litros. Suponha que, para esses eletrodomésticos, a redução de consumo será proporcional à redução da quantidade de água que passa pelas turbinas. Com base nisso, se o banho for reduzido para 9 minutos e o tempo de utilização do micro-ondas for reduzido em 20%, a quantidade total de água utilizada na usina para movimentar as turbinas, durante o banho mais o uso do micro-ondas, será, após as reduções, de:

(A) 2400
(B) 2416
(C) 2560
(D) 3700
(E) 3760

6 (UFPA) "As tartarugas de água doce ocupam o segundo lugar no *ranking* do comércio ilegal de animais silvestres. Ao lado de jacarés e cobras, perdem apenas para aves exóticas como araras, periquitos e papagaios. No mundo todo, o tráfico de bichos movimenta 15 bilhões de reais. O Brasil é responsável por 10% desse total, sendo mais da metade referente a animais retirados clandestinamente da Floresta Amazônica".

(*Veja*, 25/8/1999.)

Abaixo, são dados alguns valores para representar a quantidade, em reais, que movimenta o comércio ilegal de animais retirados da Amazônia. Com base no texto acima, apenas um deles é possível. Qual é ele?

(A) 7,5 bilhões de reais
(B) 800 milhões de reais
(C) 700 milhões de reais
(D) 75 milhões de reais
(E) 7,5 milhões de reais

7 (Mack-SP) Numa loja, um determinado produto do preço p é posto em promoção do tipo "leve 5 e pague 3". O desconto que a promoção oferece sobre o preço p do produto é de:

(A) 40%
(B) 35%
(C) 30%
(D) 25%
(E) 20%

8 (Mack-SP) Um produto de preço inicial x sofre dois descontos iguais sucessivos de K%, de modo que no seu preço final se tenha um desconto de 19% sobre x. O valor de K é:

(A) 8,25
(B) 8,75
(C) 9
(D) 9,5
(E) 10

9 (FEI-SP) Os planos de instalação de uma nova indústria estimam que seu lucro no primeiro ano de funcionamento será de 500 unidades monetárias e, depois, esse lucro crescerá a uma taxa de 20% ao ano. Qual o lucro acumulado ao final de 3 anos de funcionamento?

(A) 1 820
(B) 1 800
(C) 1 500
(D) 1 700
(E) 1 780

10 (PUC-PR) Durante determinado ano foram matriculados 100 novos alunos em um colégio. No mesmo ano, 15 alunos antigos trancaram a matrícula. Sabendo-se que, no final do ano, o número de alunos matriculados, em relação ao ano anterior, havia aumentado em 10%, o número de alunos ao final do ano era de:

(A) 850
(B) 730
(C) 950
(D) 935
(E) 750

11 (UFPE) Os alunos de uma turma resolveram comprar um presente, custando R$ 48,00, para o professor de Matemática, dividindo igualmente o gasto entre eles. Depois que 6 alunos recusaram-se a participar da divisão, cada um dos alunos restantes teve que contribuir com mais R$ 0,40 para a compra do presente.
Qual a porcentagem de alunos da turma que contribuiu para a compra do presente?

(A) 85%
(B) 65%
(C) 60%
(D) 80%
(E) 75%

12 (Unifor-CE) Tico resolveu economizar guardando, a cada semana, uma parcela de sua mesada. Na primeira semana ele guardou 40 reais, a partir de então, 10 reais por semana. Se ele não usou o dinheiro guardado, a quantia que ele acumulou em 20 semanas corresponde a que porcentagem da quantia que guardou na primeira semana?

(A) 375%
(B) 400%
(C) 475%
(D) 500%
(E) 575%

13 (PUC-MG) Após dois anos de uso, um carro custa R$ 17.672,00. Sabendo que sua desvalorização é de 6% ao ano, o preço do carro há dois anos era:

(A) R$ 19.792,64
(B) R$ 19.000,00
(C) R$ 20.000,00
(D) R$ 21.200,00
(E) R$ 24.033,92

14 (UFV-MG) Consultando um mapa rodoviário, um motorista decide por um itinerário 17% mais longo do que aquele que faz habitualmente. Como o tráfego de veículos nesse novo trajeto é menor, sua velocidade média aumentará 30%. Diante dessas condições, o tempo de viagem diminuirá em:

(A) 5%
(B) 10%
(C) 15%
(D) 20%
(E) 25%

15 (UFMG) Um fabricante de papel higiênico reduziu o comprimento dos rolos de 40 m para 30 m. No entanto, o preço dos rolos de papel higiênico, para o consumidor, manteve-se constante.
Nesse caso, é correto afirmar que, para o consumidor, o preço do metro de papel higiênico teve um aumento:

(A) inferior a 25%.
(B) superior ou igual a 30%.
(C) igual a 25%.
(D) superior a 25% e inferior a 30%.

16 (UFMG) Em um grupo de pessoas, 32% têm idade entre 30 e 40 anos; 48% estão entre 41 e 50 anos; e os demais 20%, entre 51 e 60 anos.
Dos que têm de 30 a 40, 30% praticam exercícios regularmente. Esse número sobe para 40% na faixa dos que estão entre 41 e 50 anos, mas só 22% daqueles que têm entre 51 e 60 anos praticam exercícios regularmente.
Considere, agora, apenas as pessoas desse grupo que têm entre 30 e 50 anos. Nessa faixa etária, as pessoas que fazem exercícios regularmente correspondem a:

(A) 27,2%
(B) 33,2%
(C) 34%
(D) 36%

17 (Fatec-SP) Certo comerciante deve recolher um imposto de 20% sobre o preço de venda de cada artigo. Em cada venda, esse comerciante deseja descontar o imposto e ficar com um lucro de 20% sobre o preço da compra do artigo.
Nessas condições, o preço de venda deve conter um acréscimo sobre o preço de compra de:

(A) 20%
(B) 40%
(C) 44%
(D) 50%
(E) 52,5%

18 (Cefet-MG) A soma do preço de duas mercadorias é de R$ 50,00. A mais cara terá um desconto de 10% e a mais barata sofrerá aumento de 15%, mantendo a soma dos preços no mesmo valor. A diferença entre os dois preços diminuirá em:

(A) 25%
(B) 30%
(C) 40%
(D) 50%
(E) 60%

19 (UFSM-RS) Numa melancia de 10 kg, 95% dela é constituída de água. Após desidratar a fruta, de modo que se elimine 90% da água, pode-se afirmar que a massa restante da melancia será, em kg, igual a:

(A) 1,45
(B) 1,80
(C) 5
(D) 9
(E) 9,5

20 (UFRGS) A quantidade de água que deve ser evaporada de 300 g de uma solução salina (água e sal) a 2% (sal) para se obter uma solução salina a 3% (sal) é:

(A) 90 g
(B) 94 g
(C) 97 g
(D) 98 g
(E) 100 g

21 (FGV-SP) Uma empresa comprou para seu escritório 10 mesas idênticas e 15 cadeiras também idênticas. O preço de cada mesa é o triplo do preço de cada cadeira. A despesa com cadeiras foi que porcentagem (aproximada) da despesa total?

(A) 29,33%
(B) 30,33%
(C) 31,33%
(D) 32,33%
(E) 33,33%

22 (Mack-SP) Se a circunferência de um círculo tiver o seu comprimento aumentado em 100%, a área do círculo ficará aumentada em:

(A) 300%
(B) 400%
(C) 250%
(D) 100%
(E) 200%

23 (UFPE) O custo da cesta básica aumentou 1,03% em determinada semana. O aumento foi atribuído exclusivamente à variação do preço dos alimentos que subiram 1,41%. Qual o percentual de participação dos alimentos no cálculo da cesta básica (indique o valor mais próximo)?

(A) 73%
(B) 74%
(C) 75%
(D) 76%
(E) 77%

24 (UFRGS) Considere os dados da tabela abaixo referentes à População Economicamente Ativa (PEA) de uma determinada região.

Distribuição da PEA por anos de estudo, segundo sexo

	PEA masculina	PEA feminina
Até 4 anos de estudo	60%	50%
5 ou mais anos de estudo	40%	50%
Total	100%	100%

Se os homens são 60% da PEA dessa região, homens e mulheres com 5 anos ou mais de estudo representam:

(A) 36% da PEA da região.
(B) 40% da PEA da região.
(C) 44% da PEA da região.
(D) 45% da PEA da região.
(E) 54% da PEA da região.

25 (UFPE) Uma herança será dividida entre dois herdeiros em partes inversamente proporcionais às fortunas acumuladas por cada um deles até o momento da partilha. Inicialmente, as fortunas são de 10 milhões e 15 milhões e crescem a uma taxa de 10% (cumulativos) ao ano. Se a partilha for consumada em 10 anos, que fração da herança caberá ao herdeiro que possuía inicialmente 15 milhões?

(A) $\frac{3}{10}$
(B) $\frac{2}{5}$
(C) $\frac{1}{2}$
(D) $\frac{3}{5}$
(E) $\frac{7}{10}$

26 (UFSM-RS) Uma indústria necessita de 120 l de um combustível composto por 70% de gasolina, 20% de álcool e 10% de óleo. Em seus depósitos, dispõe de três tipos de misturas: a primeira, M_1, com 40% de gasolina, 20% de álcool e 40% de óleo; a segunda, M_2, com 80% de gasolina e 20% de álcool; a terceira, M_3, com 80% de gasolina e 20% de óleo. Que quantidades de M_1, M_2, M_3, nessa ordem, são necessárias para obter, em litros, o combustível desejado?

(A) 30 – 10 – 80
(B) 20 – 10 – 90
(C) 20 – 0 – 100
(D) 20 – 20 – 80
(E) 30 – 90 – 0

2.6 – Relações financeiras

DEFINIÇÃO
Juro.

Juro é uma remuneração a uma taxa, sobre uma importância, durante algum tempo. É usado quando se empresta dinheiro, se vende a prazo, se aplica dinheiro etc.

Juro é portanto um aluguel do dinheiro.

NOTA
O juro é também chamado de **interesse**, por esta razão é representado pela letra *i*.

Numa relação que envolve juro, temos quatro elementos, a saber:

a) **Capital**: é a importância que entra na relação.
b) **Juro**: é a remuneração do capital.
c) **Taxa**: é o percentual negociado nas relações.
d) **Tempo**: é o período de duração da relação.

O juro pode ser **simples** ou **composto**.

NOTA
A taxa deve ser referida à mesma unidade que o período, ano, mês, dia, bimestre etc.

2.6.1 – Juro simples

O juro é simples quando não é incorporado ao capital no fim de cada período de sua produção. Em geral, é retirado ao fim de cada período.

Sejam: C o capital, i a taxa por período, t o número de períodos de aplicação do capital e j o juro auferido por esse capital.

Como em cada período o juro auferido é Ci, então, em t períodos teremos:

$$j = Cit$$

OBSERVAÇÃO
Se os juros auferidos são retirados ao fim de cada período, os valores totais retirados estarão numa PA de razão j (j, $2j$, $3j$, ..., nj, ...).

Exemplos:

i) Qual o juro simples que produz um capital de R$ 1.500,00 quando aplicado a 18% ao ano durante 6 anos?

$$j = Cit \Rightarrow j = \frac{1500 \cdot 18 \cdot 6}{100} = 1\,620 \text{ reais}$$

ii) Qual a taxa anual que produz um juro simples de R$ 1.200,00 quando aplicada a um capital de R$ 10.000,00 durante 16 meses?
Devemos reduzir o tempo de 16 meses a anos:

$$t = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \text{ anos, então:}$$

$$1\,200 = 10\,000 \cdot i \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow i = \frac{36}{400} = 0{,}09 = 9\% \text{ a.a.}$$

iii) Um capital de R$ 20.000,00 é aplicado a uma taxa de 18% a.a. em regime de juros simples e rende R$ 1.800,00.
Quanto tempo ficou este capital aplicado?

$$1\,800 = 20\,000 \cdot 0{,}18 \cdot t \Rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ ano} = 6 \text{ meses}$$

iv) Qual o capital que colocado a juros simples a uma taxa de 12% ao ano produz juros de R$ 250,00 em 24 dias?

Reduzindo a taxa ao ano para ao dia, temos:

i = 12% a.a. = $\dfrac{12\%}{360}$ ao dia, logo:

$$250 = \frac{C \cdot \frac{12}{360} \cdot 24}{100} \Rightarrow C = \frac{250 \cdot 100 \cdot 360}{12 \cdot 24} = 31\,250 \text{ reais}$$

Poderíamos manter a taxa ao ano e reduzir os 24 dias a anos, então:

$t = \dfrac{24}{360}$ anos, i = 12% e j = 250. Temos:

$$250 = \frac{C \cdot 12 \cdot \frac{24}{360}}{100} \Rightarrow C = \frac{250 \cdot 100 \cdot 360}{12 \cdot 24} = 31\,250 \text{ reais}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 (UFPI) O capital que, investido a juros simples de 3% ao mês, gera, depois de 6 meses, um montante de R$ 141.600,00 é:

(A) R$ 110.000,00

(B) R$ 115.000,00

(C) R$ 118.000,00

(D) R$ 120.000,00

(E) R$ 122.000,00

2 (UFC-CE) José emprestou R$ 500,00 a João por 5 meses, no sistema de juros simples, a uma taxa de juros fixa e mensal. Se no final dos 5 meses José recebeu um total de R$ 600,00, então a taxa fixa mensal aplicada foi de:

(A) 0,2% (C) 2% (E) 6%

(B) 0,4% (D) 4%

3 (UFPA) André devia, em seu cartão de crédito, R$ 1.000,00. Como não conseguiu pagar, em dois meses essa dívida aumentou para R$ 1.440,00. Nesse caso, qual foi a taxa de juros simples cobrada mensalmente pelo cartão de crédito?

(A) 7,2% (C) 20% (E) 44%

(B) 14,4% (D) 22%

4 (FGV-SP) Um capital aplicado a juros simples, à taxa de 2,5% ao mês, triplica em:

(A) 75 meses. (D) 90 meses.

(B) 80 meses. (E) 95 meses.

(C) 85 meses.

5 Certo capital colocado a juros simples duplicou após um certo tempo. Cinco meses depois, ele já havia triplicado. Qual é a taxa mensal de juros?

2.6.2 – Juros compostos ou capitalizados

Os juros são chamados compostos quando ao fim de cada período eles são incorporados ao capital, formando um novo capital para produzir juros no período seguinte. Por essa razão os juros compostos são ditos também **capitalizados**.

Suponhamos um capital C_0 aplicado a uma taxa i de juros compostos por período. No fim de um período, os juros serão $j = C_0 i$ e, se juntarmos os juros ao capital inicial, teremos $C_1 = C_0 + C_0 i = C_0(1 + i)$. Esse é o capital inicial para o segundo período.

Os juros correspondentes ao segundo período serão $C_1 i$. Juntando esses juros ao capital C_1, temos o capital inicial para o terceiro período $C_2 = C_1 + C_1 i = C_1(1 + i) = C_0(1 + i)(1 + i)$. Logo $C_2 = C_0(1 + i)^2$, que é o capital acumulado no fim do segundo período.

NOTA
O capital acumulado é chamado de **montante**.

Procedendo analogamente, teremos:

$C_1 = C_0(1 + i)$ é o montante no fim de um período.

$C_2 = C_0(1 + i)^2$ é o montante no fim de dois períodos.

$C_3 = C_0(1 + i)^3$ é o montante no fim de três períodos.

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$C_n = C_0(1 + i)^n$ é o montante no fim de n períodos.

Observe que um capital C_0 hoje equivalerá daqui a n períodos a $C_n = C_0(1 + i)^n$. O valor C_0 é chamado **valor presente** e C_n é o **valor futuro**.

NOTA
Quando não se indica o tipo de juro entende-se juros compostos.

Exemplos:

i) Alberto comprou um objeto que custa hoje R$ 100,00 para pagá-lo daqui a três meses. A taxa de juros cobrada pelo comerciante é de 5% ao mês. Quanto Alberto pagará na data do vencimento da dívida?

$C_0 = 100$

$$C_3 = C_0(1 + i)^3 = 100\left(1 + \frac{5}{100}\right)^3 = 100 \cdot (1 + 0{,}05)^3 = 100 \cdot 1{,}1576$$

$C_3 = 115{,}76$

Alberto pagará pelos R$ 100,00 de hoje, R$ 115,76 no final do terceiro mês.

OBSERVAÇÃO
Note que o valor de R$ 100,00 hoje não é R$ 100,00 daqui a três meses. Com os juros de 5% ao mês, R$ 100,00 se transformam em R$ 115,76; R$ 100,00 hoje e R$ 115,76 daqui a três meses têm o mesmo valor.

ii) Que inflação anual corresponde a uma taxa de inflação de 5% a.m.?

Seja P_{12} o preço, no final de um ano, de um item que custa agora P_0. Então:

$P_{12} = P_0(1 + 0{,}05)^{12} \Rightarrow P_{12} = P_0 \cdot 1{,}7959$

$P_{12} = P_0(1 + 0{,}7959)$

Assim, a inflação anual corresponde a 79,59% a.a.

Observe que essa taxa 79,59% não é $12 \cdot 5\% = 60\%$.

NOTA
Quando num anúncio temos: "À vista R$ 1.000,00 ou 5 parcelas iguais de R$ 200,00" é sempre mais vantajoso comprar a prazo, pois 5 parcelas de R$ 200,00 tem um valor presente menor que R$ 1.000,00.

NOTA
A **inflação** é a taxa relativa de aumento de preço.

iii) Que inflação mensal corresponde a uma taxa de inflação de 60% a.a.? Agora seja i a taxa mensal, então:

$$P_{12} = P_0(1 + i)^{12}$$

$$P_0(1 + i)^{12} = 1{,}6P_0$$

$$(1 + i)^{12} = 1{,}6$$

$$1 + i = \sqrt[12]{1{,}6}$$

$$i = \sqrt[12]{1{,}6} - 1 \Rightarrow i = 3{,}99\% \text{ a.m.}$$

iv) Em quanto tempo um capital colocado à taxa de 12% ao ano duplicará?

Solução:

$$C_n = 2C_0 \Rightarrow C_0\left(1 + \frac{12}{100}\right)^n = 2C_0 \Rightarrow \left(\frac{112}{100}\right)^n = 2$$

ou ainda $1{,}12^n = 2$.

Aplicando logaritmos a ambos os membros da igualdade, vem:

$$n \log 1{,}12 = \log 2 \Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 1{,}12} = \frac{0{,}30103}{0{,}04922} \cong 6{,}116$$

O capital duplicará ao final do 7º ano.

NOTA
Observe que o 1º ano vai de 0 a 1, o 2º de 1 a 2 etc.

Exercícios resolvidos:

1) A taxa de juros do mercado é 10% ao ano.
O que é melhor: receber R$ 1.000,00 à vista ou R$ 200,00 agora, R$ 400,00 daqui a um ano e R$ 450,00 daqui a 2 anos?

Solução:

Vamos comparar ambos os planos considerando o valor futuro de cada um daqui a 2 anos. Para o primeiro:
V.F. = R$ 1.000,00 · $(1{,}1)^2$ = R$ 1.210,00
Para o segundo plano:

A primeira parcela se transforma em:	200 · $(1{,}1)^2$ = R$ 242,00
A segunda parcela se transforma em:	400 · 1,1 = R$ 440,00
A terceira parcela se transforma em:	450 = R$ 450,00
Total:	R$ 1.132,00

Portanto, o primeiro plano é melhor.

NOTA
R$ 1.000,00 hoje equivalem a R$ 1.210,00 daqui a 2 anos a uma taxa de 10% a.a.

Outra solução:

Vamos comparar os valores de ambos os planos no presente. Para o primeiro, o valor é R$ 1.000,00. Para o segundo:

- A primeira parcela vale R$ 200,00.
- Seja x o valor que, hoje, equivaleria aos R$ 400,00 recebidos daqui a um ano. Então:

  $x \cdot 1{,}1 = 400 \Rightarrow x = \dfrac{400}{1{,}1} = \text{R\$ } 363{,}6363...$

- Analogamente, a última parcela equivale a $\dfrac{450}{(1{,}1)^2}$ = R$ 371,90 recebidos hoje.

  Total (em valor presente) do segundo plano:
  R$ 200,00 + R$ 363,64 + R$ 371,90 = R$ 935,54
  Portanto, continua sendo vantajosa a opção à vista.

NOTA
A divisão $\dfrac{400}{1{,}1}$ equivale a trazer R$ 400,00 daqui a um ano para um recebimento presente, com taxa descontada de 10%.

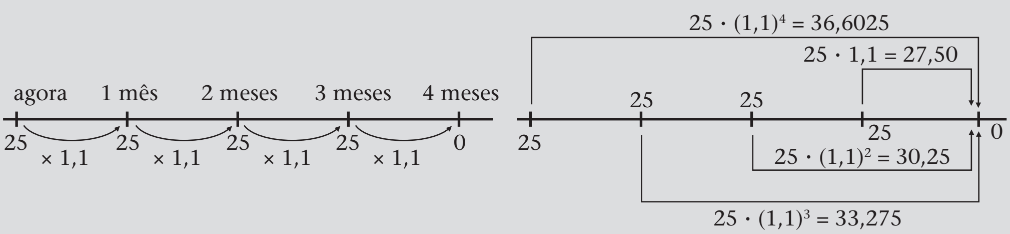
2) Uma loja anuncia: "você pode pagar 4 parcelas mensais de R$ 25,00 ou 5 parcelas mensais de R$ 22,00".
Suponha que a primeira parcela é paga no ato da compra.
Se os juros de mercado são de 10% ao mês, qual a melhor forma de pagamento?

Solução:

Para decidir qual a melhor forma de pagamento, basta verificar o valor futuro de cada plano daqui a 4 meses.

No primeiro plano, temos:

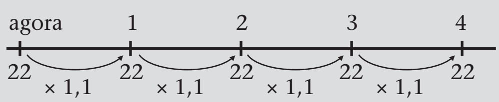
V.F. da primeira parcela:	$25 \cdot (1{,}1)^4$ = R$ 36,6025
V.F. da segunda parcela:	$25 \cdot (1{,}1)^3$ = R$ 33,275
V.F. da terceira parcela:	$25 \cdot (1{,}1)^2$ = R$ 30,25
V.F. da quarta parcela:	$25 \cdot 1{,}1$ = R$ 27,50
Total:	R$ 127,6275

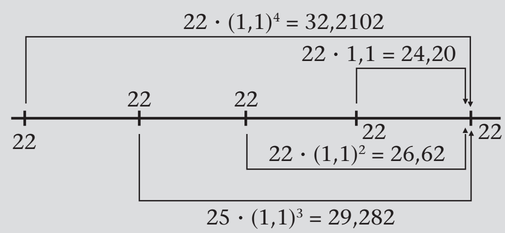


Assim, o valor futuro do 1º plano, daqui a 4 meses, é de R$ 127,63.

Para o segundo plano:

V.F. da primeira parcela:	$22 \cdot (1{,}1)^4 =$ R\$ 32,2102
V.F. da segunda parcela:	$22 \cdot (1{,}1)^3 =$ R\$ 29,282
V.F. da terceira parcela:	$22 \cdot (1{,}1)^2 =$ R\$ 26,62
V.F. da quarta parcela:	$22 \cdot 1{,}1 =$ R\$ 24,20
V.F. da quinta parcela:	$22 =$ R\$ 22,00
Total:	R\$ 134,3122





Assim, o valor futuro do 2º plano daqui a 4 meses é R\$ 134,31.
<u>Resposta:</u> É melhor pagar em 4 parcelas mensais de R\$ 25,00.

<u>Outra solução:</u>

Assim como obtivemos o valor futuro $C_n = C_0(1 + i)^n$, poderíamos obter o valor presente de cada parcela fazendo $C_0 = \dfrac{C_n}{(1+i)^n}$. Assim:

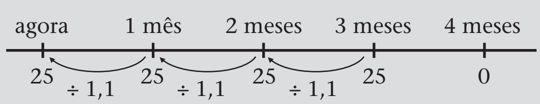
V. P. do primeiro plano: $25 + \dfrac{25}{1{,}1} + \dfrac{25}{(1{,}1)^2} + \dfrac{25}{(1{,}1)^3} = 87{,}17$

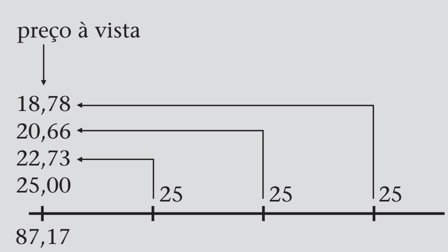
V. P. do segundo plano:

$$22 + \frac{22}{(1{,}1)} + \frac{22}{(1{,}1)^2} + \frac{22}{(1{,}1)^3} + \frac{22}{(1{,}1)^4} = 91{,}73$$

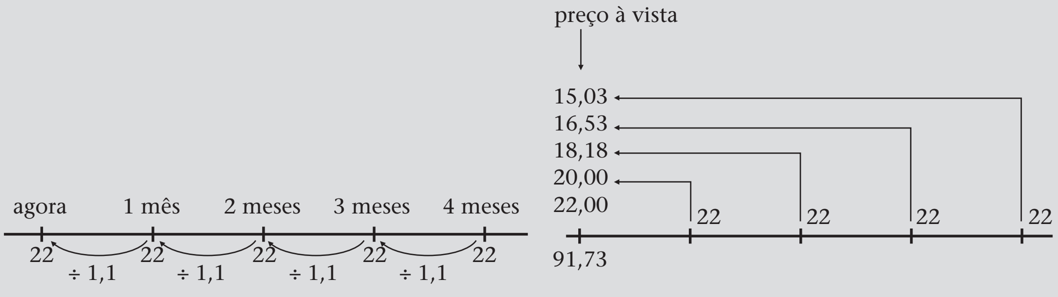
Assim, o primeiro plano é mais barato.

<u>Primeiro plano</u>





Segundo plano



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 (PUC-RJ) Um banco pratica sobre o seu serviço de cheque especial a taxa de juros de 11% ao mês. Para cada 100 reais de cheque especial, o banco cobra 111 no primeiro mês, 123,21 no segundo, e assim por diante. Sobre um montante de 100 reais, ao final de um ano, o banco irá cobrar aproximadamente:

(A) 150 reais.
(B) 200 reais.
(C) 250 reais.
(D) 300 reais
(E) 350 reais.

2 (ESPM-SP) Certo capital foi aplicado a juros compostos durante 2 anos, à taxa de 20% ao ano. Se esse capital tivesse sido aplicado a juros simples, para obter o mesmo rendimento, a taxa mensal deveria ser de aproximadamente:

(A) 2%
(B) 1,98%
(C) 1,94%
(D) 1,87%
(E) 1,83%

3 (FGV-SP) Fábio recebeu um empréstimo bancário de R$ 10.000,00, para ser pago em duas parcelas anuais, a serem pagas, respectivamente, no final do primeiro ano e do segundo ano, sendo cobrados juros compostos à taxa de 20% ao ano. Sabendo que o valor da 1ª parcela foi de R$ 4.000,00, podemos concluir que o valor da 2ª foi:

(A) R$ 8.800,00
(B) R$ 9.000,00
(C) R$ 9.200,00
(D) R$ 9.400,00
(E) R$ 9.600,00

4 (UFJF-MG) As despesas mensais de uma pessoa dividem-se em gastos fixos e gastos variáveis. Seus gastos fixos são de R$ 180,00 e, nos próximos meses, seus gastos variáveis, que hoje são de R$ 100,00, aumentarão 2% a cada mês, em relação ao mês anterior. A expressão que fornece a despesa dessa pessoa daqui a *t* meses, em reais, é:

(A) $180 + 100 \cdot (1,02)^t$
(B) $(180 + 100) \cdot (1,02)^t$
(C) $180 + 200t$
(D) $180 + 102t$
(E) $180 + 100 \cdot (0,02)^t$

5 (PUC-RS) A cada balanço anual, uma firma tem apresentado um aumento de 10% de seu capital. Considerando Q_0 o seu capital inicial, a expressão que fornece esse capital C, ao final de cada ano (*t*) em que essas condições permanecerem, é:

(A) $C = Q_0(1,1)^t$
(B) $C = C(1,1)^t$
(C) $C = Q_0(0,1)^t$
(D) $C = C(0,1)^t$
(E) $C = Q_0(10)^t$

6 (PUC-MG) Uma pessoa toma emprestados R$ 9.000,00 e deverá pagar, ao final de oito meses, R$ 13.680,00 para liquidar esse empréstimo. A taxa total de juros cobrada nessa operação é de:

(A) 46%
(B) 52%
(C) 61%
(D) 67%

7 (UFJF-MG) Uma loja de eletrodomésticos anuncia a seguinte promoção:
Televisor 29", à vista, por apenas R$ 702,00, ou a prazo, em duas prestações mensais iguais de R$ 390,00, sendo a primeira no ato da compra.
Nessas condições, a taxa mensal de juros embutida na venda a prazo é igual a:

(A) 10%
(B) 15%
(C) 20%
(D) 25%
(E) 30%

8 (PUC-SP) Em 1996, uma indústria iniciou a fabricação de 6 000 unidades de certo produto e, desde então, sua produção tem crescido à taxa de 20% ao ano. Nessas condições, em que ano a produção foi igual ao triplo da de 1996?
(Dados: log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48)

(A) 1998
(B) 1999
(C) 2000
(D) 2001
(E) 2002

9 (ESPM-SP) Se um automóvel sofre desvalorização de 20% ao ano, ele estará valendo a metade de seu valor atual em:

(A) pouco mais de 3 anos.
(B) exatamente 2 anos e meio.
(C) pouco mais de 4 anos.
(D) exatamente 5 anos.
(E) menos de 2 anos.

10 (ESCCAI-MG) Em quantos meses uma letra de câmbio de R$ 85.000,00, descontada à taxa de 42% a.a., produz um líquido de R$ 61.200,00?

(A) 6 (C) 9 (E) 12

(B) 8 (D) 10

11 João deseja pagar sua dívida de R$ 121,00 dois meses antes do vencimento. A taxa de juros composto fixado pelo banco é de 10% a.m.
Qual é o valor que João deve pagar ao banco para saldá-la?

12 Um agiota emprestou R$ 2.000,00 e cobra as seguintes taxas de juro composto: 10% no primeiro mês, 15% no segundo e 20% ao mês do terceiro em diante.
Se o seu credor pagou toda a dívida no final do terceiro mês, então:

a) Qual o montante pago?

b) Qual a taxa única equivalente aos três aumentos?

13 (UFRJ) A rede de lojas Sistrepa vende por crediário com uma taxa de juros mensal de 10%.
Uma certa mercadoria, cujo o preço à vista é P, será vendida a prazo de acordo com o seguinte plano de pagamento: R$ 100,00 de entrada, uma prestação de R$ 240,00 a ser paga em 30 dias e outra de R$ 220,00 a ser paga em 60 dias.
Determine P, o valor de venda à vista dessa mercadoria.

14 (PUC-SP) Um equipamento de som está sendo vendido em uma loja por R$ 1.020,00 para pagamento à vista. Um comprador pode pedir um financiamento pelo plano (1 + 1) pagamentos iguais, isto é, o primeiro pagamento deve ser feito no ato da compra e o segundo, um mês após aquela data. Se a taxa de juros praticada pela empresa que irá financiar a compra for de 4% ao mês, o valor de cada uma das prestações será de:

(A) R$ 535,50 (D) R$ 529,12

(B) R$ 522,75 (E) R$ 515,00

(C) R$ 520,00

15 João deposita dez mil reais, no dia 1º de cada mês, em um fundo de investimentos. Sabendo que o investimento rende juros mensais à taxa 5% e que $1{,}05^{12} = 1{,}8$ podemos afirmar que, imediatamente após o 12º depósito, João terá acumulado:

(A) 126 mil reais. (D) 192 mil reais.

(B) 160 mil reais. (E) 216 mil reais.

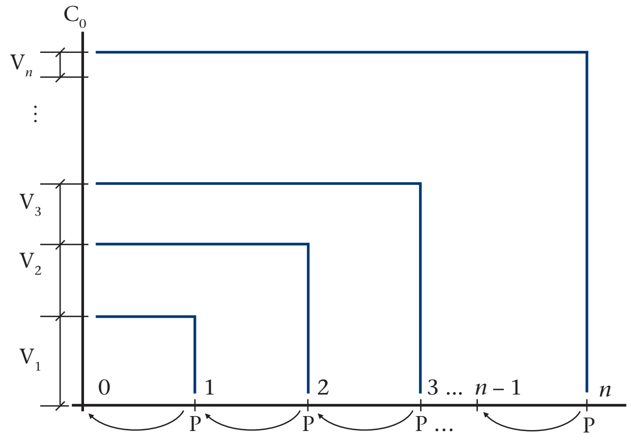
(C) 180 mil reais.

2.7 – Pagamentos em parcelas iguais – série uniforme

NOTA
Observe que os valores à vista $V_1, V_2, V_3, ..., V_n$ são diferentes e vão diminuindo, à medida que o prazo aumenta, para darem pagamentos iguais.

Um compromisso cujo valor à vista é C_0 deve ser pago em n parcelas iguais sendo i a taxa de juros ao período.

Seja P o valor da parcela, que se repetirá n vezes.



Imaginemos o valor à vista C_0 dividido em parcelas $V_1, V_2, V_3, ..., V_n$ que darão origem às n parcelas iguais a P, cada uma.

V_1 vai evoluir em 1 período, logo: $P = V_1(1+i)$
V_2 vai evoluir em 2 períodos, logo: $P = V_2(1+i)^2$
V_3 vai evoluir em 3 períodos, logo: $P = V_3(1+i)^3$
$\vdots$
V_n vai evoluir em n períodos, logo: $P = V_n(1+i)^n$

Assim, $V_1 = \dfrac{P}{1+i}, V_2 = \dfrac{P}{(1+i)^2}, V_3 = \dfrac{P}{(1+i)^3}, ..., V_n = \dfrac{P}{(1+i)^n}$

Como $V_1 + V_2 + ... + V_n = C_0$, temos:

$$\frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{P}{(1+i)^n} = C_0$$

Temos uma PG de razão $\dfrac{1}{1+i}$, então:

$$\frac{\dfrac{P}{(1+i)^n} \cdot \dfrac{1}{1+i} - \dfrac{P}{1+i}}{\dfrac{1}{1+i} - 1} = C_0 \Rightarrow \frac{\dfrac{P}{1+i}\left[\dfrac{1}{(1+i)^n} - 1\right]}{\dfrac{-i}{1+i}} = C_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{C_0 i (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}} \text{ ou } \boxed{P = \frac{C_0 i}{1-(1+i)^{-n}}}$$

NOTA
Observe que nestas fórmulas a primeira parcela é paga no fim do primeiro período. Se for dada uma "entrada" no ato da compra, o valor a ser financiado será:
C_0 = preço total menos a entrada.

Exemplos:

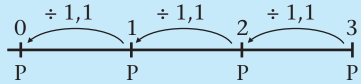
i) Uma geladeira pode ser comprada por R$ 2.000,00 à vista. Se for paga em 4 prestações mensais iguais, com juros de 10% ao mês, determine a prestação nos seguintes casos:

a) se a primeira for paga no ato da compra;

b) se a primeira for paga um mês após a compra;

c) se a primeira for paga dois meses após a compra.

<u>Solução:</u>

a) 

Neste caso, a parcela P paga no ato da compra não sofre transformação ao atualizar as parcelas; o valor presente do financiamento é, portanto:

$$2\,000 = \frac{P}{1,1^0} + \frac{P}{1,1^1} + \frac{P}{1,1^2} + \frac{P}{1,1^3} \Rightarrow 2\,000 = P\left(1 + \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,1^2} + \frac{1}{1,1^3}\right)$$

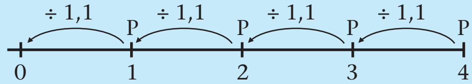
$$2000 = P(1 + 0,909 + 0,826 + 0,751) \Rightarrow P = \frac{2000}{3,486} = 573,72$$

Cada parcela será de R$ 573,72.
Para resolver esse item, usamos a fórmula:

$P = \dfrac{C_0 i}{1-(1+i)^{-n}}$. Devemos considerar $n = 3$, $i = 0,1$ e $C_0 = 2000 - P$, pois o financiamento será, na verdade, em 3 parcelas, já que P será pago à vista. Assim:

$$P = \frac{(2\,000 - P)\,0,1}{1-(1+0,1)^{-3}} \Rightarrow P = \frac{200 - 0,1P}{1 - 1,1^{-3}} \Rightarrow P = \frac{200 - 0,1P}{0,2486} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,3486P = 200 \Rightarrow P = \frac{200}{0,3486} = 573,72$$

b) 

Neste caso, o financiamento é em 4 parcelas, então, atualizando as parcelas, temos:

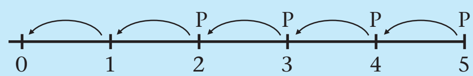
$$\frac{P}{1,1} + \frac{P}{1,1^2} + \frac{P}{1,1^3} + \frac{P}{1,1^4} = 2\,000 \Rightarrow \frac{P}{1,1}\left(1 + \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,1^2} + \frac{1}{1,1^3}\right) = 2\,000$$

$$\frac{P}{1,1} \cdot 3,4869 = 2\,000 \Rightarrow P = 630,94$$

Cada parcela será de R$ 630,94.

No uso da fórmula devemos ter: $n = 4$, $C_0 = 2000$ e $i = 0{,}1$, pois a fórmula se aplica a partir do fim do 1º período.

$$P = \frac{2000 \cdot 0{,}1}{1-(1+0{,}1)^{-4}} = \frac{200}{0{,}317} = 630{,}94$$

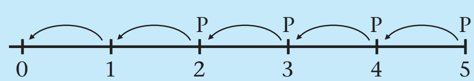
c) 

Aqui, devemos atualizar as parcelas a partir do final do segundo mês. Assim:

$$\frac{P}{1{,}1^2}+\frac{P}{1{,}1^3}+\frac{P}{1{,}1^4}+\frac{P}{1{,}1^5} = 2000 \Rightarrow \frac{P}{1{,}1^2}\left(1+\frac{1}{1{,}1}+\frac{1}{1{,}1^2}+\frac{1}{1{,}1^3}\right) = 2000$$

$$\frac{P}{1{,}1^2} \cdot 3{,}4869 = 2000 \Rightarrow P = 694{,}04$$

Cada parcela será de R$ 694,04.
Com o uso da fórmula devemos levar o preço à vista para o fim do primeiro período, pois só a partir desse momento o financiamento será em parcelas, a partir do 2º período.
Temos: $C_1 = C_0(1 + i)^1 = 2000 \cdot 1{,}1 = 2200$



$$\Rightarrow P = \frac{C_1 i}{1-(1+i)^{-4}}$$, logo:

$$P = \frac{2\,200 \cdot 0{,}1}{1-1{,}1^{-4}} = \frac{220}{0{,}317} = 694{,}04$$

OBSERVAÇÃO
Muitas vezes as operações com decimais levam a resultados com pequenas diferenças nos centavos devido a aproximações e à limitação da unidade monetária (centésimos).

ii) Uma loja de departamentos oferece um desconto de 30% nas compras à vista ou pagamento em 3 prestações iguais mensais, sem juros e sem desconto. Calcule a taxa mensal de juros embutida nas vendas a prazo, supondo o primeiro pagamento no ato da compra.
Comprando a prazo o cliente pagaria 3 parcelas de P reais, sem juros. Assim o preço de vitrine é 3P. O desconto de 30% de 3P daria

$\left(1-\frac{30}{100}\right) \cdot 3P = 0{,}70 \cdot 3P$ que é o preço à vista já com desconto: $C_0 = 2{,}1P$.

Temos: $2{,}1P = P + P\left(\frac{1}{1+i}\right) + P\left(\frac{1}{(1+i)^2}\right)$, então:

$$2{,}1 = 1+\frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2} \Rightarrow 1{,}1 \cdot (1+i)^2 = (1+i)+1$$

Fazendo $1 + i = x$, vem: $1{,}1x^2 = x + 1$ ou $11x^2 - 10x - 10 = 0$

$x = 1{,}5108 \Rightarrow 1 + i = 1{,}5108 \Rightarrow i = 0{,}5108 = 51{,}08\%$

ou,

usando a fórmula $P = \dfrac{C_0 i}{1-(1+i)^{-n}}$ com $C_0 = \dfrac{70}{100} \cdot 3P - P = 1,1P$ e $n = 2$, vem:

$$P = \frac{1,1P \cdot i}{1-(1+i)^{-2}} \Rightarrow 1 = \frac{1,1i}{1-(1+i)^{-2}} \Rightarrow 1 - \frac{1}{(1+i)^2} = 1,1i$$

$11i^2 + 12i - 9 = 0 \Rightarrow i = 51,08\%$
A taxa é de aproximadamente 51,1% (a diferença nas decimais é devida às aproximações numéricas).

iii) Um pai, desejando fazer uma poupança para seu filho, deposita mensalmente R$ 200,00 numa caderneta de poupança. O rendimento mensal da caderneta é 1% a.m. Qual será o montante depositado daqui a 30 anos se o primeiro depósito será feito no mês que vem?

Sabemos que $P = \dfrac{C_0 i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \dfrac{C_n i}{(1+i)^n - 1}$, logo:

$$C_n = \frac{P}{i}\left[(1+i)^n - 1\right].$$

Assim, $C_{360} = \dfrac{200}{0,01}\left[(1+0,01)^{360} - 1\right]$

logo, $C_{360} = 20000\,(1,01^{360} - 1) = 698.992,83$.

O montante depositado ao fim de 360 meses será R$ 698.992,83.

iv) Se a taxa de inflação é de 5%, em quanto diminui o poder de compra?

Se o preço médio dos bens é p reais, uma determinada importância g reais comprará $q = \dfrac{g}{p}$ bens.

Com a inflação de 5%, o preço inflacionado será $1,05p$ e o nosso poder de compra será $q' = \dfrac{g}{1,05p} = \dfrac{1}{1,05} \cdot \dfrac{g}{p} = \dfrac{1}{1,05} \cdot q$

$q' = 0,9524 \cdot q$

O poder de compra cai 4,76%.

NOTA
Poder de compra é a quantidade de bens que se pode adquirir com uma certa importância.

v) Se a taxa de deflação é 5%, qual o aumento do poder de compra?
Usando a mesma notação do exercício anterior:

$$q' = \frac{g}{0,95p} = \frac{1}{0,95} \cdot \frac{g}{p}$$

$q' = 1,0526 \cdot q$

O poder de compra aumenta 5,26%.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (UFMG) Um mapa está desenhado em uma escala em que 2 cm correspondem a 5 km. Uma região assinalada nesse mapa tem a forma de um quadrado de 3 cm de lado.
A área real dessa região é de:

(A) 37,50 km^2
(B) 56,25 km^2
(C) 67,50 km^2
(D) 22,50 km^2

2 (UFRRJ) Eduardo efetuou uma ligação telefônica para Goiânia, com tarifa normal e duração de 13,8 minutos, pagando pela ligação R$ 4,04. Se, com a tarifa reduzida, o minuto falado custa a metade do preço da tarifa normal, podemos afirmar que o valor que mais se aproxima do valor pago por Eduardo por uma ligação para Goiânia com tarifa reduzida e duração de 13,1 minutos será de:

(A) R$ 1,92
(B) R$ 2,02
(C) R$ 8,08
(D) R$ 8,02
(E) R$ 1,98

3 (Puccamp-SP) Em agosto de 2000, Zuza gastou R$ 192,00 na compra de algumas peças de certo artigo. No mês seguinte, o preço unitário desse artigo aumentou R$ 8,00 e, com a mesma quantia que gastou em agosto, ele pôde comprar duas peças a menos. Em setembro, o preço de cada peça de tal artigo era:

(A) R$ 24,00
(B) R$ 25,00
(C) R$ 28,00
(D) R$ 30,00
(E) R$ 32,00

4 (Mack-SP) As *x* pessoas de um grupo deveriam contribuir com quantias iguais a fim de arrecadar R$ 15.000,00, entretanto 10 delas deixariam de fazê-lo, ocasionando, para as demais, um acréscimo de R$ 50,00 nas respectivas contribuições. Então *x* vale:

(A) 60
(B) 80
(C) 95
(D) 115
(E) 120

5 (Enem) No quadro a seguir estão as contas de luz e água de uma mesma residência. Além do valor a pagar, cada conta mostra como calculá-lo, em função do consumo de água (em m^3) e de eletricidade (em kWh). Observe que, na conta de luz, o valor a pagar é igual ao consumo multiplicado por um certo fator.
Já na conta de água, existe uma tarifa mínima e diferentes faixas de tarifação.

Companhia de eletricidade

Fornecimento	Valor (R$)
401 kWh × 0,13276000	53,23

Companhia de saneamento

Tarifas de água/m^3

Faixas de consumo	Tarifa	Consumo	Valor (R$)
até 10	5,50	tarifa mínima	5,50
11 a 20	0,85	7	5,95
21 a 30	2,13		
31 a 50	2,13		
acima de 50	2,36		
		Total	**11,45**

Suponha que, no próximo mês, dobre o consumo de energia elétrica dessa residência. O novo valor da conta será:

(A) R$ 55,23
(B) R$ 106,46
(C) R$ 802,00
(D) R$ 100,00
(E) R$ 22,90

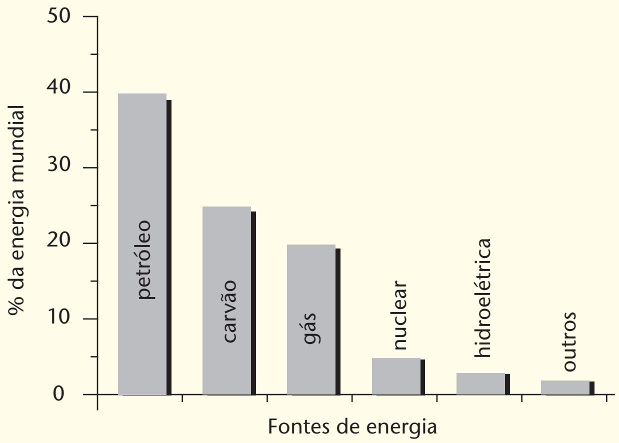
6 (Faap-SP) Um trator, trabalhando 12 horas por dia, consome em 30 dias 1 800 litros de combustível. Sabendo-se que um litro de combustível custa R$ 0,80, qual é o custo do combustível gasto em 90 dias, trabalhando o trator 11 horas por dia?

7 (Fatec-SP) Em uma indústria há duas máquinas que funcionam em velocidades constantes, mas distintas entre si. Funcionando ininterruptamente, juntas, produzem X peças iguais em 2 horas e 40 minutos. Uma delas, sozinha, produziria essas X peças em 4 horas de funcionamento ininterrupto. A outra produziria as X peças funcionando ininterruptamente em:

(A) 8 horas e 15 minutos.
(B) 8 horas.
(C) 7 horas e meia.
(D) 7 horas e 15 minutos.
(E) 7 horas.

8 Pedro investiu certa quantia comprando ações de uma indústria. No final do primeiro ano, ele verificou que as ações tinham valorizado 25%, mas, no final do ano seguinte, ele disse: "puxa, eu tenho hoje o dobro do dinheiro que investi". Qual foi a valorização das ações no segundo ano?

9 (Enem) Segundo um especialista em petróleo (*O Estado de S. Paulo*, 5/3/2000), o consumo total de energia mundial foi estimado em 8,3 bilhões de toneladas de petróleo (TEP) para 2001. A porcentagem das diversas fontes da energia consumida no globo é representada no gráfico.



Segundo as informações apresentadas, para substituir a energia nuclear utilizada é necessário, por exemplo, aumentar a energia proveniente do gás natural em cerca de:

(A) 10%   (C) 25%   (E) 50%

(B) 18%   (D) 33%

10 (Fuvest-SP)

Produção e vendas, em setembro, de três montadoras de automóveis

Montadora	Unidades produzidas	Porcentagem vendida da promoção
A	3000	80%
B	5000	60%
C	2000	x%

Sabendo que nesse mês as três montadoras venderam 7000 dos 10000 carros produzidos, o valor de x é:

(A) 30   (C) 65   (E) 100

(B) 50   (D) 80

11 (PUC-RJ) Fiz em 50 minutos o percurso de casa até a escola. Quanto tempo gastaria se utilizasse uma velocidade 20% menor?

(A) 65 minutos

(B) 41 minutos e 40 segundos

(C) 60 minutos

(D) 62 minutos e 30 segundos

(E) 50 minutos e 20 segundos

12 (Enem) O Brasil, em 1997, com cerca de 160×10^6 habitantes, apresentou um consumo de energia da ordem de 250000 TEP (tonelada equivalente de petróleo), proveniente das diversas fontes primárias.

O grupo com renda familiar de mais de 20 salários mínimos representa 5% da população brasileira e utiliza cerca de 10% da energia total consumida no país. O grupo com renda familiar de até três salários mínimos representa 50% da população e consome 30% do total da energia.

Com base nessas informações, pode-se concluir que o consumo médio de energia para um indivíduo do grupo de renda superior é x vezes maior do que para um indivíduo do grupo de renda inferior. O valor aproximado de x é:

(A) 2,1   (C) 6,3   (E) 12,7

(B) 3,3   (D) 10,5

13 (UFMG) Um mestre de obras e cinco pedreiros foram contratados para fazer certo serviço, pelo qual receberiam a quantia de Q reais. Essa quantia seria repartida entre eles de modo que todos os pedreiros recebessem o mesmo valor e o mestre de obras ganhasse 60% a mais que cada um deles.

Na última hora, um dos pedreiros desistiu. Então, o mestre de obras e os quatro pedreiros restantes decidiram fazer sozinhos o serviço e combinaram uma nova divisão dos Q reais: os quatro pedreiros receberiam valores iguais, mas o mestre de obras ganharia, agora, 50% a mais que cada um deles.

Então, a quantia que cada um dos quatro pedreiros recebeu teve um aumento de:

(A) 10%   (B) 20%   (C) 25%   (D) 30%

14 (UFMG) Observe a tabela a seguir:

Rendimento para base de cálculo do mês (R$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir (R$)
Até 900,00	---	Isento
Acima de 900,00 até 1.800,00	15	135,00
Acima de 1.800,00	25	315,00

Essa tabela é utilizada para calcular o imposto de renda a ser pago à Receita Federal por um trabalhador no mês em questão. Para se obter o rendimento para

base de cálculo, deve-se subtrair de seu rendimento bruto todas as deduções a que ele tem direito. Ao rendimento para base de cálculo aplica-se a alíquota correspondente e, em seguida, subtrai-se a parcela a deduzir, também correspondente, de acordo com a tabela, obtendo-se assim o valor do imposto de renda a ser pago. Nesse mês, um trabalhador, cujo rendimento bruto foi de R$ 2.000,00, teve direito somente às seguintes deduções: R$ 90,00 por dependente e R$ 200,00 pagos à Previdência. Nessas condições, sabendo-se que o valor do imposto pago por esse trabalhador, nesse mês, foi R$ 108,00, o número de dependentes considerados foi:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) maior que 2

15 (UFF-RJ) Na eleição para prefeito de um município concorreram os candidatos X e Y.
O resultado final revelou que 38% dos eleitores votaram em X, 42% em Y, 16% nulo e 4% em branco.
Se 25% dos eleitores que votaram nulo houvessem votado no candidato X e 50% dos que votaram branco houvessem votado em Y, o resultado seria:

(A) 47,5% para X, 44% para Y, 6,5% nulos e 2% em branco.
(B) 9,5% para X, 63% para Y, 25,5% nulos e 2% em branco.
(C) 46% para X, 43% para Y, 8% nulos e 3% em branco.
(D) 42% para X, 44% para Y, 12% nulos e 2% em branco.
(E) 6,2% para X, 18,8% para Y, 25% nulos e 50% em branco.

16 (Uerj) A reciclagem de latas de alumínio permite uma considerável economia de energia elétrica: a produção de cada lata reciclada gasta apenas 5% de energia que seria necessária para produzir uma lata não reciclada.
Considere que, de cada três latas produzidas, uma não é obtida por reciclagem, e que a produção de cada lata reciclada consome 1 unidade de energia.
De acordo com essa proporção, o número de unidades de energia necessário para a produção de 24 latas é igual a:

(A) 24
(B) 42
(C) 150
(D) 176

17 (Fuvest-SP) O limite de consumo mensal de energia elétrica de uma residência, sem multa, foi fixado em 320 kWh. Pelas regras do racionamento, se esse limite for ultrapassado, o consumidor deverá pagar 50% a mais sobre o excesso. Além disso, em agosto, a tarifa sofreu um reajuste de 16%. Suponha que o valor pago pelo consumo de energia elétrica no mês de outubro tenha sido 20% maior do que aquele que teria sido pago sem as regras do racionamento e sem o aumento de tarifa em agosto. Pode-se, então, concluir que o consumo de energia elétrica, no mês de outubro, foi de aproximadamente:

(A) 301 kWh
(B) 343 kWh
(C) 367 kWh
(D) 385 kWh
(E) 413 kWh

18 (Fuvest-SP) Sobre o preço de um carro importado incide um imposto de importação de 30%. Em função disso, o seu preço para o importador é R$ 19.500,00. Supondo que tal imposto passe dos 30% para 60%, qual será, em reais, o novo preço do carro para o importador?

(A) R$ 22.500,00
(B) R$ 24.000,00
(C) R$ 23.350,00
(D) R$ 31.200,00
(E) R$ 39.000,00

19 (Faap-SP) Uma certa quantidade de cereal, que custara R$ 12,00 por saca, foi vendida, sucessivamente, por quatro negociantes, os quais obtiveram lucro de 20%, 12%, 15% e 10%, respectivamente. Qual foi o último preço de venda (aproximadamente) por saca?

(A) R$ 22,50
(B) R$ 14,40
(C) R$ 16,12
(D) R$ 18,54
(E) R$ 20,40

20 (Faap-SP) As medalhas de prata dos Jogos Pan-Americanos foram feitas fundindo-se lingotes do tipo A com lingotes do tipo B, ambos feitos de uma liga de prata e zinco. Sabe-se que um lingote do tipo A, de 3,5 kg, contém 76% de prata; fundido com um lingote do tipo B, resulta um lingote de 10,5 kg contendo 84% de prata. Que porcentagem de prata contém um lingote do tipo B?

(A) 61%
(B) 77%
(C) 88%
(D) 92%
(E) 54%

21 (Puccamp-SP) Através de um canal de compras, pode-se adquirir um certo tipo de camisa a R$ 29,00 a unidade, com a seguinte promoção: na compra de uma segunda camisa desse tipo, esta sairia por R$ 10,00. Nessa promoção, a porcentagem de desconto no preço da segunda peça, em relação ao preço da primeira,

era de aproximadamente:

(A) 65,5%
(B) 63,5%
(C) 34,5%
(D) 29%
(E) 19%

22 (UCDB-MS) Uma creche gastava x litros de leite para alimentar suas crianças durante 10 dias. Após chegar à creche um segundo grupo de crianças, esses x litros de leite passaram a ser consumidos em 8 dias.
Se o leite fosse usado para alimentar apenas o segundo grupo de crianças, ele seria consumido em:

(A) 20 dias.
(B) 30 dias.
(C) 40 dias.
(D) 50 dias.
(E) 60 dias.

23 (FGV-SP) Um aparelho de TV é vendido por R$ 1.000,00 em dois pagamentos iguais, sem acréscimo, sendo o 1º como entrada e o 2º um mês após a compra. Se o pagamento for feito à vista, há um desconto de 4% sobre o preço de R$ 1.000,00. A taxa mensal de juros simples do financiamento é, aproximadamente, igual a:

(A) 8,7%
(B) 7,7%
(C) 6,7%
(D) 5,7%
(E) 4,7%

24 (UFJF-MG) O preço à vista de uma mercadoria é de R$ 130,00. O comprador pode pagar 20% de entrada no ato da compra e o restante em uma única parcela de R$ 128,26, vencível em 3 meses. Admitindo-se o regime de juros simples comerciais, a taxa de juros anual cobrada na venda a prazo é de:

(A) 94%
(B) 96%
(C) 98%
(D) 100%

25 (UFMG) Um consumidor adquiriu determinado produto em um plano de pagamento de 12 parcelas mensais iguais de R$ 462,00, a uma taxa de juros de 5% ao mês. Ele pagou as 10 primeiras prestações no dia exato do vencimento de cada uma delas. Na data do vencimento da 11ª prestação, o consumidor decidiu quitar a última também, para liquidar sua dívida. Ele exigiu, então, que a última prestação fosse recalculada, para a retirada dos juros correspondentes ao mês antecipado, no que foi atendido.
Depois de recalculado, o valor da última prestação passou a ser de:

(A) R$ 438,90
(B) R$ 441,10
(C) R$ 440,00
(D) R$ 444,00

26 (FGV-SP) Um vidro de perfume é vendido, à vista, por R$ 48,00 ou, a prazo, em dois pagamentos de R$ 25,00 cada um, o primeiro no ato da compra e o outro um mês depois. A taxa mensal de juros do financiamento é aproximadamente igual a:

(A) 6,7%
(B) 7,7%
(C) 8,7%
(D) 9,7%
(E) 10,7%

27 (UFV-MG) Um investidor tinha R$ 100.000,00 aplicados, parte em ouro e o restante em Certificados de Depósitos Bancários (CDBs). O ouro teve uma alta de 8% ao mês; os CDBs, de 10% ao mês. Se o rendimento no mês foi de R$ 8.500,00, então a quantia, em reais, que ele investiu em ouro foi de:

(A) 55 000
(B) 75 000
(C) 45 000
(D) 65 000
(E) 85 000

28 (ESPM-SP) Numa loja, um objeto custa R$ 100,00 à vista. Uma pessoa compra esse objeto em duas parcelas iguais de R$ 60,00, pagando a primeira parcela no ato da compra e a segunda parcela trinta dias depois. Os juros cobrados por essa loja foram a uma taxa mensal de:

(A) 50%
(B) 40%
(C) 30%
(D) 20%
(E) 10%

29 (UFSE) Cláudia aplicou a quantia de R$ 100,00 a juros simples, à taxa de 1,8% ao mês. Ao completar 5 meses, retirou o montante e aplicou-o em outra instituição, com uma taxa mensal maior. Ao completar 4 meses da nova aplicação, seu novo montante era de R$ 119,90. Essa nova taxa mensal foi de:

(A) 2,5%
(B) 2,4%
(C) 2,3%
(D) 2,2%
(E) 2,1%

30 (UFRGS) Uma loja avisa que, sobre o valor original de uma prestação que não for paga no dia do vencimento, incidirá multa de 10% mais 1% a cada dia de atraso.
Uma pessoa que deveria pagar y reais de prestação e o fez com x dias de atraso, pagou a mais:

(A) $(0{,}1y + x)$ reais
(B) $(x + 10)$ reais
(C) $(10y + x)$ reais
(D) $(0{,}1y + 0{,}01x)$ reais
(E) $(0{,}1y + 0{,}01xy)$ reais

31 Uma geladeira pode ser comprada à vista por R$ 2.000,00 ou em três prestações mensais iguais, sendo a primeira delas paga no ato da compra. Se o

vendedor cobra juros de 30% ao mês sobre o saldo devedor, o valor de cada prestação é, aproximadamente, igual a:

(A) R$ 827,00
(B) R$ 847,00
(C) R$ 867,00
(D) R$ 887,00
(E) R$ 907,00

32 Num determinado país, a inflação é medida semestralmente. No ano passado, os índices de inflação dos dois semestres foram iguais a 100%. A inflação acumulada nesse ano foi igual a:

(A) 100%
(B) 150%
(C) 200%
(D) 250%
(E) 300%

33 Uma mercadoria cujo preço de tabela é R$ 800,00 é vendida, à vista, com desconto de x% ou em duas parcelas iguais de R$ 400,00, sendo a primeira no ato da compra e a segunda um mês após a compra. Suponha que o comprador dispõe do dinheiro necessário para comprar à vista e que ele sabe que a diferença entre o preço à vista e a primeira parcela pode ser aplicada no mercado financeiro a uma taxa de 3% ao mês. Nessas condições:

a) se $x = 2$, será vantajosa para ele a compra a prazo? Explique.

b) Qual é o valor de x que torna indiferente comprar à vista ou a prazo? Explique.

34 Sabe-se que:
log 1,15 = 0,0607; log 2,8 = 0,4472;
log 3,65 = 0,5623; log 5 = 0,69990;
log 5,35 = 0,7284.
Considerando que o preço do cafezinho mais caro do mundo é hoje R$ 20,00, se ele sofrer aumento mensal de 15%, daqui a doze meses passará a custar:

(A) R$ 56,00
(B) R$ 73,00
(C) R$ 84,00
(D) R$ 100,00
(E) R$ 107,00

35 Um negociante empresta R$ 200,00 à taxa anual de 69% de juros e seu credor resolve pagar essa dívida em 6 meses. Calcule o valor que ele deve pagar admitindo que foi usado:

a) juro composto;

b) juro simples.

36 Por um empréstimo de R$ 80.000,00, à taxa de i % ao mês, paga-se, de uma única vez, após 2 meses, o montante de R$ 115.200,00. Por terem sido aplicados a juros compostos, a taxa mensal foi de:

(A) 15%
(B) 20%
(C) 22%
(D) 24%
(E) 26%

CAPÍTULO III

ANÁLISE COMBINATÓRIA

J.C. Ruzza

A Análise Combinatória nada mais é do que um aprofundamento da habilidade de contar – por exemplo, contar o número de maneiras de conquistar um certo objetivo, especialmente quando a listagem exata de todas as maneiras é trabalhosa e desnecessária.

3 – ANÁLISE COMBINATÓRIA

É o estudo dos processos de formação e contagem de agrupamentos que podem ser formados com os elementos de uma coleção, obedecendo a determinadas condições.

3.1 – Princípio fundamental da contagem

Este princípio se refere à formação ordenada de agrupamentos, isto é, à realização de procedimentos sucessivos que darão origem à sequência de elementos.

NOTA
Este princípio se estuda para *n* procedimentos.

Se dois procedimentos devem ser executados em etapas e o primeiro tem p alternativas para realizar-se e se, para cada uma dessas p alternativas, podem associar-se q alternativas do segundo procedimento, então o número de modos de executar-se os dois procedimentos, e nesta ordem, é pq.

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_p$ as alternativas para o primeiro procedimento e $b_1, b_2, \ldots, b_q$ as alternativas para o segundo procedimento. Associemos, a cada alternativa do primeiro procedimento, todas as possibilidades do segundo procedimento. Teremos:

$$a_1 \left\{ \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_q \end{array} \right. \qquad a_2 \left\{ \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_q \end{array} \right. \quad \ldots \quad a_p \left\{ \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_q \end{array} \right.$$

Podemos então formar o quadro dos pares.

primeiro \ segundo	b_1	b_2	...	b_q	
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	...	(a_1, b_q)	q casos +
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	...	(a_2, b_q)	q casos +
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$ +
a_p	(a_p, b_1)	(a_p, b_2)	...	(a_p, b_q)	q casos

OBSERVAÇÃO
Note que os pares obtidos (a_p, b_q) com os procedimentos adotados são ordenados, isto é, os resultados são obtidos na ordem dos procedimentos realizados.
Usaremos a notação (a_p, b_q) para representar agrupamentos ordenados.

Temos em cada linha q casos. Como temos p linhas, o total será a soma $q + q + \ldots + q$ com p parcelas, logo pq modos de executar os dois procedimentos.

Exemplos:

i) Maria tem 5 saias e 10 blusas, todas diferentes. De quantos modos diferentes Maria pode vestir-se usando uma saia e uma blusa?
Para cada saia Maria poderá usar qualquer uma das 10 blusas, formando portanto com cada saia 10 conjuntos (saia e blusa). Como são 5 saias, isso se repetirá 5 vezes, perfazendo portanto $5 \cdot 10 = 50$ conjuntos.
Se Maria tivesse 6 pares de sapatos, o número de conjuntos (saia, blusa e sapatos) seria 6 para cada conjunto (saia e blusa), logo, como são 50 conjuntos (saia e blusa), teremos $6 \cdot 50 = 300$ conjuntos (saia, blusa e sapatos).

ii) Tem-se 7 bandeiras, cada uma com uma cor do espectro solar: vermelha, laranja, amarela, verde, azul, anil e violeta. Deseja-se emitir sinais em código, hasteando num mastro, verticalmente, 5 dessas bandeiras. Quantos são os códigos:

a) possíveis?

7	vermelha
6	laranja
5	amarela
4	verde
3	azul

Imaginemos formado um desses códigos. Se invertermos a ordem das cores o sinal fica diferente, caracterizando a influência de ordenação das cores.
Trata-se portanto da aplicação do princípio fundamental de contagem.

1º procedimento: colocar uma bandeira no ponto mais alto. Temos 7 alternativas.

2º procedimento: colocar a segunda bandeira abaixo da primeira. Temos 6 alternativas com as cores restantes.

3º procedimento: colocar a terceira bandeira.
Temos 5 procedimentos com as demais cores que são aquelas que não foram colocadas. Etc.

O número de códigos possíveis será, então:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2\,520 \text{ códigos}$$

b) que têm a bandeira vermelha no ponto mais alto?

1	vermelha
6	
5	
4	
3	

Como está imposta a condição de a primeira bandeira ser vermelha, devemos começar cumprindo essa exigência.

Procedimento: Colocar a bandeira vermelha no ponto mais alto. Como temos apenas uma bandeira vermelha, só temos uma alternativa.

Os procedimentos seguintes são análogos ao caso (a) anterior, logo o número de códigos será $1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

c) que têm a bandeira vermelha em qualquer lugar?
Como a vermelha, nesse caso, pode estar em qualquer lugar, o raciocínio usado para o ponto mais alto se repete para qualquer das cinco posições possíveis, logo o caso anterior fica multiplicado por 5. Temos então $5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1\,800$.

d) que não têm a bandeira vermelha?
Basta retirar a bandeira vermelha das cores disponíveis e proceder como no item (a) com as 6 bandeiras restantes. Temos, então: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ códigos.
Poderíamos também retirar de todos os casos possíveis aqueles em que a bandeira vermelha aparece em qualquer lugar, logo $2\,520 - 1\,800 = 720$ códigos.

e) que têm a bandeira vermelha no ponto mais alto e a violeta no ponto mais baixo?

1	vermelha
5	
4	
3	
1	violeta

Coloquemos a vermelha no ponto mais alto e a violeta no ponto mais baixo. Temos, então: $1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 60$ códigos.

f) que tenham a vermelha e a violeta em qualquer lugar?
Colocando a vermelha em qualquer lugar temos 5 alternativas. Em seguida, colocando a violeta nos lugares restantes temos 4 alternativas. Para os três lugares ainda disponíveis temos 5 cores que ali podem ser colocadas, logo para esses três lugares temos $5 \cdot 4 \cdot 3$ formas de preenchê-los. Assim, o número total de códigos será $5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1\,200$.

g) que tenham a vermelha e a violeta juntas?
Colocamos a vermelha e a violeta juntas. Temos então duas alternativas: (vermelha, violeta) ou (violeta, vermelha). Esse par de cores juntas pode ocupar 4 posições nos 5 lugares disponíveis. Restam agora 5 cores para serem colocadas nos 3 lugares restantes. Logo, teremos $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 480$ códigos.

h) que tenham a vermelha e a violeta separadas?
Neste caso, como temos todos os casos em que aparecem a vermelha e a violeta (item f) em número de 1 200 e os casos em que a vermelha e a violeta aparecem juntas uma da outra (item g) em número de 480, aqueles em que a vermelha e a violeta aparecem separadas será a diferença 1 200 – 480 = 720 códigos.

NOTA
Muitas vezes, convém obter os agrupamentos por subtração, contando todos os casos possíveis e subtraindo os que não interessam.

iii) Quantos cata-ventos de 5 pétalas de cores diferentes podem ser formados com as 7 cores fundamentais?

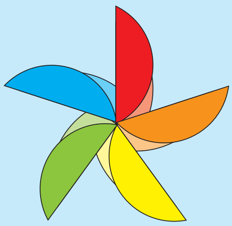


Figura 1

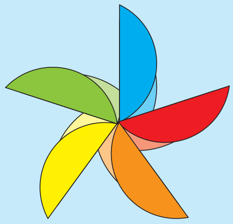


Figura 2

Observe que, nesse caso, há disposições que ficam iguais, como as acima, em que as cores estão na mesma posição relativa. Nas figuras 1 e 2 os cata-ventos são iguais – basta fazer uma rotação de 72º em torno do centro, que as figuras coincidem.
Para eliminar essa coincidência, basta observar que cada grupo de 5 cores deve ser considerado como um único grupo.

Assim, o número desejado será: $\dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5} = 504$.

NOTA
Quando os elementos têm a mesma posição relativa, a disposição circular é a mesma. O número de casos se reduz dividindo-se o total pelo número de casos iguais.

iv) Quantos são os números de 5 algarismos que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7:

a) possíveis?
Os números são conjuntos ordenados, isto é, a ordem de colocação dos seus algarismos altera o número.
Trata-se de uma sequência de 5 algarismos. Por exemplo, 10 223 e 22 301 são números diferentes formados pelos mesmos algarismos.
Os procedimentos para a formação dos números consistem em colocar os algarismos disponíveis nas posições de unidades, dezenas, centenas etc.

DM UM C D U

Numeremos as posições dos algarismos:

1^a 2^a 3^a 4^a 5^a posições.

Na 1^a posição podemos colocar os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Temos 7 alternativas. O zero não pode ser colocado na primeira posição, pois o número 01 234, por exemplo, não é um número de 5 algarismos.
Na 2^a posição podemos colocar qualquer dos oito algarismos dados, pois nada impede a repetição de algarismos.

OBSERVAÇÃO
Se não pudéssemos repetir, teríamos
$7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 5\,880$
números de algarismos diferentes.

Na 3ª, 4ª e 5ª posições temos também 8 alternativas para cada posição, logo o número de casos possíveis será:

$$7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 28\,672 \text{ números}$$

b) ímpares?
Os números ímpares são os que terminam por algarismo ímpar. Como essa condição se impõe, devemos contar suas alternativas em primeiro lugar.

$$\begin{array}{ccccccc} & 1^{\underline{o}} & 2^{\underline{o}} & & 3^{\underline{o}}\ \ 4^{\underline{o}} & 5^{\underline{o}} & \\ 7\left\{\begin{array}{c}1\\2\\3\\\vdots\\7\end{array}\right. & & \left.\begin{array}{c}0\\1\\2\\\vdots\\7\end{array}\right\} 8 & & & \left.\begin{array}{c}1\\3\\5\\7\end{array}\right\} 4 & \end{array}$$

Para o último algarismo temos 4 alternativas: 1, 3, 5 e 7. Para o 1º algarismo temos 7 alternativas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, já que o zero deve ser excluído.

OBSERVAÇÃO
Se não pudéssemos repetir, isto é, se os números fossem de algarismos distintos, teríamos
$6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 2\,880$
números.

Para as outras posições temos todos os 8 algarismos disponíveis, logo teremos $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4 = 14\,336$ números ímpares.

c) pares?
Basta retirar do total possível os números ímpares. Assim, o total de números pares será a diferença:
$7 \cdot 8^4 - 7 \cdot 8^3 \cdot 4 = 28\,672 - 14\,336 = 14\,336$ números pares.
Para contar diretamente o total dos números:

$$\begin{array}{ccc} 1^{\underline{o}} & 2^{\underline{o}}\ \ 3^{\underline{o}}\ \ 4^{\underline{o}} & 5^{\underline{o}} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\\vdots\\7\end{array} & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{8} & \begin{array}{c}0\\2\\4\\6\\ \ \end{array} \end{array}$$

Para o último algarismo temos 4 alternativas: 0, 2, 4, 6. Para o 1º algarismo temos 7 alternativas: 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

As outras posições tem 8 alternativas, logo $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4 = 14\,336$ números pares.

d) pares com algarismos distintos?

$$\begin{array}{ccc} 1^{\underline{o}} & 2^{\underline{o}}\ \ 3^{\underline{o}}\ \ 4^{\underline{o}} & 5^{\underline{o}} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\\vdots\\7\end{array} & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{6} & \begin{array}{c}0\\2\\4\\6\\ \ \end{array} \end{array}$$

Para o último algarismo temos 4 alternativas.
Quando o zero estiver na 5ª posição, teremos para a 1ª posição as 7 alternativas: 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, e para cada uma das outras 6, 5 e 4 alternativas respectivamente, ou seja, $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ números terminados em 0.

OBSERVAÇÃO
Poderíamos também, subtrair os ímpares de algarismos distintos (2 880) do total de números formados por algarismos distintos (5 880).

Quando o zero não estiver na 5ª posição teremos 3 alternativas para ela.
Na primeira posição só poderemos ter algarismos diferentes de zero e do algarismo que estiver na 5ª posição, logo 6 alternativas. Para a 2ª, 3ª e 4ª posições teremos então 6, 5 e 4 alternativas respectivamente, logo $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2\,160$ números pares que não terminam em zero.
O total será então $840 + 2\,160 = 3\,000$ casos.

e) palíndromos ou capicuas?

$$\begin{array}{ccccc}
1^{\underline{o}} & 2^{\underline{o}} & 3^{\underline{o}} & 4^{\underline{o}} & 5^{\underline{o}} \\
7\left\{\begin{array}{c}1\\2\\3\\\vdots\\7\end{array}\right. & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\left.\begin{array}{c}0\\1\\2\\\vdots\\7\end{array}\right\}\quad 8}} & \begin{array}{c}\Vert\\2^{\underline{o}}\end{array} & \begin{array}{c}\Vert\\1^{\underline{o}}\end{array}
\end{array}$$

Aqui a condição imposta é que o 4º algarismo seja igual ao 2º e o 5º seja igual ao 1º.
Temos então $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1 = 448$ casos.

NOTA
Palíndromos são os números que não se alteram quando se inverte a ordem de seus algarismos. Exemplo: 20 502 e 67 176.

OBSERVAÇÃO
Se não houvesse a possibilidade de repetição de algarismos teríamos $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 = 294$ casos.

v) Uma urna contém 12 bolas brancas numeradas de 1 a 12 e 8 bolas pretas numeradas de 1 a 8. Extrai-se, ao acaso, uma bola e, em seguida, sem reposição da primeira, extrai-se uma segunda bola. Quantos são os pares de bolas extraídos:

a) possíveis?
Para a primeira extração temos 20 alternativas e para a segunda $20 - 1 = 19$ alternativas, já que a primeira bola não retorna à urna.
Teremos então $20 \cdot 19 = 380$ extrações possíveis.

b) em que a primeira bola é branca?
Devemos ter os casos (B, B) ou (B, P).
Número de casos (B, B): $12 \cdot 11 = 132$
Número de casos (B, P): $12 \cdot 8 = 96$
Temos então $132 + 96 = 228$ casos.

c) em que a segunda bola é branca?
Devemos ter os casos (B, B) ou (P, B).
Número de casos (B, B): $12 \cdot 11 = 132$
Número de casos (P, B): $8 \cdot 12 = 96$
Total de casos: $132 + 96 = 228$.

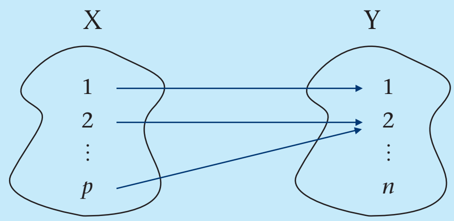
d) em que ambas são pretas?
Número de casos (P, P) $= 8 \cdot 7 = 56$

e) em que ambas são brancas?
Número de casos (B, B) $= 12 \cdot 11 = 132$

vi) Quantas são as funções definidas no conjunto $X = \{1, 2, ..., p\}$ e tomando valores no conjunto $Y = \{1, 2, ..., n\}$:

NOTA
É comum representar o conjunto de todas as funções de X em Y por Y^X.

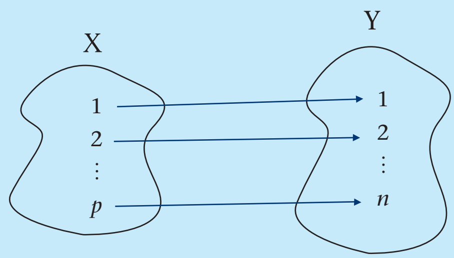
a) possíveis?



A cada elemento do conjunto X podemos associar qualquer um dos elementos do conjunto Y. Assim, para $f(1)$ temos n alternativas, para $f(2)$ também n etc., e para $f(p)$ também n. Temos, então:

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{p} = n^p \text{ funções}$$

b) injetivas?



Nas funções injetivas, para x diferentes deve-se ter imagens $f(x)$ diferentes. Assim, para imagem $f(1)$ temos n alternativas.

Para imagem $f(2)$ temos $n - 1$ alternativas, já que $f(2)$ deve ser diferente de $f(1)$.
Para imagem $f(3)$ temos $n - 2$ alternativas, porque deve ser diferente de $f(1)$ e $f(2)$.
Assim, sucessivamente, para $f(p)$ não podem ser utilizadas as imagens $f(1), f(2), \ldots, f(p - 1)$, em número de $p - 1$, já utilizadas. Ficam, portanto disponíveis $n - (p - 1)$ alternativas para $f(p)$ e o número de injeções fica então, com produto de p fatores decrescentes a partir de n:

$$n(n-1)(n-2) \ldots [n-(p-1)] = n(n-1)(n-2) \ldots (n-p+1)$$

NOTA
Se $p > n$ não haverá funções injetivas.

c) bijetivas (com $p = n$)?
Esse é um caso particular do anterior quando $p = n$. Assim, para $f(1)$ temos n alternativas, para $f(2)$ temos $n - 1$, para $f(3)$ temos $n - 2$ etc. para $f(n - 1)$ temos 2 alternativas e para $f(n)$ apenas uma.
Então, o número de casos será:

$$n(n-1)(n-2) \ldots (n-n+1) = n(n-1)(n-2) \ldots 2 \cdot 1 = n!$$

NOTA
O símbolo $n!$ representa o produto de todos os números naturais desde 1 até n.

Alguns tipos de agrupamentos recebem nomes particulares conforme suas características.
Esses agrupamentos distinguem-se uns dos outros:

1) pelo número de elementos que formam cada agrupamento.

2) pela ordem de colocação dos elementos em cada agrupamento.

3) pela substituição de um elemento por outro diferente.

Tais agrupamentos serão estudados nos próximos capítulos.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 No sistema de numeração decimal, quantos números de três algarismos são formados:

a) com repetição de algarismos?

b) sem repetição de algarismos?

2 Oito cavalos disputam uma corrida. Quantas são as possibilidades de chegada para os 3 primeiros lugares?

3 Quantos números de quatro algarismos distintos podem ser formados usando-se os algarismos 3, 4, 5, 7, 8 e 9?

4 (PUC-RJ) A senha de acesso a um jogo de computador consiste em quatro caracteres alfabéticos ou numéricos, sendo o primeiro necessariamente alfabético. O número de senhas possíveis será, então:

(A) 36^4
(B) 10×36^3
(C) 26×36^3
(D) 26^4
(E) 10×26^4

5 (Cesgranrio-RJ) Durante a Copa do Mundo, que foi disputada por 24 países, as tampinhas de Coca-Cola traziam palpites sobre países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1º lugar, Brasil; 2º lugar, Nigéria; 3º lugar, Holanda).
Se, em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?

(A) 69
(B) 2 024
(C) 9 562
(D) 12 144
(E) 13 824

6 (FGV-SP) As atuais placas de licenciamento de automóveis constam de sete símbolos, sendo três letras, dentre as 26 do alfabeto, seguida de quatro algarismos.

a) Quantas são as placas distintas, sem o algarismo zero, na primeira posição reservada aos algarismos?

b) No conjunto de todas as placas distintas possíveis, qual a porcentagem daquelas que têm as duas primeiras letras iguais?

7 (UFG-GO) Utilizando as notas dó, ré, mi, fá, sol, lá e si, um músico deseja compor uma melodia com 4 notas, de modo que tenha notas consecutivas distintas. Por exemplo: {dó, ré, dó, mi} e {si, ré, mi, fá} são melodias permitidas, enquanto {ré, ré, dó, mi} não, pois possui duas notas ré consecutivas.

a) Escreva cinco melodias diferentes, de acordo com o critério dado.

b) Qual o número de melodias que podem ser compostas nessas condições?

8 (UFF-RJ) Uma empresa vai fabricar cofres com senhas de 4 letras, usando as 18 consoantes e as 5 vogais. Se cada senha deve começar com uma consoante e terminar com uma vogal, sem repetir letras, o número de senhas possíveis é:

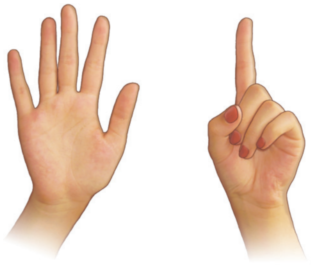
(A) 3 060
(B) 24 480
(C) 37 800
(D) 51 210
(E) 73 440

9 (Uerj) Numa cidade, os números telefônicos não podem começar por zero e têm oito algarismos, dos quais os quatro primeiros constituem o prefixo.
Considere que os quatro últimos dígitos de todas as farmácias são 0000 e que o prefixo da farmácia Vivavida é formado pelos dígitos 2, 4, 5 e 6, não repetidos e não necessariamente nesta ordem.
O número máximo de tentativas a serem feitas para identificar o número telefônico completo dessa farmácia equivale a:

(A) 6
(B) 24
(C) 64
(D) 168

10 Na eleição de uma escola há três candidatos a presidente, cinco a vice-presidente, seis a secretário e sete a tesoureiro. Quantos podem ser os resultados dessa eleição?

11 João disse para seu amigo "olha meu escore":



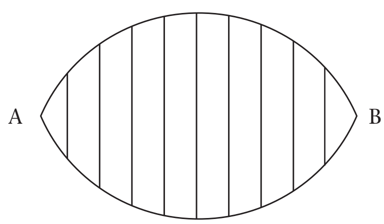
Seu amigo menos otimista retrucou, "não, acho que o Botafogo vai ganhar de 2 a 1". Se o amigo de João tivesse indicado com dois dedos quaisquer da mão direita e um qualquer da mão esquerda esse escore, de quantos modos diferentes poderia fazê-lo?

12 Quantos números de 3 algarismos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 que tenham 2 como um de seus algarismos?

13 (Cesgranrio-RJ) Um fiscal do Ministério do Trabalho faz uma visita mensal a cada uma das cinco empresas de construção civil existentes no município. Para evitar que os donos dessas empresas saibam quando o fiscal as inspecionará, ele varia as ordens de suas visitas.
De quantas formas diferentes esse fiscal pode organizar o calendário de visita mensal a essas empresas?

(A) 180 (B) 120 (C) 100 (D) 48 (E) 24

14 Há duas estradas principais da cidade A até a cidade B, ligadas por 10 estradas secundárias, como na figura. Quantas rotas livres de autointersecções há de A até B?

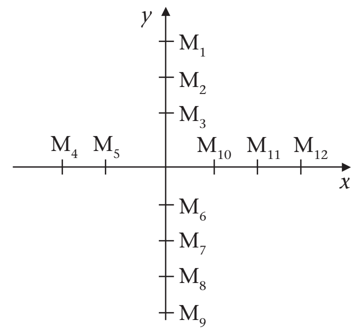


15 Um trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e 6 vagões distintos, sendo um deles vagão-restaurante. Sabendo que a locomotiva deve ir à frente da composição e que o vagão-restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, de quantos modos diferentes é possível montar essa composição?

16 (UFRRJ) Para diminuir o emplacamento de carros roubados, um determinado país resolveu fazer um cadastro nacional, onde as placas são formadas com 3 letras e 4 algarismos, sendo que a 1ª letra da placa determina um Estado desse país. Considerando o alfabeto com 26 letras, o número máximo de carros que cada Estado poderá emplacar será de:

(A) 175 760
(B) 409 500
(C) 6 500 000
(D) 6 760 000
(E) 175 760 000

17 (UFF-RJ) Considere os eixos coordenados x e y e o conjunto $M = \{M_1, M_2, ..., M_{12}\}$ cujos elementos estão assinalados na figura a seguir.



O número de quadriláteros convexos que possuem vértices pertencentes a M e diagonais sobre os eixos é:

(A) 216
(B) 108
(C) 72
(D) 36
(E) 12

18 Quantos números ímpares de 5 algarismos distintos há no nosso sistema de numeração?

19 Quantos divisores naturais possui o número 72?

20 (UFF-RJ) O estudo da genética estabelece que, com as bases adenina (A), timina (T), citosina (C) e guanina (G), podem-se formar apenas, quatro tipos de pares: A–T, T–A, C–G e G–C.
Certo cientista deseja sintetizar um fragmento de DNA com dez desses pares, de modo que:

- dois pares consecutivos não sejam iguais;
- um par A–T não seja seguido por um par T–A e vice-versa;
- um par C–G não seja seguido por um par G–C e vice-versa.

Sabe-se que dois fragmentos de DNA são idênticos se constituídos por pares iguais dispostos na mesma ordem.
Logo, o número de maneiras distintas que o cientista pode formar esse fragmento de DNA é:

(A) 2^{11}
(B) 2^{20}
(C) $2 \cdot 10$
(D) 2^{10}
(E) $2^2 \cdot 10$

21 (UFF-RJ) Em um sofá de 3 lugares irão sentar-se uma criança, uma moça e um rapaz, sendo que a criança sempre irá sentar-se no lugar do meio. De quantas maneiras diferentes 5 crianças, 5 moças e 5 rapazes poderão sentar-se no sofá?

3.2 – Arranjos

3.2.1 – Arranjos simples

Arranjos simples de n elementos p a p são os agrupamentos ordenados de p elementos que podem ser formados a partir de n elementos dados sem repeti-los.

DEFINIÇÃO
Arranjos simples.

NOTA
Por exemplo, o arranjo $(a, b, c, d) \neq (a, c, d, b)$.

Os arranjos são agrupamentos em que a ordem de colocação de seus elementos influi em seu significado. A esses agrupamentos aplica-se o princípio fundamental da contagem.

Representam-se esses agrupamentos por $(a_1, a_2, ..., a_p)$.

Para verificar se um agrupamento é um arranjo, formamos um agrupamento conforme suas características e trocamos dois elementos distintos de posição entre si. Se o novo agrupamento se alterar, isto é, ficar diferente do inicial, estaremos diante de um caso de agrupamento ordenado, ou seja, arranjos simples.

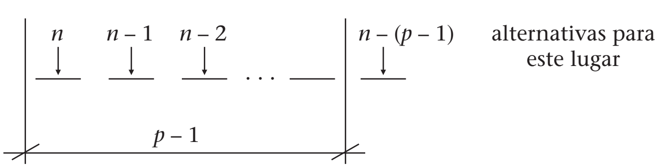
O número de arranjos simples de n elementos p a p é representado por A_n^p ou $A_{n,\,p}$.

Se quisermos uma fórmula para A_n^p, basta aplicar o princípio fundamental da contagem.

Consideremos p lugares onde serão colocados p elementos distintos dos n disponíveis.

1º 2º 3º ... pº

Para o 1º lugar temos: n alternativas.
Para o 2º lugar temos: $n - 1$ alternativas.
Para o 3º lugar temos: $n - 2$ alternativas.
⋮
Para pº lugar temos $n - (p - 1)$ alternativas, pois já teriam sido colocados $p - 1$ elementos.



Temos um total de:

$$A_n^p = n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - p + 1)$$

Multiplicando por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!} = 1$, o que não altera a expressão; vem:

$$A_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-p+1)(n-p)(n-p-1)\ \ldots\ 1}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

3.2.2 – Arranjos completos

DEFINIÇÃO
Arranjos completos.

Arranjos completos de n elementos p a p são os agrupamentos ordenados de p elementos, que podem ser formados a partir de n elementos dados, de modo que um mesmo elemento pode ser repetido até p vezes.

Uma fórmula para o número de arranjos completos se obtém usando o princípio fundamental:

$$(\text{AC})_n^p = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{p \text{ fatores}} = n^p$$

$$(\text{AC})_n^p = n^p$$

As fórmulas dos arranjos são pouco usadas em presença de uso do princípio fundamental da contagem.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Resolva.

a) $A_7^4 + A_5^2$ b) $A_6^3 - A_8^2$

2 Calcule *x* em:

a) $A_x^2 = 56$ b) $A_{x-1}^3 = 210$

3 Dada a palavra VETORIAL, quantos são os arranjos simples, de quatro elementos, com as letras dessa palavra:

a) possíveis?

b) começados por V?

c) terminados por L?

d) começando por V e terminando por L?

e) começando por vogal e terminando por consoante?

f) começando e terminando por vogal?

g) começando por vogal?

h) sendo as duas primeiras letras vogais e as duas últimas consoantes?

4 Com 8 pontos distintos, quantos são os segmentos orientados que ficam determinados com origem e extremidade nesses pontos?

5 Num concurso com 12 participantes, se nenhum pode ganhar mais de um prêmio, de quantos modos podem ser distribuídos um 1º e um 2º prêmios?

6 Quantos números pares de 4 algarismos obtemos com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, sem repeti-los?

7 Calcule $(AC)_7^3 - (AC)_5^0$.

8 Com as 6 primeiras letras do alfabeto, quantas palavras de 4 letras podem ser escritas começando com a letra A?

9 Quantos números naturais de 3 algarismos significativos existem?

10 De quantos modos se pode ler um jornal de 6 páginas quanto à ordem em que se considera as páginas?

3.3 – Permutações

Permutações são agrupamentos ordenados que utilizam todos os elementos em questão. Podem ser simples ou com repetição.

3.3.1 – Permutações simples

DEFINIÇÃO
Permutação simples.

> **Permutações simples** de n elementos são os agrupamentos ordenados que podem ser formados com todos os n elementos disponíveis.

Uma permutação difere de outra apenas pela ordem de seus elementos. Por exemplo, as permutações simples dos elementos $\{a_1, a_2, a_3\}$ são as sequências:

(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_2), (a_3, a_1, a_2), (a_3, a_2, a_1), (a_2, a_3, a_1) e (a_2, a_1, a_3)

São portanto todas as "filas" que se podem formar com os elementos $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Para representar o número de permutações de n elementos usa-se a notação P_n.

Como as permutações são agrupamentos ordenados, seu número pode ser calculado usando o princípio fundamental da contagem. Consideremos n lugares onde serão colocados os n elementos disponíveis.

($1^{\underline{o}}$, $2^{\underline{o}}$, $3^{\underline{o}}$, ..., $n^{\underline{o}}$)

Para o $1^{\underline{o}}$ lugar temos n alternativas.

Para o $2^{\underline{o}}$ lugar temos $n - 1$ alternativas, já que não podemos repetir o elemento que está no $1^{\underline{o}}$ lugar.

Para o $3^{\underline{o}}$ lugar temos $n - 2$ alternativas, por não poder repetir os dois primeiros.

Assim, sucessivamente, para o último lugar restará apenas uma alternativa, logo:

$$P_n = n(n-1)(n-2) \ldots 2 \cdot 1 = n!$$

$$\boxed{P_n = n!}$$

Exemplos:

i) $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

ii) Quantos números se obtém permutando-se os algarismos do número 52 381:

a) possíveis?
$P_5 = 5! = 120$

b) maiores que 30 000?
Os números maiores que 30 000 devem começar por 3, 5 ou 8 e ter 5 algarismos.

$$\begin{array}{cc} 1^{\underline{o}} & \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{4!} \\ 3\left\{\begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 8 \end{array}\right. & \end{array}$$

Colocamos os algarismos 3, 5 ou 8 no início e permutamos os quatro seguintes, obtendo, então:

$$3 \cdot P_4 = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72$$

iii) Calcule:

a) $\frac{8!}{7!} = \frac{8 \cdot \cancel{7}!}{\cancel{7}!} = 8$

b) $4! + 5! = 4!(1 + 5) = 4! \cdot 6 = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 6 = 144$

c) $\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3}!}{\cancel{3}!} = 120$

d) $\frac{12!}{10!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{\cancel{10!}} = 132$

e) $\frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6}!}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{6}!} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$

f) $\frac{5! \cdot 15!}{13! \cdot 7!} = \frac{\cancel{5}! \cdot 15 \cdot \overset{2}{\cancel{14}} \cdot \cancel{13}!}{\cancel{13}! \cdot \cancel{7} \cdot 6 \cdot \cancel{5}!} = \frac{30}{6} = 5$

g) $\frac{1}{10!} - \frac{1}{11!} = \frac{1}{10!} - \frac{1}{11 \cdot 10!} = \frac{11-1}{11 \cdot 10!} = \frac{\cancel{10}}{11 \cdot \cancel{10} \cdot 9!} = \frac{1}{11 \cdot 9!}$

iv) Simplifique:

a) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)}!}{\cancel{(n-1)}!} = n$

b) $\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \cdot \cancel{n}!}{\cancel{n}!} = n+1$

c) $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{(n-1)}!}{(n+1) \cdot n \cdot \cancel{(n-1)}!} = \frac{1}{n(n+1)}$

d) $\frac{(m+1)!n!}{m!(n-1)!} = \frac{(m+1) \cdot \cancel{m}! \cdot n \cdot \cancel{(n-1)}!}{\cancel{m}!\,\cancel{(n-1)}!} = n(m+1)$

e) $\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1)\cancel{(n-2)}!}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{(n-2)}!} = \frac{n(n-1)}{2}$

NOTA
$n! = n \cdot (n-1)!$
$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

NOTA
Anagrama é toda sequência de letras formada com as letras de uma palavra.

v) Calcule n na equação: $n! = 12 \cdot (n-2)!$
$n! = 12(n-2)! \Rightarrow n \cdot (n-1)\cancel{(n-2)}! = 12\cancel{(n-2)}!$

$$n(n-1) = 12 \Rightarrow n^2 - n - 12 = 0 \left< \begin{array}{l} n = 4 \\ n = -3 \end{array} \right.$$

Como $n = -3$ não convém, temos que $n = 4$.

vi) Quantos são os anagramas da palavra VESTIBULAR:

a) possíveis?
Como a palavra VESTIBULAR tem 10 letras distintas, permutando-as de todos os modos possíveis teremos:
$P_{10} = 10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800$ anagramas

b) que começam por VES nesta ordem?

$$\text{VES}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{7!}$$

Basta fixar as letras VES, nessa ordem, no início do anagrama e permutar as outras 7 letras obtendo:
$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5\,040$ anagramas

c) que começam por VES em qualquer ordem?

$$P_3 = 3! \left\{ \begin{array}{l} \text{VES}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{7!} \\ \text{VSE} \\ \text{SVE} \\ \text{SEV} \\ \text{ESV} \\ \text{EVS} \end{array} \right.$$

Em cada um dos 7! anagramas com VES no início, permutamos as letras VES obtendo $P_3 = 3!$ anagramas para cada um, perfazendo o total de $P_3 \cdot P_7 = 3! \cdot 7! = 30\,240$ anagramas.

d) que têm juntas as letras VES nesta ordem?

X
VESTIBULAR

Chamemos o conjunto VES de X obtendo o anagrama XTIBULAR, agora com 8 letras.
Permutando as 8 letras da nova “palavra”, considerando o grupo X como uma letra, obtemos $P_8 = 8! = 40\,320$ anagramas.

e) que têm juntas as letras VES em qualquer ordem?
Em cada um dos anagramas do item anterior, isto é, da palavra XTIBULAR, permutemos as letras do grupo X que é constituído de 3 letras, obtendo assim:

$P_3 \cdot P_8 = 3! \cdot 8! = 6 \cdot 40\,320 = 241\,920$ anagramas

f) que têm juntas as letras VES em qualquer ordem assim como as letras AR também em qualquer ordem?

$$\overset{X}{\text{VES}}\text{TIBUL}\overset{Y}{\text{AR}}$$

Chamemos o grupo VES de X e o grupo AR de Y.
A palavra fica XTIBULY. Permutando essas 7 letras, obtemos 7! anagramas. Devemos agora permutar as 3 letras do grupo X, assim como as 2 letras do grupo Y obtendo:

$P_3 \cdot P_7 \cdot P_2 = 3! \cdot 7! \cdot 2! = 60\,480$ anagramas

vii) Cinco casais, dentre os quais João e Maria, vão a um cinema onde há 10 lugares numa mesma fila, lado a lado. De quantos modos diferentes essas pessoas podem se dispor nesses lugares:

a) possíveis?
Basta permutar todas as pessoas nos 10 lugares disponíveis. Temos então:
$P_{10} = 10! = 3\,628\,800$ modos

b) tendo Maria numa extremidade e João na outra?

$$\underline{J}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{M}$$

$$\underline{M}\ \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{8!}\ \underline{J}$$

Temos 2 casos: Maria no início e João no fim ou o contrário, João no início e Maria no fim.
Os intermediários podem ocupar 8! posições em cada caso, logo o total será:

$P_2 \cdot P_8 = 2 \cdot 8! = 2 \cdot 40\,320 = 80\,640$ modos

c) tendo os homens e mulheres alternados?

$$\underline{H_1}\ \underline{M_1}\ \underline{H_2}\ \underline{M_2}\ \underline{H_3}\ \underline{M_3}\ \underline{H_4}\ \underline{M_4}\ \underline{H_5}\ \underline{M_5}$$

$$\underline{M_1}\ \underline{H_1}\ \underline{M_2}\ \underline{H_2}\ \underline{M_3}\ \underline{H_3}\ \underline{M_4}\ \underline{H_4}\ \underline{M_5}\ \underline{H_5}$$

Temos 2 casos: a fila começando por homem ou a fila começando por mulher. Consideremos um dos casos. Fixando os homens nos seus lugares e permutando-se as mulheres entre si, temos 5! casos com os homens fixos. Mas os homens podem permutar-se entre si para cada permutação das mulheres, dando, portanto, 5! · 5! modos. Como são 2 casos, o total obtido será:
$2 \cdot 5! \cdot 5! = 2 \cdot 120 \cdot 120 = 28\,800$ modos diferentes

d) tendo João e Maria juntos?

$$\underline{J}\ \underline{M}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

$$C = \underline{JM}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

$$\underline{C}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

Chamemos o casal João e Maria de C e tratemo-lo como uma única pessoa.
Passamos assim a ter 9 pessoas. Permutando-as, temos $P_9 = 9!$ casos. Entretanto, João e Maria podem estar juntos de 2 modos diferentes, JM ou MJ, o que duplicará o valor encontrado. Teremos, então:

$P_2 \cdot P_9 = 2 \cdot 9! = 725\,760$ modos

e) tendo João e Maria separados?
Basta subtrair do total de casos possíveis aqueles em que João e Maria estão juntos, logo, teremos:

$$10! - 2 \cdot 9! = 9!(10 - 2) = 9!8 = 2\,903\,040 \text{ modos}$$

f) tendo todos os homens juntos e também as mulheres juntas?

$$\underbrace{\underline{H}\ \underline{H}\ \underline{H}\ \underline{H}\ \underline{H}}_{5!}\ \underbrace{\underline{M}\ \underline{M}\ \underline{M}\ \underline{M}\ \underline{M}}_{5!}$$

Fixemos os 5 homens no início e permutemos as mulheres.
Temos 5! filas com os homens fixos. Como para cada permutação das mulheres podemos permutar os homens, teremos 5!5! modos com os homens no início. Levando em conta que as mulheres poderiam estar no início, temos 2 casos, logo o número de modos será:

$$2 \cdot 5! \cdot 5! = 28\,800$$

g) tendo cada homem ao lado de sua mulher?

$$\underline{C_1}\ \underline{C_2}\ \underline{C_3}\ \underline{C_4}\ \underline{C_5}$$

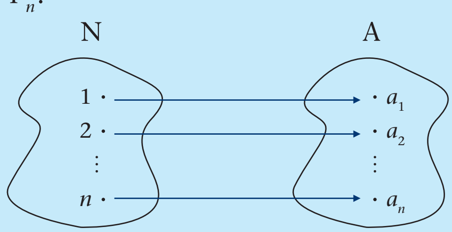
Consideremos cada homem com sua mulher um único elemento, o casal. Temos então 5 casais.
Permutando os 5 casais temos 5! casos. Como cada casal pode estar junto de 2 maneiras diferentes, HM ou MH, permutemos em cada casal o homem com sua mulher. Temos então:

$$P_5 \cdot P_2 \cdot P_2 \cdot P_2 \cdot P_2 \cdot P_2 = 5! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 5! \cdot 2^5 = 3\,840 \text{ modos}$$

h) tendo cada homem ao lado de sua mulher, alternadamente?
Aqui todos os homens ficam à esquerda de suas mulheres ou todos os homens ficam à direita de suas mulheres.
Temos então 2 casos a considerar para cada permutação dos 5 casais, logo o total será $5! \cdot 2 = 240$ modos.

viii) Quantas são as bijeções do conjunto N = {1, 2, 3, ..., n} sobre o conjunto A = {a_1, a_2, ..., a_n}?

Como todos os elementos de N têm imagens distintas em A, haverá tantas bijeções quanto $n! = P_n$.



ix) Dão-se os números 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9 e formam-se com eles todos os números possíveis de 7 algarismos distintos.

a) Qual a posição do número 7 348 921 quando o colocamos em ordem crescente?

Os números que começam por 1, 2, 3 e 4 são anteriores ao número dado, pois são menores que ele. Temos então:

$$\begin{array}{cc} \_\_ & \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{6!} \\ 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \end{array}$$

$4 \cdot P_6 = 4 \cdot 6! = 2\,880$ números

Os números de 7 algarismos que começam por 7 só serão anteriores ao número dado se começarem por 71 ou 72, logo teremos:

$$\begin{array}{ccc} \_\_ & \_\_ & \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{5!} \\ 7 & 1 & \\ 7 & 2 & \end{array}$$

$2 \cdot P_5 = 2 \cdot 120 = 240$

Analogamente, antecedendo ao número dado:

começando por 731 ou 732: $2P_4 = 2 \cdot 24 = 48$;

começando por 7 341 ou 7 342: $2P_3 = 12$;

começando por 73 481 ou 73 482: $2P_2 = 4$;

e finalmente 7 348 912: 1.

Teremos então um total de $2\,880 + 240 + 48 + 12 + 4 + 1 = 3\,185$ números que antecedem 7 348 921, logo ele será o 3 186º.

b) Qual será o 3 028º número da sequência se os números forem escritos na ordem crescente?

Começando por 1, temos: $\underline{1}$ _ _ _ _ _ _ $P_6 = 6! = 720$.

Dividindo 3 028 por 720, obtemos quociente igual a 4 e resto 148. Isso significa que os números que começam por 1, 2, 3, e 4 antecedem o número desejado. Assim, o número desejado começa por 7.

Começando por 71, temos: $\underline{7}\ \underline{1}$ _ _ _ _ _ $P_5 = 5! = 120$.
Dividindo 148 por 120, temos quociente igual a 1 e resto 28. Isso significa que os números iniciados por 71 vêm antes do número desejado. Assim, o número desejado começa com 72.
Começando por 721, temos: $\underline{7}\ \underline{2}\ \underline{1}$ _ _ _ _ $P_4 = 4! = 24$.
Dividindo 28 por 24 temos quociente 1 e resto 4. O número desejado deve então começar por 723. Já garantimos a existência de
$4 \cdot 720 + 1 \cdot 120 + 1 \cdot 24 = 3024$ números anteriores ao número desejado.
Faltam então $3028 - 3024 = 4$ números para chegarmos ao número, que na ordem crescente serão 7 231 489, 7 231 498, 7 231 849 e 7 231 894.
O número procurado é então 7 231 894.

c) Qual a soma de todos os números possíveis?
Um número qualquer de 7 algarismos se escreve:
$abcdefg = a \cdot 10^6 + b \cdot 10^5 + c \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^2 + f \cdot 10 + g$.
O algarismo das unidades ocupa essa posição $P_6 = 6!$ vezes quando o fixamos nessa posição e permutamos os outros 6 algarismos.
Na soma de todos os números possíveis, essa posição contribuirá com $6!(1 + 2 + 3 + 4 + 7 + 8 + 9) = 6! \cdot 34$ já que todos os algarismos poderão estar nela.
O algarismo das dezenas ocupa essa posição também 6! vezes quando o fixamos nela e permutamos os outros 6 algarismos. Na soma de todos os números possíveis, essa posição contribuirá com $6! \cdot 10 \cdot 34$.
O algarismo das centenas contribuirá na soma com $6! \cdot 10^2 \cdot 34$ e assim sucessivamente até $6! \cdot 10^6 \cdot 34$. A soma final será então:
$6! \cdot 34 + 6! \cdot 10 \cdot 34 + 6! \cdot 10^2 \cdot 34 + 6! \cdot 10^3 \cdot 34 + \ldots + 6! \cdot 10^6 \cdot 34 =$
$= 6! \cdot 34 \cdot (1 + 10 + 100 + 1\,000 + \ldots + 1\,000\,000) =$
$= 6! \cdot 34 \cdot 1\,111\,111 =$
$= 27\,199\,997\,280$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 (FEI-SP) Num carro com 5 lugares e mais o lugar do motorista viajam 6 pessoas, das quais 3 sabem dirigir. De quantas maneiras podem dispor-se essas 6 pessoas na viagem?

2 (UFSC) Calcule o número de anagramas da palavra CLARA em que as letras AR aparecem juntas e nessa ordem.

3 Quantos são os anagramas da palavra ZICO?

4 De quantos modos diferentes podem sentar-se 9 pessoas:

a) se ficarem todas em fila?

b) se ficarem todas em fila, mas os lugares nas extremidades forem ocupados pelo mais novo e pelo mais velho?

5 Quantos são os anagramas da palavra BRASIL que:

a) começam com A?

b) começam com A e terminam com R?

6 Quantos são os anagramas da palavra FORMIDÁVEL que:

a) começam por FOR nesta ordem?

b) começam por FOR em qualquer ordem?

c) têm juntas as letras FOR nesta ordem?

d) têm juntas as letras FOR em qualquer ordem?

7 Um vagão de montanha-russa tem 8 lugares, sendo 4 bancos de 2 lugares cada um. Quatro casais ocupam esses lugares. Quantos são os modos de ocupá-los:

a) possíveis?

b) em que homens fiquem de um lado e mulheres do outro?

c) em que cada homem fique ao lado de sua mulher?

d) em que João e Maria fiquem no primeiro banco?

8 (PUC-SP) Formados e colocados em ordem crescente todos os números naturais de quatro algarismos distintos obtidos com os algarismos 1, 3, 5 e 7, que lugar ocupa o número 5 731?

9 (ITA-SP) Se colocarmos em ordem crescente todos os números de 5 (cinco) algarismos distintos, obtidos com 1, 3, 4, 6 e 7, a posição do número 61 473 será:

(A) 76º

(B) 78º

(C) 80º

(D) 82º

10 Simplifique:

a) $\dfrac{15! \cdot 6!}{8! \cdot 13!}$

b) $10! - 9 \cdot 9!$

c) $(n+1)! - n \cdot n!$

d) $(n+2)! - 3\,(n+1)! + n!$

e) $\dfrac{n!}{p!(n-p)!} + \dfrac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!}$

11 Resolva a equação:

$$\frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = 7n$$

3.3.2 – Permutações com elementos repetidos

Consideremos n elementos sendo α iguais a a, β iguais a b, etc. e λ iguais a l, totalizando n elementos.

$$\underbrace{a\,a\,\ldots\,a}_{\alpha}\ \underbrace{b\,b\,\ldots\,b}_{\beta}\ \ldots\ \underbrace{l\,l\,\ldots\,l}_{\lambda}$$

Temos que $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n$.

Representamos por $P_n^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}$ as permutações distintas desses n elementos.

Imaginemos que os elementos iguais fossem temporariamente distintos.

$$a_1\, a_2 \ldots a_\alpha\, b_1\, b_2 \ldots b_\beta \ldots l_1\, l_2 \ldots l_\lambda$$

Permutemos agora em cada uma das permutações iniciais distintas (que são em números de $P_n^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}$) os α elementos iguais a a, os β elementos iguais a b etc., os λ elementos iguais a l.

Com isso, esse número de permutações distintas se amplia completando as novas $n!$ permutações, quando considerados os n elementos todos distintos.

Assim:

$$\alpha!\beta! \ldots \lambda!\, P_n^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda} = n!$$

logo:

$$P_n^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda} = \frac{n!}{\alpha!\beta! \ldots \lambda!}$$

em que α, β, ... λ são as quantidades de elementos iguais.

Exemplos:

i) Quantos são os anagramas da palavra ARARIBOIA?
Como existem 3 letras A, 2 letras R e 2 letras I, teremos:

$$P_9^{3,2,2,1,1} = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 15\,120 \text{ anagramas}$$

ii) Tem-se 4 bolas brancas, 3 bolas pretas e 5 vermelhas, sendo as de mesma cor indistinguíveis. Colocam-se lado a lado em linha reta todas as bolas.

a) Quantas filas diferentes podem ser formadas?
Como as bolas de mesma cor são indistinguíveis, todas as ordenações das bolas de mesma cor devem ser contadas como apenas uma, logo, teremos: $P_{12}^{5,4,3} = \dfrac{12!}{5! \cdot 4! \cdot 3!} = 27\,720$ filas

b) Quantas filas têm as vermelhas no início?
Basta fixar as vermelhas no início e permutar as outras, logo teremos:

$$P_7^{4,3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35 \text{ filas}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Quantos são os anagramas da palavra:

a) ARARA?

b) BANANA?

c) BATATA?

d) MISSISSIPPI?

2 Permutando os algarismos 0, 0, 1, 4, 4, 4 e 7, quantos números de 7 algarismos podemos formar?

3 Considere os anagramas da palavra PROFESSOR.

a) Quantos são?

b) Quantos começam por P?

c) Quantos começam por R?

d) Quantos começam por vogal?

4 Permutando os algarismos 1, 1, 2, 2, 2 e 3, quantos números maiores que 300 000 podemos formar?

3.3.3 – Permutações num círculo

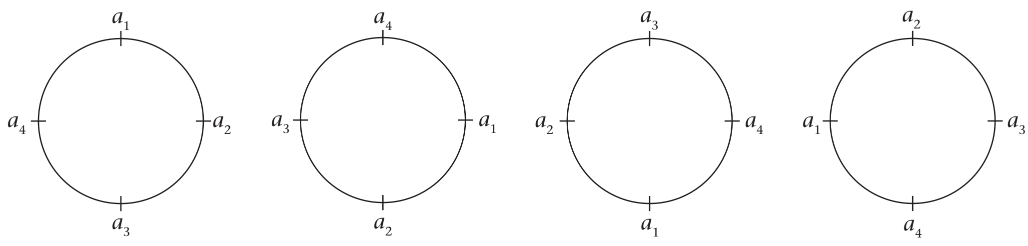
Permutações circulares

São chamadas permutações circulares de uma dada permutação as que se obtém fazendo-se, na permutação dada, sucessivamente, o primeiro elemento passar para a última posição. Assim, as permutações circulares da permutação (a_1, a_2, a_3, a_4) são:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4), (a_2, a_3, a_4, a_1), (a_3, a_4, a_1, a_2) \text{ e } (a_4, a_1, a_2, a_3)$$

Essas permutações são assim chamadas porque, se dispusermos os seus elementos em torno de um círculo, eles ficarão sempre na mesma posição relativa.

O número de permutações circulares de uma determinada permutação de n elementos é simplesmente n.



Permutações distintas num círculo

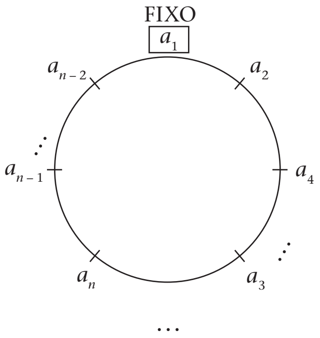
As permutações distintas de n elementos num círculo são aquelas em que se modificam as posições relativas de seus elementos.

Cada grupo de n permutações circulares deverá ser contado como uma única permutação distinta. Assim, o número de permutações distintas num círculo será:

$$(\mathrm{PD})_n = \frac{\mathrm{P}_n}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n \cdot (n-1)!}{n} = (n-1)!$$

NOTA
Nessas permutações não há primeiro nem último elemento.

Outra maneira de obter esse resultado seria fixar um dos elementos num ponto do círculo e permutar os restantes.



$$(\mathrm{PD})_n = (n-1)!$$

Exemplos:

i) De quantos modos 4 casais, entre os quais João e Maria, podem sentar-se em torno de uma mesa circular de 8 lugares:

a) possíveis?
Fixando uma das pessoas, basta permutar as demais, logo teremos $7! = 5\,040$ disposições.

b) em que João e Maria estejam juntos?
Fixando João e Maria lado a lado e permutando as pessoas restantes teremos $6!$ casos. Como João e Maria podem estar lado a lado de 2 modos distintos, teremos finalmente $6! \cdot 2 = 720 \cdot 2 = 1\,440$ casos.

c) em que João e Maria estejam afastados?
Basta subtrair do total 5 040 os 1 440 casos em que eles estão juntos, logo, teremos $5\,040 - 1\,440 = 3\,600$ casos.

d) em que homens e mulheres estejam alternados?
Fixemos os homens nas suas posições e permutemos as mulheres de todos os modos possíveis. Teremos então para cada posição dos homens $P_4 = 4!$ casos.
Permutando agora os homens mantendo um deles fixo para evitar coincidências, teremos $P_4 \cdot (PD)_4 = 4! \cdot 3! = 144$ casos.

e) em que cada homem esteja ao lado de sua mulher?
Permutemos os 4 casais em torno de um círculo. Temos $3!$ casos. Em cada casal o homem pode permutar-se com sua mulher, o que se dará nos 4 casais, logo teremos $3! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3! \cdot 2^4 = 6 \cdot 16 = 96$ casos.

f) em que cada homem esteja ao lado de sua mulher alternadamente?
Permutemos os 4 casais em torno do círculo. Temos $3!$ casos. Como o homem pode estar à direita ou à esquerda de sua mulher, teremos 2 casos possíveis, logo o total de casos será $3! \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12$ casos.

ii) Um casal recebe para jantar 6 convidados, que acomodam-se em torno de uma mesa redonda. De quantas maneiras poderá ser disposta a mesa de modo que os donos da casa estejam sempre diametralmente opostos?
Fixemos os anfitriões em posições diametralmente opostas. Basta, agora, permutar os convidados de todos os modos possíveis, logo teremos $6! = 720$ casos.
Poderíamos raciocinar também colocando primeiro os convidados. Há $(6 - 1)! = 5!$ modos de dispô-los em torno da mesa. Para cada disposição, o casal poderá ocupar 6 posições (já que não há possibilidades de coincidências).
Teremos então $5! \cdot 6 = 6! = 720$ modos distintos.

iii) De quantos modos diferentes se pode pintar uma pirâmide hexagonal regular com as 7 cores fundamentais, sendo cada face de uma cor?
A base pode ser pintada de 7 cores diferentes. As faces podem ser pintadas de $(PD)_6 = 5!$ maneiras diferentes. Como cada cor da base fornece 5! pinturas distintas, teremos um total de $5! \cdot 7 = 120 \cdot 7 = 840$ casos.

iv) De quantos modos se pode numerar as faces de um dodecaedro regular com números de 1 a 12?
Basta verificar quantos nos 12! casos possíveis a numeração fica igual.
Como o dodecaedro é constituído de pentágonos, haverá 5 posições iguais girando o dodecaedro em torno do centro da base. Colocando, por exemplo, o número 1 na base, teremos $(PD)_{12} = 11!$ casos. Como, para cada pentágono, 5 casos são iguais, teremos $\frac{11!}{5} = 7\,983\,360$ casos.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 De quantos modos 6 pessoas podem sentar-se em torno de uma mesa redonda de 6 lugares?

2 De quantos modos se pode dispor 5 moças e 5 rapazes em torno de uma mesa circular de modo que não fiquem juntos nem 2 rapazes, nem 2 moças?

3 De quantos modos 6 casais podem sentar-se em torno de uma mesa circular de modo que não sentem juntos 2 homens e cada homem fique ao lado de sua esposa?

4 Quantos colares de contas podem ser feitos com 20 contas diferentes:

a) com fecho?

b) sem fecho?

3.4 – Combinações

3.4.1 – Combinações simples

DEFINIÇÃO
Combinações simples.

Combinações simples de n elementos p a p são os agrupamentos não ordenados de p elementos que podem ser formados a partir de n elementos dados, sem repeti-los.

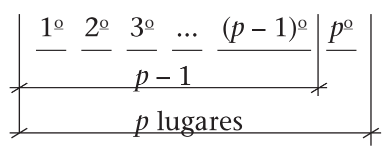
As combinações simples, sendo agrupamentos em que se pode prescindir da ordem de colocação de seus elementos, são subconjuntos de p elementos, tomados de uma coleção de n elementos dados.

Representaremos essas combinações por $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$.

NOTA
Por exemplo, as combinações simples, $\{a, b, c, d\}$, $\{d, a, b, c\}$ e $\{a, c, b, d\}$ são iguais. Duas combinações diferirão apenas quando diferirem em pelo menos um elemento:
$\{a, b, c, d\} \neq \{a, b, c, e\} \neq$ $\neq \{b, c, d, e\}$

Para verificar se um agrupamento é uma combinação, formamos um agrupamento conforme suas características e trocamos dois de seus elementos distintos de posição entre si. Se o novo agrupamento não se alterar, isto é, permanecer igual ao anterior, estaremos diante de agrupamentos não ordenados, logo, combinações.

O número de combinações simples de n elementos p a p representaremos por C_n^p. Como as combinações são agrupamentos não ordenados, se permutarmos os p elementos de cada combinação obteremos $p!$ agrupamentos ordenados. Teremos então $p!\,C_n^p$ conjuntos ordenados em sequências. Para obter o número de sequências, consideremos p lugares onde serão colocados os elementos tomados da coleção de n elementos dados.



NOTAS
- O número de combinações simples de n elementos p a p é o quociente do produto de p fatores consecutivos decrescentes a partir de n pelo produto dos p primeiros números naturais consecutivos a partir de 1.
- Como as combinações simples de n elementos p a p são números de agrupamento, são, portanto, números inteiros donde o produto de p inteiros consecutivos é sempre divisível pelo produto dos p primeiros números naturais positivos.

Para o 1º lugar temos n alternativas.

Para o 2º lugar temos $n - 1$ alternativas, já que o elemento que está em 1º lugar não pode ser utilizado.

Para o 3º lugar temos $n - 2$ alternativas etc.

Para o pº lugar temos $n - (p - 1)$ alternativas, já que para os $p - 1$ lugares anteriores foram utilizados $p - 1$ elementos dos n disponíveis. Então, o número de sequências de p elementos será $n(n - 1)(n - 2) \ldots [n - (p - 1)]$.

Igualando, vem:

$p!\,C_n^p = n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - p + 1)$ o que resulta:

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-p+1)}{p!}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por:

$(n - p)(n - p - 1)(n - p - 2) \ldots 2 \cdot 1 = (n - p)!$, vem:

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Observe que escolher um grupo de p elementos é o mesmo que escolher os $(n - p)$ elementos que ficarão de fora do grupo. Assim:

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = C_n^p$$

Exemplos:

i) $C_8^3 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$

ii) $C_8^6 = C_8^{8-6} = C_8^2 = \dfrac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$

iii) $C_{20}^8 = \dfrac{20!}{8!(20-8)!} = \dfrac{20!}{8! \cdot 12!}$

iv) $C_{40}^{38} = C_{40}^2 = \dfrac{40 \cdot 39}{1 \cdot 2} = 20 \cdot 39 = 780$

Convenções:

A fórmula $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ não teria sentido para $p = n$, pois ficaria: $C_n^n = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = \dfrac{1}{0!}$ mas, evidentemente, $C_n^n = 1$ então, para que a fórmula acima possa ser válida para qualquer p, $0 \le p \le n$ e $p \in \mathbb{N}$, convenciona-se que:

$$\boxed{0! = 1}$$

Assim, passaremos a aceitar:

$C_n^1 = \dfrac{n!}{0!n!} = 1$, $p = 0! = 1$

Do mesmo modo, $C_n^1 = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = \dfrac{n}{1!}$

Como evidentemente $C_n^1 = n$, teríamos: $n = \dfrac{n}{1!}$ o que nos leva à convenção:

$$\boxed{1! = 1}$$

Assim, $P_1 = 1! = 1$.

Exemplos:

i) Considere um conjunto de 6 homens e 4 mulheres, dentre os quais João e Maria. Quantas são as comissões de 5 pessoas:

a) possíveis?
Para verificar se os agrupamentos em questão são combinações, imaginamos formar um agrupamento e trocamos de lugar dois de seus elementos. Nota-se que o agrupamento permanece o mesmo, logo, trata-se de combinações. Por outro lado, cada elemento deve participar de uma comissão somente uma vez, então as combinações em questão são simples. O número de comissões possíveis será $C_{10}^5 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$ comissões.

b) que tenham João?

$$\underline{J}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}$$

Separamos João. Basta agora juntar a João 4 dos 9 elementos restantes para formar uma comissão de 5 elementos.

Temos então $C_9^4 = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$ comissões com João.

c) que não tenham João?

$$\underline{\quad}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}$$

Separamos João. Como João não deve constar nas comissões, basta buscar 5 elementos dos 9 restantes.

Teremos então $C_9^5 = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 630$ comissões sem João.

d) que tenham João e Maria?

$$\underline{J}\quad \underline{M}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}$$

Separamos João e Maria. Juntamos a eles mais 3 elementos que devem ser obtidos dos 8 elementos restantes, logo, teremos $C_8^3 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ comissões com João e Maria.

e) que tenham João e não Maria?

$$\underline{J}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}$$

Separamos João e Maria. Colocamos João na comissão e dispensamos Maria. Restam então 8 pessoas das quais tomaremos 4 para juntar a João e formar um grupo de 5 pessoas.

Teremos então $C_8^4 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$ comissões com João e não Maria.

f) que não tenham João nem Maria?

$$\underline{\quad}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}\quad \underline{\quad}$$

Separamos João e Maria e os dispensamos. Restam então 8 pessoas das quais tomaremos 5 para formar as comissões desejadas.

Teremos então $C_8^5 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56$ comissões sem João e Maria.

g) que tenham 3 homens e 2 mulheres?
Separamos os homens das mulheres.

$$\underline{H_1}\ \underline{H_2}\ \underline{H_3} \begin{cases} M_1\ \ M_2 \\ M_1\ \ M_3 \\ \ \vdots \\ M_3\ \ M_4 \end{cases}$$

O número de maneiras de tomar 3 homens de um grupo de 6 será C_6^3. Como a cada grupo de 3 homens podemos juntar todos os grupos de 2 mulheres que são C_4^2, teremos pelo princípio fundamental,

$C_6^3 \cdot C_4^2 = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 120$ grupos de 3 homens e 2 mulheres.

h) que tenham pelo menos 1 homem?

Para que tenhamos pelo menos 1 homem, basta subtrair de todas as comissões possíveis $\left(C_{10}^{5}\right)$ aquelas que só tem mulheres.

Como são apenas 4 mulheres, não haverá comissões com somente mulheres, logo o número de comissões com no mínimo 1 homem será $C_{10}^{5} = 252$.

Poderíamos montar todos os casos da seguinte maneira. Comissões com:

1 homem e 4 mulheres: $C_6^1 \cdot C_4^4 = 6$

2 homens e 3 mulheres: $C_6^2 \cdot C_4^3 = 15 \cdot 4 = 60$

3 homens e 2 mulheres: $C_6^3 \cdot C_4^2 = 20 \cdot 6 = 120$

4 homens e 1 mulher: $C_6^4 \cdot C_4^1 = 15 \cdot 4 = 60$

5 homens e 0 mulher: $C_6^5 = 6$

O total será: $6 + 60 + 120 + 60 + 6 = 252$ comissões.

Exercícios resolvidos:

1) Tem-se 8 pontos sobre um círculo.
Quantos(as) são:

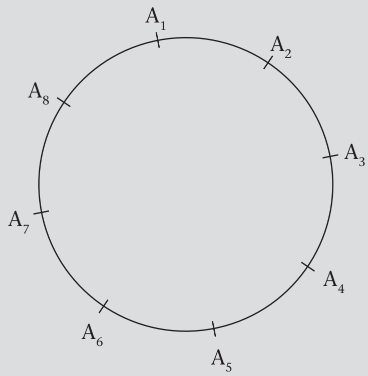
i) os segmentos possíveis?

ii) os triângulos?

iii) os quadriláteros convexos?

iv) os quadriláteros?

v) as diagonais do octógono convexo inscrito?



Solução:

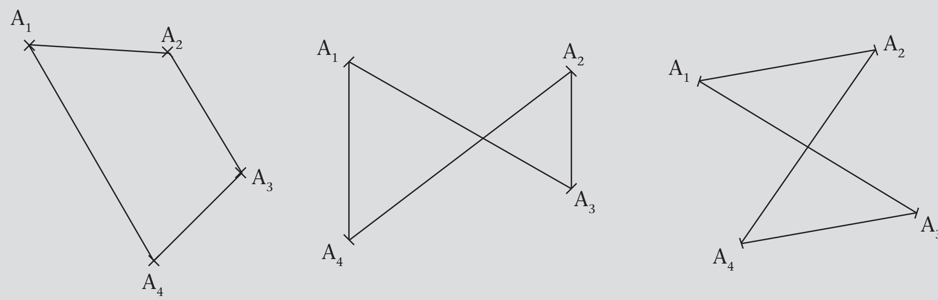
i) O segmento A_1A_2 é o mesmo que A_2A_1, logo a ordem com que se tomam os pontos não altera o segmento, então temos combinações de 8 pontos tomados 2 a 2: $C_8^2 = \dfrac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$ segmentos.

ii) Como o triângulo $A_1A_2A_3$ é o mesmo que $A_3A_2A_1$, temos:

$C_8^3 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ triângulos.

iii) Como cada grupo de pontos só fornece um quadrilátero convexo, teremos $C_8^4 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$ quadriláteros convexos.

iv) Como cada grupo de 4 pontos fornece 3 quadriláteros:



1 convexo e 2 cruzados. Logo, teremos:

$3C_8^4 = 3 \cdot 70 = 210$ quadriláteros.

v) Diagonais do octógono convexo inscrito.

Basta subtrair de todos os segmentos possíveis os 8 lados do octógono convexo, logo o número de diagonais será $C_8^2 - 8 = 28 - 8 = 20$ diagonais.

2) São dados m pontos sobre uma reta r e $m + 1$ pontos sobre uma paralela s. Usando esses pontos como os vértices, faça o que se pede a seguir.

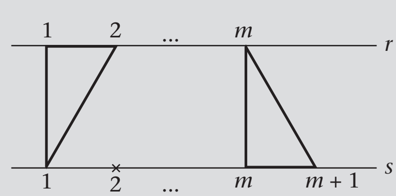
i) Determine os triângulos possíveis.

ii) Determine os quadriláteros convexos.

iii) Sabendo que a razão do número de triângulos para o número de quadriláteros convexos é $\dfrac{9}{10}$, calcule m.

Solução:

i)

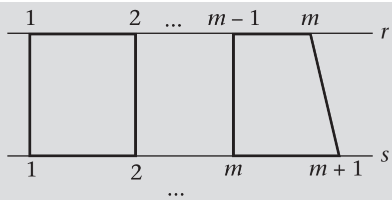


Os triângulos se obtêm tomando-se 2 pontos sobre r e 1 ponto sobre s ou 2 pontos sobre s e 1 sobre r, logo, o número de triângulos será:

$C_m^2 \cdot C_{m+1}^1 + C_{m+1}^2 \cdot C_m^1$, ou seja,

$$\frac{m(m-1)}{2} \cdot (m+1) + \frac{(m+1)m}{2} \cdot m = \frac{m(m+1)}{2}(m - 1 + m) =$$

$$= \frac{m(m+1)(2m-1)}{2} \quad \text{triângulos.}$$

ii) 

Os quadriláteros convexos se obtêm tomando-se 2 pontos sobre a reta r e 2 pontos sobre a reta s, logo, teremos:

$$C_m^2 \cdot C_{m+1}^2 = \frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{(m+1)m}{2} \text{ quadriláteros convexos}$$

iii) Temos que: $= \dfrac{C_m^2 . C_{m+1}^1 + C_{m+1}^2 . C_m^1}{C_m^2 \cdot C_{m+1}^2} = \dfrac{9}{10}$

Substituindo os valores encontrados nos itens (a) e (b), vem:

$$\frac{\dfrac{m(m+1)(2m-1)}{2}}{\dfrac{m(m-1)(m+1)m}{4}} = \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{4m-2}{m(m-1)} = \frac{9}{10}$$

$$40m - 20 = 9m^2 - 9m \Rightarrow 9m^2 - 49m + 20 = 0 \Rightarrow m = 5 \text{ ou } m = \frac{4}{9}$$

Como o número de pontos deve ser inteiro, $m = 5$.

3) Calcular m de modo que C_m^5 seja a média aritmética entre C_m^4 e C_m^6.

<u>Solução:</u>

Devemos ter: $C_m^5 = \dfrac{C_m^4 + C_m^6}{2} \Rightarrow 2C_m^5 = C_m^4 + C_m^6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{m!}{5!(m-5)!} = \frac{m!}{4!(m-4)!} + \frac{m!}{6!(m-6)!}$$

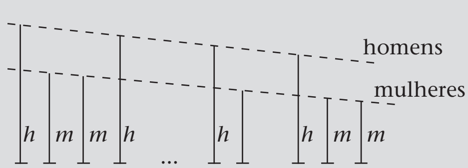
Dividindo os numeradores por $m!$ e os denominadores por $4!(m-6)!$, vem:

$$\frac{2}{5(m-5)} = \frac{1}{(m-5)(m-4)} + \frac{1}{5 \cdot 6} = 12(m-4) = 30 + (m-5)(m-4)$$

$m^2 - 21m + 98 = 0 \Rightarrow m = 7$ ou $m = 14$

4) Quantas filas diferentes podem ser formadas com h homens e m mulheres, nas quais:

i) as pessoas de mesmo gênero fiquem em ordem crescente de altura?



Só existe uma ordenação, por altura, para as mulheres, assim como uma única também para os homens.

Basta então colocar as m mulheres em $m + h$ lugares, pois só existe uma fila entre elas.
Nos lugares que sobram colocam-se os homens, já que entre eles também só há uma fila.
Temos então $C^m_{m+h} = C^h_{m+h}$.

ii) só as mulheres fiquem em ordem crescente de altura?
Como as mulheres só têm uma ordenação entre elas, coloquemo-las em m lugares escolhidos entre os $m + h$ possíveis: C^m_{m+h}.
Nos lugares restantes, permutaremos os h homens de todos os modos possíveis: $P_h = h!$.
O total será $C^m_{m+h} \cdot h! = \dfrac{(m+h)!}{m!}$.

5) Quantas são as funções estritamente crescentes do conjunto $X = \{1, 2, 3, ..., p\}$ no conjunto $Y = \{1, 2, 3, ..., n\}$ $(n \geq p)$?

Solução:

Para cada escolha de p elementos de Y há apenas uma maneira de colocá-los em ordem crescente: $f(1) < f(2) < ... < f(p)$. Assim, cada subconjunto de Y com p elementos determina uma função estritamente crescente tendo aquele subconjunto como imagem. Assim, há:

$C^p_n = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ funções estritamente crescentes de X em Y.

6) Diz-se que um número inteiro é ascendente se sua representação decimal tem ao menos dois dígitos e que cada dígito é menor que seu dígito da direita, por exemplo, 2 568, 1 234, 3 689 etc. Quantos números ascendentes de 4 algarismos existem?

Solução:

Como cada escolha de 4 algarismos só pode formar um número ascendente, haverá C^4_9 números ascendentes, já que esses números não podem começar por zero.

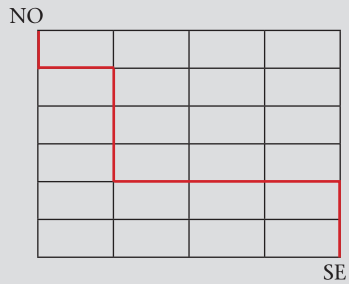
$C^4_9 = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$ números

7) Um bairro de certa cidade moderna, cujas ruas são rigorosamente cortadas em ângulos retos, tem 5 ruas na direção norte-sul e 7 na direção leste-oeste.

i) Partindo do vértice NO de quantos modos poderá uma pessoa chegar ao vértice SE, procurando o menor percurso?

Solução:

Qualquer que seja o caminho escolhido, serão percorridos 10 trechos, sendo 4 obrigatoriamente horizontais e 6 verticais.

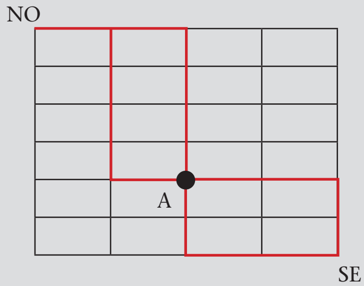


O caminho da figura seria:
VHVVVHHHVV
Podemos, então, reduzir o problema ao seguinte:
De quantas maneiras diferentes podemos colocar 4 letras H?
H H _ _ _ _ _ _ H H em 4 das 10 posições possíveis. Teríamos, então:
$C_{10}^{4} = 210$ modos.
Convém observar que com os trechos verticais o problema seria o mesmo.
Basta ver que $C_{10}^{6} = C_{10}^{4} = 210$.
Outra forma de pensar seria:
Quantas permutações distintas podem ser obtidas com a sequência VHVVVHHHVV?
Cada permutação seria equivalente a um caminho diferente, logo, teríamos:

$$P_{10}^{4,\,6} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210 \text{ modos}$$

ii) De quantos modos poderá uma pessoa ir de NO até SE passando pelo ponto A?

Solução:



Neste caso, basta ir de NO até A e para cada um desses caminhos ir de A até SE.
Para ir de NO até A temos C_6^2 caminhos.
Para ir de A até SE temos C_4^2 caminhos.
Como para cada percurso NO-A se pode associar todos os percursos A-SE, temos $C_6^2 \cdot C_4^2 = 15 \cdot 6 = 90$ modos.

iii) De quantas maneiras se pode ir de NO até SE sem passar pelo ponto A?
Neste caso, basta subtrair do total 210 os 90 casos em que se passa por A, logo temos 210 – 90 = 120 maneiras.

8) Cinco cartas são retiradas de um baralho com 32 cartas, sendo 4 de cada um dos seguintes grupos: 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A, e sendo 8 de cada naipe: ouros, paus, espadas e copas. Quantos são os casos:

i) possíveis?

ii) em que se obtém trinca e par?

iii) em que se obtém dois pares distintos e a 5ª carta distinta?

Solução:

i) Como, tiradas 5 cartas, a ordem não altera o grupo, temos combinações.
C_{32}^{5}= 201 376 casos

ii) Formemos um grupo de que trata o item, por exemplo:
AAAKK
Formemos, inicialmente, uma trinca de ases.
Como são 4 ases e deles serão retirados três, sem que a ordem se altere, temos C_4^3 trincas de ases.
Mas a cada uma dessas trincas de ases devem ser associados todos os C_4^2 pares de reis possíveis, tomados de 4 reis distintos. Logo, o número de grupos trinca de ases e par de reis será $C_4^3 \cdot C_4^2$.
Porém, a trinca pode ser de qualquer dos 8 grupos e o par pode ser de qualquer dos 7 grupos restantes. Logo teremos:
$C_4^3 \cdot C_4^2 \cdot 8 \cdot 7 = 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7 = 1\,344$ casos

iii) Seja por exemplo AAKKQ.
Nº de modos de tirar 2 ases em 4: C_4^2
Nº de modos de tirar 2 reis em 4: C_4^2
Nº de modos de tirar 2 pares quaisquer, por exemplo, AAKK, 9988, 8877: $C_8^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2$
Tirando mais uma carta desde que diferente dos pares: C_{24}^1
Teremos, então, um total de $C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_8^2 \cdot C_{24}^1 = 24\,192$ casos.

9) Quantos são os anagramas que se podem formar com as letras da palavra PETELECO que tenham 4 dessas letras?
A palavra PETELECO tem 3 letras E e 5 letras – P, T, L, C, O – diferentes.
Podemos formar anagramas:

Com 3 letras E: E E E _ $\quad C_5^1 \cdot P_4^{3,1} = \dfrac{5 \cdot 4!}{3! \cdot 1!} = 20$

Com 2 letras E: E E _ _ $\quad C_5^2 \cdot P_4^{2,1,1} = 10 \cdot \dfrac{4!}{2!} = 120$

Com 1 letra E: E _ _ _ $\quad C_5^3 \cdot P_4 = 10 \cdot 4! = 240$

Com 0 letra E: _ _ _ _ $\quad C_5^4 \cdot P_4 = 5 \cdot 4! = 120$

Formando todas estas hipóteses, vem o total de anagramas:
20 + 120 + 240 + 120 = 500 anagramas

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 (Uerj) Sete diferentes figuras foram criadas para ilustrar, em grupos de quatro distintas, o Manual do Candidato do Vestibular Estadual de 2007.
Um desses grupos está apresentado a seguir.

Considere que cada grupo de quatro figuras que poderia ser formado é distinto de outro somente quando pelo menos uma de suas figuras for diferente.
Nesse caso, o número total de grupos distintos entre si que poderiam ser formados para ilustrar o Manual é igual a:

(A) 24 (C) 70

(B) 35 (D) 140

2 De quantas maneiras é possível escalar um time de futebol de salão dispondo de 8 jogadores?

3 (IME-RJ) Com 10 espécies de frutas, quantos copos de salada, contendo 6 espécies diferentes, podem ser feitos?

4 Numa sala temos 5 rapazes e 6 moças. Quantos grupos de 2 rapazes e 3 moças podemos formar?

5 (Unicamp-SP) De quantas maneiras podem ser escolhidos 3 números naturais distintos, de 1 a 30, de modo que sua soma seja par? Justifique sua resposta.

6 (Vunesp) Uma prova consta de 3 partes, cada uma com 5 questões. Cada questão, independentemente da parte a que pertença, vale 1 ponto, sendo o critério de correção "certo ou errado". De quantas maneiras diferentes podemos alcançar 10 pontos nessa prova, se devem ser resolvidas pelo menos 3 questões de cada parte e 10 questões no total?

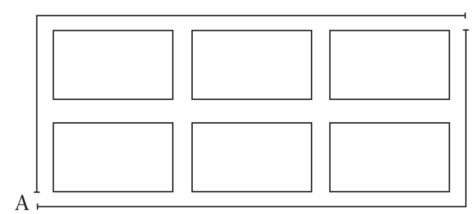
7 (FGV-SP) Um administrador de um fundo de ações dispõe de ações de 10 empresas para compra, entre elas, as da empresa R e as da empresa S.

a) De quantas maneiras ele poderá escolher 7 empresas entre as 10?

b) Se entre as 7 empresas escolhidas devem figurar obrigatoriamente as empresas R e S, de quantas formas ele poderá escolher as empresas?

8 (Ufop-MG) Numa classe de 10 estudantes universitários, um grupo de 4 será selecionado para uma excursão. De quantas maneiras o grupo poderá ser formado, se dentre os estudantes existe um casal que não pode ser separado?

9 (UMC-SP) Em um loteamento planejado, os quarteirões são retangulares e dispostos de acordo com a figura. O loteamento é cercado e tem dois acessos, A e B. De quantas maneiras diferentes um carro que entra pelo acesso A poderá chegar ao B, percorrendo as ruas com um percurso mínimo?



10 (UFBA) Um salão tem cinco portas e ficará aberto se, pelo menos, uma das portas estiver aberta. Calcule de quantas maneiras diferentes o salão poderá estar aberto.

11 (UFMS) Considere todos os números de três algarismos distintos formados com os algarismos 1, 3, 4, 5. Calcule a soma desses números.

12 Num exame, um professor dispõe de 10 questões que serão entregues a um aluno. Sabendo-se que o aluno deve resolver 6 questões, de quantas maneiras diferentes pode fazer a escolha se:

a) não houver nenhuma restrição?

b) não puder resolver simultaneamente as duas primeiras?

c) tiver de resolver pelo menos cinco das sete primeiras questões?

13 Sobre uma reta *t* marcam-se 8 pontos e sobre uma outra reta, *s*, paralela à *t*, marcam-se 5 pontos.
Quantos triângulos obteremos unindo 3 pontos quaisquer do total desses pontos?

3.4.2 – Combinações completas

DEFINIÇÃO
Combinações completas.

Combinações completas de n elementos p a p são os agrupamentos não ordenados de p elementos que podem ser formados a partir de n elementos dados, podendo repetir um mesmo elemento até p vezes.

NOTA
Por exemplo, nas combinações completas, $\{a, a, a, b, c\} = \{b, a, a, c, a\}$. Duas combinações diferirão apenas quando tiverem um mesmo elemento em quantidades distintas. Por exemplo, $\{a, a, b, b, c\} \neq \neq \{a, b, c, c, c\} \neq \{a, b, d, d, d\}$.

Assim como nas combinações simples, a ordem de colocação dos elementos numa combinação completa não é um elemento diferenciador dos agrupamentos. As combinações simples fazem parte das combinações completas.

Para verificar se um agrupamento é uma combinação completa, devemos responder a duas perguntas:

1ª pergunta: A ordem dos elementos altera o agrupamento? Para respondê-la, formamos um agrupamento e nele permutamos dois elementos diferentes entre si.
Se o novo agrupamento for igual ao anterior, a resposta será não e estaremos diante de um caso de combinações.

2ª pergunta: Num agrupamento posso repetir elementos? Se a resposta for sim estaremos diante de um caso de combinações completas.
O número de combinações completas de n elementos p a p é representado por $(CC)_n^p$.

NOTA
As combinações completas são também chamadas de **combinações com repetições**. Usam-se as notações $(CC)_n^p$ ou $(CR)_n^p$.

Exemplo:

Deseja-se determinar o número de combinações completas dos elementos do conjunto $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ tomados 6 a 6.

O número de combinações completas pode ser obtido reduzindo-se as combinações completas a combinações simples por meio do seguinte artifício.

Tomemos uma das combinações completas de 8 elementos tomados 6 a 6, por exemplo, $\{a_1, a_1, a_2, a_4, a_8, a_8\}$, com índices crescentes.

Em cada elemento dessa combinação, aumentamos seu índice de tantas unidades quantos forem os elementos anteriores a esse elemento na combinação considerada. Essa combinação se tornará:

$\{a_1, a_1, a_2, a_4, a_8, a_8\} = \{b_1, b_2, b_4, b_7, b_{12}, b_{13}\}$

em que:

O índice do primeiro elemento aumentou de 0.

O índice do segundo elemento aumentou de 1.

O índice do terceiro elemento aumentou de 2 etc.

O índice do sexto elemento aumentou de 5.

Veremos a seguir que, fazendo esse artifício em todas as combinações completas de 8 elementos 6 a 6 possíveis, obteremos todas as combinações simples de 13 elementos $\{b_1, b_2, b_3, ..., b_{13}\}$ tomados 6 a 6.

Com efeito, uma combinação simples de 13 elementos 6 a 6, por exemplo $\{b_3, b_5, b_6, b_8, b_{10}, b_{11}\}$, corresponderá a $\{a_3, a_4, a_4, a_5, a_6, a_6\}$, bastando para isso subtrair de cada índice da combinação simples o número de elementos que precede ao elemento desse índice.

NOTA
Observe que os índices aumentarão no máximo $6 - 1 = 5$ e o maior possível será $8 + 5 = 13$.

Assim, cada combinação completa de 8 elementos 6 a 6 corresponde a uma combinação simples de 13 elementos, 6 a 6 e reciprocamente.

Logo: $(CC)_8^6 = C_{13}^6 = C_{8+6-1}^6$

De um modo geral, nas combinações completas de n elementos p a p, os índices aumentarão no máximo $p - 1$. Portanto, o índice máximo possível será: $n + p - 1$, o que nos permite concluir que:

$$(CC)_n^p = C_{n+p-1}^p$$

Exercício resolvido:

Deseja-se distribuir 4 bombons de mesmo sabor para as crianças João, Ana e Maria, de tal modo que qualquer delas possa receber mais de um bombom ou até nenhum bombom.
Quantas são as distribuições possíveis?

Solução:

Consideremos uma distribuição, por exemplo {João, Ana, João, Maria}. Essa distribuição é igual à {Ana, Maria, João, João}, então a ordem de distribuição não altera a distribuição, logo, estamos diante de um caso de combinações. Por outro lado, podemos repetir as crianças na distribuição, por exemplo: {Ana, Ana, Ana, João}. Temos, então:

$$(CC)_3^4 = C_{3+4-1}^4 = C_6^4 = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15 \text{ distribuições}$$

Esse exercício pode ser generalizado da seguinte maneira:

De quantos modos podemos distribuir p objetos iguais para n pessoas, podendo uma pessoa receber mais de um objeto?

Suponhamos n pessoas $P_1, P_2, ..., P_n$.

Para fazer a distribuição, chamemos as pessoas para receber os objetos dando a cada pessoa chamada um objeto de cada vez. Note que uma pessoa pode ser chamada mais de uma vez, até p vezes.

A ordem em que as pessoas são chamadas não altera a distribuição, logo temos um caso de combinações. Essas combinações são completas porque podemos repetir uma pessoa até p vezes. Temos então $(CC)_n^p$.

Por outro lado, sejam x_1 o número de objetos recebido pela pessoa P_1, x_2 o número de objetos recebidos pela pessoa P_2, e assim por diante.

Distribuir os p objetos para as n pessoas significa escolher quantos objetos cada pessoa receberá, isto é, escolher valores naturais de $x_1, x_2, ..., x_n$ tais que:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = p$$

Comparando com a solução anterior, concluímos que:

O número de soluções naturais da equação $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$ é:

$$(CC)_n^p = C_{n+p-1}^p$$

NOTA
Se dois sinais de + forem consecutivos, considera-se que o x correspondente é 0. Se não houver valores 1 antes do primeiro +, então $x_1 = 0$. Por exemplo, $\underbrace{+ + + + \ldots +}_{n-1}\ \underbrace{1\ 1 \ldots 1}_{p}$ corresponde à solução $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$ e $x_n = p$.

Outra interpretação do resultado anterior

Uma solução da equação $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p$ poderá ser representada da forma:

$$\underbrace{\underline{1}\ \underline{1} \ldots \underline{1}}_{x_1 \text{ unidades}} + \underbrace{\underline{1}\ \underline{1} \ldots \underline{1}}_{x_2 \text{ unidades}} + \ldots \underbrace{\underline{1}\ \underline{1} \ldots \underline{1}}_{x_n \text{ unidades}}$$

em que temos p unidades 1 separadas por $n - 1$ sinais de +. Para obter todas as soluções possíveis, basta escolher $n - 1$ lugares dos $p + n - 1$ lugares disponíveis ($n - 1$ lugares para os sinais de + e p lugares para os números 1) para colocar os sinais de + e nos lugares restantes ficarão os números 1. Assim, o número de soluções será $C^{n-1}_{n+p-1} = C^{(n+p-1)-(n-1)}_{n+p-1} = C^{p}_{n+p-1} = (CC)^{p}_{n}$.

Exemplos:

i) Nos casos seguintes, de quantos modos se pode distribuir 10 prêmios iguais aos 20 alunos de uma mesma turma, podendo um mesmo aluno receber mais de um prêmio?

a) De todos os modos possíveis.
Como cada aluno pode receber mais de um prêmio, podemos ter repetições, então tais agrupamentos são completos.
Por outro lado, como a ordem de chamada para a distribuição dos prêmios não altera a distribuição, trata-se de combinações, logo:

$$(CC)^{10}_{20} = C^{10}_{20+10-1} = C^{10}_{29} = \frac{29!}{10! \cdot 19!} = 20\,030\,010 \text{ modos}$$

b) Em que o mais aplicado seja sempre premiado.
Entregamos um prêmio ao mais aplicado para garantir que ele seja sempre premiado e o mantemos no conjunto para continuar concorrendo aos outros 9 prêmios. Temos então:

$$(CC)^{9}_{20} = C^{9}_{20+9-1} = C^{9}_{28} = \frac{28!}{9! \cdot 19!} = 6\,906\,900 \text{ modos}$$

c) Em que o menos aplicado nunca seja premiado.
Retiramos o menos aplicado do conjunto de alunos para garantir que ele não receba prêmios. Restam então 19 alunos para concorrer aos 10 prêmios, logo:

$$(CC)^{10}_{19} = C^{10}_{19+10-1} = C^{10}_{28} = \frac{28!}{10! \cdot 18!} = 13\,123\,110 \text{ modos}$$

d) Em que João e Maria recebam exatamente 2 prêmios cada um.
Entregamos 2 prêmios a João e 2 prêmios a Maria e os retiramos do conjunto, para garantir que não recebam mais prêmios.
Assim, restam 18 alunos para concorrer a 10 – 4 = 6 prêmios, logo:

$$(CC)^{6}_{18} = C^{6}_{18+6-1} = C^{6}_{23} = \frac{23!}{6! \cdot 17!} = 100\,947 \text{ modos}$$

ii) Seja a equação $x + y + z + t = 10$. Quantas são as soluções inteiras:

a) não negativas?
O problema equivale a distribuir 10 prêmios para 4 crianças, podendo repetir, logo:
$$(CC)_4^{10} = C_{4+10-1}^{10} = C_{13}^{10} = C_{13}^{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 286 \text{ soluções}$$

b) positivas?
Vamos dar 1 prêmio para cada criança para eliminar as soluções nulas. Passamos agora a ter $x' + y' + z' + t' = 6$ em que se deseja para esta equação as soluções não negativas.
Temos então:
$$(CC)_4^{6} = C_{4+6-1}^{6} = C_9^6 = C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84 \text{ soluções}$$

NOTA
Note que $x' = x - 1$, $y' = y - 1$, $z' = z - 1$ e $t' = t - 1$.

iii) Quantas são as peças de um jogo de dominó, sabendo que as peças têm registrados dois números de 0 a 6, podendo repeti-los?
Como a ordem dos números não altera a peça, temos combinações. Por outro lado, como podemos repetir os 2 números em cada peça, temos:
$$(CC)_7^2 = C_{7+2-1}^2 = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28 \text{ peças}$$

Exercícios resolvidos:

1) Uma sorveteria oferece 7 sabores de sorvetes. Suponhamos que a ordem das bolas não importa. Nos seguintes casos, de quantos modos diferentes pode uma criança servir-se com 3 bolas de sorvetes?

i) De todos os modos possíveis.

ii) Não tendo chocolate.

iii) Tendo pelo menos uma bola de chocolate.

iv) Tendo somente uma bola de chocolate.

v) Tendo todas as bolas com sabores diferentes.

Solução:

i) Observe que um sorvete do tipo (chocolate, baunilha, baunilha) é diferente do sorvete (chocolate, chocolate, baunilha). Por outro lado, o sorvete (chocolate, creme, baunilha) é igual ao sorvete (baunilha, chocolate, creme), pois a ordem de colocação das bolas não altera o sorvete. Temos, então: $(CC)_7^3 = C_{7+3-1}^3 = C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ maneiras diferentes de servir-se.

ii) Para não ter chocolate, basta excluir o sabor chocolate do conjunto de sabores e proceder analogamente com os 6 sabores restantes, logo teremos:

$$(CC)_6^3 = C_{6+3-1}^3 = C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56 \text{ modos}$$

iii) Para garantir que cada sorvete tenha pelo menos uma bola de chocolate, basta retirar de todos os casos possíveis aqueles que não têm chocolate, logo:

$$(CC)_7^3 - (CC)_6^3 = 84 - 56 = 28 \text{ modos}$$

iv) Colocamos inicialmente uma bola de chocolate no sorvete. As duas bolas que faltam deverão ser dos 6 sabores restantes, excluindo o chocolate para garantir apenas uma bola de chocolate no sorvete. Temos, então:

$$(CC)_6^2 = C_{6+2-1}^2 = C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21 \text{ modos}$$

v) Como todos os sabores devem ser diferentes, temos as combinações simples que são aquelas em que não há repetições, logo:

$$C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 \text{ modos}$$

NOTA
A Mega-sena atual é a descrita no item (a).

2) O sorteio da Mega-sena consiste em extrair 6 bolas numeradas, uma a uma, de uma urna onde existem 60 bolas numeradas de 1 a 60.
Quantas são as extrações:

i) sem reposição, sabendo que os resultados são dados em ordem crescente?

ii) com reposição, sabendo que os resultados são dados na ordem crescente?

iii) sem reposição, supondo que os resultados sejam dados na ordem em que os números forem saindo?

iv) com reposição, supondo que os resultados sejam dados na ordem em que os números forem sorteados?

Solução:

i) Como os resultados são dados na ordem crescente, a ordem não altera a extração, sendo, portanto, um caso de combinações.
Por outro lado, não havendo reposição, cada bola só poderá sair uma vez, sendo então combinações simples de 60, 6 a 6.

$$C_{60}^6 = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 50\,063\,860 \text{ extrações}$$

ii) Porque há reposição das bolas para a urna, podemos repetir. Por outro lado, a ordem crescente dos resultados garante que a ordem não influi, logo, temos:

$$(CC)^6_{60} = \frac{60 \cdot 61 \cdot 62 \cdot 63 \cdot 64 \cdot 65}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 82\,598\,880 \text{ extrações}$$

iii) Agora, a ordem influi, mas não podem repetir, então temos:
Para o 1º número: 60 alternativas
Para o 2º número: 59 alternativas
Para o 3º número: 58 alternativas etc.
O número total, pelo princípio fundamental, será:
$60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55 = 36\,045\,979\,200$ extrações

iv) Como há reposição, temos repetições.
Por outro lado, a ordem altera a extração, logo, teremos pelo princípio fundamental $60 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 60 = 46\,656\,000\,000$ extrações

3) Quantas são as funções não decrescentes do conjunto $X = \{1, 2, 3, ..., p\}$ no conjunto $Y = \{1, 2, 3, ..., n\}$?

Solução:

Como nas funções não decrescentes $f(x + h) \geq f(x)$, as imagens $f(k + 1) \geq f(k)$.
Assim, para cada grupo de p elementos escolhidos dentro do conjunto Y, só existirá um conjunto de imagens $(f(1), f(2), ..., f(p))$ tais que: $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq ... \leq f(p)$. Temos, então, combinações. Por outro lado, podemos repetir imagens, logo, teremos:
$(CC)^p_n = C^p_{n+p-1}$ funções não decrescentes.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Calcule:

a) $(CC)_3^4$

b) $2 \cdot (CC)_n^3 = 7 \cdot C_n^3$, $n = ?$

2 Calcule o número de soluções inteiras não negativas de:

a) $x + y + z = 5$

b) $x + y + z \leq 5$

c) $x + y + z < 5$

3 Calcule o número de soluções inteiras estritamente positivas de:

a) $x + y + z = 5$

b) $x + y + z \leq 5$

c) $x + y + z < 5$

4 Quantos termos tem:

a) um polinômio homogêneo completo do 4º grau com 3 variáveis?

b) um polinômio completo do 4º grau com 3 variáveis?

c) o desenvolvimento de $(x + y + z)^4$?

5 O número de soluções inteiras não negativas da equação $x + y + z = m$ é 21. Calcule m.

3.5 – Fluxograma de resolução de exercícios de Análise Combinatória

Ler o enunciado com atenção → Fazer um agrupamento como no enunciado → Trocar dois elementos distintos de posição entre si → A ordem alterou o agrupamento?

- Sim → Uso de todos os elementos disponíveis?
  - Não → $\boxed{\text{Teorema da multiplicação (ou arranjos)}}$ → Posso repetir elementos?
    - Não → simples → $n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$ ou $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
    - Sim → completos → $n \cdot n \ldots n = n^p$ ou $(AC)_n^p$
  - Sim → $\boxed{\text{Permutações}}$ → Há elementos repetidos?
    - Não → simples → $P_n = n!$
    - Sim → com repetições → $P_n^{\alpha,\,\beta,\,\ldots,\,\lambda} = \dfrac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}$
- Não → $\boxed{\text{Combinações}}$ → Posso repetir elementos?
  - Não → simples → $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ ou $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{P_p}$
  - Sim → completas → $(CC)_n^p = (CC)_{n+p-1}^p$ ou $P_{p+(n-1)}^{p,\,(n-1)} = \dfrac{(p+n-1)!}{p!(n-1)!}$

Exemplos:

i) Quantos números de 5 algarismos distintos existem?

a)

$$\begin{array}{ccccc} \underline{7} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{0} & \underline{3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 \cdot & 9 \cdot & 8 \cdot & 7 \cdot & 6 \end{array}$$

ou $9\,A_9^4 = 27\,216$ números, sem repetir algarismos

b) Podendo repetir?

$$\begin{array}{ccccc} \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{4} & \underline{0} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 \cdot & 10 \cdot & 10 \cdot & 10 \cdot & 10 \end{array}$$

ou $9\,(AC)_{10}^4 = 90\,000$ números

c) Começando por 2 e terminando por 3?

Sem repetir:

$$\begin{array}{ccccc} \underline{2} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{3} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & 8 \cdot & 7 \cdot & 6 & \end{array}$$

Podendo repetir:

$$\begin{array}{ccccc} \underline{2} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{3} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & 10 \cdot & 10 \cdot & 10 & \end{array}$$

$A_8^3 = 336$ números ou $(AC)_{10}^3 = 1\,000$ números

ii) De quantos modos diferentes 6 crianças podem formar uma roda de ciranda?

Fixando uma criança, permutam-se as outras 5.

$P_5 = 5! = 120$ modos

iii) Quantos são os anagramas da palavra ARARAQUARA?

$$P_{10}^{5,3} = \frac{10!}{5! \cdot 3!} = 5\,040 \text{ anagramas}$$

iv) Quantas são as comissões de 5 alunos que podem ser formadas com 20 alunos?

a) $C_{20}^5 = \dfrac{20!}{5! \cdot 15!} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 15\,504$ comissões

b) Em que João aparece?

$\underline{J}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $C_{19}^4 = \dfrac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ 3 876 comissões

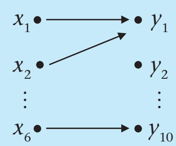
c) Em que João não aparece?

$$C_{19}^5 = \frac{19!}{5! \cdot 14!} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 11\,628 \text{ comissões}$$

NOTA
$C_{20}^5 = C_{19}^5 + C_{19}^4$
é a **relação de Stifel**.

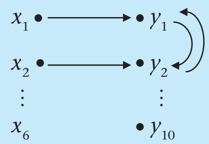
v) Dado um conjunto de 8 elementos, quantos são seus subconjuntos?
Como cada elemento pode ou não pertencer a um dado subconjunto:
$2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^8 = C_8^0 + C_8^1 + ... + C_8^8 = 256$ subconjuntos

vi) Quantas são as funções que existem de um conjunto de 6 elementos num conjunto de 10 elementos?



Como cada x pode escolher qualquer y para o seu par, $10 \cdot 10 \cdot ... \cdot 10 = 10^6$ funções.

vii) Quantas são as funções injetivas?



Trocando y_1 com y_2, a injeção fica diferente.
$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = A_{10}^6 = 151\,200$ funções

viii) Quantas são as bijeções de um conjunto de 7 elementos em si mesmo?
$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = P_7 = 5\,040$ funções

ix) Cinco pessoas entram num elevador de um prédio de 10 andares acima do solo. Quantas viagens diferentes podem ser feitas?
Parando em 1 andar: C_{10}^1
Parando em 2 andares: C_{10}^2
Parando em 3 andares: C_{10}^3
$\vdots$
Parando em 5 andares: C_{10}^5
Total: $C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + C_{10}^4 + C_{10}^5 = 637$ viagens

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (UFF-RJ) O produto 20 · 18 · 16 · 14 · ... · 6 · 4 · 2 é equivalente a:

(A) $\frac{20!}{2}$ (C) $\frac{20!}{2^{10}}$ (E) $\frac{20!}{10}$

(B) $2 \cdot 10!$ (D) $2^{10} \cdot 10!$

2 Qual é o menor valor do natural n que torna $n!$ divisível por 1 000?

(A) 10 (C) 20 (E) 100

(B) 15 (D) 30

3 Por quantos zeros termina o resultado de 1000!?

4 (Uerj) Considere a equação abaixo.

$$\frac{6 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 300}{50!} = 216^n$$

O valor de n, real, que verifica essa igualdade é:

(A) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{15}{2}$ (E) $\frac{50}{3}$

(B) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{25}{3}$

5 (PUC-RJ) Determine os dois últimos algarismos do número: 1 + 2! + 3! + 4! + ... + 9!.

6 Se $(x + 1)! = 3(x!)$, então x é igual a:

(A) 1 (C) 3 (E) 5

(B) 2 (D) 4

7 (Faap-SP) Permutando os algarismos 2, 4, 6 e 8, formamos números. Dispondo esses números em ordem crescente, qual o número que ocupa a 22ª posição?

8 (Unirio-RJ) Uma família formada por 3 adultos e 2 crianças vai viajar num automóvel de 5 lugares, sendo 2 na frente e 3 atrás. Sabendo-se que só 2 pessoas podem dirigir e que as crianças devem ir atrás e na janela, o número total de maneiras diferentes através das quais estas 5 pessoas podem ser posicionadas, não permitindo crianças irem no colo de ninguém, é igual a:

(A) 120 (C) 48 (E) 8

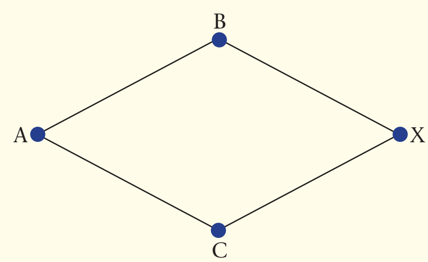
(B) 96 (D) 24

9 (Unirio-RJ) Com algarismos de 1 a 9, o total de números de 4 algarismos diferentes, formados por 2 algarismos pares e 2 ímpares, é igual a:

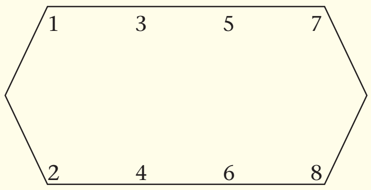
(A) 126 (C) 720 (E) 5 760

(B) 504 (D) 1 440

10 (FGV-SP) Existem apenas dois modos de atingir uma cidade X partindo de uma outra A. Um deles é ir até uma cidade intermediária B e de lá atingir X, e o outro é ir até C e de lá chegar a X. (Veja o esquema!) Existem 10 estradas ligando A a B; 12 ligando B a X; 5 ligando A a C; 8 ligando C a X; nenhuma ligação entre B e C e nenhuma ligação entre A e X. Determine o número de percursos diferentes que podem ser feitos para atingir X pela primeira vez, partindo-se de A.



11 (IME-RJ) Seja um barco com 8 lugares, numerados como no diagrama dado. Há 8 remadores possíveis para guarnecê-lo com as seguintes restrições: os remadores A e B só podem ocupar posições ímpares e o remador C, posição par. Os remadores D, E, F, G e H podem ocupar quaisquer posições. Quantas configurações podem ser obtidas com o barco totalmente guarnecido?



12 (Fuvest-SP) Considere todas as trinta e duas sequências, com cinco elementos cada uma, que podem ser formadas com algarismos 0 e 1. Quantas dessas sequências possuem pelo menos três zeros em posições consecutivas?

(A) 3 (C) 8 (E) 16

(B) 5 (D) 12

13 (Enem) Numa embaixada trabalham 8 brasileiros e 6 estrangeiros. Quantas comissões de 5 funcionários podem ser formadas, devendo cada comissão ser constituída de 3 brasileiros e 2 estrangeiros?

14 Dados 20 pontos do espaço, dos quais não existem 4 coplanares, quantos planos ficam definidos?

15 São dados 12 pontos em um plano, dos quais 5, e somente 5, estão alinhados. Quantos triângulos podem ser formados com vértices em 3 dos 12 pontos?

16 (Faap-SP) Em um campeonato de dois turnos, em que devem jogar 12 equipes de futebol, qual o número total de jogos a serem realizados?

17 (Vunesp-SP) Considere, num plano, 10 pontos distintos entre si. Suponha que 4 desses pontos pertençam a uma mesma reta e que 2 quaisquer dos demais não estejam alinhados com nenhum dos pontos restantes. Calcule o número de retas determinadas por esses 10 pontos.

18 (Osec-SP) Do cardápio de uma festa constavam 10 diferentes tipos de salgadinhos, dos quais só 4 seriam servidos quentes. O garçom encarregado de arrumar a travessa e servi-la foi instruído para que ela contivesse só 2 diferentes tipos de salgadinhos frios e só 2 diferentes tipos dos quentes. De quantos modos diferentes o garçom teve a liberdade de selecionar os salgadinhos para compor a travessa, respeitando as instruções?

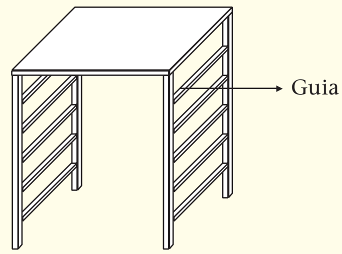
19 De quantos modos podemos guardar 12 bolas distintas em 4 caixas, se a primeira caixa deve conter 3 bolas, a segunda caixa, 5 bolas, a terceira caixa, 3 bolas e a quarta caixa, 1 bola?

20 (UEG-GO) Calcule de quantas maneiras podem ser dispostas 4 damas e 4 cavalheiros, numa fila, de forma que não fiquem juntos dois cavalheiros e duas damas.

21 (Unicamp-SP) Numa Kombi viajam 9 pessoas, das quais 4 podem dirigir. De quantas maneiras diferentes é possível acomodá-las (3 no banco da frente, 3 no banco do meio e 3 no banco de trás) de forma que uma das 4 que dirigem ocupe o lugar da direção?

22 (FEI-SP) Formados e dispostos em ordem crescente os números que se obtêm permutando-se os algarismos 2, 3, 4, 8 e 9, que lugar ocupa o número 43 892?

23 (UFF-RJ) A figura abaixo representa uma estante cujas prateleiras, que se encaixam nas 5 guias laterais, foram retiradas para limpeza.

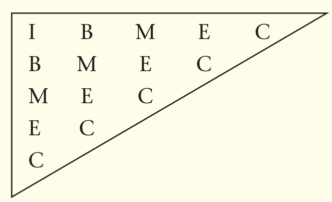


Sabendo-se que serão recolocadas somente 3 prateleiras, de cores diferentes, o total de maneiras distintas pelas quais isto pode ser feito é:

(A) 180 (C) 60 (E) 6

(B) 120 (D) 10

24 O IBMEC abriu uma concorrência para a compra e a instalação de um letreiro luminoso, tendo recebido, de uma firma concorrente, como proposta, o seguinte letreiro:



Cada letra é uma lâmpada, de tal modo que, acendendo-se a lâmpada I, as outras seguiriam acendendo, para a direita ou para baixo, até acender a sigla IBMEC. De quantos modos diferentes esta sigla acenderia?

(A) 16 (C) 24 (E) 32

(B) 10 (D) 30

25 (UFF-RJ) Um garçom anotou os pedidos de três fregueses. Cada freguês pediu um prato principal, um acompanhamento e uma bebida.
Posteriormente, o garçom não sabia identificar o autor de cada pedido.
Lembrava-se, porém, de que não havia qualquer coincidência entre os pedidos: os pratos principais eram diferentes entre si, o mesmo ocorrendo com os acompanhamentos e as bebidas.
O número de maneiras diferentes que o garçom poderia distribuir os pedidos entre os fregueses é:

(A) $(3!)^3$ (C) $3!$ (E) $(3!)^{3!}$

(B) $(3^3)!$ (D) $3^{3!}$

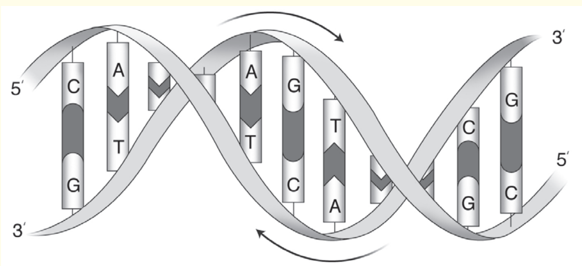
26 (UFRJ) A mala do Dr. Z tem um cadeado cujo segredo é uma combinação com cinco algarismos, cada

um dos quais podendo variar de 0 a 9. Ele esqueceu a combinação que escolhera como segredo, mas sabe que atende às condições se:

- o primeiro algarismo é ímpar, então o último algarismo também é ímpar;
- o primeiro algarismo é par, então o último algarismo é igual ao primeiro;
- a soma dos segundo e terceiro algarismos é 5.

Quantas combinações diferentes atendem às condições estabelecidas pelo Dr. Z?

27 (Uerj) Utilize as informações abaixo para responder à questão.



Trechos complementares de duas cadeias de nucleotídeos de uma molécula de DNA. Observe que uma cadeia se dispõe em relação à outra de modo invertido.

(Adaptado de LOPES, Sônia. BIO 3. São Paulo: Saraiva, 1993)

Considere as seguintes condições para a obtenção de fragmentos de moléculas de DNA:

- todos os fragmentos devem ser formados por 2 pares de bases nitrogenadas;
- cada fragmento deve conter as 4 bases nitrogenadas diferentes.

O número máximo de fragmentos diferentes que podem ser assim obtidos corresponde a:

(A) 4 (C) 12
(B) 8 (D) 24

28 (UFRJ) Um grupo constituído por 4 mulheres e 4 homens deve ocupar as 8 cadeiras dispostas ao redor de uma mesa circular.
O grupo deve ser acomodado de modo que cada homem sente entre duas mulheres.
João e Maria estão nesse grupo de pessoas; entretanto, por motivos de ordem estritamente pessoal, não podem sentar-se lado a lado.
Duas acomodações das pessoas ao redor da mesa são consideradas diferentes quando pelo menos uma das pessoas não tem o mesmo vizinho à direita, nas duas acomodações.
Determine o número de diferentes acomodações possíveis dessas 8 pessoas ao redor da mesa circular.

29 (Unirio-RJ) Calcule o número de maneiras diferentes pelas quais podemos repartir uma dúzia de balas iguais entre três crianças, de modo que cada uma receba, pelo menos, uma bala.

30 (Unicamp-SP) De quantas maneiras é possível distribuir 20 bolas iguais entre 3 crianças de modo que cada uma delas receba, pelo menos, 5 bolas?

31 (UFRJ) Antigamente, o campeonato carioca de futebol era precedido por um torneio, chamado Torneio Início. Nesse torneio, havia em cada jogo um vencedor (por pênaltis, se necessário), e o derrotado era eliminado.
Sendo um Torneio Início disputado por 18 clubes, quantos jogos foram necessários para se chegar ao campeão?

32 (Cesgranrio-RJ) Um grupo de 9 pessoas, dentre elas os irmãos João e Pedro, foi acampar. Na hora de dormir montaram 3 barracas diferentes, sendo que, na primeira, dormiram 2 pessoas; na segunda, 3 pessoas; e, na terceira, as 4 restantes. De quantos modos diferentes eles podem se organizar, sabendo que a única restrição é a de que os irmãos João e Pedro NÃO podem dormir na mesma barraca?

(A) 1260 (C) 1155 (E) 910
(B) 1225 (D) 1050

33 (PUC-RJ) Quantas apostas de quina são possíveis? (Uma aposta de quina é uma escolha de 5 números entre 1 e 80, inclusive.)

34 (Uerj) Uma estante de biblioteca tem 16 livros: 11 exemplares do livro *Combinatória é fácil* e 5 exemplares de *Combinatória não é difícil*.
Considere que os livros com mesmo título sejam indistinguíveis.
Determine de quantas maneiras diferentes podemos dispor os 16 livros na estante de modo que dois exemplares de *Combinatória não é difícil* nunca estejam juntos.

35 (PUC-RJ) Calcule o número de retas determinadas por 100 pontos, diferentes um do outro, situados sobre uma circunferência.

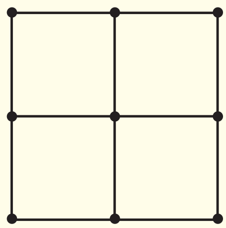
36 (UFRJ) Uma partícula desloca-se sobre uma reta, percorrendo 1 cm para a esquerda ou para direita a cada movimento.
Calcule de quantas maneiras diferentes a partícula pode realizar uma sequência de 10 movimentos terminando na posição de partida.

37 (PUC-RJ) O nº de matrizes 3 × 3 cujos elementos pertencem ao conjunto {–1; 0; 1} e nas quais não há dois elementos iguais na mesma linha nem na mesma coluna é igual a:

(A) 3 (C) 12 (E) 120

(B) 6 (D) 36

38 (UFF-RJ) Os 9 pontos dispostos no quadrado da figura abaixo determinam 4 quadrados congruentes.



Calcule o número de triângulos que podem ser formados com vértices nesses pontos.

39 Se A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, quantos são os subconjuntos de A que contêm {1, 2}?

(A) 30 (C) 64 (E) 252

(B) 48 (D) 128

40 De quantas maneiras 7 crianças podem brincar de roda, de modo que João e Maria, duas dessas crianças, fiquem sempre juntas?

41 De quantas maneiras 5 meninos e 5 meninas podem brincar de roda, de modo que crianças do mesmo sexo não fiquem juntas?

42 De quantas maneiras 5 mulheres e 6 homens podem formar uma roda de ciranda, de modo que as mulheres permaneçam juntas?

43 (PUC-RJ) Um torneio de pingue-pongue foi disputado por 20 jogadores e apenas um consagrou-se campeão. Nesse torneio, havia em cada jogo um vencedor, e o jogador que perdia duas partidas quaisquer era eliminado do torneio.

Quantos jogos, no máximo, foram necessários para se chegar ao campeão?

44 (UFRJ) Um saco contém 13 bolinhas amarelas, 17 cor-de-rosa e 19 roxas. Uma pessoa de olhos vendados retirará do saco n bolinhas de uma vez só. Qual o menor valor de n, de forma que se possa garantir que será retirado pelo menos um par de bolinhas de cores diferentes?

45 (UFRJ) Os reitores das universidades federais são escolhidos a partir de listas tríplices eleitas por colégios eleitorais. A lei determina que cada um dos eleitores vote em apenas um nome, sendo a lista composta pelos três mais votados.
Em certa universidade, há 7 candidatos inscritos e o colégio eleitoral tem 79 membros. Um candidato conta com os votos de um número n de eleitores. Qual o menor valor de n para que esse candidato possa ter certeza de estar entre os três mais votados?

46 (Cesgranrio-RJ) Em um computador digital, "bit" é um dos algarismos 0 ou 1 e uma "palavra" é uma sucessão de "bits". O número de palavras de 32 "bits" é:

(A) $2(2^{32} - 1)$ (C) $\dfrac{32 \cdot 31}{2}$ (E) $2 \cdot 32$

(B) 2^{32} (D) 32^2

47 (FGV-SP) Um tabuleiro especial de xadrez possui 16 casas, dispostas em 4 linhas e 4 colunas. Um jogador deseja colocar 4 peças no tabuleiro, de tal forma que, em cada linha e cada coluna, seja colocada apenas uma peça. De quantas maneiras as peças poderão ser colocadas?

48 Uma rodada do campeonato de futebol consiste num grupo de 10 jogos.
Deseja-se fazer um palpite para uma rodada, com o preenchimento de um talão com o seguinte aspecto:

JOGO	A	B	E
$A_1 \times B_1$			
$A_2 \times B_2$			
⋮			
$A_{10} \times B_{10}$			

Se, numa linha, fizer a marcação a seguir, significa que no jogo correspondente o palpite é:
Vencedor A.

JOGO	A	B	E
A × B	X		

O X na coluna B significa: Vencedor B.

O X na coluna E significa: Empate.

Um torcedor preenche um talão fazendo 10 marcações, uma em cada linha. Como a ordem dos palpites altera o talão, temos 3 elementos – A, B e E – que devem ser reunidos em grupos de 10. Determine o número de talões diferentes.

49 (Mack-SP) O total de números, formados com algarismos distintos, maiores que 50 000 e menores que 90 000 e que são divisíveis por 5 é:

(A) 1 596 (C) 2 686 (E) 4 032

(B) 2 352 (D) 2 788

50 (Cesgranrio-RJ) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 formam-se números naturais de 6 algarismos distintos. Sabendo-se que neles não aparecem juntos dois algarismos pares nem dois algarismos ímpares, então o número total de naturais assim formados é:

(A) 36 (D) 72

(B) 48 (E) 90

(C) 60

51 (Faap-SP) Um indivíduo faz uma relação de nomes de onze pessoas amigas. Calcule de quantas maneiras ele poderá convidar cinco dessas pessoas para jantar sabendo-se que na relação há um único casal inseparável.

52 (Puccamp-SP) Num zoológico há dez animais dos quais devem ser selecionados cinco para ocupar uma determinada jaula. Se entre eles há dois que devem permanecer sempre juntos, encontre o total de maneiras distintas de escolher os cinco que vão ocupar a jaula.

53 (Mack-SP) Num tribunal, dez réus devem ser julgados isoladamente num mesmo dia: três são paulistas, dois mineiros, três gaúchos e dois baianos. O número de formas de não julgarem, consecutivamente, três paulistas é:

(A) P_7 (D) $P_{10} - P_3 \cdot P_7$

(B) P_8 (E) $P_{10} - P_8 \cdot P_3$

(C) $P_{10} - P_8$

54 (FGV-SP) Um professor conta exatamente 3 piadas no seu curso anual. Ele tem por norma nunca contar as mesmas 3 piadas que contou em qualquer outro ano. Qual é o número mínimo de piadas diferentes que ele pode contar em 35 anos?

55 (Cesgranrio-RJ) Uma fábrica deverá participar de uma exposição de carros importados com 6 modelos diferentes, sendo dois deles de cor vermelha e os demais de cores variadas. Esses carros serão colocados em um *stand* com capacidade para 3 modelos, somente com cores diferentes. O número de maneiras distintas de esse *stand* ser arrumado é:

(A) 24 (D) 72

(B) 36 (E) 96

(C) 60

56 (UFF-RJ) Com as letras da palavra PROVA podem ser escritos *x* anagramas que começam por vogal e *y* anagramas que começam e terminam por consoante.
Os valores de *x* e *y* são, respectivamente:

(A) 48 e 36 (D) 24 e 36

(B) 48 e 72 (E) 72 e 24

(C) 72 e 36

57 (Cesgranrio-RJ) Uma indústria fabrica 100 produtos diferentes, que já estão no mercado. Para facilitar a identificação de cada produto, via computador, deve ser criado um código de barras especial, onde cada barra é | ou ▮. O número mínimo de barras necessárias para se criar um código de barras que identifique cada um dos 100 produtos é igual a:

(Se necessário, use log 2 = 0,3.)

(A) 5 (C) 7 (E) 9

(B) 6 (D) 8

58 (PUC-RJ) Um torneio de xadrez, no qual cada jogador joga com todos os outros, tem 435 partidas. Quantos jogadores disputam?

(A) 25 (D) 24

(B) 23 (E) 30

(C) 20

59 Numa urna há bolas verdes, azuis e vermelhas, em grande quantidade. De quantos modos se pode tirar 8 bolas de uma vez?

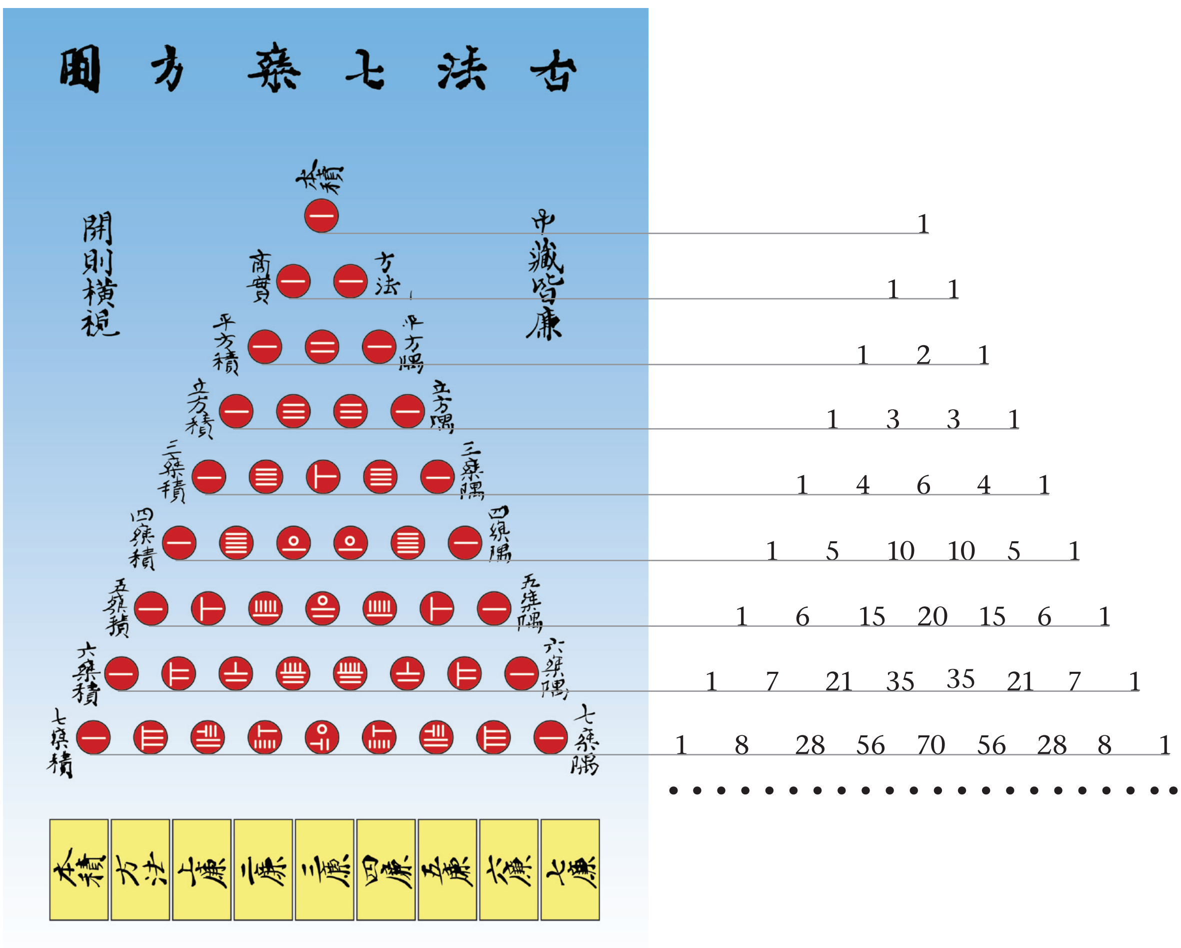
60 Podemos escolher entre os sabores laranja, hortelã e limão. De quantos modos podemos comprar 5 balas?

61 De quantos modos podemos distribuir 10 brinquedos iguais entre 4 crianças de maneira que nenhuma criança fique sem receber brinquedo?

62 Uma sorveteria tem sorvetes de 11 sabores diferentes. De quantas maneiras uma pessoa pode escolher 6 sorvetes, não necessariamente de sabores diferentes?

CAPÍTULO IV

BINÔMIO DE NEWTON



Neste capítulo, estudaremos os números binomiais, que, além de ajudar a resolver problemas combinatórios, obedecem a belíssimas relações (resumidas no triângulo de Pascal) e permitem-nos expandir rapidamente expressões algébricas com potências de somas. Na imagem, um desenho de um livro de 1303, de Zhu Shijie, com a versão chinesa do triângulo (ali representado como "triângulo de Yang Hui", que viveu muito antes de Pascal). Este desenho contém um pequeno erro – você consegue encontrá-lo?

4 – BINÔMIO DE NEWTON

4.1 – Triângulo de Pascal

O triângulo de Tartaglia-Pascal é uma tabela de dupla entrada onde estão registrados os valores das C_n^p.

$n \backslash p$	0	1	2	3	...	p
0	C_0^0					
1	C_1^0	C_1^1				
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2			
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3		
⋮	....					
n						C_n^p

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	$\boxed{5}$	10	10	$\boxed{5}$	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	$\boxed{56}$	70	$\boxed{56}$	28	8	1	
⋮	....									

4.1.1 – Combinações complementares

NOTA
Pode-se mostrar que se $C_n^p = C_n^x$, então $x = p$ ou $x = n - p$.
(Observe no triângulo de Pascal.)

Como sabemos, $C_n^p = C_n^{n-p}$. No triângulo de Pascal os elementos de uma mesma linha, equidistantes dos extremos são iguais. Observe na tabela acima, os números envolvidos por pequenos quadrados.

Exemplos:

i) $C_8^5 = C_8^3 = 56$

ii) $C_{50}^{46} = C_{50}^{4}$

iii) $C_5^1 = C_5^4 = 5$

iv) Calcular x de modo que se tenha $C_m^{x+a} = C_m^{x-a}$, sendo $a \neq 0$ e m par.
Como $a \neq 0$, $x + a \neq x - a$ então, devemos ter:
$x + a + x - a = m$
$x = \dfrac{m}{2}$

v) Sendo $C_m^p = C_m^{p-1}$, qual a relação entre m e p?
Estas combinações devem ser complementares, logo:
$p + p - 1 = m \Rightarrow m = 2p - 1$
Vê-se que m deve ser um número ímpar, obrigatoriamente.

vi) Resolver a equação $C_{20}^{2x-1} = C_{20}^{4x-9}$.
Devemos ter:
$2x - 1 = 4x - 9 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$
ou $2x - 1 + 4x - 9 = 20 \Rightarrow 6x = 30 \Rightarrow x = 5$

4.1.2 – Relação de Stifel

Consideremos o quadro das combinações simples de m elementos, p a p, e dividimos esse quadro em dois grupos de combinações: o primeiro, de combinações que contêm dado elemento A e o segundo de combinações que não contêm esse dado elemento A.

Calculemos o número de combinações do primeiro grupo:

$$\underbrace{\overbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}^{p-1}\ \underline{A}}_{p}$$

Como dispõe-se de m elementos, basta separar o dado elemento A e colocar a seu lado quaisquer $p - 1$ elementos dos $m - 1$ restantes. Então, o número de combinações de m, p a p, que contêm o elemento A é C_{m-1}^{p-1}.

Calculemos, agora, o número de combinações de m, p a p que não contêm A. Basta separar este elemento A da relação dos m elementos e reunir os $m - 1$ elementos restantes em combinações de p elementos. Temos então C_{m-1}^{p}.

Como o quadro das combinações de m elementos, p a p, é constituído das combinações que contêm A e das que não contêm A, podemos escrever:

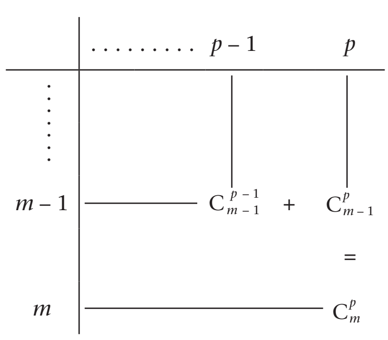
$$\boxed{C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1}}$$

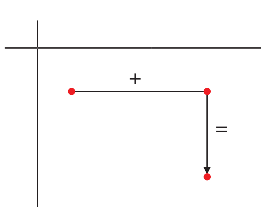
Que é a relação de Stifel.

Esquematicamente no triângulo temos:

NOTA
Relação das linhas – Stifel: a soma de dois elementos consecutivos de uma linha é igual ao elemento que se situa na linha seguinte e na mesma coluna do mais à direita.

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	$\boxed{1}$ +	$\boxed{1}$				
		=				
2	1	$\boxed{2}$	1			
3	1	3	3	1		
4	1	$\boxed{4}$ +	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$ +	$\boxed{1}$	
			=		=	
5	1	5	$\boxed{10}$	10	$\boxed{5}$	1





A verificação analítica dessa relação é simples:

$$C_{m-1}^{p} = \frac{(m-1)!}{p!(m-p-1)!}$$

$$C_{m-1}^{p-1} = \frac{(m-1)!}{(p-1)!(m-p)!}$$

Somando membro a membro estas igualdades, vem:

$$C^{p}_{m-1} + C^{p-1}_{m-1} = \frac{(m-1)!}{p!(m-p-1)!} + \frac{(m-1)!}{(p-1)!(m-p)!}$$

$$m \cdot \ m \cdot \ c = p!(m-p)!$$

$$\frac{p!(m-p)!}{p!(m-p-1)!} \cdot \ (m-1)! = (m-p)(m-1)!$$

$$\frac{p!(m-p)!}{(p-1)!(m-p)!} \cdot \ (m-1)! = p(m-1)!$$

$$C^{p}_{m-1} + C^{p-1}_{m-1} = \frac{(m-1)!(m-p) + (m-1)!\,p}{p!(m-p)!}$$

$$C^{p}_{m-1} + C^{p-1}_{m-1} = \frac{(m-1)!(m-p+p)}{p!(m-p)!}$$

$$C^{p}_{m-1} + C^{p-1}_{m-1} = \frac{(m-1)!\,m}{p!(m-p)!} = \frac{m!}{p!(m-p)!} = C^{p}_{m}$$

Exemplos:

i) $C^{6}_{15} = C^{6}_{14} + C^{5}_{14}$

ii) $C^{p+3}_{m+5} = C^{p+3}_{m+4} + C^{p+2}_{m+4}$

iii) Quanto vale a soma $C^{8}_{20} + C^{9}_{20} + C^{10}_{21} + C^{11}_{22}$?

Temos que: $C^{8}_{20} + C^{9}_{20} = C^{9}_{21}$, $C^{9}_{21} + C^{10}_{21} = C^{10}_{22}$ e, finalmente:

$$C^{10}_{22} + C^{11}_{22} = C^{11}_{23} = \frac{23!}{11! \cdot 12!}$$

Exercício resolvido:

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} C^{x-3}_{2x+1} = C^{x-3}_{2x} + C^{y}_{2x} & \text{(I)} \\ C^{2y}_{2x} = C^{x-1}_{2x} & \text{(II)} \end{cases}$$

<u>Solução:</u>

Da igualdade (I) utilizando a relação de Stifel, temos:

$$C^{x-3}_{2x+1} = C^{x-3}_{2x} + C^{x-4}_{2x} \Rightarrow C^{x-4}_{2x} = C^{y}_{2x} \Rightarrow x - 4 = y \text{ ou } x - 4 + y = 2x$$

Por outro lado, tomando a relação (II), $C_{2x}^{2y} = C_{2x}^{x-1}$. Então, podemos ter:

1ª hipótese: $2y = x - 1$ e $y = x - 4$

Temos o sistema: Subtraindo membro a membro:

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ 2y = x - 1 \end{cases} \qquad y = 3 \quad \text{e} \quad x = 7 \Rightarrow \begin{cases} C_{15}^{4} = C_{14}^{4} + C_{14}^{3} \\ C_{14}^{6} = C_{14}^{6} \end{cases}$$

2ª hipótese: $2y + x - 1 = 2x$ (comb. comp.) e $y = x - 4$

Temos o sistema: Subtraindo membro a membro:

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ 2y = x + 1 \end{cases} \qquad y = 5 \quad \text{e} \quad x = 9 \Rightarrow \begin{cases} C_{19}^{6} = C_{18}^{6} + C_{18}^{5} \\ C_{18}^{10} = C_{18}^{8} \end{cases}$$

3ª hipótese: $2y = x - 1$ e $x - 4 + y = 2x$

Temos o sistema: Subtraindo membro a membro:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - y = -4 \end{cases} \qquad y = -5 \quad \text{e} \quad x = -9 \text{ (não serve)}$$

4ª hipótese: $2y + x - 1 = 2x$ e $x - 4 + y = 2x$

Temos o sistema: Subtraindo membro a membro:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ x - y = -4 \end{cases} \qquad y = -3 \quad \text{e} \quad x = -7 \text{ (não serve)}$$

Logo: $S = \{(7, 3); (9, 5)\}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Calcule x na igualdade:

$C_{14}^{5x} = C_{14}^{x+8}$

2 Resolva a igualdade:

$C_5^4 + C_5^5 = C_6^{x+2}$

3 Calcule x em cada igualdade:

a) $C_8^6 + C_8^7 = C_9^{x+3}$

b) $C_5^{2x} = C_5^{x+2}$

c) $C_{14}^{3x} = C_{14}^{x+6}$

4 Simplifique: $\dfrac{C_x^5}{C_x^4}$

5 Resolva a igualdade: $C_n^2 + C_n^3 = 35$

6 Demonstre que:

$C_n^{n-3} + C_n^{n-4} = C_{n+1}^{n-3}$

7 Resolva a igualdade:

$C_{n-1}^2 = C_{n+1}^4$, com $n \geq 3$

8 Resolva:

a) $C_{10}^x = C_{10}^{x+8}$

b) $C_{14}^{3p} = C_{14}^{p+6}$

9 Encontre n, em $C_n^{50} = C_n^{40}$.

10 Calcule o valor de n em:
$C_n^1 + C_n^2 = 6$

4.1.3 – Relação de Euler

Consideremos o quadro das combinações simples de m elementos, p a p, e separemos esse quadro em vários grupos de combinações.

O primeiro, das combinações que contêm um dado elemento A. Temos C_{m-1}^{p-1}.

Em seguida, as combinações que não têm A, mas têm o elemento B. Para isso, retiremos o elemento A da coleção, separemos o elemento B dos $m - 1$ restantes e coloquemos ao seu lado $p - 1$ elementos dos $m - 2$ elementos agora disponíveis.

Temos, então, as combinações que não têm A, mas têm B: C_{m-2}^{p-1}.

Analogamente, as combinações que não têm A, não têm B, mas têm C são C_{m-3}^{p-1}, pois devemos retirar A e B e separar C para, ao seu lado, colocar $p - 1$ elementos dos $m - 3$ restantes.

Assim, sucessivamente, os elementos disponíveis vão diminuindo até restarem p elementos que darão apenas uma combinação de p, p a p. Temos, então:

$$C_m^p = C_{m-1}^{p-1} + C_{m-2}^{p-1} + C_{m-3}^{p-1} + \dots + C_p^p$$

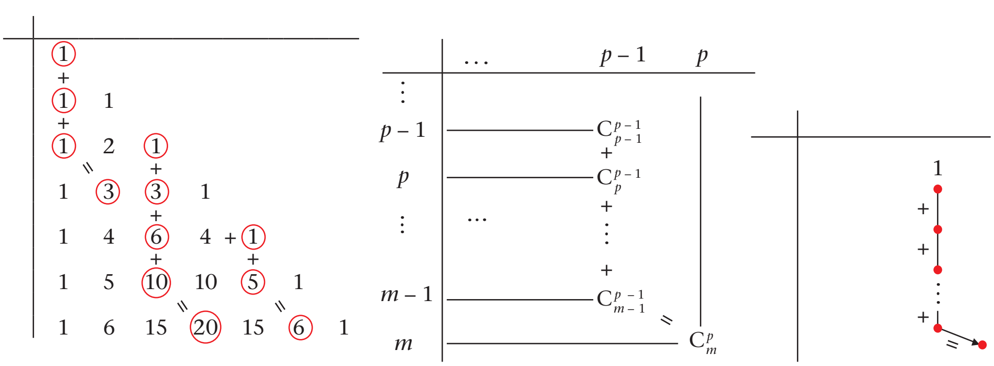
Como $C_m^p = C_{m-1}^{p-1} = 1$, temos a relação de Euler:

$$C_m^p = C_{m-1}^{p-1} + C_{m-2}^{p-1} + C_{m-3}^{p-1} + \dots + C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-1}$$

NOTA
Simbolicamente:

$$C_m^p = \sum_{k=p-1}^{m-1} C_k^{p-1}$$

Esquematicamente, no triângulo, temos:



NOTA
A soma dos elementos consecutivos de uma coluna, a partir da unidade, é igual ao elemento que se situa na linha e coluna seguintes às do último.

Essa relação pode ser obtida diretamente.

Tomemos a relação de Stifel e $C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1}$ e apliquemo-la sucessivamente ao primeiro termo do segundo membro:

$$C_m^p = \cancel{C_{m-1}^p} + C_{m-1}^{p-1}$$
$$\cancel{C_{m-1}^p} = \cancel{C_{m-2}^p} + C_{m-2}^{p-1}$$
$$\cancel{C_{m-2}^p} = \cancel{C_{m-3}^p} + C_{m-3}^{p-1}$$
$$\vdots$$
$$\cancel{C_{p+1}^p} = C_p^p + C_p^{p-1}$$

Somando membro a membro essas igualdades, temos:

$$C_m^p = C_{m-1}^{p-1} + C_{m-2}^{p-1} + \dots + C_p^{p-1} + C_p^p$$

Como $C_p^p = 1 = C_{p-1}^{p-1}$, podemos substituir obtendo a relação de Euler.

$$\boxed{C_m^p = C_{m-1}^{p-1} + C_{m-2}^{p-1} + \dots + C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-1}}$$

Exemplo:

$C_{10}^{10} + C_{11}^{10} + C_{12}^{10} + \ldots + C_{30}^{10} = C_{31}^{11}$

Exercícios resolvidos:

1) Calcular o valor da soma:

$S = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot p + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p \cdot (p+1) + \ldots + n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+p-1)$

Solução:

Dividindo ambos os membros da igualdade por $p!$, vem:

$$\frac{S}{p!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot p}{p!} + \frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p+1)}{p!} + \ldots + \frac{n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+p-1)}{p!}$$

$$\frac{S}{p!} = C_p^p + C_{p+1}^p + \ldots + C_{n+p-1}^p$$

Aplicando ao 2º membro da igualdade a relação de Euler, vem:

$$\frac{S}{p!} = C_{n+p}^{p+1}$$

$$S = p!C_{n+p}^{p+1} = p!\frac{(n+p)!}{(p+1)!(n-1)!} = \frac{1}{p+1} n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+p)$$

APLICAÇÃO

$S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots +$
$+ 200 \cdot 201 \cdot 202$

$S = 3! \cdot C_{203}^4 =$

$= \dfrac{3! \cdot 203 \cdot 202 \cdot 201 \cdot 200}{4!}$

$S = 201 \cdot 202 \cdot 203 \cdot 50$

2) Calcular a soma dos quadrados dos números naturais $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

Solução:

Temos que $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \ldots + C_n^2 = C_{n+1}^3$.

Como $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, temos:

$$\frac{2(2-1)}{2} + \frac{3(3-1)}{2} + \frac{4(4-1)}{2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2} = C_{n+1}^3$$

Efetuando os numeradores, mas deixando o produto indicado e eliminando os denominadores, vem:

$(2^2 - 2) + (3^2 - 3) + (4^2 - 4) + \ldots + (n^2 - n) = 2C_{n+1}^3$

Juntando a parcela $1^2 - 1 = 0$, temos:

$(1^2 - 1) + (2^2 - 2) + (3^2 - 3) + \ldots + (n^2 - n) = 2C_{n+1}^3$

Associando os quadrados:

$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 2C_{n+1}^3$

Como: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 + \ldots + C_n^1 = C_{n+1}^2$

Temos:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = 2C_{n+1}^3 + C_{n+1}^2$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = 2\frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(n+1)n}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n-2}{3}+1\right]$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4.1.4 – Relação de Euler complementar

Uma relação interessante, que será utilizada no triângulo de Pascal, é obtida aplicando combinações complementares à relação de Euler:

Sabemos que:

$$C_m^p = C_{m-1}^{p-1} + C_{m-2}^{p-1} + \ldots + C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-1}$$

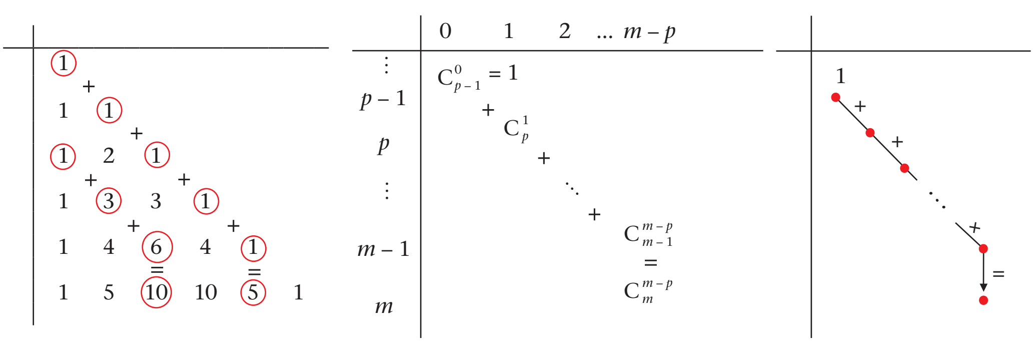
Como: $C_m^p = C_m^{m-p}$, vem:

$$C_m^{m-p} = C_{m-1}^{m-p} + C_{m-2}^{m-p-1} + \ldots + C_p^1 + C_{p-1}^0$$

NOTA
Simbolicamente:

$$C_m^{m-p} = \sum_{k=p-1}^{m-1} C_k^{k-p+1}$$

Esquematicamente no triângulo temos:



NOTA
A soma dos elementos de uma diagonal, a partir da unidade, é igual ao elemento que se situa na linha seguinte e na mesma coluna que o último.

Exemplos:

i) $C_2^0 + C_3^1 + C_4^2 = C_5^2 = 10$

ii) $C_7^0 + C_8^1 + C_9^2 + C_{10}^3 = C_{11}^3 = 165$

4.1.5 – Soma das combinações

Consideremos dois elementos distintos, A e B, e m posições, em que podem ser colocados esses elementos. Há duas maneiras diferentes de se obter o número de sequências que podemos formar, colocando esses dois elementos nas m posições.

Inicialmente, consideremos uma das sequências possíveis $\underbrace{\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{B}\ \underline{A}\ \ldots\ \underline{A}\ \underline{B}}_{m \text{ posições}}$.

O número de sequências será $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^m$, pois em cada posição pode figurar A ou B.

Por outro lado, o número de sequências poderia ser obtido do seguinte modo:

Sequências que não têm A $= 1 = C_m^0$.

Sequências que têm um A $= C_m^1$, pois A pode estar em qualquer lugar.

Sequências que têm dois A $= C_m^2$, pois A A podem ocupar C_m^2 lugares.

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

Sequências que têm m A $= C_m^m$, quando todas as posições são A A ... A.

NOTA
Simbolicamente:
$\sum_{k=0}^{m} C_m^k = 2^m$

Teremos então:

$$\boxed{C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m = 2^m}$$

Esquematicamente no triângulo temos:

NOTA
$C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^m = 2^m$
A soma de todos os elementos de uma linha é 2^m.

$$\begin{array}{|llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 2^5
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|l}
 & 0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad m \\
\hline
\vdots & \\
m & C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m = 2^m
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|l}
 & \\
\hline
m & 1 + \ + \ \ldots \ + 1 = 2^m
\end{array}$$

Exemplos:

i) $C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + \ldots + C_{10}^{10} = 2^{10} = 1024$

ii) $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 = 2^3 - C_3^3 = 8 - 1 = 7$

Exercício resolvido:

Dispõe-se de 10 comprimidos solúveis em água e incapazes de reagir entre si. Quantos solutos distintos podem ser obtidos dissolvendo-se num copo-d'água um ou mais desses comprimidos?

<u>Solução:</u>

Como a ordem em que se dissolvem dois ou mais comprimidos não altera o soluto, temos um caso de combinações.

Teremos então as hipóteses:

Dissolvendo 1 comprimido: C_{10}^{1} solutos.

Dissolvendo 2 comprimidos: C_{10}^{2} solutos.

$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$

Dissolvendo 10 comprimidos: C_{10}^{10} solutos.

Logo, o número de solutos distintos será:

$$C_{10}^{1} + C_{10}^{2} + \ldots + C_{10}^{10} = 2^{10} - C_{10}^{0} = 1\,023$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Calcule n sabendo que:
$C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = 1\,023$

2 Calcule o valor de:
$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1)$

3 Determine m e p sabendo que:
$C_m^p = C_{m-1}^p + C_7^3$

4 Complete: $C_m^{k-1} + C_m^k =$

5 Complete: $\sum_{p=0}^{m} C_m^k =$

6 Tem-se n comprimidos de substâncias distintas, solúveis em água e incapazes de reagir entre si. Quantas soluções diferentes podem ser obtidas dissolvendo-se um ou mais desses comprimidos num copo-d'água?

7 Calcule: $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$

8 Calcule m.

a) $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m = 2\,048$

b) $C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 + \ldots + C_m^m = 4\,095$

9 Calcule a soma alternada de:
$C_{10}^0 - C_{10}^1 + C_{10}^2 - C_{10}^3 + \ldots + C_{10}^{10}$

10 Calcule: $1 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^p \cdot C_n^p$; com $p < n$.

11 Calcule a soma:
$S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + 98 \cdot 99 \cdot 100$
(Sugestão: divida os dois membros por $1 \cdot 2 \cdot 3$)

12 Calcule: $C_5^0 + C_6^1 + C_7^2 + C_8^3 + \ldots + C_{55}^{50}$
(Sugestão: aplique a relação $C_n^p = C_n^{n-p}$)

4.2 – Binômio de Newton

Chama-se **binômio de Newton** qualquer expressão do tipo $(x + a)^n$.

DEFINIÇÃO
Binômio de Newton.

A fórmula do binômio pode ser obtida procedendo da seguinte maneira:

$(x + a)^n = (x + a)(x + a)(x + a)...(x + a)$ tendo n fatores.

Um termo qualquer será obtido por um produto de n fatores x ou a sendo um deles de cada fator.

Assim o termo $xaa...x$ é obtido tomando x do 1º fator, a do 2º fator, a do 3º fator etc., e o x final do último fator. Então, um termo qualquer será do tipo $a^k x^{n-k}$ em que os fatores a foram retirados de k parênteses e os fatores x dos $n - k$ restantes.

Como são n parênteses o termo $a^k x^{n-k}$ pode ser obtido tomando k fatores iguais a a (C_n^k modos diferentes possíveis) e $n - k$ fatores iguais a x dos $n - k$ restantes.

Então, o termo geral é:

$$\underbrace{a^k \cdot x^{n-k} + a^k \cdot x^{n-k} + ... + a^k \cdot x^{n-k}}_{C_n^k \text{ parcelas}} = C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k}$$

Em outras palavras:

o termo com n fatores x e nenhum fator a é $x^n = C_n^0\, a^0\, x^n$;

o termo com $n - 1$ fatores x e um fator a é $C_n^1\, a^1\, x^{n-1}$;

o termo com $n - 2$ fatores x e dois fatores a é $C_n^2\, a^2\, x^{n-2}$;

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

o termo com $n - k$ fatores x e k fatores a é $C_n^k\, a^k\, x^{n-k}$;

e assim sucessivamente até $C_n^n\, a^n\, x^0$.

A soma de todos esses termos dará o desenvolvimento de $(x + a)^n$ ordenando segundo as potências decrescentes por x:

$$(x + a)^n = \underbrace{C_n^0\, a^0\, x^n}_{T_1} + \underbrace{C_n^1\, a^1\, x^{n-1}}_{T_2} + \underbrace{C_n^2\, a^2\, x^{n-2}}_{T_3} + ... + \underbrace{C_n^k\, a^k\, x^{n-k}}_{T_{k+1}} + ... + \underbrace{C_n^n\, a^n\, x^0}_{T_{n+1}}$$

NOTA
Esse desenvolvimento é também chamado **expansão binomial.**

Observações:

i) O desenvolvimento tem $n + 1$ termos.

ii) À medida que o expoente de x decresce, o expoente de a cresce mantendo a soma igual a n.

iii) Os coeficientes combinatórios são todos os elementos da linha correspondente ao número n no triângulo de Pascal.

	0	1	2	3	4	...	n
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	...		C_n^n
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$				$\downarrow$
	a^0x^n	ax^{n-1}	ax^{n-2}				a^nx^0

Exemplos:

i) Expandir $(x + a)^4$.

As partes literais serão, segundo as potências decrescentes de x:

$x^4, ax^3, a^2x^2, a^3x, a^4$

Colocando agora os coeficientes encontrados na linha 4, vem:

$(x + a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$

Analogamente:

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$

$(x + a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$

ii) $(x - a)^5 = C_5^0\,(-a)^0\,x^5 + C_5^1\,(-a)^1\,x^4 + C_5^2\,(-a)^2\,x^3 + C_5^3\,(-a)^3\,x^2 + C_5^4\,(-a)^4\,x^1 +$
$+ C_5^5\,(-a)^5\,x^0$

$(x - a)^5 = C_5^0a^0x^5 - C_5^1a^1x^4 + C_5^2a^2x^3 - C_5^3a^3x^2 + C_5^4a^4x^1 - C_5^5a^5x^0$

$(x - a)^5 = x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2 + 5a^4x - a^5$

Note que quando o binômio é diferença, os termos são alternadamente positivos e negativos.

iii) Calcular o valor da expressão: $\left(a+\sqrt{b}\right)^6 + \left(a-\sqrt{b}\right)^6$

$$\left(a+\sqrt{b}\right)^6 = a^6 + 6a^5\sqrt{b} + 15a^4b + 20a^3b\sqrt{b} + 15a^2b^2 + 6ab^2\sqrt{b} + b^3$$

$$\left(a-\sqrt{b}\right)^6 = a^6 - 6a^5\sqrt{b} + 15a^4b - 20a^3b\sqrt{b} + 15a^2b^2 - 6ab^2\sqrt{b} + b^3$$

Somando membro a membro:

$$\left(a+\sqrt{b}\right)^6 + \left(a-\sqrt{b}\right)^6 = 2\left(a^6 + 15a^4b + 15a^2b^2 + b^3\right)$$

iv) Mostrar que $7^{20} - 1$ é múltiplo de 6.

Basta fazer $7 = (6 + 1)$ e desenvolver pelo binômio de Newton:

$7^{20} - 1 = (6 + 1)^{20} - 1 = 6^{20} + C_{20}^{1} \cdot 6^{19} + C_{20}^{2} \cdot 6^{18} + \ldots + C_{20}^{19} \cdot 6^{1} + 1 - 1$

Como todas as parcelas tem o fator 6, vem $7^{20} - 1 = 6\,(6^{19} + C_{20}^{1} \cdot 6^{18} + \ldots + C_{20}^{19}) = 6k,\ k \in \mathbb{Z}$ o que demonstra a propriedade.

v) Calcular o valor da soma:

$$S = 1 + \frac{7}{2} + C_7^2 \cdot \frac{1}{4} + C_7^3 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + C_7^7 \cdot \frac{1}{2^7}$$

Podemos escrever:

$$S = C_7^0 \frac{1}{2^0} \cdot 1^7 + C_7^1 \frac{1}{2^1} \cdot 1^6 + C_7^2 \frac{1}{2^2} \cdot 1^5 + \ldots + C_7^7 \frac{1}{2^7} \cdot 1^0$$

que nos dá:

$$S = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^7 = \frac{3^7}{2^7}$$

vi) Calcular o valor da soma $\sum_{k=1}^{n} 2^k \cdot C_n^k = 2 \cdot C_n^1 + 4 \cdot C_n^2 + \ldots + 2^n \cdot C_n^n$.

Observe que:

$(1 + 2)^n = 1^n + C_n^1 \cdot 1^{n-1} \cdot 2 + C_n^2 \cdot 1^{n-2} \cdot 2^2 + C_n^3 \cdot 1^{n-3} \cdot 2^3 + \ldots + C_n^n \cdot 1^0 \cdot 2^n$

então: $2C_n^1 + 4C_n^2 + 8C_n^3 + \ldots + 2^n \cdot C_n^n = 3^n - 1$.

NOTA
De um modo geral,
$3^n - 1$ é múltiplo de 2,
$4^n - 1$ é múltiplo de 3,
$5^n - 1$ é múltiplo de 4 etc.

O termo geral do desenvolvimento do binômio de Newton $(x + a)^n$ é:

$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k}$ onde $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Essa fórmula permite calcular um termo qualquer da expansão binomial sem desenvolver o binômio.

Exemplos:

i) Calcular o quinto termo do desenvolvimento de $\left(x + \frac{2}{x^3}\right)^{10}$.

Sabemos que: $T_{k+1} = C_n^k\, a^k\, x^{n-k}$

Como queremos T_5, devemos ter:

$k + 1 = 5 \Rightarrow k = 4,\ a = \frac{2}{x^3}$ e $n = 10$

$$T_5 = C_{10}^4 \left(\frac{2}{x^3}\right)^4 x^{10-4}$$

$$T_5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{2^4}{x^{12}} \cdot x^6 \Rightarrow T_5 = \frac{3\,360}{x^6}$$

ii) Calcular o termo de 7º grau no desenvolvimento de $\left(x^4 + \frac{2}{x}\right)^8$.

O termo de 7º grau será do tipo $T_{k+1} = Ax^7$. Devemos procurar o valor de k para que o expoente final de x seja 7.

Consideremos o termo genérico do desenvolvimento:

$$T_{k+1} = C_8^k \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k \cdot (x^4)^{8-k} = C_8^k \cdot 2^k \cdot x^{32-5k}$$

Devemos ter $32 - 5k = 7 \Rightarrow k = 5$. O termo pedido será então:

$$T_6 = C_8^5 \cdot 2^5 \cdot x^7 = 1\,792x^7$$

iii) Calcular o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{15}$.

O termo independente de x deverá ser do tipo $T_{k+1} = Ax^0$. O termo geral do desenvolvimento será:

$$T_{k+1} = C_{15}^k \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k \cdot (x^3)^{15-k}$$

$$T_{k+1} = (-1)^k \cdot C_{15}^k \cdot x^{45-3k-2k}$$

Devemos ter: $45 - 5k = 0 \Rightarrow k = 9$, logo:

$$T_{10} = (-1)^9\, C_{15}^9\, x^0 = -\,C_{15}^6\, x^0 = -5\,005.$$

iv) Calcular o termo independente de x em: $\left(x^5 + \frac{1}{x^3}\right)^{13}$.

Temos: $T_{k+1} = C_{13}^k \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)^k \cdot (x^5)^{13-k} = C_{13}^k \cdot x^{65-8k}$

Fazendo $65 - 8k = 0 \Rightarrow k = \frac{65}{8} \notin \mathbb{N}$, logo não há tal termo no desenvolvimento.

v) Calcular o penúltimo termo do desenvolvimento de $(2x - y)^{114}$. O penúltimo termo será obtido para $k = 113$, logo será o 114º termo.

$$T_{114} = (-1)^{113}\, C_{114}^{113}\, y^{113}\, (2x)^{114-113}$$

$$T_{114} = -114\, y^{113} \cdot 2x$$

$$T_{114} = -228xy^{113}$$

vi) Sabe-se que a soma dos termos extremos do desenvolvimento do binômio $(x + y)^4$ é 4 112, e que o termo central vale 1 536. Calcular x e y sabendo que são positivos.

Os extremos serão x^4 e y^4 e o termo central será $T_3 = C_4^2 x^2 y^2$, uma vez que o desenvolvimento terá 5 termos.

Podemos escrever:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 4\,112 \\ 6x^2y^2 = 1\,536 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$$

$$y^2 = 4 \Rightarrow y = 2$$

vii) Sendo Rx^8y^5 um termo do desenvolvimento de $(x - y)^n$, calcule os seus termos centrais.

Como um termo qualquer é dado por $T_{k+1} = (-1)^k C_n^k y^k x^{n-k}$, devemos ter

$$\begin{cases} n - k = 8 \\ k = 5 \end{cases} \quad \text{logo } n = 13.$$

O desenvolvimento terá, então, 14 termos.

$$\overbrace{\underset{T_1}{\_\_\_}\ \underset{T_2}{\_\_\_}\ \_\_\_}^{6\text{ termos}} \cdots \underset{T_7}{\_\_\_}\ \underset{T_8}{\_\_\_} \cdots \overbrace{\_\_\_\ \underset{T_{13}}{\_\_\_}\ \underset{T_{14}}{\_\_\_}}^{6\text{ termos}}$$

Como há 14 termos, haverá 6 termos antes dos termos centrais e 6 depois deles, logo os centrais serão o 7º e o 8º termos. Para T_7, $k = 6$ logo $T_7 = (-1)^6 C_{13}^6 y^6 x^7 = C_{13}^6 y^6 x^7$ e para T_8, $k = 7$ logo $T_8 = (-1)^7 C_{13}^7 y^7 x^6 = -C_{13}^7 y^7 x^6$.

Note que os coeficientes combinatórios têm mesmo módulo e sinais contrários.

Exercícios resolvidos:

1) Determinar o valor de m de modo que o terceiro termo do desenvolvimento de $\left(x^{m+1} + \dfrac{1}{x^{2m}}\right)^7$ seja independente de x.

Solução:

$$T_{k+1} = C_7^k \cdot \left(\frac{1}{x^{2m}}\right)^k \cdot (x^{m+1})^{7-k} = C_7^k \cdot x^{(m+1)(7-k)-2mk}$$

Como o termo deve ser o terceiro, $k = 2$, logo:

$$T_3 = C_7^2\, x^{(m+1)\cdot 5 - 4m} = 21x^{m+5}$$

Este termo deve ser independente de x, então $m + 5 = 0 \Rightarrow m = -5$.

2) No desenvolvimento de $(x + y)^n$ sabe-se que $T_2 = 240$, $T_3 = 720$ e $T_4 = 1\,080$. Calcular x, y e n.

Solução:

$$\begin{cases} C_n^1\, y\, x^{n-1} = 240 \\ C_n^2\, y^2 x^{n-2} = 720 \\ C_n^3\, y^3 x^{n-3} = 1\,080 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n\, y\, x^{n-1} = 240 & (1) \\ n(n-1)\, y^2 x^{n-2} = 1440 & (2) \\ n(n-1)(n-2)\, y^3 x^{n-3} = 6\,480 & (3) \end{cases}$$

Fazendo as divisões:

$$\begin{cases}(2) \div (1) \\ (3) \div (2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(n-1)yx^{-1} = 6 \\ (n-2)yx^{-1} = \dfrac{9}{2}\end{cases}$$

Dividindo novamente: $\dfrac{n-2}{n-1} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow n = 5$

Temos, então: $\begin{cases}\dfrac{4y}{x} = 6 \\ 5yx^4 = 240\end{cases} \Rightarrow x = 2$ e $y = 3$.

3) Determinar os valores de m e n no desenvolvimento de $\left(x^{2m-n} + \dfrac{1}{x^{m-2n}}\right)^6$ de modo que se tenha $\dfrac{T_5}{T_3} = \dfrac{m}{2}x^{-6}$, qualquer que seja x.

Solução:

$$\frac{T_5}{T_3} = \frac{C_6^4 \cdot \left(\dfrac{1}{x^{m-2n}}\right)^4 \cdot \left(x^{2m-n}\right)^2}{C_6^2 \cdot \left(\dfrac{1}{x^{m-2n}}\right)^2 \cdot \left(x^{2m-n}\right)^4}$$

$$\frac{T_5}{T_3} = x^{-4m+8n+2m-4n+4m-2n-8m+4n} = x^{6n-6m}$$

Então: $\begin{cases}6n - 6m = -6 \\ \dfrac{m}{2} = 1\end{cases} \Rightarrow m = 2$ e $n = 1$

4) Calcular o termo de maior coeficiente do desenvolvimento de $\left(2x + \dfrac{y}{3}\right)^{12}$.

Solução:

Suponhamos que o termo de maior coeficiente seja T_{k+1}. Temos:

$$\left(2x + \frac{y}{3}\right)^{12} = T_1 + T_2 + \ldots + T_k + T_{k+1} + T_{k+2} + \ldots + T_{13}$$

Como admitimos que T_{k+1} é o termo de maior coeficiente, podemos escrever: coeficiente $T_k \leq$ coeficiente $T_{k+1} \geq$ coeficiente T_{k+2}

ou ainda: $\begin{cases}\text{coef. } T_{k+1} \geq \text{coef. } T_k \\ \text{coef. } T_{k+1} \geq \text{coef. } T_{k+2}\end{cases}$

Calculemos esses coeficientes:

$$T_{k+1} = C_{12}^k \cdot \left(\frac{y}{3}\right)^k \cdot (2x)^{12-k} = C_{12}^k \cdot \frac{2^{12-k}}{3^k} y^k \cdot x^{12-k}$$

$$T_k = C_{12}^{k-1} \cdot \left(\frac{y}{3}\right)^{k-1} \cdot (2x)^{12-k+1} = C_{12}^{k-1} \cdot \frac{2^{13-k}}{3^{k-1}} y^{k-1} \cdot x^{13-k}$$

$$T_{k+2} = C_{12}^{k+1} \cdot \left(\frac{y}{3}\right)^{k+1} \cdot (2x)^{12-k-1} = C_{12}^{k+1} \cdot \frac{2^{11-k}}{3^{k+1}} y^{k+1} \cdot x^{11-k}$$

Substituindo os coeficientes no sistema:

$$\begin{cases} C_{12}^{k} \cdot \dfrac{2^{12-k}}{3^{k}} \geq C_{12}^{k-1} \cdot \dfrac{2^{13-k}}{3^{k-1}} \\ C_{12}^{k} \cdot \dfrac{2^{12-k}}{3^{k}} \geq C_{12}^{k+1} \cdot \dfrac{2^{11-k}}{3^{k+1}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{12!}{k!(12-k)} \geq 6 \cdot \dfrac{12!}{(k-1)!(13-k)!} \\ 6 \cdot \dfrac{12!}{k!(12-k)!} \geq \dfrac{12!}{(k+1)!(11-k)!} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13-k \geq 6k \\ 6(k+1) \geq 12-k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13 \geq 7k \\ 7k \geq 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{6}{7} \leq k \leq \frac{13}{7}$$

Observe que o único inteiro entre $\frac{6}{7}$ e $\frac{13}{7}$ é $\frac{7}{7} = 1$, logo o termo de maior coeficiente é $T_2 = C_{12}^{1} \cdot \frac{y}{3} \cdot (2x)^{11} = 8\,192\, yx^{11}$.

5) Calcular a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de:

a) $(2x + y)^{10}$

b) $(x^2 + 3x)^5$

c) $\left(x^{30} - \dfrac{1}{x}\right)^{14}$

Solução:

Se num monômio $Mx^a y^b$ quisermos obter o coeficiente M, basta fazer $x = 1$ e $y = 1$ (pois $M \cdot 1^a \cdot 1^b = M$).

a) $(2 \cdot 1 + 1)^{10} = (2 + 1)^{10} = 3^{10}$

b) $(1^2 + 3 \cdot 1)^5 = 4^5 = 2^{10} = 1\,024$

c) $\left(1^{30} - \dfrac{1}{1}\right)^{14} = (1 - 1)^{14} = 0^{14} = 0$

6) A soma dos coeficientes de $\left(3x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{n^2 - n}$ é 4096. Calcular o termo independente de x do desenvolvimento.

<u>Solução:</u>

$x = 1 \qquad (3 - 1)^{n^2 - n} = 4096$

$$2^{n^2 - n} = 2^{12} \Rightarrow n^2 - n = 12 \Rightarrow n^2 - n - 12 = 0 \quad \begin{cases} n = 4 \\ n = -3 \end{cases}$$

O binômio fica: $\left(3x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{12}$

T =... $\qquad x^0 \leftarrow$ para ser independente de x

$$T_{k+1} = C_{12}^{k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^{k} \cdot (3x^2)^{12-k} = C_{12}^{k} \cdot \frac{(-1)^k}{x^k} \cdot 3^{12-k} \cdot x^{24-2k}$$

$$T_{k+1} = C_{12}^{k} \cdot (-1)^k \cdot 3^{12-k} \cdot x^{24-2k-k} \quad \Rightarrow \quad 24 - 3k = 0 \Rightarrow \quad k = 8$$

$$T_9 = C_{12}^{8} \cdot (-1)^8 \cdot 3^4 \cdot x^0 = C_{12}^{4} \cdot 81 = \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \overset{5}{\cancel{10}} \cdot 9}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}} \cdot 81 = 11 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 81 = 40095$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 (FEI-SP) Desenvolva, usando a fórmula do binômio de Newton $(x-1)^3\,(x+1)^3$.

2 Calcule o valor de $\left(\sqrt{3}+\frac{1}{3}\right)^6+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)^6$.

3 Calcule o termo em x^4 no desenvolvimento de $\left(2x^3-\frac{1}{x}\right)^8$.

4 (FEI-SP) No desenvolvimento do binômio $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$, dê o termo independente de x.

5 Dado o binômio $(x+a)^m$ com $m>0$, determine m, para que no desenvolvimento do binômio o coeficiente do 3º termo seja igual a 5.

6 Calcule o termo central do desenvolvimento de $(2x+1)^{12}$.

7 Calcule o termo independente no desenvolvimento de $\left(\frac{1}{x^2}-\sqrt[4]{x}\right)^{18}$.

8 No desenvolvimento de $\left(\frac{x^2}{2}-y\right)^{10}$, determine o coeficiente numérico do termo que contém o fator y^4.

9 Considere o binômio de Newton $\left(2x^3-\frac{1}{x^2}\right)^{20}$ e calcule:

a) o termo do 5º grau;

b) a soma dos coeficientes.

10 Ache o valor de a, de modo que o coeficiente de x^5 seja igual ao de x^{15} no desenvolvimento de $\left(2x^2+\frac{a}{x^3}\right)^{10}$.

11 Qual a soma dos coeficientes numéricos no desenvolvimento de $(3x-2y)^8$?

12 Calcule o termo do 5º grau do desenvolvimento de $\left(x^3+\frac{1}{2x^2}\right)^{n^2-5}$, sabendo que ele tem 21 termos.

13 No binômio $\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^{n^2-2n}$ a soma dos coeficientes é 256. Calcule o termo do 4º grau.

14 A razão entre a soma dos coeficientes de $(x+y)^{n+2}$ e de $(x+y)^{10}$ é 8. Calcule a soma dos coeficientes de $(x+y)^{n-5}$.

15 Qual o termo racional do desenvolvimento de $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}\right)^7$?

16 Calcule $\sum_{p=0}^{8} C_8^p\, 3^{8-p}\,(-2)^p$.

17 A soma dos coeficientes de $(5x+4y)^n-(4x-y)^n$ é 6 480. Calcule o termo central do desenvolvimento de $\left(x+\sqrt{x}\right)^{2n+8}$.

18 Determine o termo máximo do desenvolvimento de $\left(1+\frac{1}{10}\right)^{50}$.

Apêndice

Números figurados

A 3ª coluna e a 4ª coluna no triângulo de Pascal têm particular importância porque dão os totais de elementos de uma pilha com formas geométricas.

No triângulo de Pascal:

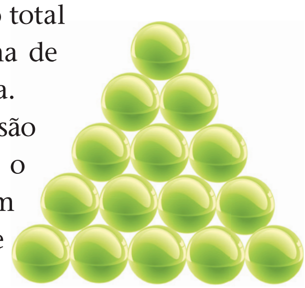
	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
⋮	.	.	.	.	.	.	.	.

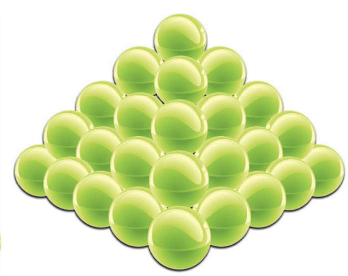
números triangulares

números triangulares-piramidais

Os números da 3ª coluna são chamados **números triangulares** e os da 4ª coluna são chamados **triângulo-piramidais**.

Os números da 3ª coluna são assim chamados porque dão o total de objetos dispostos em forma de triângulo como indica a figura.





Os números da 4ª coluna são assim chamados porque dão o total de objetos dispostos em forma de pirâmide de base triangular. São pirâmides formadas por camadas sucessivas de triângulos superpostos.

Assim, se tivermos uma pilha triangular com n elementos na aresta da base o total de objetos da pilha será o n-ésimo elemento da 3ª coluna.

Como a pilha triangular tem 1 objeto no vértice superior, 2 na 2ª camada, 3 na 3ª camada etc., então o total será:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 + \dots + C_n^1 = C_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

que é a expressão geral dos números da 3ª coluna.

Sendo os números da 3ª coluna, números triangulares, os números da 4ª coluna são somas de números triangulares, logo, representam números de camadas

triangulares tendo 1 objeto no vértice, 3 na segunda camada, 6 na terceira camada e assim por diante.

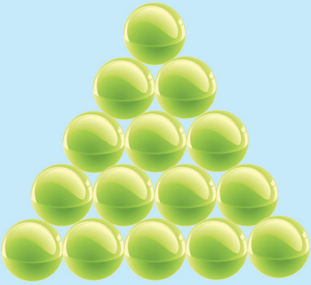
O número de objetos da pilha piramidal triangular será o n-ésimo elemento da 4ª coluna.

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \ldots + C^2_{n+1} = C^2_2 + C^2_3 + C^2_4 + \ldots + C^2_{n+1} = C^3_{n+2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

que é a expressão geral dos elementos da 4ª coluna onde n é o número de camadas.

Exemplos:

i) Considere uma pilha triangular com 5 esferas sobre cada lado. Quantas esferas há na pilha?

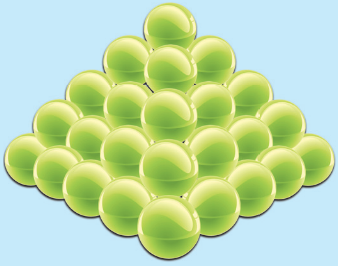


O número de esferas na aresta é: $n = 5$

O número total será:

$C^2_6 = \dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$ esferas

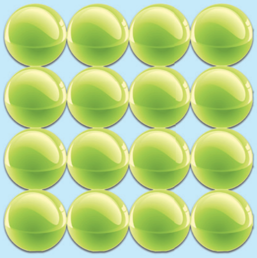
ii) Considerando, agora, uma pilha piramidal com 5 esferas sobre a aresta, o total de esferas será:



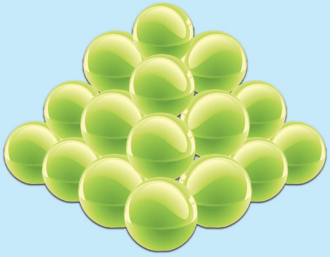
$C^3_7 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ esferas

Basta ver que a pirâmide é a soma dos números triangulares desde o 1º até o 5º. São camadas sucessivas de triângulos.

iii) Os **números quadrangulares** são assim chamados porque dão o total de elementos dispostos em forma de quadrado, como indica a figura ao lado.



Os **quadrângulos-piramidais** são assim chamados porque dão o total de objetos dispostos em forma de pirâmide de base quadrada, formada por camadas sucessivas de quadrados como os quadrados ao lado.



Assim, se tivermos uma pilha quadrangular com n elementos na base, o total de elementos da pilha será o n-ésimo número natural ao quadrado, n^2.

O que já era de se esperar, pois um quadrado com n elementos sobre o lado, contém n^2 elementos.

Analogamente, o número de elementos de uma pilha piramidal quadrangular com n elementos sobre a aresta será a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais então:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{esferas}$$

ou simbolicamente:

$$\sum_{n=1}^{n} n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (UFRN) No desenvolvimento de $(3 + 2x)^5$, o coeficiente de x^3 é igual a:

(A) 60 (C) 240 (E) 1 440

(B) 120 (D) 720

2 O coeficiente de x^4 no polinômio $P(x) = (x + 2)^6$ é:

(A) 64 (C) 12 (E) 24

(B) 60 (D) 4

3 (Mack-SP) No desenvolvimento de $(2x + b)^5$, $b \neq 0$, o coeficiente numérico do termo x^4 é oito vezes aquele do termo em x^3. Então, b vale:

(A) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (E) 16

(B) $\frac{1}{4}$ (D) 32

4 (Cescem-SP) Assinale a resposta certa.

(A) $(x + 1)^{100} = x^{99} + x^{98} + ... + x^2 + x + 1$

(B) $(x + 1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

(C) $(x^2 - 1)^4 = x^8 - 1$

(D) $(x^3 - 1)(x - 1)$ é divisível por $(x + 1)$

(E) $(x^3 - 1)(x^{11} - 1) = (x^{33} - 1)$

5 O valor do polinômio: $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$ quando: $x = \frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt[4]{5}}$ e $y = \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt[4]{5}}$ é igual a:

(A) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{2^4}{5}$ (E) $\frac{2-\sqrt{6}}{5}$

(B) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{5}}$

6 (FGV-RJ) A expressão $99^5 + 5(99)^4 + 10(99)^3 + 10(99)^2 + 5(99) + 1$ é igual a:

(A) 99^6 (C) 99^{10} (E) 99^9

(B) 10^9 (D) 10^{10}

7 (PUC-RJ) O coeficiente de x na expansão de $\left[x + \frac{1}{x}\right]^7$ é:

(A) 0 (C) 28 (E) 49

(B) 7 (D) 35

8 (Unificado-RJ) O valor de n na igualdade $\sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} = 254$ é:

(A) 6 (D) 9

(B) 7 (E) 10

(C) 8

9 (Cescea-SP) Sabendo que

$$a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + b^5 = 1024$$

pode-se dizer que $(a + b)^2$ é igual a:

(A) 144 (C) 36 (E) 16

(B) 4 (D) 64

10 (FEI-SP) Sendo

$$S = \binom{20}{0} + \binom{20}{1}2 + \binom{20}{2}2^2 + ... + \binom{20}{19}2^{19} + \binom{20}{20}2^{20}$$

tem-se:

(A) $S = 2^{40}$ (D) $S = 20!$

(B) $S = 9^{10}$ (E) nenhuma das anteriores

(C) $S = 20^{20}$

11 (Cescea-SP) Simplificando-se $\left(1-\sqrt{5}\right)^5 - \left(1+\sqrt{5}\right)^5$, obtém-se:

(A) 160 (C) $160\sqrt{5}$ (E) $-360\sqrt{5}$

(B) $-160\sqrt{5}$ (D) $-50\sqrt{5}$

12 Desenvolvendo-se o binômio $\left(2x^2 + \frac{x}{2}\right)^{10}$, segundo as potências decrescentes de x, o 6º termo será:

(A) $\frac{105}{4}x^{10}$ (C) $252x^{15}$ (E) $252x^{10}$

(B) $\frac{105}{2}x^{14}$ (D) $210x^{15}$

13 Um dos termos do desenvolvimento de $(x + 3a)^5$ é $360x^3$. Sabendo que a não depende de x, o valor de a é:

(A) ±1 (C) ±3 (E) ±5

(B) ±2 (D) ±4

14 O termo independente de x em $\left[\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right]^6$ é:

(A) 20
(B) –15
(C) –20
(D) 15
(E) 200

15 (Ucsal-BA) O 5º termo do desenvolvimento do binômio $\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n$, de acordo com as potências decrescentes de x, é $1\,120x^4$. O número natural n é:

(A) primo.
(B) divisível por 3.
(C) múltiplo de 5.
(D) quadrado perfeito.
(E) cubo perfeito.

16 O coeficiente de x^8 no desenvolvimento de $\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)^8$ é:

(A) 22
(B) 24
(C) 26
(D) 28
(E) 30

17 O coeficiente de x^{15} no desenvolvimento de $(x^2+x^{-3})^{15}$ é:

(A) 455
(B) 500
(C) 555
(D) 643
(E) 600

18 (Cescea-SP) O coeficiente numérico do termo de 4º grau do desenvolvimento do binômio de Newton $(x-2)^7$ é:

(A) $-\dfrac{7!}{4!3!}$
(B) $-\dfrac{8!}{4!3!}$
(C) $\dfrac{8!}{4!3!}$
(D) $\dfrac{7!}{4!3!}$
(E) $\dfrac{2!}{3!}$

19 (FGV-RJ) Ache a soma dos coeficientes do polinômio $(1-2x+3x^2)^3$.

20 (Unirio-RJ) Calcule o valor de:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n-1}-\binom{n}{n}$$

em que n é impar, justificando sua resposta.

21 Determine o coeficiente x^3 no desenvolvimento de $(3x^3-x+2)^4$.

22 Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(x^3-3x^2+3x-1)^3$.

23 (UFV-MG) Ao elevarmos o binômio $(ax+b)$ a uma determinada potência inteira e positiva, uma das parcelas do desenvolvimento é $5\,145x^2b^{13}$. O valor de a $(a>0)$ no referido binômio é um número:

(A) par maior que 5.
(B) par menor que 5.
(C) ímpar maior que 5.
(D) ímpar menor que 5.
(E) primo menor ou igual a 5.

24 (Fuvest-SP) O valor numérico da expressão

$$x^n+\binom{n}{1}\cdot x^{n-1}y+\binom{n}{2}\cdot x^{n-2}y^2+\ldots+y^n,$$

para $x=y=1$ é:

(A) 2^{n-1}
(B) 2^n
(C) 2^{n+1}
(D) 2^{2n}
(E) 2^{2n-1}

25 (Uerj) $\left(x-\dfrac{1}{x^5}\right)^n$

Na potência acima, n é um número natural menor que 100. Determine o maior valor de n, de modo que o desenvolvimento dessa potência tenha um termo independente de x.

26 (FGV-RJ) O valor de $\sum\limits_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(2)^x(3)^{n-x}$ é:

(A) 6^n
(B) 5^n
(C) 1
(D) 2^n
(E) impossível de se calcular por vias elementares.

27 (ITA-SP) Sejam $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in \mathbb{N}$ onde $\mathbb{N}=\{0, 1, 2, \ldots\}$; $\mathbb{N}^+=\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Então $\sum\limits_{p=0}^{n}(-1)^{p-n}(-1)^p(-1)^{n-p}\binom{n}{p}$ vale:

(A) –1
(B) 0
(C) 1
(D) 2
(E) nenhuma das respostas anteriores.

28 (UFU-MG) Se n é o número de termos do desenvolvimento $\left(\sqrt[5]{x} + \sqrt[10]{y}\right)^{55}$ que não contenham radicais, então n é:

(A) 8 (C) 6 (E) 4

(B) 5 (D) 7

29 (Mack-SP) O número de termos racionais no desenvolvimento de $\left(2\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^{10}$ é:

(A) 8 (C) 4 (E) 0

(B) 6 (D) 2

30 (Mack-SP) Abaixo estão 5 aproximações do número $(1{,}003)^{20}$. Usando o binômio de Newton é possível determinar a melhor delas, que é:

(A) 1 (C) 1,03 (E) 1,0003

(B) 1,01 (D) 1,06

31 (FGV-RJ) A soma dos coeficientes dos termos de ordem ímpar de $(x - y)^n$ é 256. Então, o valor de n é:

(A) 9

(B) 8

(C) 7

(D) 4

(E) nenhuma das alternativas anteriores.

32 (FGV-Eaesp) Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números inteiros positivos. O conjunto de todos os $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ e para os quais $\binom{n}{3} = \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{2}$ é o conjunto:

(A) $\{3\}$ (D) $\{n \in \mathbb{N} \mid n > 3\}$

(B) $\{3, 5\}$ (E) $\{3, 4, 5\}$

(C) $\{3, 4\}$

33 Uma pessoa possui um certo número m de objetos distintos. Agrupando-os 3 a 3, de modo que cada grupo difira do outro por possuir pelo menos um objeto diferente, obteve o mesmo número de grupos se os juntasse 5 a 5, do mesmo modo.

Então $\binom{m}{3}$ é:

(A) 35 (C) 120 (E) 10

(B) 84 (D) 56

34 Um estádio tem 10 portões. De quantas maneiras diferentes o estádio estará aberto?

(A) 1 200 (D) $C_{10,\,1} \cdot C_{10,\,10}$

(B) 1 023 (E) não sei.

(C) $C_{10,\,1}$

35 O somatório $\sum_{k=0}^{10} \binom{11}{k}$ é igual a:

(A) 34 572 (D) 2 047

(B) 34 571 (E) nada disso.

(C) 2 048

36 (FMABC-SP) O número das raízes da equação $C_{12}^{2x} = C_{12}^{x^2}$ é:

(A) 0 (D) 3

(B) 1 (E) maior que 3.

(C) 2

37 (FGV-Eaesp) Sabendo que $\binom{m}{p} = x$ e $\binom{m+1}{p+1} = y$,

então $\binom{m}{p+1}$ é igual a:

(A) $x + y$ (C) $y - x$ (E) $y - p$

(B) $x - y$ (D) $x - p$

38 (UFPR) Sejam n e p números inteiros positivos, tais que $n - 1 \geq p$. Então:

$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p+1}$ é igual a:

(A) $\binom{n-1}{p-1}$ (C) $\binom{n+1}{p}$ (E) $\binom{n+1}{p+1}$

(B) $\binom{n}{p}$ (D) $\binom{n+1}{p-1}$

39 (Mack-SP) Para todo n e $p \in \mathbb{N}^*$, o valor de $\sum_{n=1}^{p} \binom{n}{n-1}$ é sempre:

(A) 2^p (C) $\binom{p+1}{p}$ (E) $\binom{n+2}{n+1}$

(B) $\dfrac{p(p+1)}{2}$ (D) $\binom{p+2}{p-1}$

40 (FMABC-SP) Assinale a verdadeira.

(A) $\left(a+x\right)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k x^{n-k}$

(B) $p!\ A_n^p = C_n^p$

(C) $p! = q! \Leftrightarrow p = q$

(D) $\dfrac{(n+2)!}{n!} = n^2 + 3n + 2$

(E) $(2n)! = 2!n!$

41 (UFC-CE) O valor da expressão:

$(1 + \text{sen}\,2)^5 - 5(1 + \text{sen}\,2)^4 + 10(1 + \text{sen}\,2)^3 -$
$- 10(1 + \text{sen}\,2)^2 + 5(1 + \text{sen}\,2) - 1$

é igual a:

(A) $(\text{sen}\,2)^5$
(B) $(1 + \text{sen}\,2)^5 - 1$
(C) -1
(D) 0
(E) $(\text{sen}\,2)^5 + 1$

42 (Uece) A soma das soluções da equação $\binom{18}{6} = \binom{18}{4x-1}$ é:

(A) 8 (B) 5 (C) 6 (D) 7

43 O valor de $y = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot 3^{10-k} \cdot 2^k$ é:

(A) 5^9
(B) 5^{10}
(C) 6^{10}
(D) 6^9
(E) 3^{10}

44 (ITA-SP) Escreva o desenvolvimento do binômio $(\text{tg}^3\, x - \text{cosec}^6\, x)^m$, em que m é um número inteiro maior que zero, em termos de potências inteiras de sen x e cos x. Para determinados valores do expoente, este desenvolvimento possuirá uma parcela P, que não conterá a função sen x. Seja m o menor valor para o qual isto ocorre. Então $P = \dfrac{-64}{9}$ quando x for igual a:

(A) $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, k inteiro.

(B) $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, k inteiro.

(C) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, k inteiro.

(D) $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, k inteiro.

(E) Não existe x satisfazendo a igualdade desejada.

CAPÍTULO V

PROBABILIDADE

$$p(\text{acertar a Sena}) = \frac{1}{50\,063\,860}$$

J.C. Ruzza

Incerteza é um fato inevitável não somente em jogos, mas em vários aspectos de nossas vidas, e probabilidade é o modelo matemático para lidar com incerteza. Neste capítulo, examinaremos os fundamentos básicos da probabilidade e das probabilidades condicionais.

5 – PROBABILIDADE

5.1 – Introdução

A Ciência, ao estudar determinados tipos de fenômenos, estabelece modelos matemáticos que permitem prever, a qualquer tempo, seus resultados. Esses fenômenos são chamados **determinísticos**.

Por outro lado, existem fenômenos cujos resultados não se podem prever, pois são fortuitos, imprevisíveis. Esses fenômenos são chamados **aleatórios** ou **probabilísticos.**

O estudo de **probabilidade** é o estudo desses fenômenos casuais ou eventuais.

Como toda ciência, seu estudo pressupõe o conhecimento de conceitos fundamentais de **experiência** ou **experimento**, assim como sua **realização** e, finalmente, seu **resultado.** Esses são seus conceitos primitivos.

OBSERVAÇÃO
Experiência, realização e **resultado** são conceitos não definidos, embora se tenha perfeita noção do que significam.

Exemplos:

São experiências:

i) O lançamento de um dado.

ii) A extração de um número da loteria.

iii) O giro de uma roleta.

iv) A observação de peças defeituosas.

v) O lançamento de uma moeda.

vi) O disparo de um tiro num alvo.

vii) A retirada de uma carta de um baralho.

Cada realização de uma experiência é chamada de **prova** ou **ensaio** para essa experiência. Em geral, as provas são ligeiramente diferentes umas das outras, ainda que se procure reproduzir a experiência identicamente. Os resultados não são iguais, só os sendo casualmente.

Exemplos:

i) Na experiência de lançar um dado, uma prova é o seu lançamento e o resultado é a face que fica voltada para cima.

ii) Na extração de um número da loteria, uma prova é a retirada do número e o resultado é o número premiado.

iii) No giro de uma roleta, uma prova é a sua movimentação e o resultado é o número apontado.

iv) No controle de qualidade, uma prova é o exame da produção diária, por exemplo, e o resultado é a detecção de peças defeituosas.

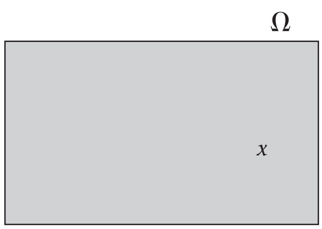
5.2 – Espaço amostral e eventos

Para conhecer perfeitamente uma experiência é necessário que se enumerem todos os resultados que possam ocorrer. O conjunto de todos esses resultados é o conjunto possível ou **espaço amostral**.

DEFINIÇÃO
Espaço amostral.

Como cada resultado é um elemento do conjunto possível, podemos representar esses resultados por pontos de um conjunto. O universo será o espaço amostral. Usamos a notação da teoria dos conjuntos, que se presta para representá-los.

Temos:



Ω = conjunto de todos os resultados possíveis ou espaço amostral
x = um resultado possível

NOTA
Ω (ômega maiúscula) é a última letra do alfabeto grego.

Cada resultado x é um elemento do universo Ω.

Exemplo:

i) No lançamento de um dado o conjunto possível é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

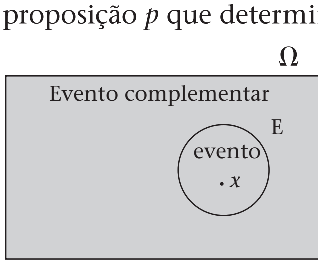
ii) Na extração de um número de loteria com 20 números o universo é $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 20\}$.

iii) No giro de uma roleta o espaço amostral é o conjunto $\Omega = \{00, 01, 02, ..., 35, 36\}$.

iv) No lançamento de uma moeda o conjunto possível é Ω = {cara, coroa}.

Note que a cada prova de uma experiência corresponde um único valor para x.

Um **evento** é um conjunto de resultados possíveis. Em geral, ele é definido por uma proposição p que determina seus elementos.



Temos:
i) $E \subset \Omega$
ii) $E = \{x \mid x \text{ satisfaz } p\}$

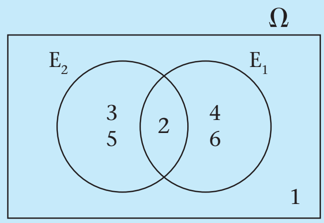
Em suma:

Evento é um subconjunto de um espaço amostral.

DEFINIÇÃO
Evento.

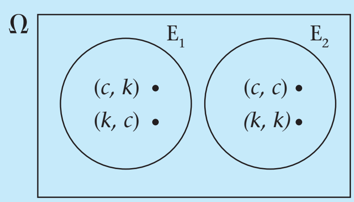
Exemplos:

i) No lançamento de um dado comum, onde $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, os eventos:
$E_1 = \{x \mid x \text{ é um resultado par}\} = \{2, 4, 6\}$
$E_2 = \{x \mid x \text{ é um resultado primo}\} = \{2, 3, 5\}$



Observe que os dois resultados acima tem um resultado em comum: $x = 2$.

ii) No lançamento de 2 moedas:
$\Omega = \{(c, c), (c, k), (k, c), (k, k)\}$
$E_1 = \{(x, y) \mid \text{apenas um dos resultados é cara}\} = \{(c, k), (k, c)\}$
$E_2 = \{(x, y) \mid \text{os resultados são iguais}\} = \{(c, c), (k, k)\}$



Observe que os eventos E_1 e E_2 **são disjuntos**. São ditos mutuamente excludentes.

iii) Na extração de 3 bolas numeradas de 1 a 3 de uma urna, uma a uma, sem reposição:
$\Omega = \{(1, 2, 3); (1, 3, 2); (3, 1, 2); (2, 1, 3); (2, 3, 1); (3, 2, 1)\}$
$E_1 = \{1 \text{ está na } 1^{\underline{a}} \text{ posição}\} = \{(1, 2, 3); (1, 3, 2)\}$
$E_2 = \{2 \text{ está na } 2^{\underline{a}} \text{ posição}\} = \{(1, 2, 3); (3, 2, 1)\}$
$E_3 = \{\text{os 3 números extraídos estão em ordem crescente}\} = \{(1, 2, 3)\}$

iv) No lançamento de 2 dados:

2º dado \ 1º dado	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

Esta tabela é o espaço amostral Ω.

E_1: A soma dos pontos das faces superiores dos dados é 3.
$E_1 = \{(x, y) \in \Omega \mid x + y = 3\} = \{(1, 2); (2, 1)\}$
E_2: A soma dos pontos das faces superiores dos dados é menor que 3.
$E_2 = \{(x, y) \in \Omega \mid x + y < 3\} = \{(1, 1)\}$
E_3: A soma dos pontos das faces superiores dos dados é 7.
$E_3 = \{(x, y) \in \Omega \mid x + y = 7\} = \{(1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1)\}$

NOTA
Estamos usando *c* para coroa e *k* para cara.

NOTA
Parece ser mais fácil obter a soma 7 do que a soma 3.

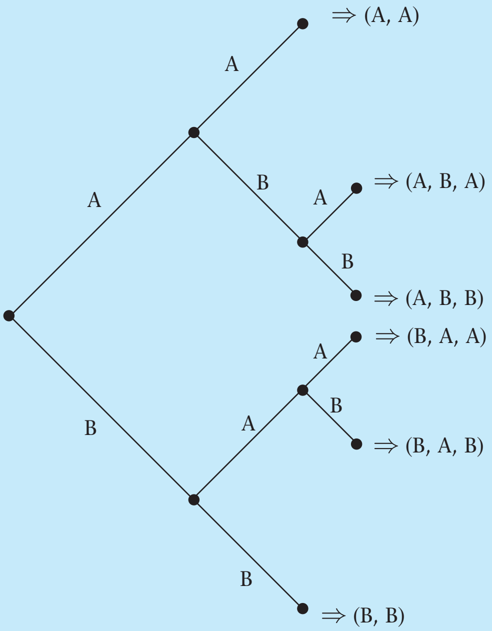
v) Lançar uma moeda e extrair uma carta de um baralho de 52 cartas.
O espaço amostral (Ω) é o conjunto de resultados que se obtém associando-se cada face da moeda a todas as cartas do baralho (104 casos).
Um evento poderia ser, por exemplo, obter uma face cara juntamente com um rei (4 casos).
Outro evento poderia ser a obtenção de uma face coroa com uma carta de ouros (13 casos).

vi) Formar uma comissão com 4 pessoas dispondo-se de 10 pessoas, entre elas Maria.
O espaço amostral (Ω) tem C_{10}^{4} elementos.

E_1: Formar comissões em que Maria é um membro.
Este evento tem C_9^3 elementos.

E_2: Formar comissões em que Maria não é um membro.
Este evento tem C_9^4 elementos.

vii) Uma partida de tênis é disputada por dois jogadores A e B em melhor de 3 *sets*, isto é, a partida termina assim que um jogador vencer 2 *sets*. Observamos a sequência de vencedores dos *sets*.



O espaço amostral é:

$$\Omega = \{AA, ABA, ABB, BAA, BAB, BB\}$$

E_1: A vence a partida.
$E_1 = \{AA, ABA, BAA\}$
E_2: A vence o segundo *set*.
$E_2 = \{AA, BAA, BAB\}$
E_3: A partida termina com 2 *sets*.
$E_3 = \{AA, BB\}$

DEFINIÇÃO
Evento complementar.

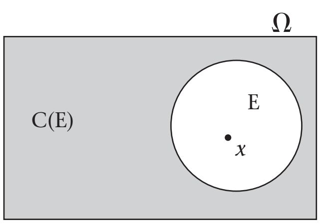
Evento complementar de um evento é aquele definido pela negação da proposição que define o evento. É constituído pelos ensaios que não dão os resultados do evento dado.

Exemplos:

i) Se o evento é produzido pela obtenção de uma face par de um dado, o seu complementar será a obtenção de uma face ímpar.

ii) Se o evento for "extrair um rei de um baralho de 52 cartas", seu complementar será "extrair uma carta que não seja rei".

E = $\{x \mid x$ tem a propriedade $p\}$ então, C(E) = $\{x \mid x$ não tem a propriedade $p\}$



O evento complementar C(E) é constituído dos resultados que não pertencem ao conjunto E. Usam-se as notações C(E) = E′ = $\overline{\text{E}}$.

DEFINIÇÃO
Evento certo.

Evento certo é o evento do qual se tem certeza do seu resultado. É o evento em que a proposição que o define é sempre verdadeira. Em outras palavras o evento certo é o espaço amostral.

Exemplos:

i) Obtenção de uma face numerada de 1 a 6 no lançamento de um dado comum.

ii) Obtenção de resultado "cara" ou "coroa" no lançamento de uma moeda.

DEFINIÇÃO
Evento nulo ou impossível.

Evento nulo ou **impossível** é aquele que é impossível de ser produzido, ou incapaz de ocorrer.

Exemplos:

i) Obtenção de um resultado igual a 7 no lançamento de um dado numerado de 1 a 6.

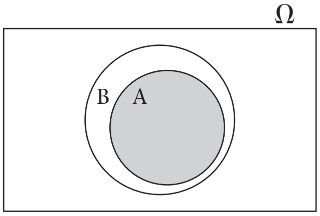
ii) Obtenção de 5 resultados "cara" no lançamento de 4 moedas.

O evento impossível equivale ao conjunto vazio: $\varnothing$

5.2.1 Inclusão de eventos

Um evento A está incluído em B ou contido em B se todo resultado do evento A for também resultado do evento B. Representa-se A ⊂ B.

Assim, se A ocorre então B também ocorre.



NOTA
O evento impossível está contido em qualquer evento. Qualquer evento está contido no espaço amostral.

NOTA
Se A ⊂ B e B ⊂ A então A = B.

Exemplo:

Uma urna contém quatro bolas numeradas de 1 a 4.

Retiram-se, sem reposição, duas bolas sucessivamente, isto é, uma após a outra.

$\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

Seja o evento A que consiste em retirar duas bolas em que a primeira é par.

$A = \{(2, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

Seja o evento B que consiste em retirar duas bolas em que a primeira é 2 e a segunda não é um número primo.

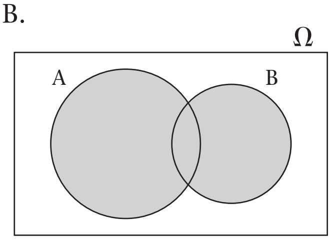
$B = \{(2, 1), (2, 4)\}$

Obviamente B ⊂ A.

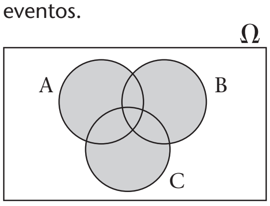
5.2.2 União ou reunião de eventos

Se A e B são dois eventos de um mesmo espaço amostral, dizemos que ocorre o evento união quando ocorre pelo menos um dos dois eventos A ou B.

Representa-se por A ∪ B.



NOTA
A noção de união se estende a mais de dois eventos.



Exemplos:

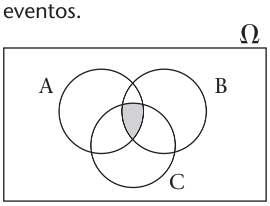
i) Seja a experiência de atirar flechas num alvo. Seja A o seguinte evento: acertar o alvo na primeira flechada. Seja B o seguinte evento: acertar o alvo na segunda flechada.
O evento $A \cup B$ é aquele que se acerta o alvo na primeira flechada ou na segunda flechada (ou nas duas flechadas).

ii) Se no lançamento de um dado:
A for o evento: obter um 6;
B for o evento: obter um número ímpar;
o evento $A \cup B$ será o evento: obter um 6 ou um número ímpar, isto é, $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$.

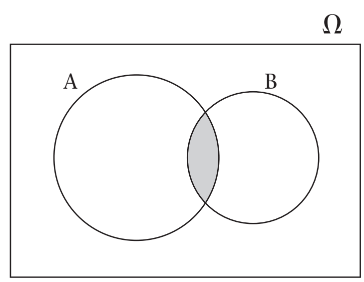
iii) Numa oficina com duas máquinas I e II:
se A for o evento: a máquina I apresenta defeito;
se B for o evento: a máquina II apresenta defeito;
o evento $A \cup B$ será o evento: a máquina I ou a máquina II apresenta defeito (ou as duas máquinas apresentam defeito).

5.2.3 Intersecção de eventos

NOTA
A noção de intersecção se estende a mais de dois eventos.



Se A e B são dois eventos de um mesmo espaço amostral, dizemos que ocorre a intersecção de A e B quando A e B ocorrem simultaneamente. Representa-se simbolicamente por $A \cap B$.



Exemplos:

i) A – Extração de um rei de um baralho.
B – Extração de uma carta de ouros.
O evento $A \cap B$ equivale à extração de um rei de ouros de um baralho.

ii) Atiram-se 3 flechas num alvo:
A – Errar a primeira flechada.
B – Errar a segunda flechada.
C – Errar a terceira flechada.
O evento $A \cap B \cap C$ equivale a errar as três flechas, isto é, não acertar o alvo em nenhuma das três flechadas.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Em uma geladeira temos picolé de uva, coco, limão, manga e chocolate. Uma pessoa escolhe, aleatoriamente, um picolé. Qual é o espaço amostral desse experimento?

2 É realizado um sorteio para definir em que mês do ano será promovida a Olimpíada Brasileira de Matemática. Construa o espaço amostral desse experimento.

3 Uma urna contém quatro etiquetas numeradas de 1 a 4. Serão extraídas, sucessivamente, sem reposição, duas etiquetas. Anotando os números das etiquetas sorteadas, na ordem dos sorteios, obtém-se um par ordenado.

Determine:

a) o espaço amostral desse experimento;

b) o evento formado pelos pares de números cuja soma é 3;

c) o evento formado pelos pares em que o primeiro número é menor que o segundo;

d) o evento formado pelos pares de número iguais;

e) o evento formado pelos pares ordenados de produto par;

f) o evento formado pelos pares ordenados cuja soma é maior que 8.

4 Um dado honesto é lançado e observa-se o número da face voltada para cima. Determine:

a) o espaço amostral;

b) o evento em que ocorre um número maior do que 4;

c) o evento em que ocorre um número ímpar;

d) o evento em que ocorre um número primo;

e) o evento em que não ocorre o número 3;

f) o evento em que ocorre um número maior ou igual a 1;

g) o evento em que ocorre um número par ou primo;

h) o evento em que ocorre um número maior que 6.

5 Em uma turma há 50 alunos com a numeração de 1 a 50. Um deles é escolhido pela sua numeração ao acaso. Determine os seguintes eventos:

a) ocorre um aluno cujo número é um divisor de 30;

b) ocorre um aluno cujo número é um múltiplo de 4;

c) ocorre um aluno cujo número é um quadrado perfeito;

d) ocorre um aluno cujo número é um quadrado perfeito e múltiplo de 5;

e) ocorre um aluno cujo número é múltiplo de 7, quadrado perfeito e par.

6 Um dado justo é lançado duas vezes, sucessivamente, e é anotada a sequência de números assim obtidos. Determine:

a) o espaço amostral (Ω);

b) o evento de ocorrerem faces iguais;

c) o evento de ocorrer a soma dos pontos menor ou igual a 3;

d) o evento de ocorrer a soma dos pontos obtidos igual a 6;

e) o evento de ocorrer produto maior que 36;

f) o evento de ocorrer produto menor ou igual a 36.

7 Em uma urna há 4 bolas, sendo duas verdes (V), uma amarela (A) e uma preta (P). Serão retiradas, sucessivamente, sem reposição, duas bolas e serão anotadas as suas cores, formando-se um par ordenado, na ordem das retiradas. Determine:

a) o espaço amostral;

b) o evento E formado pelos pares de bolas da mesma cor;

c) o evento formado pelos pares de cores diferentes, isto é, o evento “não E”;

d) o evento formado nos quais a primeira bola é verde.

5.3 – Probabilidade

5.3.1 – Conceito

Desejamos classificar eventos de modo que possamos ter uma noção da sua tendência a ocorrer, isto é, se um evento está mais próximo da certeza, da dúvida ou da impossibilidade.

Para isso, procuraremos associar a cada evento um número que permita ordenar sua tendência a ocorrer, entre o impossível e a certeza.

Probabilizar um evento é o procedimento de definir uma escala de valores para os eventos de um mesmo universo, de tal modo que tenhamos uma relativa segurança no que tange à possibilidade de ocorrência desse evento.

O número associado a esse evento é denominado **probabilidade** de ocorrência desse evento.

Quando se repete um mesmo ensaio um número grande de vezes em condições aproximadamente iguais, os resultados obtidos apresentam diferenças, mesmo que pequenas.

Observe que alguns eventos têm mais facilidade de ocorrer que outros e, nesses casos, dizemos que têm maior probabilidade de ocorrer.

Exemplos:

i) Parece ser mais fácil extrair uma carta vermelha de um baralho bem misturado do que um rei.

ii) No lançamento de um dado equilibrado, parece ser mais fácil sair um número par do que sair o número 1.

iii) Se numa urna existem 5 bolas vermelhas e 2 pretas, parece ser mais fácil extrair uma bola vermelha do que uma preta.

Em certos casos, parece haver equilíbrio entre os eventos:

Exemplos:

i) É mais fácil extrair uma carta vermelha ou uma preta de um baralho bem misturado?

ii) É mais fácil obter um resultado par ou ímpar no lançamento de um dado equilibrado?

iii) É mais fácil retirar uma bola vermelha ou uma bola preta de uma urna que contém 3 bolas vermelhas e 3 bolas pretas?

iv) O que é mais provável: lançar 3 dados e obter a soma 8 ou obter a soma 13?

A probabilidade permitirá avaliar quantitativamente a possibilidade de realização de um evento e será tanto maior quanto maior for sua tendência a ocorrer.

Quando se repete um ensaio certo número de vezes, o número de vezes em que ocorre um dado evento é chamado **frequência** do evento. A razão entre a frequência do evento e o número de ensaios para obtê-la é chamada de **frequência relativa** desse evento.

Assim, se, ao lançarmos uma moeda 10 vezes, obtivermos 4 resultados "cara", a frequência desse resultado será 4 e sua frequência relativa $\frac{4}{10}$ ou 40%. Note que se lançarmos a mesma moeda 100 vezes, não é garantido obter 40 resultados "cara". Assim, poderíamos obter 30 resultados "cara" ou poderíamos obter 45. Tal é o que se dá num evento aleatório.

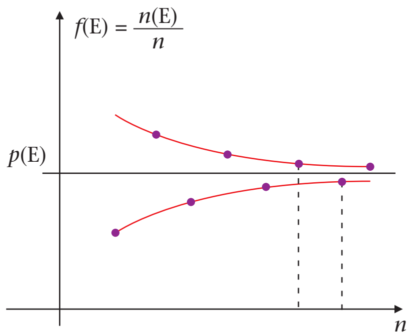
A aleatoriedade está associada à incerteza.

Quando numa experiência se realiza um grande número de ensaios, os valores das frequências relativas do evento vão se tornar cada vez mais próximos, quanto maior for o número de ensaios. Se $n(E)$ é a frequência do evento e n o número de ensaios, a frequência relativa será $f(E) = \frac{n(E)}{n}$, a qual tende a estabilizar-se à medida que n aumenta. Toma-se então essa frequência relativa como a probabilidade $p(E)$ de ocorrência desse evento.

NOTA

Este fato pode ser descrito assim:

$\lim f(E) = \lim \frac{n(E)}{n} = p(E)$



A frequência relativa de um evento tende para sua probabilidade quando o número de observações ou ensaios tende para infinito, isto é, torna-se cada vez maior.

Exemplos:

i) Ao lançar uma moeda muitas vezes, o número de resultados cara é aproximadamente a metade do número de tentativas, tendendo a frequência relativa para a probabilidade que será $\frac{1}{2} = 50\%$.

ii) Ao lançar um dado equilibrado muitas vezes, a frequência relativa da ocorrência do número 1 vai se aproximando da fração $\frac{1}{6}$, que é a probabilidade de sua ocorrência.

iii) Se de uma urna, onde há 5 bolas brancas e 3 pretas, se extrai ao acaso uma bola, com reposição, verifica-se que as frequências relativas de extração de uma bola branca ficam cada vez mais próximas de $\frac{5}{8}$, que é o valor que se assume para sua probabilidade de ocorrer.

Observações:

1) Quando se diz que a probabilidade de ocorrência da face 1 no lançamento de um dado honesto é de $\frac{1}{6}$, isto **não** quer dizer que ao lançarmos esse dado 6 vezes, sairá a face 1 uma vez, nem que se lançarmos 60 vezes sairá a face 1 dez vezes. Essa probabilidade significa que se lançarmos o dado 6 000, 60 000, 6 000 000, ... de vezes, obteremos, aproximadamente, 1 000, 10 000, 1 000 000, ... resultados iguais a 1, e a cada vez o número de ocorrências de 1 será mais próximo de $\frac{1}{6}$ do total.

2) A probabilidade de um evento é sempre um número positivo compreendido entre 0 e 1 inclusive. A probabilidade será 0 (zero) quando o evento for impossível de ocorrer. A probabilidade será 1 (um) quando o evento sempre ocorrer.
Para medir a probabilidade de um evento, tomamos como unidade de medida a probabilidade do evento do qual se tem certeza de sua ocorrência, isto é, do evento que obrigatoriamente ocorre na experiência. É a probabilidade do universo igual a 1 ou 100%.

Exemplos:

São eventos com probabilidade igual a 1:

i) sair cara ou sair coroa no lançamento de uma moeda;

ii) sair um número do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6} no lançamento de um dado comum;

iii) sair uma bola preta ou uma bola branca quando se extrai uma bola de uma urna onde há apenas bolas pretas e brancas.

A probabilidade de ocorrência do evento complementar ao evento certo, isto é, do evento impossível, será 0 (zero).

Exemplos:

São eventos de probabilidade 0:

i) sair um resultado diferente de “cara” ou “coroa” no lançamento de uma moeda que tem numa face “cara” e na outra “coroa”;

ii) sair um resultado 7 num dado que só tenha os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 em suas faces.

A probabilidade de um evento compreendido entre o certo e o impossível será um número entre 0 e 1.

Com isso, fica estabelecido um intervalo [0, 1] ao qual pertencerá a probabilidade de um evento numa experiência aleatória.

Para o estudo quantitativo de qualquer ciência são necessários:

a) a definição da grandeza;

b) a noção da soma de duas grandezas;

c) a unidade de medida.

Assim, tomamos como postulados as seguintes proposições:

P1: Todo evento tem uma probabilidade que é um número real do intervalo [0, 1].

$$0 \le p(\mathrm{E}) \le 1$$

P2: A probabilidade da união de dois eventos disjuntos é a soma das probabilidades de cada evento separadamente.

$$\mathrm{A}, \mathrm{B} \subset \Omega,\ \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing \Rightarrow p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$$

P3: A probabilidade do evento certo é:

$$p(\Omega) = 1$$

Se Ω for finito, digamos, $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, os eventos $e_1 = \{x_1\}$, $e_2 = \{x_2\}$, ..., $e_n = \{x_n\}$ são chamados **eventos elementares.**

DEFINIÇÃO
Eventos elementares.

Como os eventos e_1, e_2, ..., e_n são disjuntos dois a dois, os postulados acima permitem escrever:

$$p(e_1 \cup e_2 \cup ... \cup e_n) = p(\Omega) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p(e_1) + p(e_2) + \ldots + p(e_n) = 1}$$

OBSERVAÇÃO
Os eventos elementares formam uma **partição** do universo Ω.

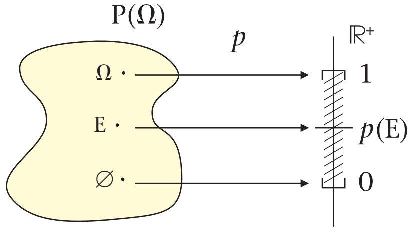
Formalmente, a probabilidade é então uma função do conjunto das partes do universo Ω em $\mathbb{R}^+$ (notação: $\mathrm{P}(\Omega)$ para conjunto das partes de Ω, tal que a cada evento se associa um número real positivo ou nulo, desde que:

i) $p\colon \mathrm{P}(\Omega) \to [0, 1]$
$\quad \mathrm{E} \mapsto p(\mathrm{E})$

ii) $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subset \Omega \wedge, \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing \Rightarrow p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$

iii) $p(\Omega) = 1$

NOTA
O postulado $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$ quando $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ é chamado de **princípio das probabilidades totais.**



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 No lançamento de uma moeda equilibrada, qual é a probabilidade de ocorrência cara?

2 Em uma urna temos bolas numeradas de 1 a 30. No sorteio de uma bola, calcule as probabilidades:

a) de ocorrer um número par;

b) de ocorrer um número primo;

c) de ocorrer um múltiplo de 5;

d) de ocorrer um divisor de 30;

e) de ocorrer um número par e primo.

3 No lançamento de um dado honesto, qual é a probabilidade de se obter, na face voltada para cima, um número de pontos menor que 3?

4 Duas moedas justas são lançadas. Qual é a probabilidade de se obter, nas faces voltadas para cima, pelo menos uma coroa?

5 Lançando dois dados honestos, qual é a probabilidade de se obter, nas faces voltadas para cima, a soma dos pontos igual a 5?

6 Escolhem-se ao acaso dois números naturais distintos, de 1 a 10. Qual é a probabilidade de que o produto dos números escolhidos seja ímpar?

7 Em uma amostra de quinhentas peças, existem exatamente quatro defeituosas. Retirando-se, ao acaso, uma peça dessa amostra, qual a probabilidade de ela ser perfeita?

8 Lançam-se dois dados honestos. Qual a probabilidade de que a diferença (em módulo) das faces seja menor que 2?

9 De um baralho de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Qual a probabilidade da carta extraída ser um 7?

10 Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Uma bola é extraída ao acaso da urna. Qual a probabilidade de ser sorteada uma bola com número maior ou igual a 16?

5.3.2 – Eventos equiprováveis

Eventos equiprováveis são aqueles que têm a mesma probabilidade de ocorrer.

A hipótese de equiprobabilidade é muito útil para determinar a probabilidade dos eventos de um espaço amostral.

DEFINIÇÃO
Eventos equiprováveis.

Exemplos:

i) O lançamento de uma moeda **justa** pressupõe que a moeda é não tendenciosa.
Os resultados "cara" ou "coroa" são equiprováveis, isto é, cada um tem probabilidade igual a $\frac{1}{2}$.

ii) O lançamento de um dado **honesto** pressupõe que os resultados 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 são equiprováveis, isto é, cada um tem probabilidade $\frac{1}{6}$.

iii) A retirada **aleatória** de uma carta de baralho pressupõe que todas as cartas são equiprováveis, isto é, cada uma tem $\frac{1}{52}$ de probabilidade de ser retirada.

Essa equiprobabilidade nos permite supor que, para um grande número de tentativas de realização de um evento, cada resultado deva sair, aproximadamente, um mesmo número de vezes.

Se uma experiência pode ter n resultados diferentes equiprováveis, cada resultado terá probabilidade de ocorrer igual a $\frac{1}{n}$. Nenhum resultado é mais provável que o outro.

A hipótese de eventos igualmente prováveis é fundamental e muitas vezes não é simples de se constatar. Ela é, em geral, a causa principal de erro em raciocínios de probabilidade.

Exemplos:

i) Quando se tem 8 bolas brancas e 2 pretas numa urna, não se pode dizer que sair uma bola branca numa extração de uma bola tem a mesma chance que sair uma bola preta.

ii) Num sorteio de loteria com 90 000 números, não se pode dizer que com apenas 1 bilhete a chance de ganhar é a mesma que a de perder. Esse raciocínio só seria verdadeiro se comprássemos 45 000 bilhetes e o sorteio fosse justo.

iii) Ao retirar, aleatoriamente, uma carta de um baralho de 52 cartas, a chance de tirar um ás não é a mesma de tirar uma carta de ouros.
Não são eventos equiprováveis. Enquanto existem 4 ases, existem 13 cartas de ouros.

iv) Quando se lançam dois dados honestos cúbicos, a soma dos pontos obtidos poderá ser 2, 3, 4, ..., 12.
É um erro grave supor que esses 11 resultados sejam igualmente prováveis. Como cada dado pode apresentar separadamente os resultados 1, 2, 3, 4, 5, 6, haverá na realidade $6 \cdot 6 = 36$ casos que são igualmente possíveis porque cada resultado de um dos dados pode ser associado a todos os resultados do outro.
Dentre as 36 chances elementares possíveis, uma só dá 2 ((1, 1) para cada dado); duas dão 3 ((1, 2) e (2, 1)); três dão 4 ((1, 3) e (2, 2) e (3, 1)) e assim sucessivamente. Observe que enquanto, por exemplo, só há uma possibilidade de dar 12, haverá seis possibilidades de dar 7.

v) Se o segredo de um cofre for um número de 4 algarismos, a probabilidade desse segredo ser formado de 4 algarismos iguais é menor que de ser formado de 4 algarismos diferentes, se formarmos esse segredo aleatoriamente.

Quando os casos são equiprováveis, a probabilidade de um evento numa certa experiência pode ser calculada como a razão do número *m* de casos favoráveis e o número *n* de casos possíveis.

Como o número de casos favoráveis é um número entre 0 e *n* (0 para o evento impossível e *n* para o evento certo) a probabilidade de um evento E será:

OBSERVAÇÃO
Esta fórmula só se aplica para casos equiprováveis.

$$p(\mathrm{E}) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{m}{n}$$

Como $0 \leq m \leq n$, a probabilidade do evento E será um número $0 \leq p(\mathrm{E}) \leq 1$.
De fato:
$$0 \leq m \leq n \Rightarrow \frac{0}{n} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{n}{n} \Rightarrow 0 \leq p(\mathrm{E}) \leq 1$$

Exemplos:

i) Qual a probabilidade de tirar 3 no lançamento de um dado honesto?
Temos que o número de casos favoráveis é 1 e o total de casos é 6, logo a probabilidade é igual a $\frac{1}{6}$.

ii) Um dado perfeito tem 2 faces numeradas com o número 3. Qual a probabilidade de, lançando-o ao acaso, obter-se 3?
nº de casos favoráveis = 2
nº total de casos = 6
probabilidade = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

iii) Lançam-se ao acaso 2 moedas honestas. Qual a probabilidade de se obter ao menos uma cara?

Note que, para que se tenha ao menos uma face cara, temos: {(*k*, *k*); (*c*, *k*); (*k*, *c*)} onde *k* representa o resultado "cara" e *c* o resultado "coroa".

$$\left.\begin{array}{l} \text{nº casos favoráveis} = 3 \\ \text{nº total de casos} = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{probabilidade} = \frac{3}{4}$$

iv) Lançam-se 2 dados comuns honestos. Qual a probabilidade de se obter a soma 5?

Temos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Soma 5: } \{(1, 4); (2, 3); (3, 2); (4, 1)\} \\ \text{Total: } 6 \cdot 6 = 36 \text{ casos} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{probabilidade} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Note que, embora as somas possíveis sejam 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 , ou seja, 11 casos, o número total de casos é 36. As somas não são equiprováveis. As probabilidades das somas são:

Soma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilidade	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Observe que a soma das probabilidades é igual a 1.

v) Lança-se uma moeda 10 vezes. Qual a probabilidade de obter-se exatamente 3 caras?

$$\left.\begin{array}{l} \text{nº de casos favoráveis: } C_{10}^{3} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120 \\ \text{nº total de casos: } 2^{10} \end{array}\right\} \Rightarrow p = \frac{120}{2^{10}} = \frac{120}{1024} = \frac{15}{128}$$

Exercícios resolvidos:

1) Numa turma de 20 alunos, sendo 12 homens e 8 mulheres, formam-se, ao acaso, grupos de 5 alunos. Qual a probabilidade de se obter um grupo com 3 homens e 2 mulheres?

Solução:

$$\left.\begin{array}{l} \text{nº de casos favoráveis: } C_{12}^{3} \cdot C_{8}^{2} \\ \text{nº total de casos: } C_{20}^{5} \end{array}\right\} \Rightarrow p = \frac{C_{12}^{3} \cdot C_{8}^{2}}{C_{20}^{5}} = \frac{385}{969}$$

$$p \cong 39{,}73\%$$

2) Cinco casais sentam-se aleatoriamente em 10 lugares, lado a lado. Qual a probabilidade de se obter uma fila com homens e mulheres alternados?

Solução:

$$\left.\begin{array}{l} \text{nº de casos favoráveis: } 2 \cdot P_5 \cdot P_5 = 2 \cdot (5!)^2 \\ \\ \text{nº total de casos: } P_{10} = 10! \end{array}\right\} \Rightarrow p = \frac{2(5!)^2}{10!}$$

$$p = \frac{1}{126} \cong 0{,}794\%$$

5.4 – Propriedades das probabilidades

5.4.1 – União de eventos disjuntos

Probabilidade do evento complementar

Se $\overline{A}$ é o evento complementar de A, então $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Com efeito, $A \cup \overline{A} = \Omega$ e $A \cap \overline{A} = \varnothing$, então:

$p(A \cup \overline{A}) = p(\Omega) \Rightarrow p(A) + p(\overline{A}) = 1 \Rightarrow \boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$

NOTA
Corolário é uma consequência imediata de um resultado previamente demonstrado.

Corolários

Probabilidade do evento impossível

$\boxed{p(\varnothing) = 0}$

Basta ver que $\varnothing = \overline{\Omega}$, logo:

$p(\varnothing) = p(\overline{\Omega}) = 1 - p(\Omega) = 1 - 1 = 0$

Probabilidades totais

NOTA
Nesse caso, dizemos que A, B e C são eventos disjuntos dois a dois.

Se $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$ e $B \cap C = \varnothing$, então:
$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$

Basta ver que: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = \varnothing$

Logo $p[(A \cup B) \cup C] = p(A \cup B) + p(C) = p(A) + p(B) + p(C)$.

Esta é a probabilidade de que ocorra pelo menos um dos vários eventos disjuntos.

Exemplos:

i) Uma questão de múltipla escolha tem 5 opções em que apenas uma é correta. Marcando, ao acaso, uma opção, qual é a probabilidade de:

a) acertar a questão?

$$p(A) = \frac{1}{5} = 20\%$$

b) errar a questão?

$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 80\%$

ii) Lançam-se dois dados perfeitos. Qual a probabilidade de não obter um resultado duplo, ou seja, um par de números iguais?

A probabilidade de obter um par de resultados iguais é $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, pois há 6 resultados duplos (1, 1), (2, 2), (3, 3), ..., (6, 6), logo, não obter um duplo será $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

iii) Qual a probabilidade de se obter uma soma menor que 5 no lançamento de dois dados?

Probabilidade de dar soma $2 = \frac{1}{36}$

Probabilidade de dar soma $3 = \frac{2}{36}$

Probabilidade de dar soma $4 = \frac{3}{36}$

Probabilidade total $= \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

iv) Tem-se 6 homens e 4 mulheres. Formam-se, ao acaso, grupos de 5 pessoas. Qual a probabilidade de se obter um grupo com pelo menos duas mulheres?

Grupos com 2 mulheres: $C_4^2 \cdot C_6^3 \Rightarrow p_2 = \frac{C_4^2 \cdot C_6^3}{C_{10}^5} = \frac{120}{252}$

Grupos com 3 mulheres: $C_4^3 \cdot C_6^2 \Rightarrow p_3 = \frac{C_4^3 \cdot C_6^2}{C_{10}^5} = \frac{60}{252}$

Grupos com 4 mulheres: $C_4^4 \cdot C_6^1 \Rightarrow p_4 = \frac{C_4^4 \cdot C_6^1}{C_{10}^5} = \frac{6}{252}$

Probabilidade total: $p_2 + p_3 + p_4 = \frac{120 + 60 + 6}{252} = \frac{186}{252} = \frac{31}{42}$

Poderíamos também retirar os casos com uma ou nenhuma mulher:

Grupos com 0 mulheres: $C_4^0 \cdot C_6^5 \Rightarrow p_0 = \frac{C_4^0 \cdot C_6^5}{C_{10}^5} = \frac{6}{252}$

Grupos com 1 mulher: $C_4^1 \cdot C_6^4 \Rightarrow p_1 = \frac{C_4^1 \cdot C_6^4}{C_{10}^5} = \frac{60}{252}$

$p = 1 - \left(\frac{6}{252} + \frac{60}{252}\right) = \frac{186}{252} = \frac{31}{42}$

5.4.2 – Probabilidade de ocorrência simultânea de eventos independentes

DEFINIÇÃO
Eventos independentes.

Dois eventos são ditos **independentes** quando a ocorrência de um deles não afeta a probabilidade de ocorrência do outro.

A probabilidade de um evento resultante da realização sucessiva de dois eventos independentes é o produto das probabilidades desses dois eventos isoladamente.

Exemplos:

i) Uma urna contém 4 bolas brancas e 2 pretas. Outra urna contém 5 bolas brancas e 4 pretas. Retira-se aleatoriamente uma bola de cada urna. Qual a probabilidade de se obter 2 bolas brancas?
Sejam B_1 o evento "retirar uma bola branca da urna 1" e B_2 o evento "retirar uma bola branca da urna 2".
Como há 6 bolas na urna 1 e 9 bolas na urna 2, pelo princípio multiplicativo, há $6 \cdot 9 = 54$ possibilidades de retirada de um par ordenado de bolas.
Como há 4 bolas brancas na urna 1 e 5 bolas brancas na urna 2, apenas $4 \cdot 5 = 20$ dessas possibilidades nos darão 2 bolas brancas.
Portanto, a probabilidade de se retirar 2 bolas brancas será:
$$p(B_1 \cap B_2) = \frac{4 \cdot 5}{6 \cdot 9} = \frac{20}{54} = \frac{10}{27} \cong 37{,}04\%$$
Observe que:
$$p(B_1 \cap B_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{9} = p(B_1) \cdot p(B_2)$$

ii) Retiram-se de um baralho de 52 cartas, 2 cartas ao acaso e lançam-se dois dados justos. Qual a probabilidade de se obter 2 figuras e um duplo?
Como são 12 figuras num baralho, há C_{12}^2 pares de cartas com 2 figuras.
A probabilidade de obtê-las é, então, $\frac{C_{12}^2}{C_{52}^2}$. Por outro lado, dois dados apresentam 6 duplos, logo a probabilidade de sair um duplo é $\frac{6}{36}$.
Como os eventos são independentes,
$$p = \frac{C_{12}^2}{C_{52}^2} \cdot \frac{6}{36} = \frac{12 \cdot 11}{52 \cdot 51} \cdot \frac{6}{36} = \frac{11}{1326} \cong 0{,}83\%$$

iii) Lançam-se dois dados perfeitos. Qual a probabilidade de:

a) obter-se um duplo 1?
Em um dado, como são 6 resultados possíveis, a probabilidade de se obter um 1 é $\frac{1}{6}$. Como cada dado é independente do outro, a probabilidade será $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

b) obter 1 em somente um deles?

A probabilidade de obter 1 em um deles é $\frac{1}{6}$.

A probabilidade de não obter 1 no outro é $\frac{5}{6}$.

Analogamente com o outro dado, temos $2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

c) obter pelo menos um 1?

É a soma dos casos anteriores $\frac{1}{36} + \frac{10}{36} = \frac{11}{36}$.

d) obter ao menos uma vez 1 ou 2?

Basta obter a probabilidade do evento contrário, isto é, subtrair da unidade a probabilidade de não ter 1 nem 2.

A probabilidade de não ocorrer 1 nem 2, isto é, apenas 3, 4, 5 ou 6 é $\frac{4}{6}$ em cada dado.

Logo, a probabilidade solicitada será $1 - \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

e) obter pelo menos um duplo 6 em 24 lances?

A probabilidade de não obter o duplo 6 é $\frac{35}{36}$, logo para obter ao menos um duplo 6 será $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 49{,}14\%$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Ao se lançar um dado honesto, qual é a probabilidade de se obter, na face voltada para cima, um número maior ou igual a 3?

2 Uma moeda justa é lançada três vezes, sucessivamente. Qual é a probabilidade de termos:

a) exatamente uma coroa?

b) no máximo duas coroas?

3 O professor Felipe quer sortear uma caixa de bombons entre os alunos de uma classe. Nessa classe, há 40 alunos e o número de moças excede o de rapazes em 12. Qual é a probabilidade de que a caixa de bombons seja sorteada para:

a) um rapaz?

b) uma moça?

4 O grêmio da FGV tem entre seus inscritos 20 rapazes e 25 moças. Deseja-se formar, por meio de sorteio, uma comissão de 5 alunos para compor a direção provisória. Qual é a probabilidade de essa diretoria vir a ser formada, exclusivamente, por moças?

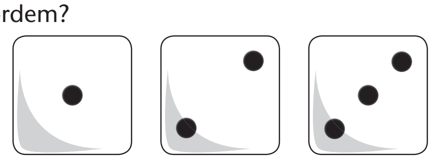
5 De um baralho de 52 cartas, constituído de 13 cartas de cada naipe, uma é escolhida ao acaso. Qual é a probabilidade de ser:

a) o 3 de espadas?

b) o número 3?

c) um número diferente de 3?

6 Joga-se um dado três vezes consecutivas. Qual é a probabilidade de se obter os resultados abaixo, em qualquer ordem?



7 Oito pessoas, sendo 5 homens e 3 mulheres, serão organizadas em uma fila. Qual é a probabilidade de as pessoas do mesmo sexo ficarem juntas?

8 Para acessar o sistema de computador da empresa, cada funcionário digita sua senha pessoal, formada por 4 letras distintas do nosso alfabeto (que possui 26 letras), numa ordem preestabelecida. Certa vez, um funcionário esqueceu a respectiva senha, lembrando apenas que ela começava com X e terminava com F. Qual a probabilidade de ele acertar a senha ao acaso, numa única tentativa?

9 (Unesp-SP) Numa cidade com 30 000 domicílios, 10 000 domicílios recebem regularmente o jornal da loja de eletrodomésticos X, 8 000 recebem regularmente o jornal do supermercado Y e metade do número de domicílios não recebe nenhum dos dois jornais.
Determine:

a) o número de domicílios que recebem os dois jornais;

b) a probabilidade de um domicílio da cidade, escolhido ao acaso, receber o jornal da loja de eletrodomésticos X e não receber o jornal do supermercado Y.

10 (Unicamp-SP) Um dado é jogado três vezes, uma após a outra. Pergunta-se:

a) quantos são os resultados possíveis em que os três números obtidos são diferentes?

b) qual a probabilidade de a soma dos resultados ser maior ou igual a 16?

11 (UFRN) Um jogo consiste em um prisma triangular reto com uma lâmpada em cada vértice e um quadro de interruptores para acender essas lâmpadas. Sabendo que quaisquer três lâmpadas podem ser acesas por um único interruptor e cada interruptor acende precisamente três lâmpadas, calcule:

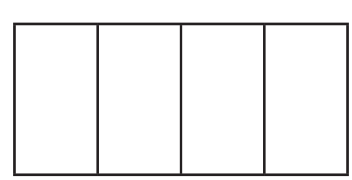
a) quantos interruptores existem nesse quadro;

b) a probabilidade de, ao se escolher um interruptor aleatoriamente, este acender três lâmpadas numa mesma face.

12 (UFG-GO) A figura a seguir representa uma bandeira com 4 listras. Dispondo-se de 4 cores distintas, deseja-se pintar todas as listras, de forma que listras vizinhas tenham cores diferentes.

a) De quantas maneiras distintas a bandeira pode ser pintada? Justifique.

b) Escolhendo-se aleatoriamente uma das formas possíveis de pintar a bandeira, qual é a probabilidade de que a forma escolhida seja uma que contenha as 4 cores?



13 (UFF-RJ) Em um jogo de bingo são sorteadas, sem reposição, bolas numeradas de 1 até 75 e um participante concorre com a cartela reproduzida abaixo.
Qual é a probabilidade de que os 3 primeiros números sorteados estejam nesta cartela?

B	I	N	G	O
5	18	33	48	64
12	21	31	51	68
14	30		60	71
13	16	44	46	61
11	27	41	49	73

14 (Vunesp-SP) Escolhem-se aleatoriamente três dos seis vértices de um hexágono regular. Qual a probabilidade de que os vértices escolhidos formem um triângulo equilátero?

15 (FGV-SP) Uma urna contém 15 bolinhas numeradas de 1 a 15.

a) Se uma bolinha for sorteada, qual a probabilidade de que o número observado seja divisível por 3?

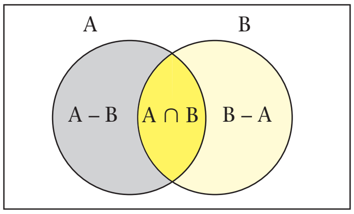
b) Se duas bolinhas forem sorteadas sucessivamente, sem reposição (a ordem dos números não é levada em consideração), qual a probabilidade de que os números observados sejam consecutivos?

5.4.3 – União de eventos

Se A e B são dois eventos quaisquer, temos:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

NOTA
Esta fórmula é mais geral do que a da seção 5.4.1, pois inclui a possibilidade de $A \cap B \neq \varnothing$.



De fato, como A – B, A ∩ B e B – A são mutuamente exclusivos, temos:

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$$
$$p(A \cup B) = p(A - B) + p(A \cap B) + p(B - A)$$

Por outro lado, $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ e $(B - A) \cup (A \cap B) = B$, logo:

$$p(A - B) + p(A \cap B) = p(A) \text{ e } p(B - A) + p(A \cap B) = p(B)$$

Substituindo $p(A - B)$ e $p(B - A)$, vem:

$$p(A \cup B) = p(A) - p(A \cap B) + p(B) - p(A \cap B) + p(A \cap B)$$

Então: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Exemplos:

i) Lançam-se dois dados perfeitos. Qual a probabilidade de obter-se ao menos uma face 1 ou uma face 2?

$p(A)$: probabilidade de se obter ao menos uma face $1: \frac{11}{36}$ (ver exemplo da seção anterior)

$p(B)$: probabilidade de se obter ao menos uma face $2: \frac{11}{36}$

$p(A \cap B)$: o evento $A \cap B$ significa obter 1 e 2 em ambos os dados, isto é, (1, 2) ou (2, 1), logo essa probabilidade é $\frac{2}{36}$.

Assim:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{11}{36} + \frac{11}{36} - \frac{2}{36} = \frac{5}{9}$$

NOTA
Esta maneira é uma outra solução para o item *d* do exemplo da seção anterior.

ii) Numa pesquisa de opinião com 200 estudantes (sendo 80 rapazes e 120 moças) 50 rapazes e 100 moças foram a favor da colocação da matéria Filosofia no exame vestibular ("SIM") e os restantes foram contra ("NÃO"). Retira-se, ao acaso, um dentre os 200 votos. Qual a probabilidade do voto ser:

a) SIM de um rapaz?

b) SIM de uma moça?

c) NÃO de um rapaz?

d) NÃO de uma moça?

e) de uma pessoa que votou SIM ou de um rapaz?

f) de uma pessoa que votou NÃO ou de uma moça?

Fazendo uma tabela de respostas:

	SIM (S)	NÃO (N)	Total
Rapaz (R)	50	30	80
Moça (M)	100	20	120
Total	150	50	200

$p(\mathrm{R}) = \dfrac{80}{200} = 40\%$

$p(\mathrm{M}) = \dfrac{120}{200} = 60\%$

$p(\mathrm{S}) = \dfrac{150}{200} = 75\%$

$p(\mathrm{N}) = \dfrac{50}{200} = 25\%$

a) $p(\mathrm{R} \cap \mathrm{S}) = \dfrac{50}{200} = 25\%$

b) $p(\mathrm{M} \cap \mathrm{S}) = \dfrac{100}{200} = 50\%$

c) $p(\mathrm{R} \cap \mathrm{N}) = \dfrac{30}{200} = 15\%$

d) $p(\mathrm{M} \cap \mathrm{N}) = \dfrac{20}{200} = 10\%$

Note que todas as probabilidades acima têm soma 1, pois são disjuntas duas a duas e são os únicos eventos possíveis.

e) $p(\mathrm{R} \cup \mathrm{S}) = p(\mathrm{R}) + p(\mathrm{S}) - p(\mathrm{R} \cap \mathrm{S})$

$$p(\mathrm{R} \cup \mathrm{S}) = \frac{80}{200} + \frac{150}{200} - \frac{50}{200} = \frac{180}{200} = 90\%$$

f) $p(\mathrm{M} \cup \mathrm{N}) = p(\mathrm{M}) + p(\mathrm{N}) - p(\mathrm{M} \cap \mathrm{N})$

$$p(\mathrm{M} \cup \mathrm{N}) = \frac{120}{200} + \frac{50}{200} - \frac{20}{200} = \frac{150}{200} = 75\%$$

iii) Dois atiradores têm probabilidades de acertar um alvo de 70% e 60%. Atirando independentemente um do outro no alvo, qual a probabilidade de:

a) ambos acertarem?

b) nenhum acertar?

c) ao menos um acertar?

d) somente um acertar?

Solução:

a) Como são independentes os eventos de acertar no alvo, temos o produto:
$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2) = \frac{70}{100} \cdot \frac{60}{100} = \frac{42}{100} = 42\%$

b) $p(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = p(\overline{A}_1) \cdot p(\overline{A}_2) = \frac{30}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{12}{100} = 12\%$

c) $p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2)$

$p(A_1 \cup A_2) = \frac{70}{100} + \frac{60}{100} - \frac{42}{100} = \frac{88}{100} = 88\%$

d) $p(A_1 \cup A_2) - p(A_1 \cap A_2) = \frac{88}{100} - \frac{42}{100} = \frac{46}{100} = 46\%$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Um dado justo é lançado e observa-se a face voltada para cima. Determine a probabilidade de:

a) não obter 5 pontos;

b) obter 5 pontos ou 3 pontos.

2 Uma urna contém cinco bolas brancas, três bolas vermelhas e quatro bolas pretas. Retira-se, ao acaso, uma bola da urna. Qual é a probabilidade de sair uma bola branca ou uma bola vermelha?

3 Uma caixa contém exatamente 20 etiquetas, numeradas de 1 a 20. Retira-se, ao acaso, uma etiqueta da caixa. Qual é a probabilidade de se obter uma etiqueta com um número múltiplo de 2 ou de 5?

4 Lançando-se, simultaneamente, um dado justo e uma moeda honesta, qual é a probabilidade de se obter a face cara da moeda ou a face 6 do dado?

5 Num dado viciado, a probabilidade de obter 3 ou mais num lançamento é 95% e a probabilidade de obter 3 ou menos é 18%. Qual a probabilidade de obter 3?

5.5 – Probabilidade condicional

DEFINIÇÃO
Probabilidade condicional.

É a probabilidade resultante da realização sucessiva de dois eventos, não necessariamente independentes, levando em conta que o primeiro se realizou.

Sejam dois eventos A e B, dos quais sabemos que A já se realizou. O fato do evento A já ter se produzido pode ou não alterar a probabilidade de B. Usaremos a notação $p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})$ para a probabilidade de B dado que A ocorreu, ou, simplesmente, **probabilidade de B dado A**.

Exemplo:

Lança-se um dado justo de 6 faces.

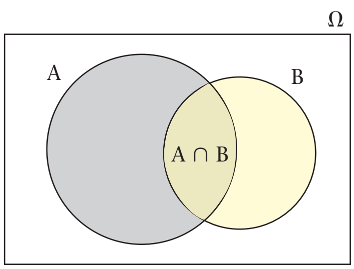
i) Qual a probabilidade de obter um número primo?
O universo (espaço amostral) é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Obter um número primo é o evento $\mathrm{P} = \{2, 3, 5\}$.
Como o dado é justo, $p(\mathrm{P}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$.

ii) Qual a probabilidade de obter um número ímpar?
Agora o evento é $\mathrm{I} = \{1, 3, 5\}$.
Assim:
$p(\mathrm{I}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$

iii) Sabendo-se que o resultado obtido foi ímpar, qual a probabilidade de ele ser primo?
O novo universo é $\mathrm{I} = \{1, 3, 5\}$. Dentro desse universo, os primos são $\mathrm{P} \cap \mathrm{I} = \{3, 5\}$. Assim: $p(\mathrm{P} \cap \mathrm{I}) = \frac{2}{3} \cong 66{,}67\%$.

Note que $p(\mathrm{P} \mid \mathrm{I}) = \dfrac{p(\mathrm{P} \cap \mathrm{I})}{p(\mathrm{I})} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$.

Para calcular a **probabilidade condicional** $p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})$, basta considerar o evento A como um **universo reduzido** para o evento B.



Assim: $p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = \dfrac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}$, $p(\mathrm{A}) \neq 0$

Exercícios resolvidos:

1) Numa escola há 40 rapazes e 60 moças. Sabe-se que 30 rapazes e 15 moças estudam inglês e os demais estudam francês. Escolhe-se um(a) aluno(a) ao acaso.

i) Qual a probabilidade desse aluno ser um rapaz que estuda francês?

ii) Sabendo que esse aluno estuda francês, qual a probabilidade de ser um rapaz?

iii) Sabendo que esse aluno é um rapaz, qual a probabilidade de ele estudar francês?

iv) Qual a probabilidade de o estudante ser uma moça que estuda inglês?

v) Qual a probabilidade de uma moça estudar inglês?

vi) Qual a probabilidade de um estudante de inglês ser uma moça?

Solução:

Podemos resumir as informações do enunciado na seguinte tabela:

	Rapaz (R)	Moça (M)	Total
Inglês (I)	30	15	45
Francês (F)	10	45	55
Total	40	60	100

i) $p(R \cap F) = \frac{10}{100} = 10\%$

ii) $p(R \mid F) = \frac{p(R \cap F)}{p(F)} = \frac{10\%}{55\%} \cong 18{,}18\%$

Isso é o mesmo que considerar F (os 55 estudantes de francês) como o espaço amostral reduzido e considerar a probabilidade de escolher um dos 10 rapazes ali disponíveis. Assim, 10 dos 55 estudantes de francês são rapazes.

iii) $p(F \mid R) = \frac{p(F \cap R)}{p(R)} = \frac{10\%}{40\%} = \frac{1}{4} = 25\%$

Ou seja, 10 dos 40 rapazes estudam francês (o que não é o mesmo que "10 dos 55 estudantes de francês são rapazes").

iv) $p(\mathrm{M} \cap \mathrm{I}) = \dfrac{15}{100} = 15\%$

Ou seja, 15% dos estudantes são moças que estudam inglês.

v) Agora, a questão se restringe ao universo das moças.

Sabe-se que o estudante é uma moça, pergunta-se a probabilidade dela estudar inglês. Assim:

$$p(\mathrm{I} \mid \mathrm{M}) = \frac{p(\mathrm{I} \cap \mathrm{M})}{p(\mathrm{M})} = \frac{15\%}{60\%} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Ou seja, 25% das moças estudam inglês.

vi) O universo reduzido é o dos estudantes de inglês. Então:

$$p(\mathrm{M} \mid \mathrm{I}) = \frac{p(\mathrm{I} \cap \mathrm{M})}{p(\mathrm{I})} = \frac{15\%}{45\%} = \frac{1}{3} \cong 33,3\%$$

Ou seja, $\frac{1}{3}$ dos estudantes de inglês são moças.

NOTA
Os itens *d*, *e* e *f* tratam do mesmo grupo de pessoas (mulheres que estudam inglês). As probabilidades são diferentes pois os **universos** em questão são diferentes.

2) Retiram-se, ao acaso, duas cartas de um baralho de 32 cartas (de 7 a ás). Qual a probabilidade de serem dois reis, sabendo que:

i) são figuras (valetes, damas ou reis)?

ii) são cartas vermelhas?

Solução:

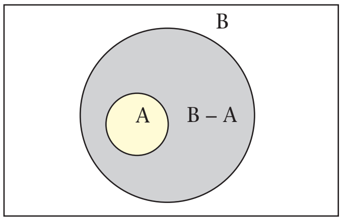
i) $$p(\mathrm{R} \mid \mathrm{F}) = \frac{p(\mathrm{R} \cap \mathrm{F})}{p(\mathrm{F})} = \frac{p(\mathrm{R})}{p(\mathrm{F})} = \frac{C_4^2}{C_{12}^2} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$$

ii) $$p(\mathrm{R} \mid \mathrm{V}) = \frac{p(\mathrm{R} \cap \mathrm{V})}{p(\mathrm{V})} = \frac{C_2^2}{C_{16}^2} = \frac{1}{120}$$

Casos particulares:

1)

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Rightarrow p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = 1 = 100\%$$



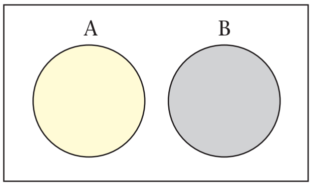
De fato, neste caso tem-se:

$$p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{B} \cap \mathrm{A})}{p(\mathrm{A})} = \frac{p(\mathrm{A})}{p(\mathrm{A})} = 1$$

Em outras palavras, $A \subset B$ significa "se A se realizou, então, certamente, B também se realizou".

2)

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow p(B \mid A) = 0$$



De fato:

$$p(B \mid A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{p(\varnothing)}{p(A)} = 0$$

Em outras palavras, se A e B são mutuamente excludentes, a ocorrência de A impede (exclui) a ocorrência de B.

Exemplos:

i) Com segmentos de comprimentos 2, 3 e 4 constroem-se todos os triângulos não congruentes possíveis (tendo lados iguais ou não). Sorteia-se um desses triângulos ao acaso. Qual a probabilidade do triângulo:

a) ser escaleno?

b) ser isósceles?

c) ser equilátero?

d) ser isósceles dado que é equilátero?

e) ser isósceles dado que é escaleno?

f) ser equilátero dado que é isósceles?

O número total de ternos não ordenados é $(CC)_3^3 = C_5^3 = C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$, a saber:

{(2, 2, 2); (3, 3, 3); (4, 4, 4); (2, 2, 3); (3, 3, 2); (3, 3, 4); (4, 4, 2); (4, 4, 3); (2, 3, 4)}

Note que o terno (2, 2, 4) não define um triângulo, pois 2 + 2 = 4 (os segmentos ficariam alinhados), então o espaço amostral tem apenas 9 triângulos.

a) Há apenas 1 triângulo escaleno dentre 9 supostamente equiprováveis. Assim:

$$p(Es) = \frac{1}{9} \cong 11{,}11\%$$

b) Ser isósceles equivale a não ser escaleno.

$$p(I) = p(\overline{Es}) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \cong 88{,}89\%$$

c) Há 3 equiláteros: {(2, 2, 2); (3, 3, 3); (4, 4, 4)}

$$p(\text{Eq}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \cong 33,33\%$$

Note que $p(\text{Eq}) \leq p(\text{I})$, pois $\text{Eq} \subset \text{I}$.

d) Como $\text{Eq} \subset \text{I}$:

$p(\text{I} \mid \text{Eq}) = 1 = 100\%$

e) Como $\text{I} \cap \text{Es} = \varnothing$:

$p(\text{I} \mid \text{Es}) = 0$

f) Temos:

$$p(\text{Eq} \mid \text{I}) = \frac{p(\text{Eq} \cap \text{I})}{p(\text{I})} = \frac{p(\text{Eq})}{p(\text{I})} = \frac{\frac{3}{9}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{8} = 37,5\%$$

ii) Numa pesquisa de opinião, foram consultadas 1000 pessoas definidas em 3 grupos, A, B e C. As respostas com relação ao desempenho de um presidente foram: SATISFEITO, DESCONTENTE e INDIFERENTE. Os resultados apresentados pela amostra de 1000 pessoas foram colocados no quadro de respostas:

	S	D	I	Total
A	150	100	50	300
B	250	100	50	400
C	100	100	100	300
Total	500	300	200	1000

Seja x uma pessoa escolhida, ao acaso, dentre as 1000 pessoas da amostra. Calcule a probabilidade de:

a) $x \in \text{A}$;

Como A tem 300 elementos, a probabilidade de x pertencer a A será:

$$\frac{300}{1000} = \frac{3}{10} \Rightarrow p(\text{A}) = 30\%$$

b) x estar satisfeito;

Como o número de respostas S é 500 em 1000 de amostra, então:

$$p(\text{S}) = \frac{500}{1000} = 50\%$$

c) $x \in \text{B}$ e não estar satisfeito;

$$p(\text{B} \cap \bar{\text{S}}) = \frac{100+50}{1000} = \frac{150}{1000} = 15\%$$

d) $x \in$ B sabendo que está descontente;

$$p(\mathrm{B} \mid \mathrm{D}) = \frac{p(\mathrm{B} \cap \mathrm{D})}{p(\mathrm{D})} = \frac{\frac{100}{1000}}{\frac{300}{1000}} = \frac{1}{3}$$

e) x estar descontente, sabendo que não está satisfeito e que não pertence ao grupo A;

$$p(\mathrm{D} \mid \bar{\mathrm{S}} \cap \bar{\mathrm{A}}) = \frac{p\left[\mathrm{D} \cap (\bar{\mathrm{S}} \cap \bar{\mathrm{A}})\right]}{p(\bar{\mathrm{S}} \cap \bar{\mathrm{A}})} = \frac{\frac{200}{1000}}{\frac{350}{1000}} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

f) $x \in$ A ou não estar indiferente.

$$p(\mathrm{A} \cup \bar{\mathrm{I}}) = p(\mathrm{A}) + p(\bar{\mathrm{I}}) - p(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{I}}) =$$

$$= \frac{300}{1000} + 1 - p(\mathrm{I}) - \frac{250}{1000} =$$

$$= \frac{300}{1000} + 1 - \frac{200}{1000} - \frac{250}{1000}$$

$$p(\mathrm{A} \cup \bar{\mathrm{I}}) = \frac{850}{1000} = \frac{17}{20} = 85\%$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Considere dois eventos Q e R, tais que $p(Q) = 0{,}70$, $p(R) = 0{,}40$ e $p(Q \cap R) = 0{,}10$. Calcule:

a) $p(Q \mid R)$

b) $p(R \mid Q)$

2 Uma urna contém três bolas azuis e duas bolas vermelhas. Retirando sucessivamente duas bolas, sem reposição, qual é a probabilidade de saírem as duas vermelhas?

3 Em dois lançamentos sucessivos de uma moeda honesta, sabe-se que pelo menos numa das vezes deu cara. Qual é a probabilidade de ter dado cara em ambas as vezes?

4 Em um plebiscito, a respeito da forma de governo entre presidencialismo e parlamentarismo em uma empresa com 80 empregados, colheram-se as seguintes informações:

	Homens	Mulheres	Total
Presidencialismo	27	14	41
Parlamentarismo	23	16	39
Total	50	30	80

Escolhe-se, ao acaso, um empregado. Sabendo que a pessoa escolhida é homem, qual a probabilidade de que tenha decidido pelo presidencialismo?

5 (FGV-SP) Uma companhia de seguros coletou uma amostra de 2000 motoristas de uma cidade a fim de determinar a relação entre o número de acidentes (y) em certo período e a idade em anos (x) dos motoristas. Os resultados estão na tabela abaixo:

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$x < 20$	200	50	20	10
$20 \leq x < 30$	390	120	50	10
$30 \leq x < 40$	385	80	10	5
$x \geq 40$	540	105	20	5

Adotando a frequência relativa observada como probabilidade de cada evento, obtenha:

a) a probabilidade de um motorista escolhido ao acaso ter exatamente um acidente no período considerado;

b) a probabilidade de um motorista ter exatamente 2 acidentes no período considerado, dado que ele tem menos de 20 anos.

6 (FGV-SP) Num certo país, 10% das declarações de imposto de renda suspeitas são submetidas a uma análise detalhada; entre estas verificou-se que 20% são fraudulentas.
Entre as não suspeitas, 2% são fraudulentas.

a) Se uma declaração é escolhida ao acaso, qual a probabilidade de ela ser suspeita e fraudulenta?

b) Se uma declaração é fraudulenta, qual a probabilidade de ela ter sido suspeita?

5.6 – Lei do produto e árvore de probabilidades

A fórmula da probabilidade condicional nos leva a uma consequência importante:

$$p(B \mid A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} \Rightarrow \boxed{p(A \cap B) = p(B \cap A) = p(B \mid A) \cdot p(A)}$$

Analogamente:

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A \mid B) \cdot p(B)}$$

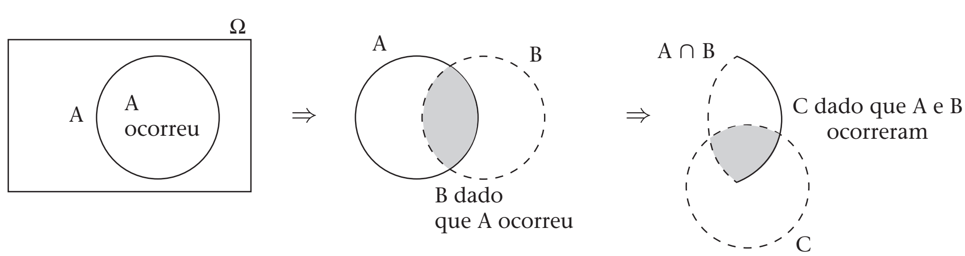
Para três eventos sucessivos, A, B e C teríamos:

$$p(A \cap B \cap C) = p(C \cap (A \cap B)) = p(C \mid A \cap B) \cdot p(A \cap B) =$$
$$= p(C \mid A \cap B) \cdot p(B \mid A) \cdot p(A)$$

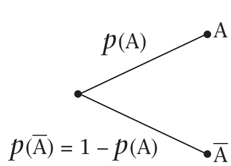
$$\boxed{p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B \mid A) \cdot p(C \mid A \cap B)}$$

e assim sucessivamente.

Observe que o universo Ω restringe-se a A, em seguida A ∩ B, e desejamos a probabilidade de C dado que ocorreram A e B.



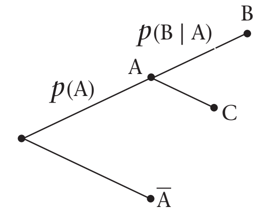
Uma maneira gráfica de representar a lei do produto e calcular as probabilidades é esboçar a **árvore de probabilidades**.



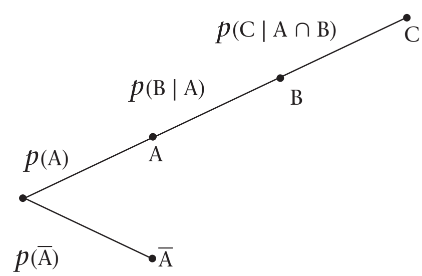
O processo consiste em esboçar um diagrama, registrando nele as probabilidades dos eventos. Assim, o diagrama mostra, no ramo que chega a A, sua probabilidade $p(A)$ e no ramo que chega a $\overline{A}$, o evento complementar de A, registramos $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$. O diagrama pode ser prolongado, a partir de A, com novos ramos levando a novos eventos. Registramos no ramo $A \xrightarrow{p(B \mid A)} B$ a probabilidade $p(B \mid A)$.

NOTA
Em outras palavras, a probabilidade de ocorrência sucessiva de dois eventos é o produto da probabilidade do primeiro pela probabilidade do segundo sabendo que o primeiro ocorreu.

NOTA
A probabilidade de ocorrência de A, B e C é o produto da probabilidade do primeiro (A), pela probabilidade do segundo (B) dado que o primeiro (A) ocorreu, pela probabilidade do terceiro (C) dado que já ocorreram A e B (A ∩ B).



Se, a partir de B, tivermos outra derivação •———• devemos nela registrar $p(C \mid A \cap B)$, uma vez que em B temos $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B \mid A)$



Assim, em C teremos $p(A \cap B \cap C)$, pois $p(A \cap B \cap C) = p(A \cap B) \cdot p(C \mid A \cap B) \Rightarrow$ $\Rightarrow p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B \mid A) \cdot p(C \mid A \cap B)$ e assim sucessivamente.

A probabilidade no ponto C é o produto das probabilidades registradas nos ramos que chegam em C.

Se um evento A é a reunião dos eventos A_1, A_2, A_3, ..., disjuntos dois a dois, a probabilidade de B será, levando em conta que $B \cap A_1$, $B \cap A_2$, $B \cap A_3$, ..., são disjuntos, $p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + p(B \cap A_3) + \ldots$.

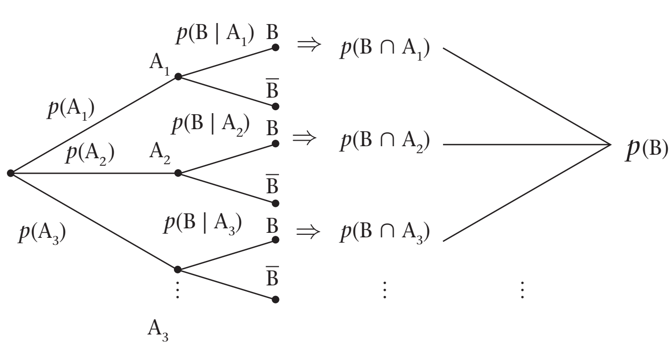
A

A_1	A_2	A_3	...
$B \cap A_1$	$B \cap A_2$	$B \cap A_3$	...

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B \mid A_1) + p(A_2) \cdot p(B \mid A_2) + p(A_3) \cdot p(B \mid A_3) + \ldots$$

Na árvore de probabilidades teremos:

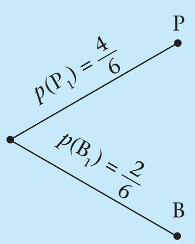
NOTA
Se um evento dado pode ser obtido por meio de várias ramificações, a probabilidade do mesmo será a soma de todas as probabilidades que chegam até ele, a partir do ramo inicial.



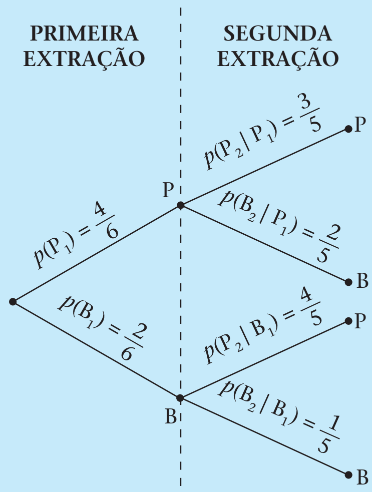
Exemplo:

Um urna contém 4 bolas pretas e 2 brancas. Retira-se sucessivamente, ao acaso, 2 bolas da urna, sem reposição.

Para a primeira extração, há 2 possíveis ramos (bola preta (P) ou bola branca (B)) com as respectivas probabilidades:



Para a segunda extração, as probabilidades mudam dependendo da bola que já foi extraída.



Caso a primeira bola tenha sido preta, a probabilidade da segunda bola ser preta é $\frac{3}{5}$ e a probabilidade da segunda bola ser branca é $\frac{2}{5}$.

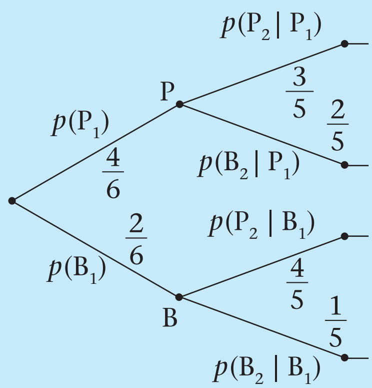
Caso a primeira bola tenha sido branca, a probabilidade da segunda bola ser preta será $\frac{4}{5}$ e a probabilidade da segunda bola ser branca será $\frac{1}{5}$.

Observe que as probabilidades escritas nas derivações são probabilidades sabendo quais foram os resultados da primeira extração, logo, são as probabilidades condicionais da segunda extração levando em conta o resultado da primeira extração.

NOTA
Num diagrama em árvore, o ramo que chega até um evento dado representa a intersecção dos eventos parciais desde o primeiro até o evento dado.

NOTA
Em outras palavras, temos probabilidade $\frac{12}{30}$ de obter 2 bolas pretas, mas apenas $\frac{2}{30}$ de obter 2 brancas.

Como sabemos que $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B \mid A)$ ou $p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A \mid B)$, temos:



$P \Rightarrow p(P_2 \cap P_1) = p(P_1) \cdot p(P_2 \mid P_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{30}$

$B \Rightarrow p(B_2 \cap P_1) = p(P_1) \cdot p(B_2 \mid P_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{30}$

$P \Rightarrow p(P_2 \cap B_1) = p(B_1) \cdot p(P_2 \mid B_1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{30}$

$B \Rightarrow p(B_2 \cap B_1) = p(B_1) \cdot p(B_2 \mid B_1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{30}$

Observe que:

- a probabilidade da segunda bola ser preta é: $\frac{12}{30} + \frac{8}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$;
- a probabilidade da segunda bola ser branca é: $\frac{8}{30} + \frac{2}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$;
- a soma de todas as probabilidades finais é:

$$\frac{12}{30} + \frac{8}{30} + \frac{8}{30} + \frac{2}{30} = \frac{30}{30} = 1$$

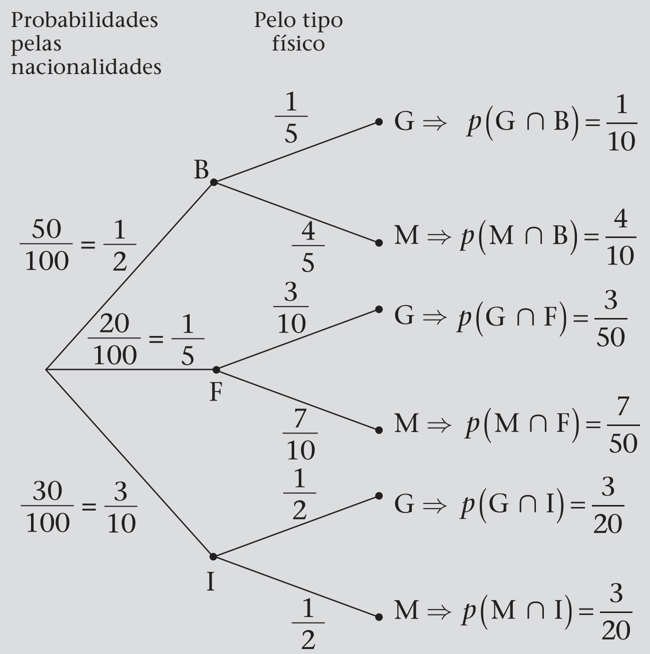
Exercícios resolvidos:

1) Num grupo de turismo, 50 são brasileiros, 30 são ingleses e 20 são franceses. Dos brasileiros, 20% são gordos e o restante, magros. Dos ingleses, 50% são gordos e o restante magros e dos franceses, 30% são gordos e o restante magros. Escolhido um elemento desse grupo:

   i) qual a probabilidade que seja magro?

   ii) sabendo que ele é gordo, qual a probabilidade que seja francês?

Solução:



i) $p(M) = p(M \cap B) + p(M \cap F) + p(M \cap I) = \frac{4}{10} + \frac{7}{50} + \frac{3}{20} = \frac{69}{100} = 69\%$

ii) $p(F \mid G) = \frac{p(F \cap G)}{p(G)} = \frac{\frac{3}{50}}{1 - p(M)} = \frac{\frac{3}{50}}{1 - \frac{69}{100}} = \frac{\frac{3}{50}}{\frac{31}{100}} = \frac{6}{31}$

Outra solução:
Com o quadro abaixo, teríamos:

Nac. / Tipo.	B	F	I	Total
G	20% 10	30% 6	50% 15	31
M	40	14	15	69
Total	50	20	30	100

a) $p(M) = \frac{69}{100} = 69\%$

b) $p(F \mid G) = \frac{6}{31}$

2) Numa urna existem 4 bolas brancas e algumas pretas. Em outra urna existem 2 bolas brancas e 3 pretas. Extrai-se uma bola da primeira urna e coloca-se na segunda e, em seguida, extrai-se uma bola da segunda urna. A probabilidade desta bola ser branca é 40%. Quantas bolas pretas há na primeira urna?

Solução:

Suponhamos que, na primeira urna, existam x bolas pretas.

A probabilidade de extrair-se uma bola branca da primeira urna será $\frac{4}{4+x}$.

Suponhamos que a bola extraída seja branca. Quando a colocamos na segunda urna, a probabilidade de extrair-se da mesma uma bola branca será $\frac{2+1}{5+1}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Então, a probabilidade de termos (branca, branca) será: $\frac{4}{4+x}\cdot\frac{1}{2}$

Suponhamos agora que a bola extraída da primeira urna seja preta. Sua probabilidade será $\frac{x}{4+x}$. Colocada na segunda urna, a probabilidade de extrair-se uma bola branca será $\frac{2}{5+1}=\frac{1}{3}$. Então, a probabilidade total nos dá:

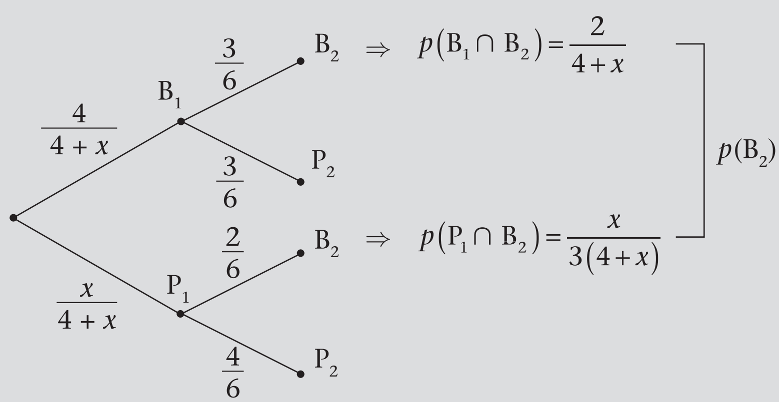
$$\frac{4}{4+x}\cdot\frac{1}{2}+\frac{x}{4+x}\cdot\frac{1}{3}=\frac{40}{100}$$

$$\frac{2}{4+x}+\frac{x}{3(4+x)}=\frac{40}{100}$$

$60 + 10x = 48 + 12x \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$

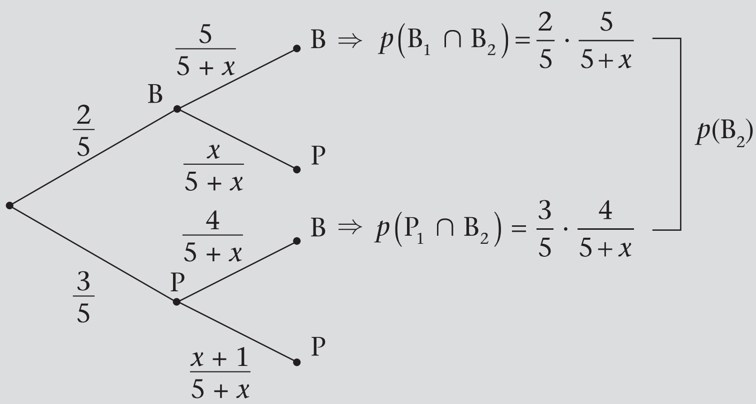
Na primeira urna há 6 bolas pretas.

Esquematicamente:



$$p(B_2)=p(B_1\cap B_2)+p(P_1\cap B_2)=\frac{4}{4+x}\cdot\frac{3}{6}+\frac{x}{4+x}\cdot\frac{2}{6}=\frac{40}{100}$$

Curiosidade:
Se invertêssemos a ordem das urnas, teríamos:



$$p(B_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{5+x} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5+x} = \frac{40}{100} \Rightarrow x = 6$$

5.6.1 – Eventos independentes

Como visto na seção 5.4.2, dois eventos são ditos independentes quando a realização de um não influi na probabilidade do outro. Usando a linguagem da probabilidade condicional, temos:

$$p(B \mid A) = p(B) \text{ e } p(A \mid B) = p(A)$$

Por outro lado, sabemos que:

$$p(B \mid A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Logo, A e B são independentes quando:

$$\frac{p(A \cap B)}{p(A)} = p(B), \text{ isto é, } p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Assim, demonstramos a afirmação da seção 5.4.2:

Dois eventos A e B são independentes se, e somente se:
$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Na prática, pressupõe-se que dois eventos são independentes apenas se houver razão física muito forte para admitir que um não pode influir no outro. Caso contrário, é comum descobrir $p(A \cap B)$, $p(A)$ e $p(B)$ de outra forma e **verificar**, então, se A e B são independentes, isto é, se $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

NOTA
Se $p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B)$, os eventos **não** são independentes.

Exemplos:

São eventos independentes:

i) quando se lançam dois dados honestos, é razoável supor que o resultado de um deles não interfere no resultado do outro;

ii) quando se lança uma moeda e se retira uma carta de um baralho;

iii) quando se repetem ensaios em condições iguais, cada resultado independe dos demais;

iv) quando se fazem extrações com reposição dos elementos de um sorteio.

Exercícios resolvidos:

1) Segundo uma pesquisa de opinião do IBOPE de 2003, 2% dos brasileiros torciam para o Botafogo, 15% torciam para o Flamengo, 2% para o Fluminense e 5% para o Vasco. Restringindo a população a apenas brasileiros que tivessem grau superior (que eram apenas 8% do total), as porcentagens mudavam para 4%, 10%, 2% e 8%, respectivamente. Escolha um brasileiro da amostra total do IBOPE ao acaso.

   i) Qual a probabilidade de ele não torcer para nenhum dos quatro grandes clubes cariocas?

   ii) Qual a probabilidade de ele ser flamenguista com grau superior?

   iii) Que porcentagem dos torcedores do Fluminense tem grau superior? E do Botafogo?

   iv) Se um brasileiro não tem grau superior, qual a probabilidade de ele ser flamenguista?

   v) De acordo com esses dados, os eventos "torcer para o Fluminense" e "ter grau superior" são independentes? Mutuamente excludentes?

FONTE: http://www.ibope.com.br

<u>Solução:</u>

Montamos uma tabela novamente; para facilitar, supomos um total fictício de 2000 brasileiros na amostra entrevistada. Com os dados do problema, já temos:

	Bota	Fla	Flu	Vasco	Outros	Total
Com grau superior	4% (160) = 6,4	10% (160) = 16	2% (160) = 3,2	8% (160) = 12,8		160
Sem grau superior						8%
Total	2% (2000) = 40	15% (2000) = 300	2% (2000) = 40	5% (2000) = 100		2000

Agora, é só completar a tabela usando somas e subtrações:

	Bota	Fla	Flu	Vasco	Outros	Total
Com grau superior	6,4	16,0	3,2	12,8		160
Sem grau superior	33,6	284,0	36,8	87,2		1840
Total	40,0	300,0	40,0	100,0	1520,0	2000

i) A probabilidade de ele não torcer pelos grandes cariocas é de $\frac{1520}{2000} = 76\%$

ii) A probabilidade de ele ser um flamenguista com grau superior é de $\frac{16}{2000} = 0,8\%$.

iii) $\frac{3,2}{40} = 8\%$ dos tricolores têm grau superior; $\frac{6,4}{40} = 16\%$ dos botafoguenses têm grau superior.

iv) $\frac{284}{1840} \cong 15,43\%$ dos brasileiros sem grau superior torcem para o flamengo.

v) De acordo com esses dados, "ser tricolor" e "ter grau superior" são surpreendentemente independentes. Direto do enunciado, $p(\text{Flu}) = 2\%$ e $p(\text{Flu} \mid \text{Superior}) = 2\%$ também! Mutuamente excludentes eles não são – há tricolores com grau superior.

NOTA
A pesquisa do IBOPE entrevistou 2000 brasileiros e as porcentagens apresentadas estão levemente arredondadas. As porcentagens gerais têm uma "margem de erro de 2,2 pontos percentuais" – razoável para determinar a maior torcida do Brasil, mas não razoável para determinar se Botafogo ou Fluminense têm mais torcedores. Dentre os de grau superior, eram apenas 160 entrevistados, e os erros possíveis ao tentar usar esta amostra como uma representação do Brasil aumentam muito (ali a margem de erro é de 15 pontos percentuais!).

2) O assassino é um dos 100 mil habitantes adultos de uma cidade, então, na falta de qualquer outra evidência, é razoável supor que o Sr. Simpson, morador dessa cidade, tenha probabilidade $\frac{1}{10^5}$ de ser o assassino. No entanto, há um teste de DNA com as seguintes propriedades:

• se Simpson é o assassino, o teste afirmará que os DNAs de ambos são iguais com certeza;
• se Simpson é o assassino, há uma pequena probabilidade de 1 em 10 mil testes afirmar que os DNAs de ambos são compatíveis mesmo assim.
O resultado acaba de voltar do laboratório: o teste afirma que os DNAs de Simpson e do assassino são compatíveis. Baseando-se apenas nesta evidência, qual a probabilidade de Simpson ser o assassino?

NOTA
Testes de DNA consideram apenas uma pequena parte do DNA do indivíduo e, portanto, podem acusar DNAs compatíveis para pessoas distintas. Isso dito, os testes mais precisos atuais têm uma probabilidade de "erro" muito menor que o $\frac{1}{10^4}$ deste enunciado.

<u>Solução:</u>

Sejam A = "Simpson é o assassino" e +/– = "Teste afirma que Simpson e o assassino têm/não têm DNAs compatíveis". Os dados do problema são:

• Na falta de outra evidência, a probabilidade de Simpson ser assassino é:

$p(A) = \frac{1}{10^5}$

• Se Simpson for o assassino, o teste certamente indica DNAs compatíveis: $p(+ \mid A) = 1$

• Se Simpson não for o assassino, o teste pode afirmar que os DNAs são compatíveis com probabilidade: $p(+ \mid \overline{A}) = \dfrac{1}{10^4}$

Baseando-se nesses dados, a tabela de probabilidades para o Sr. Simpson é:

	A	$\overline{A}$	Total
+	$\dfrac{1}{100\,000}$	$\dfrac{99\,999}{100\,000} \cdot \dfrac{1}{10\,000}$	$\dfrac{1}{100\,000}\left(1+\dfrac{99\,999}{10\,000}\right)$
–	0		
Total	$\dfrac{1}{100\,000}$	$\dfrac{99\,999}{100\,000}$	1

NOTA
Note que, para resolver este problema, as células em branco da tabela não precisam ser calculadas

que foi preenchida na seguinte ordem:

• Em primeiro lugar, preenchemos a última linha com $p(A) = \dfrac{1}{100\,000}$ e $p(\overline{A}) = \dfrac{99\,999}{100\,000}$.

• A seguir, preenchemos $p(+ \cap A) = p(+ \mid A) \cdot p(A) = \dfrac{1}{100\,000}$ e $p(A \cap -) = 0$.

• Agora, $p(+ \cap \overline{A}) = p(+ \mid \overline{A}) \cdot p(\overline{A}) = \dfrac{1}{10\,000} \cdot \dfrac{99\,999}{100\,000}$.

• A seguir, $p(+) = \dfrac{1}{100\,000} + \dfrac{1}{10\,000} \cdot \dfrac{99\,999}{100\,000} = \dfrac{1}{100\,000}\left(1 + \dfrac{99\,999}{10\,000}\right)$.

Enfim, a pergunta é: "dado que o teste é +, qual a probabilidade de Simpson ser o assassino? Ou seja, o que se pede é:

$$p(A \mid +) = \frac{\dfrac{1}{100\,000}}{\dfrac{1}{100\,000}\left(1+\dfrac{99\,999}{10\,000}\right)} = \frac{10\,000}{109\,999} = 9{,}091\%$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Em dois lançamentos de um dado equilibrado, qual é a probabilidade de se obter um número par no primeiro e um número ímpar no segundo lançamento?

2 Em uma caixa estão guardadas 20 fotografias distintas, sendo 12 de moças e 8 de rapazes. Duas dessas fotos são retiradas sucessivamente e sem reposição. Qual é a probabilidade de termos escolhidas duas fotos de moças?

3 (UFRJ) Fernando e Cláudio foram pescar num lago onde só existem trutas e carpas. Fernando pescou, no total, o triplo da quantidade pescada por Cláudio. Fernando pescou duas vezes mais trutas do que carpas, enquanto Cláudio pescou quantidades iguais de carpas e trutas. Os peixes foram todos jogados num balaio e uma truta foi escolhida ao acaso desse balaio. Determine a probabilidade de que essa truta tenha sido pescada por Fernando.

4 (Fuvest-SP) Um dado, cujas faces estão numeradas de um a seis, é dito perfeito se cada uma das seis faces tem probabilidade de $\frac{1}{6}$ de ocorrer em um lançamento. Considere o experimento que consiste em três lançamentos independentes de um dado perfeito. Calcule a probabilidade de que o produto desses três números seja:

a) par; b) múltiplo de 10.

5 (Unesp-SP) Um estudo de grupos sanguíneos humanos realizado com 1 000 pessoas (sendo 600 homens e 400 mulheres) constatou que 470 pessoas tinham o antígeno A, 230 tinham o antígeno B e 450 pessoas não tinham nenhum dos dois. Determine:

a) o número de pessoas que têm antígenos A e B simultaneamente;

b) supondo independência entre sexo e grupo sanguíneo, a probabilidade de que uma pessoa do grupo, escolhida ao acaso, seja homem e tenha os antígenos A e B simultaneamente.

6 (FGV-SP)

a) Se um dado for lançado duas vezes, qual a probabilidade de que a soma dos números observados seja 4?

b) Se um dado é lançado *n* vezes, para que valores de *n* a probabilidade de que o número 6 apareça ao menos uma vez seja superior a $\frac{1}{2}$?

7 Em três lançamentos sucessivos de uma moeda honesta, qual é a probabilidade de serem obtidas:

a) exatamente duas caras?

b) pelo menos duas caras?

8 Uma urna contém três bolas azuis e duas vermelhas. Retirando sucessivamente duas bolas, sem reposição, qual a probabilidade de sair uma bola de cada cor?

9 Uma experiência consiste em observar as peças de uma linha de fabricação e constatar se são defeituosas (D) ou perfeitas (P). O controle termina quando são produzidas duas peças defeituosas consecutivas (reprovando o lote) ou quando são fabricadas quatro peças.

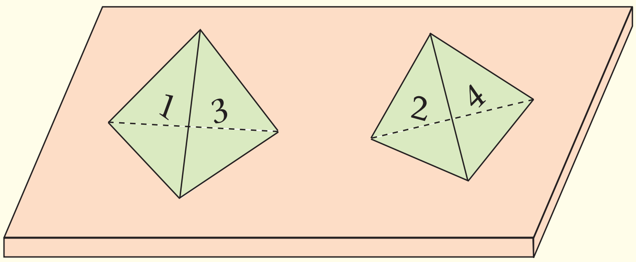
a) Construa uma árvore que indique todas as hipóteses possíveis.

b) Suponha que 10% das peças de um lote são defeituosas, e peças distintas são independentes entre si. Qual a probabilidade do lote ser reprovado?

c) Com os dados do item anterior, se a primeira peça é defeituosa, qual a chance do lote ser reprovado?

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (Fama-SP) Considere dois pequenos tetraedros regulares com suas faces numeradas de 1 a 4. Lançando aleatoriamente os dois tetraedros sobre uma mesa, qual a probabilidade de que nas faces em contato com a mesa:



a) tenhamos números iguais?
b) tenhamos soma 4?

2 (Fama-SP) Uma caixa contém 11 bolas numeradas de 1 a 11. Retirando-se uma delas, ao acaso, observa-se que a mesma traz um número ímpar. Determinar a probabilidade de que esse número seja menor que 5.

3 (FCMSC-SP) Numa gaveta, há 10 pares distintos de meias, mas ambos os pés de um dos pares estão rasgados. Tirando-se da gaveta um pé de meia por vez, ao acaso, calcule a probabilidade de saírem dois pés de meia do mesmo par, não rasgados, fazendo duas retiradas.

Com base no texto abaixo, responda às questões 4 e 5.

(Enem) Um apostador tem três opções para participar de certa modalidade de jogo, que consiste no sorteio aleatório de um número dentre dez.
1ª opção: comprar três números para um único sorteio.
2ª opção: comprar dois números para um sorteio e um número para o segundo sorteio.
3ª opção: comprar um número para cada sorteio, num total de três sorteios.

4 Se X, Y e Z representam as probabilidades de o apostador **ganhar algum** prêmio, escolhendo, respectivamente, a 1ª, a 2ª ou a 3ª opção, é correto afirmar que:

(A) $X < Y < Z$
(B) $X = Y = Z$
(C) $X > Y = Z$
(D) $X = Y > Z$
(E) $X > Y > Z$

5 Escolhendo a 2ª opção, a probabilidade de o apostador **não ganhar** em qualquer um dos sorteios é igual a:

(A) 90%
(B) 81%
(C) 72%
(D) 70%
(E) 65%

O enunciado abaixo serve para responder às questões 6 e 7.

(Enem) Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fichas voltadas para baixo, estando representada em cada uma delas as letras T, V e E. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas ao seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de R$ 200,00.

6 A probabilidade de o participante não ganhar qualquer prêmio é igual a:

(A) 0
(B) $\frac{1}{3}$
(C) $\frac{1}{2}$
(D) $\frac{2}{3}$
(E) $\frac{1}{6}$

7 A probabilidade de o concorrente ganhar exatamente o valor de R$ 400,00 é igual a:

(A) 0
(B) $\frac{1}{3}$
(C) $\frac{1}{2}$
(D) $\frac{2}{3}$
(E) $\frac{1}{6}$

8 (Uerj) Um instituto de pesquisa colheu informações para saber as intenções de voto no segundo turno das eleições para governador de um determinado estado. Os dados estão indicados no quadro abaixo:

Intenção de voto	Percentual
Candidato A	26%
Candidato B	40%
Candidato C	14%
Votos brancos	20%

Escolhendo aleatoriamente um dos entrevistados, verificou-se que ele não vota no candidato B. A probabilidade de que esse eleitor vote em branco é:

(A) $\frac{1}{6}$
(B) $\frac{1}{5}$
(C) $\frac{1}{4}$
(D) $\frac{1}{3}$
(E) $\frac{2}{5}$

9 (UFRJ) O setor de controle de qualidade de uma pequena confecção fez um levantamento de peças produzidas, classificando-as como aproveitáveis ou não aproveitáveis. As porcentagens de peças aproveitáveis estão na tabela abaixo.
Um segundo levantamento verificou que 75% das camisetas aproveitáveis, 90% das bermudas aproveitáveis e 85% das calças aproveitáveis são de 1ª qualidade.

Peça	Aproveitável
Camiseta	96%
Bermuda	98%
Calça	90%

Escolhendo-se aleatoriamente uma calça e uma camiseta dessa confecção, calcule a probabilidade *p* de que as condições a seguir sejam ambas satisfeitas:
A camiseta ser de 1ª qualidade e a calça não ser aproveitável.

10 (UFRJ) Duzentas bolas pretas e duzentas bolas brancas são distribuídas em duas urnas, de modo que cada uma delas contenha cem bolas pretas e cem bolas brancas. Uma pessoa retira, ao acaso, uma bola de cada urna.
Determine a probabilidade de que as duas bolas retiradas sejam de cores distintas.

11 Uma gaveta tem 2 moedas de ouro e 3 de prata, outra tem 2 de ouro e 1 de prata. Passa-se uma moeda da primeira para a segunda gaveta e depois retira-se uma moeda da segunda.
Qual a probabilidade de sair uma moeda de ouro na retirada da segunda gaveta?

12 (Fuvest-SP) Duas pessoas A e B arremessam moedas. Se A faz dois arremessos e B faz um, qual a probabilidade de A obter o mesmo número de "coroas" que B?

13 (Cesgranrio-RJ) Uma turma tem 25 alunos, dos quais 40% são meninas.
Escolhendo-se, ao acaso, um dentre todos os grupos de 2 alunos que se pode formar com os alunos dessa turma, a probabilidade de que este seja composto por uma menina e um menino é de:

(A) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$

14 (Unificado-RJ) As retas *t* e *s* são paralelas. Sobre *t* são marcados quatro pontos distintos, enquanto sobre *s* são marcados *n* pontos distintos. Escolhendo-se aleatoriamente um dentre todos os triângulos que podem ser formados com três desses pontos, a probabilidade de que este tenha um de seus lados contido em *s* é de 40%. O total de pontos marcados sobre essas retas é:

(A) 15 (C) 9 (E) 7

(B) 12 (D) 8

15 (Cesgranrio-RJ) O dispositivo que aciona a abertura de um cofre de uma joalheria apresenta um teclado com nove teclas, sendo cinco algarismos (0, 1, 2, 3, 4) e quatro letras (x, y, z, w). O segredo do cofre é uma sequência de três algarismos seguidos de duas letras.
Qual é a probabilidade de uma pessoa, numa única tentativa, ao acaso, abrir o cofre?

(A) $\frac{1}{7200}$ (C) $\frac{1}{1500}$ (E) $\frac{1}{200}$

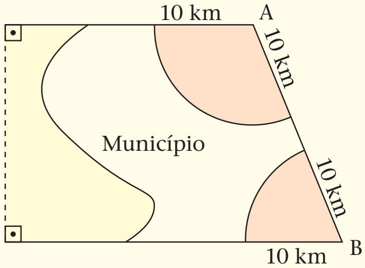
(B) $\frac{1}{2000}$ (D) $\frac{1}{720}$

16 (Unirio-RJ) As probabilidades de três jogadores marcarem um gol cobrando um pênalti são, respectivamente, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{6}$. Se cada um bater um único pênalti, a probabilidade de todos errarem é igual a:

(A) 3% (C) 17% (E) 25%

(B) 5% (D) 20%

17 (Enem) Um município de 628 km² é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10 km do município, conforme mostra a figura:



Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras.
Essa probabilidade é de, aproximadamente:

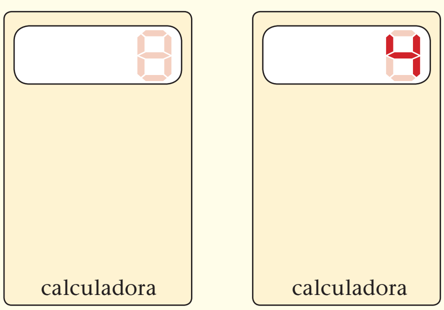
(A) 20% (C) 30% (E) 40%
(B) 25% (D) 35%

18 Ao se tentar abrir uma porta com um chaveiro contendo várias chaves parecidas, das quais apenas uma destranca a referida porta, muitas pessoas acreditam que é mínima a

probalidade de se encontrar a chave certa na 1ª tentativa, e chegam mesmo a dizer que essa chave só vai aparecer na última tentativa. Para esclarecer essa questão, calcule, no caso de um chaveiro contendo 5 chaves,

a) a probabilidade de se encontrar a chave certa depois da 1ª tentativa;
b) a probabilidade de se acertar na 1ª tentativa;
c) a probabilidade de se acertar somente na última tentativa.

19 (Cesgranrio-RJ) Sete lâmpadas de néon são dispostas formando "oito", como no mostrador de uma calculadora (figura I) e podem ser acesas independentemente umas das outras. Estando todas as sete apagadas, acendem-se quatro delas ao mesmo tempo, ao acaso. A probabilidade de ser formado o algarismo 4, como aparece na figura II, é:



(I) (II)

(A) $\frac{1}{35}$
(B) $\frac{1}{2}$
(C) $\frac{1}{3}$
(D) $\frac{1}{5}$
(E) $\frac{1}{28}$

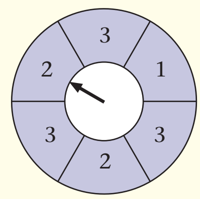
20 (UFSCar-SP) Os resultados de 1 200 lançamentos de um dado estão dispostos na listagem abaixo.

nº da face	1	2	3	4	5	6
frequência	100	200	200	300	100	300

Admitindo-se para dois novos lançamentos desse dado as mesmas condições experimentais anteriores, tem-se:

(A) pelo menos uma ocorrência de face de nº 4.
(B) a ocorrência de uma face de nº 4 ou nº 6.
(C) que a probabilidade da ocorrência de pelo menos uma face de nº 6 é $\frac{7}{16}$.
(D) a ocorrência de uma face de nº par.
(E) que a probabilidade de ocorrência de uma face de nº par é $\frac{1}{2}$.

21 (PUC-SP) Gira-se o ponteiro (veja figura) e anota-se o número que ele aponta ao parar; repete-se a operação. Qual a probabilidade de que a soma dos dois números seja 5?

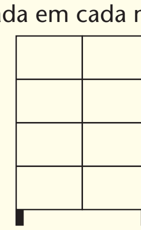


(A) $\frac{5}{36}$
(B) $\frac{8}{36}$
(C) $\frac{12}{36}$
(D) $\frac{24}{36}$
(E) $\frac{35}{36}$

22 (Unirio-RJ) Considerando-se um hexágono regular e tomando-se ao acaso uma de suas diagonais, a probabilidade de que ela passe pelo centro do hexágono é de:

(A) $\frac{1}{9}$
(B) $\frac{1}{6}$
(C) $\frac{1}{3}$
(D) $\frac{2}{9}$
(E) $\frac{2}{3}$

23 (Unirio-RJ) Um armário tem 8 repartições, em 4 níveis, como mostra a figura abaixo. Ocupando-se metade das repartições, a probabilidade de que se tenha uma repartição ocupada em cada nível é de:



(A) $\frac{2}{35}$
(B) $\frac{4}{35}$
(C) $\frac{6}{35}$
(D) $\frac{8}{35}$
(E) $\frac{2}{7}$

24 (PUC-RJ) De sua turma de 30 alunos, é escolhida uma comissão de 3 representantes. Qual a probabilidade de você fazer parte da comissão?

(A) $\frac{1}{10}$ (C) $\frac{5}{24}$ (E) $\frac{2}{9}$

(B) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{3}$

25 (PUC-RJ) Uma prova de múltipla escolha tem 10 questões, com 3 respostas em cada questão. Um aluno que nada sabe da matéria vai responder a todas as questões ao acaso, e a probabilidade que ele tem de não tirar zero é:

(A) maior do que 96%.

(B) entre 94% e 96%.

(C) entre 92% e 94%.

(D) entre 90% e 92%.

(E) menor do que 90%.

26 (PUC-RJ) Quantas vezes, no mínimo, devemos lançar uma moeda não viciada para que a probabilidade de obtermos, pelo menos, uma cara seja maior que 99%?

27 (PUC-SP) O jogo da loto consiste em sortear 5 dezenas em 100 dezenas possíveis. Alguém, querendo jogar nessa loteria, pode escolher de 5 até 10 dezenas. Se alguém que escolhe 5 dezenas tem probabilidade x de ganhar, então quem escolhe 7 dezenas tem que probabilidade de ganhar?

(A) $7x$ (C) $21x$ (E) $35x$

(B) $14x$ (D) $28x$

28 (PUC-SP) Numa caixa há 100 bolas, numeradas de 1 a 100. Retiram-se, simultaneamente, 2 bolas. Qual a probabilidade de se obterem números consecutivos?

(A) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{9}{100}$ (E) $\frac{99}{(100)^2}$

(B) $\frac{1}{50}$ (D) $\frac{1}{100^2}$

29 (UFSCar-SP) Um dado, não viciado, é lançado duas vezes. Consideremos os eventos:
A_1: obtenção do número 6 no 1º lançamento;
B_1: obtenção do número 6 no 2º lançamento;
C_1: obtenção de um número ímpar no 1º lançamento.

Assinale a alternativa correta.

(A) A_1 e C_1 são independentes.

(B) B_1 e C_1 não são independentes.

(C) A_1 e B_1 são independentes.

(D) O evento A_1 nunca ocorrerá.

(E) A probabilidade de ocorrência de C_1 é menor que a probabilidade de ocorrência de A_1.

30 (FGV-SP) Um grupo de 6 amigos (A, B, C, D, E e F) pretende realizar um passeio em um barco onde só há 3 lugares. É feito um sorteio para serem escolhidos os 3 amigos que ocuparão o barco.
A probabilidade de que A seja escolhido e B não seja, é:

(A) $\frac{6}{15}$ (C) $\frac{4}{6}$ (E) $\frac{4}{5}$

(B) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{1}{2}$

31 (Fuvest-SP) Numa urna são depositadas n etiquetas numeradas de 1 a n. Três etiquetas são sorteadas (sem reposição). Qual a probabilidade de que os números sorteados sejam consecutivos?

(A) $\frac{(n-2)!}{n!}$ (D) $\frac{(n-2)!3!}{n!}$

(B) $\frac{(n-3)!}{n!}$ (E) $6\,(n-2)(n-1)$

(C) $\frac{(n-2)!}{3!n!}$

32 (PUC-SP) Uma moeda é viciada de modo que a probabilidade de ocorrer cara numa jogada é 30% a mais do que a de ocorrer coroa. Se essa moeda for jogada duas vezes, consecutivamente, a probabilidade de ocorrência de cara nas duas jogadas, é:

(A) 49% (C) 64% (E) 15%

(B) 42,25% (D) 64,25%

33 (Fuvest-SP) Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 9. Sorteiam-se, com reposição, duas bolas. A probabilidade de que o número da segunda bola seja estritamente maior do que o da primeira é:

(A) $\frac{72}{81}$ (C) $\frac{36}{81}$ (E) $\frac{45}{81}$

(B) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{30}{81}$

34 (Fuvest-SP) Sorteiam-se dois números naturais ao acaso entre 101 e 1 000, inclusive, com reposição. Calcule a probabilidade de que o algarismo das unidades do produto dos números sorteados **não** seja zero.

35 (Fuvest-SP) Considerando um polígono regular de n lados, $n > 4$ e tomando-se ao acaso uma das diagonais do polígono, a probabilidade de que ela passe pelo centro é:

(A) 0 se n é par.

(B) $\frac{1}{2}$ se n é ímpar.

(C) 1 se n é par.

(D) $\frac{1}{n}$ se n é ímpar.

(E) $\frac{1}{n-3}$ se n é par.

36 (Fuvest-SP) Duas pessoas A e B jogam dado alternadamente, começando com A, até que uma delas obtenha um "6"; a primeira que obtiver o "6" ganha o jogo.

a) Qual a probabilidade de A ganhar na 1ª jogada?

b) Qual a probabilidade de B ganhar na 2ª jogada?

c) Calcule a probabilidade de A ganhar o jogo.

37 (PUC-RJ) No jogo denominado "zerinho-ou-um", cada uma de três pessoas indica ao mesmo tempo com a mão uma escolha de 0 (mão fechada) ou 1 (o indicador apontando), e ganha a pessoa que escolher a opção que diverge da maioria. Se as três pessoas escolheram a mesma opção, faz-se, então, uma nova tentativa.
Qual a probabilidade de não haver um ganhador definido depois de três rodadas?

38 (Fuvest-SP) Seis pessoas, A, B, C, D, E e F, vão atravessar um rio em 3 barcos. Distribuindo-se, ao acaso, as pessoas de modo que fiquem duas em cada barco, a probabilidade de A atravessar junto com B, C junto com D e E junto com F, é:

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{1}{10}$

(C) $\frac{1}{15}$

(D) $\frac{1}{20}$

(E) $\frac{1}{25}$

39 (Cesgranrio-RJ) Num jogo com um dado, o jogador X ganha se tirar, no seu lance, um número de pontos maior ou igual ao do lance do jogador Y. A probabilidade de X ganhar é:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{7}{12}$

(D) $\frac{13}{24}$

(E) $\frac{19}{36}$

40 (UFSCar-SP) Um dado honesto é lançado duas vezes e os números obtidos, n_1 e n_2, respectivamente do primeiro e do segundo lançamentos, são usados para definir n como segue:

$n = n_1 + n_2$, se $n_1 > n_2$ e $n = n_1 + 1$, se $n_2 \geq n_1$
Então, n = 7 ocorre com probabilidade:

(A) $\frac{1}{9}$

(B) menor que a de $n = 8$.

(C) $\frac{1}{4}$

(D) maior que a de $n = 6$.

(E) $\frac{1}{8}$

41 (UFR-RJ) Um grupo de dez pessoas da turma de Psicologia de Cris resolveu formar uma comissão de formatura escolhendo um presidente, um secretário e um tesoureiro. Sabendo que a filha Cris integrava o grupo e preocupada com um possível cargo que a mesma pudesse ocupar, Salete conversou com o marido: — Pierre, eu não gostaria que a Cris fosse tesoureira. — Fique tranquila, disse Pierre! A probabilidade de Cris ser tesoureira é muito pequena!
Qual seria essa probabilidade?

(A) $\frac{1}{10}$

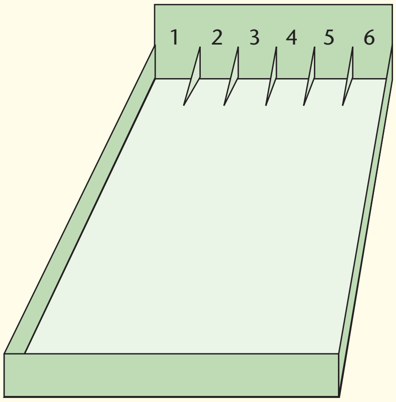
(B) $\frac{1}{8}$

(C) $\frac{7}{8}$

(D) $\frac{1}{7}$

(E) $\frac{1}{15}$

42 (UFF-RJ) No jogo "Bola Maluca", um jogador recebe seis bolas que são lançadas sucessivamente sobre um grande tabuleiro inclinado com canaletas numeradas de 1 a 6, conforme figura abaixo.



A cada lançamento, o jogador recebe a pontuação referente ao número da canaleta que a bola parar. Ao final de todos os lançamentos os pontos recebidos são somados, representando a pontuação total do jogador.

Após lançar quatro bolas, um jogador obteve subtotal de 15 pontos. Determine a probabilidade de, com as duas jogadas restantes, esse jogador totalizar 19 pontos.

43 (Unirio-RJ) A Organização Mundial de Saúde – OMS – pesquisou e concluiu que um casal sadio, em que os dois não sejam parentes consangüíneos (parentes em primeiro grau), ao gerar uma criança, pode apresentar o seguinte quadro probabilístico em relação a problemas congênitos: sexo masculino tem 2% de risco e sexo feminino, 3%. A probabilidade de um casal gerar um menino com doença congênita ou uma menina sadia é, em %, expressa por:

(A) 0,485 (C) 49,5 (E) 99

(B) 2,5 (D) 97,5

44 (Unesp) Jogando 3 dados de tamanhos diferentes, a probabilidade de dar números que correspondam, em grandeza, ao tamanho de dados, ou seja, o número maior que ocorre deve estar no dado maior, o médio no médio e o menor no menor, é:

(A) $\frac{25}{216}$ (D) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{5}{54}$ (E) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{19}{216}$

45 (FEI-SP) Numa moeda viciada, a probabilidade de ocorrer a face cara num lançamento é igual a quatro vezes a probabilidade de ocorrer coroa. A probabilidade de ocorrer cara num lançamento desta moeda é:

(A) 40% (C) 25% (E) 50%

(B) 80% (D) 20%

46 (PUC-RJ) As cartas de um baralho são amontoadas aleatoriamente. Qual é a probabilidade de a carta de cima ser de copas e a de baixo também? O baralho é formado por 52 cartas de 4 naipes diferentes (13 de cada naipe).

(A) $\frac{1}{17}$ (D) $\frac{1}{36}$

(B) $\frac{1}{25}$ (E) $\frac{1}{45}$

(C) $\frac{1}{27}$

47 (UFRJ) Dispomos de quatro urnas, cada uma contendo dez bolas numeradas de 0 a 9. Sorteando ao acaso uma bola de cada urna, formamos um número entre 0 e 9 999.
Lembrando que zero é múltiplo de qualquer número inteiro, determine a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 8.

48 (Unicamp-SP) Um dado é jogado três vezes, uma após a outra. Pergunta-se:

a) quantos são os resultados possíveis em que os três primeiros números obtidos são diferentes?

b) qual a probabilidade da soma dos resultados ser maior ou igual a 16?

49 (Cesgranrio-RJ) Numa caixa são colocados vários cartões, alguns amarelos, alguns verdes e os restantes pretos. Sabe-se que 50% dos cartões são pretos, e que, para cada 3 cartões verdes, há 5 cartões pretos. Retirando-se ao acaso um desses cartões, a probabilidade de que este seja amarelo é de:

(A) 10% (C) 20% (E) 40%

(B) 15% (D) 25%

50 (Unicamp-SP) Uma urna contém 50 bolas que se distinguem apenas pelas seguintes características:

I) X delas são brancas e numeradas sequencialmente com os números naturais de 1 a X.

II) X + 1 delas são azuis e numeradas sequencialmente com os números naturais de 1 a X + 1.

III) X + 2 delas são amarelas e numeradas sequencialmente com os números naturais de 1 a X + 2.

IV) X + 3 delas são verdes e numeradas sequencialmente com os números naturais de 1 a X + 3.

a) Qual é o valor numérico de X?

b) Qual a probabilidade de ser retirada, ao acaso, uma bola azul ou uma bola com o número 12?

51 (Unicamp-SP) Em uma festa para calouros estão presentes 250 calouros e 350 calouras. Para dançar, cada calouro escolhe uma caloura ao acaso formando um par. Pergunta-se:

a) Quantos pares podem ser formados?

b) Qual a probabilidade de que uma determinada caloura não esteja dançando no momento em que todos os 250 calouros estão dançando?

52 (Osec-SP) Se um certo casal tem 3 filhos, então, a probabilidade de os 3 serem do mesmo sexo, dado que o primeiro filho é homem, vale:

(A) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{6}$

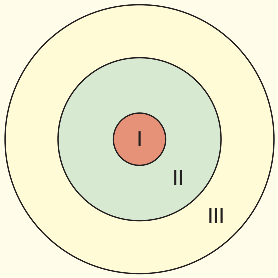
(B) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

53 (Uerj) Cinco casais formados, cada um, por marido e mulher, são aleatoriamente dispostos em grupos de duas pessoas cada um.
Calcule a probabilidade de que todos os grupos sejam formados por:

a) um marido e sua mulher;

b) pessoas de sexos diferentes.

54 (UFRJ) Um alvo é formado por três círculos concêntricos.



Uma flecha, ao ser lançada, pode atingir regiões I, II, III ou não acertar o alvo; as probabilidades de um arqueiro atingir as regiões I, II, III são iguais a $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{2}$, respectivamente.
Um arqueiro lança três flechas. Determine a probabilidade de ele acertar somente duas flechas no alvo, ambas na região III.

55 (UFRJ) Um estudante caminha diariamente de casa para o colégio, onde não é permitido ingressar após 7h30min. No trajeto ele é obrigado a cruzar três ruas. Em cada rua, a travessia de pedestres é controlada por sinais de trânsito não sincronizados. A probabilidade de cada sinal estar aberto para o pedestre é igual a $\frac{2}{3}$ e a probabilidade de estar fechado é igual a $\frac{1}{3}$.
Cada sinal aberto não atrasa o estudante, porém cada sinal fechado o retém por 1 minuto. O estudante caminha sempre com a mesma velocidade.
Quando os três sinais estão abertos, o estudante gasta exatamente 20 minutos para fazer o trajeto.
Em um certo dia, o estudante saiu de casa às 7h09min.
Determine a probabilidade de o estudante, nesse dia, chegar atrasado ao colégio, ou seja, chegar após as 7h30min.

56 (UFF-RJ) Em uma bandeja há dez pastéis dos quais três são de carne, três são de queijo e quatro de camarão. Se Fabiana retirar, aleatoriamente e sem reposição, dois pastéis desta bandeja, a probabilidade de os dois pastéis retirados serem de camarão é:

(A) $\frac{2}{25}$ (C) $\frac{2}{15}$ (E) $\frac{4}{5}$

(B) $\frac{4}{25}$ (D) $\frac{2}{5}$

57 (UFRJ) Um saco de veludo azul contém 13 bolinhas amarelas, numeradas de 1 a 13; 17 bolinhas cor-de-rosa, numeradas de 1 a 17; e 19 bolinhas roxas, numeradas de 1 a 19. Uma pessoa, de olhos vendados, retirará do saco 3 bolinhas de uma só vez.
Sabendo-se que todas as bolinhas têm a mesma chance de serem retiradas, qual a probabilidade de que as 3 bolinhas retiradas sejam de cores diferentes e tenham números iguais?

58 (UFRJ) Para testar a eficácia de uma campanha de anúncio do lançamento de um novo sabão S, uma agência de propaganda realizou uma pesquisa com 2000 pessoas. Por falha da equipe, a agência omitiu dados dos campos *x*, *y*, *z* e *w* no seu relatório sobre a pesquisa, conforme mostra a tabela a seguir:

Nº de pessoas que:	adquiriram S	não adquiriram S	Total
viram o anúncio	x	y	1 500
não viram o anúncio	200	z	500
Total	600	w	2000

a) Indique os valores dos campos *x*, *y*, *z* e *w*.

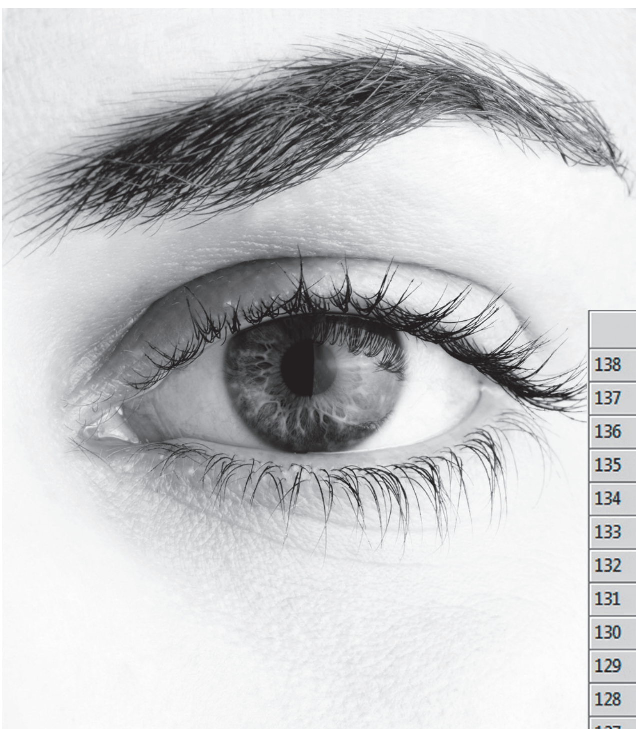
b) Suponha que uma dessas 2000 pessoas entrevistadas seja escolhida ao acaso e que todas as pessoas tenham a mesma probabilidade de serem escolhidas. Determine a probabilidade de que esta pessoa tenha visto o anúncio da campanha e adquirido o sabão S.

59 (UFRJ) Dois jogadores disputam uma série de rodadas de cara ou coroa. No início, cada jogador dispõe de 2 fichas. A cada rodada o vencedor ganha uma ficha do perdedor. O jogo termina quando um dos jogadores fica sem fichas.
Determine a probabilidade de haver, ao menos, 100 rodadas.

CAPÍTULO VI

MATRIZES

Vitor Costa/Shutterstock



	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
138	13	15	6	1	3	4	0	0	0	3
137	31	37	31	10	9	24	13	0	2	2
136	37	42	37	10	15	49	34	0	4	0
135	50	48	46	25	35	67	49	17	27	12
134	71	70	60	42	46	62	51	45	67	45
133	78	84	52	31	40	54	58	66	80	70
132	93	99	48	29	55	81	93	93	84	72
131	125	120	80	58	92	125	103	65	57	104
130	132	144	138	136	145	140	105	86	99	161
129	149	164	173	180	191	198	184	173	181	138
128	159	185	185	177	183	205	204	179	159	91
127	145	149	161	159	160	179	188	171	153	125
126	121	139	159	161	157	172	183	175	164	166
125	115	133	147	144	144	166	183	175	162	159
124	126	135	146	142	140	161	176	170	160	152
123	114	148	144	142	157	176	170	156	158	146
122	119	136	146	154	167	181	174	160	161	144
121	108	129	143	147	151	163	163	150	144	151
120	112	119	130	123	116	132	146	141	133	153
119	127	129	145	137	117	119	129	131	131	146

Matrizes são simplesmente tabelas de números, e são usadas em modelos de Computação Gráfica, na resolução de sistemas lineares, para guardar encadeamentos em grupos de relacionamento, e em inúmeras outras aplicações. Por exemplo, uma imagem digital em níveis de cinza é simplesmente uma grande matriz, onde cada entrada representa quão claro é cada pixel.

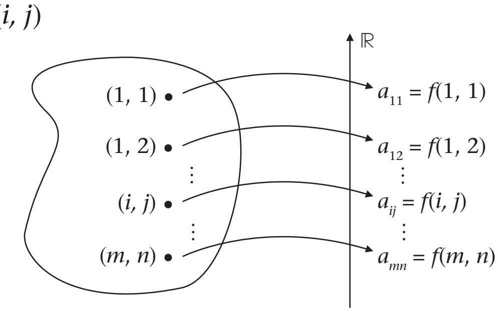
6 – MATRIZES

6.1 – Noções básicas

DEFINIÇÃO
Matrizes.

Dados dois conjuntos finitos I = {1, 2, 3, ..., m} e J = {1, 2, 3, ..., n}, chama-se **matriz real** do tipo $m \times n$ a toda função do produto cartesiano I × J no conjunto dos reais.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\colon\ & \mathrm{I} \times \mathrm{J} \to \mathbb{R} \\ & (i, j) \mapsto a_{ij} = f(i, j) \end{aligned}$$



O conjunto das imagens da função f: I × J → ℝ é o conjunto:

$$\mathrm{M} = \{a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}\} \subset \mathbb{R}.$$

É comum dispor os elementos $a_{ij} = f(i, j)$ segundo uma tabela retangular em que o primeiro índice (i) indica o número da linha na tabela e o segundo índice (j) indica o número da coluna. Essa tabela é, em geral, colocada entre colchetes, parênteses ou dois pares de traços paralelos verticais.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

O elemento a_{ij} fica situado na linha i e na coluna j, isto é, no cruzamento da linha i com a coluna j.

NOTA
A matriz $\mathrm{M}_{m \times n} = \mathrm{M}(m, n)$ se lê: matriz de ordem m por n.
Diz-se também matriz de dimensão $m \times n$, em que m é a altura da matriz e n, a largura.

$$\begin{array}{cc} & j^{\underline{a}} \text{ coluna} \\ i^{\underline{a}} \text{ linha} & \begin{bmatrix} a_{11} \cdots & & \cdots a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ & a_{ij} & \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdots & & \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Representa-se abreviadamente assim:

$M = [a_{ij}]$ em que $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, ..., n\}$

Como essa tabela é constituída de mn elementos distribuídos em m linhas e n colunas, dizemos que essa matriz é de ordem $m \times n$ ou do tipo (m, n). Indica-se a matriz por $M_{m \times n}$ ou $M(m, n)$.

Exemplos:

i) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz de ordem 3×4.

Temos $a_{13} = -1$, $a_{24} = 2$, $a_{33} = 0$ etc.

ii) Escrever a matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem 2×3 sabendo que $a_{ij} = i^2 + 2j$.

Temos que $1 \le i \le 2$ e $1 \le j \le 3$. Assim:

$a_{11} = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$, $a_{12} = 1^2 + 2 \cdot 2 = 5$, $a_{13} = 1^2 + 2 \cdot 3 = 7$

$a_{21} = 2^2 + 2 \cdot 1 = 6$, $a_{22} = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8$, $a_{23} = 2^2 + 2 \cdot 3 = 10$

A matriz será então $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$.

NOTA
A ordem de uma matriz é representada por um produto indicado $m \times n$, não se efetuando a multiplicação.
As matrizes de ordem $m \times n$ podem ser interpretadas como: formando um espaço de mn dimensões em que seus elementos são sequências cujos elementos são tomados da matriz com a seguinte convenção: "da esquerda para a direita e de cima para baixo".
A matriz de ordem 2×3 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ se escreveria (a, b, c, d, e, f).

6.1.1 – Matriz-linha e matriz-coluna

A matriz pode ter apenas uma linha ou apenas uma coluna e nesses casos são chamadas **matrizes-linha** ou **matrizes-coluna**, respectivamente.

DEFINIÇÃO
Matriz-linha e matriz-coluna.

$A = [a_{11}\ a_{12}\ ...\ a_{1n}] = (a_{11}\ a_{12}\ ...\ a_{1n})$ é uma matriz-linha de ordem $1 \times n$.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ é uma matriz-coluna de ordem $m \times 1$.

As notações (x), (x, y), (x, y, z) ou $[x]$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ serão usadas de acordo com a conveniência.

NOTA
Matrizes-coluna são utilizadas para representar as coordenadas de pontos e setores nos espaços $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ..., a serem estudados no volume 3.

Exemplos:

i) A = (2, –1), B = (1, 3, 1), C = [2, 0, 4, 3], D = [–1] são matrizes-linha.

ii) $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, D = (2) são matrizes-coluna.

As matrizes de uma única linha ou coluna, contendo apenas um elemento, podem ser postas em correspondência bijetiva com os números reais, havendo portanto uma identificação entre seus conjuntos. Assim, as matrizes se comportam como uma generalização do espaço dos números reais.

6.1.2 – Submatriz

DEFINIÇÃO
Submatriz.

Submatriz de ordem $p \times q$ de uma matriz de ordem $m \times n$ é uma matriz que se obtém extraindo-se p linhas e q colunas da matriz dada, ordenadamente e formando-se uma nova matriz com os elementos comuns a essas filas.

Exemplos:

i) Com a matriz $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & \text{2ª coluna} & \text{3ª coluna} & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & p \\ q & r & s & t & u \end{bmatrix} \end{array}$ de ordem 4×5 podemos formar com os elementos da 2ª e 3ª colunas C_4^3 matrizes de ordem 3×2. São elas:

$$\begin{bmatrix} b & c \\ g & h \\ l & m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b & c \\ g & h \\ r & s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b & c \\ l & m \\ r & s \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} g & h \\ l & m \\ r & s \end{bmatrix}$$

ii) Quantas são as submatrizes de ordem 2×2 que se podem obter da matriz A de ordem 4×5?

Fixando 2 linhas quaisquer podemos, escolhendo as colunas, formar C_5^2 submatrizes. Como podemos escolher C_4^2 pares de linhas, o número de submatrizes de ordem 2×2 será $C_4^2 \cdot C_5^2 = 6 \cdot 10 = 60$ submatrizes de ordem 2×2.

6.1.3 – Igualdade de matrizes

Duas matrizes de mesma ordem são **iguais** se, e somente se, todos os elementos forem iguais:

$$[a_{ij}] = [b_{ij}] \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \text{ para todo } i \in \{1, 2, ..., m\} \text{ e } j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

DEFINIÇÃO
Igualdade de matrizes.

Matrizes de ordens diferentes nunca são iguais.

Exemplos:

i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

iii) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

iv) Calcular x, y, a e b, sabendo que: $\begin{bmatrix} x+y & x \\ a+b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} a + b = 3 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, y = -1 \\ a = 4, b = -1 \end{cases}$$

Propriedades

1) reflexiva: A = A
2) simétrica : A = B $\Rightarrow$ B = A
3) transitiva: A = B $\wedge$ B = C $\Rightarrow$ A = C

6.1.4 – Matrizes quadradas

Matrizes quadradas são aquelas em que o número de linhas é igual ao número de colunas. Sua ordem $n \times n$ é dita, simplesmente, ordem n.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}], \text{ com } i, j \in \{1, 2, ..., n\}$$

DEFINIÇÃO
Matrizes quadradas.

DEFINIÇÃO
Diagonal de uma matriz quadrada.

Os elementos cujos índices são iguais constituem a **diagonal principal** de uma matriz quadrada ($a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$). Esses elementos são chamados **elementos principais**.

Os elementos da outra diagonal, aqueles a_{ij} em que $i + j = n + 1$ constituem a **diagonal secundária** ($a_{1n}, a_{2, n-1}, ..., a_{n1}$). São os **elementos secundários**.

NOTA
A soma de todos os elementos da diagonal principal de uma matriz quadrada é chamada de **traço da matriz** e representa-se por tr M. Estudaremos esse assunto adiante.

Exemplos:

i) Na matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

diagonal secundária

diagonal principal

(a, d) é a diagonal principal e (b, c) a diagonal secundária.

ii) Na matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$,

diagonal secundária

diagonal principal

a diagonal (a_{11}, a_{22}, a_{33}) é a principal e a diagonal (a_{13}, a_{22}, a_{31}) a secundária.

6.1.5 – Matriz nula

DEFINIÇÃO
Matriz nula.

Uma **matriz** é **nula** se, e somente se, todos os seus elementos são nulos.

$$[a_{ij}] = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0, \forall\, i, j$$

Exemplos:

i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{2 \times 3}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_2, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_3$

ii) Calcular x, y, z e t sabendo que:

$$\begin{bmatrix} x + y - 2 & z + t \\ x - y + 4 & z - t - 6 \end{bmatrix} = [0] = 0$$

NOTA
Algumas vezes convém indicar a ordem da matriz nula por meio do índice que informa o tipo da matriz. Quando a ordem é irrelevante não se põe índice.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0]_{4 \times 3} = 0$$

Devemos ter:

$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} z + t = 0 \\ z - t - 6 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x = -1,\ z = 3 \\ y = 3,\ t = -3 \end{cases}$

iii) Sendo $a_{ij} \geq 0$ e $[a_{ij}] = [-a_{ji}] = A$, calcular A, sabendo que ordem (A) = 3.
Devemos ter:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -d & -g \\ -b & -e & -h \\ -c & -f & -i \end{bmatrix}$$

$a = -a \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0$
$b = -d \Rightarrow b + d = 0 \Rightarrow b = d = 0$, pois $b \geq 0$ e $d \geq 0$.
$\vdots$
Logo, A = [0] = 0.

6.1.6 – Matriz identidade

Matriz identidade é a matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais iguais a 0. Usa-se a notação I.

DEFINIÇÃO
Matriz identidade.

$I = [a_{ij}]$, em que $\begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Exercícios resolvidos:

1) (FGV-RJ) A organização econômica Merco é formada pelos países 1, 2 e 3. O volume anual de negócios realizados entre os três parceiros é representado em uma matriz A, com 3 linhas e com 3 colunas, na qual o elemento da linha *i* e coluna *j* informa quanto o país *i* exportou para o país *j*, em bilhões de dólares.

Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1{,}2 & 3{,}1 \\ 2{,}1 & 0 & 2{,}5 \\ 0{,}9 & 3{,}2 & 0 \end{bmatrix}$:

i) quanto o país 2 exportou para o país 3?

Solução:

Deseja-se o elemento a_{23} que é a exportação do país 2 para o país 3, logo a_{23} = 2,5 bilhões de dólares.

ii) qual o país que mais exportou?

Solução:

As exportações se encontram nas linhas *i,* logo basta verificar qual a linha em que é maior a soma de suas exportações.
$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 4{,}3$
$a_{21} + a_{22} + a_{23} = 4{,}6$
$a_{31} + a_{32} + a_{33} = 4{,}1$
Como 4,6 é a maior soma, relativa à linha $i = 2$, o país que mais exportou foi o país 2.

iii) qual o país que importou menos?

Solução:

Basta ver qual a coluna que tem a menor soma, uma vez que a coluna informa que país importou de qual.
$a_{11} + a_{21} + a_{31} = 3{,}0$; $a_{12} + a_{22} + a_{32} = 4{,}4$ e $a_{13} + a_{23} + a_{33} = 5{,}6$
Logo o país que menos importou foi o país 1.

iv) qual o saldo comercial do país 3, isto é, a diferença entre as exportações e as importações?

Solução:

Exportações do país 3: $a_{31} + a_{32} + a_{33} = 4{,}1$ bilhões
Importações do país 3: $a_{13} + a_{23} + a_{33} = 5{,}6$ bilhões
O saldo comercial é 4,1 – 5,6 = –1,5 bilhão.

2) (FGV-RJ) Três ônibus levaram alunos de uma escola para uma excursão. Em uma parada, todos os alunos saíram dos ônibus. Todos prosseguiram a viagem, mas não necessariamente no ônibus de onde tinham saído. Na matriz abaixo, a_{ij} representa o número de pessoas que saíram do ônibus i e subiram no ônibus j após a parada.

$$\begin{bmatrix} 30 & 5 & 7 \\ 2 & 25 & 8 \\ 3 & 6 & 20 \end{bmatrix}$$

Determine:

i) quantos alunos participaram da excursão;

Solução:

Basta contar quantos alunos saíram dos ônibus já que todos saíram.
Saíram do ônibus 1: 30 + 5 + 7 = 42
Saíram do ônibus 2: 2 + 25 + 8 = 35
Saíram do ônibus 3: 3 + 6 + 20 = 29
O total de alunos foi 42 + 35 + 29 = 106 alunos.
Poderíamos também contar quantos alunos subiram em todos os ônibus.

ii) qual o ônibus que ganhou mais passageiros;

Solução:

A tabela mostra a variação de passageiros:

Ônibus	Saíram	Subiram	Total
1	42	35	perdeu 7
2	35	36	ganhou 1
3	29	35	ganhou 6

O ônibus que ganhou mais passageiros foi o ônibus 3. Ganhou 6 passageiros.

iii) qual o ônibus que perdeu passageiros.

Solução:

A tabela mostra que foi o ônibus 1. Perdeu 7 passageiros.

iv) Se algum ônibus voltou com o mesmo número de passageiros.

Solução:

A tabela mostra que não.

3) Um laboratório farmacêutico fabrica três tipos de remédios utilizando diferentes compostos. Considere a matriz A = (a_{ij}) dada a seguir, onde a_{ij} representa quantas unidades do composto *j* serão utilizadas para fabricar uma unidade do remédio do tipo *i*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Quantas unidades do composto 2 serão necessárias para fabricar 3 remédios do tipo 1; 2 remédios do tipo 2 e 5 remédios do tipo 3?

Solução:

Devemos raciocinar com a coluna 2 porque nela estão as quantidades do composto 2 para fabricar os diferentes tipos de remédios.

Assim sendo, para fabricar:

3 remédios do tipo 1 devemos ter $3a_{12} = 3 \cdot 2 = 6$ unidades do composto 2;

2 remédios do tipo 2 devemos ter $2a_{22} = 2 \cdot 5 = 10$ unidades do composto 2;

5 remédios do tipo 3 devemos ter $5a_{32} = 5 \cdot 1 = 5$ unidades do composto 2.

Assim, o total de unidades do composto 2 para produzir os três remédios será:

$$6 + 10 + 5 = 21 \text{ unidades}$$

4) João foi comprar discos de seus artistas favoritos 1, 2 e 3 e escolheu três músicas 1, 2 e 3 todas gravadas pelos três artistas. Na matriz, cada a_{ij} é o preço do disco do artista *i* com a gravação da música *j*.

$$\begin{bmatrix} 13 & 12 & 11 \\ 10 & 15 & 13 \\ 16 & 14 & 17 \end{bmatrix}$$

i) Se João comprasse todas as músicas gravadas pelo artista 2, quanto gastaria?

ii) Escreva todas as hipóteses de compra de 3 músicas diferentes gravadas por artistas diferentes.

iii) Desejando gastar o menor valor possível para a compra de 3 músicas diferentes, gravadas por artistas diferentes, quanto gastará João?

Solução:

i) Basta somar todos os valores da 2ª linha, logo:
$a_{21} + a_{22} + a_{23} = 10 + 15 + 13 = 38$.

ii) Basta tomar um elemento de cada linha e de cada coluna, assim:
Com o elemento a_{11}, teremos a_{22} e a_{33} ou a_{23} e a_{32}, logo (a_{11}, a_{22}, a_{33}) ou (a_{11}, a_{23}, a_{32}).
Com o elemento a_{12}, teremos a_{21} e a_{33} ou a_{23} e a_{31}, logo (a_{12}, a_{21}, a_{33}) ou (a_{12}, a_{23}, a_{31}).
Com o elemento a_{13}, teremos a_{21} e a_{32} ou a_{22} e a_{31}, logo (a_{13}, a_{21}, a_{32}) ou (a_{13}, a_{22}, a_{31}).

iii) Temos então as somas possíveis:
(45, 40, 39, 41, 35, 42). Note que temos $3! = 6$ hipóteses quando se escolhe um elemento de cada linha e de cada coluna. A menor soma é 35.

NOTA
O item *ii* servirá para a definição de determinante. As $3! = 6$ hipóteses darão os termos do determinante de terceira ordem, desde que com sinais convenientes.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Obtenha a matriz A, em cada caso abaixo:

a) $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ definida por $a_{ij} = 2ij - 1$

b) $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ definida por $a_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i = j \\ ij, \quad \text{ se } i \neq j \end{cases}$

c) $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

2 (Ufal) Qual é o elemento localizado na segunda linha e terceira coluna da matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{i}, \text{ se } i < j \\ \log j, \text{ se } i = j \\ i^j, \text{ se } i > j \end{cases}$$

3 Seja $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ em que $a_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i \geq j \\ 0, \quad \text{ se } i < j \end{cases}$, calcule a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o da diagonal secundária.

4 (Vunesp-SP) Imagine os números inteiros não negativos formando a seguinte tabela:

0	3	6	9	12	...
1	4	7	10	13	...
2	5	8	11	14	...

a) Em que linha da tabela se encontra o número 319?

b) Em que coluna se encontra esse número?

5 (UFRJ) Uma confecção vai fabricar 3 tipos de roupas utilizando materiais diferentes. Considere a matriz $A = (a_{ij})$, em que a_{ij} representa quantas unidades do material j serão empregadas para fabricar uma roupa do tipo i.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Quantas unidades do material 3 serão empregadas na confecção de uma roupa do tipo 2?

b) Calcule o total de unidades do material 1 que será empregado para fabricar cinco roupas do tipo 1, quatro roupas do tipo 2 e duas roupas do tipo 3.

6 Determine a, b, x, y, sabendo que:

$$\begin{pmatrix} x + y & 2a + b \\ 2x - y & a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

7 Determine x e y, valores que tornam verdadeira a igualdade:

$$\begin{pmatrix} x + y & x - y \\ xy & \frac{x}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

8 Calcule x, y, z e w para que a igualdade seja verdadeira:

$$\begin{bmatrix} 3x & y + 1 \\ z + w & z - w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

9 Determine x, y e z para que:

$$\begin{bmatrix} 2^x & y^2 \\ \log_2 32 & |z| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 25 \\ y & 9 \end{bmatrix}$$

6.2 – Matriz transposta

No conjunto das matrizes define-se como **transposição** uma operação que consiste em transformar as linhas de uma matriz em colunas e as colunas em linhas, ordenadamente.

DEFINIÇÃO
Matriz transposta.

Matriz transposta de uma matriz dada A de ordem $m \times n$ é outra matriz, representada por A^t, de ordem $n \times m$ tal que:

$$A = [a_{ij}] \Leftrightarrow A^t = [a'_{ij}] \text{ onde } a'_{ij} = a_{ji}$$

Exemplos:

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

ii) $B = [1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 4] \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

iii) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

NOTA
A tansposta da matriz transposta de A é a própria matriz A.
$(A^t)^t = A$

6.2.1 – Matriz triangular

DEFINIÇÃO
Matriz triangular.

Matriz triangular é toda matriz quadrada em que são nulos todos os elementos de um mesmo lado da diagonal principal.

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & j \end{bmatrix} = [t_{ij}]$$

$t_{ij} = 0$ se $i < j$ ou $t_{ij} = 0$ se $i > j$

A transposta de uma matriz triangular é uma matriz triangular.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

6.2.2 – Matriz simétrica

Matriz simétrica é toda matriz quadrada em que são iguais os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal.

DEFINIÇÃO
Matriz simétrica.

$$S = \begin{bmatrix} a & \boxed{b} & c \\ \boxed{b} & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} = [s_{ij}] \qquad s_{ij} = s_{ji}, \forall i, j$$

Uma matriz simétrica é igual à sua transposta e reciprocamente.

$S = S^t \Leftrightarrow S$ é simétrica

Exemplos:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

6.2.3 – Matriz antissimétrica

Matriz antissimétrica é toda matriz quadrada em que os elementos da diagonal principal são nulos e os elementos simetricamente dispostos, em relação à diagonal principal, são opostos.

DEFINIÇÃO
Matriz antissimétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{-a} & -b & -c \\ \boxed{a} & 0 & -d & \boxed{-e} \\ b & d & 0 & -f \\ c & \boxed{e} & f & 0 \end{bmatrix} = [a_{ij}] \qquad a_{ij} = -a_{ji} \text{ ou } a_{ij} + a_{ji} = 0, \forall i, j$$

Uma matriz antissimétrica é oposta à sua transposta e reciprocamente.
$A = -A^t \Leftrightarrow$ A é antissimétrica

Exemplos:

i) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ii) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

6.2.4 – Matriz diagonal

DEFINIÇÃO
Matriz diagonal.

Matriz diagonal é toda matriz quadrada em que são nulos todos os elementos que não estão sobre diagonal principal.

NOTA
Toda matriz identidade é diagonal.

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ii}],\ \forall i$$

Exemplo:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

6.2.5 – Matriz de uma relação

Sejam dois conjuntos $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ e uma relação R definida entre os elementos a_i de A e b_j de B. Se a_i e b_j estão relacionados por R, isto é, $a_i \, R \, b_j$ ou $(a_i, b_j) \in R$, podemos definir uma matriz M tomando:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } (a_i, b_j) \in R \\ 0, \text{ se } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

A matriz M é dita matriz da relação R.

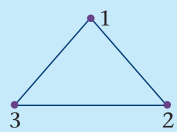
Exemplos:

i) Seja P um polígono regular convexo com n vértices numerados de 1 a n, consecutivamente; façamos $p_{ij} = 1$ se ij é lado do polígono e $p_{ij} = 0$ caso contrário. Escrever a matriz $P = [p_{ij}]$ para $n = 3$ e $n = 4$.

a) $n = 3$

$p_{11} = p_{22} = p_{33} = 0$

$p_{12} = p_{21} = p_{13} = p_{31} = p_{23} = p_{32} = 1$



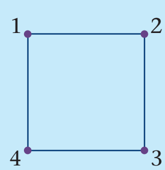
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $n = 4$

$p_{11} = p_{22} = p_{33} = p_{44} = 0$

$p_{12} = p_{21} = p_{23} = p_{32} = p_{34} = p_{43} = p_{41} = p_{14} = 1$

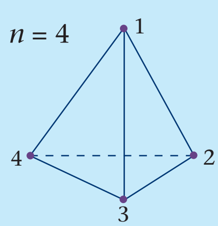
$p_{13} = p_{31} = p_{24} = p_{42} = 0$



$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ii) Sejam poliedros regulares convexos com vértices numerados conforme as figuras abaixo. Seja $p_{ij} = 1$ se ij é aresta e $p_{ij} = 0$ caso contrário. Escrever as matrizes correspondentes.

a) $n = 4$

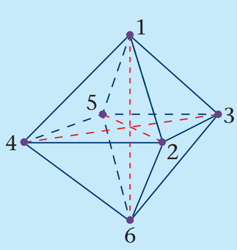


$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$p_{ij} = 0$ se $i = j$

$p_{ij} = 1$ se $i \neq j$

b) $n = 6$



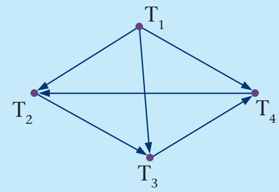
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$p_{ij} = 0$ se $i = j$ ou $i + j = 7$

$p_{ij} = 1$ caso contrário

NOTA
Portais de pesquisa na Internet usam matrizes como estas para registrar os "links" entre diferentes páginas.
Tais matrizes são enormes contendo milhões de linhas e colunas.

iii) Sinais são emitidos das torres T_1, T_2, T_3 e T_4. A matriz $S = [s_{ij}]$ é tal que $s_{ij} = 1$ se a torre T_i emite sinais para a torre T_j e $s_{ij} = 0$ caso contrário. O diagrama indica o sentido de transmissão dos sinais emitidos pelas diversas torres.



Escrever a matriz que representa a relação R tal que "$T_i \, R \, T_j \Leftrightarrow T_i$ emite sinal para T_j".
Temos:
$s_{11} = 0$ porque T_1 não emite sinal para si mesmo.

$s_{12} = 1$ porque T_1 emite sinal para T_2.

$s_{13} = 1$, $s_{14} = 1$, $s_{21} = 0$, $s_{22} = 0$,

$s_{23} = 1$, $s_{24} = 0$, $s_{31} = 0$, $s_{32} = 0$,

$s_{33} = 0$, $s_{41} = 0$, $s_{42} = 1$, $s_{43} = 0$,

$s_{34} = 1$ e $s_{44} = 0$.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iv) Considere agora a matriz que indica o número de maneiras de emitir um sinal de T_i para T_j passando por uma torre repetidora de sinais, isto é, por meio de dois sinais sucessivos.
$c_{ij} = n$ se existe T_k tal que $T_i \to T_k \to T_j$ onde n é o número de modos de fazer a conexão entre T_i e T_j.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$c_{12} = 1$ $T_1 \to T_4 \to T_2$
$c_{13} = 1$ $T_1 \to T_2 \to T_3$
$c_{14} = 1$ $T_1 \to T_3 \to T_4$
$c_{24} = 1$ $T_2 \to T_3 \to T_4$
$c_{32} = 1$ $T_3 \to T_4 \to T_2$
$c_{43} = 1$ $T_4 \to T_2 \to T_3$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Determine a transposta das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

b) $A = (a_{ij})$ quadrada de ordem 2 com $a_{ij} = i^j + 2$.

2 Sejam T_1, T_2 e T_3 três triângulos equiláteros. A é uma matriz de ordem 3, onde cada elemento a_{ij} é igual à soma das áreas de T_i, T_j.

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 3\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 3\sqrt{3} & 4\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & 5\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Determine os lados do triângulo.

3 Forma-se um quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ de modo que, se i e j pertencem ao conjunto {1, 2, 3, 4}, a distância entre P_i e P_j é o elemento a_{ij} da matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ y & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule o valor numérico do elemento a_{13} da matriz A.

4 (PUC-GO) Uma matriz quadrada A é dita simétrica se $A = A^T$ e é dita antissimétrica se $A^T = -A$, em que A^T é a matriz transposta de A. Analise a afirmação seguinte: "Se A é uma matriz quadrada, então $A + A^T$ é uma matriz simétrica e $A - A^T$ é uma matriz antissimétrica."

5 (UEL-PR) Uma matriz quadrada A se diz *antissimétrica* se $A^t = -A$. Nessas condições, se a matriz A a seguir é uma matriz antissimétrica, então $x + y + z$ é igual a:

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(A) 3
(B) 1
(C) 0
(D) –1
(E) –3

6 (PUC-SP) O quadrado abaixo chama-se Quadrado Mágico, pois a soma de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal é constante.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

O quadrado seguinte é mágico. Seja $S = a + b + c + d + e + f + g + h + i$ e seja K a soma de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal.

a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*i*

a) Obtenha K em função de S.

b) Calcule *e* em função de S.

6.3 – Operações elementares com matrizes

6.3.1 – Adição e subtração de matrizes

DEFINIÇÃO
Adicão (subtração) de matrizes.

A **adição** ou a **subtração** de duas matrizes A e B de mesma ordem é uma terceira matriz C em que cada elemento é a soma ou a subtração dos elementos correspondentes das duas matrizes dadas.

$$[a_{ij}] \pm [b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}],\ \forall\ i, j$$

Não se somam nem se subtraem matrizes de ordens diferentes.

Exemplos:

i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 0_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Propriedades

1) Elemento neutro: $A \pm 0 = 0 \pm A = A$

2) Comutativa: $A + B = B + A$

3) Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$

4) $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$

Exercício resolvido:

Ricardo, Sérgio e Tiago saíram para tomar chope, de bar em bar, tanto no sábado quanto no domingo.
As matrizes a seguir resumem quantos chopes cada um consumiu e como a despesa foi dividida:

$S = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

S refere-se às despesas de sábado e D às de domingo.

Cada elemento a_{ij} nos dá o número de chopes que *i* pagou para *j*, sendo Ricardo o número 1, Sérgio o número 2 e Tiago o número 3 (a_{ij} representa o elemento da linha *i*, coluna *j* de cada matriz).
Assim, no sábado Ricardo pagou 4 chopes que ele próprio bebeu, 1 chope de Sérgio e 4 de Tiago (primeira linha da matriz S).

i) Quem bebeu mais chope no fim de semana?

ii) Quantos chopes Tiago ficou devendo para Ricardo?

iii) Qual a matriz que resume o consumo no fim de semana?

Solução:

i) Ricardo bebeu (7 + 7) = 14 chopes, Sérgio (4 + 9) = 13 e Tiago, com (9 + 6) = 15 chopes, foi quem mais bebeu no fim de semana.

ii) Ricardo pagou para Tiago: 4 + 3 = 7 chopes,
Tiago pagou para Ricardo: 3 + 2 = 5 chopes.
Logo, Tiago ficou devendo 7 – 5 = 2 chopes para Ricardo.

iii) A matriz que resume o consumo no fim de semana será a soma

$$S + D = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

6.3.2 – Produto de uma matriz por um número

O **produto de uma matriz por um número** é a matriz que se obtém multiplicando todos os seus elementos por esse número.

$k \cdot [a_{ij}] = [ka_{ij}], \forall\, i, j$

DEFINIÇÃO
Produto de matriz por um número.

Exemplos:

i) $$3\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 9 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

ii) $$3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 0 & -6 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 6 & -2 & -8 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Propriedades

OBSERVAÇÃO
Observe que o produto de um número por uma matriz não é um número, é uma matriz. Os zeros entre colchetes são matrizes nulas.

1) Comutativa: $mA = Am$
2) Associativa: $m(nA) = (mn)A$
3) Distributiva: $(m + n)A = mA + nA$
   $m(A + B) = mA + mB$
4) Elemento absorvente: $m \cdot [0] = [0]$
   $0 \cdot A = [0]$
5) $(mA)^t = mA^t$

6.3.3 – Matriz oposta

DEFINIÇÃO
Matriz oposta.

Matriz oposta é o produto da matriz por –1.
$A \cdot (-1) = (-1) \cdot A = -A$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Propriedades

1) Lei do cancelamento: $A + (-A) = 0$
2) Dupla oposição: $-(-A) = A$
3) $-[0] = [0]$
4) $-(A + B) = (-A) + (-B)$
5) $(-A)^t = -A^t$

Exercícios resolvidos:

1) Uma loja de departamentos controla suas vendas por meio de matrizes, sendo uma para cada departamento.

Marca \ Produto	1	2	3	4
1				
2				
3				

Nas posições (i, j) são registradas as quantidades a_{ij} dos produtos j da marca i. No início do dia primeiro, esse departamento abre com a matriz de estoque A e fecha com a matriz F.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 15 & 15 & 15 & 15 \\ 20 & 20 & 20 & 20 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo R a matriz de reposição de estoque, isto é, das quantidades que devem ser solicitadas ao almoxarifado para repor o estoque para o dia seguinte:

a) Calcule R.

b) Se esse departamento planeja duplicar suas vendas, qual a matriz de estoque de abertura para atender a essa demanda?

<u>Solução:</u>

a) A matriz das vendas do dia primeiro será:

$$R = A - F = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 15 & 15 & 15 & 15 \\ 20 & 20 & 20 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 & 10 \\ 14 & 13 & 12 & 11 \\ 13 & 17 & 15 & 19 \end{bmatrix}$$

Essa é a matriz de reposição.

b) $$A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 15 & 15 & 15 & 15 \\ 20 & 20 & 20 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 & 20 \\ 30 & 30 & 30 & 30 \\ 40 & 40 & 40 & 40 \end{bmatrix}$$

2) Uma cadeia de lojas tem três filiais: Santo André (A), São Bernardo (B) e São Caetano (C). A matriz de estoque M registra quantas unidades de cada um dos produtos P_1, P_2, P_3 e P_4 se encontram em cada filial:

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 4 & 6 \\ 12 & 6 & 0 & 4 \\ 15 & 8 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$ ou seja

	P_1	P_2	P_3	P_4
A	10	8	4	6
B	12	6	0	4
C	15	8	7	3

Os preços desses produtos são registrados pela matriz-coluna $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$; cada linha i tem o preço do produto P_i, em milhares de reais.

a) Se as filiais venderem seus estoques completamente, qual é a receita de cada filial?

b) E a receita total?

NOTA
Mais adiante, definiremos o produto de duas matrizes. Com esta noção, veremos que:
$R_{3 \times 1} = M_{3 \times 4} \cdot P_{4 \times 1}$

Solução:

a) $R_A = 10 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 = 66$ (66 mil reais)

$R_B = 12 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 54$ (54 mil reais)

$R_C = 15 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 70$ (70 mil reais)

b) $R_T = R_A + R_B + R_C$

$R_T = 66 + 54 + 70 = 190$ (190 mil reais)

Propriedade

Toda matriz quadrada M é a soma de uma matriz simétrica S com uma matriz antissimétrica A.

Suponhamos que $M = S + A$. Transpondo M, vem:

$M^t = (S + A)^t = S^t + A^t$, mas $A^t = -A$ e $S^t = S$, logo, $M^t = S - A$.

Temos então o sistema:

$$\begin{cases} M = S + A \\ M^t = S - A \end{cases} \Rightarrow S = \frac{M + M^t}{2} \text{ e } A = \frac{M - M^t}{2}$$

Exemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad M^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \qquad S = \frac{M + M^t}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$M = S + A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \frac{M - M^t}{2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6.3.4 – Combinação linear de matrizes

DEFINIÇÃO
Combinação linear.

Chama-se **combinação linear de matrizes** de mesma ordem $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a matriz A que se obtém multiplicando-se cada matriz por um número e somando-se os resultados:

$A = c_1A_1 + c_2A_2 + \ldots + c_nA_n$

Neste caso, dizemos que A depende linearmente de $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Exercícios resolvidos:

1) Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

i) Calcule a combinação linear 3A – 2B.

$$3A - 2B = 3\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 9 & 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 11 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

ii) Resolva a equação $\frac{1}{2}(X + A) = 2[3X + (X - 2B)]$

Solução:

$$\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}A = 6X + 2(X - 2B)$$

$$X + A = 12X + 4X - 8B$$

$$A + 8B = 15X \Rightarrow X = \frac{1}{15}(A + 8B)$$

$$A + 8B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 16 & 24 \\ -8 & 8 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 27 \\ -5 & 8 & 15 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 10 & 15 & 27 \\ -5 & 8 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{9}{5} \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{15} & 1 \end{bmatrix}$$

2) Determine duas matrizes X e Y de segunda ordem tais que $3X + 4Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$ e $2X - 3Y = \begin{bmatrix} -8 & 7 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$.

Temos o sistema:

$$\begin{cases} 3X + 4Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} \\ 2X - 3Y = \begin{bmatrix} -8 & 7 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 3 e a segunda por 4, vem:

NOTA
Sendo A e B matrizes de mesma ordem e $m \neq 0$, $A = B \Leftrightarrow mA = mB$.

NOTA
Sendo A, B e C matrizes de mesma ordem, $A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$.

NOTA
Operam-se com matrizes de mesma ordem como se operam com números.

$$\begin{cases} 9X + 12Y = \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ -36 & 27 \end{bmatrix} \\ 8X - 12Y = \begin{bmatrix} -32 & 28 \\ 36 & 24 \end{bmatrix} \end{cases}$$ Somando membro a membro:

$$17X = \begin{bmatrix} -17 & 34 \\ 0 & 51 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 & 34 \\ 0 & 51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Substituindo na equação $3X + 4Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$, vem:

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + 4Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow 4Y = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & m & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ n & 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -1 & -11 & 3 \\ 8 & 7 & -3 \end{bmatrix}$.

Calcule os valores de *m* e *n* de modo que C dependa linearmente de A e de B.

<u>Solução:</u>

Para que C dependa linearmente de A e B é preciso que existam números *a* e *b* tais que C = *a*A + *b*B. Devemos ter então:

$$a\begin{bmatrix} 2 & m & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ n & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -11 & 3 \\ 8 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$, ou seja,

$$\begin{cases} 2a - b = -1 \\ ma - 2b = -11 \\ 0a + b = 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -a + nb = 8 \\ 4a + b = 7 \\ 3a - 2b = -3 \end{cases}$$

Vamos escolher duas equações para calcular *a* e *b* e submeter esses valores às outras equações.

Escolhendo $\begin{cases} 2a - b = -1 \\ 0a + b = 3 \end{cases}$, temos: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$

Verificando se estes satisfazem as outras equações:

$4a + b = 4 \cdot 1 + 3 = 7$ (V)

$3a - 2b = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -3$ (V)

Com isso, podemos calcular os valores de *m* e *n*.

$m - 6 = -11 \Rightarrow m = -5$

$-1 + 3n = 8 \Rightarrow n = 3$

A relação de dependência é A + 3B = C.

NOTA
Esta verificação é necessária. Caso as igualdades não ocorressem, o problema seria impossível.

6.3.5 – Traço de uma matriz quadrada

DEFINIÇÃO
Traço de uma matriz.

Traço de uma matriz é a soma de todos os elementos de sua diagonal principal. Usa-se a notação tr M.

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

$$\text{tr } M = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exemplo:

$$\text{tr} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 1 + 5 + 9 = 15$$

Propriedades

1) $\text{tr } A^t = \text{tr } A$

2) $\text{tr } (A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B$

3) $\text{tr } xA = x \text{ tr } A$

Exercício resolvido:

Considere a matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem 10, onde $a_{ij} = 2^{i+j} + 3^{i-j} + (i-j)^{13}$. Calcule tr A.

Solução:

Só interessam os elementos do tipo $a_{ii} = 2^{i+i} + 3^{i-i} + (i-i)^{13} = 2^{2i} + 1$

onde $i = 1, 2, \dots, 10$. O traço é a soma de todos eles:

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^{10} (2^{2i} + 1) = (2^2 + 1) + (2^4 + 1) + \dots + (2^{20} + 1) = (2^2 + 2^4 + \dots + 2^{20}) +$$
$$+ (1 + 1 + \dots + 1)$$

A primeira parcela é a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão 4 com 10 termos; a segunda é a soma de 10 termos iguais a 1:

$$\text{tr } A = 2^2 \cdot \frac{4^{10} - 1}{4 - 1} + 10 \cdot 1 = \frac{4}{3} \cdot \left(2^{20} - 1\right) + 10 = 1\,398\,110$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule, se existir:

a) A + B
b) B + C
c) C – A
d) B + D
e) D – C
f) B – C
g) $A^t + B^t$
h) $(A + B)^t$
i) $C^t - A^t$
j) $(C - A)^t$

2 Dada a matriz $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, determine a matriz $T + T^t$.

3 Determine o valor de x, que torna verdadeira a igualdade:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} x^2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 2 & x \end{bmatrix}$$

4 Encontre a matriz T, sabendo que $\frac{1}{4} \cdot T^t = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$.

5 Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, em que $b_{ij} = i - j$. Determine a matriz $\frac{1}{2}A + 4B$.

6 (Uece-CE) Sejam as matrizes $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se $(2 - n) \cdot I + n \cdot P_1 = P_2$ $(n \in \mathbb{N})$, quanto vale $n^2 - 2n + 7$?

7 Determine o traço de:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \sqrt{3} & 3 & -7 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

8 (Ufam) Sendo as matrizes:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 7 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$,

a matriz $-2A + \frac{1}{2}B - \frac{3}{2}C$ é igual a:

(A) $\begin{pmatrix} -11 & 13 & -3 \\ 0 & 17 & -6 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} -17 & 18 & 19 \\ 0 & 17 & -12 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} -11 & 13 & 19 \\ -12 & 11 & -6 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} -17 & 18 & -3 \\ -12 & 11 & -6 \end{pmatrix}$

(E) $\begin{pmatrix} 7 & -11 & 6 \\ 18 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

9 (UCPel-RS) Seja a matriz:

$A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, na qual $a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ se } i = j \\ 1 \text{ se } i > j \\ -1 \text{ se } i < j \end{cases}$

então $A - A^t + I_3$ resulta na matriz:

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(E) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6.4 – Produto de matrizes

Antes de definirmos o produto de duas matrizes, consideremos o seguinte problema.

Um laboratório produz os remédios R_1, R_2 e R_3 que são fabricados com os componentes A e B.

Por outro lado, os componentes A e B são fabricados com as matérias-primas m, n, p e q.

Tabela I

	A	B	Total
R_1	2	1	2A + B
R_2	1	2	A + 2B
R_3	1	1	A + B

A tabela I indica as quantidades necessárias de A e B para a produção de uma unidade dos remédios R_1, R_2 e R_3.

Tabela II

	m	n	p	q	Total
A	1	1	3	2	$m + n + 3p + 2q$
B	2	2	2	1	$2m + 2n + 2p + q$

A tabela II dá as quantidades necessárias de m, n, p e q para a produção de uma unidade dos componentes A e B.

Determinar as quantidades das matérias-primas m, n, p e q necessárias para produzir uma unidade de cada remédio R_1, R_2 e R_3.

Assim:

$$\begin{cases} R_1 = 2A + B \\ R_2 = A + 2B \\ R_3 = A + B \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} A = m + n + 3p + 2q \\ B = 2m + 2n + 2p + q \end{cases}$$

Basta expressar R_1, R_2 e R_3 em função de m, n, p e q.

Para isso, é suficiente substituir A e B em R_1, R_2 e R_3. Temos:

$R_1 = 2A + B = 2(m + n + 3p + 2q) + (2m + 2n + 2p + q) = 4m + 4n + 8p + 5q$

$R_2 = A + 2B = (m + n + 3p + 2q) + 2(2m + 2n + 2p + q) = 5m + 5n + 7p + 4q$

$R_3 = A + B = (m + n + 3p + 2q) + (2m + 2n + 2p + q) = 3m + 3n + 5p + 3q$

Tabela III

	m	n	p	q	Total
R_1	4	4	8	5	$4m + 4n + 8p + 5q$
R_2	5	5	7	4	$5m + 5n + 7p + 4q$
R_3	3	3	5	3	$3m + 3n + 5p + 3q$

A tabela III indica as quantidades das matérias-primas m, n, p e q necessárias para produzir uma unidade dos remédios R_1, R_2 e R_3.

Esse resultado pode ser obtido utilizando as matrizes:

$$\underset{\text{remédios}}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \boxed{1 \quad 2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{\text{componentes}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \boxed{3} & 2 \\ 2 & 2 & \boxed{2} & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 & 5 \\ 5 & 5 & \boxed{7} & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

O elemento c_{23} da matriz da tabela III se obtém efetuando a soma dos produtos dos elementos da linha 2 da tabela I pelos elementos correspondentes da coluna 3 da tabela II, ou seja:

i) separa-se a linha 2: $\boxed{1 \quad 2}$

ii) separa-se a coluna 3: $\boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}}$

$$\boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \qquad \boxed{1 \quad 2} \qquad 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7 = c_{23}$$

iii) multiplica-se o primeiro elemento da linha 2, a_{21}, pelo primeiro elemento da coluna 3, b_{13}, e soma-se ao produto do segundo elemento da linha 2, a_{22}, pelo segundo elemento da coluna 3, b_{23}:

$$c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7$$

Esse procedimento deve ser realizado, ordenadamente, com todas as linhas da tabela I pelas colunas da tabela II:

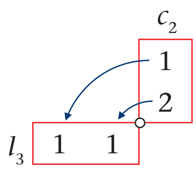
$$c_1\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} \quad l_1\ \boxed{2 \quad 1} \Rightarrow c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$c_1\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} \quad l_2\ \boxed{1 \quad 2} \Rightarrow c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & . & . & . \\ 5 & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$$

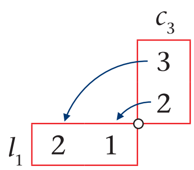
$$c_1\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} \quad l_3\ \boxed{1 \quad 1} \Rightarrow c_{31} = a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & . & . & . \\ 5 & . & . & . \\ 3 & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$c_2\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} \quad l_1\ \boxed{2 \quad 1} \Rightarrow c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & . & . \\ 5 & . & . & . \\ 3 & . & . & . \end{bmatrix}$$

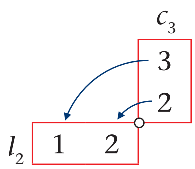
$$c_2\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} \quad l_2\ \boxed{1 \quad 2} \Rightarrow c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & . & . \\ 5 & 5 & . & . \\ 3 & . & . & . \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & . & . \\ 5 & 5 & . & . \\ 3 & 3 & . & . \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow c_{13} = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 8 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 & . \\ 5 & 5 & . & . \\ 3 & 3 & . & . \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 & . \\ 5 & 5 & 7 & . \\ 3 & 3 & . & . \end{bmatrix}$$

E assim, sucessivamente.

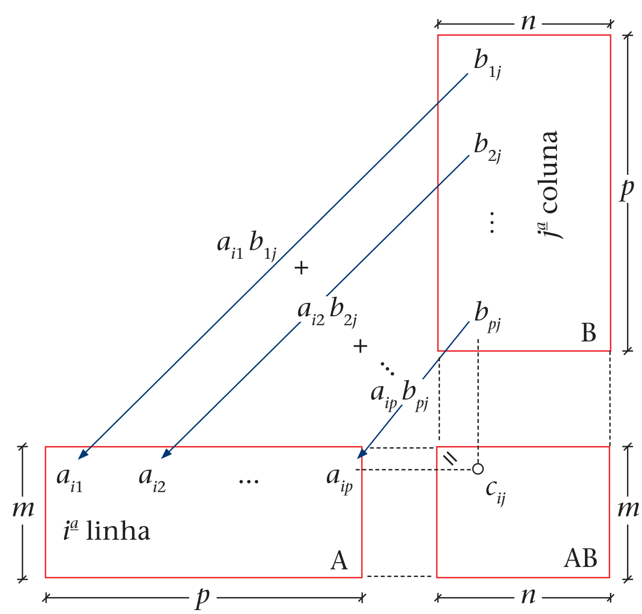
Observe que o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda.

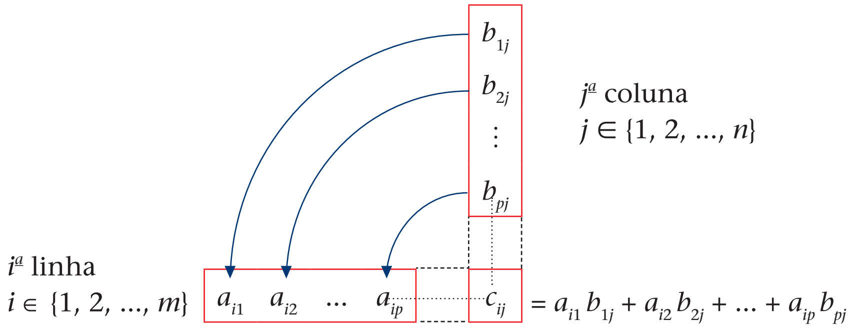
Se A = $[a_{ik}]$ de ordem $m \times p$ e B = $[b_{kj}]$ de ordem $p \times n$, chama-se **produto** AB uma matriz C = $[c_{ij}]$ de ordem $m \times n$ tal que:

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{ip}\, b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$$

DEFINIÇÃO
Produto de matrizes.

O esquema abaixo ilustra essa definição.





Cada elemento c_{ij} da matriz produto C = AB é a soma dos produtos dos elementos da i^{a} linha de A pelos elementos correspondentes da j^{a} coluna de B.

O produto de duas matrizes só pode ser realizado quando o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda.

A matriz A é de ordem $m \times p$ e a matriz B é de ordem $p \times n$, então a matriz AB será de ordem $m \times n$.

O esquema ilustra esse resultado.

$$\overbrace{(m \times p)}^{A} \cdot \overbrace{(p \times n)}^{B} = m \times n$$

iguais

resultado

Quando esse fato não acontecer, não existirá o produto das matrizes.

Assim:

i) $A_{m \times p} \cdot B_{p \times n} = C_{m \times n}$

$=$

possível

ii) $A_{m \times p} \cdot B_{q \times n},\ p \neq q \Rightarrow \nexists\, A \cdot B$

$\neq$

impossível

Exemplos:

i) Sejam as matrizes $A_{2 \times 3}$, $B_{3 \times 1}$, $C_{2 \times 2}$, calcular os produtos:

a) $\underset{2 \times 3}{A} \cdot \underset{3 \times 1}{B} = \underset{2 \times 1}{AB}$

b) $\underset{2 \times 3}{A} \cdot \underset{2 \times 1}{C} \Rightarrow$ não existe

$\neq$

c) $\underset{2 \times 2}{C} \cdot \underset{2 \times 3}{A} = \underset{2 \times 3}{CA}$

ii) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, calcular AB e BA.

a) AB

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 0 = 0$, $3 \cdot 1 = 3$

1ª coluna do produto

$a_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 5$

$a_{21} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 5$

2ª coluna do produto

$a_{12} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 11$

$a_{22} = 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 0$

Ordem do produto $\overbrace{(2 \times \underbrace{3) \cdot (3}_{\text{iguais}} \times 2)}^{\text{resultado}} = 2 \times 2$

b) BA $\quad (3 \times 2) \cdot (2 \times 3) = 3 \times 3$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

OBSERVAÇÃO
A ordem dos fatores altera o produto. O produto AB é diferente de BA.

iii) Dadas $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, calcular AB e BA.

a) AB: $(3 \times 2) \cdot (2 \times 2) = 3 \times 2 \Rightarrow$ existe AB.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) BA: $(2 \times \underbrace{2) \cdot (3}_{\neq} \times 2) \Rightarrow$ não existe BA, porque o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A.

OBSERVAÇÃO
Duas matrizes não nulas podem ter um produto nulo.

iv) Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcular AI.

$$AI = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$(2 \times \underbrace{3) \cdot (3}_{=} \times 3) \Rightarrow 2 \times 3$$

OBSERVAÇÃO
O **produto de uma matriz pela matriz identidade** reproduz a matriz inicial, AI = A.

O **produto de uma matriz por uma matriz diagonal** à esquerda reduz-se a uma matriz em cujas linhas estão os produtos dos elementos correspondentes da matriz dada pelos elementos da diagonal.

Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix}$$

Se o produto for pela matriz diagonal à direita, o mesmo acontece com as colunas.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2b & 3c \\ d & 2e & 3f \\ g & 2h & 3i \end{bmatrix}$$

6.4.1 – Potenciação de matrizes

DEFINIÇÃO
Potência de matrizes.

Define-se a **potenciação de matrizes** como:

$$A^0 = I,\ A^1 = A,\ A^n = A^{n-1} \cdot A \text{ para } n \in \mathbb{N},$$

em que I é a matriz identidade de mesma ordem que A. A matriz A só poderá ser quadrada.

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, calcular A^2, A^3 e A^4.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$ e assim, sucessivamente.

Logo, $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = -I$, $A^3 = -A$, $A^4 = I$, ...

$A^{4n} = I$, $A^{4n+1} = A$, $A^{4n+2} = -I$, $A^{4n+3} = -A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercícios resolvidos:

1) (UFRJ) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Se A^n denota o produto de A por A, n vezes, determine o valor do número natural k tal que $A^{k^2} - A^{5k} + A^6 = I$, onde I é a matriz identidade.

Solução:

Calculemos:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos induzir que: $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Completando a indução:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como a propriedade se transmite de n a $n + 1$, então ela é verdadeira para qualquer n.

Devemos então ter:

$$A^{k^2} - A^{5k} + A^6 = \begin{bmatrix} 1 & k^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & k^2 - 5k + 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow k^2 - 5k + 6 = 0 \Rightarrow k = 2 \text{ ou } k = 3$$

OBSERVAÇÃO
Não teria sentido calcular a raiz quadrada da matriz I, pois teríamos uma infinidade de soluções do tipo A.

2) Seja $x \neq 0$ um número real. Se $A = \begin{bmatrix} 0 & x \\ \frac{1}{x} & 0 \end{bmatrix}$, calcule A^2.

<u>Solução:</u>

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & x \\ \frac{1}{x} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & x \\ \frac{1}{x} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Propriedades

As propriedades abaixo decorrem da definição do produto de matrizes.

1) $AB \neq BA$ (em geral)

2) $(AB)C = A(BC) = ABC$

3) $A(B + C) = AB + AC$ e $(B + C)A = BA + CA$

4) $AI = IA = A$

5) $(AB)^t = B^t \cdot A^t$

6) $A^p \cdot A^q = A^{p+q}$

7) $(A^p)^q = A^{p \cdot q}$

8) $\text{tr } AB = \text{tr } BA$

Os produtos notáveis da álgebra clássica **não** se aplicam na álgebra das matrizes.

Em geral:

$$\begin{array}{lcl} (A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2 & & (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 \\ (A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2 & \text{pois} & (A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 \\ (A - B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2 & & (A - B)(A - B) = A^2 - AB - BA + B^2 \end{array}$$

Já que $AB \neq BA$. A igualdade pode eventualmente ocorrer.

Exemplos:

i) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Calcular (AB)C e A(BC).

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 17 \\ 21 & 21 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 17 \\ 21 & 21 \end{bmatrix}$$

Temos que (AB)C = A(BC). Note que a ordem deve ser observada.

b) Calcular A(B + C) e AB + AC.

$$B + C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A(B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 14 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 14 & 2 \end{bmatrix}$$

c) Calcular AB e BA.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Note que $AB \neq BA$.

ii) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$, calcular AB e BA.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -7 & 7 & -5 \\ -5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -7 & 7 & -5 \\ -5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

Este é um exemplo em que AB = BA.

iii) Seja A matriz quadrada. Valem os produtos notáveis.

a) $(A + I)^2 = (A + I)(A + I) = A^2 + AI + IA + I^2 = A^2 + 2AI + I^2$

b) $(A - I)^2 = (A - I)(A - I) = A^2 - AI - IA + I^2 = A^2 - 2AI + I^2$

c) $(A + I)(A - I) = A^2 - AI + IA - I^2 = A^2 - I^2$

d) $A^3 - I = (A - I)(A^2 + A + I)$

e) $A^3 + I = (A + I)(A^2 - A + I)$

NOTA
Aqui podemos aplicar os produtos notáveis clássicos, pois AI = IA = A. Também, $(2A + 3I)^2 = 4A^2 + 12AI + 9I^2 = 4A^2 + 12A + 9I$
$(A - 2I)^2 = A^2 - 4AI + 4I^2 = A^2 - 4A + 4I$.

Observação:

A fórmula do binômio de Newton se aplica aos binômios do tipo $(A + I)^n$.

$$(A+I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, I^k \, A^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, A^{n-k}$$

Assim:

$(A + I)^5 = A^5 + 5A^4 + 10A^3 + 10A^2 + 5A + I$

O desenvolvimento é análogo ao de $(x + 1)^n$ substituindo-se o número 1 pela matriz unidade I.

6.4.2 – Matriz idempotente

DEFINIÇÃO
Matriz idempotente.

Matriz idempotente é a matriz A tal que $A^2 = A$.

Exemplos:

i) $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = A$

ii) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} = B$

6.4.3 – Matriz nilpotente de ordem *p*

Matriz nilpotente é a matriz A tal que $A^p = 0$, onde p é a ordem.

DEFINIÇÃO
Matriz nilpotente.

Exemplos:

i) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ordem 2

ii) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ordem 3

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Sejam as matrizes $A_{2 \times 3}$ e $B_{3 \times 4}$, verifique, se existir, o tipo das seguintes matrizes:

a) $A \cdot B$

b) $B \cdot A$

c) A^2

d) B^2

e) $A \cdot A^t$

2 Calcule o produto indicado, em cada caso:

a) $[3 \quad 10] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

b) $[4 \quad 2] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

3 Efetue: $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

4 (UFSC) Sejam $A = (a_{ij})_{4 \times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 4}$ duas matrizes definidas por $a_{ij} = i + j$ e $b_{ij} = 2i + j$, respectivamente. Se $A \cdot B = C$, então qual é o elemento c_{32} da matriz C?

5 (Vunesp) Seja $A = (a_{ij})$ a matriz 2×2 real definida por $a_{ij} = 1$ se $i \leq j$ e $a_{ij} = -1$ se $i > j$.
Calcule A^2.

6 (UFJF-MG) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Determine a e b reais, tais que $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7 (Vunesp) Determine os valores de x, y e z na igualdade de abaixo, envolvendo matrizes reais 2×2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y & 0 \\ x & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z - 4 & 0 \\ y - z & 0 \end{bmatrix}.$$

8 (FGV-SP) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

Obtenha as matrizes:

a) $A^2 + A^3$

b) $\sum_{j=1}^{10} A^j$

9 (FGV-SP) Em uma instituição financeira, um investidor pode aplicar parte de seu capital numa aplicação A, cuja taxa de ganho esperado é 15% ao ano; a outra parte, ele pode aplicar numa aplicação B, com taxa de ganho esperado de 30% ao ano. Todavia, quanto maior o ganho esperado, maior o risco. Alocando parte de seus recursos em A e parte em B, seu ganho esperado ficará entre 15% e 30% ao ano.

a) Se um investidor tiver um perfil de risco tal que seu ganho esperado seja 18% ao ano e seu capital for igual a R$ 40.000,00, quanto deverá aplicar em A e em B?

b) Seja C o capital do investidor, R a sua taxa de ganho anual esperado, x e y os valores aplicados em A e em B, respectivamente. Escreva as relações que devem ser satisfeitas por x e y, usando a forma de equação matricial.

10 (Ufes) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. Determine A^{1998}.

11 (Unirio-Ence-RJ) Um proprietário de dois restaurantes deseja contabilizar o consumo dos seguintes produtos: arroz, carne, cerveja e feijão. No 1º restaurante são consumidos, por semana, 25 kg de arroz, 50 kg de carne, 200 garrafas de cerveja e 20 kg de feijão. No 2º restaurante são consumidos, semanalmente, 28 kg de arroz, 60 kg de carne, 150 garrafas de cerveja e 22 kg de feijão. Existem dois fornecedores, cujos preços, em reais, desses produtos são:

Produto	Fornecedor 1	Fornecedor 2
1 kg de arroz	1,00	1,00
1 kg de carne	8,00	10,00
1 garrafa de cerveja	0,90	0,80
1 kg de feijão	1,50	1,00

A partir dessas informações, obtenha:

a) uma matriz 2×4, que descreva o consumo desses produtos pelo proprietário no 1º e no 2º restaurantes, e uma outra matriz 4×2 que descreva os preços dos produtos nos dois fornecedores;

b) o produto das duas matrizes obtidas no item A, que represente o gasto semanal de cada restaurante junto a cada fornecedor e o lucro semanal que o proprietário terá nos dois restaurantes comprando no fornecedor mais barato.

6.5 – Matriz inversa

Matriz inversa de uma matriz quadrada A é outra matriz quadrada A^{-1} tal que $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$ em que I é a matriz identidade.

DEFINIÇÃO
Matriz inversa.

O método direto para calcular A^{-1} consiste em supor A^{-1} como uma matriz incógnita e obrigar que $A^{-1} \cdot A = I$. Em geral, o processo é trabalhoso porque recai em vários sistemas de equações.

NOTA
São válidas as seguintes propriedades:
$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$
$A^{-p} = (A^{-1})^p$
$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Exemplos:

i) Calcular a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Seja $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$.

Temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x + 2y & z + 2t \\ 3x + 4y & 3z + 4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos os dois sistemas de equações:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} z + 2t = 0 \\ 3z + 4t = 1 \end{cases} \quad \text{que resolvidos darão:}$$

$x = -2,\ y = \dfrac{3}{2},\ z = 1$ e $t = -\dfrac{1}{2}$

e a matriz inversa fica:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ii) Calcular a matriz inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Suponhamos que a inversa de A seja a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$. Forcemos agora a condição:

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos então:

$$\begin{bmatrix} ax+by & az+bt \\ cx+dy & cz+dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualando, temos dois sistemas de equações:

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} az+bt=0 \\ cz+dt=1 \end{cases}$$

Resolvendo os dois sistemas, vem:

$$x=\frac{d}{ad-bc},\ y=\frac{-c}{ad-bc},\ z=\frac{-b}{ad-bc} \ \text{ e } \ t=\frac{a}{ad-bc}$$

A matriz inversa será:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

A condição para que A^{-1} exista é que $ad-bc \neq 0$.

OBSERVAÇÃO
Esta regra só se aplica a matrizes de 2ª ordem.

Uma regra prática para se obter a inversa de uma matriz A de 2ª ordem é: Multiplicar o inverso do número $ad-bc \neq 0$ pela matriz que se obtém da matriz A.

i) Trocando-se os elementos da diagonal principal, um com o outro.

ii) Multiplicando-se os elementos da diagonal secundária por (–1).
Assim:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \times(-1) \qquad \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Se $ad-bc=0$, não existe A^{-1}. Neste caso, diz-se que A é uma matriz singular.

NOTA
Matriz singular é aquela que não tem inversa.

Exemplos:

i) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{1\cdot 1-0\cdot 1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

ii) $B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\dfrac{1}{2\cdot 5-3\cdot 4}\cdot\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{2} & \dfrac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

iii) $C=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \nexists\, C^{-1}$, pois $ad-bc=-12+12=0$

Exercícios resolvidos:

1) Chama-se **autovalor de uma matriz** A ao número real x tal que a matriz $(A - xI)$ não tenha inversa.

a) Calcule os autovalores da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

<u>Solução:</u>

Calculemos: $A - xI = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$A - xI = \begin{bmatrix} 1 - x & 2 \\ -1 & 4 - x \end{bmatrix}$$

A condição para que não exista a inversa $(A - xI)^{-1}$ é que $ad - bc = 0$, logo:
$(1 - x)\,(4 - x) - 2 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$
$x = 2$ ou $x = 3$ são autovalores de A

b) Sendo -1 e 8 os autovalores da matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ a & b \end{bmatrix}$, calcule a e b.

<u>Solução:</u>

Calculemos:

$$A - xI = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ a & b \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 - x & 2 \\ a & b - x \end{bmatrix}$$

$ad - bc = (-3 - x)\,(b - x) - 2a = 0 \Rightarrow x^2 + (3 - \text{b})x + (-3b - 2a) = 0$
Como -1 e 8 devem ser raízes dessa equação:

$$\begin{cases} -1 + 8 = -(3 - b) \\ (-1) \cdot 8 = -3b - 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 10 \\ a = -11 \end{cases}$$

2) Calcule a inversa da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

OBSERVAÇÃO
As matrizes de ordem maior que 2 conduzem à equação de grau superior ao segundo.

Solução:

Seja $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & t & m \\ y & u & n \\ z & v & p \end{bmatrix}$.

Devemos ter $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & t & m \\ y & u & n \\ z & v & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y - z = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t + 2v = 0 \\ u - v = 1 \\ -t + 2u = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m + 2p = 0 \\ n - p = 0 \\ -m + 2n = 1 \end{cases}$$

Temos 3 sistemas, de 3 equações, com 3 incógnitas. Observe que os primeiros membros têm os mesmos coeficientes. Logo, as suas soluções são análogas. Resolvidos os sistemas, temos:

$x = \frac{1}{2}$, $y = z = \frac{1}{4}$, $t = 1$, $u = -v = \frac{1}{2}$ e $m = -\frac{1}{2}$, $n = p = \frac{1}{4}$

A matriz inversa será:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

NOTA
O cálculo da matriz inversa é muito trabalhoso. Veremos mais à frente processos melhores para determinar A^{-1}.

6.6 – Matriz ortogonal

DEFINIÇÃO
Matriz ortogonal.

Matriz ortogonal é a matriz A em que $A \cdot A^t = I$, ou seja, $A^{-1} = A^t$.

Exemplos:

i) $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ii) $B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B \cdot B^t = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

$$B \cdot B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Encontre a matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

2 Determine a matriz inversa de:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3 (Unirio-RJ) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, determine o valor de $A^{-1} + A^t - I_2$.

4 (UFBA) Dadas as matrizes:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$,

verifique quais das afirmações são verdadeiras.

I) Se $A^{-1} = B$, então $b + c = 0$.

II) $C^t + B \cdot C = \begin{bmatrix} -10 & 9 \\ 13 & 7 \end{bmatrix}$

III) A matriz B é uma matriz simétrica.

IV) O produto da matriz B por sua transposta só é possível porque B é uma matriz quadrada.

V) A soma dos termos da matriz X, tal que $BX = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, é igual a zero.

5 (FGV-SP) A, B e C são matrizes de mesma ordem. Sabendo-se que o sistema de equações a seguir (cuja incógnita é a matriz X) tem solução única, obtenha o valor da matriz X.

a) $AX + B = C$ b) $XA - X + B = C$

6 (UFC-CE) Dadas as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$,

determine os seguintes produtos matriciais:

a) $P \cdot A \cdot P^{-1}$ b) $P \cdot A^6 \cdot P^{-1}$

7 (Fuvest-SP) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, calcule a sua inversa A^{-1}.

A relação especial, que você deve ter observado entre A e A^{-1}, seria também encontrada se calculássemos as matrizes inversas de:

$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Generalize e demonstre o resultado observado.

8 (IME-RJ) Determine uma matriz não singular P que satisfaça a equação matricial $P^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, onde

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

9 (Unifor-CE) Se $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, então a matriz $X^t \cdot X^{-1}$ é igual a:

(A) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

10 (Unirio-RJ) O valor de a tal que $\begin{bmatrix} \frac{-11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ seja a matriz inversa de $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ a & 11 \end{bmatrix}$ é:

(A) -1

(B) 3

(C) $\frac{1}{5}$

(D) 2

(E) 5

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (Unitau-SP) A matriz resultante da soma de uma matriz identidade de ordem n com a sua oposta é:

(A) outra matriz identidade de ordem n.

(B) uma matriz singular de ordem n.

(C) a matriz de ordem n que tem todos os termos iguais a zero.

(D) a matriz que tem todos os elementos iguais a n.

(E) a matriz que tem todos os elementos iguais a $2n$.

2 (PUC-SP) A soma das matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

resultará:

(A) não tem sentido a soma.

(B) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

(E) nenhuma das respostas anteriores.

3 (PUC-SP) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, a matriz $-A$ será:

(A) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

(E) nenhuma das respostas anteriores.

4 (Unirio-RJ) O produto das matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$ é tal que:

(A) $A \cdot B = \begin{bmatrix} ac & bd \\ bd & ac \end{bmatrix}$ (C) $B \cdot A = \begin{bmatrix} ac + bd \\ bd + ac \end{bmatrix}$

(B) $A \cdot B = \begin{bmatrix} ad & bc \\ bd & ac \end{bmatrix}$ (D) $B \cdot A = \begin{bmatrix} abcd & abcd \\ abcd & abcd \end{bmatrix}$

(E) $A \cdot B = B \cdot A$, para quaisquer valores de a, b, c, d.

5 (UFF-RJ) Toda matriz de ordem 2×2, que é igual a sua transposta, possui:

(A) pelo menos dois elementos iguais.

(B) os elementos da diagonal principal iguais a zero.

(C) determinante nulo.

(D) linhas proporcionais.

(E) todos os elementos iguais a zero.

6 (PUC-RS)

Se $\begin{bmatrix} x & y \\ 2y & 2x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^2 & y^2 \\ y^2 & x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$,

então xy é igual a:

(A) -6 (C) -1 (E) 6

(B) -5 (D) 1

7 Se A é matriz do tipo 2×3 e AB é matriz do tipo 2×5, então B é do tipo:

(A) 2×2 (D) 3×3

(B) 5×3 (E) nenhuma das respostas anteriores.

(C) 3×5

8 (PUC-SP) O produto de uma matriz do tipo $m \times n$ por outra matriz do tipo $p \times q$ resulta em:

(A) nada se pode afirmar.

(B) uma matriz do tipo $n \times q$.

(C) uma matriz do tipo $m \times q$.

(D) uma matriz do tipo $m \times p$.

(E) nenhuma das respostas anteriores.

9 (Fatec-SP) Sabe-se que as ordens das matrizes A, B e C são, respectivamente, $3 \times r$, $3 \times s$ e $2 \times t$. Se a matriz $(A - B) \cdot C$ é de ordem 3×4, então $r + s + t$ é igual a:

(A) 6
(B) 8
(C) 10
(D) 12
(E) 14

10 (Fafi-MT)

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, então o maior elemento de $A \cdot B$ é:

(A) 19 (B) 20 (C) 30 (D) 31

11 (Unirio-RJ) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

A adição da transposta de A com o produto de B por C é:

(A) impossível de se efetuar, pois não existe o produto de B por C.

(B) impossível de se efetuar, pois as matrizes são todas de tipos diferentes.

(C) impossível de se efetuar, pois não existe a soma da transposta de A com o produto de B por C.

(D) possível de se efetuar e o seu resultado é do tipo 2×3.

(E) possível de se efetuar e o seu resultado é do tipo 3×2.

12 (Cesgranrio-RJ) Na área de informática, as operações com matrizes aparecem com grande frequência. Um programador, fazendo levantamento dos dados de uma pesquisa, utilizou as matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $C = A \cdot B$.

O elemento c_{23} da matriz C é igual a:

(A) 18
(B) 15
(C) 14
(D) 12
(E) 9

13 (PUC-SP) Se

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$,

o produto das matrizes A e B será:

(A) em nada resultará.

(B) $\begin{bmatrix} 17 & 8 & 2 & 4 & 8 \\ 12 & 2 & 9 & 11 & 10 \\ 14 & 27 & 12 & 14 & 10 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 19 & 8 & 11 & 30 \\ 22 & 8 & 10 & 28 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 17 & 8 & 2 & 4 \\ 26 & 29 & 21 & 12 \end{bmatrix}$

(E) nenhuma das respostas anteriores.

14 (PUC-MG)

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{bmatrix}$ e $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$,

o valor do produto ab é:

(A) –4
(B) –6
(C) –8
(D) –12
(E) –17

15 (Cesgranrio-RJ) Resolvendo-se a equação matricial

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$, encontramos para x e y valores respectivamente iguais a:

(A) –2 e 1
(B) –1 e 2
(C) 1 e –2
(D) 1 e 2
(E) 2 e –1

16 (UFRN) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, determine a matriz X que satisfaz a equação matricial: AX + B = C.

17 (UFRN) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e

$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, qual é o resultado de AB – BA?

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 0 & -18 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 20 & 12 \\ 32 & 20 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 20 & 48 \\ 8 & 20 \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} 20 & -18 \\ 12 & 20 \end{bmatrix}$

18 (USP) Consideremos o conjunto S de todas matrizes quadradas 2×2 que podem ser escritas sob a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen }\theta \\ \text{sen }\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

(θ real qualquer). Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

(A) A soma de 2 matrizes quaisquer que pertençam a S ainda pertence a S.

(B) O produto de qualquer matriz por si mesma pertence a S.

(C) A inversa de qualquer matriz de S existe e está em S.

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pertence a S

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

19 (Funrei-MG) Sendo A uma matriz quadrada, definimos $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ vezes}}$.

No caso de A ser a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, é correto afirmar que a soma $A + A^2 + A^3 + A^4 + \ldots + A^{39} + A^{40}$ é igual à matriz:

(A) $\begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 40 & 40 \\ 40 & 40 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 0 & 40 \\ 40 & 0 \end{bmatrix}$

20 (UFRJ) As faculdades A e B oferecem somente cursos de Medicina e Engenharia. A tabela a seguir apresenta as percentagens dos alunos que concluíram seus cursos em 1995, distribuídos segundo sua faculdade e seu curso.

	Medicina	Engenharia
Fac. A	40%	60%
Fac. B	30%	70%

Sabe-se que esses alunos estão atualmente empregados ou desempregados, de acordo com os índices abaixo:

	empregado	desempregado
Medicina	70%	30%
Engenharia	20%	80%

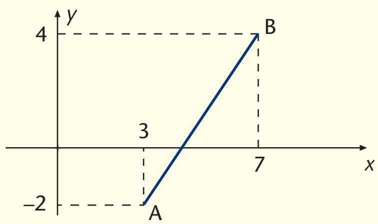
A tabela abaixo deve apresentar as percentagens dos alunos que concluíram seus cursos em 1995, porém distribuídos por faculdade e situação ocupacional (empregado / desempregado).

	empregado	desempregado
Fac. A	X	Y
Fac. B	Z	W

Determine o valor de W.

21 Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$, com $i, j = 1, 2$ sendo $a_{ij} = \dfrac{2i - 3j}{i}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, determine a matriz X, tal que $B^2 + X = 2A$.

22 (Uerj) Cada par ordenado (x, y) do plano pode ser escrito como uma matriz $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Para fazer uma rotação de 90° do ponto de coordenadas (x, y) em torno da origem, no sentido anti-horário, basta multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ por $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Aplicando-se esse método para fazer a rotação do ponto médio do segmento AB da figura acima, suas novas coordenadas serão:

(A) (5, –1)

(B) (–1, 5)

(C) (–5, –1)

(D) (–1, –5)

23 (Cesgranrio-RJ) Cláudio anotou suas médias bimestrais de Matemática, Português, Ciências e Estudos Sociais em uma tabela com quatro linhas e quatro colunas, formando uma matriz, como mostra a figura:

$$\begin{array}{r c}
 & \begin{matrix} 1^{\underline{o}}\,b & 2^{\underline{o}}\,b & 3^{\underline{o}}\,b & 4^{\underline{o}}\,b \end{matrix} \\
\begin{matrix} \text{Matemática} \\ \text{Português} \\ \text{Ciências} \\ \text{Estudos Sociais} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5,0 & 4,5 & 6,2 & 5,9 \\ 8,4 & 6,5 & 7,1 & 8,6 \\ 9,0 & 7,8 & 6,8 & 6,2 \\ 7,7 & 5,9 & 5,6 & 6,2 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Sabe-se que as notas de todos os bimestres têm o mesmo peso, isto é, para calcular a média anual do aluno em cada matéria, basta fazer a média aritmética de suas médias bimestrais. Para gerar uma nova matriz cujos elementos representem as médias anuais de Cláudio, na mesma ordem da matriz apresentada, bastará multiplicar essa matriz por:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

24 (Vunesp-SP) Considere as matrizes 2×2 do tipo

$$A(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}.$$

a) Calcule o produto $A(x) \cdot A(x)$.

b) Determine todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ para os quais $A(x) \cdot A(x) = A(x)$.

25 (Puccamp-SP) Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem *n* e os números reais α e β, não nulos. Das sentenças seguintes, a *falsa* é:

(A) $\alpha \cdot A + \beta \cdot A = (\alpha + \beta) \cdot A$

(B) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

(C) $(A + B) \cdot C = C \cdot (A + B)$

(D) $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$

(E) $(A + B) + C = A + (B + C)$

26 (UMC-SP) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ e $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule a matriz X tal que $A \cdot X = I_2$.

27 (UFRGS-RS) A matriz C fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada usadas em um restaurante:

$$C = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{arroz} \\ \text{carne} \\ \text{salada} \end{matrix} \end{array}$$

A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada usadas na composição dos pratos tipo P_1, P_2 e P_3 desse restaurante:

$$P = \begin{array}{cl} \begin{matrix} \text{arroz} & \text{carne} & \text{salada} \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{prato } P_1 \\ \text{prato } P_2 \\ \text{prato } P_3 \end{matrix} \end{array}$$

A matriz que fornece o custo de produção, em reais, dos pratos P_1, P_2 e P_3 é:

(A) $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

(E) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

28 (UFV-MG) Considere A, B e I matrizes quadradas, de mesma ordem e com elementos arbitrários. Se I é a matriz identidade e B é a inversa de A, então $(2A + 3B) \cdot (A - B)$ é igual a:

(A) $2A^2 + 2I - 3B^2$

(B) $2A^2 + I - 3B^2$

(C) $2A^2 - I - 3B^2$

(D) $2A^2 - 2I - 3B^2$

(E) $2A^2 + 3I - 3B^2$

29 (UFRJ) Marlos Charada, o matemático espião, concebeu um código para transformar uma palavra P de três letras em um vetor Y de $\mathbb{R}^3$ como descrito a seguir.
A partir da correspondência:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Z
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

a palavra P é transformada em um vetor X de $\mathbb{R}^3$.

Em seguida, usando a matriz código $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

o vetor Y é obtido pela equação $Y = A \cdot X$.

Por exemplo, a palavra MAR corresponde ao vetor $X = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ 17 \end{bmatrix}$ e é codificada como $Y = A\,X = \begin{bmatrix} 26 \\ 56 \\ 29 \end{bmatrix}$.

Usando o processo acima, decodifique $Y = \begin{bmatrix} 64 \\ 107 \\ 29 \end{bmatrix}$.

30 (Covest-PE) Assinale a proposição verdadeira.

O produto da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pela matriz $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

é comutativo se:

(A) $x = 1$ e $y = 0$.

(B) $x = 2$ e $y = 0$.

(C) $x = 1$ e para todo $y \in \mathbb{R}$.

(D) $x = 5$ e para todo $y \in \mathbb{R}$.

(E) $x = 10$ e $y = 10$.

31 (Uece) Sejam as matrizes

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & q \\ n & \sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ e } P = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Se $M \cdot M^t = P$, sendo M^t a matriz transposta de M, então $n^2 + n \cdot q$ é igual a:

(A) 6 (C) 12

(B) 9 (D) 18

32 (Unirio-Ence-RJ) O valor de a tal que $\begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ seja matriz inversa de $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ a & 11 \end{bmatrix}$ é:

(A) –1 (D) 2

(B) 3 (E) 5

(C) $\frac{1}{5}$

33 Se a matriz $\begin{pmatrix} 2x + 5 & -x \\ -x & -5 \end{pmatrix}$ não é invertível, então o valor de x é:

(A) 5 (D) –10

(B) 10 (E) 0

(C) –5

34 Sendo $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, resolva a equação: $AX = B$.

35 (UFRJ) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 19\,941\,994 & 19\,941\,994 \\ 19\,941\,994 & 19\,941\,995 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $A^2 = A \cdot A$ e $B^2 = B \cdot B$.

Determine a matriz $C = A^2 \cdot B^2 - (A + B)(A - B)$.

36 (FEI-SP) Se B é a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, então:

(A) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(B) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (E) $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

(C) $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

37 (UEPI) Se $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & p \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ é a matriz inversa da matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix}$, então $p + q$ é igual a:

(A) $\frac{43}{12}$
(B) $\frac{11}{3}$
(C) $\frac{15}{4}$
(D) $\frac{23}{6}$
(E) $\frac{47}{12}$

38 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

a) determine M^{-1}.

b) determine o traço da matriz $M^{-1} \cdot A \cdot M$, sabendo que o traço de uma matriz é a soma dos elementos da diagonal principal.

39 (UFPB) A inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ é a matriz $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & x & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Então, o valor de x é:

(A) –1
(B) 0
(C) 1
(D) 3
(E) 2

40 (Unirio-RJ) Seja $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, uma matriz que satisfaz a equação $B^{-1} \cdot A + 3A = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, em que $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. A soma dos elementos da diagonal principal de B é:

(A) $\frac{1}{3}$
(B) –1
(C) $-\frac{11}{6}$
(D) $-\frac{13}{6}$
(E) $-\frac{19}{6}$

41 (Funrei-MG) Uma matriz $n \times n$ é chamada de *quadrado mágico* quando a soma dos elementos de cada linha, de cada coluna, da diagonal principal e da outra diagonal é igual.

Se a matriz 4×4 dada por $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & c & d \\ r & s & t & u \end{bmatrix}$ é um quadrado mágico, então $\frac{c + t + d + u}{a + b + r + s}$ é igual a:

(A) $-\frac{3}{8}$
(B) $-\frac{7}{32}$
(C) $\frac{2}{3}$
(D) $-\frac{5}{16}$

42 (UFSE) A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ pode ser descrita como a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que a_{ij} é igual a:

(A) $\begin{cases} 1 + i \text{ se } i \leq j \\ i^2 - j \text{ se } i > j \end{cases}$

(B) $\begin{cases} 1 + i \text{ se } i \leq j \\ 2(i + j) \text{ se } i > j \end{cases}$

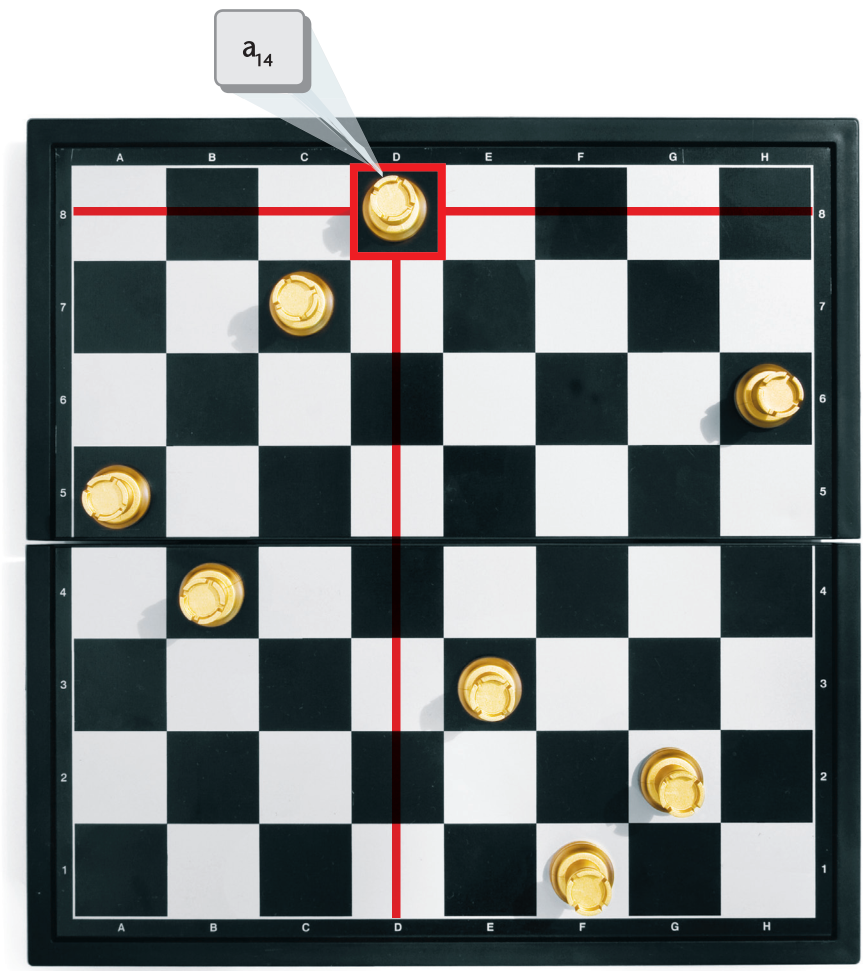
(C) $\begin{cases} 1 + i \text{ se } i \leq 2 \\ 4(i - j) \text{ se } i = 3 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 1 + i \text{ se } i \leq 2 \\ i^2 - 1 \text{ se } i = 3 \end{cases}$

(E) $\begin{cases} 1 + j \text{ se } i \leq 2 \\ i^2 - j \text{ se } i = 3 \end{cases}$

CAPÍTULO VII

DETERMINANTE DE UMA MATRIZ QUADRADA



Misto Quente

Neste capítulo, estudaremos as propriedades dos determinantes, que são uma ferramenta útil na classificação e solução de vários sistemas lineares.

7 – Determinante de uma matriz quadrada

7.1 – Determinante de 2ª ordem

Quando se resolve um sistema de duas equações com duas incógnitas e com coeficientes racionais, reais ou complexos do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$, somos levados à solução:

NOTA
Um determinante de 1ª ordem é considerado igual ao seu único elemento.
$P = |a_{11}| = a_{11}$

$$x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \text{ e } y = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (\text{com } a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0)$$

Observe que o denominador comum determina a natureza do sistema (se possível determinado ou não). Ele é chamado determinante do sistema. Esse fato leva à definição de **determinante de uma matriz quadrada.**

DEFINIÇÃO
Determinante de uma matriz de 2ª ordem.

Dada a matriz quadrada $S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, chama-se **determinante** dessa matriz, e representa-se por det S, a soma alternada $\det S = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Usa-se a notação $\det S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Uma forma de obter o determinante de 2ª ordem é subtrair do produto dos elementos da diagonal principal, o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$\det S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$-a_{12}a_{21}$ $\quad$ $+a_{11}a_{22}$

Exemplos:

i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

ii) Se $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, calcular x de modo que det $(A - xI) = 0$.

$$A - xI = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-x & -1 \\ 0 & 2-x \end{bmatrix}$$

$\det(A - xI) = (3 - x)(2 - x) = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$

Propriedades

1) det A^t = det A (teorema de Becker)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ $\qquad$ $\det A^t = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det A$

2) O det A muda de sinal quando se permutam duas filas paralelas.

NOTA
"Filas" significam "linhas" ou "colunas".

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Seja A' a matriz em que se permuta a 1ª linha com a 2ª:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow A' = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -\det A$$

NOTA
A demonstração referente às colunas é análoga.

Exemplos:

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A^t = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$

ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Permutemos as linhas dessa matriz:

$A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A' = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 2$

det A' = –det A

7.2 – Determinante de 3ª ordem

Considere agora o sistema de 3 equações e 3 incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, somos levados à solução:

$$\begin{cases} x = \dfrac{(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})b_1 + (a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33})b_2 + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}} \\ y = \dfrac{(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})b_1 + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})b_2 + (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}} \\ z = \dfrac{(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})b_1 + (a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})b_2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}} \end{cases}$$

Novamente, o denominador determina se o sistema é possível determinado ou não. Ele é chamado **determinante do sistema**.

DEFINIÇÃO
Determinante de uma matriz de 3ª ordem.

Dada a matriz quadrada $T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, chama-se **determinante** dessa matriz, e representa-se por det T, a soma:

$$\det T = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

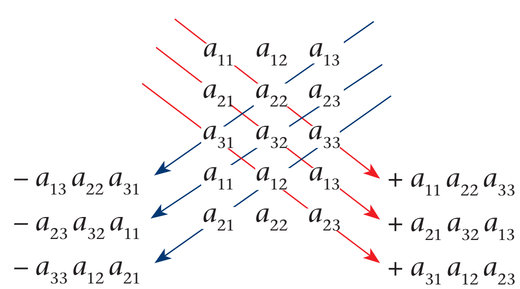
Usa-se também a notação:

$$\det T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Mnemônico para esta fórmula

É conhecido com o nome de **Regra de Sarrus**:

"Repetem-se as duas primeiras linhas (ou colunas) a partir da terceira. Somam-se os produtos dos três elementos situados sobre a diagonal principal e suas paralelas, e subtraem-se os produtos dos três elementos sobre a diagonal secundária e suas paralelas".

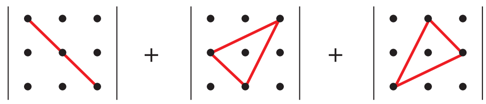


ou

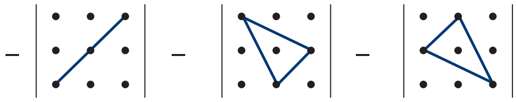
$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - \; - \; - & & & & + \; + \; + \end{array}$$

ou

Termos com sinal positivo



Termos com sinal negativo



NOTA
Os produtos de três elementos sobre as paralelas à diagonal principal estão nos vértices de um triângulo isósceles de base paralela à diagonal principal.
Os termos negativos se obtêm analogamente com a diagonal secundária.

NOTA
Esta regra só se aplica a determinantes de 3ª ordem.

Exemplo:

$$\begin{array}{rccccl} & 1 & 2 & 3 & & \\ & 4 & 3 & 0 & = & \\ & 2 & 2 & 1 & & \\ -2 \cdot 3 \cdot 3 & 1 & 2 & 3 & & +1 \cdot 3 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 \cdot 0 & 4 & 3 & 0 & & +4 \cdot 2 \cdot 3 \\ -4 \cdot 2 \cdot 1 & & & & & +2 \cdot 2 \cdot 0 \end{array}$$

$= 1 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 0 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 0 \text{ (termos com sinal positivo)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 0 - 4 \cdot 2 \cdot 1 \text{ (termos com sinal negativo)}$$

Propriedades

1) $\det A^t = \det A$

Note que det A =

$$\begin{array}{cccc} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & = \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ - & a_{11} & a_{12} & a_{13} & + \\ - & a_{21} & a_{22} & a_{23} & + \\ - & & & & + \end{array}$$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$

NOTA
Todas as operações realizadas com linhas de um determinante podem também ser realizadas com colunas que o determinante não se altera.
Os teoremas relativos às linhas são também válidos para as colunas.

Por outro lado $A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$, então:

$$\det A^t = \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{13} & a_{23} \end{array} =$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23} - a_{31}\,a_{22}\,a_{13} - a_{11}\,a_{32}\,a_{23} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33}$$

é a mesma expressão.

2) Um determinante muda de sinal quando se permutam entre si duas filas paralelas.

De fato, seja A′ a matriz obtida de A trocando a 2ª linha com a 3ª linha. Então:

$$\det A' = \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{13} & a_{23} \end{array} =$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

$$= a_{13}\,a_{31}\,a_{22} + a_{12}\,a_{33}\,a_{21} + a_{11}\,a_{32}\,a_{23} - a_{13}\,a_{32}\,a_{21} - a_{11}\,a_{33}\,a_{22} - a_{12}\,a_{31}\,a_{23}$$

Note que os termos são os mesmos de det A, mas com o sinal trocado. Então, det A′ = –det A.

Os demais casos (1ª com 2ª linha, 1ª com 3ª linha e trocas de colunas) são análogos.

Exemplos:

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 1$

$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A^t = 1$

Trocando-se a 1ª coluna com a 3ª coluna de A:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = -1$$

Trocando-se a 1ª coluna com a 2ª coluna de B:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det C = 1$$

ii) $$\det I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

iii) $$\det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = abc$$

Trocando-se a 1ª coluna com a 3ª coluna:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} = -abc$$

iv) Em geral:

$$\det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ m & b & 0 \\ n & p & c \end{bmatrix} = abc$$

NOTA
O **determinante de uma matriz triangular** é o produto dos termos da diagonal principal.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Calcule o valor dos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

2 (Vunesp) Dadas as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, o determinante da matriz

$A \cdot B$ é:

(A) –1

(B) 6

(C) 10

(D) 12

(E) 14

3 (Faap-SP) Resolva a inequação, sendo $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$$

4 Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 2 & x-2 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x & x \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0$

5 (Unitau-SP) Dadas as matrizes

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$,

calcular o determinante da matriz $C = A \cdot B$.

6 Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 4 \\ 3 & -1 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

7 Sejam os determinantes $A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ e

$B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, determine o quociente de $\frac{A}{B}$.

8 Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x \\ 1 & x & 4 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

9 Encontre os valores de x para que o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & x & 5 \end{pmatrix}$ seja nulo.

10 Calcule o valor de k para que seja verdadeira a igualdade $\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & k & 4 \end{vmatrix} = 111$.

7.3 – Desenvolvimento de um determinante por filas

Outra forma de obter o determinante de uma matriz quadrada é pelo desenvolvimento segundo os elementos de uma dada fila.

No caso dos determinantes de ordem 3, o desenvolvimento conforme a primeira linha é:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ou seja:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow a_{11} \cdot (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Esquematicamente, temos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow a_{11} \cdot (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow a_{12} \cdot (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow a_{13} \cdot (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

O determinante é a soma de todos os 6 produtos de 3 termos cada.

$\det A = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$

Em outras palavras, o determinante é a soma dos produtos dos elementos da primeira linha pelos determinantes que se obtêm suprimindo-se a linha e a coluna do elemento considerado, dotados do sinal $(-1)^{1+j}$ em que $(1, j)$ é a posição do elemento em questão da 1ª linha.

NOTA
(i, j) significa que o elemento está na linha i e na coluna j.

Exemplos:

i) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 1$$

ii) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = 0$

iii) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

DEFINIÇÃO
Menor complementar de um elemento de uma matriz.

O determinante da matriz que se obtem suprimindo-se a linha e a coluna em que está um dado elemento é chamado de **menor complementar** desse elemento.

O determinante da 3ª ordem é, então, a soma alternada dos produtos dos elementos da primeira linha por seus respectivos menores complementares.

Se chamarmos os complementares dos elementos a_{11}, a_{12} e a_{13}, respectivamente, de c_{11}, c_{12}, c_{13}, temos:

$\det A = a_{11} c_{11} - a_{12} c_{12} + a_{13} c_{13}$ ou, ainda,

$\det A = a_{11} (-1)^{1+1} c_{11} + a_{12} (-1)^{1+2} c_{12} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} c_{13}$

DEFINIÇÃO
Cofatores dos elementos de uma matriz.

O fator $(-1)^{i+j} c_{ij}$ é chamado **cofator** do elemento a_{ij} da matriz A. Usa-se, em geral, a notação:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} c_{ij}$$

Exemplo:

Na matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ o menor complementar do elemento $a_{11} = 1$ é $c_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3$. O cofator correspondente é $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot c_{11} = -3$ também.

Por outro lado, o menor complementar do elemento $a_{12} = 2$ é $c_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -6$ e o cofator correspondente é $A_{12} = (-1)^{1+2}\, c_{12} = 6$.

Enfim, o menor complementar de $a_{32} = 8$ é $c_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6$ e seu cofator é $A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6$.

Assim, os cofatores dos elementos da 1ª linha são:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

NOTA
O menor complementar e o cofator correspondente são sempre iguais, exceto pelo sinal que varia em função da posição do elemento.

A definição do determinante toma então, a forma $\det A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$.

Todo o determinante é a soma dos produtos dos elementos da 1ª linha pelos respectivos cofatores.

De fato, um determinante pode ser desenvolvido por qualquer linha (ou qualquer coluna):

$$T = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \qquad T = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

ou

$$T = -d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

ou

$$T = g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

Temos, então, os sinais dos cofatores reunidos na matriz relativa aos sinais correspondentes às posições dos elementos:

$$\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Todo determinante é a soma dos produtos dos elementos de qualquer fila pelos respectivos cofatores. Os cofatores são os complementares com os sinais dados na matriz.

Exemplos:

i) Calcular $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Vamos desenvolver pela 2ª linha, pois tem zeros, o que simplifica o cálculo.

$$\Delta = -0\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 2 \cdot 5 + 0 = 10$$

ii) $$S = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 + 0 + a\begin{vmatrix} 0 & b \\ d & e \end{vmatrix} = a(0 - bd) = -abd$$

iii) $$V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3i - j + 4k$$

iv) $$S = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

Observe que no exemplo iv, o determinante foi desenvolvido pela a terceira coluna.

Corolários

1) Um determinante em que são nulos todos os elementos de uma mesma fila é nulo.

Basta fazer o desenvolvimento do determinante usando aquela fila. Por exemplo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

2) Um determinante fica multiplicado ou dividido por um número (diferente de zero no caso das divisões) quando se multiplicam ou dividem todos os elementos de uma mesma fila por esse número.

Novamente, basta fazer o desenvolvimento segundo os elementos daquela fila. Por exemplo, se a 1ª linha fosse multiplicada por k:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det A' = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - ka_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + ka_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Colocando k em evidência nessa soma:

$$\det A' = k \cdot \det A$$

Exemplos:

i) Seja:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Multiplicando a 1ª linha por 2 ($2l_1$), a 2ª linha por –3 ($-3l_2$) e colocando 2 em evidência na 3ª linha, temos:

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Esse último determinante contém apenas números inteiros, portanto fica mais fácil de calcular.

ii) Tornar todos os elementos da 1ª linha do determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ iguais a 1.}$$

Basta fatorar a 1ª coluna por 2, a 2ª por 3 e a 3ª por –5:

$$\Delta = 2 \cdot 3 \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$$

Se desejarmos um determinante apenas com números inteiros, multiplicamos a 2ª linha por mmc(2, 3, 5) = 30 e a 3ª linha por 10 (dividindo a expressão de Δ para compensar):

$$\Delta = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{10 \cdot 30} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 15 & 20 & -18 \\ 15 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 15 & 20 & -18 \\ 15 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

iii) Demonstrar (sem resolver) a identidade:

$$\begin{vmatrix} yz & x & x^2 \\ xz & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} \quad (x, y, z \neq 0)$$

Seja:

$$D = \begin{vmatrix} yz & x & x^2 \\ xz & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix}$$

Multipliquemos a 1ª linha por x, a 2ª linha por y, a 3ª linha por z e compensemos dividindo o determinante por xyz:

$$D = \frac{1}{xyz} \cdot \begin{vmatrix} xyz & x^2 & x^3 \\ xyz & y^2 & y^3 \\ xyz & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = \frac{xyz}{xyz} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Calcule o valor do determinante de $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & -2 \end{vmatrix}$, desenvolvendo em relação aos elementos da 1ª linha.

2 Desenvolva o determinante $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ em relação aos elementos da 1ª coluna. E, em seguida, pelos elementos da 2ª linha. Verifique se ambos os resultados são iguais.

3 Calcule o determinante $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 8 \\ 10 & 9 & 4 \end{vmatrix}$ desenvolvendo em relação aos elementos da 2ª linha.

4 Dado o determinante $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 5 \\ -8 & 7 & -2 \\ 4 & 5 & -10 \end{vmatrix}$, reduza todos os elementos da 1ª coluna à unidade.

5 Verifique a identidade $\begin{vmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{vmatrix} = 2x^3$.

6 Verifique a igualdade $\begin{vmatrix} 1 & x & -y \\ -x & 1 & z \\ y & -z & 1 \end{vmatrix} = 1 + x^2 + y^2 + z^2$.

7 Verifique a igualdade $\begin{vmatrix} -x & x & x \\ x & -x & x \\ x & x & -x \end{vmatrix} = 4x^3$.

8 Resolva a equação $\begin{vmatrix} x^2 & ax & a^2 \\ 2x & a+x & 2a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, segundo os elementos da 3ª linha.

9 Dê o valor do determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} a & \operatorname{sen} b & \operatorname{sen} c \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix}$ em relação aos elementos da 1ª linha.

7.4 – Teorema de Jacobi

Analisemos, a seguir, algumas propriedades que serão utilizadas na demonstração do teorema de Jacobi.

1) Todo determinante que tem duas filas paralelas iguais é nulo.

$$\text{Seja } T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Permutando entre si a 2ª e a 3ª linhas ($l_2 \Leftrightarrow l_3$), o determinante muda de sinal, logo:

$$-T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = T$$

$$-T = T \Rightarrow T + T = 0 \Rightarrow 2T = 0 \Rightarrow T = 0$$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ (l_2 = l_3)$$

2) É nulo todo determinante em que são proporcionais duas filas paralelas.

Basta pôr em evidência o fator de proporcionalidade, que o novo determinante passa a ter duas filas paralelas iguais, logo o determinante se reduz ao produto de uma constante por zero.

$$\text{Seja: } T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka & kb & kc \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Então:

$$T = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$$

Exemplos:

i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$, pois $l_1 = -2l_3$.

ii) $\begin{vmatrix} 4 & 10 & 0 \\ -6 & -15 & 3 \\ 10 & 25 & 3 \end{vmatrix} = 0$, pois $c_2 = \dfrac{5}{2} \cdot c_1$.

3) Todo determinante, em que os elementos de uma fila são constituídos de somas, desenvolve-se numa soma de determinantes que se obtém substituindo-se a fila de somas, respectivamente, pelas parcelas.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}+b_{11})\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - (a_{12}+b_{12})\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (a_{13}+b_{13})\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + b_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Exemplo:

Calcular, sem desenvolver, o valor do determinante $D = \begin{vmatrix} 740 & 7 & 4 \\ 530 & 5 & 3 \\ 210 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Note que:

$$D = \begin{vmatrix} 740 & 7 & 4 \\ 530 & 5 & 3 \\ 210 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 700+40 & 7 & 4 \\ 500+30 & 5 & 3 \\ 200+10 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & \\ \left|\begin{matrix} \boxed{700} & \boxed{7} & 4 \\ \boxed{500} & \boxed{5} & 3 \\ \boxed{200} & \boxed{2} & 1 \end{matrix}\right| \end{array} + \begin{array}{ccc} d_1 & & d_3 \\ \left|\begin{matrix} \boxed{40} & 7 & \boxed{4} \\ \boxed{30} & 5 & \boxed{3} \\ \boxed{10} & 2 & \boxed{1} \end{matrix}\right| \end{array}$$

A primeira parcela é nula, pois $c_1 = 100c_2$ e a segunda também é nula, pois $d_1 = 10d_3$.
Então:
D = 0 + 0 = 0

Exercícios resolvidos:

1) Calcule o valor do determinante em que seus elementos são termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Solução:

$$G = \begin{vmatrix} a & aq & aq^2 \\ aq^3 & aq^4 & aq^5 \\ aq^6 & aq^7 & aq^8 \end{vmatrix}$$

Colocando em evidência a na 1ª linha, aq^3 na 2ª linha e aq^6 na 3ª linha, temos:

$$G = a^3q^9 \begin{vmatrix} 1 & q & q^2 \\ 1 & q & q^2 \\ 1 & q & q^2 \end{vmatrix} = 0$$

2) Mostre que é nulo todo determinante em que uma fila é constituída de combinações lineares de filas paralelas.

Solução:

Seja o determinante em que a 3ª coluna é constituída de combinações lineares da 1ª e 2ª colunas.

$$\begin{vmatrix} a & b & ma+nb \\ c & d & mc+nd \\ e & f & me+nf \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & ma \\ c & d & mc \\ e & f & me \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & nb \\ c & d & nd \\ e & f & nf \end{vmatrix} = 0+0=0$$

Esses determinantes são nulos porque têm duas colunas de elementos proporcionais.

Os casos envolvendo outras filas são análogos.

Teorema de Jacobi

Um determinante não se altera se aos elementos de uma fila se somam os elementos correspondentes de uma fila paralela multiplicados pela mesma constante.

Seja $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Somaremos aos elementos da 1ª coluna os elementos da 2ª coluna multiplicados por a e os da 3ª coluna multiplicados por b.

NOTA
Indicamos esta operação por: $c_1 \leftarrow c_1 + ac_2 + bc_3$

$$A' = \begin{vmatrix} a_{11} + aa_{12} + ba_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + aa_{22} + ba_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + aa_{32} + ba_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Este determinante se desenvolve na soma:

$$A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} aa_{12} & a_{12} & a_{13} \\ aa_{22} & a_{22} & a_{23} \\ aa_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ba_{13} & a_{12} & a_{13} \\ ba_{23} & a_{22} & a_{23} \\ ba_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

A primeira parcela é igual a A.

A segunda parcela é nula porque a 1ª e a 2ª colunas são proporcionais. ($c_1 = ac_2$).

A terceira parcela é nula porque a 1ª coluna é proporcional à 3ª. ($c_1 = bc_3$).

Então: $A' = A + 0 + 0 \Rightarrow A' = A$.

Exercícios resolvidos:

1) Sabendo que os números 451, 792 e 385 são múltiplos de 11, mostre que o determinante $A = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 7 & 9 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \end{vmatrix}$ é múltiplo de 11.

Solução:
Somando à 3ª coluna a 1ª multiplicada por 100 e a 2ª multiplicada por 10, temos:

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 400+50+1 \\ 7 & 9 & 700+90+2 \\ 3 & 8 & 300+80+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 451 \\ 7 & 9 & 792 \\ 3 & 8 & 385 \end{vmatrix}$$

NOTA
Esta operação é denotada: $c_3 \leftarrow 100c_1 + 10c_2 + c_3$

Colocando o fator 11 em evidência na terceira coluna, vem:

$$A = 11\begin{vmatrix} 4 & 5 & 41 \\ 7 & 9 & 72 \\ 3 & 8 & 35 \end{vmatrix}$$

Como o determinante é constituído de números inteiros, seu valor será um inteiro k, logo A = 11k.

2) Mostre que é nulo o determinante $A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix}$ em que $(a_1, a_2, \ldots, a_9)$ é uma progressão aritmética.

Solução:

Multipliquemos a 1ª linha por –1 e somemos à 2ª linha $(l_2 - l_1)$ e também à 3ª linha $(l_3 - l_1)$:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 - a_1 & a_5 - a_2 & a_6 - a_3 \\ a_7 - a_1 & a_8 - a_2 & a_9 - a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 3r & 3r & 3r \\ 6r & 6r & 6r \end{vmatrix} = 0 \quad (r \text{ é a razão da PA})$$

pois são proporcionais a 2ª e a 3ª linhas.

OBSERVAÇÃO
Determinantes onde cada coluna é uma PG do tipo $(1, q, q^2, \ldots, q^{n-1})$ são conhecidos como **determinantes de Vandermonde**.

3) Calcule $V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

Solução:

Somemos à 2ª linha a 1ª multiplicada por $(-a)$, e somemos à 3ª linha a 2ª multiplicada por $(-a)$ (denotados, respectivamente, $\ell_2 - a\ell_1$ e $\ell_3 - a\ell_2$).

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2 - ab & c^2 - ac \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo segundo os elementos da 1ª coluna:

$$V = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$$

Colocando $b - a$ em evidência na 1ª coluna e $c - a$ na 2ª coluna:

$$V = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

NOTA
A vantagem desta solução é que a resposta se apresenta na forma fatorada.

4) Calcule $T = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$.

Solução:

Desenvolvendo segundo os elementos da 1ª coluna:

$$T = a\begin{vmatrix} x & 0 \\ -1 & x \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} b & c \\ -1 & x \end{vmatrix} = ax^2 + bx + c$$

5) Calcule $B = \begin{vmatrix} x^2 & a & ax \\ x & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Solução:

Somando à 1ª coluna a 3ª coluna multiplicada por (–1), vem:

$B = \begin{vmatrix} x^2 - ax & a & ax \\ x - a & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, colocando $(x - a)$ em evidência na 1ª coluna:

$$B = (x-a)\begin{vmatrix} x & a & ax \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo conforme os elementos da 3ª linha:

$$B = (x-a)\begin{vmatrix} x & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-a)^2$$

6) Calcule $D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$.

Solução:

Somando todas as linhas (ou colunas) à primeira linha:

$D = \begin{vmatrix} 3+x & 3+x & 3+x \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$, colocando $(3 + x)$ em evidência:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}(3+x)$$

Somando a 1ª linha multiplicada por (–1) às demais (2ª e 3ª linhas):

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&x&0\\0&0&x\end{vmatrix}(3+x)=x^2(3+x)$$

7) Calcule $N=\begin{vmatrix}a&a&a\\a&b&b\\a&b&c\end{vmatrix}$.

Solução:

Somando às 2ª e 3ª colunas a 1ª multiplicada por (–1), temos:

$$N=\begin{vmatrix}a&0&0\\a&b-a&b-a\\a&b-a&c-a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}b-a&b-a\\b-a&c-a\end{vmatrix}$$ procedendo analogamente,

$$N=a\begin{vmatrix}b-a&0\\b-a&c-a\end{vmatrix}=a(b-a)(c-a)$$

8) Prove que $\begin{vmatrix}c&b&a\\a&c&b\\b&a&c\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&b&a\\1&c&b\\1&a&c\end{vmatrix}$

e conclua que $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ é divisível por $(a+b+c)$.

Solução:

Tomemos:

$E=\begin{vmatrix}c&b&a\\a&c&b\\b&a&c\end{vmatrix}$ e somemos a 2ª e a 3ª colunas à 1ª coluna:

$$E=\begin{vmatrix}a+b+c&b&a\\a+b+c&c&b\\a+b+c&a&c\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&b&a\\1&c&b\\1&a&c\end{vmatrix}$$

$E=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ac-bc-ab)$

Por outro lado, desenvolvendo o determinante inicial E:

$E=\begin{vmatrix}c&b&a\\a&c&b\\b&a&c\end{vmatrix}=a^3+b^3+c^3-3abc$, logo:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Calcule o valor do determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$.

2 A partir do determinante $\begin{vmatrix} -5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & -11 & 8 \end{vmatrix}$, obtenha um outro determinante no qual a segunda linha só tenha o algarismo 1, e os demais elementos sejam números inteiros.

3 Calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$$

4 Mostre que $\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$.

5 Os números 891, 374 e 462 são múltiplos de 11. Mostre, sem desenvolver, que o valor do determinante

$\begin{vmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ é, também, múltiplo de 11.

6 Seja a matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Calcule o valor do determinante de $k \cdot D$.

7 Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Obtenha a matriz T somando à 3ª coluna de A aos elementos da 1ª multiplicados pelo número real 2. Agora, obtenha o valor dos determinantes A e T.

8 Se $\begin{vmatrix} x & y & c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = A$, determine em função de A os valores dos seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} x & y & c \\ a & b & c \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x & a & 1 \\ y & b & 1 \\ c & c & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3c \\ 2a & 2b & 2c \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

7.5 – Determinantes de ordem *n*

7.5.1 – Desenvolvimento segundo uma fila

As propriedades vistas para os determinantes de 2ª ou 3ª ordem permitem generalizar as definições para uma ordem qualquer.

DEFINIÇÃO
Determinante de uma matriz de ordem *n*.

O **determinante** é a soma alternada dos produtos dos elementos da 1ª linha pelos respectivos complementares.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{c_{11}} - a_{12} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{c_{12}} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{1+n} a_{1n} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,\, n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,\, n-1} \end{vmatrix}}_{c_{1n}}$$

Exemplos:

i) $$Q = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

ii) $$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & p \\ 0 & c & q & s \\ d & r & t & u \end{vmatrix} = 0 - 0 + 0 - a\begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & c & q \\ d & r & t \end{vmatrix} = -a\left(0 - 0 + b\begin{vmatrix} 0 & c \\ d & r \end{vmatrix}\right)$$

$$R = -ab(0 - cd) = abcd$$

iii) $P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ n & n & \dots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ n & \dots & n \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$

Propriedades

As propriedades, a seguir, para determinantes de qualquer ordem podem ser demonstradas por indução (vide volume 3).

1) Um determinante não se altera quando se transformam todas as linhas em colunas e colunas em linhas, isto é, det A^t = det A.

2) Um determinante muda de sinal quando se permutam duas filas paralelas.

Além disso, temos:

3) Um determinante pode ser desenvolvido segundo qualquer linha (ou coluna).

Basta, por uma conveniente troca de filas sucessivas, levar a fila em questão para o primeiro lugar. Sendo $c_1, c_2, \dots, c_n$ as colunas do determinante:

$\Delta_x = |c_1\, c_2 \dots c_{i-2}\, c_{i-1}\, c_i\, c_{i+1} \dots c_n| =$

$= -|c_1\, c_2 \dots c_{i-2}\, c_i\, c_{i-1}\, c_{i+1} \dots c_n| =$

$= |c_1\, c_2 \dots c_i\, c_{i-2}\, c_{i-1}\, c_{i+1} \dots c_n| =$

$= \dots = (-1)^{i-1}|c_i\, c_1\, c_2 \dots c_{i-2}\, c_{i-1}\, c_{i+1} \dots c_n|$

Desenvolvendo pela 1ª coluna deste último determinante:

$$\Delta_n = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,i-1} & a_{1,\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{2i} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,\,i-1} & a_{2,\,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ni} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,\,i-1} & a_{n,\,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$= (-1)^{i-1}(a_{1i}c_{1i} - a_{2i}c_{2i} + \dots + (-1)^{i+n}\, a_{ni}c_{ni})$

que é o desenvolvimento pela coluna *i*, atribuindo a cada termo o sinal correspondente na matriz:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

O sinal relativo à posição (i, j) é $(-1)^{i+j}$.

Exemplo:

Desenvolver pelos elementos da 2ª linha

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = -3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = -3 \cdot (+2) + 1 \cdot (-8) - 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 9 = -6 - 8 + 3 + 18 = 7$$

Todas as propriedades demonstradas para os determinantes de 3ª ordem são válidas para um determinante qualquer e se deduzem analogamente àquelas.

1) É nulo todo determinante em que são nulos todos os elementos de uma mesma fila.

2) Um determinante fica multiplicado ou dividido por um número (diferente de zero no caso da divisão) quando se multiplicam ou dividem todos os elementos de uma mesma fila por esse número.

3) Todo determinante que tem duas filas paralelas iguais é nulo.

4) É nulo todo determinante que tem duas filas paralelas proporcionais.

Teorema de Jacobi

5) Todo determinante em que os elementos de uma fila são constituídos de somas se desenvolve numa soma de determinantes que se obtém substituindo-se a fila das somas, respectivamente, pelas parcelas.

Exemplos:

i) Transformar todos os elementos da 1ª linha do determinante na unidade.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Calculemos o mmc (1, 2, 3, 6) = 6.
Multipliquemos:

a 1ª coluna por $\frac{6}{1} = 6$;

a 2ª coluna por $\frac{6}{2} = 3$;

a 3ª coluna por $\frac{6}{3} = 2$;

a 4ª coluna por $\frac{6}{6} = 1$;

e compensemos dividindo o determinante por $6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

$$\Delta = \frac{1}{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 18 & 0 & -2 & 2 \\ 12 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{6 \cdot 2}{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -1 & 1 \\ 12 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

NOTA
Utilizamos o mmc para evitar trabalhar com frações.

ii) Calcular o valor do determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 5 & 5 & 11 \\ 3 & 5 & -9 & 12 & 1 \end{vmatrix}$$

NOTA
A linha substituída l_5 deve ter coeficiente 1 na combinação linear para não alterar o determinante.

Como a 1ª coluna já tem três zeros, vamos transformar o número 3 da 5ª linha em zero fazendo $l_5 - 3l_1$ na 5ª linha.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 5 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 9 & 2 & 0 & 2 \\ -10 & 5 & 5 & 11 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo pelos elementos da 3ª coluna porque ela tem 3 zeros:

$$\Delta = 5 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 9 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 9 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo pela 2ª coluna:

$$\Delta = 5 \cdot 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 10 \cdot (-6) = -60$$

Exercícios resolvidos:

1) Resolva o determinante $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$.

Solução:

Multiplicando a 1ª coluna por (–1) e somando às demais, temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^3$$

pois todos os elementos de um mesmo lado da diagonal são zeros.

2) Resolva o determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

Solução:

Observe que se somarmos todas as linhas à primeira temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4+x & 4+x & 4+x & 4+x \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = (4+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = (4+x)x^3$$

pois recaímos no exercício anterior.

3) Calcule os valores de x na equação $\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ x & x & x_4 & x_5 \\ x & x & x & x_6 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = 0$.

Solução:

Multiplicando a 1ª coluna por –1 e somando às demais, temos:

$$\begin{vmatrix} x & x_1 - x & x_2 - x & x_3 - x \\ x & 0 & x_4 - x & x_5 - x \\ x & 0 & 0 & x_6 - x \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante segundo os elementos da última linha:

$$x \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x & x_2 - x & x_3 - x \\ 0 & x_4 - x & x_5 - x \\ 0 & 0 & x_6 - x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x(x_1 - x)(x_4 - x)(x_6 - x) = 0$$

$x = 0$, $x = x_1$, $x = x_4$ ou $x = x_6$

4) Numa matriz quadrada, de 6ª ordem, os elementos da diagonal principal são iguais a a, os da diagonal secundária são iguais a b e os demais iguais a zero. Calcule o determinante dessa matriz.

<u>Solução:</u>

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo segundo os elementos da 1ª linha:

$$\Delta_6 = a \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^{1+6} \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Resolvendo o primeiro e o segundo determinante pela 5ª linha, temos:

$$\Delta_6 = a \cdot a \cdot (-1)^{5+5} \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b \cdot b \cdot (-1)^{5+1} \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)\Delta_4$$

Observe que Δ_4 é um determinante do mesmo tipo que Δ_6. Resolvendo Δ_4 do mesmo modo como Δ_6, temos:

$\Delta_6 = (a^2 - b^2)\Delta_4$ $\quad\quad$ $\Delta_4 = (a^2 - b^2)\Delta_2$ $\quad\quad$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)$

Multiplicando membro a membro essas igualdades, temos:

$\Delta_6 = (a^2 - b^2)^3$

5) Mostre que o determinante é um polinômio do 5º grau em x.

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Solução:

Desenvolvendo pela primeira coluna, temos:

$$\Delta_5 = a_5 \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Observe que o primeiro determinante é de uma matriz triangular e o segundo é o Δ_4 (análogo ao Δ_5, que se resolve do mesmo modo). Então:

$\Delta_5 = a_5x^5 + \Delta_4$

$\Delta_4 = a_4x^4 + \Delta_3$

$\Delta_3 = a_3x^3 + \Delta_2$

$\Delta_2 = a_2x^2 + \Delta_1$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ -1 & x \end{vmatrix}$ $\quad$ Somando membro a membro essas igualdades, temos:

$\Delta_5 = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

que é a expressão geral de um polinômio do 5º grau em x.

NOTA
Por exemplo:

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

6) Mostre que quando se multiplica uma matriz quadrada de ordem n por um número p, seu determinante fica multiplicado por p^n.

Solução:

Seja $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Então, $pM = \begin{bmatrix} pa_{11} & pa_{12} & \dots & pa_{1n} \\ pa_{21} & pa_{22} & \dots & pa_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ pa_{n1} & pa_{n2} & \dots & pa_{nn} \end{bmatrix}$.

Assim, extraindo um p de cada linha:

$$\det(pM) = p \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ pa_{21} & pa_{22} & \dots & pa_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ pa_{n1} & pa_{n2} & \dots & pa_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(pM) = p \cdot p \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ pa_{n1} & pa_{n2} & \dots & pa_{nn} \end{vmatrix} = \dots = p^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(pM) = p^n \det M.$$

7) Um determinante é hemissimétrico ou antissimétrico quando $a_{ij} = -a_{ji}$ para todos i e j.
Mostre que:

i) a diagonal principal é de zeros;

ii) o seu valor é 0 quando for de ordem ímpar.

NOTA
O determinante de uma matriz antissimétrica de ordem par não é necessariamente zero. Por exemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Solução:

i) Como $a_{ij} = -a_{ji}$, então $a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$.

ii) $\det A_n = \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{11} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{12} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$

$$\det (A_n^t) = \begin{vmatrix} 0 & -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ a_{11} & 0 & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ a_{12} & a_{23} & 0 & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & 0 \end{vmatrix} = \det A_n$$

porque todo determinante é igual ao de sua matriz transposta.
Por outro lado, podemos obter A_n^t multiplicando todas as linhas de A_n por (–1). Então:

$$\det (-A_n) = (-1)^n \det A_n = \begin{vmatrix} 0 & -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ a_{11} & 0 & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ a_{12} & a_{23} & 0 & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & 0 \end{vmatrix} = \det (A_n^t) = \det A_n$$

Como n é ímpar:

$(-1)^n \det A_n = -\det A_n = \det A_n \Rightarrow \det A_n = 0$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Dê o valor do determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

2 Calcule o valor do determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.

3 Resolva a equação em $\mathbb{R}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & x & -1 \\ 9 & 4 & x^2 & 1 \\ 27 & -8 & x^3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

4 Calcule o valor do determinante aplicando as propriedades.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -4 \end{vmatrix}$

5 Demonstre a identidade:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x^4 - 4x^2 + 1$$

6 Resolva a equação $\begin{vmatrix} x+2 & x+7 & x+6 \\ x+9 & x+5 & x+1 \\ x+4 & x+3 & x+8 \end{vmatrix} = 0$.

7 Calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & \frac{2}{3} & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 15 \\ -\frac{2}{5} & 3 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

8 Dê o valor do determinante na forma mais simples:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & p & n \\ 1 & p & 0 & m \\ 1 & n & m & 0 \end{vmatrix}$$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 O valor de $\begin{vmatrix} \cos a & -\text{sen } a & 0 \\ \text{sen } a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ é:

(A) $4(\cos a + \text{sen } a)$
(B) 4
(C) $2(\cos^2 a - \text{sen } a)$
(D) 2
(E) 0

2 (UFSC) Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } n = \det(AB).$$

Calcule 7^n.

3 (Mack-SP) A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ k & 3 \end{bmatrix}$ é igual à sua transposta. Então, o det $(k^2 \cdot A)$ é igual a:

(A) 64
(B) 32
(C) 16
(D) 8
(E) 4

4 A soma dos determinantes $\begin{vmatrix} r & s & t \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} x & y & z \\ r & s & t \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ vale:

(A) $2 \cdot (r - x)(s - y)(t - z)$
(B) $(r + s + t)(x + y + z)$
(C) 6
(D) 12
(E) 0

5 (FEI-SP) As faces de um cubo foram numeradas de 1 a 6; depois, em cada face foi registrada uma matriz de ordem 2, com elementos definidos por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i + f, \text{ se } i = j \\ j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

em que f é o valor associado à face correspondente. Qual o valor do determinante da matriz registrada na face 5?

6 O determinante $\begin{vmatrix} 5 & \log_5 5 & \log_5 5 \\ 5 & \log_5 125 & \log_5 25 \\ 8 & \log_3 27 & \log_3 243 \end{vmatrix}$ tem por valor:

(A) 0
(B) 1
(C) 90
(D) 80
(E) 122

7 (Fuvest-SP) Calcule: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

8 (UFRN) Sendo $a = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2}$ e $b = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$, o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ é igual a:

(A) $\dfrac{1}{4}$
(B) 4
(C) 1
(D) $\dfrac{1}{2}$

9 (PUC-MG) O valor do determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$ é igual a:

(A) −4
(B) −3
(C) −1
(D) 2
(E) 3

10 O polinômio $P(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & x \\ 0 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix}$

(A) é identicamente nulo.
(B) tem grau 5.
(C) é divisível por $x^2 - 1$.
(D) tem raízes 0, – 1, – 2, – 3.
(E) Nenhuma das respostas anteriores.

11 (Unilins-SP) O determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ é positivo, quaisquer que sejam os valores de a, b, c satisfazendo as relações:

(A) $b > a$ e $c > b$

(B) $b > a$ e $c > a$

(C) $b < a$ e $c < b$

(D) nenhuma das respostas anteriores

12 (Ufal) Seja D o determinante da matriz:

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3}, \text{ tal que } a_{ij} = \begin{cases} x + 1, \text{ se } i < j \\ 0, \text{ se } i = j \\ 1, \text{ se } i > j \end{cases}.$$

O menor número real x, de modo que D = 0, é:

(A) –4

(B) –3

(C) –2

(D) –1

(E) 0

13 (Fafi-MG) O valor de $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ é:

(A) –1

(B) 0

(C) 1

(D) 2

14 (Poli-SP) Acrescentando-se a unidade a cada um dos elementos da matriz $\begin{bmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 \end{bmatrix}$, o determinante:

(A) não se altera.

(B) aumenta de 1.

(C) aumenta de 4.

(D) fica multiplicado por 2.

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

15 (Ufam) Resolvendo a equação $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$

com a, b e c sendo números reais positivos, obtemos:

(A) $x = abc$

(B) $x = \dfrac{abc}{ab+ac+bc}$

(C) $x = \dfrac{a+b+c}{abc}$

(D) $x = \dfrac{abc}{a+b+c}$

(E) $x = 0$

16 (UFF-RJ) Assinale o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} \cos^2 p & -\text{sen}^2\, p & \cos 2p \\ \cos^2 p & \text{sen}^2\, p & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

(A) –1

(B) sen $2p$

(C) 1

(D) cos $2p$

(E) 0

17 Calcule x e y:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ x & y & 5 \end{vmatrix} = 6 \text{ e } \begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 2 & y & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 47$$

(A) $x = 1$, $y = 3$

(B) $x = 3$, $y = 2$

(C) $x = 4$, $y = 4$

(D) $x = 4$, $y = 3$

18 (Fuvest-SP) Se A é uma matriz 2 × 2 inversível que satisfaz $A^2 = 2A$, então o determinante de A será:

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

19 (Ufop-MG) O conjunto solução da inequação

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -7 & x & 3 \\ -5 & 1 & x \end{vmatrix} \text{ é:}$$

(A) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 1\}$

(B) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \text{ ou } x \geq 1\}$

(C) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq -1\}$

(D) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$

(E) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \text{ ou } x \geq -1\}$

20 (Faap-SP) Considere os determinantes

$$A=\begin{vmatrix}2 & -1\\0 & 3\end{vmatrix};\ B=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\-1 & 0 & 2\\1 & 1 & 3\end{vmatrix}\ \text{e}\ C=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1 & 1\\-1 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

então $\frac{1}{2}A + 2B^2 - 2C$ vale:

(A) 133
(B) 120
(C) –100
(D) –130
(E) 128

21 (UFU-MG) Considere a matriz $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\x-1 & 2x & 4x-1\\8 & 6 & 3\end{bmatrix}$

e que os números $x-1$, $2x$ e $4x-1$ são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão geométrica.

a) Encontre o valor de x.

b) Utilizando o valor obtido para x no item *a*, calcule o determinante $A^t - I$, onde A^t é a matriz transposta de A e I é a matriz identidade de ordem 3.

22 (Facs-BA) O gráfico da função real

$$g(x)=\det\begin{pmatrix}1 & -1 & x\\3 & 5 & -1\\1 & 2 & x^2\end{pmatrix}:$$

(A) intercepta o eixo OX no ponto de abscissa $x=-\frac{3}{8}$.
(B) intercepta o eixo OY no ponto de ordenada $y=-3$.
(C) passa pela origem do sistema de coordenadas.
(D) não intercepta o eixo OX.
(E) intercepta os eixos coordenados em três pontos.

23 (UPE) Se A é uma matriz quadrada de ordem n, de elementos reais, λ é um número real e I, a matriz identidade de ordem n, chama-se "valor próprio" de A a uma raiz da equação $\det(A-\lambda\cdot I)=0$, em que "det" significa determinante.
Dessa forma, a soma dos valores próprios da matriz A, abaixo, é:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

(A) 4
(B) 2
(C) 0
(D) 6
(E) – 4

24 (Furg-RS) Os valores reais de x que satisfazem a equação $\begin{vmatrix}2^x & 4^x & 8^x\\1 & 1 & 1\\-1 & 0 & 2\end{vmatrix}=0$ são números:

(A) racionais não inteiros.
(B) irracionais.
(C) pares.
(D) inteiros negativos.
(E) inteiros consecutivos.

25 (UFSE) Se $D_1=\begin{vmatrix}2^n & -1 & 0\\1 & 2^n & 2\\2^n & 0 & 1\end{vmatrix}$ e $D_2=\begin{vmatrix}2^n & 1\\1 & 2^n\end{vmatrix}$,

com $n\neq 0$, então o quociente $\frac{D_1}{D_2}$ é igual a:

(A) 2^{n+1}
(B) $1+2^{n+1}$
(C) $\frac{2^n-1}{2^n+1}$
(D) $\frac{1}{2^n+1}$
(E) $\frac{2^n}{2^n-1}$

26 (Unifor-CE) Seja D o valor do determinante da matriz $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ em que $a_{ij}=\begin{cases}x \text{ se } i=j\\ i-j \text{ se } i\neq j\end{cases}$.

Obter-se-á $D\leq 1$ se, e somente se, x for um número real tal que:

(A) $-\frac{1}{2}\leq x\leq 1$
(B) $-1\leq x\leq \frac{1}{2}$
(C) $-1\leq x\leq$ e $x\neq\frac{1}{2}$
(D) $x\leq -\frac{1}{2}$ ou $x\geq 1$
(E) $x\leq -1$ ou $x\geq\frac{1}{2}$

27 (Unesp-SP) Determine os valores de $0 \leq \theta \leq 2\pi$, de maneira que o determinante $\begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & \text{sen}\,\theta \end{vmatrix}$ seja nulo.

28 (Unisinos-RS) A matriz B, de 2ª ordem, é definida por $b_{ij} = \log_2 (i \cdot j)$. O determinante da matriz –3B é:

(A) 3
(B) –3
(C) 9
(D) –9
(E) 0

29 (USP) Sendo *a*, *b*, *c*, *d* quatro números diferentes e não nulos, o número de menores de 2ª ordem, não nulos que podem ser extraídos da matriz

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 0 & a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ 0 & a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{Vmatrix} \text{ é:}$$

(A) 60
(B) 76
(C) 84
(D) 100
(E) nenhuma das respostas anteriores.

30 (EESC-SP) A única proposição correta é:

(A) para se multiplicar um determinante por um número, multiplicam-se todos os seus elementos por esse número.
(B) todo determinante é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos complementos algébricos dos elementos correspondentes de outra fila paralela.
(C) um determinante não se altera se aos elementos de uma fila se adicionam os elementos correspondentes de uma outra fila paralela multiplicados por um mesmo fator arbitrário.
(D) todo determinante é igual à soma dos produtos dos elementos da diagonal principal pelos respectivos complementos algébricos.
(E) quando se trocam as linhas de uma matriz com as colunas da mesma ordem, o determinante da matriz transposta é o oposto do determinante da matriz dada.

31 (Unilins-SP) O valor do determinante abaixo é:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ a & 0 & c & 0 \\ a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & d \end{vmatrix}$$

(A) $3abcd$
(B) $2abcd$
(C) $3abc$
(D) $-3abc$
(E) $-2abd$

32 (Unilins-SP) Estando *a*, *b*, *c*, em P.A. de razão *r*, o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$:

(A) é sempre positivo.
(B) dada a razão *r*, depende de *a*.
(C) depende só de *r*, qualquer que seja *a*.
(D) é $a^3 - r^3$.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

33 (Fepam-MG) A é uma matriz quadrada de ordem 4 e det (A) = –6. O valor de *x*, tal que det (2A) = *x* – 97, é:

(A) –12
(B) 0
(C) 1
(D) $\frac{97}{2}$
(E) 194

34 (USP) Sejam os determinantes

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ e } B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ então:}$$

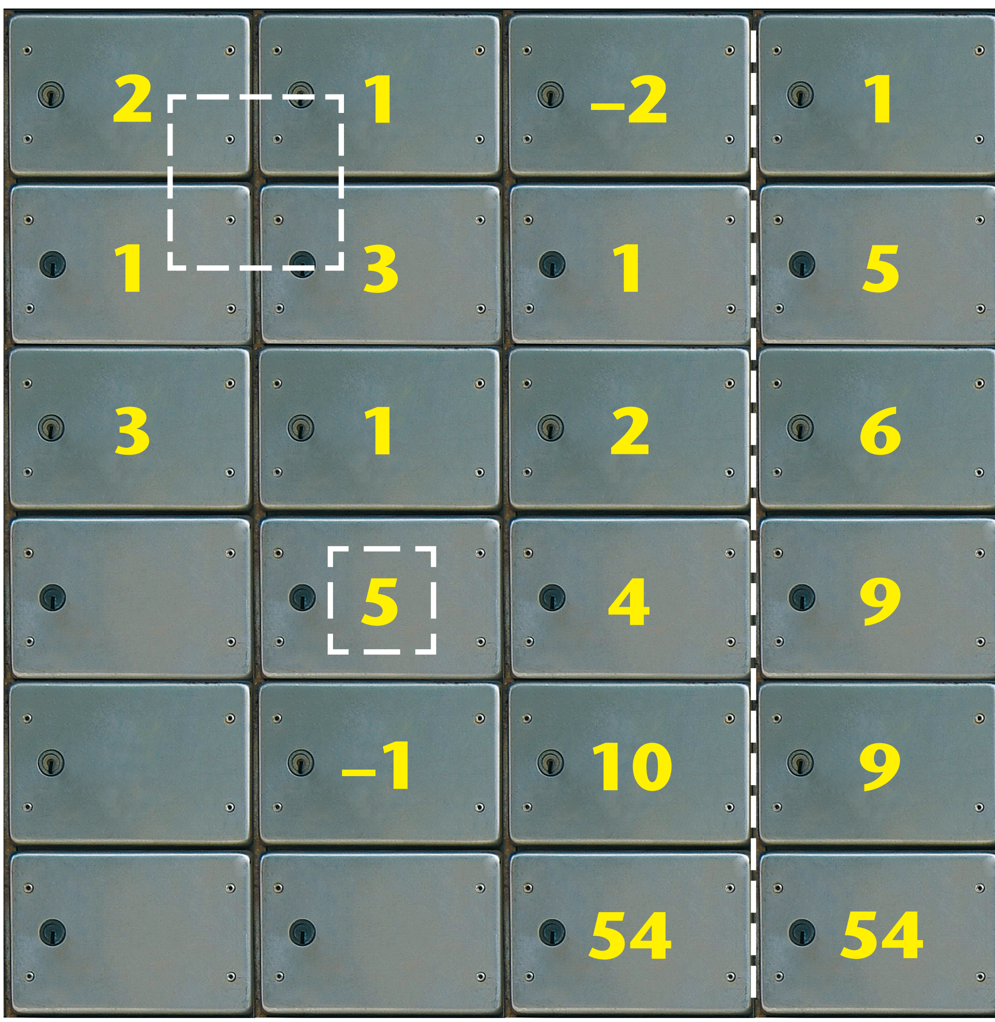
(A) A = B
(B) A = –B
(C) A > B
(D) A < B
(E) nenhuma das respostas anteriores.

35 (EESC-SP) Um determinante é nulo somente quando:

(A) todos os seus elementos são nulos.
(B) todos os elementos de uma linha são nulos.
(C) todos os elementos de uma coluna são nulos.
(D) duas colunas são iguais.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

CAPÍTULO VIII

SISTEMAS LINEARES



Kopioto/Dreamstime.com

Neste capítulo, aprenderemos a resolver sistemas lineares de vários formatos distintos (mesmo que eles tenham infinitas soluções ou até mesmo nenhuma solução).

8 – SISTEMAS LINEARES

8.1 – Noções básicas

Equação linear

DEFINIÇÃO
Equação linear.

Chama-se **equação linear** de incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ a toda equação do 1º grau do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

Em que $b, a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais.

NOTA
Em geral, o termo independente de uma equação linear é escrito no 2º membro da igualdade.

Exemplo:

Na equação $2x + y - 3z = 7$, os número 2, 1 e –3 são os coeficientes e 7 é o termo independente.

Equação linear homogênea

DEFINIÇÃO
Equação linear homogênea.

Quando o termo independente é igual a zero ($b = 0$), a equação linear fica com o seguinte aspecto:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$$

e é chamada de **equação linear homogênea**.

Exemplo:

A equação $x + 2y - 5z = 0$ é homogênea.

Dizemos que o conjunto ordenado de números reais $x_1 = r_1, x_2 = r_2, ..., x_n = r_n$ é solução da equação $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ quando a igualdade se torna verdadeira para esses valores das incógnitas, isto é:

$$a_1r_1 + a_2r_2 + ... + a_nr_n = b \text{ é uma proposição verdadeira.}$$

Sistema de equações lineares

Chama-se **sistema de equações lineares** cujas incógnitas são $x_1, x_2, ..., x_n$ a um conjunto de equações da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{l} \text{ou } \Sigma a_{ij}x_j = b_i \\ \text{com } i \in \{1, 2, ..., m\} \\ \text{e } j \in \{1, 2, ..., n\} \end{array} \right)$$

com m equações e n incógnitas.

DEFINIÇÃO
Sistema de equações lineares.

NOTA
A chave colocada à esquerda das equações significa que elas são simultâneas. Logicamente, a chave representa o conectivo E.

Exemplos:

i) $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + y + 2z = 6 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

4 equações e
3 incógnitas

ii) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x - y - z = 2 \end{cases}$

2 equações e
3 incógnitas

iii) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$

2 equações e
2 incógnitas

Dizemos que um conjunto ordenado de valores reais $r_1, r_2, ..., r_n$ é solução de um sistema e representamos por $(r_1, r_2, ..., r_n)$ quando é solução de todas as equações do sistema.

Exemplos:

i) O terno ordenado (–1, 1, 3), isto é, $x = -1$, $y = 1$ e $z = 3$, é solução do sistema (i) acima; o terno $(x, 3 - 4x, -5 + 7x)$ para qualquer x é solução do sistema (ii) e o par ordenado (3, 1), ou seja, $x = 3$ e $y = 1$, é solução do sistema (iii).

ii) O sistema homogêneo:

$$\begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ x + y + 2z + t = 0 \\ x + 2y + z + t = 0 \\ 2x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

tem a solução (0, 0, 0, 0), isto é, $x = y = z = t = 0$.

Aliás, todo sistema homogêneo tem pelo menos a solução (0, 0, ..., 0), que é chamada **solução trivial** ou **natural**.

NOTA
Um sistema é **homogêneo** quando todos os termos independentes das equações são nulos.

Um sistema é **possível** quando tem pelo menos uma solução. Se um sistema possível tem apenas uma solução ele é dito **determinado** e se tem mais de uma solução é dito **indeterminado**.

Um sistema é **impossível** quando não tem solução. Dois sistemas são **equivalentes** quando têm as mesmas soluções, isto é, quando as soluções de um deles são soluções do outro e vice-versa.

Matriz incompleta e matriz completa

DEFINIÇÃO
Matriz incompleta e matriz completa.

Chama-se **matriz incompleta** de um sistema à matriz formada pelos coeficientes das incógnitas.

Matriz completa é aquela que, além dos coeficientes, inclui os termos independentes das equações.

Assim, no sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

As matrizes incompleta e completa são respectivamente:

$$\underset{\text{incompleta}}{m = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}} \quad \text{e} \quad \underset{\text{completa ou ampliada}}{M = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]}$$

Destacamos com uma barra tracejada vertical os termos independentes.

Exemplos:

incompleta completa

i) $$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ 3x - y - z = 3 \\ x + 0y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow m = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

ii) $$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow m = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad M = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

iii) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow m = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

Propriedade fundamental

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1 = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n - b_m = 0 \end{cases}$$

Formemos uma nova equação multiplicando a 1ª por α_1, a 2ª por α_2, ..., a mª por α_m e somemos:

$$\alpha_1(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1) + \ldots + \alpha_m(a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n - b_m) = 0$$

Se o conjunto $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ é solução do sistema, suas equações são satisfeitas para os valores $r_1, r_2, \ldots, r_n$ e a soma acima ficará:

$$\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \ldots + \alpha_m \cdot 0 = 0$$

Logo, a solução do sistema é solução desta nova equação, chamada **combinação linear das equações**, com coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

Com isso, podemos substituir, num sistema, qualquer equação por uma combinação linear dela com as demais equações (desde que a equação substituída seja utilizada com coeficiente diferente de zero).

Exemplos:

i) Seja o sistema $\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 6 \end{cases}$ cuja solução é (1, 1, 1).

Multipliquemos a 1ª equação por 3, a 2ª por –2 e somemos à 3ª equação. Temos:

$$3(2x + y - 2z) - 2(x - 2y + z) + (3x + y + 2z) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 6$$

Efetuando:

$7x + 8y - 6z = 9$, que também tem a solução (1, 1, 1).

A solução do sistema é também solução de qualquer combinação linear de suas equações.

Portanto, o sistema acima é equivalente a:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ 7x + 8y - 6z = 9 \end{cases}$$

NOTA
A equação substituída poderia ser qualquer uma das equações do sistema.

ii) Novamente, considere o sistema:

$$\begin{cases} 2x+y-2z=1 \\ x-2y+z=0 \\ 3x+y+2z=6 \end{cases}$$

Se substituirmos a 3ª equação pela soma das duas primeiras, obtemos o novo sistema:

$$\begin{cases} 2x+y-2z=1 \\ x-2y+z=0 \\ 3x-y-z=1 \end{cases}$$

Que **não** é equivalente ao sistema anterior.
De fato, (–2, –3, –4) é solução deste, mas não é do anterior. Essa não equivalência ocorre porque a equação substituída não foi obtida a partir de uma combinação linear.

Observações:

1) Podemos trocar qualquer equação de lugar num sistema.
2) Podemos trocar qualquer incógnita de lugar, desde que em todas as equações.
3) Se um sistema apresentar uma equação com todos os coeficientes nulos, tal como $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$, essa equação pode ser abandonada, pois aceita como solução qualquer conjunto de valores.
4) Se um sistema apresentar uma equação com todos os coeficientes nulos com exceção do termo independente, tal como $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$ $(b \neq 0)$, o sistema será impossível.

NOTA
Um sistema é possível determinado quando possui uma única solução e impossível quando não possui nenhuma solução.

Resolver um sistema possível determinado é transformá-lo num sistema equivalente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = r_1 \\ 0x_1 + 1x_2 + \ldots + 0x_n = r_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ 0x_1 + 0x_2 + \ldots + 1x_n = r_n \end{cases}$$

por meio da propriedade fundamental e suas consequências.

Exemplo:

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x-y+2z=7 \end{cases} \quad \text{cuja matriz completa é} \quad M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right].$$

Vamos transformar o sistema por meio das propriedades fundamentais (que são também chamadas operações elementares). Como essas operações são realizadas com as equações, elas serão realizadas paralelamente sobre as linhas da matriz completa.

Multiplicando a 1ª equação por (–2) e somando à 2ª equação, faz-se nela desaparecer o termo em x.

Analogamente, multiplicando a 1ª equação por (–3) e somando à 3ª, faz-se nela desaparecer também o termo em x.

O sistema se transforma num sistema equivalente, e a matriz completa se torna mais simples. Temos:

$$\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 0x-3y-3z=-15 \\ 0x-7y-z=-17 \end{cases}$$

A matriz completa fica:

$$\begin{array}{r} L_1 \\ -2L_1+L_2 \\ -3L_1+L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \end{array}\right]$$

OBSERVAÇÃO
As operações elementares com linhas devem ser feitas uma de cada vez. Neste caso, indicamos duas simultaneamente porque a 1ª linha não se alterou entre a primeira e a segunda operação.

Dividindo a 2ª equação por (–3) e multiplicando a 3ª equação por (–1), temos:

$$\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 0x+y+z=5 \\ 0x+7y+z=17 \end{cases}$$

A matriz completa fica:

$$\begin{array}{r} L_1 \\ L_2 \div (-3) \\ L_3 \cdot (-1) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 17 \end{array}\right]$$

Como já fizemos desaparecer a incógnita x, façamos, agora, desaparecer a incógnita y, ficando a mesma em apenas uma equação.

Para isso, vamos trabalhar com a 2ª equação, que só tem as incógnitas y e z.

Multiplicando a 2ª equação por (–2) e somando à 1ª equação, e multiplicando a 2ª equação por (–7) e somando à 3ª equação, temos:

$$\begin{cases} x+0y-z=-2 \\ 0x+y+z=5 \\ 0x+0y-6z=-18 \end{cases}$$

A matriz completa fica:

$$\begin{array}{r} L_2\cdot(-2)+L_1 \\ L_2 \\ L_2\cdot(-7)+L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right]$$

Dividindo a 3ª equação por (–6), vem:

$$\begin{cases} x+0y-z=-2 \\ 0x+y+z=5 \\ 0x+0y+z=3 \end{cases}$$

A matriz completa fica:

$$\begin{array}{r} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \div (-6) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Observe que somente na primeira coluna da matriz existe a incógnita x e que, agora, somente na segunda coluna existe y. Vamos então fazer desaparecer a incógnita z na primeira e na segunda equações. Para isso, vamos operar com a 3ª equação.

Somando a 3ª equação à 1ª e multiplicando a 3ª equação por (–1) e somando à 2ª equação, temos:

$$\begin{cases} x + 0y + 0z = 1 \\ 0x + y + 0z = 2 \\ 0x + 0y + z = 3 \end{cases}$$

A matriz completa fica:

$$\begin{array}{r} L_3 + L_1 \\ L_3 \cdot (-1) + L_2 \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Note que o sistema inicial se transformou:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 0y + 0z = 1 \\ 0x + y + 0z = 2 \\ 0x + 0y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Paralelamente, a matriz completa se transformou, por meio de operações elementares, em uma matriz cuja matriz incompleta é a matriz identidade.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Observações:

1) O processo de eliminação é sistemático, operando inicialmente com a 1ª equação, eliminando a 1ª incógnita. Para que isso seja possível, devemos ter $a_{11} \neq 0$. Em seguida, opera-se com a 2ª equação (devemos ter $a_{22} \neq 0$) eliminado a 2ª incógnita, e assim sucessivamente. A matriz completa vai se transformando até a matriz incompleta se tornar a matriz identidade.
2) Quando algum dos elementos que produzem a eliminação (a_{11}, a_{22}, a_{33}, ...) for nulo, basta trocar de posição alguma equação que tenha o elemento necessário diferente de zero.
3) Um sistema linear pode ser escrito como $mx = b$, onde m é a matriz incompleta do sistema e b é a matriz dos termos independentes. O processo consiste em transformar a matriz $[m \mid b]$ na matriz $[I \mid X]$.

   A matriz X é a solução.

O processo pode ser ligeiramente mais rápido transformando a matriz incompleta numa matriz triangular. Esse processo é chamado de **escalonamento** e será estudado a seguir.

Exemplo:

Reconsideremos o sistema inicial: $\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$

Multiplicando a 1ª equação por (–2) e somando à 2ª equação, e multiplicando a 1ª equação por (–3) e somando à 3ª equação, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ \quad -3y - 3z = -15 \\ \quad -7y - z = -17 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_1 \cdot (-2) + L_2 \\ L_1 \cdot (-3) + L_3 \end{array}$$

Dividindo a 2ª equação por (–3) e multiplicando a 3ª equação por (–1):

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ \quad y + z = 5 \\ \quad 7y + z = 17 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 17 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \div (-3) \\ L_3 \cdot (-1) \end{array}$$

Multiplicando a 2ª equação por (–7) e somando à 3ª equação, vem:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ \quad y + z = 5 \\ \quad -6z = -18 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_2 \cdot (-7) + L_3 \end{array}$$

Resolvendo o sistema de baixo para cima, a última equação dá:

$$-6z = -18 \Rightarrow z = 3$$

Substituindo na 2ª, temos: $y + 3 = 5 \Rightarrow y = 2$
Substituindo $y = 2$ e $z = 3$ na 1ª: $x + 4 + 3 = 8 \Rightarrow x = 1$
Temos a solução (1, 2, 3).

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Destaque em cada equação linear os coeficientes e o termo independente.

a) $-2x + 3y - 6z = 3$

b) $4x + 3y - 6z = 0$

2 Verifique se o terno (–2, 1, 1) é solução da equação $x + y + z = 0$.

3 Verifique se o terno (–2 , 1, 1) é solução do sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ x+y+2z=-1 \end{cases}$$

4 Verifique se o terno (2, –1, –1) é solução do sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ x+y+2z=-1 \end{cases}$$

5 Nos sistemas abaixo destaque a matriz completa e a matriz incompleta.

a) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$

6 Verifique se os sistemas $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 5x + y = 6 \end{cases}$ são equivalentes.

7 Verifique se os sistemas $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + y = 4 \\ -x + y = 8 \end{cases}$ são equivalentes.

8 Resolva os seguintes sistemas lineares:

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ -x + 2y = -8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - 2y = -9 \\ -3x + 4y = 11 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ x - y - z = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x + z = 8 \\ y + z = 5 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ x + 2y + z = 8 \\ 2x + y + z = 7 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3x + 5y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 4x + 7y + 3z = -1 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x \cdot \text{sen}\,\alpha - y \cdot \cos\alpha = -\cos 2\alpha \\ x \cdot \cos\alpha + y \cdot \text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,2\alpha \end{cases}$

m) $\begin{cases} 5x - 2y + 2z = 2 \\ 3x + y + 4z = -1 \\ 4x - 3y + z = 3 \end{cases}$

8.2 – Escalonamento

É um método de transformação de sistemas operando sobre suas matrizes, constituindo um processo poderoso de resolução de sistemas.

Escalonar uma matriz é transformá-la, por meio de operações elementares com linhas, em outra matriz em que o número de zeros iniciais de cada linha é menor do que o número de zeros iniciais da linha seguinte (linhas constituídas somente de zeros devem ser as últimas linhas da matriz).

OBSERVAÇÃO
Procure no dicionário o significado da palavra **escalonamento**.

NOTA
Numa matriz escalonada o primeiro elemento não nulo de cada linha (chamado de **pivô** dessa linha) está à esquerda do pivô da linha seguinte.

Exemplos:

As matrizes A, B e C estão escalonadas.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O método de escalonamento consiste em escalonar a matriz incompleta e resolver o sistema a partir dessa matriz escalonada, como nos exemplos, da seção anterior. Um sistema é escalonado quando sua matriz incompleta está escalonada.

Todo sistema é equivalente a um sistema escalonado.

Exercícios resolvidos:

1) Resolva $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x+2y+z=-8 \\ x+y+2z=8 \end{cases}$.

Solução:

Matriz completa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -8 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ L_1(-1) + L_2(2) \\ L_1(-1) + L_3(2) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -20 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ L_2 + L_3(-3) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & -8 & -56 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 3y+z=-20 \\ -8z=-56 \end{cases}$$

que resulta em $z = 7$, $y = -9$, e $x = 3$ ou $(3, -9, 7)$.

NOTA
Embora tenhamos indicado duas operações de linha simultaneamente, elas foram realizadas uma após a outra.

Como só há uma solução, o sistema é possível determinado.

2) Resolva $\begin{cases} 2x+2y+z=9 \\ x-3y-2z=-7 \\ 3x-y-z=2 \end{cases}$.

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & -3 & -2 & -7 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow L_1 \leftrightarrow L_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -7 \\ 2 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

NOTA

Trocamos de posição L_1 (primeira linha) com L_2 (segunda) apenas para simplificar as operações (quando $a_{11} = 1$).

$$\begin{array}{l} \\ L_1\ (-2)+L_2 \\ L_1\ (-3)+L_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -7 \\ 0 & 8 & 5 & 23 \\ 0 & 8 & 5 & 23 \end{array}\right] \Rightarrow L_2\ (-1)+L_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -7 \\ 0 & 8 & 5 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ abandona-se a 3ª equação

O sistema equivalente é: $\begin{cases} x-3y-2z=-7 \\ 8y+5z=23 \end{cases}$

Transpondo a incógnita z para o 2º membro, vem:

$$\begin{cases} x-3y = 2z-7 \\ 8y = 23-5z \end{cases} \Rightarrow y = \frac{23-5z}{8}$$

Substituindo na 1ª equação: $x = 2z-7+3y = 2z-7+3\cdot\dfrac{23-5z}{8} \Rightarrow x = \dfrac{13+z}{8}$

A solução é $\left(\dfrac{13+z}{8}, \dfrac{23-5z}{8}, z\right)$, qualquer que seja z.

Com isso, há mais de uma solução (infinitas), o sistema é possível indeterminado.

3) Resolva $\begin{cases} 3x-2y+z=6 \\ 2x-y+2z=9 \\ 5x-4y-z=1 \end{cases}$.

Solução:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 9 \\ 5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Permutando a incógnita z com a incógnita x, o sistema fica:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z & y & x & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 9 \\ -1 & -4 & 5 & 1 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} L_1\,(-2)+L_2 \\ L_1+L_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z & y & x & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & -6 & 8 & 7 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow$$

$$L_2 \cdot 2 + L_3 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z & y & x & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

O sistema equivalente é: $\begin{cases} z-2y+3x=6 \\ 3y-4x=-3 \\ 0x=1 \end{cases}$

A 3ª equação do sistema indica um absurdo, logo o sistema não admite nenhuma solução, isto é, é impossível.

8.2.1 – Classificação de sistemas lineares

A) Se o sistema equivalente escalonado tiver uma equação do tipo $0x = b$ com $b \neq 0$, o sistema será **impossível** (S.I.).
Caso contrário, o sistema será possível. Então, após a eliminação das linhas formadas por zeros:

B_1) Se o sistema tiver o número de equações igual ao número de incógnitas, o sistema será **possível determinado** (S.P.D.).

B_2) Se o sistema tiver o número de equações menor do que o número de incógnitas, o sistema será **possível inderterminado** (S.P.I.).

Exercícios resolvidos:

1) Discuta o sistema abaixo conforme valores de a.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 3x - y + az = -6 \end{cases}$$

NOTA
"Discutir" ou "classificar" um sistema é descobrir quantas soluções ele tem, sem necessariamente resolvê-lo.

NOTA
Observe que a colocação do parâmetro na posição a_{33} simplifica o escalonamento. É conveniente que os parâmetros fiquem na última equação.

Solução:

Escalonando a matriz completa do sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & a & -6 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ L_1 - L_2 \cdot 2 \\ L_1 \cdot 3 - L_3 \cdot 2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & 3-2a & 15 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ L_2 \cdot 5 + L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 18-2a & 0 \end{array}\right]$$

O sistema escalonado é: $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ -y+3z=-3 \\ (18-2a)z = 0 \end{cases}$

A natureza do sistema depende do coeficiente de z na 3ª equação. Vejamos as hipóteses:

1ª hipótese

$18 - 2a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 9$. Então, $z = 0$, $y = 3$ e $x = -1$. O sistema será possível determinado, cuja solução será $(x, y, z) = (-1, 3, 0)$.

2ª hipótese

$18 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = 9$

O sistema fica: $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ -y+3z=-3 \\ 0z=0 \end{cases}$

A última equação pode ser abandonada, pois qualquer valor de z a satisfaz. O sistema passa a ter 2 equações com 3 incógnitas. Transpondo os termos em z para o 2º membro, vem:

$$\begin{cases} 2x+y=1-z \\ y=3+3z \end{cases}$$

Substituindo $y = 3 + 3z$ na 1ª equação, temos $2x + 3 + 3z = 1 - z \Rightarrow$ $\Rightarrow x = -1 - 2z$.

O sistema será possível indeterminado, cujas soluções são $(x, y, z) =$ $= (-1 - 2z, 3 + 3z, z)$, $\forall z$ (porque z pode ser qualquer, tomando uma infinidade de valores).

2) Discuta o sistema: $\begin{cases} x+2y+az=2 \\ x+y-z=1 \\ 2x+y+2z=b \end{cases}$

Solução:

Passemos a 1ª equação para o 3º lugar. Obviamente, o sistema não se altera e o parâmetro *a* passa a estar numa posição que torna mais simples as operações elementares. A matriz completa fica:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y+2z=b \\ x+2y+az=2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & b \\ 1 & 2 & a & 2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ L_1 \cdot 2 - L_2 \\ L_1 - L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2-b \\ 0 & -1 & -1-a & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ L_2 + L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2-b \\ 0 & 0 & -5-a & 1-b \end{array}\right]$$

O sistema escalonado fica: $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y-4z=2-b \\ (-5-a)z=1-b \end{cases}$

Devemos fazer as hipóteses cabíveis na 3ª equação $(-5-a)z = 1-b$.

1ª hipótese

$\begin{cases} -5-a \neq 0 \\ \forall b \end{cases} \Rightarrow z = \dfrac{1-b}{-5-a}$ e existirão y e x.

O sistema é possível determinado para $a \neq -5$ e $\forall b$.

2ª hipótese

$\begin{cases} -5-a=0 \\ 1-b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=1 \end{cases}$

O sistema fica: $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y-4z=2-1 \\ 0z=0 \end{cases}$

O sistema será possível indeterminado.

NOTA
Na 2ª hipótese, temos, então, o sistema $\begin{cases} x+y=1+z \\ y=1+4z \end{cases} \Rightarrow x=-3z,$ logo, a solução será $(x, y, z) = (-3z, 1+4z, z), \forall z.$

3ª hipótese

$$\begin{cases} -5-a=0 \\ 1-b\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b\neq 1 \end{cases}$$

O sistema escalonado fica: $\begin{cases} x+y-z=1 \\ \quad y-4z=2-b \\ \qquad 0z = 1-b\ (\neq 0) \end{cases}$

Esse sistema é impossível, pois uma de suas equações (a 3ª) é impossível.

3) Discuta e resolva o sistema matricial: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 7 \\ 6 & 8 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ b \end{bmatrix}$

Solução:

Efetuando o produto e igualando ao 2º membro:

$$\begin{cases} x-2y+3z=-4 \\ 5x-6y+7z=-8 \\ 6x+8y+az=b \end{cases}$$

A matriz completa é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 7 & -8 \\ 6 & 8 & a & b \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} \\ L_1\cdot 5-L_2 \\ L_1\cdot 6-L_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 8 & -12 \\ 0 & -20 & 18-a & -24-b \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_2\cdot 5-L_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 22+a & -36+b \end{array}\right] \div(-4) \Rightarrow \begin{cases} x-2y+3z=-4 \\ y-2z=3 \\ (22+a)z=-36+b \end{cases}$$

1ª hipótese:

$22 + a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -22$ e $\forall b$. O sistema será possível determinado com

$$z=\frac{-36+b}{22+a};\ y=\frac{-6+3a+2b}{22+a};\ x=\frac{8+b+2a}{22+a}$$

2ª hipótese

$$\begin{cases} 22+a=0 \\ -36+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-22 \\ b=36 \end{cases}$$

O sistema escalonado fica: $\begin{cases} x-2y+3z=-4 \\ \quad y-2z=3 \\ \quad\quad 0z=0 \end{cases}$

Abandona-se a 3ª equação e resolve-se o sistema de 2 equações com 3 incógnitas:

$$\begin{cases} x-2y+3z=-4 \\ \quad y-2z=3 \end{cases} \Rightarrow y = 3 + 2z \text{ e } x = 2 + z$$

O sistema será indeterminado com a solução $(x, y, z) = (2 + z, 3 + 2z, z)$, $\forall z$.

<u>3ª hipótese:</u>

$$\begin{cases} 22+a=0 \\ -36+b \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-22 \\ b \neq 36 \end{cases}$$

O sistema fica impossível, pois reduz-se a: $\begin{cases} x-2y+3z=-4 \\ \quad y-2z=3 \\ \quad\quad 0z \neq 0 \end{cases}$, impossível.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Discuta o sistema conforme o valor de a.

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ x+ay=1 \end{cases}$$

2 Resolva e discuta os sistemas a seguir aplicando o método de escalonamento à matriz completa de cada um.

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ 5x-2y=14 \\ 2x-y=5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x+37y=22 \\ x+6y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x+5y=44 \\ 2x-y=4 \\ -x+3y=8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x-3y=-5 \\ 8x-3y=3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x-y+3z=5 \\ 3x-4y+12z=7 \\ x+2y-6z=3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x+7y-5z=2 \\ -x+y+z=2 \\ x+2y-2z=0 \\ x-4y+10z=6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} ax+y=1 \\ x+ay=-1 \end{cases}$

3 Resolva a equação matricial: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix}$

4 Resolva a equação matricial: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \end{pmatrix}$

5 Resolva a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6 Calcule os valores de k para que o sistema $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ kx-6y=0 \end{cases}$ seja possível determinado.

7 (Fuvest-SP)

a) Resolva o sistema $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ -x+y=2 \end{cases}$ em que x e y são números reais.

b) Usando a resposta do item anterior, resolva o sistema:

$$\begin{cases} 2(a^2-1)-(b-1)^2=-3 \\ -(a^2-1)+(b-1)^2=2 \end{cases}$$

8 (Fuvest-SP) Dado o sistema S $\begin{cases} 2y+x=b \\ 2z-y=b \\ az+x=b \end{cases}$, resolva-o para:

a) $a=0$ e $b=1$

b) $a=4$ e $b=0$

8.3 – Matriz inversa por escalonamento

Resolver um sistema linear do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ \vdots \qquad\ \ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\ \ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

é transformá-lo por meio de operações elementares com linhas num sistema equivalente do tipo:

$$\begin{cases} x_1 = r_1 \\ x_2 = r_2 \\ \ \vdots \\ x_n = r_n \end{cases}$$

em que $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ é a solução do sistema.

Vamos escrever matricialmente o sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}}_{I} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{B}$$

ou seja: $A \cdot X = I \cdot B$, em que A é a matriz incompleta do sistema, X é a matriz das incógnitas, I é a matriz identidade e B é a matriz dos termos independentes.

NOTA
Como sabemos, a matriz inversa de uma matriz quadrada A é outra matriz quadrada A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Temos então:

$A \cdot X = I \cdot B$

Multiplicando à esquerda por A^{-1}, vem $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot I \cdot B$. Como $A^{-1} \cdot A = I$ e $A^{-1} \cdot I = A^{-1}$, temos $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$ que é o sistema equivalente.

Observe as igualdades $AX = IB$ e $IX = A^{-1}B$. Pode-se concluir que, ao transformar a matriz A em matriz identidade no primeiro membro, a matriz identidade no segundo membro se transforma em matriz inversa.

OBSERVAÇÃO
A justificativa rigorosa desta afirmação escapa ao objetivo deste livro.

Esquematicamente: $A^{-1} \cdot \left[\, A \,|\, I \,\right] = \left[\, A^{-1} \cdot A \,|\, A^{-1} \cdot I \,\right] = \left[\, I \,|\, A^{-1} \,\right]$

Utiliza-se, então, o seguinte **algoritmo**:

i) Coloca-se a matriz identidade à direita da matriz A, separada por uma barra vertical.

ii) Efetuam-se as operações elementares com as linhas para diagonalizar a matriz A.

iii) Transforma-se a matriz diagonal na matriz identidade.

Esquematicamente:

Basta ver que [A | I] se transforma em [I | A^{-1}] por meio das operações elementares com linhas, ou seja:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c}\text{operações}\\ \text{elementares}\\ \text{com linhas}\end{array} \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & A^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \end{array}\right]$$

Exemplos:

i) Calcular a inversa da matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Formemos a matriz $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$ e por meio de operações elementares com linhas vamos transformar a matriz da esquerda na matriz identidade.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_1 \cdot 3 - L_2 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 - L_1 \\ \\ \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \cdot (-1) \\ L_2 \div 2 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

A matriz inversa é, então: $C^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

ii) Calcular a inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ L_1 \cdot 2 + L_2 \end{array}\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Esta matriz não admite inversa, pois o 1º membro tem uma linha de zeros, o que impossibilita a obtenção da matriz identidade à esquerda.

iii) Calcular a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Formando a matriz inversa com a matriz A à esquerda (1º membro) e a matriz identidade à direita (2º membro):

$$\left[A \mid I\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Para começar, queremos obter zeros na 1ª coluna com exceção de a_{11}. Para tanto operamos com a 1ª linha L_1.

$$\begin{array}{r} \\ L_1 \cdot 2 - L_2 \\ L_1 \cdot 3 - L_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Agora, queremos obter zeros na 2ª coluna exceto pelo elemento a_{22}. Para tanto operamos agora com a linha L_2.

$$\begin{array}{r} L_2 \cdot 2 - L_1 \cdot 3 \\ \\ L_2 \cdot 4 - L_3 \cdot 3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

Em seguida, zeramos os elementos da 3ª coluna exceto a_{33}, operando finalmente com a linha L_3.

$$\begin{array}{r} L_3 \cdot (-5) + L_1 \cdot 4 \\ L_3 - L_2 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} -12 & 0 & 0 & 9 & 12 & -15 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

Como a matriz do 1º membro se transformou numa matriz diagonal, dividindo as linhas L_1, L_2 e L_3 respectivamente por (–12), –3 e –4, ela se transforma na matriz identidade, dando:

$$\begin{array}{r} L_1 \div (-12) \\ L_2 \div (-3) \\ L_3 \div (-4) \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 & -\frac{3}{4} \end{array}\right]$$

Como o primeiro membro é a matriz identidade, o segundo membro é a inversa A^{-1} de A.

$[I \mid A^{-1}]$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -1 & \frac{5}{4} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{4} & 1 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

iv) Achar a matriz inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Procedendo como acima, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_1 \cdot (-2) + L_2 \\ L_1 \cdot (-3) + L_3 \end{array} \quad \Rightarrow \text{ operando com a linha } L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \cdot 2 + L_1 \cdot 3 \\ \\ L_2 \cdot 4 + L_3 \cdot (-3) \end{array} \quad \Rightarrow \text{ operando com a linha } L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right]$$

Como a terceira linha L_3 não pode se transformar em (0, 0, 1), torna-se impossível anular os elementos da terceira coluna, uma vez que $a_{33} = 0$. Assim, a matriz *A* não possui inversa.

Resumindo

O escalonamento é realizado por etapas, operando inicialmente com a linha L_1 obtendo zeros na coluna C_1, exceto $a_{11} \neq 0$.

Em seguida, opera-se com a linha L_2 obtendo-se zeros na segunda coluna C_2, exceto o elemento $a_{22} \neq 0$.

Finalmente, opera-se com a terceira linha L_3 obtendo-se zeros na terceira coluna C_3, exceto o elemento a_{33}.

Com isso, chega-se a uma matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal principal devem ser diferentes de zero. A divisão das linhas L_1, L_2 e L_3, respectivamente, pelos elementos não nulos a_{11}, a_{22} e a_{33} obtém a matriz identidade.

Quando na matriz diagonal um dos elementos a_{11}, a_{22} ou a_{33} for nulo, não existirá matriz inversa A^{-1}. Pode-se mostrar que isto ocorre exatamente quando o determinante da matriz original for nulo, isto é, dada uma matriz quadrada A, temos:

$$\boxed{A \text{ é invertível} \Leftrightarrow \det A \neq 0}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Calcule a matriz inversa de cada matriz a seguir:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 Para que valor(es) real(is) de x a matriz

$\begin{bmatrix} 1 & x-3 & 4 \\ 3 & 0 & -x \\ -2x & 4 & -8 \end{bmatrix}$ é invertível?

3 Obtenha a inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4 Dê, quando possível, a matriz inversa em cada caso a seguir:

a) $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

8.4 – Algoritmo dos retângulos

Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

NOTA

Se $a_{11} = 0$, podemos trocar as posições das equações ou das incógnitas para que o novo a_{11} seja diferente de zero.

Suponhamos que $a_{11} \neq 0$.

Multiplicando cada equação a partir da 2ª por a_{11}, o sistema não se altera e fica:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 + a_{11}a_{23}x_3 + \ldots + a_{11}a_{2n}x_n = a_{11}b_2 \\ a_{11}a_{31}x_1 + a_{11}a_{32}x_2 + a_{11}a_{33}x_3 + \ldots + a_{11}a_{3n}x_n = a_{11}b_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{11}a_{m1}x_1 + a_{11}a_{m2}x_2 + a_{11}a_{m3}x_3 + \ldots + a_{11}a_{mn}x_n = a_{11}b_m \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª equação por $(-a_{21})$ e somando à 2ª equação, por $(-a_{31})$ e somando à 3ª equação, ..., por $(-a_{m1})$ e somando à mª equação, vem:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0x_1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})x_3 + \ldots + (a_{11}a_{2n} - a_{1n}a_{21})x_n = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \\ 0x_1 + (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})x_2 + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})x_3 + \ldots + (a_{11}a_{3n} - a_{1n}a_{31})x_n = a_{11}b_3 - b_1a_{31} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0x_1 + (a_{11}a_{m2} - a_{12}a_{m1})x_2 + (a_{11}a_{m3} - a_{13}a_{m1})x_3 + \ldots + (a_{11}a_{mn} - a_{1n}a_{m1})x_n = a_{11}b_m - b_1a_{m1} \end{cases}$$

Observe que eliminamos a incógnita x_1 de todas as equações a partir da segunda. Se separarmos temporariamente a primeira equação, ficaremos com um sistema de $(m - 1)$ equações com $(n - 1)$ incógnitas $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\ x_2 + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})\ x_3 + \ldots + (a_{11}a_{2n} - a_{1n}a_{21})\ x_n = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \\ (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})\ x_2 + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})\ x_3 + \ldots + (a_{11}a_{3n} - a_{1n}a_{31})\ x_n = a_{11}b_3 - b_1a_{31} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (a_{11}a_{m2} - a_{12}a_{m1})\ x_2 + (a_{11}a_{m3} - a_{13}a_{m1})\ x_3 + \ldots + (a_{11}a_{mn} - a_{1n}a_{m1})\ x_n = a_{11}b_m - b_1a_{m1} \end{cases}$$

As diferenças indicadas nos coeficientes das incógnitas $x_2, x_3, \ldots, x_n$ e nos termos independentes podem ser escritas como **determinantes de 2ª ordem**.

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} x_3 + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{m1} & a_{m2} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{m1} & a_{m3} \end{vmatrix} x_3 + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{mn} \end{vmatrix} x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{m1} & b_m \end{vmatrix} \end{cases}$$

Observe que:

i) Eliminamos temporariamente a 1ª equação do sistema inicial.

ii) Todos os determinantes de 2ª ordem possuem o elemento a_{11} na primeira posição e um dos elementos $\{a_{12}, a_{13}, ..., a_{1n}, b_1\}$ na segunda posição. Ou seja, as primeiras linhas são (a_{11}, a_{12}), (a_{11}, a_{13}) ... (a_{11}, a_{1n}), (a_{11}, b_1).

iii) As segundas linhas desses determinantes são formadas de modo análogo tomando os coeficientes correspondentes da 2ª linha, 3ª linha, até a mª linha.
Assim os coeficientes da *i*ª linha são:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{i1} & a_{i2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{i1} & a_{i3} \end{vmatrix}; \ldots; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{in} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{i1} & b_i \end{vmatrix}$$

NOTA

Esses coeficientes são os determinantes de ordem 2 da matriz completa que se obtém com a 1ª e *i*ª linha todos contendo o elemento a_{11}.

Seja o sistema obtido acima, de $(m - 1)$ equações com $(n - 1)$ incógnitas:

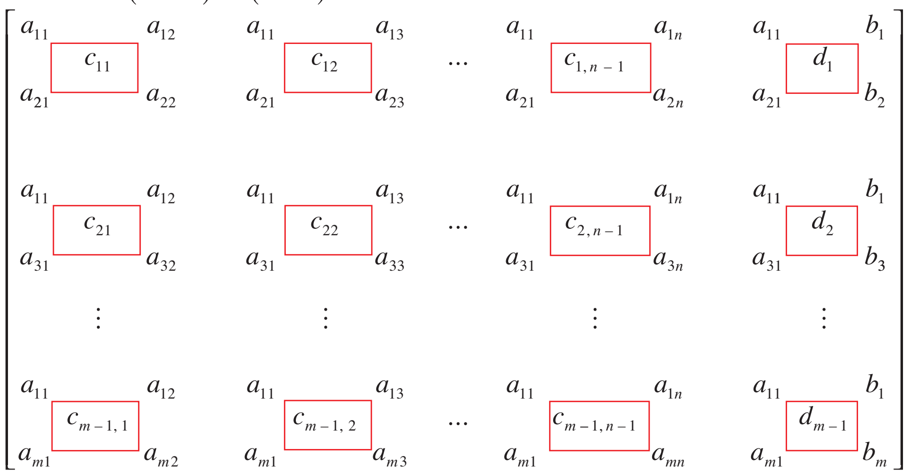
$$\begin{cases} c_{11}x_2 + c_{12}x_3 + \ldots + c_{1,n-1}x_n = d_1 \\ c_{21}x_2 + c_{22}x_3 + \ldots + c_{2,n-1}x_n = d_2 \\ \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ c_{m-1,1}x_2 + c_{m-1,2}x_3 + \ldots + c_{m-1,n-1,}x_n = d_{m-1} \end{cases} \quad \text{em que} \quad c_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,j+1} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,j+1} \end{vmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} será substituído pelo determinante de 2ª ordem formado pelo elemento a_{11} (que estará em todos os determinantes), pelas projeções do elemento a_{ij} na primeira linha (a_{1j}) e na primeira coluna (a_{i1}), completando-o com o próprio elemento a_{ij}. Fica formado então um retângulo que chamaremos de "retângulo relativo ao elemento a_{ij}".

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & & a_{ij} & & \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & \ldots & & & b_m \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{c|ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & b_1 \\ \hline \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & c_{i-1,j-1} & & d_{i-1} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & & c_{m-1,j-1} & & d_{m-1} \end{array}\right]$$

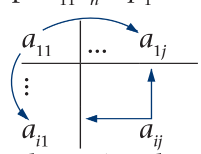
em que $a_{11}a_{ij} - a_{1j}a_{i1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} = c_{i-1,j-1}$.

A figura ilustra as operações que devem ser realizadas para obter a nova matriz, de ordem $(m - 1) \times (n - 1)$.



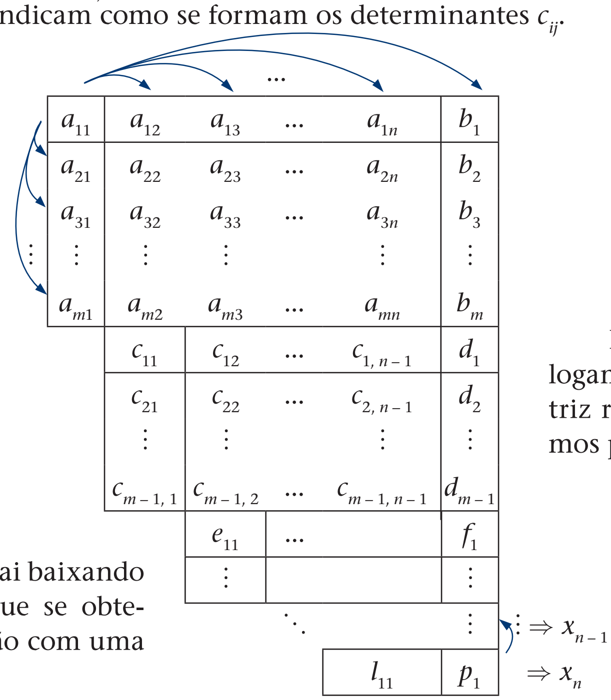
Repetindo-se o procedimento vão-se eliminando incógnitas até chegar-se a uma equação do primeiro grau do tipo $l_{11}x_n = p_1$.

Visualmente:



Projeta-se a_{ij} sobre a 1ª linha e sobre a 1ª coluna e forma-se o determinante de 2ª ordem do elemento a_{ij}.

As flechas indicam como se formam os determinantes c_{ij}.



Procedendo analogamente nesta matriz reduzida passaremos para a seguinte.

O sistema vai baixando de ordem até que se obtenha uma equação com uma incógnita.

A última linha do algoritmo nos dá o valor de $x_n = \dfrac{p_1}{l_{11}}$. Voltando a qualquer equação da matriz anterior tira-se o valor de x_{n-1}, com x_n e x_{n-1}, volta-se à matriz anterior e obtém-se x_{n-2}, e assim sucessivamente.

NOTA
Os retângulos, como são determinantes de 2ª ordem, podem ser feitos mentalmente.

Exercícios resolvidos:

1) Resolva o sistema: $\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ x + 3y + z = 5 \\ 3x + y + 2z = 6 \end{cases}$

Solução:
Usando o método dos retângulos, temos:

x	y	z		
2	1	–2	1	$\Rightarrow 2x + y - 2z = 1 \Rightarrow$ $2x + 1 - 2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow x = 1$
1	3	1	5	
3	1	2	6	
	5	4	9	$\Rightarrow 5y + 4z = 9 \Rightarrow 5y + 4 \cdot 1 = 9 \Rightarrow y = 1$
	–1	10	9	
		54	54	$\Rightarrow 54z = 54 \Rightarrow z = 1$

(x, y, z) = (1, 1, 1)

2) Resolva o sistema: $\begin{cases} 2y + 3z = 7 \\ 2x - y - 2z = 2 \\ 3x + 2y + z = 14 \end{cases}$

Solução:
Trocando a 1ª equação de lugar com a 2ª para que o elemento a_{11} seja diferente de zero, vem:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 2 \\ 0x + 2y + 3z = 7 \\ 3x + 2y + z = 14 \end{cases}$$

x	y	z		
2	–1	–2	2	L_1
0	2	3	7	L_2
3	2	1	14	L_3
	4	6	14	L_4
	7	8	22	L_5
		–10	–10	L_6

De L_6: $-10z = -10$
$z = 1$
$z = 1$ em L_4: $4y + 6z = 14$
$y = 2$
$y = 2$ e $z = 1$ em L_1: $2x - y - 2z = 2$
$x = 3$
(x, y, z) = (3, 2, 1)

3) Resolva o sistema:

Solução:

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2t = 2 \\ x + z - 3t = 4 \\ y - 2t + z = 4 \\ x + y + t = 2 \end{cases} \quad \text{Complementando o sistema, vem:} \quad \begin{cases} 2x + y - z + 2t = 2 \\ x + 0y + z - 3t = 4 \\ 0x + y + z - 2t = 4 \\ x + y + 0z + t = 2 \end{cases}$$

x	y	z	t		
2	1	–1	2	2	
1	0	1	–3	4	
0	1	1	–2	4	
1	1	0	1	2	$\Rightarrow x + y + 0z + t = 2 \Rightarrow x = 1$
	–1	3	–8	6	
	2	2	–4	8	
	1	1	0	2	$\Rightarrow y + z + 0t = 2 \Rightarrow y = 2$
		–8	20	–20	$\div -4$
		–4	8	–8	$\div -4$
		2	–5	5	
		1	–2	2	$\Rightarrow 1z - 2t = 2 \Rightarrow z = 0$
			1	–1	$\Rightarrow 1t = -1 \Rightarrow t = -1$

$(x, y, z, t) = (1, 2, 0, -1)$

Situações particulares:

1) Quando ocorrer uma linha inteira de zeros, ela deve ser simplesmente abandonada, pois qualquer solução a satisfaz.
Exemplo:

$$\begin{cases} x + y + z - t = 4 \\ 2x - 2y + z + 2t = 4 \\ 3x - y + 2z + t = 8 \\ x + 2y + z + t = 8 \\ 2x + y + z + t = 9 \end{cases}$$

1	1	1	–1	4	$\Rightarrow x + y + z - t = 4 \Rightarrow x = 3$
2	–2	1	2	4	
3	–1	2	1	8	
1	2	1	1	8	
2	1	1	1	9	
	–4	–1	4	–4	
	–4	–1	4	–4	
	1	0	2	4	$\Rightarrow y + 0z + 2t = 4 \Rightarrow y = 2$
	–1	–1	3	1	
		~~0~~	~~0~~	~~0~~	linha abandonada
		1	–12	–12	$\Rightarrow z - 12t = -12 \Rightarrow z = 0$
		3	–8	–8	
			28	28	$\Rightarrow 28t = 28 \Rightarrow t = 1$

(x, y, z, t) = (3, 2, 0, 1)

2) Quando o número de equações for maior que o número de incógnitas, usamos o algoritmo, e as soluções encontradas devem servir para todas as equações.

Exemplo:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-z=2 \\ 3x+y+2z=6 \\ 3x+2y+z=6 \\ x+2y+2z=5 \end{cases}$$

1	1	1	2	
2	3	–1	2	
3	1	2	6	
3	2	1	6	
1	2	2	5	
	1	–3	–2	
	–2	–1	0	
	–1	–2	0	
	1	1	3	
		–7	–4	
		–5	–2	$\Rightarrow -5z = -2 \Rightarrow z = \frac{2}{5}$
		4	5	$\Rightarrow 4z = 5 \Rightarrow z = \frac{5}{4}$

Como $\frac{2}{5} \neq \frac{5}{4}$ não existe valor para z, o que torna o sistema impossível.

3) Quando uma coluna é constituída de zeros, continua-se o algoritmo sem utilizá-la. A coluna de zeros caracteriza uma variável livre, isto é, uma incógnita que pode assumir qualquer valor. Essa é chamada **incógnita secundária**.
No final do processo, essa incógnita deverá ser isolada no segundo membro das equações.

Exemplo:

$$\begin{cases} x+y+z+t=8 \\ 3x+3y-z-t=4 \\ 2x+2y+3z-t=13 \end{cases}$$

x	y	z	t		
1	1	1	1	8	$\Rightarrow x+y+z+t=8 \Rightarrow x+y=3 \Rightarrow x=3-y$
3	3	–1	–1	4	
2	2	3	–1	13	
	0	–4	–4	–20	$\div(-4) \Rightarrow z+t=5 \Rightarrow z=3$
	0	1	–3	–3	
			16	32	$\Rightarrow 16t=32 \Rightarrow t=2$

A solução será $(3-y, y, 3, 2)$, $\forall y$.

Exercícios resolvidos:

1) Discuta o sistema: $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x-2y-z=0 \\ x+y+az=2 \end{cases}$

Solução:

2	–1	1	1	
1	–2	–1	0	$\Rightarrow x-2y-z=0 \Rightarrow x=\dfrac{2a-7}{3(a-2)}$
1	1	a	2	
	–3	–3	–1	$\cdot(-1) \Rightarrow 3y+3z=1 \Rightarrow y=\dfrac{a-5}{3(a-2)}$
	3	$2a-1$	3	
		$-6a+12$	–6	$\div(-6) \Rightarrow (a-2)z=1 \Rightarrow z=\dfrac{1}{a-2}$

i) Se $a \neq 2$, teremos $z=\dfrac{1}{a-2}$, $y=\dfrac{a-5}{3(a-2)}$ e $x=\dfrac{2a-7}{3(a-2)}$. O sistema será possível determinado com a solução

$$(x, y, z)=\left(\frac{2a-7}{3(a-2)}, \frac{a-5}{3(a-2)}, \frac{1}{a-2}\right), \ \forall a \neq 2.$$

ii) Se $a=2$, essa equação fica $0z=1$, o que é impossível.

NOTA

Observe que o parâmetro a na posição a_{nn} simplifica o algoritmo. É sempre possível colocá-lo naquela posição com troca de ordem de equações ou de incógnitas.

2) Discuta o sistema: $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + z = b \\ x - y + az = 2 \end{cases}$

<u>Solução:</u>

1	2	–1	1
2	1	1	b
1	–1	a	2
	–3	3	$b - 2$
	–3	$a + 1$	1
		$-3a + 6$	$3b - 9$

$\Rightarrow (-3a + 6)z = 3b - 9$

Essa equação pode ser dividida por (–3), dando:

$(a - 2)z = 3 - b$

<u>1ª hipótese</u>: $a \neq 2$ permitirá calcular $z = \dfrac{3 - b}{a - 2}$ assim como x e y, não dependendo de b, logo o sistema será possível determinado para $a \neq 2$, $\forall b$.

<u>2ª hipótese</u>: $a = 2$. A equação fica: $0z = 3 - b$. Neste caso a conclusão depende do valor de b.

2.1) Suponhamos $a = 2$ e $b \neq 3$.

A equação se reduz a $0z \neq 0$ ou $0 \neq 0$ o que é um absurdo. O sistema será então impossível para $a = 2$ e $b \neq 3$.

2.2) Suponhamos $a = 2$ e $b = 3$.

A equação se reduz a $0 = 0$. Isso significa que essa equação deve ser abandonada e o sistema se reduz ao equivalente:

$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -3y + 3z = 1 \end{cases}$ que dá $y = \dfrac{3z - 1}{3}$ e $x = \dfrac{5 - 3z}{3}$

O sistema será possível indeterminado com a solução

$(x, y, z) = \left(\dfrac{5}{3} - z, z - \dfrac{1}{3}, z \right), \forall z.$

3) Discuta o sistema: $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$

<u>Solução:</u>

Troquemos a 1ª equação de lugar com a 2ª para que possamos garantir $a_{11} \neq 0$.

$$\begin{cases} x + ky + z = k \\ kx + y + z = 1 \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

1	k	1	k	
k	1	1	1	
1	1	k	k^2	
	$1-k^2$	$1-k$	$1-k^2$	$\div (1-k)$
	$1-k$	$k-1$	k^2-k	$\div (1-k)$

Como vamos dividir essas duas equações por $1 - k$, estamos supondo que $k \neq 1$. Vejamos então o que acontece quando $k = 1$.

Se $k = 1$, o sistema fica $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ que é equivalente a $x + y + z = 1$.

Daí temos $x = 1 - y - z$, o que mostra que o sistema será indeterminado com a solução $(x, y, z) = (1 - y - z, y, z)$, $\forall y\ \forall z$.

Suposto então $k \neq 1$, o algoritmo se simplifica. Com a divisão por $(1 - k)$ efetuada e trocando a ordem das linhas, temos:

1	-1	$-k$	
$1+k$	1	$1+k$	
	$2+k$	$(k+1)^2$	$\Rightarrow (2+k)z = (k+1)^2$

<u>1ª hipótese</u>: $2 + k \neq 0 \Rightarrow z = \dfrac{(k+1)^2}{2+k} \quad (k \neq -2)$

O sistema será possível determinado.

<u>2ª hipótese</u>: $2 + k = 0 \Rightarrow k = -2$

A equação fica $0z = 1$; impossível.

Resumo da discussão:

$k \neq -2 \Rightarrow$ sistema possível determinado.

$k = -2 \Rightarrow$ sistema impossível.

$k = 1 \Rightarrow$ sistema possível indeterminado.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Resolva os seguintes sistemas lineares usando o método dos retângulos.

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 23 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + y = 10 \\ 6x + 7y = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -4x + 6y = 8 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ -2x + y = -3 \\ 5x + 10y = 10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y + 5z = 6 \\ x - 3y + 4z = 2 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 5x - 4y + 3z = 6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x - 4y + z = -2 \\ 2x + 5y + 4z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y - z + w = 2 \\ x - y - z + w = 0 \\ -x + y + 2z - 2w = 0 \\ x + y + 3w = 5 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + y + z + w + t = 1 \\ x + z + w + t = 2 \\ x + y + w + t = 3 \\ x + y + z + t = 4 \\ x + y + z + w = 5 \end{cases}$

2 Discuta o sistema: $\begin{cases} ax + 2y = 5 \\ 2x + ay = 3a + 1 \end{cases}$

3 Discuta os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - y + z = m \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x - 8y + kz = -12 \\ x - 2y + 3z = -4 \\ 5x - 6y + 7z = -8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + ky + z = k \\ x - y + kz = 0 \\ x - ky + z = k \end{cases}$

4 Determine o valor do parâmetro *m* que torna possível o sistema:

$$\begin{cases} x + y - 3z + 6 = 0 \\ 5x + y - 4z + 5 = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + 5y + mz + 1 = 0 \end{cases}$$

5 (Uerj) Em um restaurante há 12 mesas, todas ocupadas. Algumas, por 4 pessoas; outras, por apenas 2, num total de 38 fregueses. Qual o número de mesas ocupadas por apenas 2 pessoas?

6 (UFRRJ) Uma loja de departamentos, para vender um televisor, um videocassete e um aparelho de som, propôs a seguinte oferta: o televisor e o videocassete custam juntos R$ 1.200,00; o videocassete e o aparelho de som custam juntos R$ 1.100,00; o televisor e o aparelho de som custam juntos R$ 1.500,00.
Quanto pagará um cliente que comprar os três produtos anunciados?

7 (UnB-DF) Na França, três turistas trocaram por francos franceses (F), no mesmo dia, as quantias que lhes restavam em dólares, libras e marcos, da seguinte forma:

1º turista: 50 dólares, 20 libras e 10 marcos por 502,90 F;
2º turista: 40 dólares, 30 libras e 10 marcos por 533,40 F;
3º turista: 30 dólares, 20 libras e 30 marcos por 450,70 F.
Calcule o valor de 1 libra, em francos franceses, no dia em que os turistas efetuaram a transação.

8 (Ufes) Examinando os anúncios abaixo, conclua o preço de cada faca, garfo e colher.

R$ 23,50 R$ 50,00 R$ 36,00

9 (UFSC) Determine o valor de a para que o sistema $\begin{cases} x+3y+4z=1 \\ x+y+az=2 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$ seja impossível.

10 (UCG-GO) Determine a e b para que o sistema $\begin{cases} x+2y+2z=a \\ 3x+6y-4z=4 \\ 2x+by-6z=1 \end{cases}$ seja indeterminado.

11 (FGV-SP) Considere o seguinte sistema de equações lineares nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} x+2y-z=7 \\ y+3z=n \\ 3y-mz=1 \end{cases}$$

a) Resolva o sistema para $m = 1$ e $n = 2$.

b) Para que valores de m e n o sistema é indeterminado?

12 (Fuvest-SP) Seja o sistema $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x-my-3z=0 \\ x+3y+mz=m \end{cases}$.

a) Determine todos os valores de m para os quais o sistema admite solução.

b) Resolva o sistema, supondo $m = 0$.

13 (UFMG) Determine todos os valores de x, y e z que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} 3^x \cdot 3^y \cdot 3^z = 1 \\ \dfrac{2^x}{2^y \cdot 2^z} = 4 \\ 4^{-x} \cdot 16^y \cdot 4^z = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

14 (Unicamp-SP) Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará. Sabe-se que o quilo do amendoim custa R$ 5,00, o quilo da castanha de caju, R$ 20,00, e o quilo da castanha-do-pará, R$ 16,00. Cada lata deve conter meio quilo da mistura e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser de R$ 5,75. Além disso, a quantidade de castanha de caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das outras duas.

a) Escreva o sistema linear que representa a situação descrita acima.

b) Resolva o referido sistema, determinando as quantidades, em gramas, de cada ingrediente por lata.

15 Tem-se três números reais e sabe-se que a soma do primeiro com o terceiro é um certo número p; a soma do segundo com o terceiro é 100; e subtraindo m vezes o primeiro do terceiro obtém-se 80.
Determine os valores de m e p de modo que o problema:

a) tenha uma só solução;

b) tenha uma infinidade de soluções;

c) não tenha solução.

8.5 – Sistemas homogêneos

São sistemas cujos termos independentes são iguais a zero.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

DEFINIÇÃO
Sistemas homogêneos.

Observe que o conjunto $(x_1, x_2, ..., x_n) = (0, 0, ..., 0)$ é sempre solução do sistema, então, um sistema homogêneo é **sempre possível**.

A solução de zeros é comumente chamada de **solução natural** ou **solução trivial**. Quando o sistema tem soluções diferentes da solução de zeros, essas soluções são chamadas de **soluções próprias.**

Exemplo:

Determinar o valor de a de modo que o sistema tenha uma solução diferente da solução $x = y = z = 0$.

$$\begin{cases} 2x + y + az = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

2	1	a	0
1	2	–1	0
3	–1	2	0
	3	$-2 - a$	0
	–5	$4 - 3a$	0
		$2 - 14a$	0

Temos, então, a equação $(2 - 14a)z = 0$. Para que o sistema seja possível indeterminado, devemos ter:

$$2 - 14a = 0 \Rightarrow 14a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{7}$$

Quando o sistema é constituído de n equações com n incógnitas, o tipo de solução dependerá do determinante do sistema.

De fato, dado o sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$

se o determinante $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ for diferente de zero, a única solução é a solução trivial.

Se o determinante Δ for igual a zero, sendo o sistema possível, ele só poderá ser indeterminado.

- $\Delta \neq 0 \rightarrow$ sistema possível determinado.
- $\Delta = 0 \rightarrow$ sistema possível indeterminado.

Exemplos:

i) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 4x + y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Como Δ = 0, o sistema é possível indeterminado. De fato, resolvendo o sistema, nota-se que qualquer tripla (x, y, z) = (x, 0, –2x) é solução (onde x ∈ ℝ).

ii) Refazendo o primeiro exemplo desta seção usando o determinante, temos:

$$\begin{cases} 2x + y + az = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 7a$$

Para que o sistema tenha uma solução diferente da de zeros, ele deve ser indeterminado, logo $\Delta = 0 \Rightarrow 1 - 7a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{7}$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Resolva os seguintes sistemas homogêneos:

a) $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 8x-2y=0 \\ 3x+y=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ -x+2y+5z=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+4y=0 \\ x-y-3z=0 \end{cases}$

2 Para que valores de k o sistema $\begin{cases} 3x+y=0 \\ kx+2y=0 \end{cases}$ é determinado?

3 Dê a solução geral para o sistema:

$$\begin{cases} kx+3y-z=0 \\ x-y+4z=0 \\ 6x+(k-3)y+15z=0 \end{cases}$$

4 (Unicamp-SP) Seja A a matriz formada pelos coeficientes do sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} \lambda x+y+z=\lambda+2 \\ x+\lambda y+z=\lambda+2 \\ x+y+\lambda z=\lambda+2 \end{cases}$$

a) Ache as raízes da equação det A = 0.

b) Ache a solução geral desse sistema para $\lambda = -2$.

5 Determine o valor de a de modo que o sistema linear homogêneo tenha solução diferente da solução trivial.

a) $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+ay=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+ay+z=0 \\ x-y-az=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$

6 Discuta o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+ay+az=0 \\ x+ay+2az=0 \end{cases}$$

7 (Fuvest-SP) Considere o sistema linear S:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

a) Prove que S é possível e indeterminado.

b) Encontre a solução geral de S.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (Cesgranrio-RJ) Para que valores de k existe uma única matriz $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tal que $\begin{pmatrix} k-1 & -2 \\ -1 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

(A) $k \neq -1$

(B) $k = -2$

(C) $k = -2$ ou $k = 1$

(D) $k \neq -2$ e $k \neq 1$

(E) $k \neq 2$ e $k \neq -1$

2 (Cesgranrio-RJ) O sistema, com as incógnitas x, y e z, $\begin{cases} x+z=p \\ y+z=100 \\ z-mx=80 \end{cases}$ tem uma infinidade de soluções. Sobre os valores dos parâmetros m e p, concluímos:

(A) $m = -1$ e p é arbitrário

(B) $m = 1$ e p é arbitrário

(C) $m = 80$ e $p = 100$

(D) $m = -1$ e $p = 80$

(E) $m = 1$ e $p \neq 80$

3 (Mack-SP) A equação $(x + ky - 3)^2 + (4y - x + 2p)^2 = 0$, nas incógnitas x e y, com k e p números reais, admite inúmeras soluções. Então, $k \cdot p$ vale:

(A) –6 (C) –10 (E) –14

(B) –8 (D) –12

4 (Fuvest–SP) Sabendo que x, y e z são números reais e $(2x + y - z)^2 + (x - y)^2 + (z - 3)^2 = 0$, então $x + y + z$ é igual a:

(A) 3 (C) 5 (E) 7

(B) 4 (D) 6

5 O conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y-3z=7 \\ 3x+y-2z=8 \end{cases}$$ no $\mathbb{R}^3$ é S.

Qual a figura que representa graficamente o conjunto S?

6 Determine quatro números reais de modo que suas somas, três a três, sejam 10, 11, 42, 87.

7 Resolva o sistema $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{y} = \dfrac{1}{15} \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{20}{y} = \dfrac{7}{5} \end{cases}$ empregando determinantes.

8 (Esal-MG) Dado o sistema $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 3x+y-z=m \\ x+3y+nz=2m-n \end{cases}$:

a) determine m e n, sabendo que o sistema admite infinitas soluções;

b) encontre a solução particular em que $x = 0$.

9 Ache os valores de a e b para que o sistema $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ ax+5y=b \end{cases}$ tenha mais do que uma solução.

10 (PUC-RJ) Para que valores a e b o sistema abaixo não tem solução?

$$\begin{cases} 2x+4y=5 \\ ax+5y=b \end{cases}$$

(A) $a = \dfrac{5}{2}$, $b \neq \dfrac{25}{4}$

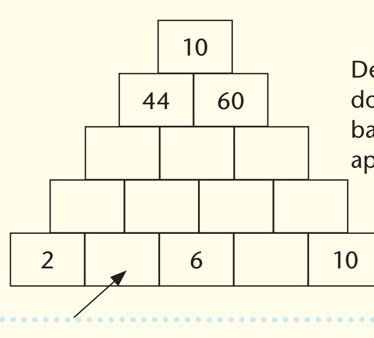
(B) $a = \dfrac{5}{2}$, $b = \dfrac{25}{4}$

(C) $a \neq \dfrac{5}{2}$, $b = \dfrac{25}{4}$

(D) $a \neq \dfrac{5}{2}$, $b \neq \dfrac{25}{4}$

(E) Nenhuma das respostas acima.

11 (UFRJ) Na pirâmide a seguir, para as camadas acima da base, o número colocado em cada tijolo é a soma dos números dos dois tijolos nos quais ele se apoia e que estão imediatamente abaixo dele.



Determine o número do tijolo situado na base da pirâmide e apontado pela seta.

12 (Unicamp-SP) Considere o sistema:

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}(y+z)=p \\ y+\dfrac{1}{3}(x+z)=p \\ z+\dfrac{1}{4}(x+y)=p \end{cases}$$

a) Mostre que se tal sistema tem solução (x, y, z) com x, y e z inteiros, então o parâmetro p é múltiplo inteiro de 17.

b) Reciprocamente, mostre que se o parâmetro p for múltiplo inteiro de 17, então este sistema tem solução (x, y, z) com x, y e z inteiros.

13 (PUC-RJ) Seja a um número real. Para que valores de a o sistema linear $\begin{cases}(1+a)x+(1-a)y=1 \\ (1-a)x+(1+a)y=1\end{cases}$ tem solução?

Para quais desses valores a solução é única?

14 (EESC-USP) O sistema linear

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=9 \\ x-y+2z=2 \\ x+4y+2z=7 \end{cases}:$$

(A) admite solução única.

(B) admite infinitas soluções.

(C) admite apenas duas soluções.

(D) não admite solução.

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

15 O sistema $\begin{cases} 9x+7y+4z=8 \\ 14x+12y+9z=13 \\ 3x+y-2z=2 \end{cases}$:

(A) não admite solução.

(B) admite uma única solução.

(C) admite somente 3 soluções.

(D) admite infinitas soluções.

(E) Nenhuma das afirmações acima é correta.

16 (USP) O sistema de equações

$$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ xy+yz+zx=2 \end{cases}:$$

(A) é determinado.

(B) é indeterminado.

(C) é impossível.

(D) é linear.

17 Se tivermos:

$$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ y+z+t=7 \\ x+z+t=5 \\ x+y+t=4 \end{cases}$$

então, $x + y + z + t$ é igual a:

(A) –1

(B) 7

(C) 5

(D) 4

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

18 Os sistemas

$$S_1\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 6x+4y=2 \end{cases}:$$

(A) são equivalentes.

(B) são determinados.

(C) admitem uma única solução comum.

(D) só admitem em comum a solução (0, 0).

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

19 O número de submatrizes de ordem 3, distintas, que se pode extrair de $M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ é:

(A) 12 (C) 8

(B) 16 (D) 13

20 (Unesp) Considere as matrizes reais 3×3:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} m & n & p \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se indicarmos por A e B, respectivamente, os determinantes dessas matrizes, o determinante da matriz $\begin{pmatrix} a+m+1 & b+n+1 & c+p+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$ é igual a:

(A) $-2A - 2B$
(B) $2A + 2B - 1$
(C) $2A + 2B$
(D) $-2A - 2B - 1$
(E) $2A - 2B - 1$

21 Considere o sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Os valores de x e y pertencem ao intervalo:

(A) $[-7, 3]$
(B) $[-3, 5]$
(C) $[0, 6]$
(D) $[2, 7]$
(E) $[6, 9]$

22 O sistema $\begin{cases} ax + y = a \\ x + by = b \end{cases}$ é:

(A) sempre possível, se $ab = 1$.
(B) só é possível se $a = b = 1$.
(C) é impossível para todo $a \neq b$.
(D) Nenhuma das respostas anteriores.

23 (Mack-SP) O sistema $\begin{cases} ax - by = 6 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$:

(A) é impossível se $a = 12$ e $b \neq -30$.
(B) é possível e determinado se $a = 12$ e $b = -30$.
(C) é impossível se $a \neq 12$ e $b \neq -30$.
(D) é determinado se $a = 12$ e $b = -30$.
(E) é indeterminado se $a = 12$ e $b = -30$.

24 Dado o sistema linear

$$\begin{cases} ax + 2y = 5 \\ 3x - 2y = b \end{cases}$$

tem-se:

P: se $a = -3$, o sistema é sempre incompatível.

Q: se $a \neq -3$, o sistema é sempre determinado.

R: se $b = -5$, o sistema é sempre compatível.

Assinale:

(A) se P e Q verdadeiras.
(B) se todas forem verdadeiras.
(C) se P e R verdadeiras.
(D) se Q e R verdadeiras.
(E) se todas forem falsas.

25 (Faap-SP) O sistema de equações

$$\begin{cases} x + \alpha y = 1 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

é impossível para:

(A) $\alpha = -\frac{2}{3}$
(B) $\alpha = -\frac{1}{3}$
(C) $\alpha = 0$
(D) $\alpha = 3$
(E) $\alpha = -1$

26 (UEL-PR) Se os sistemas

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} ax - by = 5 \\ ay - bx = -1 \end{cases}$$

são equivalentes, então $a^2 + b^2$ é igual a:

(A) 1
(B) 4
(C) 5
(D) 9
(E) 10

27 (Unifor-CE) Sabe-se que o sistema $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ x + y = 6 \\ (m-1)x + 2my = 105 \end{cases}$, nas incógnitas x e y, admite uma única solução.

Nessas condições, o número real m satisfaz a sentença:

(A) $-5 \leq m < 0$
(B) $0 \leq m < 5$
(C) $5 \leq m < 10$
(D) $10 \leq m < 15$
(E) $15 \leq m < 20$

28 (Ufam) O(s) valor(es) de k, para que o sistema

$$\begin{cases} ky+3z=0 \\ kx+2y+z=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$$

tenha solução não trivial, é(são):

(A) $k \neq 0$

(B) $k=-2$ ou $k=\frac{3}{2}$

(C) $k \neq 0$ ou $k \neq \frac{3}{4}$

(D) $k=\frac{3}{4}$

(E) $k \neq -2$ ou $k \neq \frac{3}{2}$

29 (USP) É dado o sistema de equações lineares em x e y

$$\begin{cases} x+y=1 \\ \sqrt{3}x+\sqrt{5}y=m \\ 3x+5y=m^2 \end{cases}.$$

Qual das desigualdades abaixo deve ser satisfeita para m de tal forma que o sistema admita solução?

(A) $-2 < m < 1$

(B) $-1 < m < 3$

(C) $m > 3$

(D) $m < -3$

(E) $m^2 > 5$

30 (UFRGS) O sistema $\begin{cases} ax+5y+az=0 \\ x+ay=0 \\ y+az=0 \end{cases}$ tem coeficientes reais e mais de uma solução. O conjunto de todos os valores que o coeficiente a pode assumir é:

(A) {–2}

(B) {0}

(C) {2}

(D) {–2, 2}

(E) {–2, 0, 2}

31 (UFU-MG) Determine $a + b + c + d$, sabendo que o sistema abaixo tem infinitas soluções e que (1, 1, –1) é uma dessas soluções.

$$\begin{cases} ax+y+z=d \\ x+y+cz=-1 \\ x+by-z=1 \end{cases}$$

(A) –2

(B) –1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

32 (ITA-SP) Para que valores reais de a e b o seguinte sistema não admite solução?

$$\begin{cases} 3x+ay+4z=0 \\ x+y+3z=-5 \\ 2x-3y+z=b \end{cases}$$

(A) $a=-2$ e $b=5$

(B) $a>-2$ e $b\neq 4$

(C) $a=-2$ e $b\neq 5$

33 (Fuvest-SP) Sendo (x_1, y_1) e (x_2, y_2) as soluções do sistema $\begin{cases} x^2+3xy=0 \\ x-y=2 \end{cases}$, então $y_1 + y_2$ é igual a:

(A) $-\frac{5}{2}$

(B) $-\frac{3}{2}$

(C) $\frac{3}{2}$

(D) $\frac{5}{2}$

(E) 3

34 (UFSM-RS) Dado o sistema de equações lineares $\begin{cases} x+y+z=\beta \\ x-y+\alpha z=1 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então:

(A) se $\alpha \neq -1$, o sistema é possível e determinado.

(B) se $\alpha = -1$ e $\beta \neq 1$, o sistema é possível e determinado.

(C) se $\alpha \neq -1$, o sistema é impossível.

(D) se $\alpha \neq -1$ e $\beta = 1$, o sistema é possível e indeterminado.

(E) se $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, o sistema é possível e determinado.

35 Para que o sistema

$$\begin{cases} ax+(a-1)y=1 \\ (a+1)x-ay=1 \end{cases}$$

seja impossível, devemos ter:

(A) $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

(B) $a = 0$

(C) $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(D) $a = 1$

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

36 O sistema $\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{cases}$:

(A) é sempre determinado.

(B) é determinado para $a \neq b$, $b \neq c$.

(C) é determinado para $a \neq b \neq c \neq a$.

37 (UFG-GO) Classifique em V ou F:

Seja k um número real. Considerando-se o sistema linear nas variáveis x e y, dado por $\begin{cases} 4kx+(k-1)y=1 \\ k^3x+(k+1)y=2 \end{cases}$:

(A) uma solução para o sistema é $x = 0$ e $y = 3$.

(B) se $k = -2$, o sistema não tem solução.

(C) se $k = 2$, o sistema tem infinitas soluções.

(D) existem infinitos valores de k, para os quais o sistema possui solução única.

38 (UFSE) Dois grupos de turistas, um de argentinos e outro de paulistas, fizeram passeios de trem turístico, ao preço de R$ 12,00 cada pessoa, e de catamarã, ao preço de R$ 10,00 cada pessoa. No sábado, os argentinos passearam de trem e os paulistas de catamarã, gastando um total de R$ 156,00. No domingo, os argentinos passearam de catamarã e os paulistas de trem, com gasto total de R$ 152,00. Nessas condições, o número de pessoas do grupo de turistas:

(A) argentinos era 9.

(B) argentinos era 8.

(C) argentinos era 7.

(D) paulistas era 7.

(E) paulistas era 5.

39 (Unirio-RJ) Três amigos foram assistir a uma partida de basquetebol no Maracanãzinho. No intervalo fizeram um lanche e juntos gastaram R$ 13,90. O primeiro comprou 2 cachorros-quentes, 1 saco de batatas fritas e 1 refrigerante, gastando R$ 4,40. O segundo gastou R$ 5,80 na compra de 1 cachorro-quente, 2 refrigerantes e 2 sacos de batatas fritas.

a) Determine o preço do refrigerante sabendo que o terceiro dos três amigos comprou 1 refrigerante e 2 sacos de batatas fritas.

b) Quanto seria gasto na compra de 4 cachorros-quentes, 6 refrigerantes e 6 sacos de batatas fritas?

40 (Uerj) Observe a tabela de compras realizadas por Mariana:

Loja	Produto	Preço unitário (R$)	Despesa (R$)
A	caneta	3,00	50,00
	lapiseira	5,00	
B	caderno	4,00	44,00
	corretor	2,00	

Sabendo que ela adquiriu a mesma quantidade de canetas e cadernos, além do maior número possível de lapiseiras, o número de corretores comprados foi igual a:

(A) 11

(B) 12

(C) 13

(D) 14

41 (Unirio-RJ) Num escritório de advocacia trabalham apenas dois advogados e uma secretária. Como o Dr. André e o Dr. Carlos sempre advogam em causas diferentes, a secretária, Cláudia, coloca 1 grampo em cada processo do Dr. André e 2 grampos em cada processo do Dr. Carlos, para diferenciá-los facilmente no arquivo. Sabendo-se que, ao todo, são 78 processos nos quais foram usados 110 grampos, podemos concluir que o número de processos do Dr. Carlos é igual a:

(A) 64

(B) 46

(C) 40

(D) 32

(E) 28

42 (Vunesp-SP) Um negociante trabalha com as mercadorias A, B e C, de cada uma das quais tem um pequeno estoque não nulo. Se vender cada unidade de A por R$ 2.000,00, cada uma de B por R$ 3.000,00 e cada uma de C por R$ 4.000,00, obtém uma receita de R$ 50.000,00. Mas se vender cada unidade respectivamente por R$ 2.000,00, R$ 6.000,00 e R$ 3.000,00, a receita será de R$ 60.000,00. Calcular o número de unidades que possui de cada uma das mercadorias.

43 (UFF-RJ) Na perfumaria XEROBOM, o xampu, o condicionador e a loção de sua fabricação estão sendo apresentados aos clientes em três tipos de conjuntos:

Conjunto	Preço
2 loções e 3 xampus	R$ 38,00
4 xampus e 2 condicionadores	R$ 26,00
2 loções e 1 condicionador	R$ 31,00

Determine o preço de cada um desses produtos, considerando que o preço individual de cada produto é o mesmo, independentemente do conjunto ao qual pertence.

44 (UFTM-MG) Em três mesas de uma lanchonete o consumo ocorreu da seguinte forma:

Mesa	Hambúrger	Refrigerante	Porção de fritas
1ª	4	2	2
2ª	6	8	3
3ª	2	3	1

A conta da 1ª mesa foi R$ 18,00 e da 2ª mesa R$ 30,00. Com esses dados:

(A) é possível calcular a conta da 3ª mesa e apenas o preço unitário do refrigerante.

(B) é possível calcular a conta da 3ª mesa, mas nenhum dos preços unitários dos três componentes do lanche.

(C) é possível calcular a conta da 3ª mesa e, além disso, saber exatamente os preços unitários de todos os componentes do lanche.

(D) não é possível calcular a conta da 3ª mesa, pois deveriam ser fornecidos os preços unitários dos componentes do lanche.

(E) é impossível calcular a conta da 3ª mesa e os preços unitários dos componentes do lanche, pois deve ter havido um erro na conta da 1ª ou da 2ª mesa.

45 (UFMA) Em um restaurante são servidos três tipos de salada: A, B e C. Num dia de movimento, observaram-se os clientes X, Y, Z. O cliente X serviu-se de 200 g da salada A, 300 g da B e 100 g da C e pagou R$ 5,50 pelo seu prato. O cliente Y fez seu prato com 150 g da salada A, 250 g da B e 200 g da C e pagou R$ 5,85. Já o cliente Z serviu-se de 120 g da salada A, 200 g da B e 250 g da C e pagou R$ 5,76. Qual o preço do quilo das saladas A, B e C, respectivamente?

(A) R$ 7,00; R$ 8,00 e R$ 10,00

(B) R$ 9,00; R$ 8,00 e R$ 12,00

(C) R$ 8,00; R$ 9,00 e R$ 12,00

(D) R$ 12,00; R$ 9,00 e R$ 8,00

(E) R$ 6,00; R$ 10,00 e R$ 12,00

46 (UFRRJ) João é um rapaz muito consciente e organizado. Com a questão do racionamento de energia, as lâmpadas incandescentes de sua casa foram substituídas por outras fluorescentes. Ao substituir as lâmpadas, João teve o cuidado de selecioná-las em caixas, por potência. Infelizmente, as etiquetas das caixas se perderam. Para tentar resolver este problema, João fez alguns testes. No primeiro teste ele ligou 1 lâmpada da caixa A, 2 da caixa B e 2 da caixa C num total de 520 W. No segundo teste ele ligou 2 lâmpadas da caixa A, 1 da caixa B e 2 da caixa C num total de 560 W. Finalmente, ligou 2 da caixa A, 2 da caixa B e 1 da caixa C, totalizando 470 W. Com isso ele conseguiu resolver seu problema.
Responda agora: qual a potência de cada lâmpada das caixas A, B e C?

47 (Vunesp-SP) Um orfanato recebeu uma certa quantidade x de brinquedos para ser distribuída entre as crianças. Se cada criança receber três brinquedos, sobrarão 70 brinquedos para serem distribuídos; mas, para que cada criança possa receber cinco brinquedos, serão necessários mais 40 brinquedos. O número de crianças do orfanato e a quantidade x de brinquedos que o orfanato recebeu são, respectivamente:

(A) 50 e 290

(B) 55 e 235

(C) 55 e 220

(D) 60 e 250

(E) 65 e 265

48 (UFMG) Num cinema, ingressos são vendidos a R$ 10,00 para adultos e a R$ 5,00 para crianças.
Num domingo, na sessão da tarde, o número de ingressos vendidos para crianças foi o dobro do número vendido para crianças na sessão da noite. A renda da sessão da tarde foi R$ 300,00 a menos que a da noite e, em ambas as sessões, foi vendido o mesmo número de ingressos. Nesse domingo, o número de ingressos vendidos para crianças, na sessão da noite, foi:

(A) 50

(B) 55

(C) 60

(D) 65

49 (UFRJ) Dois produtos P_1 e P_2 são fabricados com os componentes A e B. P_1 é composto de 20% de A e 80% de B, enquanto P_2 é composto por 10% de A e 90% de B.
A fábrica tem estocados 2 litros de A e 13 litros de B. Quantos litros de P_1 e de P_2 ela pode fabricar usando todo o seu estoque?

50 (UFF-RJ) Em um restaurante existem mesas de 3, 4 e 6 cadeiras, num total de 16 mesas.
Ocupando todos os lugares nas mesas de 3 e 4 cadeiras, 36 pessoas ficam perfeitamente acomodadas. Sabendo-se que o restaurante acomoda, no máximo, 72 pessoas, quantas mesas de cada tipo existem?

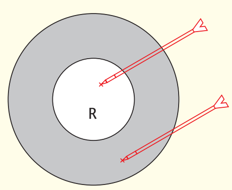
51 (Fuvest-SP) Um casal tem filhos e filhas. Cada filho tem o número de irmãos igual ao numero de irmãs. Cada filha tem o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Qual é o total de filhos e filhas do casal?

(A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6
(E) 7

52 (UFRN) No alvo representado pela figura abaixo, uma certa pontuação é dada para a flecha que cai na região sombreada S e outra para a flecha que cai no círculo central R.

Diana obteve 17 pontos, lançando três flechas, das quais uma caiu em R e duas em S. Guilherme obteve 22 pontos, lançando o mesmo número de flechas, das quais uma caiu em S e duas em R. Considerando-se o desempenho dos dois arremessadores, pode-se afirmar que o número de pontos atribuídos a cada flecha que cai na região S é:

(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 5



53 (Uerj) Uma indústria produz três tipos de correntes. A tabela abaixo indica os preços praticados para uma produção total de 100 m.

Tipo	Produção (metros)	Preço por metro (R$)	
		Custo	Venda
I	x	2,00	3,00
II	y	4,00	5,00
III	z	5,00	P
Total	100	320,00	460,00

A quantidade z de metros produzidos da corrente do tipo III é um número inteiro.

Se $5 < P \leq 10$, calcule os possíveis valores inteiros de P.

54 (UFF-RJ) Um jogador de basquete fez o seguinte acordo com o seu clube: cada vez que ele convertesse um arremesso, receberia R$ 10,00 do clube e cada vez que ele errasse, pagaria R$ 5,00 ao clube. Ao final de uma partida em que arremessou 20 vezes, ele recebeu R$ 50,00.

Pode-se afirmar que o número de arremessos convertidos pelo jogador nesta partida foi:

(A) 0
(B) 5
(C) 10
(D) 15
(E) 20

55 (Unirio-RJ) No Censo 2000, uma equipe era formada por um supervisor e três recenseadores, João, Maria e Paulo, cada um destes com uma produção horária média diferente (número de formulários preenchidos, em média, por hora).

O supervisor observou que:

I) se João, Maria e Paulo trabalhassem por dia, respectivamente, 6, 8 e 5 horas, a produção total diária seria de 78 formulários preenchidos, em média;

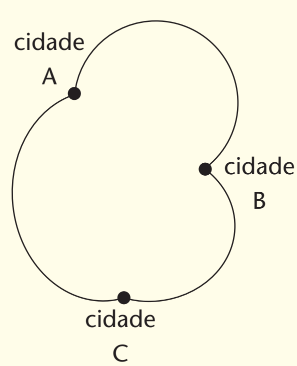
II) se trabalhassem, respectivamente, 7, 6 e 8 horas diariamente, esta produção total já seria de 83 formulários;

III) se trabalhassem 6 horas, diariamente, cada um deles, este total seria de 72.

a) Calcule a produção horária média de Maria.

b) Determine a menor carga horária diária de trabalho (valor inteiro), comum aos três recenseadores, para que a produção total diária supere 100 formulários preenchidos.

56 (UFF-RJ) As ligações entre as cidades A, B e C figuram num mapa rodoviário conforme ilustrado abaixo:



Seguindo esse mapa, uma pessoa que se deslocar de A para C, passando por B, percorrerá 450 km. Caso a pessoa se desloque de A para B, passando por C, o percurso será de 600 km. Para se deslocar de B para C, passando por A, a pessoa vai percorrer 800 km.

Determine quantos quilômetros esta pessoa correrá ao se deslocar de A para B, sem passar por C.

57 (Unirio-RJ) Uma olimpíada foi disputada por 7 países. O quadro com o total de medalhas (ouro, prata e bronze) distribuídas para cada país é apresentado abaixo:

A → 15
B → 13
C → 10
D → 9
E → 7
F → 4
G → 3

Determine o número de medalhas de ouro distribuídas, considerando que este número é igual ao número de medalhas de prata, menos 7, e que o número de medalhas de bronze é o dobro das de prata, mais 8.

58 (PUC-RJ) Estão distribuídos em 3 caixas 72 palitos. Transferem-se da 1ª para a 2ª caixa tantos palitos quantos existem na 2ª caixa. Transferem-se, então, da 2ª caixa para a 3ª caixa tantos palitos quantos existem na 3ª. Finalmente, transferem-se da 3ª para a 1ª caixa tantos palitos quantos existem na 1ª. Depois disto, verifica-se que existe um número igual de palitos em cada caixa. O número de palitos que havia inicialmente na 1ª caixa era:

(A) 11
(B) 22
(C) 33
(D) 44
(E) 66

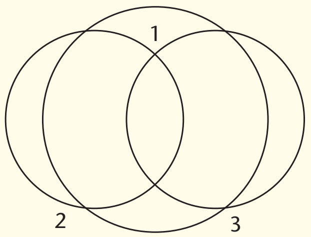
59 (Uerj) Um feirante separou um número inteiro de dúzias de tangerinas (t), de maçãs (m) e de peras (p). Observou que, para cada maçã arrumada, havia 2 tangerinas. Com 90 dúzias, ele fez lotes com 6 tangerinas, lotes com 6 maçãs e lotes com 4 peras. Colocou em cada lote, indistintamente, o preço de R$ 0,50. Arrecadou R$ 105,00 na venda de todos eles. Calcule t, m e p.

60 (UFF-RJ) Um biscoito é composto por açúcar, farinha de trigo e manteiga, sendo a quantidade de farinha o dobro da quantidade de açúcar. Os preços por quilograma do açúcar, da farinha e da manteiga são, respectivamente, R$ 0,50, R$ 0,80 e R$ 5,00. O custo por quilograma de massa do biscoito, considerando apenas esses ingredientes, é R$ 2,42.
Calcule a quantidade, em gramas, de cada ingrediente presente em 1 kg de massa do biscoito.

61 (UFF-RJ) Cada filha de Luiz Antônio tem o número de irmãs igual à quarta parte do número de irmãos. Cada filho de Luiz Antônio tem o número de irmãos igual ao triplo do número de irmãs.
O total de filhas de Luiz Antônio é:

(A) 5
(B) 6
(C) 11
(D) 16
(E) 21

62 (Uerj) Observe a figura abaixo, em que 1, 2 e 3 indicam três dos seis pontos de interseções das circunferências. Use os números 4, 5 e 6 para indicar os outros três pontos.



A soma dos quatro números que indicam os pontos de interseção de qualquer uma dessas circunferências é constante e igual a S.
O valor de S é:

(A) 12
(B) 14
(C) 16
(D) 18

63 Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano.
O número de carros roubados da marca X é o dobro do número de carros roubados da marca Y, e as marcas X e Y juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados.
O número esperado de carros roubados da marca Y é:

(A) 20
(B) 30
(C) 40
(D) 50
(E) 60

64 (Unicamp-SP) Encontre o valor de α para que o sistema seja possível. $\begin{cases} 2x - y + 3z = \alpha \\ x + 2y - z = 3 \\ 7x + 4y + 3z = 13 \end{cases}$

Para o valor encontrado de α ache a solução geral do sistema, isto é, ache expressões que representem todas as soluções do sistema. Explicite duas dessas soluções.

65 (Fuvest-SP) $\begin{cases} x+4z=-7 \\ x-3y=-8 \\ y+z=1 \end{cases}$

Então, $x + y + z$ é igual a:

(A) –2
(B) –1
(C) 0
(D) 1
(E) 2

66 Se $\begin{cases} x+y+z=28 \\ 2x-y=32 \end{cases}$ com $y > 0$ e $z > 0$, qual é o intervalo de variação de x?

67 (UCDB-MT) O sistema $\begin{cases} -x+y+z-2=0 \\ x+2y-2z=0 \\ x-4y+10z-6=0 \\ 2x+7y-5z-2=0 \end{cases}$ é

(A) impossível.
(B) homogêneo.
(C) determinado.
(D) indeterminado com uma variável arbitrária.
(E) indeterminado com duas variáveis arbitrárias.

68 (ITA-SP) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Considere os sistemas lineares em x, y e z:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-3y+z=1 \\ -2y+z=a \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x-y=0 \\ x+2y-z=0 \\ 2x-by+3z=0 \end{cases}$$

Se ambos admitem infinitas soluções reais, então:

(A) $\frac{a}{b}=11$
(B) $\frac{b}{a}=22$
(C) $ab=\frac{1}{4}$
(D) $ab = 22$
(E) $ab = 0$

69 (Ufal) O sistema $\begin{cases} ax+2y=3 \\ bx-y=1 \end{cases}$, nas variáveis reais x e y, é:

(A) possível e determinado, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
(B) possível e indeterminado se $a = 2b$.
(C) possível e determinado se $a \neq 2b$.
(D) possível e indeterminado se $a = -2b$.
(E) impossível se $a = -2b$.

CAPÍTULO IX

GEOMETRIA ESPACIAL

Neste capítulo, iniciamos o estudo da Geometria Espacial, com as propriedades básicas de pontos, retas e planos.

9 – GEOMETRIA ESPACIAL

9.1 – Introdução

A Geometria Espacial estuda as figuras do espaço.

As noções primitivas da Geometria Espacial são as de **ponto**, **reta**, **plano**, **distância** e **conjunto**.

O conjunto de todos os pontos que constituem o universo de estudo é chamado **espaço**. Qualquer figura será, então, um subconjunto do espaço.

Usaremos as letras maiúsculas A, B, C, ... para representar pontos, letras minúsculas *a*, *b*, *c*, ... para retas e letras gregas α, β, γ, ... para representar planos. Retas e planos serão considerados conjuntos de pontos do espaço.

Como em toda ciência, o ponto de partida é constituído de **proposições** que são aceitas sem demonstração. São relações entre as noções primitivas, chamadas **axiomas** ou **postulados**. As proposições verdadeiras demonstráveis a partir dos axiomas são **teoremas**.

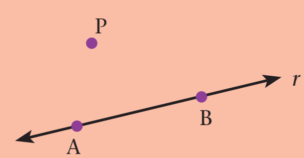
NOTA
Ao contrário da teoria dos conjuntos, os símbolos utilizados para retas (que são conjuntos) serão letras minúsculas e para os pontos (que são elementos, letras maiúsculas).

NOTA
Para maior simplicidade, usaremos as notações usadas na teoria dos conjuntos e suas operações.

Axiomas

A_1) O espaço é um conjunto infinito de pontos.
Todos os pontos pertencem ao espaço.

A_2) Dois pontos distintos do espaço determinam uma única reta à qual pertencem.

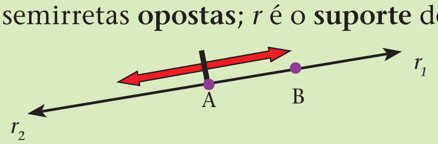


Chamamos essa reta de *r* ou AB. Representa-se $\overleftrightarrow{AB}$
Toda reta é infinita e existe ao menos um ponto que não pertence à reta.

DEFINIÇÃO
Semirreta.

Um ponto A de uma reta *r* divide essa reta em duas **semirretas** r_1 e r_2. O ponto é a **origem** ou **fronteira** de cada semirreta.

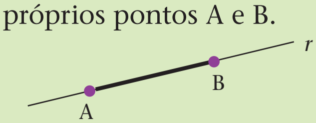
r_1 e r_2 são ditas semirretas **opostas**; *r* é o **suporte** de cada semirreta.



Representa-se $\overrightarrow{AB}$ a semirreta r_1.

DEFINIÇÃO
Segmento de reta.

Sejam dois pontos distintos A e B pertencentes a uma reta r. Chamamos de **segmento de reta** AB a união do conjunto formado por todos os pontos de r que estão entre A e B e os próprios pontos A e B.



Representa-se: $\overline{AB}$

Uma imagem aproximada de uma reta é a de um fio de linha esticado.

Embora um fio esticado dê também a ideia de um segmento de reta, lembramos que a reta é ilimitada, isto é, contém o segmento e seus prolongamentos.

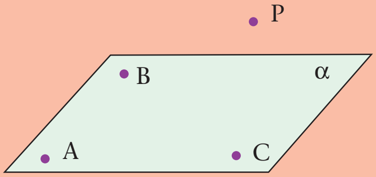
Quando observamos a superfície lisa das águas em repouso de um lago, temos a noção intuitiva de superfície plana.

No cotidiano encontramos imagens aproximadas de porções do plano, nas paredes, tetos, portas e pisos de uma casa, nas capas e páginas de livros, na lousa de uma sala de aula etc.

Thambiradi/Dreamstime.com

Kirsty Pargeter/Dreamstime.com

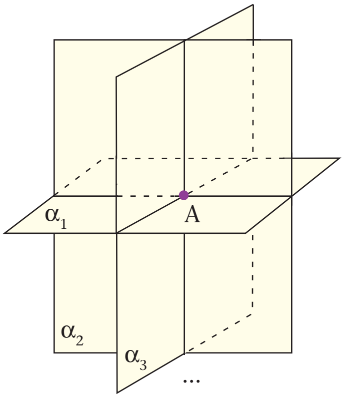
A_3) Três pontos distintos não colineares determinam um único plano ao qual pertencem.



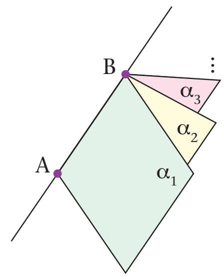
Chamando esse plano de α, temos, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ e $C \in \alpha$.

Todo plano é infinito e existe ao menos um ponto P que não pertence ao plano.

Observe que:



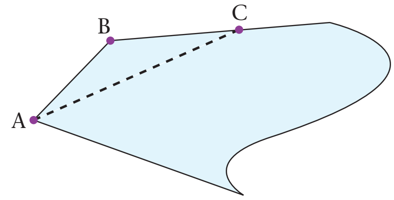
Por um ponto A passam **infinitos planos** α_1, α_2, α_3, ...



NOTA
Retas e planos não têm espessura e são infinitos. Logo, não podem ser produzidos em um laboratório. São entidades abstratas.

Por dois pontos A e B passam infinitos planos α_1, α_2, α_3, ...

Em geral, representamos um plano por meio de paralelogramos, triângulos etc., mas convém lembrar que o plano é ilimitado, pois pode ser prolongado indefinidamente em todos os sentidos.

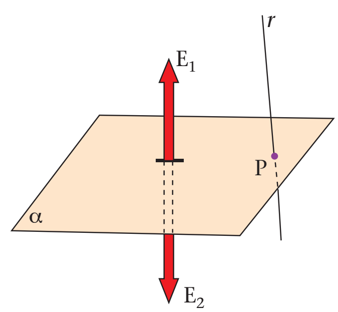


DEFINIÇÃO
Semiespaço.

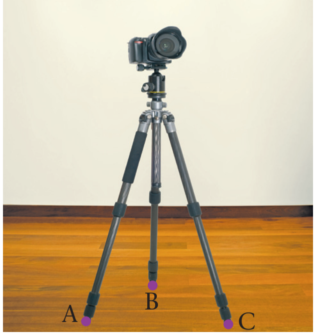
Como o plano é infinito, ele divide o espaço em duas regiões chamadas **semiespaços** E_1 e E_2. O plano é o bordo, fronteira ou origem de cada semiespaço.

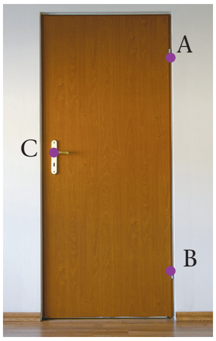
E_1 e E_2 são chamados de semiespaços opostos.

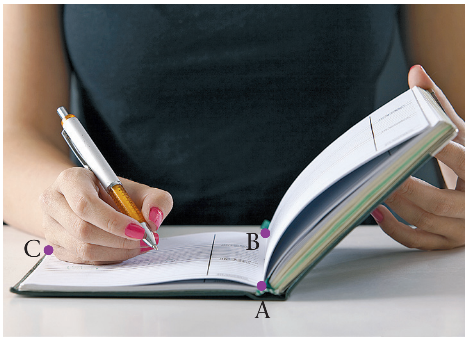
Uma reta *r* não pode passar de um semiespaço para outro sem intersectar o plano num ponto P.



Algumas situações concretas que seguem a determinação de um plano por três pontos:

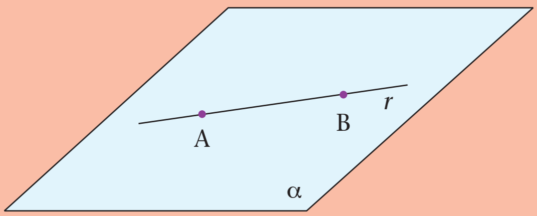
Dimitry Bomshtein/Dreamstime.com


Tomasz Borucki/Dreamstime.com




Dotta

A_4) Toda reta que tem dois pontos distintos pertencentes a um plano está inteiramente contida nesse plano.

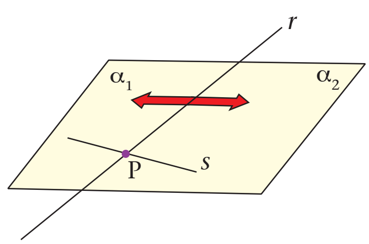


Simbolicamente:

$$\left.\begin{array}{l} A \in r,\ A \in \alpha,\ B \in r,\ B \in \alpha \\ A \neq B \\ r \text{ é uma reta} \\ \alpha \text{ é um plano} \end{array}\right\} \Rightarrow\ r \subset \alpha$$

Como a reta de um plano é infinita, ela divide o plano em duas regiões chamadas **semiplanos** cuja fronteira, origem ou bordo é a reta *r*.

DEFINIÇÃO
Semiplano.



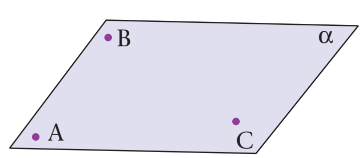
Os semiplanos α_1 e α_2 são chamados opostos. Uma reta *s* do plano não pode passar de um semiplano a outro sem intersectar a fronteira em um ponto P.

9.2 – Determinação de um plano

Um plano fica determinado quando são dados:

i) **Três pontos não colineares**.
Trata-se do axioma A_3.

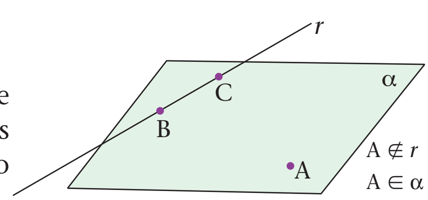
Aceita-se sem demonstração.



$A, B, C \in \alpha$

ii) **Uma reta e um ponto não pertencente a essa reta.**

Dado um ponto $A \notin r$, podemos tomar sobre *r* dois pontos distintos $B \in r$ e $C \in r$ e teremos três pontos não colineares que determinam o plano α, conforme o axioma acima.

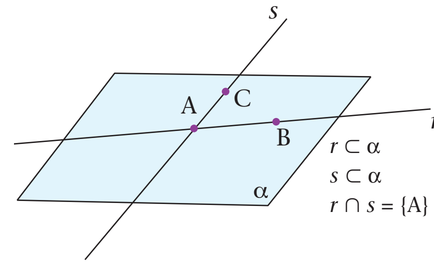


$A \notin r$
$A \in \alpha$
$r \subset \alpha$

NOTA
Por praticidade, usaremos {A} = A.

iii) **Duas retas concorrentes**.

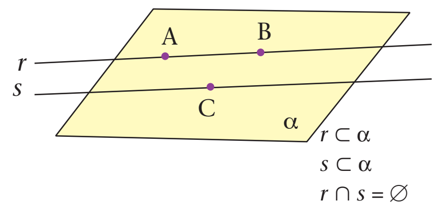
Denotando $r \cap s = \{A\}$, já temos um ponto para o plano. Tomando um ponto $B \neq A$ na reta r, e um ponto $C \neq A$ na reta s, recaímos no primeiro caso.



NOTA
Duas retas são paralelas quando, estando situadas no mesmo plano, não têm ponto comum.

iv) **Duas retas paralelas**.

Por definição, duas retas paralelas são coplanares. Para ver que o plano é único, basta tomar dois pontos em uma reta e um terceiro na outra.



Exemplos:

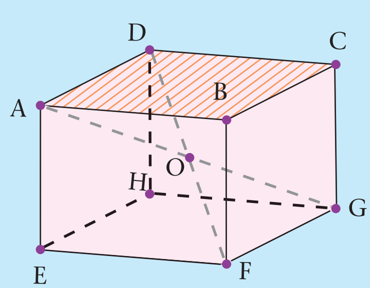
i) O eixo de uma porta e sua maçaneta definem o plano da porta.
O plano de uma porta fica definido pelo eixo e pelo bordo que lhe é paralelo.

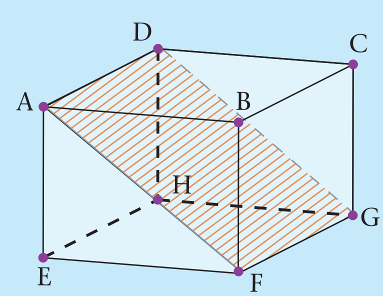

Tomasz Borucki/Dreamstime.com


Jakich/Dreamstime.com

As porteiras de fazendas são portas cuja sustentação é feita por duas hastes que se cruzam.

ii)





a) O plano da face ABCD está determinado pelos pontos A, B e C, ou pelas retas concorrentes AB e BC, ou pelas paralelas AB e CD, ou ainda pela reta AB e o ponto C.

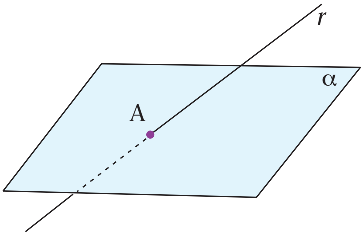
b) O plano diagonal ADGF está determinado pelos pontos A, D e G, ou pelas diagonais AG e DF concorrentes em O, ou pelas diagonais das faces DG e AF, ou ainda pela reta AD e o ponto G.

9.2.1 – Posições relativas de uma reta e um plano

i) **Reta secante ao plano**

Neste caso, a reta tem apenas um ponto no plano.

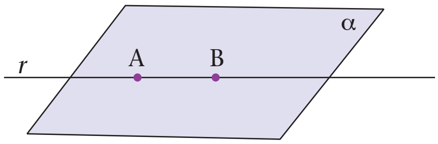
$r \cap \alpha = A$



ii) **Reta contida no plano**

Neste caso, todos os pontos da reta pertencem também ao plano. De fato, basta que dois pontos distintos de uma reta estejam em um plano para concluirmos que a reta está contida nesse plano.

$$\left.\begin{array}{l} A \in r \wedge A \in \alpha \\ B \in r \wedge B \in \alpha \end{array}\right. \Rightarrow r \cap \alpha = r$$

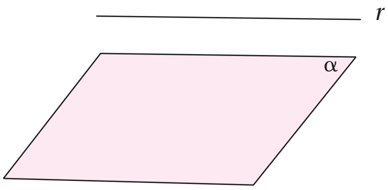


iii) **Reta paralela ao plano**

Neste caso, a reta não tem pontos no plano.

$r \cap \alpha = \varnothing$

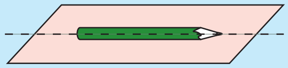
$r \,//\, \alpha$



Exemplos:

i) Quando se escreve numa folha de papel, o eixo do lápis pode ser considerado uma reta que está inclinada em relação ao plano do papel.
É uma reta secante ao plano do papel.

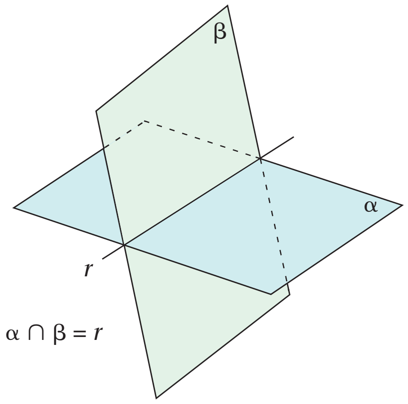
ii) Se o lápis está apoiado sobre a folha de papel, seu eixo é uma reta paralela ao plano do papel.



9.2.2 – Posições relativas de dois planos

i) **Planos secantes**

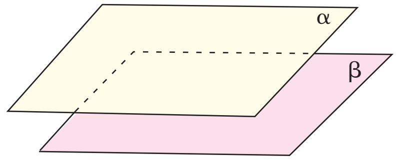
Neste caso, os dois planos têm uma reta comum que é a sua intersecção.



$\alpha \cap \beta = r$

ii) **Planos paralelos**

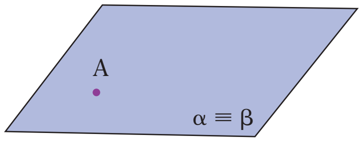
Dois planos são paralelos se não têm ponto comum.



$\alpha \cap \beta = \varnothing \Leftrightarrow \alpha \mathbin{//} \beta$

iii) **Planos coincidentes**

São planos em que todos os pontos são comuns.



$\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$

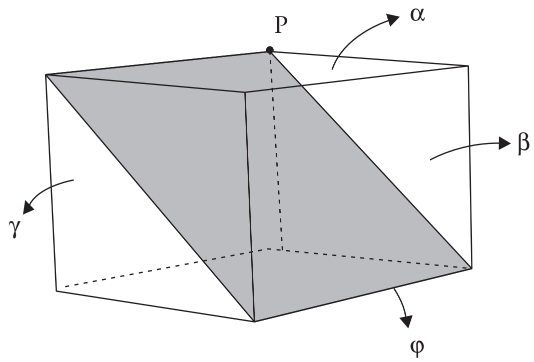
Exemplos:

i) Duas folhas de um livro aberto podem ser consideradas como planos secantes cuja intersecção é a reta comum a essas duas folhas.

ii) O teto e o piso de uma casa, sendo planos, em geral são planos paralelos.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Quantos planos podem passar por um ponto P conhecido?



2 Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada proposição a seguir.

a) Por um ponto passa uma reta.

b) Por uma reta passam infinitos planos.

c) Por uma reta passam dois planos.

d) Por uma reta passa um plano.

e) Por uma reta passa um único plano.

f) Por duas retas passa um plano.

g) Por duas retas paralelas passa um plano.

h) Por duas retas concorrentes passa um plano.

i) Por um plano passa uma única reta.

j) Três pontos determinam um plano.

k) Três pontos não colineares determinam um plano.

l) Dois pontos determinam um plano.

m) Toda reta divide o plano em dois semiplanos opostos.

n) Duas retas que têm um ponto comum determinam um plano.

o) Quando uma reta passa pelo plano ela "fura" o plano.

p) Três pontos distintos não são colineares.

q) Duas retas determinam um plano.

r) Duas retas e um ponto determinam um plano.

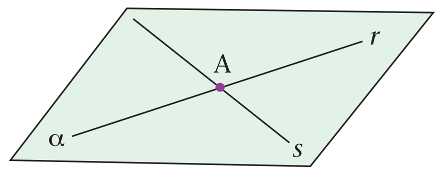
3 Complete:
Quatro pontos distintos e não coplanares determinam exatamente ___________ planos.

4 Qual o número máximo de planos determinados por sete pontos onde o número máximo de pontos coplanares é três?

9.2.3 – Posições relativas de duas retas

i) **Retas concorrentes**

São retas que têm apenas um ponto comum. Portanto, são coplanares.

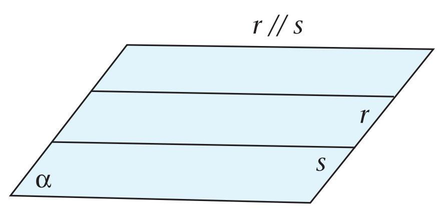


$r \cap s = A$
$\exists! \alpha \mid r, s \subset \alpha$

> **NOTA**
> O símbolo ∃! significa "existe um único".

ii) **Retas paralelas**

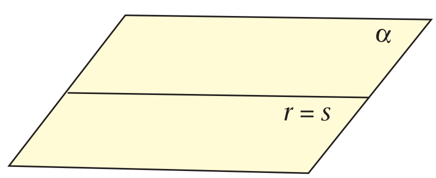
São retas coplanares que não têm ponto comum.



$r \cap s = \varnothing$
$\exists! \alpha \mid r, s \subset \alpha$

iii) **Retas coincidentes**

São retas que têm todos os seus pontos comuns.

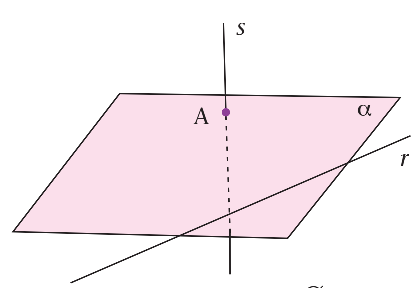


$\exists \alpha \mid r, s \subset \alpha$

iv) **Retas reversas**

São retas não coplanares.

Observe que a reta *r* está contida no plano α mas a reta *s* não está. O ponto A está sobre a reta *s*, mas não está sobre a reta *r*.



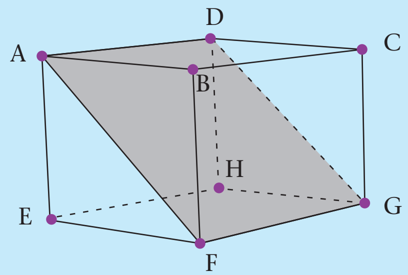
$r \cap s = \varnothing$
$\nexists \alpha \mid r, s \subset \alpha$

Resumo:

$$\text{Retas} \begin{cases} \text{coplanares} \begin{cases} \text{concorrentes} \\ \text{paralelas} \\ \text{coincidentes} \end{cases} \\ \text{reversas} \end{cases}$$

Exemplo:

No paralelepípedo ABCDEFGH:



as retas:

a) AD e BF são reversas;

b) AB e BF são concorrentes;

c) AB e CG são reversas;

d) AB e AD são concorrentes;

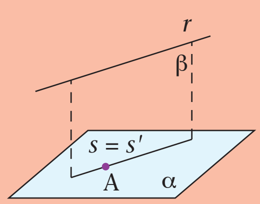
e) BF e CG são paralelas;

f) AF e DG são paralelas.

9.2.4 – Retas e planos paralelos

Teoremas

T_1) Seja r // α. Dado um ponto $A \in \alpha$ e uma reta s passando por A e paralela a r, temos que $s \subset \alpha$.



Demonstração:

Seja β o plano definido pela reta r e pelo ponto A. Seja $s' = \alpha \cap \beta$. Afirmamos que $s' = s$.

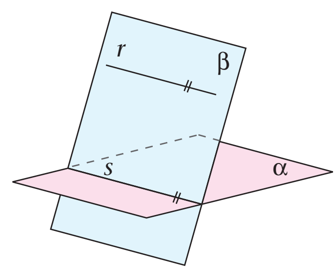
De fato, s' e r são paralelas, pois são coplanares (ambas em β), mas não têm ponto comum (pois $s' \subset \alpha$ e r // α).

Assim, s'// r e $A \in s' \Rightarrow s' = s$. Então $s = s' \subset \alpha$.

T_2) Uma condição necessária e suficiente para que uma reta *r* seja paralela a um plano α é que ela seja paralela a uma reta *s* contida nesse plano α.

i) A condição é suficiente:

"Toda paralela a uma reta de um plano é paralela a esse plano."



Seja *r* paralela a *s* contida em α. As retas *r* e *s* determinam um plano β cuja intersecção com α é a reta *s*. Como *r* não tem ponto comum com *s*, não tem também com α, sendo, portanto, paralela ao plano α.

ii) A condição é necessária:

"Toda reta paralela a um plano é paralela a uma reta contida nesse plano."

Seja *r* paralela ao plano α. Todo plano β que contém a reta *r*, não paralelo a α, intersecta o plano α segundo uma reta *s*. Como a reta *r* não tem ponto comum com o plano α, não terá também com a reta *s*, pois *s* está contida em α.

Assim *r* e *s*, não tendo ponto comum, são paralelas.

T_3) Uma condição necessária e suficiente para que uma reta *r* seja paralela à intersecção de dois planos α e β é que ela seja paralela a esses planos α e β.

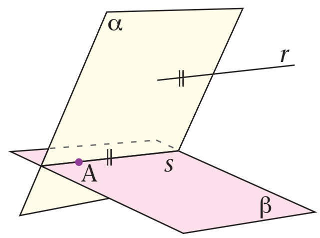
i) A condição é suficiente:

"Toda reta paralela a dois planos secantes é paralela à sua intersecção".

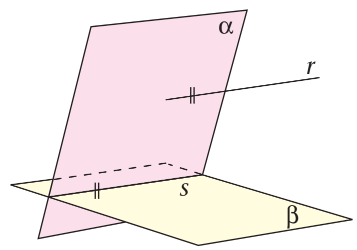
Seja a reta *r* paralela aos planos α e β que se cortam na reta *s*.

Se por um ponto A dessa intersecção traçamos uma paralela à reta *r*, esta paralela estará em α e também em β, logo será a própria reta *s* de intersecção dos planos α e β.

NOTA
O caso α = β é trivial, portanto consideramos α e β secantes.



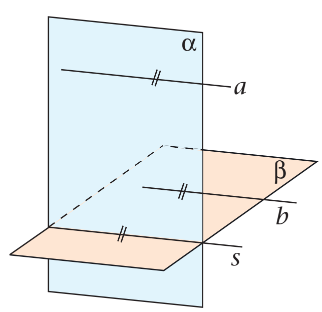
ii) A condição é necessária:
“Toda reta paralela à intersecção de dois planos é paralela a esses planos.”



Como r é paralela à intersecção $s = \alpha \cap \beta$, temos que r é paralela ao plano α (pelo teorema 2).
Analogamente, r é paralela ao plano β.

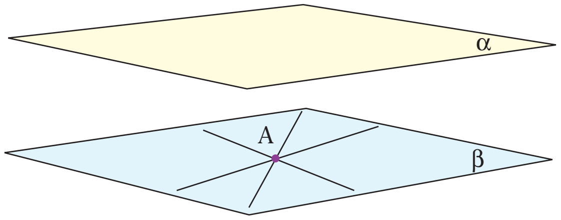
Consequências:

i) Se dois planos secantes α e β passam respectivamente por duas retas paralelas a e b, a intersecção s deles é paralela à reta a e também à reta b.

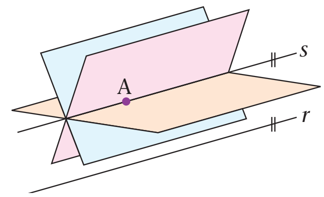


A reta a é paralela ao plano β por ser paralela à reta b, logo o plano α que contém a reta a corta o plano β segundo a reta s, que será paralela a a. Analogamente, b // s.

ii) Por um ponto A passam infinitas retas paralelas a um plano α.



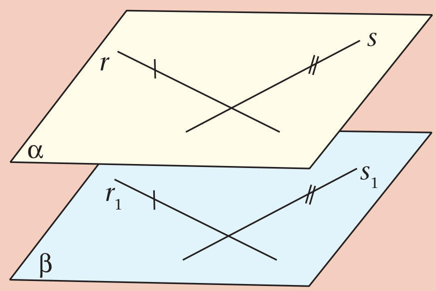
iii) Por um ponto A passam infinitos planos paralelos a uma reta *r*.



9.2.5 – Planos paralelos

Teoremas

T_1) Uma condição necessária e suficiente para que dois planos sejam paralelos é que um deles contenha duas retas concorrentes paralelas ao outro.

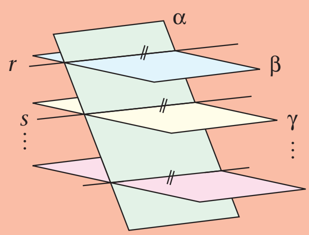


i) A condição é suficiente:
"Duas retas concorrentes r e s paralelas a um plano β determinam um plano α paralelo a β."
Note inicialmente que $\alpha \neq \beta$. Se α não fosse paralelo a β, existiria uma reta $t = \alpha \cap \beta$. Como r e t são coplanares (ambas em α), mas não concorrentes (pois $r \cap \beta = \varnothing$ e $t \subset \beta$), devemos ter $r \,//\, t$. Analogamente, $s \,//\, t$. Mas isso seria absurdo (t seria paralela a duas retas r e s concorrentes).
Assim, $\alpha \,//\, \beta$.

ii) A condição é necessária:
"Se dois planos α e β são paralelos, toda reta r de um deles (α) é paralela ao outro (β)."
Se assim não fosse, a reta r encontraria o plano β fazendo com que os planos α e β tivessem um ponto comum, o que é absurdo, pois α e β são paralelos.

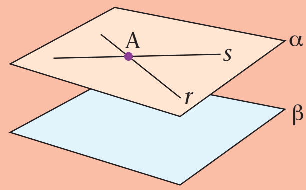
NOTA
Um conjunto de planos paralelos é um **feixe de planos paralelos.**

T_2) As intersecções de planos paralelos β, γ, ... com um plano secante α são retas paralelas.



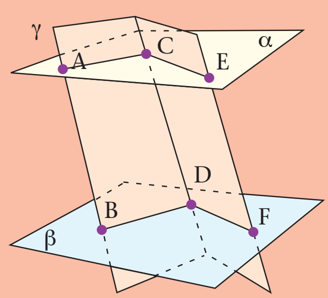
Seja α o plano secante e β, γ, ... os planos paralelos. As intersecções de α com os diversos planos β, γ, ... são retas coplanares que não têm ponto comum, pois estão em planos paralelos, logo, são paralelas.

T_3) Existe algum plano α passando por um ponto A que seja paralelo a um plano β.



Basta fazer passar pelo ponto A duas retas distintas e paralelas ao plano β. Essas retas determinam um plano α paralelo a β.

T_4) Segmentos de reta paralelos compreendidos entre planos paralelos têm a mesma medida.

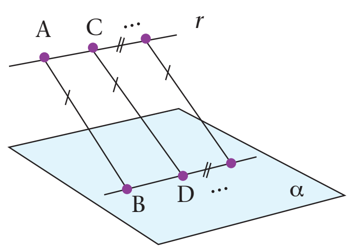


Sejam, por exemplo, os segmentos AB e CD e os planos α e β.

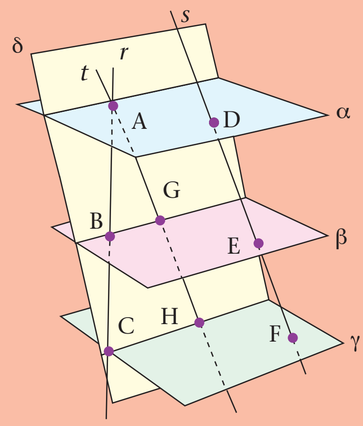
As paralelas AB e CD determinam um plano γ que corta os planos α e β segundo as paralelas AC e BD. A figura ABCD é então um paralelogramo cujos lados opostos AB e CD têm a mesma medida.

Consequência:

Segmentos de reta paralelos compreendidos entre uma reta *r* e um plano α paralelo a *r* são congruentes.



T_5) Um feixe de planos paralelos determina, sobre duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais.



Sejam os planos α, β e γ que intersectam as secantes *r* em A, B e C e *s* em D, E e F.

Pelo ponto A da secante *r* tracemos uma reta *t* paralela a *s*. A reta *t* forma com *r* um plano δ, que corta os planos α, β e γ segundo as paralelas BG e CH.

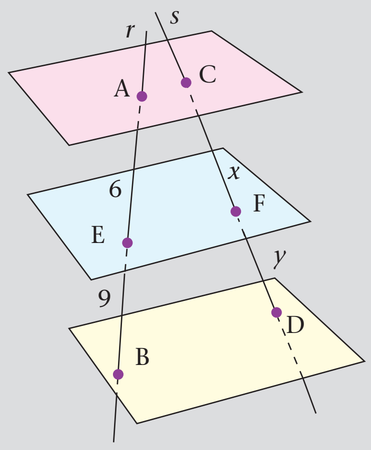
As secantes *t* e *r* são tais que: (teorema de Tales)

$\frac{AB}{AG} = \frac{BC}{GH}$. Mas AG = DE e GH = EF, logo $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$.

Exercícios resolvidos:

1) A reta *r* corta 3 planos paralelos nos pontos A, E e B; e a reta *s* corta os mesmos planos nos pontos C, F e D. Se AE = 6 cm, BE = 9 cm e CD = 12 cm, calcule CF e FD.

Solução:



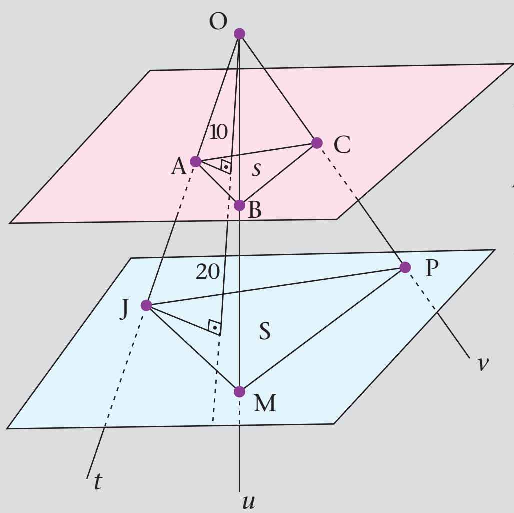
$$\frac{6}{x} = \frac{9}{y} = \frac{6+9}{x+y} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

$5x = 24 \Rightarrow x = 4{,}8$ cm

$5y = 36 \Rightarrow y = 7{,}2$ cm

2) Três retas não coplanares, concorrentes no ponto O, são cortadas por dois planos paralelos distando 10 cm e 30 cm do ponto O. Sabendo que a seção mais próxima do ponto O forma um triângulo de lados 13, 14 e 15 cm, calcule a área do triângulo formado no plano mais afastado.

Solução:



$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{13+14+15}{2} = 21 \text{ cm}$$

$$s = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 84 \text{ cm}^2$$

$$\frac{s}{S} = \frac{10^2}{30^2}$$

$$\frac{84}{S} = \frac{100}{900} \Rightarrow S = 84 \cdot 9 \Rightarrow$$

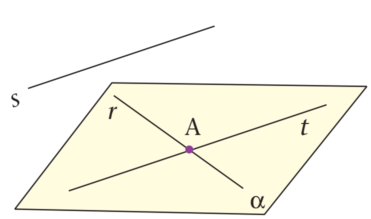
$$\Rightarrow S = 756 \text{ cm}^2$$

9.2.6 – Retas reversas

Teoremas

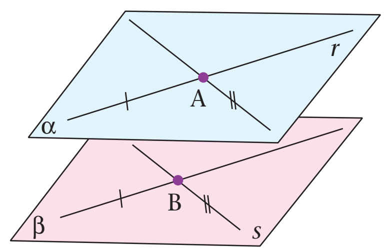
T_1) Dadas duas retas reversas *r* e *s*, existe apenas um plano que contém uma delas e é paralelo à outra.

Por um ponto A da reta *r* tracemos uma reta *t* paralela a *s*. As retas *r* e *t* determinam um plano α paralelo a *s*. Se existisse outro plano que contivesse *r* e paralelo a *s*, teríamos duas paralelas e distintas a *s* passando pelo ponto A, o que é absurdo.

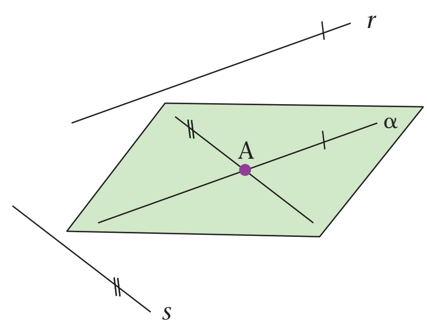


Consequências:

i) Existem dois planos paralelos que contêm duas reversas, cada um contendo uma delas.
Por um ponto A de *r* traça-se uma paralela a *s* e por um ponto B de *s* uma paralela a *r*.

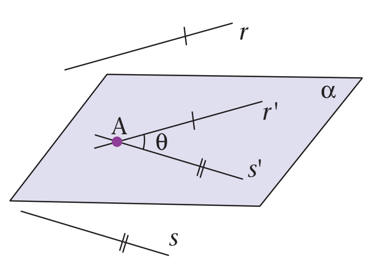


ii) Existe um único plano paralelo a duas retas reversas que passa por um ponto fora delas.

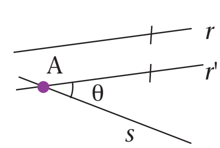


DEFINIÇÃO
Retas ortogonais.

iii) Ângulo de duas retas reversas é o ângulo formado pelas paralelas a elas passando por um ponto.
Quando esse ângulo é reto, elas são ditas **ortogonais**.



iv) Podemos então tomar um ponto numa delas e por ele passar uma reta paralela à outra. O ângulo formado é o ângulo das retas reversas.



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 (FCChagas-SP) Considere um plano (α), uma reta (r) concorrente com (α), um ponto (P) que não pertença nem a (r) nem a (α), e as seguintes afirmações:

I. A reta (s), que passa por (P), intercepta (r) e é paralela a (α), é única.

II. O plano β que contém (P) e (r) intercepta (α).

III. Qualquer reta que passe por (P) e seja paralela a (α) intercepta (r).

Pode-se concluir que:

(A) as afirmações I e III são verdadeiras.

(B) as afirmações I e II são verdadeiras.

(C) as afirmações II e III são verdadeiras.

(D) todas as afirmações são verdadeiras.

(E) todas as afirmações são falsas.

2 Sejam r e s duas retas distintas. Podemos afirmar que sempre:

(A) existe uma reta perpendicular a r e s.

(B) r e s determinam um único plano.

(C) existe um plano que contém s e não intercepta r.

(D) existe uma reta que é paralela a r e s.

(E) existe um plano que contém r e um único ponto de s.

3 Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada proposição a seguir.

I. Se duas retas r e s são paralelas a um plano α, então:

a) elas determinam um plano β // α.

b) elas são paralelas entre si.

c) elas são coplanares.

d) o plano π que passa por r e o plano δ que passa por s são paralelos.

II. Se uma reta r está contida em um plano α, então:

a) fora de α, por um ponto P, existe uma reta s paralela a r.

b) toda paralela a r está contida no plano α.

c) toda concorrente com r está num plano β que a contém.

d) existem retas paralelas a r fora de α.

4 Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada proposição a seguir.

a) Se o plano α tem apenas dois pontos no plano β, então α e β podem ser paralelos.

b) Se o plano α tem infinitos pontos no plano β, então α e β podem ser paralelos.

c) Se uma reta é paralela a um plano, então toda paralela a ela é paralela ao plano.

d) Se r e s são duas retas paralelas distintas, então todo plano que passar por r irá passar por s.

e) Dois planos que não têm ponto comum são paralelos.

f) Dois planos paralelos não têm ponto comum.

g) Dois planos paralelos distintos não têm ponto comum.

h) Para que dois planos sejam paralelos é suficiente que um deles tenha duas retas concorrentes paralelas ao outro.

5 Na determinação de um plano são suficientes os seguintes elementos:

(A) duas retas distintas.

(B) uma reta e um plano.

(C) duas retas reversas.

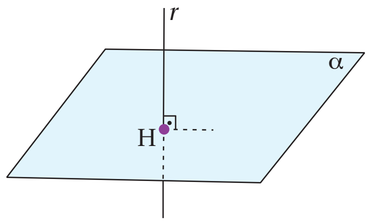
(D) duas retas concorrentes.

9.3 – Reta e plano perpendiculares

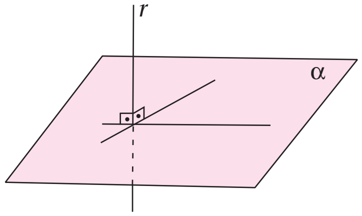
DEFINIÇÃO
Perpendicularismo entre reta e plano.

Uma reta r e um plano α são perpendiculares quando todas as retas do plano α são ortogonais à reta r.

A intersecção da reta r com o plano α é o ponto H chamado **pé da perpendicular**.

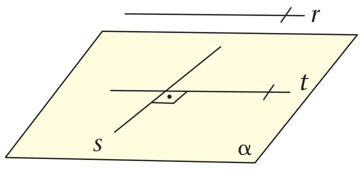


Para verificar se uma reta é perpendicular a um plano, basta verificar se ela é perpendicular a todas as retas que passam por seu pé, nesse plano.

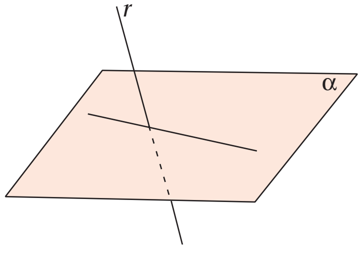


Observações:

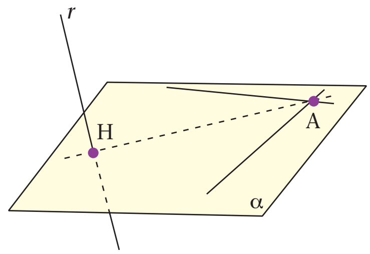
1) É comum fazer-se uma distinção entre perpendicular e ortogonal. Ambas formam ângulo de 90º, sendo perpendiculares as coplanares e ortogonais as não coplanares. Na figura abaixo, as retas t e r são paralelas, s e t são perpendiculares e r e s são ortogonais.



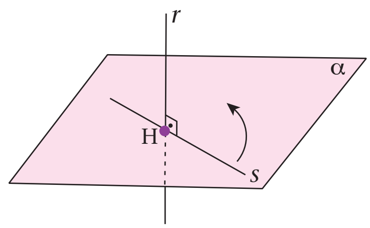
2) Uma reta r é oblíqua a um plano α quando corta esse plano e não é perpendicular ao mesmo.



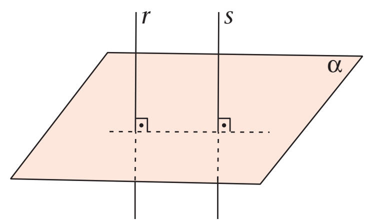
3) Se por um ponto A fora de uma reta *r* traçarmos todas as retas ortogonais a *r* e também a perpendicular AH, geramos um plano α.



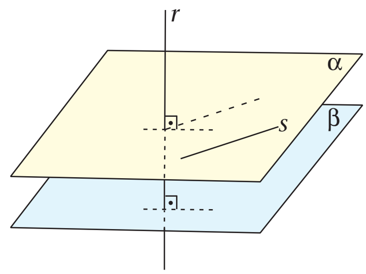
4) Se girarmos uma reta *s*, perpendicular à reta *r* no ponto H, em torno do ponto H, ela gerará um lugar geométrico que é um plano α perpendicular à reta *r*.



5) Se duas retas *r* e *s* são paralelas, todo plano perpendicular a uma delas é perpendicular à outra.



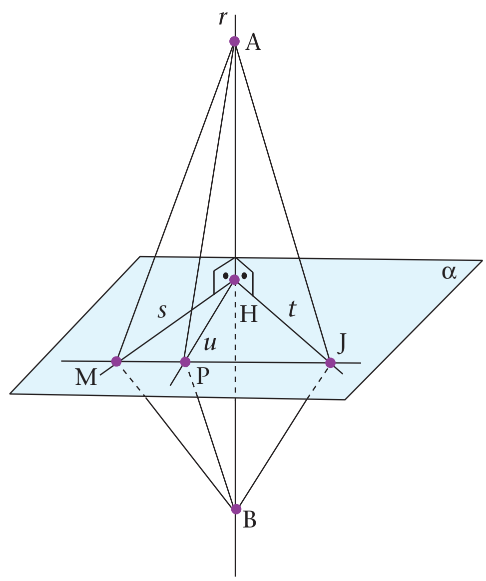
6) Se dois planos α e β são paralelos, toda reta perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.



7) Uma reta *s* e um plano β perpendiculares a uma reta *r* são paralelos.

9.3.1 – Teoremas sobre perpendicularidade

T_1) Toda reta r, perpendicular a duas outras s e t que passam por seu pé H num plano, é perpendicular a qualquer outra u que também passa por seu pé nesse plano.



Demonstração:

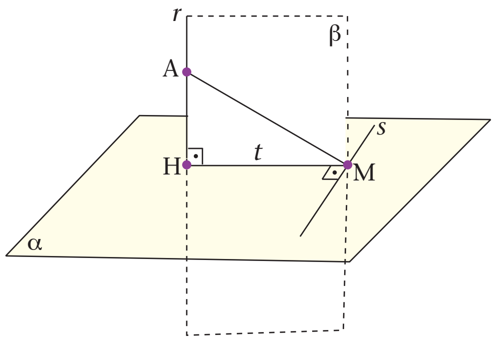
Seja $\overline{AH}$ perpendicular a $\overline{HM}$ e $\overline{HJ}$ no plano α. Prolongamos $\overline{AH}$ de um comprimento $\overline{HB} = \overline{AH}$.

Consideramos no plano α uma reta $\overleftrightarrow{MJ}$ que corte s e t do plano α. Seja u uma reta qualquer do plano α que passa pelo pé H da reta r nesse plano.

As retas s e t são mediatrizes do segmento AB, logo $\overline{MA} = \overline{MB}$ e $\overline{JA} = \overline{JB}$. Os triângulos AMJ e BMJ são congruentes por terem os três lados respectivamente de mesma medida. Com isso, $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são congruentes, o triângulo PAB será isósceles e $\overline{PH}$ será a altura do triângulo PAB. Então, $\overline{PH}$ será perpendicular a $\overline{AB}$. A reta u será então uma perpendicular a r que passa por seu pé H.

Teorema das três perpendiculares

Se do pé H de uma perpendicular r a um plano α se traça uma perpendicular t a uma reta qualquer s do plano, toda reta que passe pelo novo pé M da segunda perpendicular e por um ponto qualquer A da primeira, é perpendicular à segunda reta do plano (s).

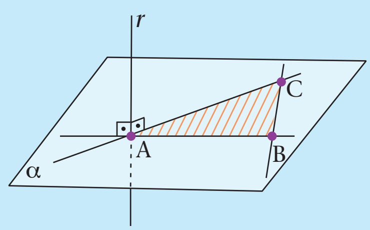


Demonstração:

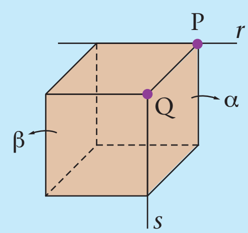
Sejam $\overleftrightarrow{AH}$ a perpendicular r ao plano α e $\overleftrightarrow{HM}$ a perpendicular t a uma reta qualquer s do plano α. Sendo $\overleftrightarrow{AH}$ perpendicular ao plano α, é ortogonal a qualquer reta s desse plano que não passe pelo seu pé. Assim, a reta s é perpendicular a t e ortogonal a r, logo é perpendicular ao plano β determinado por r e por t, sendo, portanto, perpendicular à reta MA desse plano. Então, a reta s é perpendicular a $\overleftrightarrow{MA}$.

Exemplos:

i) Dados três pontos não colineares A, B e C, se $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são perpendiculares a uma reta r, prove que as retas r e $\overleftrightarrow{BC}$ são ortogonais.
Como A, B e C são pontos não colineares, eles determinam o plano α. Portanto, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ estão contidas no plano α. Como a reta r é perpendicular às retas AB e AC, que têm o ponto A comum, e como r é perpendicular ao plano que as contém, assim $r \perp \alpha$. Logo, r é ortogonal a qualquer reta do plano α que não passa pelo ponto A.
Portanto, as retas r e $\overleftrightarrow{BC}$ são ortogonais.



ii) Na figura abaixo, r e s são retas reversas. Elas têm uma única perpendicular comum?



Sim, pois se α e β são dois planos paralelos, tais que α contém r e β contém s, teremos **uma única** reta perpendicular aos planos em P e Q, visto que a reta que contém PQ é perpendicular aos planos α e β, portanto perpendicular a todas as retas de α e de β que passam por suas intersecções com esses planos.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) as proposições.

a) Se duas retas não são coplanares, elas são reversas.

b) Duas retas reversas podem ser coplanares.

c) Duas retas paralelas podem não ser coplanares.

d) Duas retas reversas nunca estão em planos paralelos.

e) Se uma reta *r* é paralela a outra reta *s* e uma reta *t* é paralela a *s*, então *t* é paralela a *r*.

f) Duas retas reversas são paralelas a um plano. Toda reta ortogonal a ambas é perpendicular ao plano.

g) Uma reta e um plano são paralelos. Toda perpendicular à reta dada é perpendicular ao plano.

h) Uma reta e um plano são perpendiculares. Toda perpendicular à reta dada é paralela ao plano ou está contida nele.

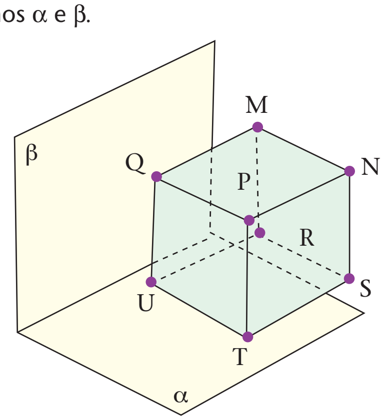
i) Se uma reta forma ângulo reto com duas retas de um plano, distintas e que têm um ponto comum, ela é perpendicular ao plano.

2 (Fuvest-SP) São dados 5 pontos não coplanares ABCDE. Sabe-se que ABCD é um retângulo, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{AD}$. Pode-se concluir que são perpendiculares as retas:

(A) $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{EB}$. (C) $\overleftrightarrow{EB}$ e $\overleftrightarrow{BA}$. (E) $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$.

(B) $\overleftrightarrow{EC}$ e $\overleftrightarrow{CA}$. (D) $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{AC}$.

3 (UFF-RJ) A figura abaixo representa um cubo que possui as faces RSTU e MRUQ paralelas, respectivamente, aos planos α e β.



Sabendo-se que U equidista de α e β, o número de retas definidas pelos vértices do cubo, que são ortogonais a α ∩ β, é:

(A) 0 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

4 (UFF-RJ) Assinale a opção que apresenta a afirmativa incorreta.

(A) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.

(B) Duas retas que não possuem pontos em comum não são necessariamente paralelas.

(C) A reta intersecção de dois planos perpendiculares a um terceiro é perpendicular a este.

(D) Dados uma reta e um ponto, existe apenas um plano perpendicular à reta que contém o ponto.

(E) Por uma reta não paralela e não perpendicular a um plano α passa um único plano perpendicular a α.

5 Seja OABC um tetraedro cujas arestas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ são duas a duas perpendiculares entre si, P a projeção ortogonal do vértice O sobre o triângulo ABC e D a intersecção de $\overrightarrow{CP}$ com $\overrightarrow{AB}$.

Assinale a afirmação correta.

(A) Quaisquer que sejam os comprimentos $\overline{OA}, \overline{OB}$ e $\overline{OC}$, o $O\hat{D}C$ é reto.

(B) $C\hat{D}B$ depende dos comprimentos $\overline{OA}, \overline{OB}$ e $\overline{OC}$.

(C) Quaisquer que sejam os comprimentos $\overline{OA}, \overline{OB}$ e $\overline{OC}$, $\overline{AD} = \overline{DB}$.

(D) Se $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, o triângulo ODC é isósceles.

(E) Quaisquer que sejam os comprimentos $\overline{OA}, \overline{OB}$ e $\overline{OC}$, $\overline{AB}$ é perpendicular ao plano OCD.

6 Sejam α e β planos perpendiculares, α ∩ β = *r*. Em α considera-se uma reta *s* perpendicular a *r*, *s* ∩ *r* = {A}, e em β considera-se *t* oblíqua a *r*, *t* ∩ *r* = {A}.

Dentre as afirmações:

I. *s* é perpendicular a β.

II. *t* é perpendicular a *s*.

III. O plano determinado por *s* e *t* é perpendicular a β.

IV. Todo plano perpendicular a *s* e que não contém A é paralelo a β.

Pode-se garantir que:

(A) somente I é falsa.

(B) somente II é falsa.

(C) somente III é falsa.

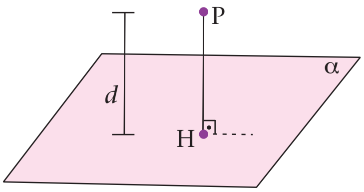
(D) somente IV é falsa.

(E) nenhuma é falsa.

9.3.2 – Distâncias

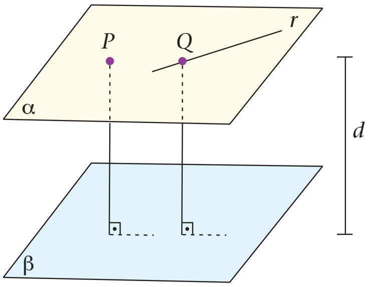
Distância *d* de um ponto P a um plano α é a medida do segmento de reta PH perpendicular de P a α, numa certa unidade *u*.

DEFINIÇÃO
Distância de um ponto ao plano.



Distância entre dois planos paralelos é a distância de qualquer ponto de um deles ao outro.

DEFINIÇÃO
Distância entre dois planos paralelos.

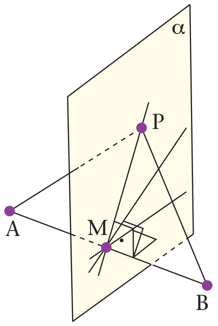


Distância entre uma reta e um plano paralelos é a distância de qualquer ponto da reta ao plano.

DEFINIÇÃO
Distância entre uma reta e um plano paralelos.

Plano mediador de um segmento AB é o plano α perpendicular ao segmento que passa por seu ponto médio M.

DEFINIÇÃO
Plano mediador.



Seja P um ponto qualquer do plano mediador. O segmento MP é perpendicular ao segmento AB e M é médio de $\overline{AB}$.

Então, os triângulos retângulos AMP e BMP são congruentes (pois têm um cateto $\overline{MP}$ comum e os catetos $\overline{AM} \cong \overline{MB}$). Assim $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

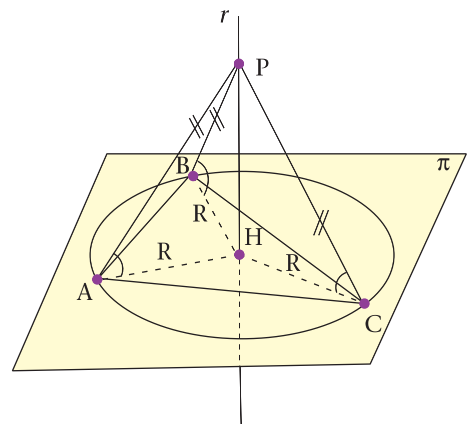
Isto posto, mostramos:

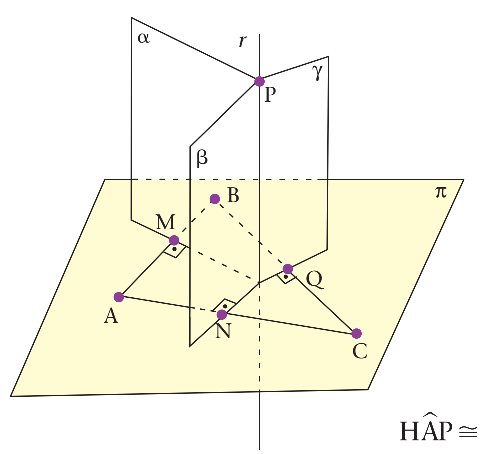
> O plano mediador de um segmento é o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de dois pontos dados, extremidades do segmento.

NOTA
Circuncentro é o ponto de encontro das **mediatrizes** dos lados de um triângulo, ou seja, é o centro do círculo circunscrito.

Caso particular

O lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes dos vértices de um triângulo é a reta perpendicular ao plano do triângulo que passa pelo circuncentro do triângulo.





$H\hat{A}P \cong H\hat{B}P \cong H\hat{C}P$

$\overline{PA} \cong \overline{PB} \cong \overline{PC}$

R = raio do círculo circunscrito

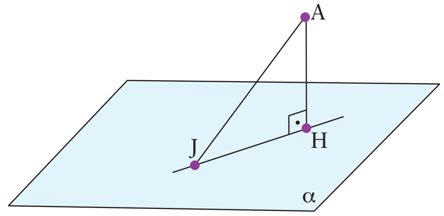
De fato, o lugar geométrico é a reta *r* de intersecção dos planos mediadores, α do lado $\overline{AB}$, β do lado $\overline{AC}$ e γ do lado $\overline{BC}$.

9.3.3 – Perpendiculares e oblíquas

Teoremas

> T_1) Quando se toma um ponto A fora de um plano α, a perpendicular $\overline{AH}$ é menor que qualquer oblíqua $\overline{AJ}$.

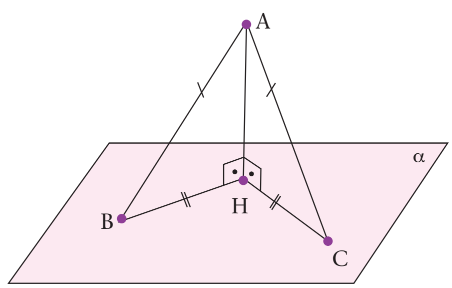
Demonstração:



O triângulo AHJ é retângulo em H sendo $\overline{AJ}$ sua hipotenusa, logo $\overline{AH} < \overline{AJ}$.

T_2) Se duas oblíquas, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, que partem de um mesmo ponto, são congruentes, então seus pés B e C são equidistantes do pé da perpendicular H.

Demonstração:

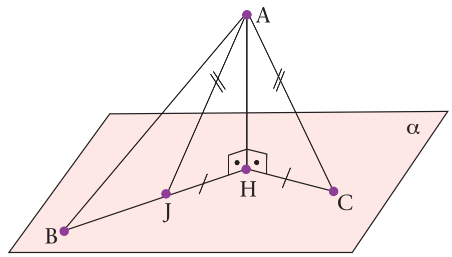


Os triângulos retângulos AHB e AHC são congruentes, pois têm um cateto comum AH e hipotenusas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, congruentes, logo $\overline{HB} = \overline{HC}$.

As oblíquas se afastam igualmente da perpendicular.

T_3) Entre duas oblíquas, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, que partem do mesmo ponto A, é maior aquela que mais se afasta do pé H da perpendicular.

Demonstração:

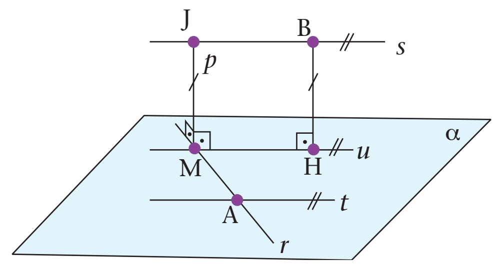


Seja $\overline{AB}$ a mais afastada da perpendicular $\overline{AH}$ ($\overline{HB} > \overline{HC}$). Marquemos sobre o cateto $\overline{HB}$ do triângulo retângulo AHB um ponto J tal que $\overline{HJ} = \overline{HC}$. Temos dois triângulos retângulos AHB e AHJ com um cateto comum $\overline{AH}$ e catetos $\overline{HB} > \overline{HJ}$, pois $\overline{HJ} = \overline{HC}$. Então, a hipotenusa $\overline{AB} > \overline{AJ}$, donde $\overline{AB} > \overline{AC}$.

NOTA
Observe que $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AJ}$ e $\overleftrightarrow{MJ}$ são retas que têm um ponto em *r* e um ponto em *s*. Entretanto, $\overline{MJ}$ é o menor segmento que se apoia em *r* e *s*.

9.3.4 – Perpendicular comum a duas retas reversas

Dadas duas retas reversas *r* e *s*, existe uma terceira reta *p* concorrente com *r* e *s*, e perpendicular a ambas.



NOTA
Se desejarmos apenas a distância entre as retas reversas *r* e *s*, basta achar a distância da reta *s*, paralela ao plano α, a este plano.

Sejam as retas reversas *r* e *s*. Por um ponto A de *r* traçamos uma reta *t* paralela a *s*. Fica determinado um plano α que contém *r* e *t* e é paralelo à reta *s*. Por um ponto B pertencente à reta *s* traçamos uma perpendicular $\overleftrightarrow{BH}$, ao plano α. Pelo pé H dessa perpendicular traçamos uma reta *u* paralela a *t* que é paralela a *s*. M é a intersecção dessa reta *u* com a reta *r*.

$\overleftrightarrow{MJ}$, paralela a BH pelo ponto M, é a perpendicular comum *p*.

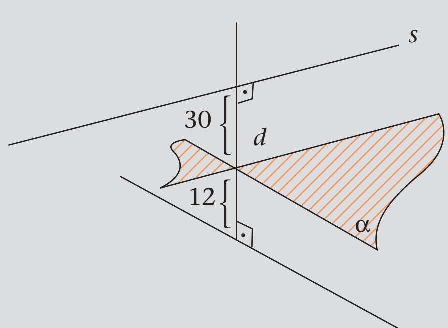
DEFINIÇÃO
Distância entre retas reversas.

O comprimento dessa perpendicular comum é a **distância entre as retas reversas** *r* e *s*.

Exercícios resolvidos:

1) Duas retas não coplanares *r* e *s* são separadas por um plano α que lhes é paralelo. A reta *r* dista 12 cm do plano α e a reta *s* 30 cm do mesmo plano. Ache a distância das retas *r* e *s*.

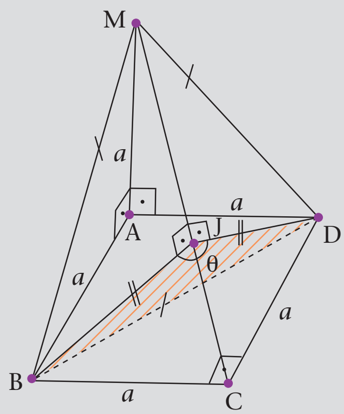
<u>Solução:</u>

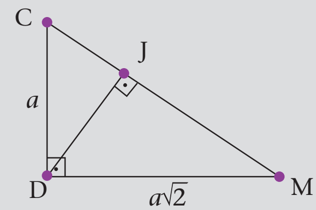


$d = 12\text{ cm} + 30\text{ cm} = 42\text{ cm}$

2) ABCD é um quadrado de lado a e M é o ponto da perpendicular ao plano desse quadrado traçada pelo vértice A, tal que $\overline{AM} = a$. Qual a medida do ângulo das perpendiculares à intersecção dos planos ($\overline{MC}$) determinados pelos pontos MBC e MDC?

<u>Solução:</u>





$\overline{MB} = \overline{MD} = a\sqrt{2}$

$\overline{MC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{DM}^2 = a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 3a^2$

$\overline{MC} = a\sqrt{3}$

$\overline{DJ} \cdot \overline{MC} = \overline{DC} \cdot \overline{DM} \Rightarrow \overline{DJ} \cdot a\sqrt{3} = a \cdot a\sqrt{2} \Rightarrow \overline{DJ} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$\overline{DJ} = \overline{BJ} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$\triangle BJD \rightarrow \overline{BD}^2 = \overline{BJ}^2 + \overline{DJ}^2 - 2 \cdot \overline{BJ} \cdot \overline{DJ} \cdot \cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(a\sqrt{2}\right)^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(a\sqrt{2}\right)^2 = \left(\dfrac{2a^2}{9} - \dfrac{2a^2}{9}\cos\theta\right) \cdot 6 \Rightarrow$

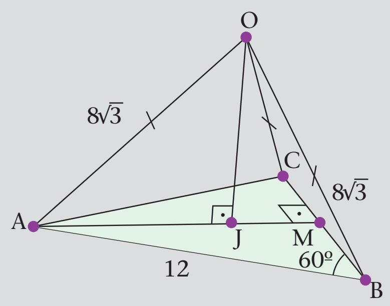
$\Rightarrow 1 = \dfrac{6}{9} - \dfrac{6}{9}\cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2} = \cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta = 120^\circ$

3) ABC é um triângulo equilátero cujo lado mede 12 cm e O é um ponto exterior ao plano do triângulo, tal que $\overline{AO} = \overline{OB} = \overline{OC} = 8\sqrt{3}$ cm. Calcule a distância do ponto O ao plano do triângulo.

Solução:



$$\overline{AM} = \overline{AB}\,\text{sen}\,60° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\text{ cm}$$

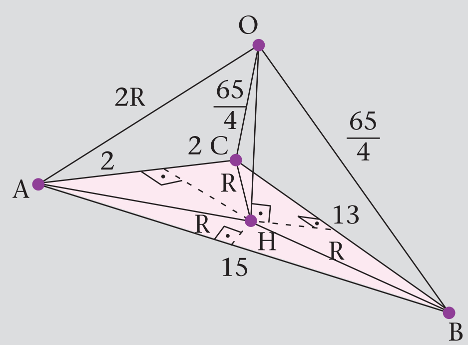
$$\overline{AJ} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\text{cm}$$

$$\overline{OJ}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{AJ}^2 = \left(8\sqrt{3}\right)^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 144\text{ cm}$$

$$\overline{OJ} = 12\text{ cm}$$

4) $\overline{AB}$ = 15 cm, $\overline{BC}$ = 13 cm, $\overline{AC}$ = 4 cm são os lados de um triângulo ABC e O é um ponto exterior ao plano ABC. Sabendo que as distâncias do ponto O aos vértices do triângulo ABC são iguais ao diâmetro do círculo circunscrito a esse triângulo, calcule a distância de O ao plano ABC.

Solução:



$$R = \frac{abc}{4S} \qquad S = \sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$$

$$R = \frac{15 \cdot 13 \cdot 4}{4 \cdot 24} \qquad p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{15+13+4}{2} = 16\text{cm}$$

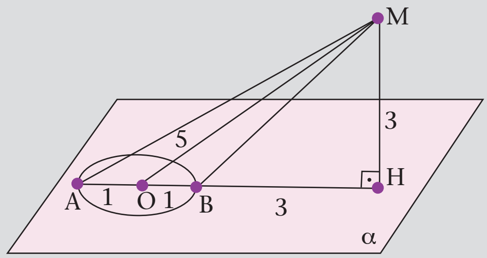
$$R = \frac{65}{8}\text{ cm} \qquad S = \sqrt{16 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 1} = 24\text{ cm}^2$$

$$2R = \frac{65}{4}\text{ cm}$$

$$\overline{OH}^2 = \left(2R\right)^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow \overline{OH} = R\sqrt{3} = \frac{65}{8}\sqrt{3}\text{ cm}$$

5) (PUC-RJ) Calcule a menor e a maior distância de um ponto M a um círculo de raio 1 e que está situado num plano α, sabendo-se que a distância de M a α é igual a 3 e que a distância de M ao centro da circunferência é igual a 5.

Solução:



$\overline{OM}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HM}^2$

$5^2 = \overline{OH}^2 + 3^2$

$\overline{OH}^2 = 16 \Rightarrow \overline{OH} = 4$

$\overline{HB} = 3$

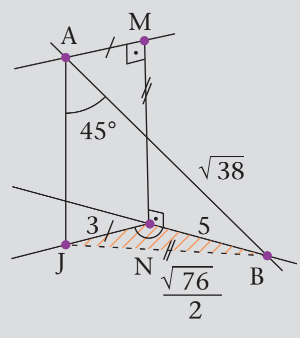
$\overline{BM} = 3\sqrt{2}$ (menor distância)

$\overline{AM}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HM}^2 = 5^2 + 3^2 = 34$

$\overline{AM} = \sqrt{34}$ (maior distância)

6) Na figura abaixo, $\overline{MN}$ é a perpendicular comum entre $\overline{MA}$ e $\overline{NB}$. Sabendo-se que $\overline{AB} = \sqrt{38}$ cm, $\overline{MA} = 3$ cm, $\overline{NB} = 5$ cm e que $\overline{AB}$ faz 45° com $\overline{MN}$, calcule o ângulo de $\overline{MA}$ e $\overline{NB}$.

Solução:



$$\overline{AJ} = \sqrt{38}\cos 45° = \sqrt{38}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{76}}{2} = \overline{JB}$$

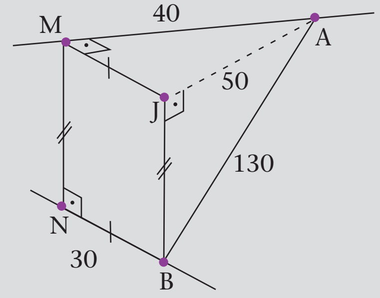
$$\overline{JB}^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot \cos\widehat{N}$$

$$\frac{76}{4} = 34 - 30\cos\widehat{N} \Rightarrow 30\cos\widehat{N} = 15$$

$$\cos\widehat{N} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{N} = 60°$$

7) Na figura abaixo, $\overline{MA}$ e $\overline{NB}$ são ortogonais e $\overline{MN}$ é a perpendicular comum entre elas. Se $\overline{MA}$ mede 40 cm, $\overline{NB}$ mede 30 cm e $\overline{AB}$ mede 130 cm, qual a distância entre $\overline{MA}$ e $\overline{NB}$?

Solução:



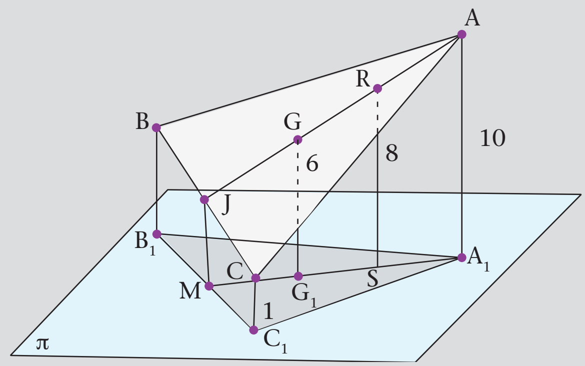
$\overline{AJ}^2 = 30^2 + 40^2 = 50^2$

$\overline{BJ}^2 = 130^2 - 50^2 = 120^2 \Rightarrow \overline{BJ} = 120$ cm

$\overline{BJ} = \overline{MN} = 120$ cm

8) $A_1B_1C_1$ é a projeção em π do triângulo ABC, como mostra a figura. G é o baricentro de ABC e G_1 é sua projeção em π. Sendo 10 m, 6 m e 1 m as distâncias respectivamente de A, G e C a π, calcule a distância de B a π.

Solução:



Trapézio AGG_1A_1: $\overline{RS} = \dfrac{10+6}{2} = 8$ m

Trapézio JRSM: $6 = \dfrac{\overline{JM}+8}{2} \Rightarrow \overline{JM} = 4$ m

Trapézio CC_1B_1B: $\overline{JM} = \dfrac{1+\overline{BB_1}}{2} \Rightarrow 4 = \dfrac{1+\overline{BB_1}}{2} \Rightarrow \overline{BB_1} = 7$ m

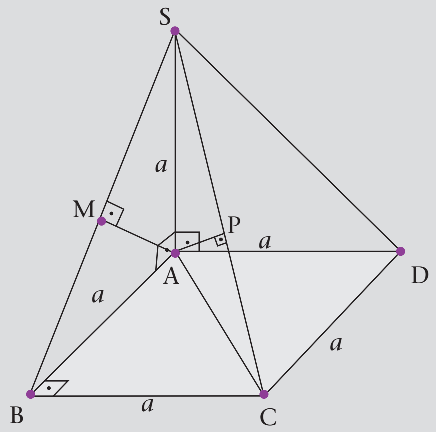
9) ABCD é um quadrado cujo lado é a. Pelo vértice A, levanta-se a perpendicular ao plano do quadrado e sobre essa perpendicular toma-se o segmento $\overline{AS} = a$.
Calcule:

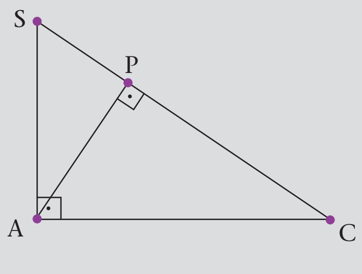
a) as distâncias do ponto S aos vértices B, C e D do quadrado;

b) a distância do ponto A à reta SC;

c) a distância do ponto A ao plano SBC.

<u>Solução:</u>





a) $\overline{SB} = \overline{SD} = a\sqrt{2}$

$\overline{SC}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{AC}^2 = a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 3a^2$

$\overline{SC} = a\sqrt{3}$

b) $\overline{AP} \cdot \overline{SC} = \overline{AS} \cdot \overline{AC} \Rightarrow \overline{AP} \cdot a\sqrt{3} = a \cdot a\sqrt{2}$

$AP = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

c) Seja $\overline{AM} \perp \overline{SB}$ como mostra a figura. Provemos que $\overline{AM}$ é a perpendicular ao plano SBC.

Note que $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ (quadrado ABCD) e $\overline{BC} \perp \overline{SA}$ ($\overline{BC} \,//\, \overline{AD} \perp \overline{SA}$). Assim, $\overline{BC}$ é perpendicular ao plano SAB.

Portanto, $\overline{BC} \perp \overline{AM} \subset SAB$.

Porém, $\overline{AM} \perp \overline{SB}$. Então, $\overline{AM} \perp$ ao plano SBC.

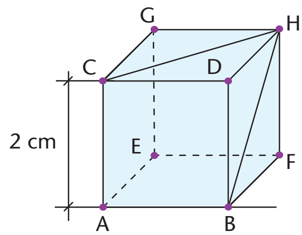
No triângulo SAB, retângulo isósceles, $\overline{AM} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (metade da diagonal do quadrado).

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Considere a figura ABCDEFGH como um cubo de aresta medindo 2 cm. Determine:

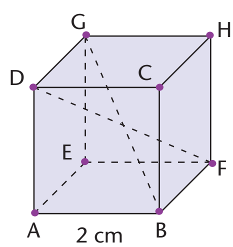
a) a distância do ponto B ao ponto H;

b) a distância do ponto C ao ponto H;



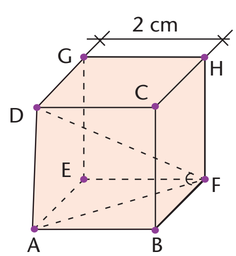
c) a distância do ponto D ao ponto F;

d) a distância do ponto B ao ponto G;

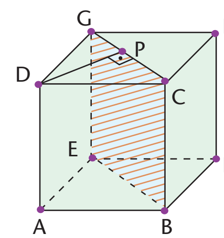


e) a tangente do ângulo $D\hat{F}A$;

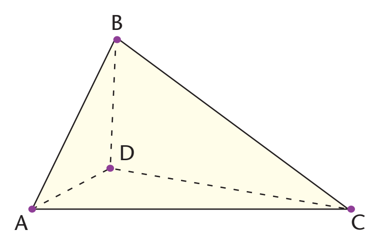
f) o cosseno do ângulo $D\hat{F}A$;



g) a distância entre a reta que contém $\overline{AD}$ e o plano EBCG.



2 (Fuvest-SP) No tetraedro da figura tem-se $\overline{AD} \perp \overline{BD}$, $\overline{AD} \perp \overline{DC}$, $(B\hat{A}D) = (C\hat{A}D)$.



Pode-se concluir:

(A) $\overline{BD} = \overline{DC}$

(B) $\overline{AD} = \overline{DC}$

(C) $\overline{AB} < \overline{BC}$

(D) $\overline{AC} < \overline{BD}$

(E) $\overline{AD} < \overline{BD}$

3 (Fuvest-SP) Um triângulo ABC tem ângulos $\hat{A} = 40°$ e $\hat{B} = 50°$. Qual o ângulo formado pelas alturas relativas aos vértices A e B desse triângulo?

4 (Fuvest-SP) O segmento PA é perpendicular ao plano que contém o triângulo equilátero ABC. Suponha que $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AP}$ e que M seja o ponto médio do segmento BC. Determine o ângulo formado pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PM}$.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (PUC-RJ) Qual das afirmações abaixo é VERDADEIRA?

(A) Se duas retas distintas não são paralelas, elas são concorrentes.

(B) Duas retas não coplanares são reversas.

(C) Se a intersecção de duas retas é o conjunto vazio, elas são paralelas.

(D) Se três retas são paralelas, existe um plano que as contém.

(E) Se três retas distintas são duas a duas concorrentes, elas determinam um e um só plano.

2 (Mack-SP) A reta *r* é paralela ao plano α.

Então:

(A) Todas as retas de α são paralelas a *r*.

(B) A reta *r* não pode ser coplanar com nenhuma reta de α.

(C) Existem em α retas paralelas a *r* e também existem em α retas reversas em relação a *r*.

(D) Existem em α retas paralelas a *r* e retas perpendiculares a *r*.

(E) Todo plano que contém *r* é paralelo a α.

3 (Mack-SP) *r* e *r'* são retas reversas. O número de planos paralelos a *r* que podem passar por *r'* é:

(A) dois.

(B) um.

(C) infinitos.

(D) nenhum.

(E) nenhuma das respostas anteriores é correta.

4 (PUC-RJ) Qual das afirmações abaixo é VERDADEIRA?

(A) Se duas retas concorrentes de um plano são respectivamente paralelas a duas retas de outro plano, então esses planos são paralelos.

(B) Por uma reta dada pode-se conduzir um plano paralelo a um plano dado.

(C) Por qualquer ponto é possível conduzir uma reta que se apoie em duas retas reversas dadas.

(D) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.

(E) Existem planos reversos.

5 (ITA-SP) Considere o plano de uma mesa e um ponto dado deste plano. Você dispõe de uma folha de papel que possui um só bordo reto. Dobrando esta folha de papel, conduza uma perpendicular ao plano da mesa, pelo ponto dado. A justificativa de tal construção está em um dos teoremas abaixo.

(A) Se uma reta é perpendicular a um plano, todo plano que passa por ela é perpendicular ao primeiro.

(B) Se dois planos são perpendiculares, toda reta de uma deles que for perpendicular à intersecção, será perpendicular ao outro.

(C) Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes pelo seu ponto de intersecção, então a reta é perpendicular ao plano determinado por essas duas retas.

(D) Por um ponto exterior a um plano passa uma reta perpendicular ao plano e somente uma.

(E) Todas as perpendiculares a uma reta traçadas por um de seus pontos pertencem a um plano.

6 (FEI-SP) Se *a*, *b*, *c* são retas do espaço, com $a \perp b$ e $c \perp a$, então pode-se concluir que:

(A) $c\ //\ b$.

(B) $c = b$.

(C) *c* é concorrente com *b*.

(D) $c = b$ ou $c\ //\ b$.

(E) nenhuma das anteriores.

7 (Mack-SP) Se *r* e *s* são duas retas paralelas a um plano α, então:

(A) $r\ //\ s$.

(B) $r \perp s$.

(C) *r* e *s* se interceptam.

(D) *r* e *s* são reversas.

(E) nada se pode concluir.

8 (Mack-SP) Sejam *r*, *s* e *t* retas no espaço. Se *r* é perpendicular a *t* e *s* é perpendicular a *t*, então:

(A) *r* e *s* são paralelas.

(B) *r* e *s* são perpendiculares.

(C) *r* e *s* são reversas.

(D) *r*, *s* e *t* são coplanares.

(E) nenhuma das afirmativas acima é verdadeira.

9 (PUC-RJ) Se uma reta *a* é perpendicular a uma reta *b* e a reta *b* é paralela a uma reta *c*, podemos concluir que:

(A) $a \cap c = \varnothing$.

(B) $a \perp c$.

(C) $a = c$.

(D) $a \mathbin{//} c$.

(E) nenhuma das anteriores.

10 (ITA-SP) Consideremos um plano α e uma reta *r* que encontra esse plano num ponto P, e que não é perpendicular a α. Assinale qual das afirmações é a verdadeira.

(A) Existem infinitas retas de α perpendiculares a *r* pelo ponto P.

(B) Existe uma e somente uma reta de α perpendicular a *r* por P.

(C) Não existe reta de α, perpendicular a *r*, por P.

(D) Existem duas retas de α perpendiculares a *r* passando por P.

(E) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

11 (Fuvest-SP) Assinale a afirmação correta.

(A) Se dois planos forem perpendiculares, todo plano perpendicular a um deles será paralelo ao outro.

(B) Se dois planos forem perpendiculares, toda reta paralela a um deles será perpendicular ao outro.

(C) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.

(D) Se duas retas forem ortogonais reversas, toda reta ortogonal a uma delas será paralela à outra.

(E) Se duas retas forem ortogonais, toda reta paralela a uma delas será ortogonal à outra.

12 (PUC-RJ) Qual das proposições abaixo é FALSA?

(A) Por um ponto A pode-se conduzir uma única reta perpendicular a um plano α.

(B) Se dois planos são perpendiculares a uma reta, então eles são paralelos.

(C) Se dois planos são paralelos e uma reta é perpendicular a um deles, então ela é perpendicular ao outro.

(D) Se duas retas são paralelas e um plano é perpendicular a uma delas, então ele é perpendicular à outra.

(E) Uma reta e um plano são paralelos. Toda reta, perpendicular à reta dada, é perpendicular ao plano.

13 (PUC-RJ) Qual das propriedades abaixo é FALSA?

(A) As intersecções de dois planos paralelos com um terceiro plano são retas paralelas.

(B) Se dois planos são paralelos, toda reta contida em um deles é paralela ao outro plano.

(C) Um plano β é paralelo a outro plano α por um ponto $A \notin \alpha$ e único.

(D) Dois planos distintos paralelos a um terceiro são paralelos entre si.

(E) Se dois planos são paralelos, todo plano perpendicular a um deles é paralelo ao outro.

14 (Mack-SP) Considere a sequência das afirmações:

I. A projeção ortogonal de uma reta sobre um plano é uma reta.

II. Se duas retas são reversas, qualquer plano que contém uma intercepta a outra.

III. Quando uma reta está contida em um plano, eles têm um ponto comum.

Associando-se V ou F a cada afirmação, conforme seja verdadeira ou falsa, tem-se:

(A) (F, F, V)

(B) (F, F, F)

(C) (V, V, V)

(D) (V, F, F)

(E) (F, V, V)

15 (Mack-SP) Se um dos lados de um ângulo reto é paralelo a um plano e o outro não é perpendicular a este plano, a projeção do ângulo sobre o plano:

(A) é um ângulo reto.

(B) é um ângulo agudo.

(C) é um ângulo obtuso.

(D) depende da posição do plano.

(E) nenhuma das anteriores.

16 Sejam *a* e *b* duas retas ortogonais, perpendiculares à reta *r* em A e B, respectivamente. Seja $M \in a$ e $N \in b$ pontos distintos de A e B. O ângulo $M\hat{B}N$:

(A) é agudo.

(B) não pode ser reto.

(C) é reto.

(D) depende de M e N.

(E) nenhuma das anteriores.

17 (ITA-SP) Quando a projeção de um ângulo θ sobre um plano paralelo a um de seus lados é um ângulo reto, podemos afirmar que:

(A) $90° < \theta < 180°$.

(B) $\theta < 90°$.

(C) $\theta = 90°$.

(D) $\theta = 2\pi Rd$.

(E) nenhuma das respostas acima é válida.

18 (Mack-SP) O plano γ intercepta dois planos paralelos α e β. O conjunto dos pontos equidistantes de α, β e γ é:

(A) unitário.

(B) uma reta.

(C) um plano.

(D) a reunião de duas retas.

(E) Não sei.

19 Três retas não coplanares concorrem todas em um mesmo ponto P. O lugar geométrico dos pontos equidistantes das três é constituído por:

(A) um plano que contém P.

(B) três planos que têm só o ponto P em comum.

(C) um par de planos concorrentes em uma reta que contém P.

(D) um par de retas concorrentes em P.

(E) quatro retas concorrentes em P.

20 Sejam A e B dois pontos distintos de um plano α, $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ dois segmentos de mesmo comprimento perpendiculares ao plano. O lugar geométrico dos pontos P do plano α, tais que $A\hat{P}A' = B\hat{P}B'$, é:

(A) uma reta.

(B) uma circunferência.

(C) uma parábola.

(D) uma elipse.

(E) um ramo de hipérbole.

21 ABC é um triângulo retângulo isósceles no qual $\overline{AB} = \overline{AC} = a$. Pelo vértice A levanta-se a perpendicular ao plano do triângulo e sobre essa perpendicular toma-se o segmento $\overline{AP} = a$. Calcule $\overline{PB}$ e $\overline{PC}$.

22 ABC é um triângulo isósceles no qual o ângulo A = 120° e $\overline{AB} = \overline{AC} = 2a$. Pelo vértice A levanta-se uma perpendicular ao plano do triângulo e une-se um ponto M dessa perpendicular aos vértices B e C. Calcule $\overline{AM}$ de modo que o ângulo $B\hat{M}C$ seja reto.

23 Pelo centro O de um quadrado ABCD, cujo lado é *a*, levanta-se a perpendicular ao plano do quadrado e une-se um ponto M dessa perpendicular aos vértices do quadrado. Mostre que os quatro triângulos assim obtidos são iguais e calcule $\overline{OM}$ de modo que esses triângulos sejam equiláteros.

24 São dados um plano α, uma reta *r* pertencente a α e um ponto A exterior a α. Sabendo que o ponto A dista 5 cm de α e 13 cm de *r*, calcule a distância de *r* à projeção ortogonal de A sobre α.

25 A projeção ortogonal de um quadrado de 4 m de lado sobre um plano é um retângulo de 8 m² de área. Calcule o perímetro do retângulo e o valor do ângulo que o plano do quadrado forma com o de projeção.

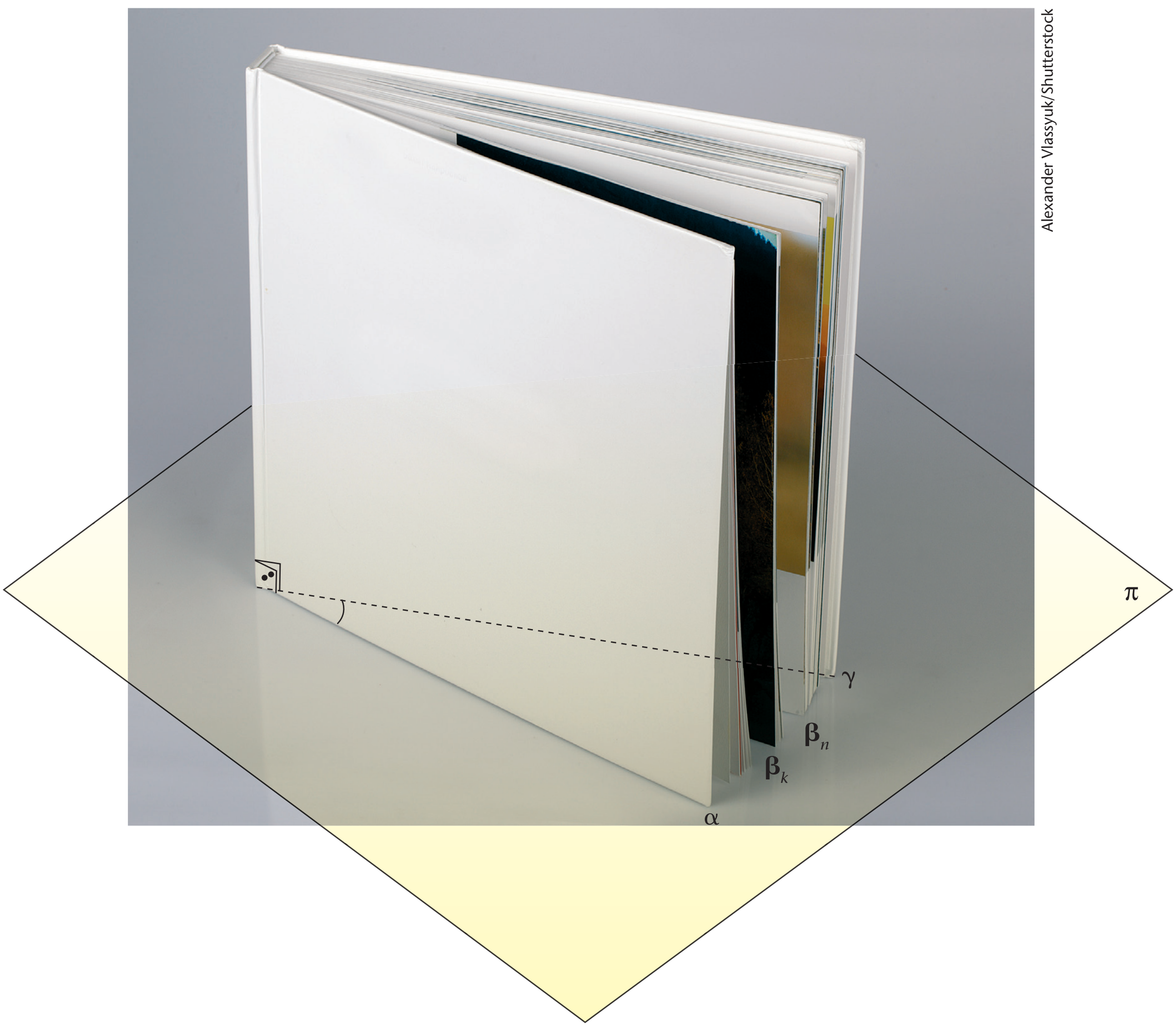
26 Três planos paralelos interceptam uma reta *r* nos pontos A, B e C, tais que $\overline{AB}$ = 6 cm e $\overline{BC}$ = 8 cm; os mesmos planos interceptam uma outra reta *s* nos pontos D, E e F. Sabendo que o segmento $\overline{DF}$, compreendido entre os planos extremos, mede 21 cm, calcule $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$.

27 α e β são dois planos paralelos e A é um ponto que dista 8 cm de α e 5 cm de β. Determine a distância dos planos α e β, sabendo que são separados por A.

28 Duas retas não coplanares *r* e *s* são separadas por um plano α que lhes é paralelo. A reta *r* dista 12 cm do plano α e a reta *s* dista 30 cm do mesmo plano. Ache a distância das retas *r* e *s*.

CAPÍTULO X

DIEDROS E TRIEDROS



Na Geometria Plana, as figuras formadas por retas concorrentes (ângulos) tinham especial importância. De maneira análoga, figuras formadas por planos (diedros e triedros) são elementos básicos da Geometria Espacial – são estes os elementos que estudaremos neste capítulo.

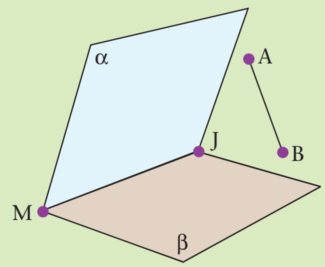
10 – DIEDROS E TRIEDROS

10.1 – Diedros

DEFINIÇÃO
Diedro.

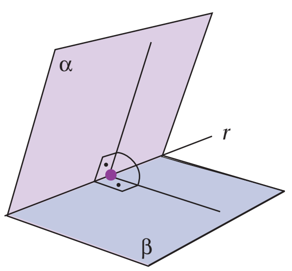
Chama-se **diedro** a uma figura **convexa**, limitada por dois semiplanos com a fronteira comum.

Os planos limitantes α e β são as **faces** do diedro, e a reta comum $\overleftrightarrow{MJ}$ é a **aresta** do diedro.



NOTA
Uma figura é convexa quando todo segmento de extremos em dois pontos A e B da figura tem todos os seus pontos na figura.

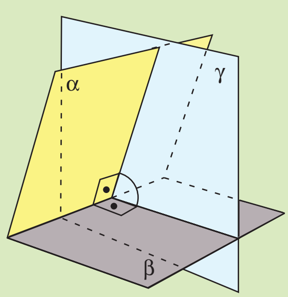
O diedro é então a intersecção de dois semiplanos limitados por dois planos não paralelos α e β.



Usa-se a notação α *r* β.

DEFINIÇÃO
Ângulo retilíneo de um diedro.

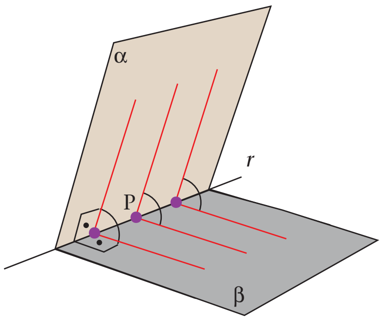
A intersecção de um diedro com um plano γ perpendicular à sua aresta é denominada **ângulo plano** ou **retilíneo do diedro**.



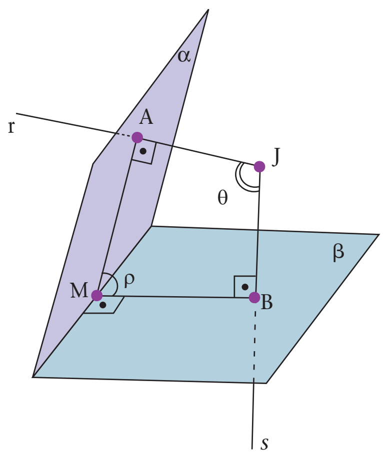
OBSERVAÇÃO
A medida de um diedro é a medida de qualquer um de seus ângulos planos.
Dois diedros são congruentes quando assim ocorrer em seus ângulos planos.

Esse ângulo é formado por duas semirretas que partem de qualquer ponto P da aresta *r*, perpendiculares a essa aresta.

Existem infinitos retilíneos de um diedro, congruentes por terem lados paralelos.



Retas perpendiculares às faces de um diedro por um ponto J do seu interior formam um ângulo suplementar do retilíneo do diedro.



Basta ver que no quadrilátero AMBJ os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são retos, logo $\rho + \theta = 180^\circ$.

A nomenclatura usada em diedros é análoga à usada em ângulos, fazendo a seguinte correspondência:

Ângulo	Diedro
vértice	aresta
lado	face
ângulo	retilíneo do diedro

As propriedades e definições são análogas. Temos então:

Um **diedro** é reto, **agudo** ou **obtuso** conforme seu retilíneo seja reto, agudo ou obtuso.

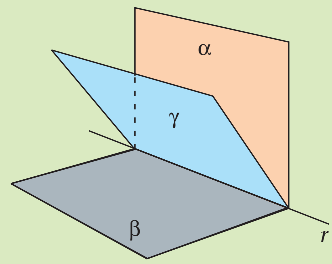
DEFINIÇÃO
Diedro reto, agudo ou obtuso.

Dois **diedros** são **complementares** ou **suplementares** quando assim ocorrer em seus retilíneos.

DEFINIÇÃO
Diedros complementares ou suplementares.

DEFINIÇÃO
Diedros adjacentes.

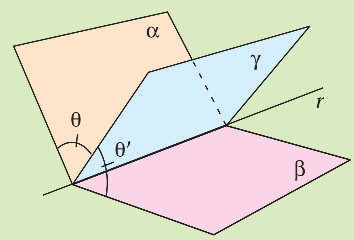
Dois **diedros** são **adjacentes** quando assim ocorrer em seus retilíneos, num mesmo ponto da aresta.



α *r* γ e β *r* γ são adjacentes
γ é face comum

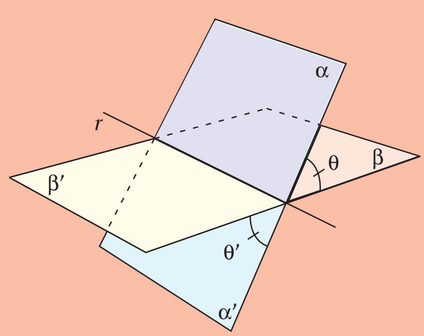
DEFINIÇÃO
Bissetor.

Bissetor de um diedro é o semiplano que divide o diedro em dois diedros congruentes.



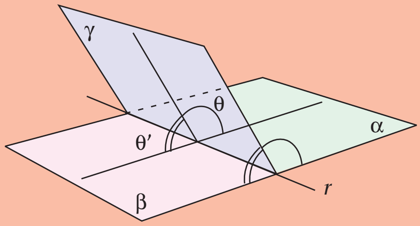
γ é bissetor do diedro α *r* β
$\theta = \theta'$

Dois diedros opostos pela aresta são congruentes porque seus retilíneos são opostos pelo vértice.



α *r* β e α' *r* β' são opostos pela aresta *r*
$\theta = \theta'$

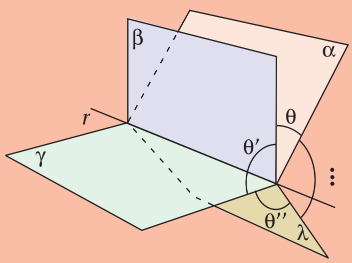
Dois diedros adjacentes cujas faces não comuns são coplanares são suplementares (2 retos).



$\alpha\, r\, \gamma$ e $\beta\, r\, \gamma$ são adjacentes em faces coplanares α e β

$\theta + \theta' = 180°$

Diedros consecutivos adjacentes em torno de uma aresta comum são replementares (4 retos).



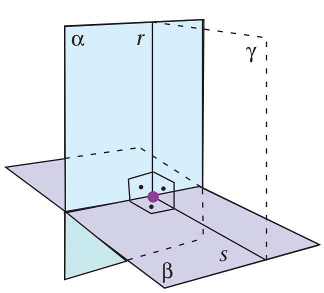
$\alpha\, r\, \beta$, $\beta\, r\, \gamma$, $\gamma\, r\, \lambda$, ... são consecutivos em torno da aresta r

$\theta + \theta' + \theta'' + ... = 360°$

10.2 – Planos perpendiculares

Dois **planos** α e β são **perpendiculares** quando formam um diedro reto, isto é, formam diedros adjacentes congruentes.

DEFINIÇÃO
Planos perpendiculares.



Qualquer plano γ perpendicular à intersecção dos planos perpendiculares α e β intersecta-os segundo as retas r e s, perpendiculares.

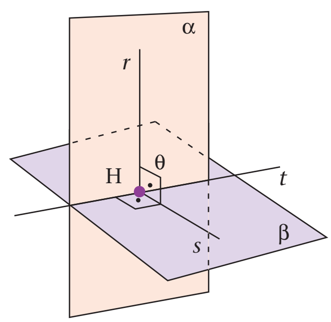
Teorema

A condição necessária e suficiente para que um plano α seja perpendicular a outro β é que α contenha uma reta *r* perpendicular ao plano β.

Demonstração:

i) A condição é suficiente, isto é, se um plano α contém uma reta *r* perpendicular a um plano β, ele é perpendicular ao plano β.

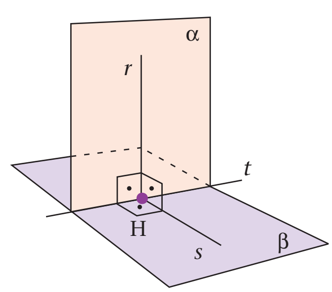
Seja H o pé da perpendicular *r* ao plano β. Por esse ponto tracemos uma reta *s* contida em β e perpendicular à intersecção de α e β.



Como a reta *r* é perpendicular ao plano β, será perpendicular à reta *s*, pois *s* passa pelo pé H de *r*. Assim, o ângulo θ de *r* com *s* será o retilíneo do diedro α *t* β, e sendo reto faz com que o plano α seja perpendicular a β.

ii) A condição é necessária. De fato, mostraremos que, se dois planos α e β são perpendiculares, com intersecção *t*, toda reta *r* contida em α, que seja perpendicular a *t*, será perpendicular a β.

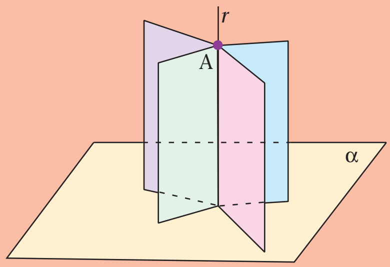
Pelo pé H da perpendicular *r* tracemos em β a reta *s* perpendicular a *t*.



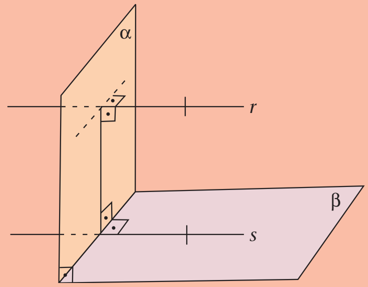
Como o plano α é perpendicular a β, o retilíneo do diedro α *t* β é reto, logo a reta *r* é perpendicular a *s* e a *t*. Com isso, a reta *r* é perpendicular ao plano β.

Consequências:

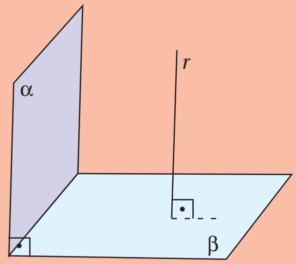
1) Por um ponto A passam infinitos planos perpendiculares a um plano dado α.



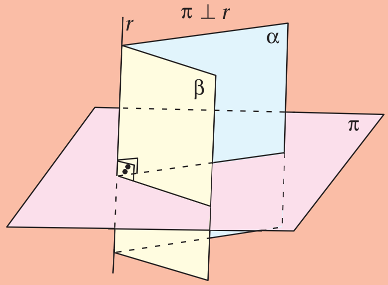
2) Todo plano α perpendicular a uma reta *r* paralela a um plano β é perpendicular a esse plano β.



3) Todo plano α paralelo a uma reta *r* perpendicular a um plano β é perpendicular a esse plano β.

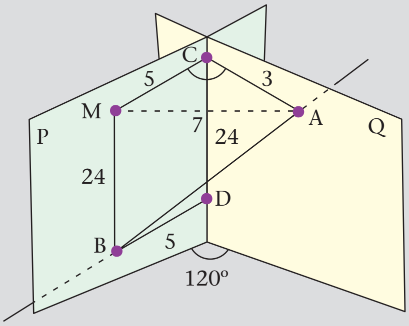


4) Todo plano π perpendicular a dois planos α e β é perpendicular à intersecção *r* de α e β.



Exercícios resolvidos:

1) Na figura abaixo, A pertence ao plano Q e B pertence ao plano P, e o diedro que compreende $\overleftrightarrow{AB}$ mede 120°. Sendo $\overline{AC} = 3$ cm, $\overline{BD} = 5$ cm as distâncias de A e B à aresta do diedro e sendo ainda $\overline{CD} = 24$ cm, calcule $\overline{AB}$.



Solução:

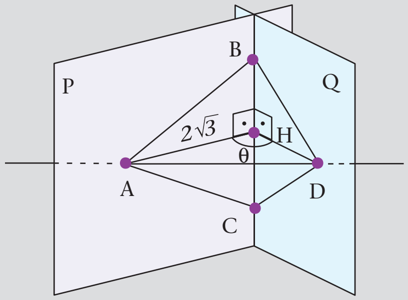
$\overline{MB} = \overline{CD} = 24$ cm

No $\triangle$CMA: $MA^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 34 + 15 = 49$

$\overline{MA} = 7$ cm

$AB^2 = 24^2 + 7^2 = 625 \Rightarrow \overline{AB} = 25$ cm

2) Na figura abaixo, ABC e DBC são equiláteros de 4 m de lado e pertencem respectivamente aos planos P e Q. Calcule o ângulo entre P e Q sendo $\overline{AD} = 6$ m.



Solução:

Altura do $\triangle$ABC: $\dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm

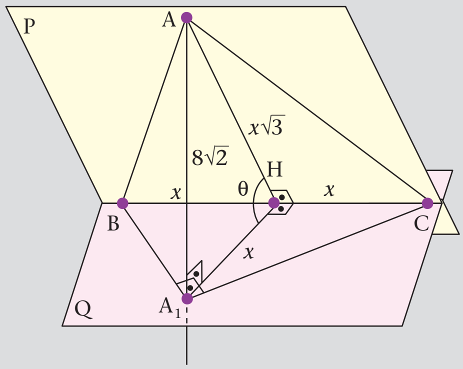
No $\triangle$ADH: $6^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow 36 = 12 + 12 - 24\cos\theta \Rightarrow 24\cos\theta = -12 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120^\circ$

NOTA
A altura do triângulo equilátero é $\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$, onde ℓ é a medida do seu lado.

3) Na figura abaixo, os triângulos ABC e A_1BC são equilátero e retângulo respectivamente. A distância de A ao plano de A_1BC é $8\sqrt{2}$ dm. Quais são as áreas dos dois triângulos, sabendo que A_1 é projeção ortogonal de A?



Solução:

$\overline{BH} = \overline{HC} = x$

Altura do $\triangle ABC$: $\dfrac{2x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}$

Altura do $\triangle A_1BC$: x

No $\triangle AA_1H$: $\left(8\sqrt{2}\right)^2 + x^2 = \left(x\sqrt{3}\right)^2$

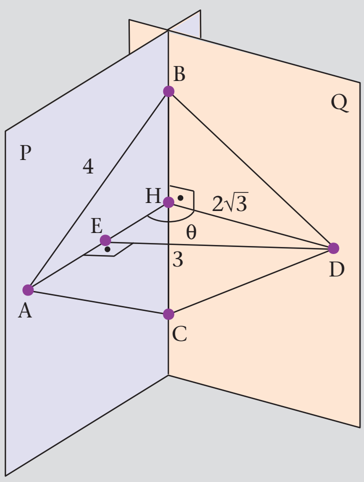
$$2x^2 = 128$$

$$x^2 = 64 \Rightarrow x = 8 \text{ dm}$$

$$S_{A_1BC} = \frac{2x \cdot x}{2} = x^2 = 64 \text{ dm}^2$$

$$S_{ABC} = \frac{2x \cdot x\sqrt{3}}{2} = x^2\sqrt{3} = 64\sqrt{3} \text{ dm}^2$$

4) Os triângulos ABC e BCD equiláteros da figura pertencem respectivamente aos planos P e Q e têm lado 4 cm. Sendo 3 cm a distância de D a P, calcule o ângulo entre os planos.

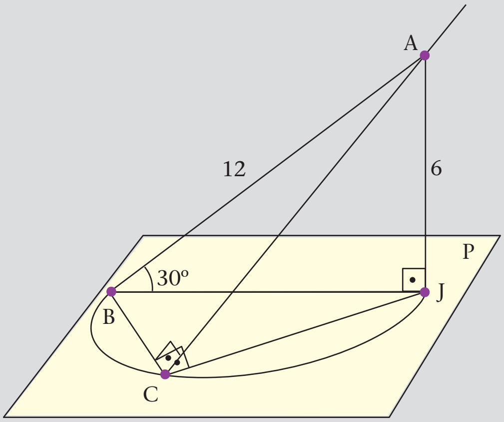


Solução:

Altura do $\triangle BCD$: $\dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm

No $\triangle DEH$: $\text{sen}\,\theta = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 60°$

5) Na figura, $\overline{AB}$ mede 12 cm e faz 30° com o plano P. Considere um feixe de retas passando por B e contido em P. Nessas condições, responda aos seguintes itens:



a) Seja C a projeção de A sobre as retas do feixe. Qual é o lugar geométrico de C?

b) Qual o maior e qual o menor comprimento que $\overline{AC}$ pode assumir?

c) Se $\overline{AC} = \overline{BC}$, quanto mede $\overline{AC}$?

d) Quando $\overline{AC}$ fizer 60° com P, qual o comprimento de $\overline{AC}$?

e) Quanto mede $\overline{AC}$ para $A\hat{B}C = 60°$?

<u>Solução:</u>

Seja J projeção ortogonal de A dobre o plano P.

a) $B\hat{C}A$ reto $\Rightarrow$ $B\hat{C}J$ reto $\Rightarrow$ $C \in$ círculo de diâmetro $\overline{BJ}$

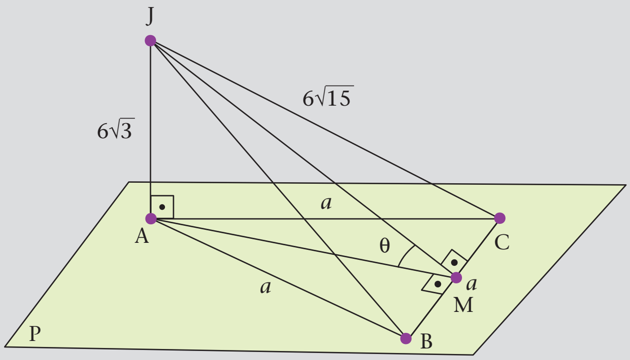
b) Maior: $AC = AB = 12$ cm. Menor: $AC = AB \operatorname{sen} 30° = 12 \cdot \dfrac{1}{2} = 6$ cm

c) ABC retângulo isósceles: $AC = BC = AB \cdot \operatorname{sen} 45° = \dfrac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ cm

d) $AJ = AC \operatorname{sen} 60° \Rightarrow 6 = AC \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}$ cm

e) $AC = AB \operatorname{sen} 60° \Rightarrow AC = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm

6) O triângulo ABC do plano P da figura é equilátero. $\overline{JA}$ é perpendicular a P e mede $6\sqrt{3}$ cm. Se $\overline{JC} = \overline{JB} = 6\sqrt{15}$ cm, qual o ângulo de JBC com P e qual a distância de A a JBC?



Solução:

No $\triangle$JAC: $\left(6\sqrt{3}\right)^2 + a^2 = \left(6\sqrt{15}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 432 \Rightarrow a = 12\sqrt{3}$ cm

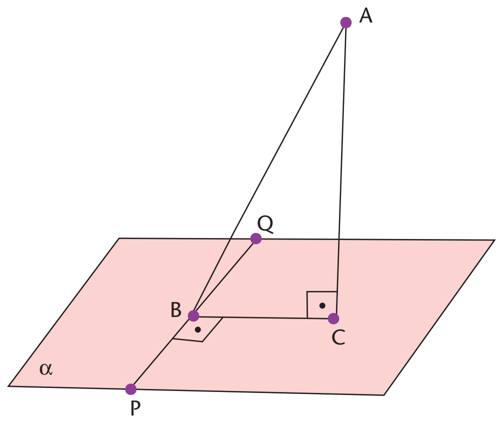
Altura do $\triangle$ABC: $AM = 12\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 18$ cm

No $\triangle$JAM: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{JA}{AM} = \dfrac{6\sqrt{3}}{18} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30°$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 De um ponto H traçam-se $\overline{HR} \perp \alpha$ e $\overline{HS} \perp \beta$, sendo α e β as faces do diedro $\alpha r \beta$. Quanto mede o diedro se as perpendiculares $\overline{HR}$ e $\overline{HS}$ formam um ângulo de 54º?

2 Na figura abaixo, tem-se que a projeção ortogonal de AB sobre o plano β é BC, tal que a medida de AB é igual a duas vezes a medida de BC. Se $\overline{PQ}$ é perpendicular ao plano que contém ABC, qual é a medida do ângulo $A\hat{B}C$?



3 Um ponto contido numa face de um diedro de 30° dista 7 m da outra face desse diedro. Determine o quanto esse ponto dista da aresta do diedro.

4 Os planos bissetores de dois diedros de mesma aresta são perpendiculares. Sobre esses diedros pode-se afirmar que:

(A) são complementares.

(B) são suplementares.

(C) a soma dos diedros é < 180°.

(D) a soma dos diedros é > 180°.

(E) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

5 Assinale a afirmação falsa.

(A) As secções normais de um diedro são iguais.

(B) Um diedro reto tem as faces perpendiculares entre si.

(C) Dois diedros opostos pela aresta são iguais.

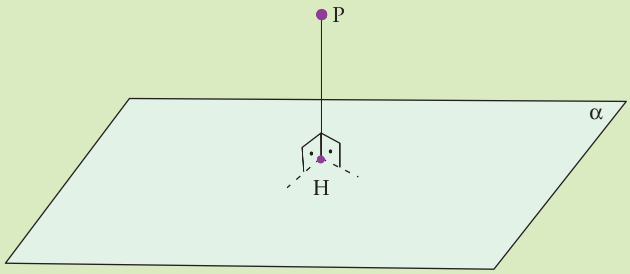
(D) Os planos bissetores de dois diedros adjacentes e suplementares são perpendiculares.

(E) Uma das afirmações acima é errada.

10.3 – Projeções sobre um plano

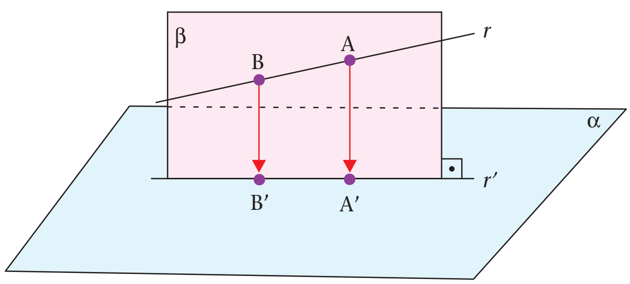
Projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α é o pé H da perpendicular ao plano α que passa pelo ponto P.

O plano α é o plano de projeção e a reta PH é a reta projetante do ponto P no plano α.



DEFINIÇÃO
Projeção ortogonal.

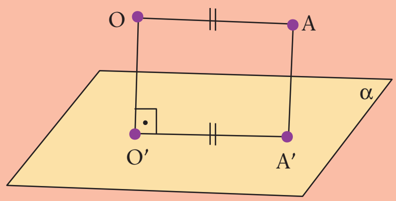
Projeção ortogonal de uma reta *r* num plano α é o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos da reta sobre o plano.



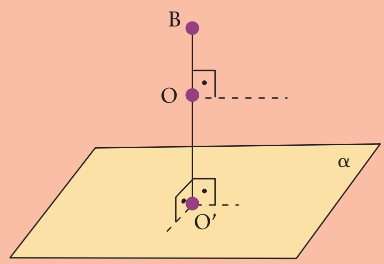
Essa projeção é obtida projetando-se dois pontos A e B de *r* sobre o plano ou pela intersecção do plano α com o plano β que contém *r* e é perpendicular a α.

Propriedades

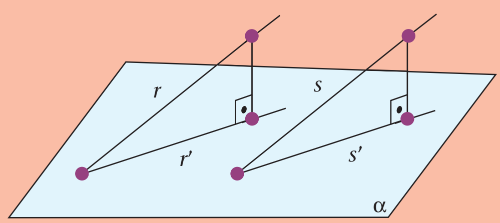
1) Quando um segmento OA é paralelo ao plano α de projeção, ele é paralelo à sua projeção O′A′ e tem a mesma medida.

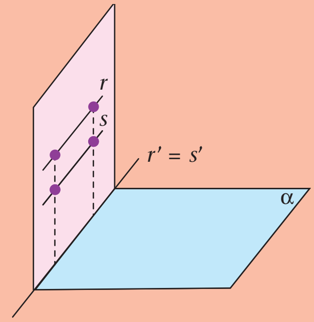


2) Quando um segmento OB é perpendicular ao plano α, sua projeção se reduz a um ponto que é a intersecção da reta suporte de $\overline{OB}$ com o plano α de projeção.

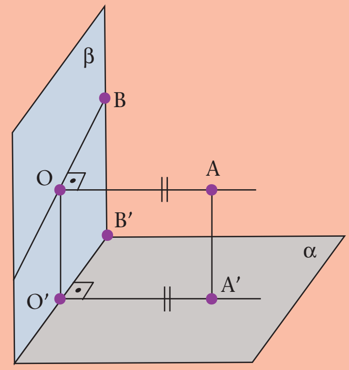


3) As projeções de duas retas paralelas *r* e *s* sobre um plano α são retas *r'* e *s'* paralelas ou coincidentes.

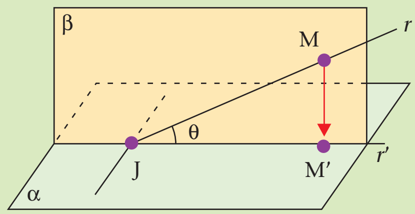




4) Se $\overleftrightarrow{OB}$ e $\overleftrightarrow{OA}$ formarem um ângulo reto tendo um lado $\overline{OA}$ paralelo ao plano de projeção α, suas projeções farão também um ângulo reto $B'\widehat{O'}A'$.

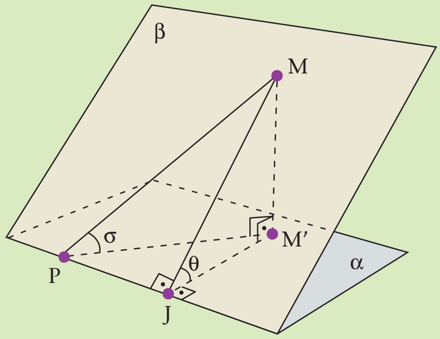


Ângulo de uma reta *r* com um plano α é o ângulo θ, agudo, que a reta forma com sua projeção ortogonal *r'* sobre o plano.



DEFINIÇÃO
Ângulo de uma reta com o plano.

Reta de maior declive de um plano β em relação a um plano α é a reta do plano β que faz o maior ângulo com o plano α.



DEFINIÇÃO
Reta de maior declive.

A reta de maior declive é a reta do plano β que é perpendicular à intersecção dos planos α e β.

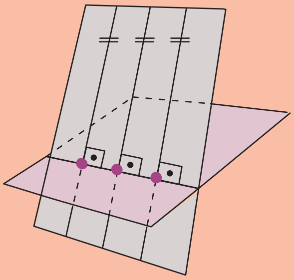
O ângulo θ é maior que qualquer ângulo σ de uma oblíqua com o plano α.

A reta de maior declive é um dos lados do retilíneo do diedro formado pelos planos α e β.

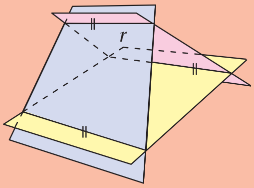
OBSERVAÇÃO
Planos paralelos não têm reta de maior declive.

Observações:

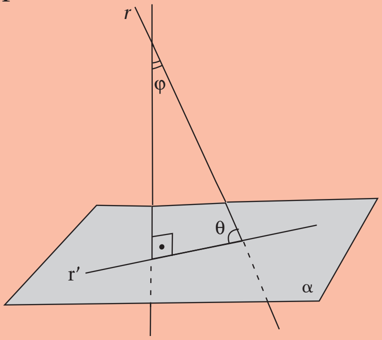
1) Planos não paralelos têm infinitas retas de maior declive.



2) Uma reta paralela a um plano não pode ser de maior declive de um plano em relação ao plano paralelo à reta.

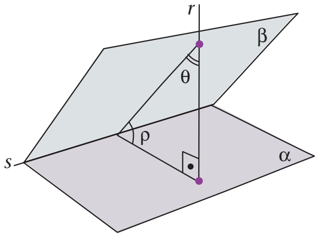


3) O ângulo de uma reta com um plano é o complemento do ângulo da reta com uma normal ao plano.



Toda reta r perpendicular a uma face α de um diedro forma com a outra face β um ângulo complementar do retilíneo ρ do diedro $\alpha s \beta$.

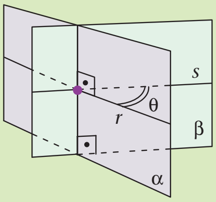
O ângulo θ de uma reta com um plano β é o complementar do ângulo ρ que um plano α normal à reta forma com o plano β.



10.4 – Ângulo de dois planos

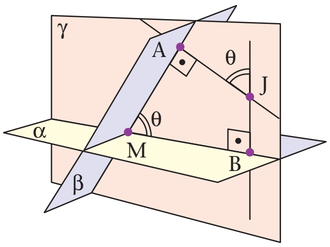
DEFINIÇÃO
Ângulo de dois planos.

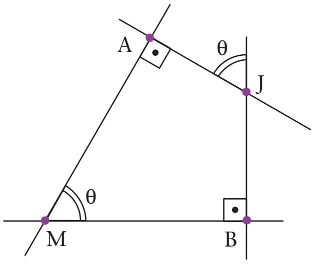
O **ângulo de dois planos** é o ângulo agudo formado pelos retilíneos dos diedros que eles formam.



É o menor ângulo formado por duas retas r e s perpendiculares à intersecção desses dois planos.

Na figura, $\overrightarrow{JA}$ e $\overrightarrow{JB}$ são, respectivamente, perpendiculares aos planos β e α, situadas sobre o plano γ perpendicular à intersecção de α e β, determinam o ângulo agudo θ dos planos α e β.



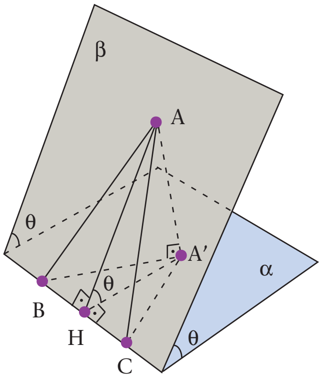


Teorema

A área da projeção ortogonal sobre um plano α de uma figura contida num plano β é o produto da área da figura pelo cosseno do ângulo θ do plano α com β.

<u>Demonstração:</u>

1º caso: A figura é um triângulo ABC com um lado BC paralelo à intersecção dos planos α e β.



Seja A' a projeção de A sobre o plano α e $\overline{AH}$ a altura relativa ao lado $\overline{BC}$. $\overline{A'H}$ é a projeção dessa altura no plano α.

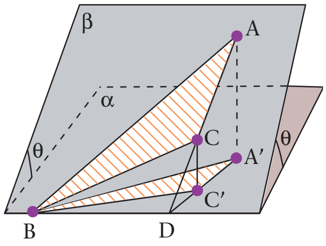
Temos:

$S_{A'BC} = \dfrac{BC \cdot A'H}{2}$. Mas A'H = AH · cos θ, então:

$S_{A'BC} = \dfrac{BC \cdot AH \cdot \cos\theta}{2}$. Mas $\dfrac{BC \cdot AH}{2} = S_{ABC}$, então:

$S_{A'BC} = S_{ABC} \cos\theta$

2º caso: A figura é um triângulo em que nenhum lado é paralelo à intersecção dos planos α e β.



Temos:

$S_{A'BC'} = S_{A'BD} - S_{C'BD}$

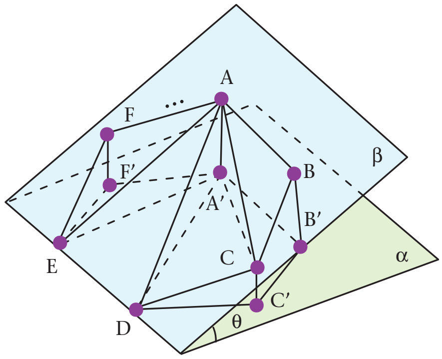
$S_{A'BC'} = S_{ABD} \cos\theta - S_{CBD} \cos\theta$

$S_{A'BC'} = [S_{ABD} - S_{CBD}] \cos\theta$

$S_{A'BC'} = S_{ABC} \cos\theta$

3º caso: A figura é um polígono ABCDEF...

Decompondo o polígono por meio de diagonais AC, AD, AE, AF, ..., temos:



$S_{A'B'C'D'...} = S_{A'B'C'} + S_{A'C'D'} + S_{A'D'E'} + ...$

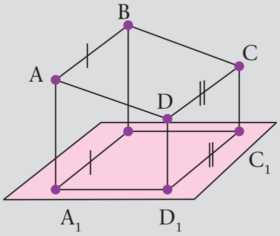
$S_{A'B'C'D'...} = S_{ABC} \cos\theta + S_{ACD} \cos\theta + S_{ADE} \cos\theta + ...$

$S_{A'B'C'D'...} = [S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ADE} + ...] \cos\theta$

$S_{A'B'C'D'...} = S_{ABCD...} \cos\theta$ ou simplesmente $S' = S \cos\theta$ em que S' é a área da projeção de S sobre o plano α e S é a área do polígono ABCD...

Exercícios resolvidos:

1) Na figura ao lado, o retângulo $A_1B_1C_1D_1$ é a projeção do quadrado ABCD. Se a área do quadrado é 8 m² e a do retângulo $4\sqrt{3}$ m², calcule o ângulo dos planos dos quadriláteros e os lados do retângulo.



Solução:

$S_1 = S \cos\theta$

$4\sqrt{3} = 8 \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = 30°$

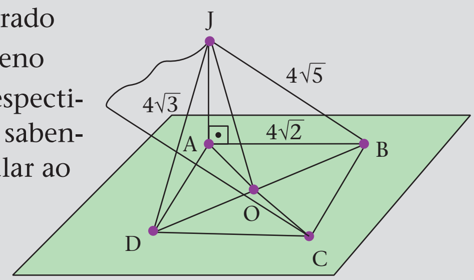
$\ell^2 = 8 \Rightarrow \ell = 2\sqrt{2}$

$\ell h = 4\sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{2}h = 4\sqrt{3} \Rightarrow h = \sqrt{6}$ m

NOTA

Tem-se um ângulo reto se projetando segundo um ângulo reto; logo, dois lados do quadrado são paralelos ao plano do retângulo.

2) Na figura ao lado, ABCD é um quadrado de lado igual a $4\sqrt{2}$ cm. Qual o cosseno dos ângulos dos planos JBD e JBC respectivamente com o plano do quadrado, sabendo que JA = $4\sqrt{3}$ cm e é perpendicular ao plano do quadrado.



Solução:

$$BD^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 64 \Rightarrow BD = 8$$

$$AO = \frac{BD}{2} = 4$$

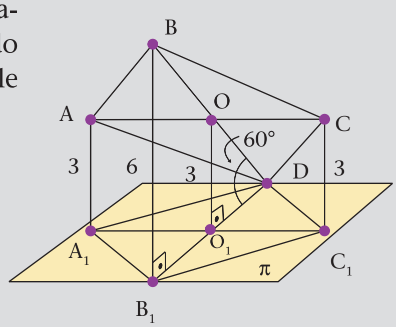
$$JO^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2 = 64 \Rightarrow JO = 8$$

$$\cos\,(JO, AO) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$JB^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 80 \Rightarrow JB = 4\sqrt{5}$$

$$\cos\,(JB, AB) = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

3) O quadrado ABCD projeta-se segundo o losango $A_1B_1C_1D$ no plano π. O ângulo dos planos dos quadriláteros é 60° e a distância do centro do quadrado ao plano π é 3 m. Calcule a área do losângo.



Solução:

$$tg\ 60° = \frac{3}{DO_1} \Rightarrow DO_1 = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$DB_1 = 2\sqrt{3}$$

$$\cos 60° = \frac{DB_1}{DB} \Rightarrow DB = 4\sqrt{3} = AC = A_1C_1$$

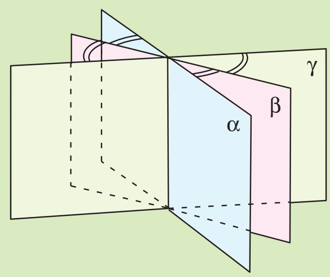
$$S_L = \frac{d_1d_2}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 12\ m^2$$

NOTA
Como os triângulos DAA_1 e DCC_1 são retângulos e congruentes tem-se $AA_1 = CC_1$ e, portanto, $AC \,//\, A_1C_1$.

10.5 – Bissetores

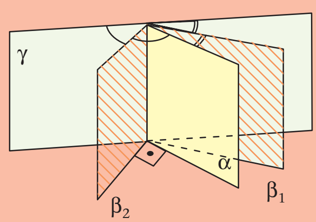
DEFINIÇÃO
Bissetor de um diedro.

Bissetor de um diedro é o semiplano β cujo bordo é a aresta do diedro e que forma ângulos congruentes com as faces do diedro. É o semiplano que divide o diedro em dois diedros congruentes.

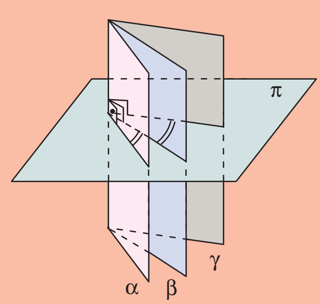


Propriedades

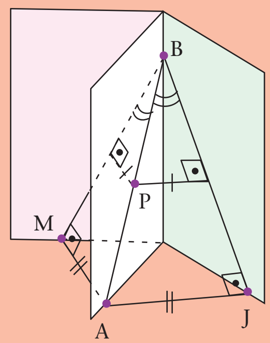
1) Bissetores de diedros adjacentes cujas faces não comuns são coplanares são perpendiculares.



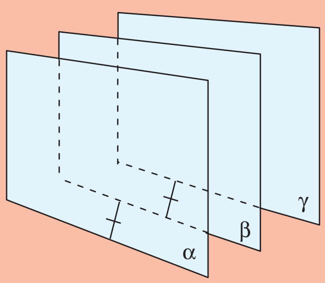
2) O bissetor de um diedro é o lugar geométrico das bissetrizes dos ângulos retilíneos do diedro. O bissetor de um diedro fica então determinado pela aresta do diedro e a bissetriz de qualquer de seus retilíneos.



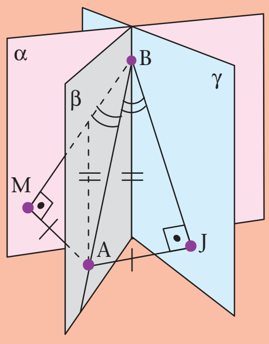
3) O bissetor de um diedro é o lugar geométrico dos pontos equidistantes das faces do diedro.



4) Quando os planos são paralelos, não há bissetores e o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois planos será um plano paralelo aos mesmos e deles equidistante.



5) Toda reta contida no bissetor de um diedro é paralela às faces do diedro ou forma ângulos iguais com as faces.



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Se um diedro mede 100°, quanto mede o ângulo que uma reta perpendicular a uma face do diedro forma com o plano bissetor dele?

2 Uma reta, perpendicular a uma das faces de um diedro, forma com o plano bissetor do mesmo um ângulo de 42°. Quanto mede o ângulo do diedro?

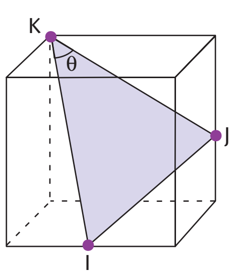
3 Ache a medida sexagesimal do diedro formado pelos planos bissetores de dois diedros consecutivos que têm por medidas 60° e 80 gr, respectivamente. (Nota: 100 gr corresponde a 90°.)

4 Uma reta, perpendicular ao plano bissetor de um diedro, forma com uma das faces um ângulo de 52°37′. Calcule o retilíneo do diedro.

5 Pelo vértice O de um ângulo $A\hat{O}B = 45°$ levanta-se a perpendicular OM ao plano AOB. Ache as medidas dos diedros que têm por arestas OM, OA e OB.

6 Pelo centro O de um quadrado ABCD, cujo lado é a, levanta-se a perpendicular ao plano do quadrado e sobre ela toma-se o segmento $OS = \frac{a}{2}$. Calcule as medidas dos diedros SABO e ASBC.

7 Os pontos J e I são os pontos médios das arestas do cubo sugerido na figura.



a) Calcule, em função da medida a da aresta do cubo, a distância de I a J.

b) Determine a medida θ do ângulo IKJ.

8 ABC é um triângulo equilátero cujo lado mede 12 cm e O é um ponto exterior ao plano do triângulo, tal que OA = OB = OC = 15 cm. Calcule a distância do ponto O ao plano do triângulo.

9 AB = 15 cm, AC = 13 cm, BC = 4 cm são os lados de um triângulo ABC e O é um ponto exterior ao plano ABC. Sabendo que as distâncias do ponto O aos vértices do triângulo ABC são iguais ao diâmetro do círculo circunscrito a esse triângulo, calcule a distância de O ao plano ABC.

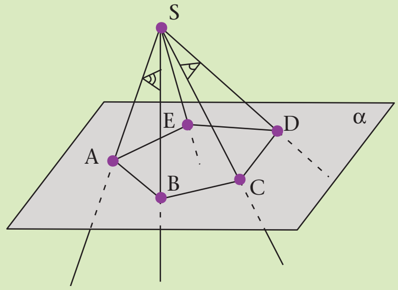
10 ABC é um triângulo retângulo cuja hipotenusa $BC = a$, e O é um ponto exterior ao plano ABC, tal que as retas OA, OB e OC formam ângulos de 60° com esse plano. Calcule a distância do ponto O ao plano ABC.

11 OAB é um triângulo retângulo isósceles no qual $OA = OB = a$. Pelo vértice O levanta-se a perpendicular ao plano do triângulo e sobre ela toma-se o segmento $OM = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Une-se o ponto M aos vértices A e B e ao ponto médio D da hipotenusa AB. Mostre que o ângulo MDO é o retilíneo do diedro de aresta AB e ache a medida desse diedro.

12 OAB é um triângulo retângulo isósceles no qual $OA = OB = a$. Pelo vértice O levanta-se a perpendicular aos vértices A e B e ao ponto médio D da hipotenusa AB. Mostre que o ângulo MDO é o retilíneo do diedro de aresta AB e calcule OM de modo que esse diedro tenha por medida 30°.

10.6 – Ângulo poliédrico ou sólido

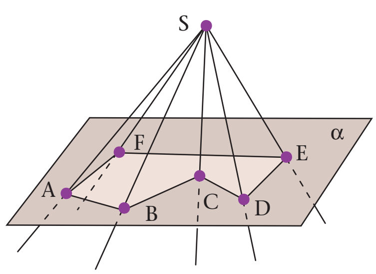
Ângulo poliédrico ou **ângulo sólido** é a figura formada por ângulos planos de mesmo vértice, que têm dois a dois uma aresta comum.



DEFINIÇÃO
Ângulo poliédrico ou sólido.

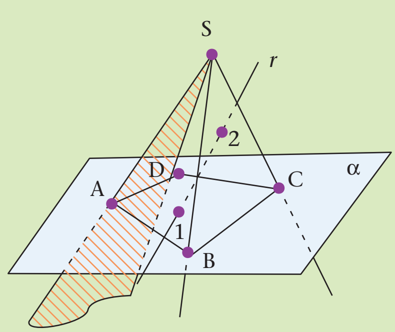
Quando uma reta passando num ponto fixo S se desloca apoiando-se num polígono ABC..., ela descreve um ângulo poliédrico.

O ponto S é o vértice do poliedro, as retas $\overleftrightarrow{SA}$, $\overleftrightarrow{SB}$, $\overleftrightarrow{SC}$, ... são suas arestas e os ângulos $A\hat{S}B$, $B\hat{S}C$, ... são as faces do poliedro ou seus ângulos faces.



Num ângulo poliédrico, os ângulos faces que têm aresta comum formam os ângulos diedros do ângulo sólido. Pares de arestas consecutivas formam um ângulo face e pares de faces consecutivas formam um ângulo diedro do ângulo poliédrico.

Um **ângulo poliédrico** é **convexo** quando fica integralmente num dos semiespaços determinados por cada uma de suas faces.



DEFINIÇÃO
Ângulo poliédrico convexo.

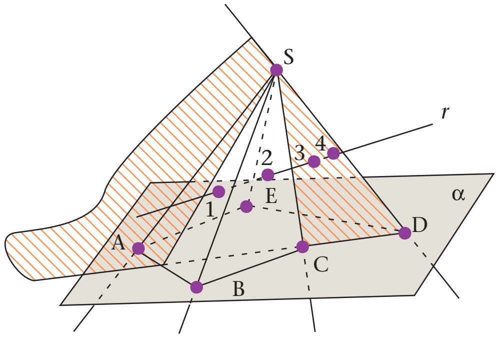
Num ângulo poliédrico convexo:

1) Um plano α que corta todas as arestas forma uma secção que é um polígono convexo.

2) Toda reta *r* (não contida numa de suas faces) que o intersecta determina nele apenas dois pontos de intersecção.

3) Os planos das faces não têm pontos no interior do ângulo sólido.

Num ângulo poliédrico não convexo (ou côncavo):



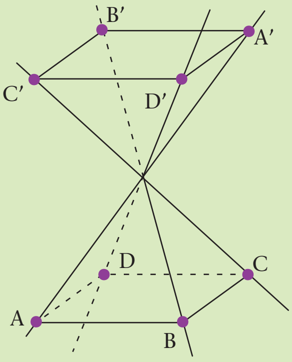
1) Existe alguma face cujo plano tem pontos no interior do ângulo sólido (SDC na figura).

2) Existem retas que o intersectam em mais de dois pontos.

3) O plano α que corta todas as arestas determina uma secção que é um polígono côncavo (com reentrâncias).

DEFINIÇÃO
Ângulos opostos pelo vértice.

Ângulos poliédricos são **opostos pelo vértice** ou **simétricos** quando as arestas de um deles são os prolongamentos das arestas do outro.

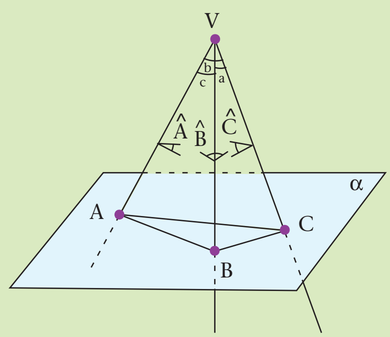


OBSERVAÇÃO
As faces são ângulos planos opostos pelo vértice.

10.7 – Triedros

DEFINIÇÃO
Triedros.

Triedro é o ângulo sólido de três arestas, três faces e três diedros.



Na figura, $\overline{VA}$, $\overline{VB}$ e $\overline{VC}$ são as arestas, *a*, *b* e *c* são as faces opostas às arestas $\overline{VA}$, $\overline{VB}$ e $\overline{VC}$, respectivamente, e $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são os diedros de arestas $\overline{VA}$, $\overline{VB}$ e $\overline{VC}$, respectivamente.

Dois triedros igualmente dispostos são congruentes quando:

i) têm uma face congruente adjacente a dois diedros respectivamente congruentes OU;

ii) têm um diedro congruente formado por duas faces respectivamente congruentes OU;

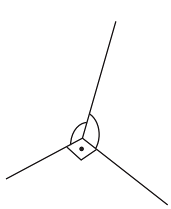
iii) têm as três faces respectivamente congruentes OU;

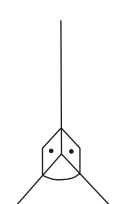
iv) têm os três diedros respectivamente congruentes.

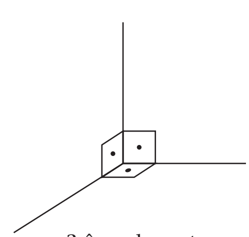
NOTA
Exceto pela última, são condições análogas às da congruência de triângulos.

Todo plano que intersecta as três arestas do triedro define uma secção triangular, logo todo triedro é convexo.

Triedros podem ser retângulos, birretângulos ou trirretângulos quando têm uma face retangular, duas ou três faces retangulares respectivamente.


1 ângulo reto


2 ângulos retos

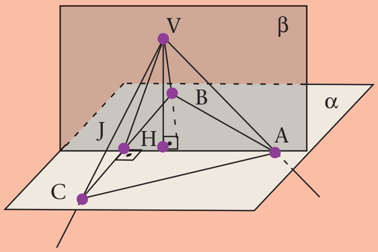

3 ângulos retos

Triedros isósceles são os triedros que têm duas faces congruentes.

NOTA
Todo triedro isósceles tem também dois diedros congruentes.

Teorema

A projeção ortogonal do vértice V de um triedro trirretângulo VABC sobre um plano α que intersecta suas três arestas é o ortocentro da secção ABC do plano no triedro.



Demonstração:

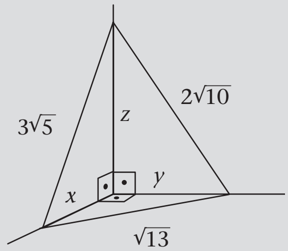
Temos que $\overline{VA}$ é perpendicular a $\overline{VB}$ e também a $\overline{VC}$, então $\overline{VA}$ é ortogonal a $\overline{BC}$. Por outro lado, $\overline{VH}$ é perpendicular ao plano α, logo $\overline{VH}$ é ortogonal a $\overline{BC}$.

Como $\overline{BC}$ é ortogonal a $\overline{VA}$ e também a $\overline{VH}$, $\overline{BC}$ é perpendicular ao plano β que contém $\overline{VA}$ e $\overline{VH}$, logo $\overline{BC}$ é perpendicular a $\overline{AH}$. Então, $\overline{AH}$ é altura do vértice A no triângulo ABC. Analogamente, o ponto H pertencerá também às alturas dos vértices B e também C, sendo, portanto, ortocentro do triângulo ABC.

Exercícios resolvidos:

1) Dado um triedro trirretângulo, pergunta-se a que distância do vértice, sobre as arestas, deve passar uma secção para que os lados do triângulo obtido tenham $\sqrt{13}$ m, $2\sqrt{10}$ m e $3\sqrt{5}$ m.

Solução:



Temos o sistema:

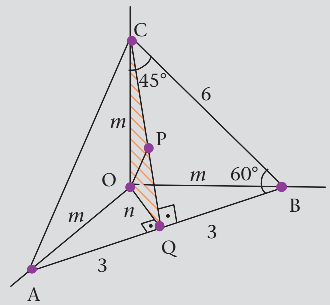
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 \\ x^2 + z^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 \\ y^2 + z^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \quad (1) \\ x^2 + z^2 = 45 \quad (2) \\ y^2 + z^2 = 40 \quad (3) \end{cases}$$

Somando membro a membro:
$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 98 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 49$ (4)

Subtraindo as equações:
(4) – (1) $\Rightarrow z^2 = 36 \Rightarrow z = 6$
(4) – (2) $\Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = 2$
(4) – (3) $\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$

2) Corta-se um triedro trirretângulo por um plano de tal modo que a secção obtida seja um triângulo equilátero de lado igual a 6 m. Ache as distâncias do vértice aos pontos de intersecção do plano secante com as arestas e ao plano da secção.

Solução:



$\triangle$OBC é retângulo isósceles $\Rightarrow$ sen 45° $= \dfrac{m}{6} \Rightarrow m = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ m

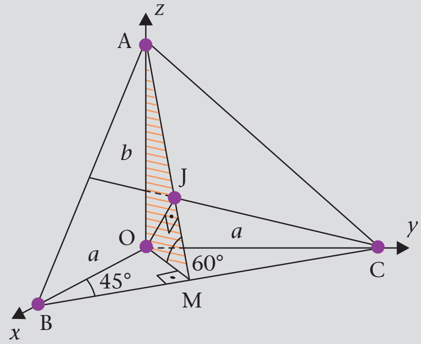
$\triangle$OAB é retângulo isósceles $\Rightarrow n = \dfrac{AB}{2} = 3$ m

No $\triangle$CQB; sen 60° $= \dfrac{CQ}{6} \Rightarrow CQ = 3\sqrt{3}$

$\triangle$OCQ é retângulo $\Rightarrow OP \cdot CQ = OC \cdot OQ \Rightarrow OP \cdot 3\sqrt{3} = 3\sqrt{2} \cdot 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow OP = \sqrt{6}$ m

3) Na figura abaixo, o triedro Ox, Oy e Oz é trirretângulo e ABC é isósceles de base $\overline{BC}$. Sabe-se que ABC faz 60° com xOy e dista $\sqrt{3}$ m de O. Calcule a área de ABC, bem como $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$.

Solução:



No $\triangle$OMJ: $OM = \dfrac{OJ}{\text{sen}\,60°} = \dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$ m

No $\triangle$OAM: $OA = \dfrac{OM}{\operatorname{tg} 60°} = 2\sqrt{3}$ m

No $\triangle$OBC, retângulo isósceles: $\operatorname{sen} 45° = \dfrac{OM}{OB} \Rightarrow OB = OC = 2\sqrt{2}$ m e

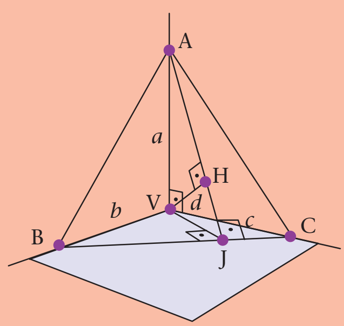
$S_{OBC} = \dfrac{OB^2}{2} = 4\ m^2$

Enfim, $S_{OBC} = S_{ABC} \cos 60° \Rightarrow S_{ABC} = 2S_{OBC} = 8\ m^2$

10.8 – Teorema de Monge-Hachette

Teorema

O inverso do quadrado da distância do vértice de um triedro trirretângulo a um plano que intersecta suas três arestas é igual à soma dos inversos dos quadrados das distâncias do vértice do triedro aos vértices do triângulo secção, ou seja, de acordo com a figura: $\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.



Demonstração:

No triângulo retângulo AVJ, VH é a altura relativa à hipotenusa $\overline{AJ}$, logo: $VH \cdot AJ = VA \cdot VJ$, ou seja, $d \cdot AJ = a \cdot VJ$. Elevando ao quadrado:

$d^2 \cdot AJ^2 = a^2 \cdot VJ^2$. Mas $AJ^2 = a^2 + VJ^2$, logo:

$$d^2 \cdot (a^2 + VJ^2) = a^2 \cdot VJ^2 \Rightarrow VJ^2 = \frac{a^2 d^2}{a^2 - d^2} \quad (1)$$

Por outro lado, $\overline{VJ}$ é altura relativa à hipotenusa no triângulo retângulo BVC, logo: $VJ \cdot BC = VB \cdot VC$, ou seja, $VJ \cdot BC = bc$. Elevando ao quadrado vem:

$VJ^2 \cdot BC^2 = b^2c^2 \Rightarrow VJ^2 = \dfrac{b^2c^2}{b^2 + c^2}$ (2), pois $BC^2 = b^2 + c^2$. Igualando (1) e (2) vem:

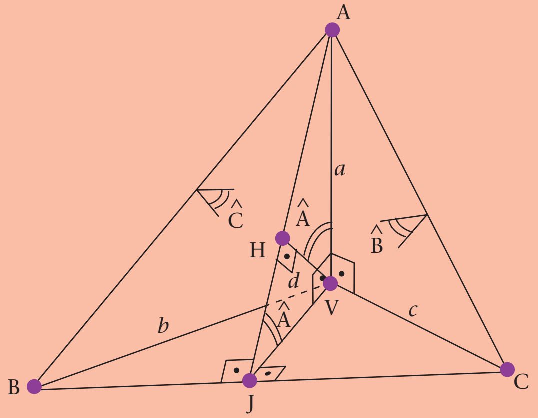
$$\frac{a^2 d^2}{a^2 - d^2} = \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \Rightarrow a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 = a^2b^2c^2 - b^2c^2d^2$$

ou ainda: $a^2b^2c^2 = (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)\, d^2$. Dividindo por $a^2b^2c^2$, vem:

$\left(\dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{a^2}\right) d^2 = 1$, logo: $\boxed{\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}$

Corolário:

A soma dos quadrados dos cossenos dos diedros formados pelas faces retangulares com o plano secante é igual a 1.



<u>Demonstração:</u>

O ângulo $H\hat{V}A$ é congruente ao ângulo diedro $H\hat{J}V$, pois $\overline{JV}$ é perpendicular a $\overline{VA}$ e $\overline{VH}$ é perpendicular a $\overline{AJ}$.

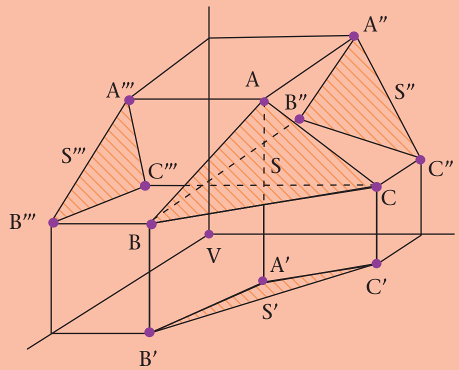
No triângulo retângulo HVA de hipotenusa $a = VA$, o cateto adjacente ao ângulo $\hat{A}$ é $HV = d$, logo: $\cos\hat{A} = \dfrac{d}{a}$. Analogamente, $\cos\hat{B} = \dfrac{d}{b}$ e $\cos\hat{C} = \dfrac{d}{c}$.

Como $\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$, multiplicando por d^2, vem: $1 = \dfrac{d^2}{a^2} + \dfrac{d^2}{b^2} + \dfrac{d^2}{c^2}$, logo:

$$\boxed{\cos^2\hat{A} + \cos^2\hat{B} + \cos^2\hat{C} = 1}$$

Teorema de Monge-Hachette

O quadrado da área de uma figura plana situada num plano oblíquo em relação às três arestas de um triedro trirretângulo é igual à soma dos quadrados das áreas das projeções ortogonais da figura sobre as faces do triedro.



NOTA
Reveja o teorema da área da projeção na seção 10.3.

Demonstração:

Sejam S′, S″ e S‴ as projeções de S sobre as faces do triedro e θ′, θ″ e θ‴ os diedros respectivos das faces com o plano da figura.

Temos:

$S' = S\cos\theta' \Rightarrow S'^2 = S^2\cos^2\theta'$

$S'' = S\cos\theta'' \Rightarrow S''^2 = S^2\cos^2\theta''$

$S''' = S\cos\theta''' \Rightarrow S'''^2 = S^2\cos^2\theta'''$

Somando membro a membro, vem:

$S'^2 + S''^2 + S'''^2 = S^2(\cos^2\theta' + \cos^2\theta'' + \cos^2\theta''')$

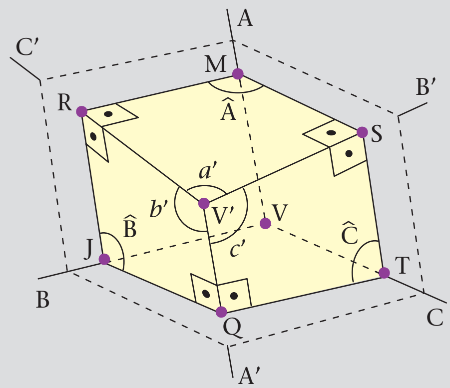
Como $\cos^2\theta' + \cos^2\theta'' + \cos^2\theta''' = 1$, concluímos que:

$$S^2 = S'^2 + S''^2 + S'''^2$$

NOTA
Neste caso, diz-se que o triedro V′A′B′C′ e suplementar do triedro VABC.

Exercícios resolvidos:

1) Mostre que as perpendiculares às faces de um triedro VABC por um ponto V′ do interior deste triedro determinam um novo triedro V′A′B′C′ cujas faces são as suplementares dos diedros correspondentes do triedro VABC.

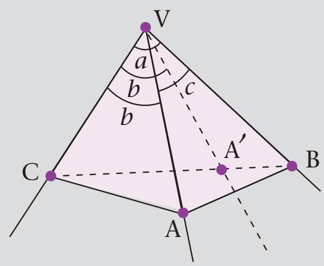


Solução:

Basta ver que o quadrilátero V′SMR, tendo dois ângulos retos $\hat{S}$ e $\hat{R}$, nos leva à conclusão de que a soma do ângulo do diedro A com o ângulo da face, será 180°. Analogamente, para os quadriláteros V′RJQ e V′QTS; temos:

$\hat{A} + a' = 180°$; $\hat{B} + b' = 180°$; $\hat{C} + c' = 180°$

2) Mostre que em todo triedro, qualquer ângulo de face é menor que a soma dos outros dois e maior que sua diferença.



Solução:

Seja o triedro VABC, e suponhamos que o maior ângulo face seja $C\hat{V}B$. Marquemos sobre essa face a reta VA' tal que o ângulo CVA seja congruente com $C\hat{V}A$ e VA' = VA.

Construamos um plano qualquer que contenha os pontos A e A' e intersectemos a aresta $\overline{VC}$ no ponto C. Os triângulos ACV e A'CV são congruentes, pois tem um ângulo comum *b* compreendido entre os lados $\overline{VC}$ (que é comum aos dois triângulos) e VA = VA'. Então: CA = CA'.

No triângulo ABC, temos que:

$$CB < CA + AB \Rightarrow CB - CA < AB \Rightarrow CB - CA' < AB \Rightarrow A'B < AB$$

Por outro lado, os triângulos A'VB e AVB têm AV = A'V e um lado comum $\overline{BV}$. Como A'B < AB, temos:

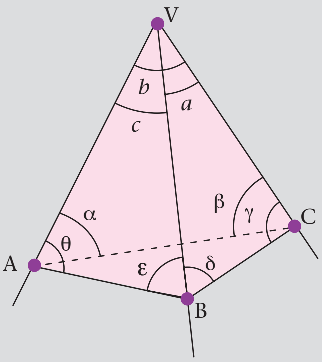
$$A'\hat{V}B < A\hat{V}B \Rightarrow a - b < c \Rightarrow a < b + c$$

Suponhamos agora que *c* seja o menor ângulo face do triedro. Temos:

$$a < b + c \Rightarrow c > a - b$$

O menor ângulo face é maior que a diferença dos outros dois e o maior ângulo face é menor que a soma dos outros dois.

3) Mostre que, em todo triedro, a soma das faces é menor que 360°.



Solução:

Nos triângulos:

VBC: $a + \delta + \gamma = 180°$ (1)

VBA: $c + \varepsilon + \theta = 180°$ (2)

VAC: $b + \alpha + \beta = 180°$ (3)

Somando as igualdades (1), (2) e (3), temos:

$(a + b + c) + (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \theta) = 540°$

NOTA
Ver exercício anterior.

Por outro lado, nos triedros:

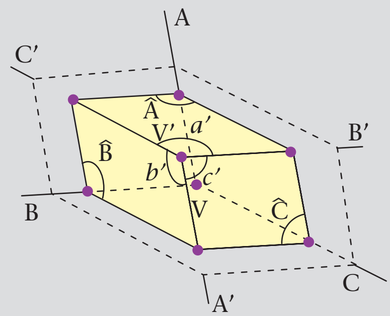
ABCV: $\hat{A} < \alpha + \theta$ (4)
CABV: $\hat{C} < \beta + \gamma$ (5) onde: $\begin{cases} \hat{A} = B\hat{A}C \\ \hat{C} = B\hat{C}A \\ \hat{B} = A\hat{B}C \end{cases}$
BACV: $\hat{B} < \varepsilon + \delta$ (6)

Somando as desigualdades (4), (5) e (6), temos:
$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) < \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \theta$

Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ e $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \theta = 540° - (a + b + c)$, vem:
$180° < 540° - (a + b + c) \Rightarrow a + b + c < 360°$.

OBSERVAÇÃO
Esta propriedade é válida para qualquer ângulo poliédrico convexo. A soma de suas faces é menor que 4 retos.

4) Mostre que, em todo triedro, a soma dos diedros está compreendida entre 180° e 540°.



Solução:

Tomemos por um ponto V', no interior do triedro VABC, o seu suplementar V'A'B'C'. Temos:

$$\hat{A} + a' = 180°;\ \hat{B} + b' = 180°;\ \hat{C} + c' = 180°;$$

porque são ângulos opostos num quadrilátero plano que têm dois ângulos retos.

Somando membro a membro as igualdades acima, vem:

$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) + (a' + b' + c') = 540° \Rightarrow a' + b' + c' = 540° - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})$

Como a', b' e c' são faces de um triedro:

$0 < a' + b' + c' < 360° \Rightarrow 0 < 540° - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) < 360°$

Multiplicando esta última desigualdade por (–1), vem:

$$0 > (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) - 540° > -360°$$

Somando 540° a todos os membros dessa desigualdade:

$$540° > \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180°$$

NOTA
Como $a' < b' + c'$, por serem faces de um triedro, e levando em conta que $a' = 180° - \hat{A}$, $b' = 180° - \hat{B}$ e $c' = 180° - \hat{C}$, vem:
$180° - \hat{A} < 180° - \hat{B} + 180° - \hat{C} \Rightarrow \hat{A} + 180° > \hat{B} + \hat{C}$.
Em todo triedro, a soma de dois de seus diedros, é menor que o terceiro aumentado de 180°.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 A soma dos diedros de um triedro é:

(A) igual a dois diedros retos.

(B) menor do que dois diedros retos.

(C) menor do que quatro diedros retos.

(D) maior do que dois diedros retos.

(E) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

2 A soma S dos diedros de um triedro satisfaz à relação:

(A) $S > 540°$

(B) $S < 90°$

(C) $180° < S < 360°$

(D) $180° < S < 540°$

(E) Nenhuma das anteriores.

3 As faces *a* e *b* de um triedro VABC medem, respectivamente, 110° e 80°. Determine entre que limites fica compreendida a medida da face *c*, sabendo que é a maior.

4 ABCD é um quadrado cujo lado é *a*. Pelo vértice A, levanta-se a perpendicular ao plano do quadrado e, sobre essa perpendicular, toma-se o segmento AS = *a*. Calcule:

a) as distâncias do ponto S aos vértices B, C e D do quadrado;

b) as distâncias do ponto S aos planos SBC, SCD e SBD;

c) a distância do ponto S à reta SC.

5 A, B, C são pontos das arestas de um triedro trirretângulo de vértice S, tais que SA = SB = SC = *a*. Mostre que o triângulo ABC é equilátero e calcule a distância do vértice S ao plano desse triângulo.

6 Num triedro VABC, o diedro A é reto e as faces *b* e *c* são ângulos de 45°. Calcule a face *a*.

7 Calcule o diedro A de um triedro VABC, sabendo que a face $a = 90°$ e que os diedros B e C são iguais e têm por medida, cada um, 135°.

8 A seção feita num triedro trirretângulo de vértice V por um plano que intercepta todas as arestas é um triângulo ABC cujos lados são: AB = 125 m, AC = 267 m, BC = 244 m. Calcule VA, VB e VC.

9 Dois triedros S e S′ são suplementares. As faces de S são respectivamente iguais aos diedros de S′; além disso, a menor das faces de S vale $\frac{5}{7}$ da maior. Ache as medidas dos diedros do triedro S′.

10 Determine as medidas das três faces de um triedro, sabendo que são iguais entre si e iguais aos $\frac{2}{3}$ dos diedros do triedro suplementar.

11 Num triedro VABC, a face $a = 135°$ e as faces *b* e *c* são iguais. Determine entre que limites fica compreendida a medida dos diedros iguais do triedro suplementar.

12 ABC é um triângulo retângulo no qual a hipotenusa BC = 15 cm e o cateto AB = 12 cm. Pelo vértice B, levanta-se a perpendicular, ao plano do triângulo e, sobre esta perpendicular, toma-se o segmento BC = 16 cm. Calcule a área do triângulo OAC.

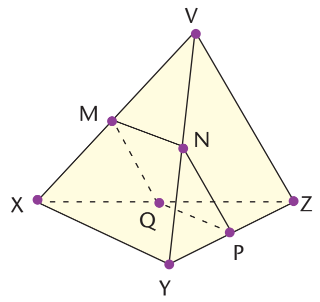
13 ABC é um triângulo isósceles cuja base AB = 24 cm e no qual a razão da altura para o lado é $\frac{4}{5}$. Pelos vértices A e B, traçam-se perpendiculares ao plano ABC e, sobre elas, tomam-se, num mesmo semiespaço dos determinados por esse plano, os pontos M e N, tais que AM = BN = 15 cm. Determine a razão entre as áreas dos triângulos MNC e ABC.

14 A distância de duas retas reversas *r* e *s* é de 10 cm. A reta *r* dista 15 cm de um plano P que é paralelo a *r* e *s*. Ache a distância da reta *s* ao plano P, sabendo que está mais afastada de P do que de *r*.

15 Pelo centro O de um quadrado ABCD, cujo lado mede 10 cm, levanta-se a perpendicular ao plano do quadrado e, sobre essa perpendicular, toma-se o segmento OS = 12 cm. Calcule a distância do ponto O ao plano SAB.

16 Num tetraedro regular VXYZ de aresta 12 cm, M, N, P e Q são os pontos médios das arestas VX, VY, YZ e XZ, respectivamente.

A área do quadrilátero MNPQ é:



(A) 72 cm^2

(B) 36 cm^2

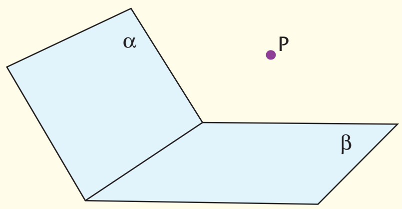
(C) $12\sqrt{3}$ cm^2

(D) $12\sqrt{2}$ cm^2

(E) igual à área de uma face do tetraedro.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 Considere os planos α e β, não perpendiculares, e o ponto P, não pertencente a α nem a β, conforme a figura abaixo.



Pode-se afirmar que:

(A) toda reta que passa por P e é paralela a α também é paralela a β.

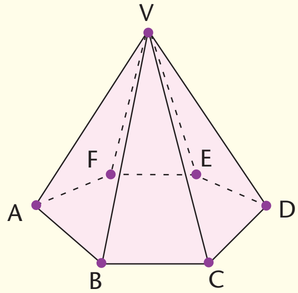
(B) toda reta que passa por P e intercepta α também intercepta β.

(C) se um plano contém P e intercepta α, então ele intercepta β.

(D) existe um plano que contém P e é perpendicular a α e a β.

(E) existe um plano que passa por P e é paralelo a α e a β.

2 Numa pirâmide VABCDEF regular hexagonal, uma aresta lateral é o dobro de uma aresta da base (veja figura). O ângulo $A\hat{V}D$, formado por duas arestas laterais opostas, mede:



(A) 30°

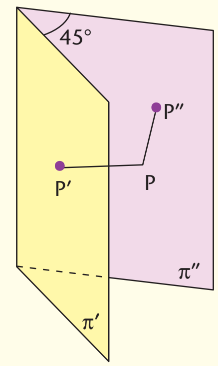
(B) 45°

(C) 60°

(D) 75°

(E) 90°

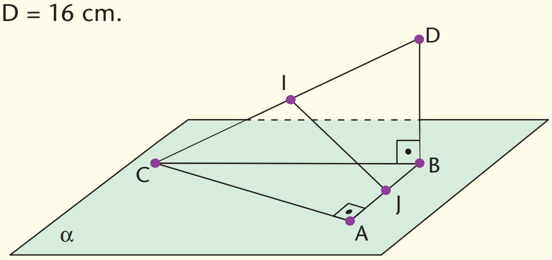
3 (Fuvest-SP) Sejam π' e π'' as faces de um ângulo diedro de 45° e P um ponto interior a esse diedro. Sejam P′ e P″ as projeções ortogonais de P sobre π' e π'' respectivamente. Então a medida, em graus, do ângulo P′PP″ é:



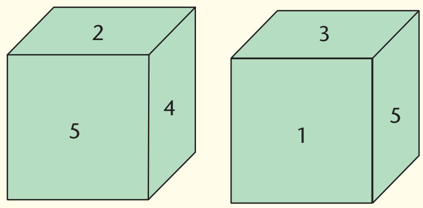
(A) 30 (C) 60 (E) 135

(B) 45 (D) 90

4 O triângulo ABC, retângulo em A, está contido em α, e $\overline{DB}$ é perpendicular a α. Os pontos I e J são médios de $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$. Calcule a medida IJ, sendo AC = 12 cm e BD = 16 cm.



5 Um dado com forma de cubo tem suas faces numeradas arbitrariamente de 1 a 6.
A figura abaixo representa o mesmo dado em duas posições diferentes.



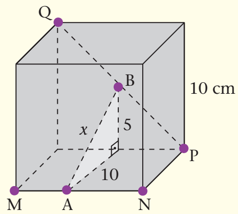
Qual a face oposta à face 1?

(A) 2 (D) 5

(B) 3 (E) 6

(C) 4

6 Num cubo de aresta 10 cm, ligam-se os pontos médios A e B dos segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$, respectivamente, como se mostra na figura. O comprimento do segmento $\overline{AB}$ é:



(A) $5\sqrt{5}$ cm

(B) $10\sqrt{3}$ cm

(C) $10\sqrt{2}$ cm

(D) $5\sqrt{7}$ cm

(E) $7\sqrt{5}$ cm

7 Dado um cubo de aresta *a*, o ângulo sob o qual um observador situado no centro do cubo vê a diagonal de uma das faces é:

(A) um ângulo cujo seno é $2\sqrt{2}$.

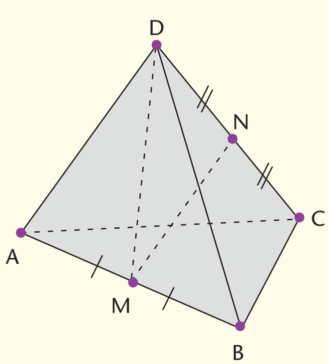
(B) um ângulo cujo seno é $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

(C) um ângulo cujo seno é $\dfrac{1}{3}$.

(D) um ângulo cuja secante é $-\sqrt{3}$.

(E) um ângulo cujo seno é $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

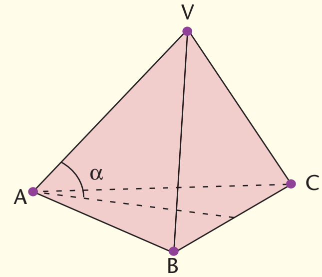
8 A figura abaixo é um tetraedro regular de aresta *a*. Isto é, todas as faces são triângulos equiláteros, sendo o ponto M médio da aresta AB e N o ponto médio da aresta CD. Calcule:



a) a medida de $\overline{MN}$;

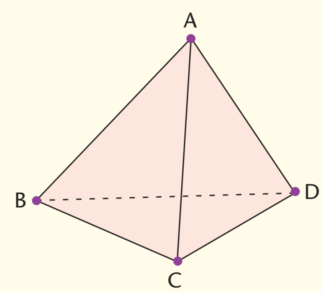
b) o seno do ângulo $N\hat{M}D$.

9 Seja VABC um tetraedro regular. O cosseno do ângulo que a aresta VA faz com um plano ABC é:



(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{1}{2}$ (E) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

10 Calcule a aresta do tetraedro que se obtém unindo-se os baricentros das faces do tetraedro regular ABCD de 3 cm de aresta.



11 Operários rolam um cubo de granito de 1 m de aresta até ele dar uma volta completa.
A distância, em metros, percorrida por um vértice é de:

(A) $\dfrac{(2+\sqrt{2})\pi}{2}$

(B) $\dfrac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$

(C) $\dfrac{3\pi}{2}$

(D) $\dfrac{3\sqrt{2}\pi}{2}$

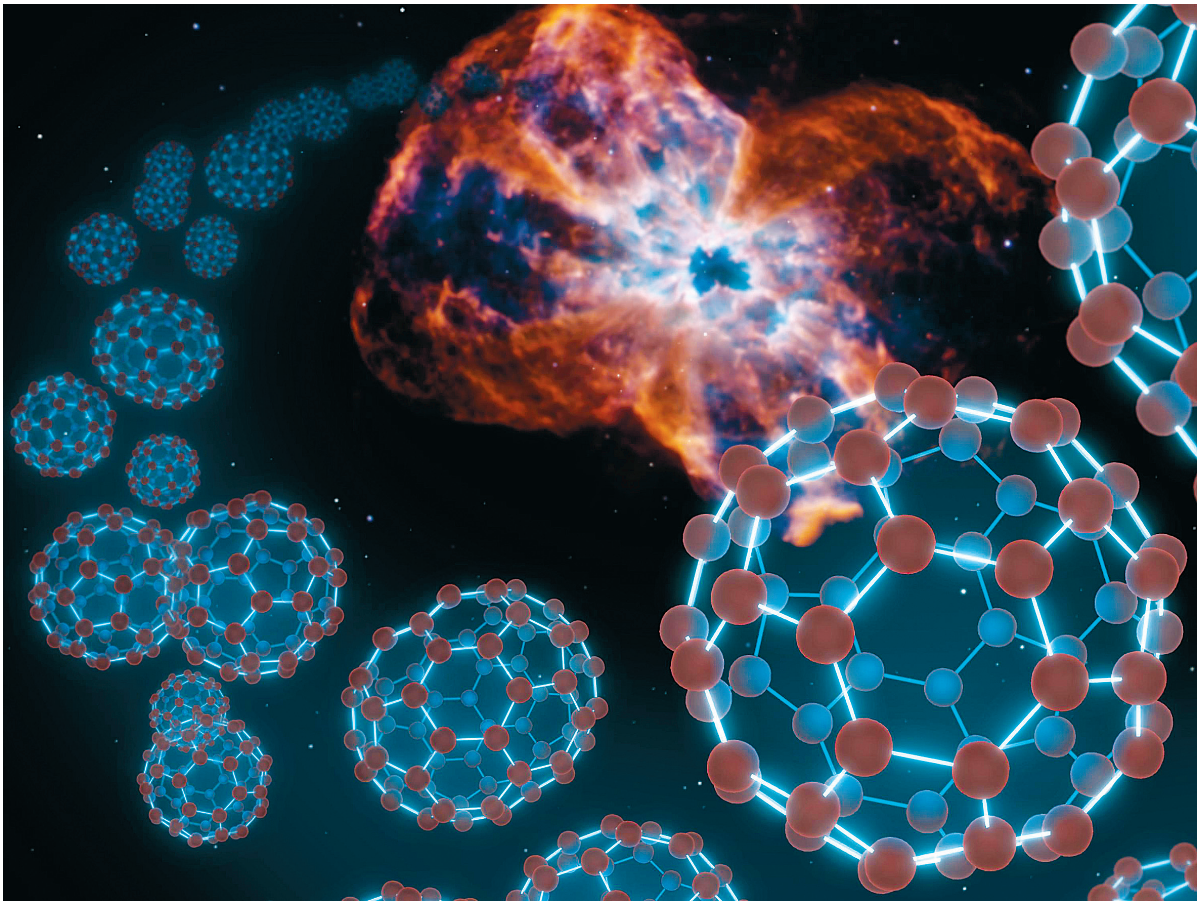
(E) 2π

12 Pelo centro O de um triângulo equilátero ABC, cujo lado é *a*, levanta-se a perpendicular ao plano do triângulo e une-se um ponto S dessa perpendicular aos vértices A, B e C. Mostre que as faces do triedro de vértice S são iguais e calcule OS de modo que esse triedro seja trirretângulo.

13 ABC e DBC são dois triângulos equiláteros que têm um lado comum, BC, e cujos planos formam um diedro de 60º. Sabendo que o lado desses triângulos é *a*, calcule o segmento AD e a distância do ponto D ao plano ABC.

CAPÍTULO XI

POLIEDROS



NASA/JPL – Caltech

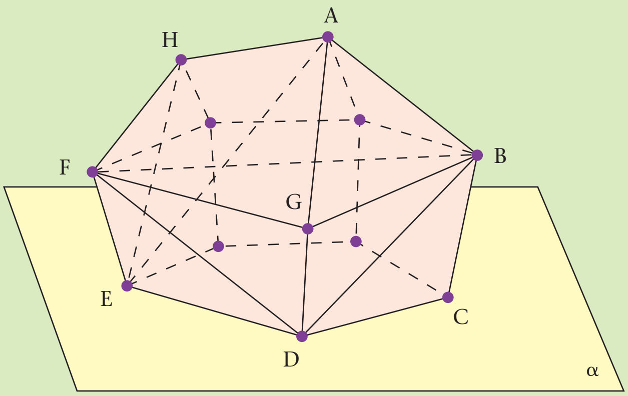
Se um sólido tem faces planas, ele pode ser bem modelado por um poliedro (e, se ele não tem faces planas, ainda assim ele pode ser bem aproximado por poliedros, como na quase totalidade das imagens geradas por Computação Gráfica). Assim, os poliedros são utilizados para representar objetos que variam de microscópicos compostos químicos até edifícios e construções. A imagem representa uma nebulosa planetária e moléculas de carbono C_{60} chamadas *buckminsterfulerenos* ou *futebolenos* pelo formato poliédrico semelhante ao de uma bola de futebol. Os astrônomos encontraram essas moléculas que são agora as maiores existentes no espaço.

11 – POLIEDROS

11.1 – Introdução

DEFINIÇÃO
Poliedro.

Poliedro é a figura limitada por um conjunto finito de polígonos planos tais que cada lado pertença a dois polígonos e que cada par de polígonos que tenham um lado comum não sejam coplanares.



Os polígonos são chamados **faces** de poliedro. Os lados desses polígonos são as **arestas** do poliedro, e seus vértices são os **vértices** do poliedro.

Exemplo:

Na figura acima:

ABG, BCDG, ... são faces do poliedro;
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, ... são arestas do poliedro;
A, B, C, ... são vértices do poliedro.

Diagonal do poliedro é o segmento de reta que liga dois vértices não pertencentes à mesma face.

Plano diagonal é todo plano formado por uma aresta e um vértice, não sendo face do poliedro.

Exemplo:

Na figura acima:
$\overline{AE}$, $\overline{BF}$, ... são diagonais do poliedro;
$\overline{BD}$, $\overline{DF}$, ... são diagonais de faces;
AHE, FHE, ... são planos diagonais.

DEFINIÇÃO
Poliedro convexo.

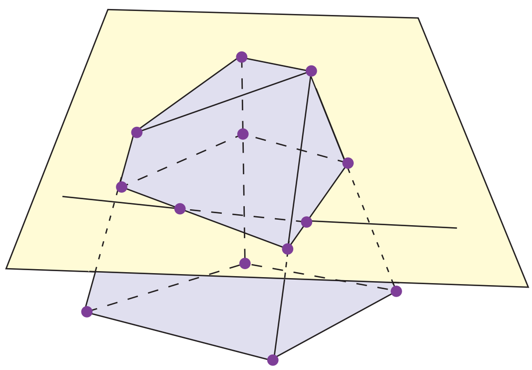
Poliedro convexo é aquele que se situa totalmente em um dos semiespaços definidos pelos planos de cada face.

Em um **poliedro convexo**:

i) todas as faces são polígonos convexos;

ii) todas as secções planas são polígonos convexos;

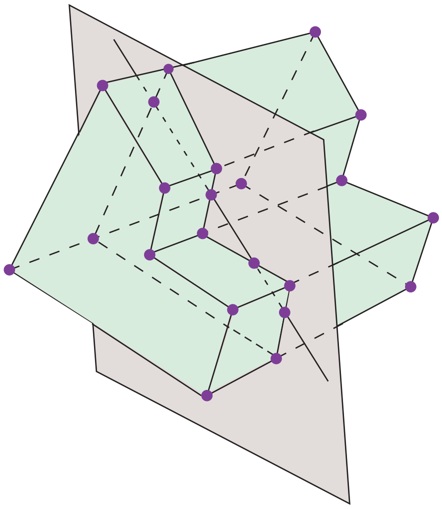
iii) toda reta secante ao poliedro possui dois pontos na superfície do poliedro.



Em um **poliedro não convexo**:

i) alguma secção plana é não convexa;

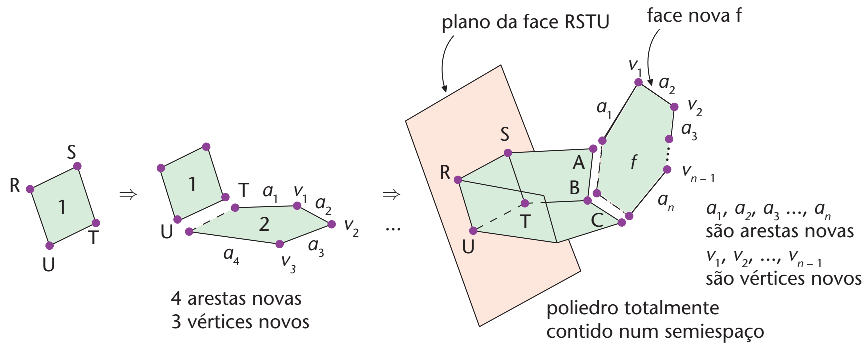
ii) alguma reta secante tem mais de dois pontos na superfície do poliedro.



11.2 – Teorema de Euler

Para montar um poliedro convexo, partimos de um polígono convexo RSTU, por exemplo, e juntamos sucessivamente polígonos convexos às arestas existentes ($\overline{UT}$, por exemplo) fazendo-as coincidir. Surgem, então, arestas novas e vértices novos.

Quando se adiciona uma face nova a uma superfície poliédrica aberta de faces convexas, o número de novas arestas excede em uma unidade o número de novos vértices.



Basta ver que o novo polígono (face nova) terá em comum arestas existentes ($\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, por exemplo) que não devem ser contadas. Assim, para cada grupo de n arestas novas haverá $n - 1$ vértices novos, cada um determinado por duas arestas novas consecutivas. Para as n arestas novas $a_1, a_2, ..., a_n$ haverá $n - 1$ vértices $v_1, v_2, ..., v_{n-1}$. Somente na primeira face o número de arestas é igual ao número de vértices. Para as faces seguintes, o número de arestas novas ($A = n$) é igual ao número de vértices novos ($V = n - 1$) mais 1.

$$A_f = V_F + 1$$

NOTA
Lema é uma proposição verdadeira que serve como pré-requisito para demonstrar um teorema.

Lema

Enquanto o poliedro não se fechar, a soma do número de vértices (V) com o número de faces (F) excede em uma unidade o número de arestas (A).

Demonstração:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Para a primeira face: } A_1 = V_1 \\ \text{Para a segunda face: } A_2 = V_2 + 1 \\ \text{Para a terceira face: } A_3 = V_3 + 1 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ \text{Para a F-ésima face: } A_F = V_F + 1 \end{array}\right\} \text{F igualdades}$$

Somando membro a membro essas F igualdades:

$A_1 + A_2 + ... + A_F = V_1 + V_2 + ... + V_F + (1 + 1 + ... + 1)$

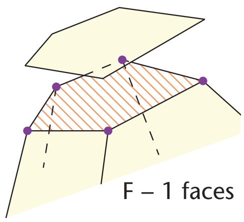
Fazendo: $A_1 + A_2 + ... + A_F = A$ (número total de arestas)

$V_1 + V_2 + ... + V_F = V$ (número total de vértices)

e levando em conta que $1 + 1 + ... + 1 = F - 1$ porque existem $F - 1$ parcelas iguais a 1, vem: $A = V + F - 1 \Rightarrow \boxed{V + F = A + 1}$

Teorema de Euler

Em todo poliedro convexo a soma do número de vértices com o número de faces excede em duas unidades o número de arestas.



Demonstração:

Consideremos um poliedro convexo com V vértices, F faces e A arestas.

Retiremos uma de suas faces para transformá-lo em uma superfície poliédrica aberta.

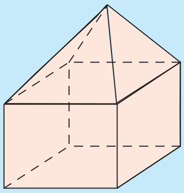
Admitamos que essa superfície tenha V' vértices, F' faces e A' arestas.

Nessa superfície o número de vértices será o mesmo que o do poliedro, V' = V, o número de arestas também será o mesmo, A' = A, mas o número de faces será uma unidade a menos que o do poliedro, pois uma face foi retirada, F' = F – 1. Como na superfície poliédrica aberta V' + F' = A' + 1 (como mostrado no lema anterior), substituindo V' = V, A' = A e F' = F – 1, vem:

$$V + F - 1 = A + 1 \Rightarrow \boxed{V + F = A + 2}$$

Exemplo:

No poliedro ao lado, V = 9, A = 16, F = 9.
Verificando: V + F = 9 + 9 = 18
A + 2 = 16 + 2 = 18



Exercícios resolvidos:

1) Em um poliedro convexo, o número de faces é 8 e são 12 os seus vértices. Determine o número de arestas.

Solução:

Pelo teorema de Euler, temos: A + 2 = F + V. Como F = 8 e V = 12, vem:
A + 2 = 8 + 12 ⇒ A = 20 – 2 = 18.
Resposta: Assim, o poliedro tem 18 arestas.

2) Um poliedro convexo possui 6 faces e o número de vértices excede em dois o número de faces. Determine o número de arestas.

Solução:

Pelo teorema de Euler, temos:
A + 2 = F + V
$A + 2 = 6 + 6 + 2 \Rightarrow A + \cancel{2} = 12 + \cancel{2} \Rightarrow A = 12$
Resposta: O poliedro tem 12 arestas.

11.3 – Relações entre os elementos de um poliedro

11.3.1 – Soma dos ângulos internos de todas as faces

Suponhamos que a primeira face tenha n_1 lados, a segunda n_2 lados etc., a última n_F lados. Como sabemos da Geometria Plana, as somas das medidas dos ângulos internos respectivos são:

$$S_1 = 180°(n_1 - 2);\ S_2 = 180°(n_2 - 2);\ \ldots;\ S_F = 180°(n_F - 2)$$

Somando membro a membro essas igualdades:

$$S_i = S_1 + S_2 + \ldots + S_F = 180°(n_1 - 2) + 180°(n_2 - 2) + \ldots + 180°(n_F - 2)$$

Como essa soma tem F parcelas, temos:

$$S_i = 180°[(n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_F) - 2F]$$

Levando em conta que $n_1 + n_2 + \ldots + n_F = 2A$, pois cada aresta foi contada duas vezes (uma vez em cada face que a contém), vem:

$$S_i = 180°(2A - 2F) \Rightarrow \boxed{S_i = 360°(A - F)}$$

Por outro lado, $V + F = A + 2 \Rightarrow A - F = V - 2$, logo:

$$\boxed{S_i = 360°(V - 2)}$$

11.3.2 – Soma dos ângulos externos de todas as faces

Sabemos da Geometria Plana que a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo é 360°, então a soma das medidas dos ângulos externos de todas as faces será:

$$\boxed{S_e = 360° \cdot F}$$

11.3.3 – Número de diagonais

Da Análise Combinatória temos que o número de segmentos que se podem formar com V vértices de um poliedro é: $C_V^2 = \dfrac{V(V-1)}{2}$.

Retirando desse total as arestas A e também as diagonais das faces, teremos o total D de diagonais do poliedro.

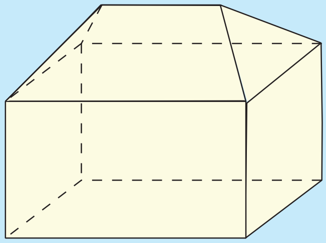
NOTA
O número de diagonais de um polígono com n vértices é dado por $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

$$\boxed{D = \frac{V(V-1)}{2} - A - d}$$

em que d é o número total de diagonais das faces. Esse total de diagonais de faces dependerá da forma de cada face do poliedro.

Exemplo:

$V = 10 \qquad A = 17 \qquad F = 9$



A soma das medidas dos ângulos internos das faces é: $S_i = 360°(V - 2) \Rightarrow S_i = 360°(10 - 2) = 2\,880°$

A soma das medidas dos ângulos externos é:

$S_e = 360° \cdot F \Rightarrow S_e = 360° \cdot 9 = 3\,240°$

O total de diagonais é:

$$D = \frac{10 \cdot (10 - 1)}{2} - 17 - (7 \cdot 2 + 2 \cdot 0) \Rightarrow D = 45 - 17 - 14 \Rightarrow D = 14$$

NOTA
Este poliedro é formado por 7 quadriláteros e 2 triângulos.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 (PUC-RJ) A soma das medidas dos ângulos das faces de um poliedro convexo é 1 140°. Se o poliedro tiver 10 arestas, quantas faces terá?

2 Quantas diagonais existem:

a) num tetraedro?

b) num octaedro?

c) num cubo?

3 (UFSCar-SP) Um poliedro convexo tem 8 faces. O número de arestas de uma certa face (denotada por K) é igual a $\frac{1}{6}$ do número de arestas do poliedro, enquanto a soma dos ângulos das faces restantes é 30. A face K é um:

(A) triângulo.

(B) quadrilátero.

(C) pentágono.

(D) hexágono.

(E) heptágono.

4 Um poliedro convexo tem 12 faces pentagonais e um total de 30 arestas. Determine:

a) o número de vértices;

b) o total de diagonais das faces;

c) a soma das medidas dos ângulos das faces;

d) o número de diagonais distintas desse poliedro.

5 Num poliedro convexo, o número de vértices é 10 e o número de arestas é 15. Então, o número de faces é:

(A) 23

(B) 5

(C) 25

(D) 6

(E) 7

11.3.4 – Relação entre faces e arestas

Seja um poliedro convexo com A arestas. Suponhamos que ele seja constituído de F_3 faces triangulares, F_4 faces quadrangulares, F_5 faces pentagonais, ..., F_n faces n-agonais. Como F é o total de faces do poliedro, temos:

$$F_3 + F_4 + F_5 + ... + F_n = F$$

NOTA
Quando não houver faces de determinado gênero n (número de lados), então $F_n = 0$.

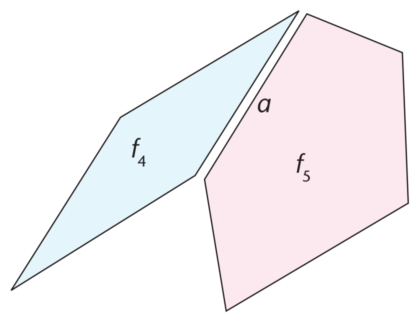
Como as faces triangulares têm 3 lados, as quadrangulares 4 lados, e assim sucessivamente, disporíamos para formar todas as arestas do poliedro $3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ... + nF_n$ lados.

Entretanto, cada aresta é formada por dois lados, um de cada face que a gera, então, o total acima representa o dobro de arestas do poliedro, logo:

$$3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ... + nF_n = 2A$$

NOTA
Como cada face contém 3 arestas ou mais, $2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ... + nF_n \geq 3F_3 + 3F_4 + 3F_5 + ... + 3F_n \geq 3(F_3 + F_4 + F_5 + ... + F_n) = 3F$

$\boxed{2A \geq 3F}$



11.3.5 – Relação entre vértices e arestas

Suponhamos que V_3, V_4, V_5, ..., V_n sejam os números de vértices para os quais convergem 3, 4, 5, ..., n arestas do poliedro.

O total de vértices será:

$$V_3 + V_4 + V_5 + ... + V_n = V$$

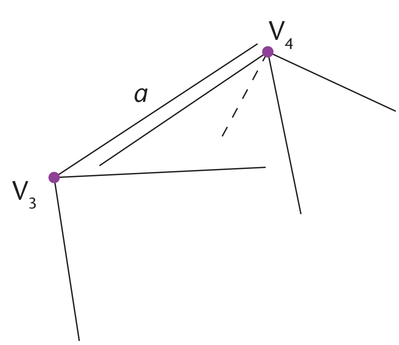
NOTA
Quando não houver vértice com n arestas nele concorrentes, $V_n = 0$.

Como V_3 contribui com 3 arestas, V_4 com 4 arestas, ..., V_n com n arestas, e levando em conta que cada aresta é definida por dois vértices, temos:

$$3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + ... + nV_n = 2A$$

NOTA
Como em cada vértice concorrem 3 ou mais arestas, $2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + ... + nV_n \geq 3V_3 + 3V_4 + 3V_5 + ... + 3V_n \geq 3(V_3 + V_4 + V_5 + ... + V_n) = 3V$

$\boxed{2A \geq 3V}$



Resumindo:

$F_3 + F_4 + F_5 + ... + F_n = F$ $\qquad$ $V_3 + V_4 + V_5 + ... + V_n = V$

$3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ... + nF_n = 2A$ $\qquad$ $3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + ... + nV_n = 2A$

$V + F = A + 2$

$3F \leq 2A \geq 3V$

Exemplos:

i) (Mack-SP) Determine o número de vértices de um poliedro que tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma pentagonal e duas hexagonais.

O poliedro possui 3 faces triangulares, isto é, $F_3 = 3$, uma quadrangular, isto é, $F_4 = 1$, uma pentagonal, isto é, $F_5 = 1$, e duas hexagonais, isto é, $F_6 = 2$. Logo, o número de faces é: $F = 3 + 1 + 1 + 2 = 7$.

Nas arestas, temos: $A = \dfrac{3 \cdot F_3 + 4 \cdot F_4 + 5 \cdot F_5 + 6 \cdot F_6}{2}$

$A = \dfrac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2}{2} = \dfrac{30}{2} = 15$

Pelo teorema de Euler: $A + 2 = F + V$

$15 + 2 = 7 + V \Rightarrow V = 17 - 7 = 10$

Assim, o poliedro tem 10 vértices.

NOTA
Dois lados de polígonos se fundem formando uma aresta.

ii) (UnB-DF) Qual o número de lados das faces de um poliedro regular com 20 vértices e 30 arestas?

$V = 20$ e $A = 30 \Rightarrow A + 2 = F + V \Rightarrow 30 + 2 = F + 20 \Rightarrow F = 12$

$F_x = 12 \Rightarrow \dfrac{x \cdot 12}{2} = 30 \Rightarrow 6x = 30 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow F_5 = 12$ (12 faces pentagonais)

Portanto, são 5 os lados de cada face desse poliedro.

Exercícios resolvidos:

1) Num poliedro convexo só há faces triangulares e hexagonais, num total de 18 faces e 30 arestas. Calcule:

a) a quantidade de vértices;

b) a quantidade de faces triangulares;

c) a soma das medidas dos ângulos das faces desse poliedro.

Solução:

a) $V + F = A + 2 \Rightarrow V = A + 2 - F = 30 + 2 - 18 = 14$

b) x faces triangulares; $(18 - x)$ faces hexagonais

$$A = \frac{3x + (18 - x)}{2} \Rightarrow 30 = \frac{3x + 108 - 6x}{2} \Rightarrow x = 16$$

c) Há 16 faces triangulares e 2 hexagonais. A soma das medidas dos ângulos das faces é:

$$16 \cdot 180° + 2 \cdot (6 - 2) \cdot 180° = 4\,320°$$

2) Num poliedro convexo de 14 faces, que são triângulos e octógonos, todos os ângulos poliédricos são triedros. Calcule a quantidade de faces de cada tipo.

Solução:

$F = 14$, sendo x triângulos e $(14 - x)$ octógonos $\Rightarrow A = \dfrac{3x + 8(14 - x)}{2}$

ângulos triédricos $\Rightarrow A = \dfrac{3V}{2}$

$$\begin{cases} 2A = 3V \\ A + 2 = V + 14 \end{cases} \Rightarrow A = 36 \text{ e } V = 24$$

$$\frac{3x + 8(14 - x)}{2} = 36 \Rightarrow x = 8$$

Resposta: 8 triângulos e 6 octógonos.

3) Num poliedro convexo, há faces quadrangulares e pentagonais e os ângulos são triédricos e tetraédricos. Se o poliedro tem 19 vértices e 30 arestas, quantas são as faces de cada tipo? Quantos são os ângulos de cada tipo?

Solução:

$$\left.\begin{array}{l} V = 19 \\ A = 30 \\ V + F = A + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow F = 13$$

Sendo x faces quadrangulares e $(13 - x)$ pentagonais, temos:

$$A = \frac{4x + 5(13 - x)}{2} \Rightarrow 4x + 65 - 5x = 60 \Rightarrow x = 5$$

Sendo y ângulos triédricos e $(19 - y)$ tetraédricos, temos:

$$A = \frac{3y + 4(19 - y)}{2} \Rightarrow 3y + 76 - 4y = 60 \Rightarrow y = 16$$

Resposta: 5 faces quadrangulares e 8 pentagonais; 16 ângulos triédricos e 3 tetraédricos.

4) (Fuvest-SP) O ponto P é vértice de um poliedro e pertence a k faces. Cada face tem n lados. Determine o número de segmentos contidos nas faces e que unem P a um outro vértice qualquer do poliedro.

Solução:

Se $P \in k$ faces, então de P partem k arestas.
Cada face tem n lados, então, em cada face, partem de P exatamente $(n - 3)$ diagonais de faces. Nas k faces, partem de P o total de $k(n - 3)$ diagonais de faces.

Portanto, o total de segmentos contidos nas faces que unem P a outro vértice qualquer é:

$$k + k(n - 3) = k\,[1 + (n - 3)] = k(n - 2)$$

Resposta: $k(n - 2)$ segmentos

5) Um poliedro possui quatro faces pentagonais e duas quadrangulares. Determine o número de arestas e o número de vértices do poliedro.

Solução:

Temos $F_5 = 4$ e $F_4 = 2$, um total de 6 faces, logo, o número de arestas é:

$$A = \frac{4 \cdot 5 + 2 \cdot 4}{2} = \frac{20 + 8}{2} = \frac{28}{2} = 14 \Rightarrow A = 14$$

Pelo teorema de Euler, $A + 2 = F + V$, temos:

$$14 + 2 = 6 + V \Rightarrow V = 16 - 6 = 10 \Rightarrow V = 10$$

Resposta: 14 arestas e 10 vértices.

6) Um poliedro convexo contém faces triangulares, quadrangulares e pentagonais, num total de 13 faces e 30 arestas. Mostre que esse poliedro só pode ter 1 ou 2 faces triangulares.

Solução:

x faces triangulares, y quadrangulares e z pentagonais
$F = 13 \Rightarrow x + y + z = 13$
$A = 30 \Rightarrow 3x + 4y + 5z = 60$

$$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ 3x + 4y + 5z = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 13 \\ 3x + 3y + 3z + y + 2z = 60 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 13 \\ 3(x + y + z) + y + 2z = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 13 \\ 3 \cdot 13 + y + 2z = 60 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 13 \Rightarrow x + 21 - 2z + z = 13 \Rightarrow x - z = -8 \Rightarrow z = x + 8 \\ y = 21 - 2z \Rightarrow y = 21 - 2(x + 8) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ z = x + 8 \end{cases}$$

Para $x = 1$, temos $y = 3$ e $z = 9$.
Para $x = 2$, temos $y = 1$ e $z = 10$.

Para $x \geq 3$, temos $y < 0$, o que não convém. Portanto, só podemos ter $x = 1$ ou $x = 2$, ou seja, 1 ou 2 faces triangulares.

7) Num poliedro convexo, as 20 faces são triângulos equiláteros e todos os ângulos poliédricos possuem a mesma quantidade de arestas. Calcule a soma das medidas dos ângulos das faces de um dos ângulos poliédricos.

Solução:
F = 20

$$A = \frac{20 \cdot 3}{2} = 30$$

V = A + 2 – F = 30 + 2 – 20 = 12
Se cada ângulo poliédrico tem n arestas, então:

$$A = \frac{nV}{2} \Rightarrow n = \frac{2A}{V} = \frac{2 \cdot 30}{12} = 5$$

As faces de um ângulo poliédrico medem cada uma 60°; logo, a soma delas é $5 \cdot 60° = 300°$.
Resposta: 300°

8) Num poliedro convexo, a soma das medidas dos ângulos das faces é 6480°. Só há faces quadrangulares e pentagonais, que possuem um total de 40 diagonais. Determine a quantidade de vértices, arestas e faces desse poliedro.

Solução:
$S_i = (V - 2) \cdot 360° = 6480° \Rightarrow V = 20$
x faces quadrangulares $\Rightarrow 2x$ diagonais de faces
y faces pentagonais $\Rightarrow 5y$ diagonais de faces

$$\begin{cases} 2x + 5y = 40 \\ x + y = F \\ A + 2 = 20 + F \\ A = \dfrac{4x + 5y}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 15,\ y = 2,\ A = 35 \text{ e } F = 17$$

Resposta: 20 vértices, 35 arestas e 17 faces.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 (PUC-SP) O número de vértices de um poliedro convexo que possui 12 faces triangulares é:

(A) 4
(B) 12
(C) 10
(D) 6
(E) 8

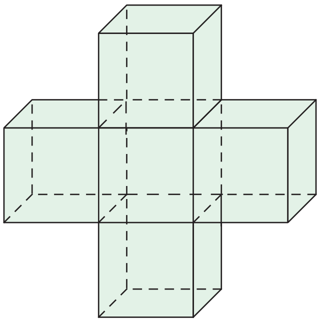
2 Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces.

3 (Fatec-SP) Um poliedro convexo tem 3 faces com 4 lados, 2 faces com 3 lados e 4 faces com 5 lados. Calcule o número de vértices desse poliedro.

4 Um poliedro convexo tem 15 faces, de dois de seus vértices partem 5 arestas, de 4 outros partem 4 arestas e dos restantes partem 3 arestas. Determine o número de arestas do poliedro.

5 Um poliedro convexo com 11 vértices tem o número de faces triangulares igual ao número de faces quadrangulares e 1 face pentagonal. Calcule o número de faces desse poliedro.

6 Considere a estrutura da figura abaixo como um poliedro não convexo, de faces quadradas formadas por 4 cubos de arestas iguais, sendo V o número de vértices distintos, F o número de faces distintas a A o número de arestas distintas.



Se V, F e A são, respectivamente, os números de vértices, faces e arestas desse poliedro, temos que V + F é igual a (Cuidado, não vale o teorema de Euler.):

(A) A – 4
(B) A + 4
(C) A – 2
(D) A + 2
(E) A

7 Num poliedro convexo, o número de arestas é 16 e o número de faces é 9. Determine o número de vértices.

8 Determine o número de vértices de um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 pentagonal e 2 hexagonais.

9 Um poliedro convexo tem 5 faces quadrangulares e 2 faces pentagonais. Determine o número de arestas e o número de vértices.

10 Calcule o número de faces quadrangulares e triangulares de um poliedro com 20 arestas e 10 vértices.

11.4 – Poliedros regulares

DEFINIÇÃO
Poliedro regular.

Poliedro regular é o poliedro cujas faces são congruentes, assim como são congruentes seus ângulos sólidos.

Assim sendo, todas as faces têm o mesmo número de lados e todos os ângulos sólidos têm o mesmo número de arestas.

11.4.1 – Teorema dos poliedros de Platão

Existem apenas cinco poliedros convexos regulares.

Demonstração:

Suponhamos que cada face tenha n lados e cada vértice tenha p arestas.

Devemos ter:

$$\begin{cases} nF = 2A \\ pV = 2A \end{cases} \Rightarrow nF = pV = 2A \text{ e } V + F = A + 2$$

Tirando V e F em função de A: $V = \dfrac{2A}{p}$; $F = \dfrac{2A}{n}$

e substituindo na relação de Euler:

$$\frac{2A}{p} + \frac{2A}{n} = A + 2 \Rightarrow A = \frac{2np}{2(p+n) - np}$$

Como A deve ser inteiro e positivo, devemos ter, para começar:

$2(p + n) - np > 0 \Rightarrow 2p + 2n > np \Rightarrow n(p - 2) < 2p \Rightarrow$

$$\Rightarrow n < \frac{2p}{p-2} \Rightarrow n < \frac{2p - 4 + 4}{p-2} \Rightarrow n < \frac{2(p-2) + 4}{p-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n < \frac{2(p-2)}{p-2} + \frac{4}{p-2} \Rightarrow \boxed{n < 2 + \frac{4}{p-2}}$$

Vamos estudar essa relação.

Como $n > 2$, $p - 2 > 0 \Rightarrow p > 2$. Num poliedro, o número de arestas que chega em um mesmo vértice deve ser maior que 2 (vértice triédrico ou poliédrico).

Por outro lado, como o número de lados de uma face não pode ser menor que 3 (triângulos),

$$2 + \frac{4}{p-2} > n \geq 3 \Rightarrow p < 6.$$

Então: $3 \leq p < 6$, isto é, $p \in \{3, 4, 5\}$.

1ª hipótese

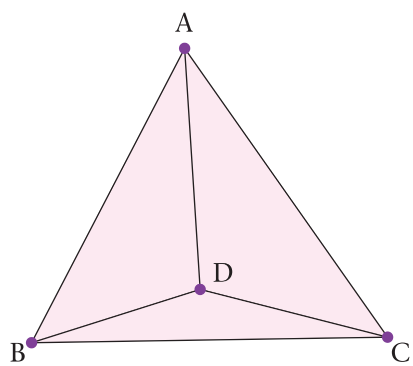
$p = 3 \Rightarrow n < 2 + \dfrac{4}{3-2} \Rightarrow n < 6 \Rightarrow n \in \{3, 4, 5\}$

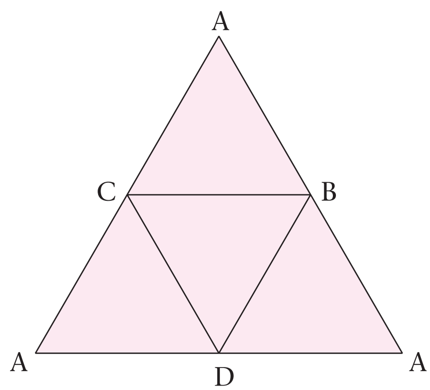
Façamos, então:

i) $\boxed{p = 3}$ e $\boxed{n = 3}$

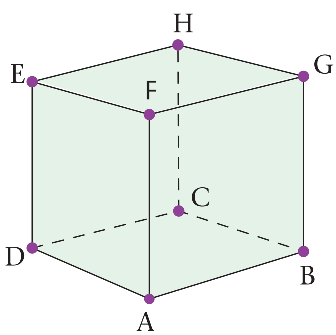
Substituindo em A, F e V obtemos:

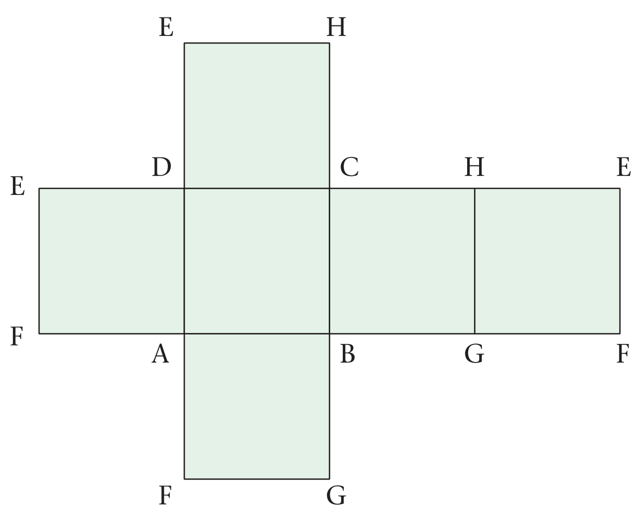
F = 4, V = 4 e A = 6. Temos o **tetraedro** com 4 faces triangulares.





ii) $\boxed{p = 3}$ e $\boxed{n = 4} \Rightarrow$ F = 6, V = 8 e A = 12. Temos o **hexaedro** ou **cubo** com 6 faces quadradas.

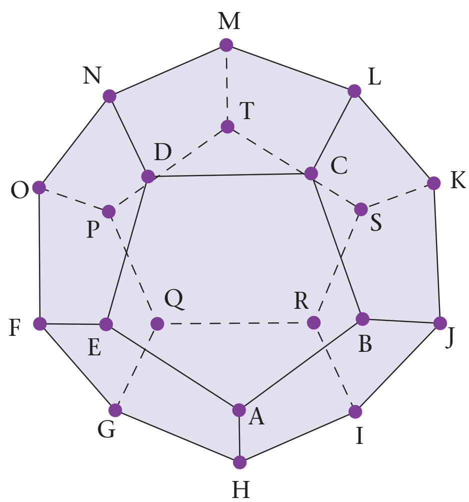


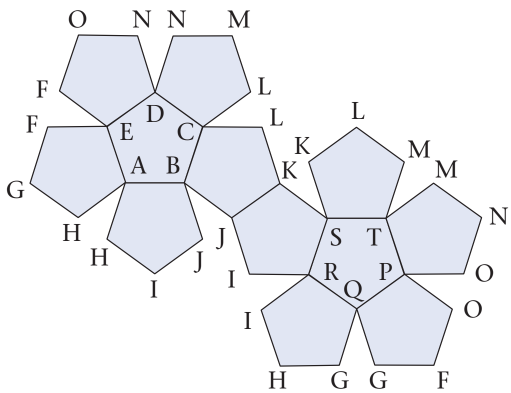


iii) $\boxed{p = 3}$ e $\boxed{n = 5} \Rightarrow$ F = 12, V = 20 e A = 30

O poliedro é formado por 12 faces pentagonais.

Temos o **dodecaedro**.





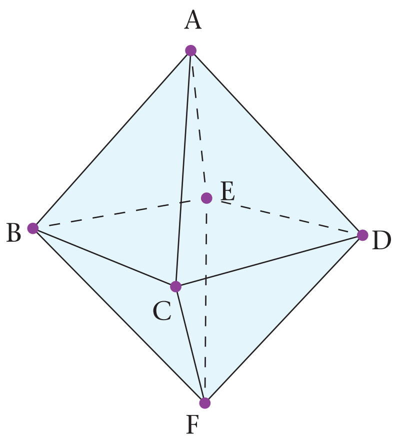
<u>2ª hipótese</u>

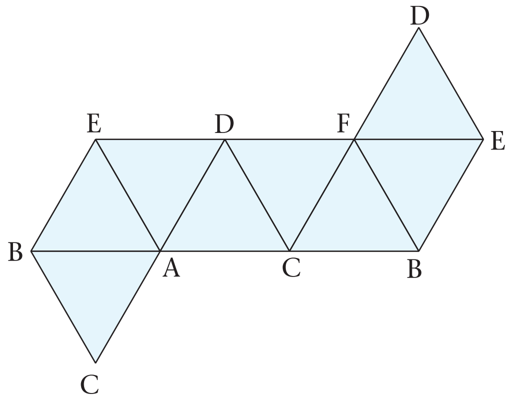
$\boxed{p = 4} \Rightarrow n < 2 + \dfrac{4}{4-2} \Rightarrow n < 4 \Rightarrow \boxed{n = 3}$, logo:

F = 8, V = 6 e A = 12

O poliedro é formado por 8 faces triangulares.

Temos o **octaedro**.





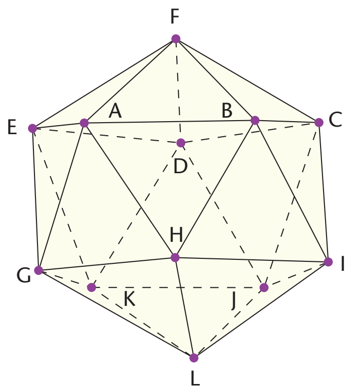
<u>3ª hipótese</u>

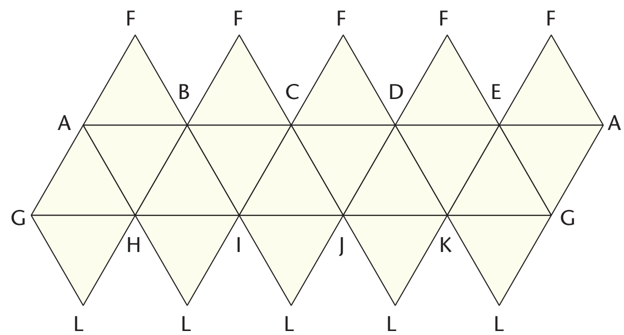
$\boxed{p = 5} \Rightarrow n < 2 + \dfrac{4}{3} \Rightarrow n < \dfrac{10}{3} \Rightarrow \boxed{n = 3}$, logo:

F = 20, V = 12 e A = 30

O poliedro é formado por 20 faces triangulares.

Temos o **icosaedro**.





11.4.2 – Poliedros conjugados

DEFINIÇÃO
Poliedros conjugados.

Todo poliedro convexo admite um correspondente tal que o número de faces de um deles é igual ao número de vértices do outro e reciprocamente. Tais poliedros são chamados **conjugados**.

Sejam V, F e A os números de vértices, faces e arestas de um poliedro e V', F' e A' os números de vértices, faces e arestas, respectivamente, do seu conjugado.

Temos que $V = F'$ e $F = V'$.

Como $V + F = V' + F' \Rightarrow A + 2 = A' + 2 \Rightarrow A = A'$

Dois poliedros conjugados têm o mesmo número de arestas.

A tabela abaixo resume os dados obtidos nesta seção.

Faces	F	V	A	Poliedro	Conjugado
Triangulares	4	4	6	TETRAEDRO	TETRAEDRO
	8	6	12	OCTAEDRO	CUBO
	20	12	30	ICOSAEDRO	DODECAEDRO
Quadradas	6	8	12	HEXAEDRO ou CUBO	OCTAEDRO
Pentagonais	12	20	30	DODECAEDRO	ICOSAEDRO

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Qual é o poliedro regular que tem 12 vértices e 30 arestas?

2 Determine o número de arestas e vértices de um dodecaedro.

3 De um octaedro regular retiram-se 3 faces adjacentes que possuem um vértice comum. Calcule o número de faces, de vértices e de arestas da superfície poliédrica que resta.

4 Em quais poliedros regulares os ângulos poliédricos são triedros?

5 A medida da aresta de um icosaedro regular é 6 cm. Determine a área total do icosaedro e a soma das medidas de todas as arestas.

6 (PUC-RJ) Um poliedro possui 5 faces quadrangulares e 10 faces triangulares. Calcular a soma dos ângulos internos das faces.

7 (Cesgranrio-RJ) A soma dos ângulos retos de todas as faces de um poliedro convexo é 32. Esse poliedro só tem faces triangulares e pentagonais. Sabendo que o número de arestas é 20, calcule o número de faces de cada tipo.

8 (FEI-SP) Um poliedro convexo com faces quadrangulares e pentagonais tem 15 arestas. Calcule o número de faces quadrangulares e o número de faces pentagonais, sabendo-se que a soma de todos os ângulos dos polígonos das faces é 32 ângulos retos.

9 Um poliedro convexo tem faces triangulares e faces quadrangulares. Se ele tem 25 arestas e a soma das medidas dos ângulos de todas as faces é 3 600°, quantas são as faces de cada tipo?

10 O tetraedro regular ABCD tem centro O. O ângulo diedro de faces OAB e OAC mede:

(A) 30°
(B) 60°
(C) 120°
(D) 135°
(E) 150°

11 A soma das faces dos triedros de um tetraedro:

(A) pode ter qualquer valor positivo.
(B) varia entre 120° e 1530°.
(C) varia entre 0° e 1 440°.
(D) vale sempre 720°.
(E) Nenhuma das anteriores.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 Um poliedro convexo P possui 7 654 faces, todas triangulares. Entre as cinco afirmações abaixo, exatamente uma é correta. Assinale-a.

(A) P tem 11 482 arestas.

(B) Tal poliedro não pode existir.

(C) Cada vértice de P pertence exatamente a duas faces.

(D) P tem 3 829 vértices.

(E) As arestas de P têm todas o mesmo comprimento.

2 (PUC-RJ) Um poliedro convexo tem cinco faces quadrangulares e duas pentagonais. Então, o número de faces n_f, o número de arestas n_a e o número de vértices n_v do poliedro são:

(A) $n_f = 7$ $n_a = 10$ $n_v = 12$

(B) $n_f = 5$ $n_a = 9$ $n_v = 12$

(C) $n_f = 7$ $n_a = 6$ $n_v = 10$

(D) $n_f = 5$ $n_a = 9$ $n_v = 12$

(E) $n_f = 7$ $n_a = 10$ $n_v = 15$

3 (Mack-SP) Sabe-se que um poliedro convexo tem 8 faces e que o número de vértices é maior que 6 e menor que 14. Então, o número A de arestas é tal que:

(A) $14 \leq A \leq 20$

(B) $14 < A < 20$

(C) $13 < A < 19$

(D) $13 \leq A \leq 19$

(E) $17 \leq A \leq 20$

4 (Cesgranrio-RJ) Um poliedro convexo é formado por 80 faces triangulares e 12 pentagonais. O número de vértices do poliedro é:

(A) 80
(B) 60
(C) 50
(D) 48
(E) 36

5 A soma das medidas e dos ângulos das faces de um poliedro convexo é 5 760° e as faces são apenas triângulos e heptágonos. Quantas são as faces heptagonais, sabendo que há um total de 28 arestas no poliedro?

(A) 2
(B) 3
(C) 5
(D) 7
(E) 8

6 São dados dois poliedros convexos e fechados P_1 e P_2, cujos números de faces, vértices e arestas serão representados respectivamente por F_1, V_1, A_1 e F_2, V_2, A_2. Sabe-se que os números 4, V_1, V_2, A_1, A_2, 14 estão em progressão aritmética. Quais serão os valores corretos de F_1 e F_2?

(A) $F_1 = 6$, $F_2 = 6$
(B) $F_1 = 6$, $F_2 = 8$
(C) $F_1 = 8$, $F_2 = 6$
(D) $F_1 = 6$, $F_2 = 10$
(E) $F_1 = 8$, $F_2 = 8$

7 Quantas faces tem o poliedro convexo que possui 12 vértices triedros, um vértice tetraédrico e dois vértices pentaédricos?

8 Um poliedro convexo tem 15 faces quadrangulares e 2 pentagonais. Determine o número de faces, o número de arestas, o número de vértices, a soma das medidas dos ângulos das faces e o número de diagonais desse poliedro.

9 (PUC-RJ) Qual das proposições abaixo é FALSA?

(A) Os poliedros regulares são somente cinco.

(B) Todo poliedro regular admite um e um só ponto equidistante de seus vértices.

(C) Para todo poliedro convexo ou para toda superfície limitada convexa fechada, vale a relação: $V - A + F = 1$, onde V = nº de vértices; A = nº de arestas; F = nº de faces.

(D) A soma dos ângulos das faces de uma superfície poliédrica convexa limitada fechada é igual a $(V - 2) \cdot 4$ retos.

(E) Num ângulo poliedro convexo, qualquer face é menor que a soma das demais.

10 (ITA-SP) Numa superfície poliédrica convexa aberta, o número de faces é 6 e o número de vértices é 8. Então, o número de arestas é:

(A) 8
(B) 11
(C) 12
(D) 13
(E) 14

11 (Unirio-RJ) Um poliedro convexo tem 14 vértices. Em 6 desses vértices concorrem 4 arestas, em 4 desses vértices concorrem 3 arestas e, nos demais vértices, concorrem 5 arestas. O número de faces desse poliedro é igual a:

(A) 16
(B) 18
(C) 24
(D) 30
(E) 44

12 (Unirio-RJ) Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro, que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares. O número de vértices desse cristal é igual a:

(A) 35 (C) 33 (E) 31

(B) 34 (D) 32

13 (Unirio-RJ) Considere o poliedro regular, de faces triangulares, que não possui diagonais. A soma dos ângulos das faces desse poliedro vale, em graus:

(A) 180 (C) 540 (E) 900

(B) 360 (D) 720

14 (PUC-SP) O poliedro regular que possui 20 vértices, 30 arestas e 12 faces denomina-se:

(A) tetraedro (D) dodecaedro

(B) icosaedro (E) octaedro

(C) hexaedro

15 (Mack-SP) Seja V o vértice de uma pirâmide. Cada uma de suas faces tem no vértice V um ângulo de 50°. O número máximo de faces dessa pirâmide é:

(A) 5 (C) 7 (E) 9

(B) 6 (D) 8

16 Um poliedro convexo é formado por 4 faces triangulares, 2 faces quadrangulares e 1 face hexagonal. O número de vértices desse poliedro é de:

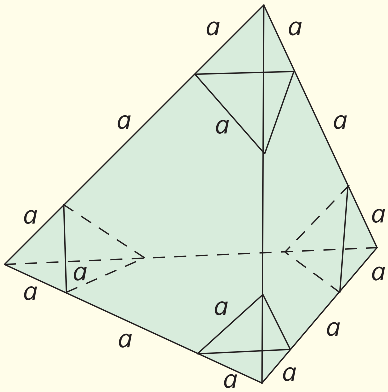
(A) 6 (C) 8 (E) 10

(B) 7 (D) 9

17 De cada uma das quatro pontas de um tetraedro regular de aresta $3a$ corta-se um tetraedro regular de aresta a.

a) Qual o número de vértices, faces e arestas do poliedro resultante?

b) Calcule a área total da superfície desse poliedro.



18 São dados um tetraedro e um plano no espaço. A intersecção dos dois será:

(A) um triângulo.

(B) ou um ponto, ou um segmento, ou um triângulo, ou vazio.

(C) ou um triângulo ou um quadrângulo.

(D) ou um ponto, ou um segmento, ou um triângulo, ou um quadrângulo.

(E) ou um ponto, ou um segmento, ou um triângulo, ou um quadrângulo, ou vazio.

19 (PUC-RJ) Num tetraedro regular ABCD, sendo M, N, P e Q pontos médios das arestas $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, então o quadrilátero (MNPQ) é:

(A) um losango.

(B) um quadrado.

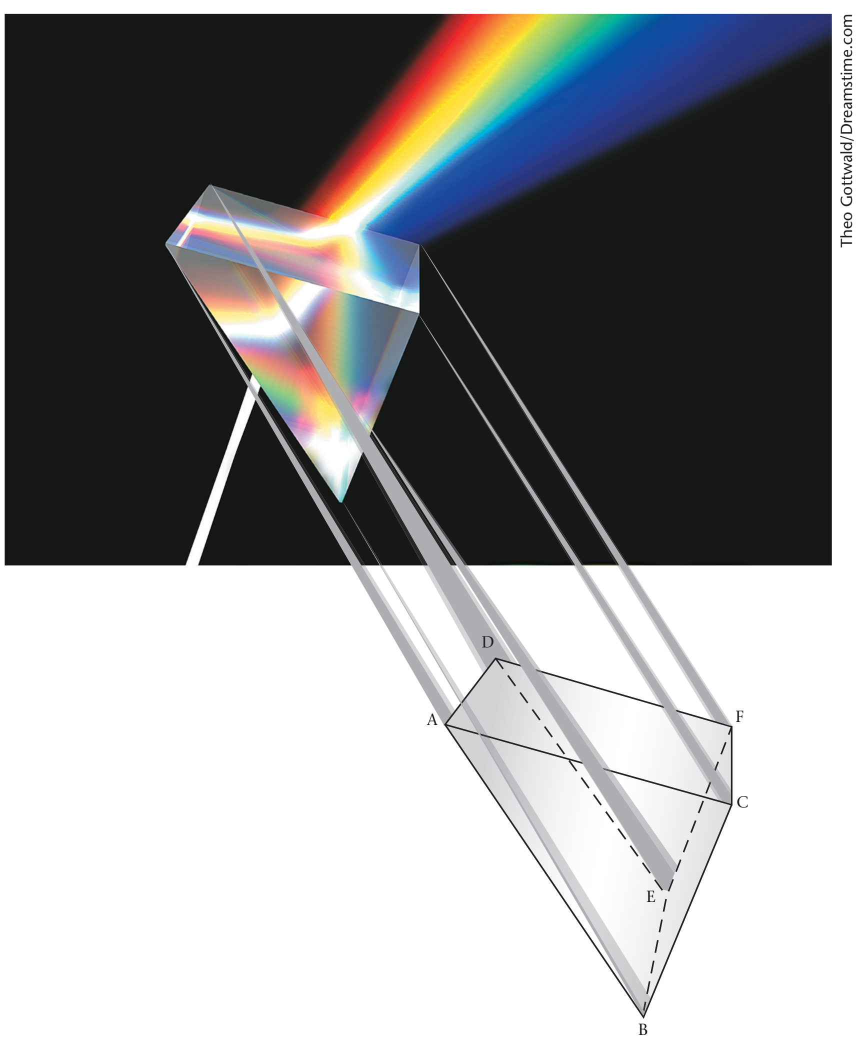
(C) um trapézio.

(D) um retângulo.

(E) um quadrilátero reverso.

CAPÍTULO XII

PRISMAS E CILINDROS



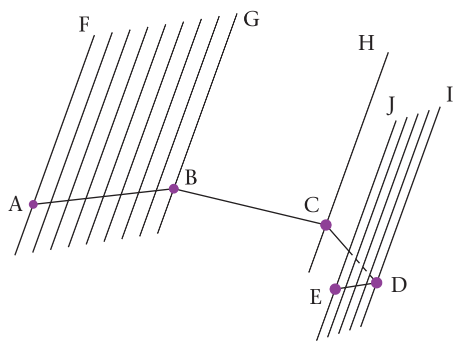
Tomando um polígono ou um círculo e deslizando-o paralelamente ao longo de um segmento fixo, obtém-se um sólido varrido por esta figura que é um prisma ou um cilindro.
Na imagem, um prisma transparente refrata um raio de luz branca, dividindo-a em várias componentes de cores distintas.

12 – PRISMAS E CILINDROS

12.1 – Prisma

DEFINIÇÃO
Superfície prismática.

Chama-se **superfície prismática** a superfície gerada por uma reta, que se desloca continuamente e paralelamente a si mesma apoiando-se nos lados de uma linha poligonal fixa.



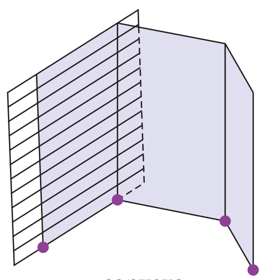
A reta que se desloca chama-se **geratriz** da superfície e a poligonal na qual se apoia chama-se **diretriz** da superfície.

Na figura, a poligonal ABCDE é a diretriz e as paralelas $\overleftrightarrow{AF}$, $\overleftrightarrow{BG}$, $\overleftrightarrow{CH}$, $\overleftrightarrow{DI}$ e $\overleftrightarrow{EJ}$ são as geratrizes. Existem infinitas geratrizes de uma superfície prismática.

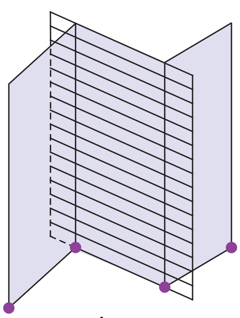
As geratrizes que passam pelos vértices da poligonal $\overleftrightarrow{AF}$, $\overleftrightarrow{BG}$, $\overleftrightarrow{CH}$, $\overleftrightarrow{DI}$ e $\overleftrightarrow{EJ}$ são chamadas **arestas** da superfície.

Chamam-se **faces** da superfície prismática as porções planas compreendidas entre duas arestas consecutivas. Cada porção plana se apoia num lado da poligonal diretriz. A superfície prismática é aberta quando a diretriz é uma poligonal aberta e fechada caso contrário.

Uma superfície prismática é **convexa** quando se situa totalmente no mesmo semiespaço definido por qualquer de suas faces. No caso contrário, ela é dita **côncava**.

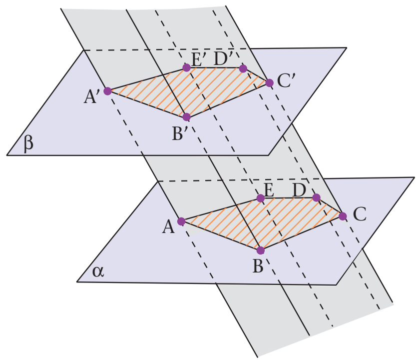


convexa



côncava

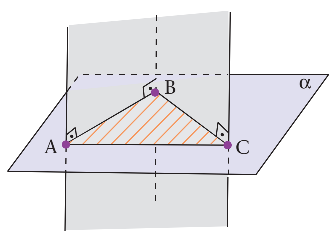
Secções planas numa superfície prismática por planos paralelos α e β são congruentes.



Os lados correspondentes $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são segmentos paralelos compreendidos entre paralelas e os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{A}'$, por exemplo, são ângulos de lados paralelos sendo, portanto, congruentes. Os polígonos ABCDE e A′B′C′D′E′ são congruentes.

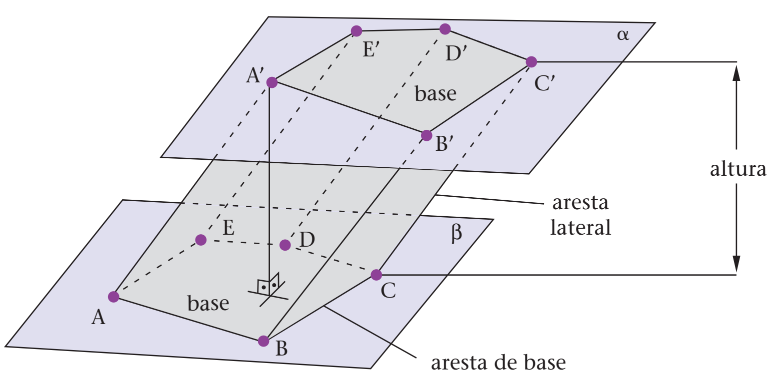
Chama-se **secção reta** de uma superfície prismática aquela que se obtém quando se secciona a superfície por um plano α perpendicular a todas as arestas. Todas as secções retas são congruentes.

OBSERVAÇÃO
A secção reta é a que tem o menor perímetro e a menor área.



Chama-se **prisma** todo poliedro limitado por uma superfície prismática fechada e por duas secções paralelas que intersectam todas as arestas.

DEFINIÇÃO
Prisma.

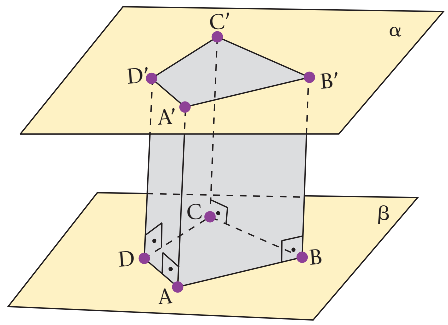


As secções paralelas são congruentes e são chamadas **bases do prisma**. Sobre as faces ficam determinados paralelogramos que são as **faces laterais**. Os segmentos compreendidos entre as bases sobre as arestas da superfície são as **arestas laterais** do prisma. Os lados das bases são as **arestas da base**. **Altura** do prisma é a distância entre as suas bases.

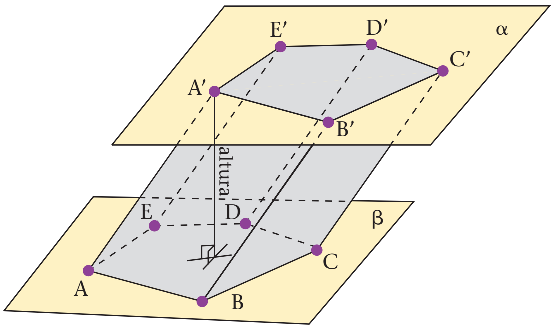
O prisma é, então, o poliedro limitado por dois polígonos paralelos e congruentes com faces paralelográmicas.

Um prisma é **reto** se suas arestas laterais são perpendiculares às bases e **oblíquo** quando são oblíquas às bases.

No prisma reto as faces são retângulos e a altura tem a mesma medida que as arestas laterais.



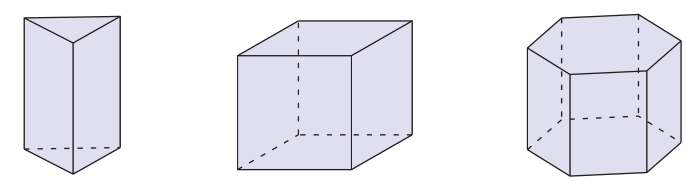
prisma reto



prisma oblíquo

DEFINIÇÃO
Prisma regular.

Prisma regular é o prisma reto cuja base é um polígono regular. Nesses prismas, as faces são retângulos.

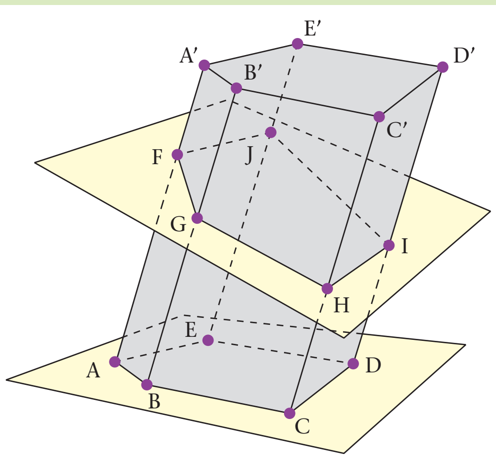


Os prismas são triangulares, quadrangulares, hexagonais conforme suas bases.

12.1.1 – Tronco de prisma

DEFINIÇÃO
Tronco de prisma.

Tronco de prisma é a figura compreendida entre uma das bases de um prisma e um plano não paralelo à mesma que intersecta todas as arestas laterais do prisma.



O plano secante divide o prisma em dois troncos ABCDEFGHIJ e FGHIJA'B'C'D'E' como indica a figura.

12.2 – Paralelepípedo

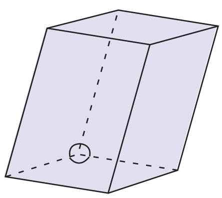
Paralelepípedo é todo prisma em que bases e faces são paralelogramos.

DEFINIÇÃO
Paralelepípedo.

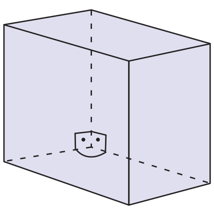
Paralelepípedo reto é o prisma reto em que as bases são paralelogramos.

Paralelepípedo retângulo é o paralelepípedo de base retangular.

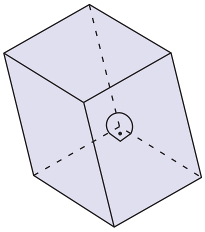
Paralelepípedo reto-retângulo é o paralelepípedo reto de base retangular. Este paralelepípedo é também chamado ortoedro ou ainda bloco retangular.



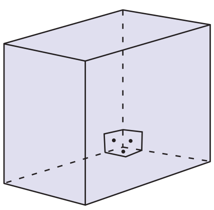
paralelepípedo



paralelepípedo reto



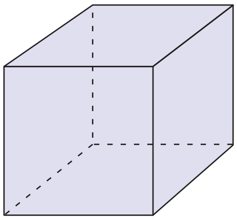
paralelepípedo retângulo



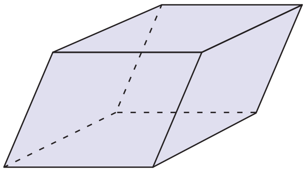
paralelepípedo reto-retângulo, ortoedro ou bloco retangular

No ortoedro todas as faces são retângulos. As medidas das arestas que concorrem no mesmo vértice são as três dimensões do bloco retangular. Quando essas dimensões são iguais temos o caso particular do **hexaedro regular** ou **cubo**.

O paralelepípedo em que bases e faces são losangos é chamado **romboedro**.



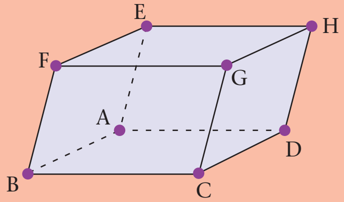
cubo
(6 quadrados)



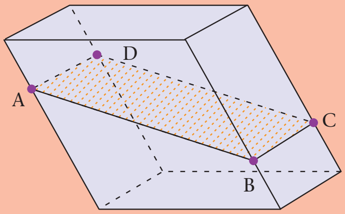
romboedro
(6 losangos)

Propriedades

1) As faces opostas de um paralelepípedo são congruentes e paralelas.

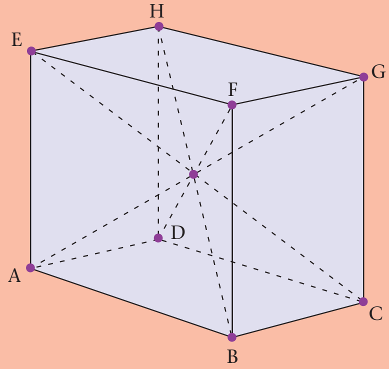


2) Toda secção plana produzida por um plano que intersecta quatro arestas paralelas é um paralelogramo.



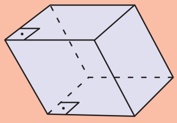
$\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são paralelas como intersecções de um plano com planos paralelos.

3) As diagonais de um paralelepípedo cortam-se ao meio, e o ponto comum é o seu centro de simetria.
No caso do paralelepípedo retângulo essas diagonais $\overline{AG}$, $\overline{BH}$, $\overline{CE}$ e $\overline{DF}$ são congruentes.

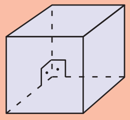


4) Os triedros formados pelas arestas que concorrem nos mesmos vértices de um paralelepípedo:

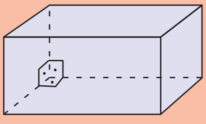
i) têm, no máximo, um ângulo reto se ele for oblíquo.



ii) têm, pelo menos, dois ângulos retos se for reto.



iii) têm três ângulos retos se for reto-retângulo, isto é, um bloco retangular.



12.3 – Propriedades métricas

12.3.1 – Áreas lateral e total de um prisma reto

Área lateral (S_L) de um prisma é a soma das áreas de todas as suas faces laterais.

Como as faces são retângulos, temos:

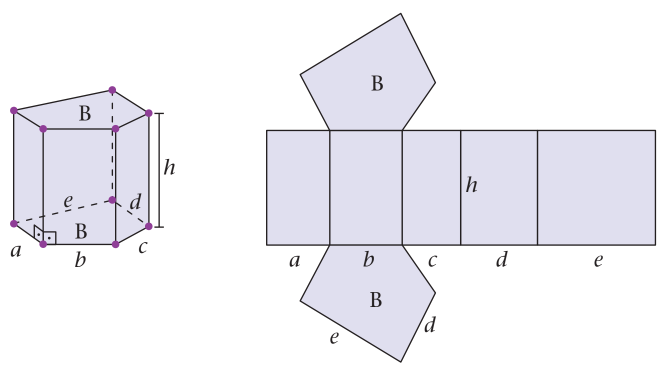
$S_L = ah + bh + ch + ...$

$S_L = (a + b + c + ...)h$

$$S_L = (\text{perímetro da base}) \cdot h$$

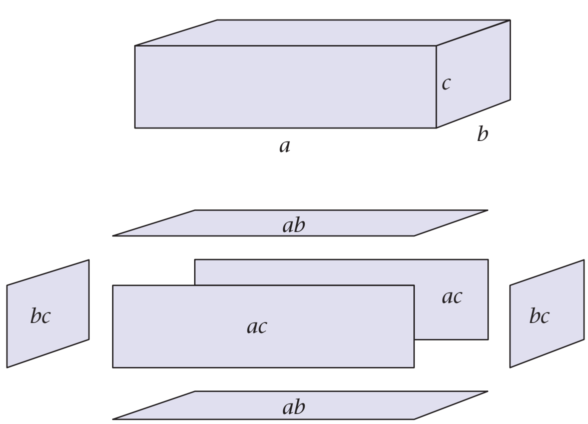
A área total (S_T) é a soma da área lateral (S_L) com as áreas das bases (B), logo:

$$S_T = S_L + 2B$$



Caso particular

A área total do bloco retangular se obtém separando-se as faces retangulares. Temos duas de cada tipo cujas áreas são *ab*, *ac* e *bc*.



A área total será então a soma $S = 2ab + 2ac + 2bc$ ou seja:

$$S_T = 2(ab + ac + bc)$$

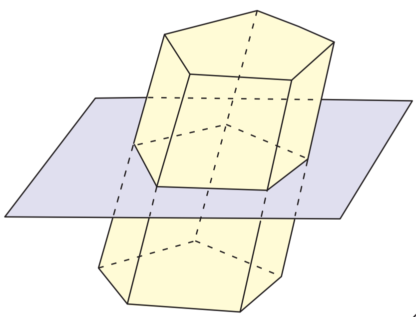
NOTA
No caso do cubo, temos 6 faces quadradas, isto é, $a = b = c$.

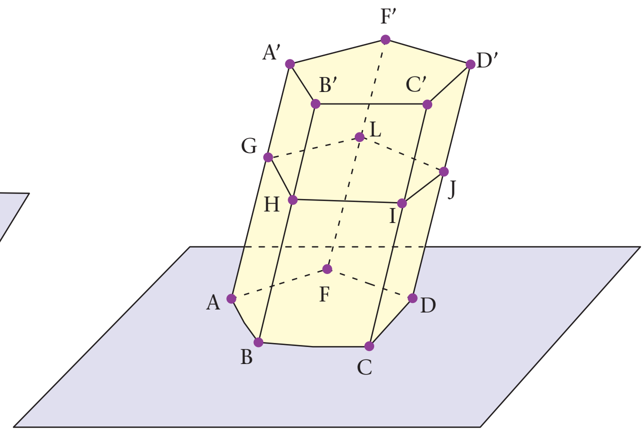
No caso do cubo, esta área se reduz a:

$$S_T = 6a^2$$

12.3.2 – Áreas lateral e total de um prisma oblíquo

A **área lateral** de um prisma qualquer é igual ao produto da medida da aresta lateral pelo perímetro da secção reta.





De fato, seja GHIJL a secção reta do prisma, S_L sua área lateral e a o comprimento de sua aresta lateral.

Temos que:
$AA' = BB' = CC' = ... = a$
$\overline{GH}$ é perpendicular a $\overline{BB'}$
$\overline{HI}$ é perpendicular a $\overline{CC'}$
$\overline{IJ}$ é perpendicular a $\overline{DD'}$ etc.

Como as faces são paralelogramos de base igual a com alturas $\overline{GH}$, $\overline{HI}$, $\overline{IJ}$, ... a soma de suas áreas será:

$S_L = a \cdot GH + a \cdot HI + a \cdot IJ + ... = a(GH + HI + IJ + ...)$, logo:

$S_L = a \cdot$ (perímetro da secção reta)

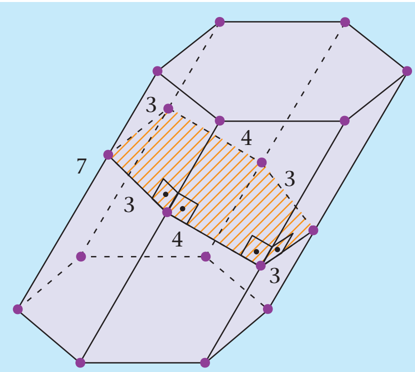
Chamando esse perímetro de $2p$, vem:

$$S_L = 2pa$$

Exemplo:

No prisma oblíquo ao lado, a área lateral será:

$2p$ = perímetro da secção reta =
$= 3 + 4 + 3 + 3 + 4 + 3 = 20$
$a = 7$
$S_L = 20 \cdot 7 = 140$



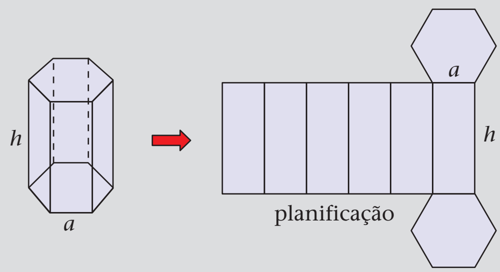
Exercícios resolvidos:

1) Determine a área total de um prisma triangular regular sabendo que o lado da base mede ℓ e a altura h.

Solução:

$$S_T = 3\ell h + 2 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 3\ell h + \frac{\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

2) Calcule a área total da superfície do prisma hexagonal regular abaixo.



Solução:

O prisma regular é reto, assim, temos:

A área lateral é dada por:

$S_L = 6 \cdot$ (área da face regular)

$S_L = 6 \cdot a \cdot h$

A área da base é uma região hexagonal de lado a, portanto a área da base é dada por:

$$B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Logo, a área total da superfície desse prisma hexagonal é:

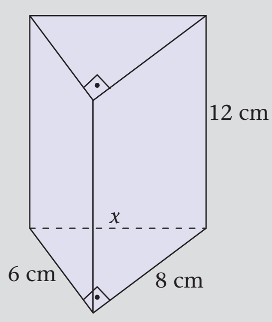
$$S_T = S_L + 2 \cdot B \Rightarrow S_T = 6ah + 2 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_T = 6ah + 3a^2\sqrt{3} \Rightarrow S_T = 3a(2h + a\sqrt{3})$$

3) Considere um prisma triangular reto de altura igual a 12 cm. Sabendo que a base é um triângulo retângulo cujos catetos medem 8 cm e 6 cm, determine sua área total.

Solução:

Consideremos a figura abaixo:



Logo, a hipotenusa x é: $x^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow x = 10$ cm

A área da base é: $B = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24 \Rightarrow B = 24$ cm²

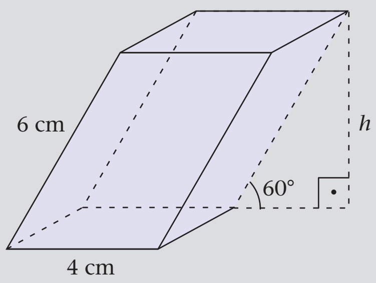
A área lateral é: $S_L = 6 \cdot 12 + 8 \cdot 12 + 10 \cdot 12 = 288 \Rightarrow S_L = 288$ cm²

A área total é: $S_T = S_L + 2B$

$S_T = 288 + 2 \cdot 24$

$S_T = 336$ cm²

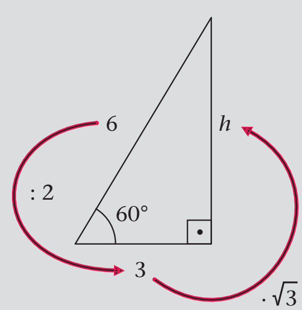
4) Determine a área total do prisma oblíquo de base quadrada abaixo, sabendo que as faces laterais são congruentes.



Solução:

A área da base é: $B = 4^2 = 16$ cm²

Considerando o triângulo retângulo com os ângulos medindo 30° e 60° a seguir, temos:



$h = 3\sqrt{3}$ cm

Logo, a área lateral: $S_L = 4 \cdot (4 \cdot 3\sqrt{3}) = 48\sqrt{3}$ cm²

Como a área total é $S_T = S_L + 2B$, temos:

$S_T = 48\sqrt{3} + 2 \cdot 16 = 48\sqrt{3} + 32$

$S_T = 16\,(3\sqrt{3} + 2)$ cm²

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Seja o prisma reto de base retangular cujas arestas medem 3 m; 4 m; 5 m. Calcule sua área total.

2 Seja o prisma hexagonal regular cuja medida da aresta da base é 5 m e sua aresta lateral mede 8 m. Nessas condições, calcule a sua área total.

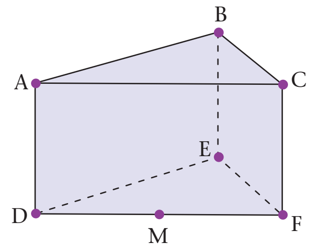
3 Calcule a medida da aresta da base de um prisma quadrangular regular sabendo-se que sua altura mede 12 m e a diagonal do prisma mede 13 m.

4 Um prisma, cuja aresta lateral faz um ângulo de 60° com a base, tem para secção reta um hexágono regular. Determine sua área lateral, sabendo que h = 12 m e que um lado da secção reta tem 4 m.

5 Calcule a medida do lado da base de um prisma hexagonal regular, sabendo que a sua área total é $216\sqrt{3}$ dm² e que a sua altura é igual ao apótema da base.

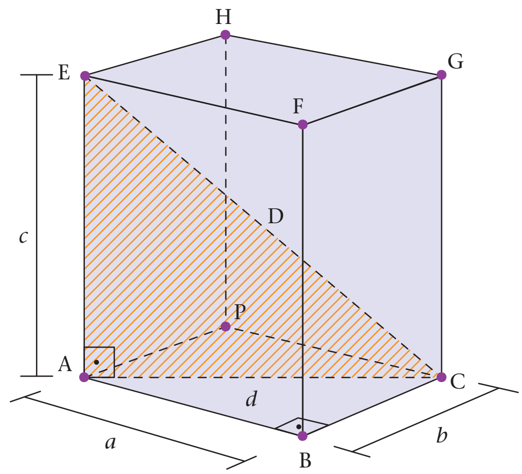
6 Com uma lata de tinta é possível pintar 50 m² de parede. Para pintar as paredes de uma sala de 8 m de comprimento, 4 m de largura e 3 m de altura, gasta-se uma lata e mais uma parte da segunda lata. Qual é a porcentagem de tinta que resta na segunda lata?

7 (Fatec-SP) A figura abaixo é um prisma reto, cuja base é um triângulo equilátero de $10\sqrt{2}$ cm de lado e cuja altura mede 5 cm.
Se M é o ponto médio da aresta DF, calcule o seno do ângulo $B\hat{M}E$.



12.4 – Bloco retangular

Seja d a diagonal do retângulo ABCP. Temos $d^2 = a^2 + b^2$.



Se D é a diagonal do bloco retangular, do triângulo retângulo CAE tiramos:
$D^2 = d^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

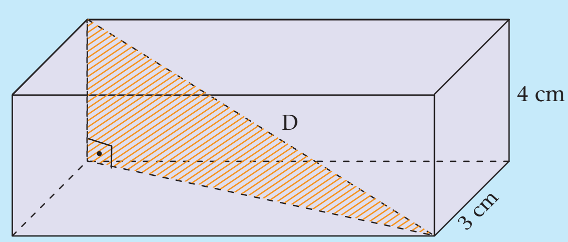
Caso particular

No caso do cubo ou hexaedro regular, $a = b = c$ e, portanto, $d^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$, logo:

$$D = a\sqrt{3}$$

Exemplos:

i) Determinar a medida da diagonal do bloco retangular cujas arestas medem 3 cm, 4 cm e 12 cm.



$D^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2$
$D^2 = 9 + 16 + 144$
$D^2 = 169$
$D = 13$ cm

ii) A área total de um cubo é 216 m². Determinar a medida de sua diagonal.

$S_T = 216$

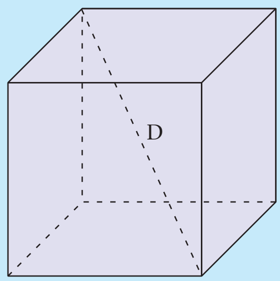
$6a^2 = 216$

$a^2 = 36$

$a = 6$

$D = a\sqrt{3}$

$D = 6\sqrt{3}$ m



iii) A área lateral de um cubo é 48 cm². Determine a medida de sua diagonal.

$S_T = 6a^2$ e $S_L = 4a^2$, como $S_L = 48$ cm², temos que: $4a^2 = 48 \Rightarrow a^2 = 12 \Rightarrow$

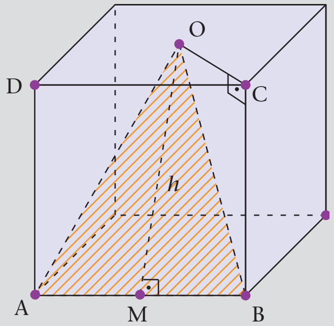
$\Rightarrow a = 2\sqrt{3}$ cm

A diagonal do cubo é $a\sqrt{3}$, logo:

$D = a\sqrt{3} \Rightarrow D = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow D = 6$ cm

Exercícios resolvidos:

1) A aresta de um cubo mede 6 cm. O ponto O é o centro de uma face e $\overline{AB}$, uma aresta da face oposta. Determine a área do triângulo AOB.



Temos, sucessivamente:

$$OB^2 = OC^2 + CB^2 = \left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 6^2 = 54$$

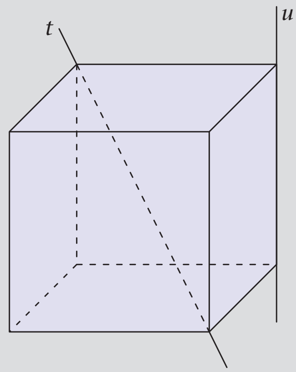
$OB = \sqrt{54}$ cm

$OM^2 = h^2 = OB^2 - MB^2 = 54 - 9 = 45$

$h = \sqrt{45}$ cm

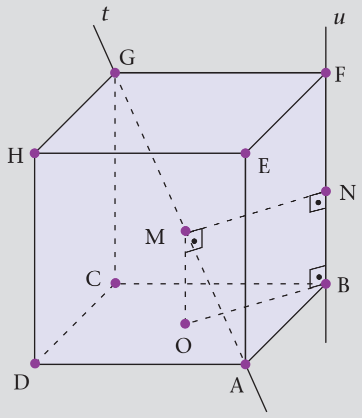
$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{45} = 3 \cdot 3\sqrt{5} = 9\sqrt{5} \text{ cm}^2$$

2) Se, no cubo da figura, a distância entre as retas t e u é $3\sqrt{3}$, qual é a área total desse cubo?



Solução:

Do enunciado, temos a figura, onde a distância entre as retas reversas t e u é a medida do segmento $\overline{MN}$ da perpendicular comum às retas t e u. Os pontos M e N são, respectivamente, os pontos da diagonal $\overline{AG}$ do cubo e da aresta $\overline{BF}$ desse cubo.



Sendo O o centro da base ABCD e ℓ a medida da aresta do cubo, temos:

$$MN = OB \Rightarrow MN = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$$

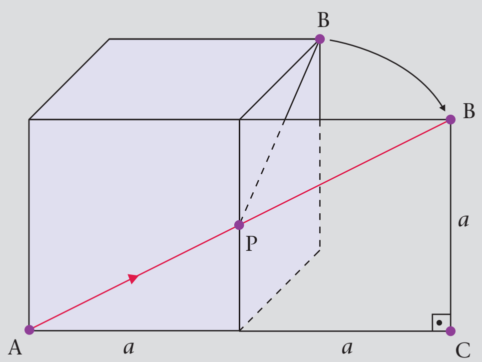
Assim, $\dfrac{\ell\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 6$.

Logo, a área pedida é igual a $6 \cdot 6^2$, ou seja, 216.

Resposta: 216

3) (Ufes) Uma formiga move-se na superfície de um cubo de aresta a. O menor caminho que ela deve seguir para ir de um vértice ao vértice oposto tem comprimento ℓ. Calcule ℓ em função de a.

Solução:



Considere a formiga indo de A para B. Colocando a face que contém $\overline{BP}$ no mesmo plano da face que contém $\overline{AP}$, o menor caminho ocorre quando A, P e B são colineares, pois a menor distância entre dois pontos A e B no plano é a medida do segmento de reta AB.

No triângulo ABC: temos, AB = $\ell \Rightarrow \ell^2 = (2a)^2 + a^2 \Rightarrow \ell = a\sqrt{5}$

Resposta: $\ell = a\sqrt{5}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Determine a medida da aresta de um cubo, cuja área lateral é 100 cm^2.

2 Determine a medida da diagonal de um cubo de 24 m^2 de área total.

3 Calcule a medida da diagonal de um cubo de 450 m^2 de área total.

4 Exprima a área total de um cubo por meio de sua diagonal, D.

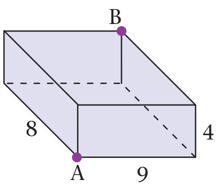
5 Determine a medida da diagonal de um paralelepípedo retângulo, sabendo que a diagonal de sua base vale $5\sqrt{5}$ m e a altura mede 10 m.

6 Determine as dimensões de um paralelepípedo retângulo sabendo que suas medidas são três números inteiros consecutivos e que a diagonal mede $5\sqrt{2}$ cm.

7 (FGV-SP) Um arquiteto tem dois projetos para construção de uma piscina retangular com 1 m de profundidade:
Projeto 1: dimensões do retângulo: 16 m × 25 m.
Projeto 2: dimensões do retângulo: 10 m × 40 m.
Sabendo que as paredes laterais e o fundo são revestidos de azulejos cujo preço é R$ 10,00 o metro quadrado:

a) qual a despesa com azulejos em cada projeto?
b) se a área do retângulo for de 400 m^2 e x uma de suas dimensões, expresse o custo dos azulejos em função de x.

8 (UFPE) Uma formiga (ignore seu tamanho) encontra-se no vértice A do paralelepípedo reto ilustrado abaixo.



Qual a menor distância que ela precisa percorrer para chegar ao vértice B (caminhando sobre a superfície do paralelepípedo)?

9 Encontre as dimensões de um paralelepípedo retângulo, sabendo que:
I) estão em progressão aritmética;
II) a área total do sólido é 52 m^2;
III) a soma das medidas de todas as arestas vale 36 m.

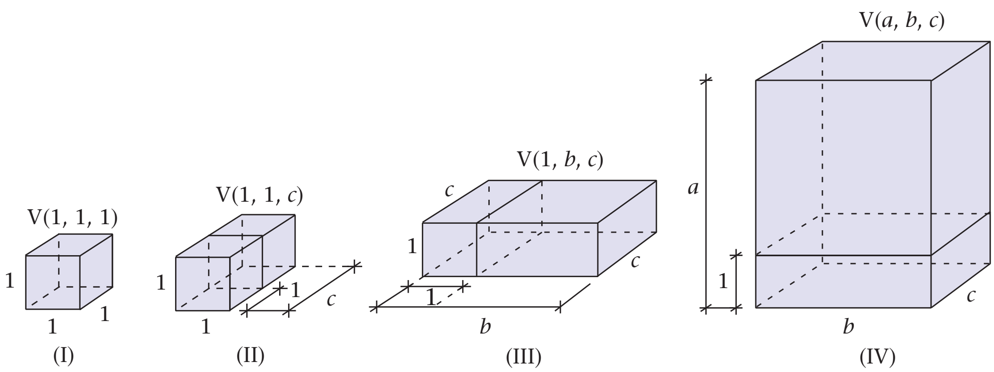
10 Encontre as dimensões de um paralelepípedo retângulo sendo dados a soma das três dimensões 15 cm; a área total 124 cm^2 e a medida da diagonal da base 10 cm.

12.5 – Volumes

Intuitivamente, o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Para isso, devemos adotar um volume de referência tomado como unidade. O volume de um sólido será um número que representa quantas vezes esse sólido contém o volume de referência.

Tomamos como unidade de volume o volume de um cubo, cuja aresta mede a unidade de comprimento, chamado **volume unitário**.

Seu volume será igual a 1.



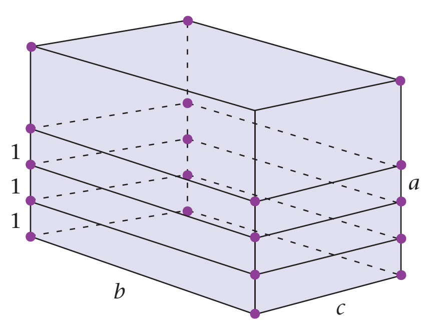
Consideremos os ortoedros de arestas:

(I) 1, 1, 1 cujo volume chamaremos de $V(1, 1, 1) = 1$

(II) 1, 1, c cujo volume chamaremos de $V(1, 1, c)$

(III) 1, b, c cujo volume chamaremos de $V(1, b, c)$

(IV) a, b, c cujo volume chamaremos de $V(a, b, c)$



Como os ortoedros (I) e (II) têm a mesma base (1, 1), a razão $\dfrac{V(1,1,c)}{V(1,1,1)} = c$ ou ainda $V(1, 1, c) = c \cdot V(1, 1, 1) = c$.

Por outro lado, os ortoedros (II) e (III) têm a mesma base (1, c) e a razão de seus volumes será $\dfrac{V(1,b,c)}{V(1,1,1)} = b$ ou ainda $V(1, b, c) = b \cdot V(1, 1, c) = b \cdot c$.

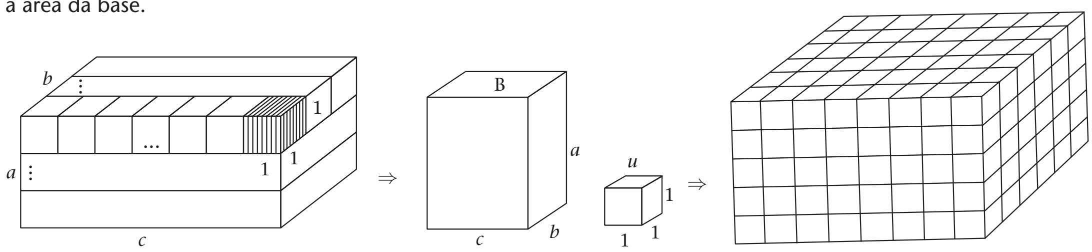
Finalmente, os ortoedros (III) e (IV) têm a mesma base (b, c), então a razão de seus volumes será $\dfrac{V(a,b,c)}{V(1,b,c)} = a$ ou ainda $V(a, b, c) = a \cdot V(1, b, c) = a \cdot b \cdot c$.

O volume de um bloco retangular de dimensões a, b e c é o produto de suas três dimensões.

$$V = abc$$

NOTA
B representa a área da base.

Se a, b e c forem inteiros, o volume é o número de cubinhos unitários que cabem dentro do bloco retangular.



Caso particular

NOTA
O cubo é o hexaedro regular, isto é, com a = b = c.

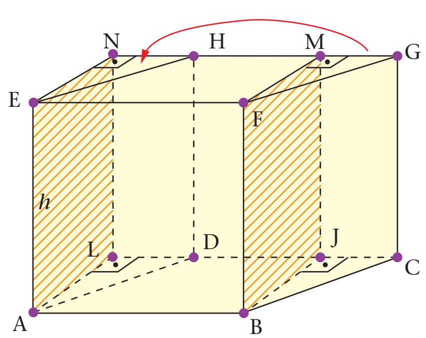
Se $a = b = c$, temos o volume do cubo:

$$V = a^3$$

12.5.1 – Volume do paralelepípedo reto

Seja o paralelepípedo ABCDEFGH de bases ABCD e EFGH. As áreas das bases são AB · BJ (onde $\overline{BJ}$ é a altura do paralelogramo ABCD). As secções retas BJMF e ALNE definem um bloco retangular. Transpondo o prisma BCJFGM para ADLEHN:

NOTA
Transformamos o paralelepípedo ABCDEFGH no bloco retangular equivalente a ABJLEFMN.



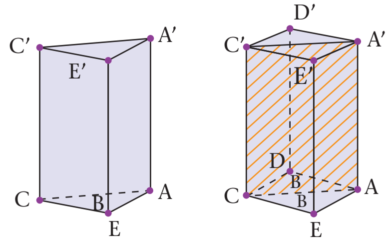
NOTA
Sólidos equivalentes são sólidos de mesmo volume.

Assim, o volume do prisma reto será:
$V = AB \cdot BJ \cdot BF = S_{ABCD} \cdot h$. Chamando de B a área da base do paralelepípedo:

$$V = Bh$$

12.5.2 – Volume do prisma triangular

A partir do prisma triangular CEAC’E’A’, construamos o paralelepípedo CEADC’E’A’D’. O plano diagonal CAA’C’ o divide em dois prismas triangulares que tem a mesma área da base e a mesma altura, logo, o volume do prisma triangular é a metade do volume do paralelepípedo.



Como eles têm a mesma altura, temos:

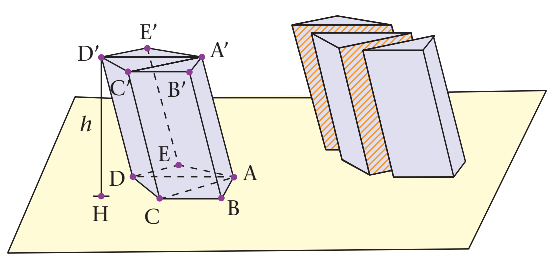
$$V_{\text{prisma triangular}} = \frac{1}{2} V_{\text{paralelepípedo}} = \frac{1}{2}\ 2B \cdot h$$

onde B é a área do triângulo, logo, continua valendo:

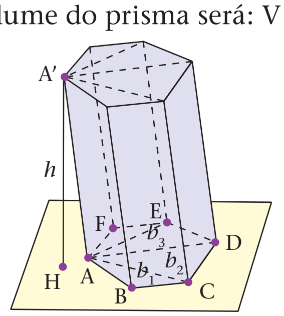
$$V = Bh$$

12.5.3 – Volume de um prisma qualquer

Seja ABCDE... A’B’C’D’E’... um prisma qualquer. Consideremos os planos diagonais que contêm a aresta $\overline{AA'}$ e as diagonais da base $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, ...



O prisma oblíquo fica dividido em prismas triangulares que têm uma altura comum h. Como o volume de cada prisma triangular é o produto da área de sua base pela altura comum, o volume do prisma será: $V = b_1h + b_2h + b_3h + ...$



em que b_1, b_2, b_3, ... são as áreas das bases triangulares.

Então, $V = (b_1 + b_2 + b_3 + ...)h$. Mas $b_1 + b_2 + b_3 + ... = B$, a área da base do prisma qualquer, logo:

$$V = Bh$$

Consequências:

i) Dois prismas que tenham bases de mesma área e alturas congruentes são equivalentes.

ii) Os volumes de dois prismas que têm bases equivalentes estão entre si, assim como as suas alturas.

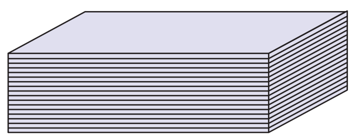
$$\frac{V}{V'} = \frac{Bh}{Bh'} = \frac{h}{h'}$$

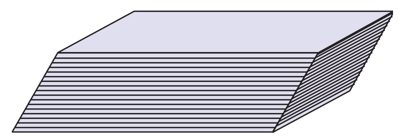
iii) Os volumes de dois prismas que têm a mesma altura estão entre si, assim como as áreas de suas bases.

$$\frac{V}{V'} = \frac{Bh}{B'h} = \frac{B}{B'}$$

OBSERVAÇÃO
Mesmo que as bases tenham formas diferentes, mas a mesma área, os volumes dos prismas serão iguais desde que tenham a mesma altura.

iv) O volume de um prisma só depende da área da base e da altura.

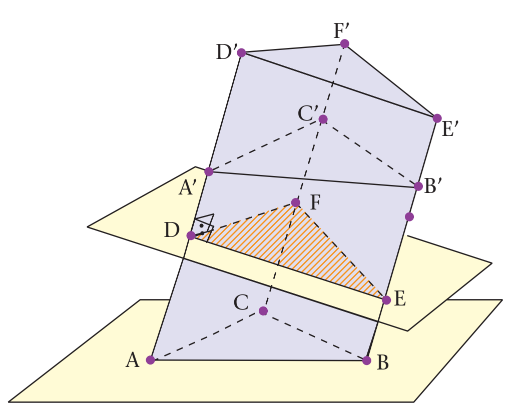

prisma reto


prisma oblíquo

Isso pode ser entendido imaginando um prisma como uma pilha de lâminas muito finas empilhadas.
Fazendo essas lâminas deslizarem umas sobre as outras, a altura dos prismas não se altera, pois é a soma das espessuras das lâminas e o volume dos prismas é o mesmo porque é a soma dos volumes das lâminas.

Teorema

O volume de um prisma oblíquo também pode ser calculado pelo produto da área da sua secção reta pelo comprimento da aresta lateral.



Demonstração:

Por um ponto D da aresta $\overline{AA'}$, tracemos a secção reta DEF. Prolonguemos a aresta $\overline{AA'}$ de um segmento A'D' = AD e, pelo ponto D', tracemos a secção reta D'E'F' paralela à secção DEF. O poliedro DEFD'E'F' é um prisma reto tendo para bases as secções retas no prisma oblíquo e para altura sua aresta lateral AA' = DD' uma vez que:

$$DD' = DA' + A'D' = DA' + DA = AA'$$

O prisma DEFD'E'F' é constituído da superposição de dois troncos DEFA'B'C' e A'B'C'D'E'F'. Como os troncos A'B'C'D'E'F' e ABCDEF são congruentes, os volumes dos prismas ABCDEF e DEFD'E'F' são iguais.

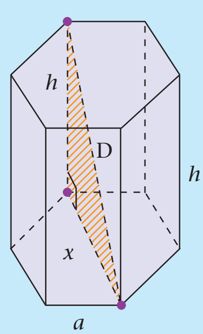
NOTA
Essa demonstração é válida mesmo que a base do prisma não seja triangular.

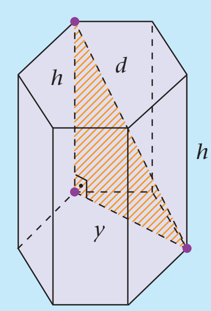
Exemplos:

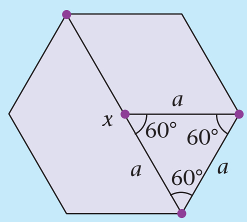
i) Calcular o volume de um cubo, sabendo que quando se aumenta sua aresta de 1 m, a área lateral do mesmo cresce de 164 m².
Denominemos x a aresta do cubo dado. Sabemos que a diferença entre as áreas laterais correspondentes vale:
$4(x + 1)^2 - 4x^2 = 164 \Rightarrow x = 20$ m; $V = x^3 = 8\,000$ m³

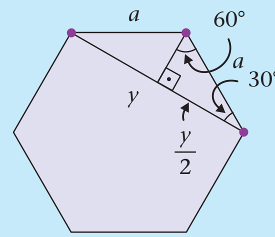
ii) A área total de um cubo é 294 m². De quanto devemos acrescer a diagonal a fim de que o volume aumente de 386 dm³?
Volume do primeiro cubo: $6a_1^2 = 294 \Rightarrow a_1 = 7$ dm; $V_1 = a_1^3 = 343$ dm³
Volume do segundo cubo: $V_2 = 343 + 386 = 729$ dm³; $a_2 = \sqrt[3]{729} = 9$ dm
Acréscimo da diagonal $= 9\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ dm

iii) Calcular as medidas das diagonais de um prisma hexagonal regular de área lateral 144 cm² e volume $144\sqrt{3}$ cm³.
Sendo a o lado da base e h a altura do prisma, medidos em cm, vem que:
$S_L = 144 \text{ cm}^2 \Rightarrow 6ah = 144 \Rightarrow ah = 24$ (I)
$V = 144\sqrt{3} \text{ cm}^3 \Rightarrow 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = 144\sqrt{3} \Rightarrow a^2h = 96$ (II)
De (I) e (II) decorre que $a = 4$ cm e $h = 6$ cm.
As medidas das diagonais do prisma são D e d conforme indicamos nas figuras abaixo.









$x = 2a$
$x = 8$ cm

$$\cos 30° = \frac{\frac{y}{2}}{a} \Rightarrow y = a\sqrt{3}$$

$$y = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

Temos:

$D^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow D^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow D = \sqrt{100} = 10$

$d^2 = h^2 + y^2 \Rightarrow d^2 = 6^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 84 \Rightarrow d = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

<u>Resposta:</u> 10 cm e $2\sqrt{21}$ cm

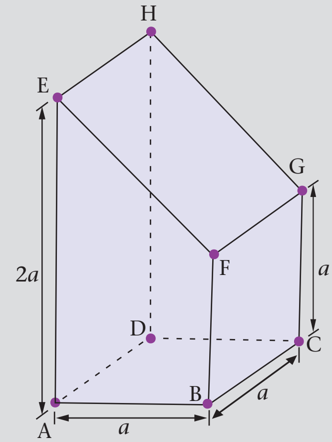
iv) Determinar a aresta do cubo, cujo volume é expresso pelo mesmo número que mede sua área total.
Temos: $a^3 = 6a^2 \Rightarrow a = 6$

Exercícios resolvidos:

1) (Fuvest-SP) Uma caixa-d'água tem forma cúbica com 1 metro de aresta. De quanto baixa o nível da água ao retirarmos 1 litro de água da caixa?
<u>Solução:</u>

$$\left.\begin{array}{l} B \cdot x = 1\,L = 1\,dm^3 = 1\,000\,cm^3 \\ B = 1\,m^2 = 10\,000\,cm^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0{,}1\,cm = 1\,mm$$

2) (FEI-SP) Um tronco de prisma reto, conforme a figura, tem por base um quadrado de lado a. Duas arestas medem a e as outras duas medem $2a$. Calcule o volume e a área total.



Solução:
Pela figura, podemos escrever que:

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABFE} = \dfrac{(2a+a)a}{2} = \dfrac{3a^2}{2} = S_{DCGH} \\ S_{BCGF} = a^2 = A_{ABCD} \\ S_{ADHE} = a \cdot 2a = 2a^2 \\ S_{EFGH} = a \cdot a\sqrt{2} = \sqrt{2}a^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_T = 2 \cdot \dfrac{3}{2}a^2 + 2a^2 + 2a^2 + \sqrt{2}a^2 \\ S_T = \left(7+\sqrt{2}\right)a^2 \end{array}$$

$$V = S_{ABFE} \cdot BC = \frac{3a^2}{2} \cdot a = \frac{3a^3}{2}$$

Resposta: $V = \dfrac{3a^3}{2}$ e $S_t = \left(7+\sqrt{2}\right)a^2$

3) (Cesgranrio-RJ) Ao congelar-se, a água aumenta de $\dfrac{1}{15}$ o seu volume. O volume da água a congelar para obter-se um bloco de gelo de 8 dm $\times$ 4 dm $\times$ 3 dm é:

(A) 80 dm^3 (B) 95 dm^3 (C) 90 dm^3 (D) 100 dm^3 (E) 96 dm^3

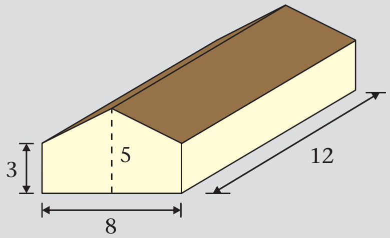
Solução: $V + \dfrac{1}{15}V = 8 \cdot 4 \cdot 3 \Rightarrow V = 90\ dm^3$
Resposta: C

4) (Mack-SP) Retirando-se um litro de água de um reservatório de forma cúbica que está totalmente cheio, nota-se um abaixamento do nível de água equivalente a 12,5% do reservatório. Nestas condições, qual é a medida da aresta?
Solução:

$$a^2 \cdot \left(\frac{12,5}{100}a\right) = 1\ L = 1000\ cm^3$$

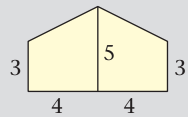
$$a^3 = \frac{1000 \times 100}{12,5} = 8000 \Rightarrow a = 20\ cm$$

5) (Unesp) O volume de ar contido em um galpão com a forma e dimensões dadas pela figura abaixo é:



(A) 288 (B) 384 (C) 480 (D) 360 (E) 768

Solução:



$$B = 2 \cdot \frac{(5+3)\cdot 4}{2} = 32$$

$$V = Bh = 32 \cdot 12 = 384$$

Resposta: B

6) (ITA-SP) Considere um prisma hexagonal regular tal que a razão entre a aresta da base e a aresta lateral ℓ é $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Sabendo-se que se a aresta da base for aumentada de 2 cm, o volume V do prisma ficará aumentado de 108 cm^3. Considerando que a aresta lateral permanece a mesma, podemos afirmar que o volume do prisma é:

(A) 10 cm^3 (C) 33 cm^3 (E) 273 cm^3
(B) 12 cm^3 (D) 36 cm^3

Solução:

$$\frac{a}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \ell = \sqrt{3}a$$

$$V = 6\ \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \quad \Rightarrow V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3}a \Rightarrow V = \frac{9}{2}a^3$$

$$V + 108 = 6 \cdot \frac{(a+2)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \ell \Rightarrow \frac{9}{2}a^3 + 108 = 6\ \frac{(a+2)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3}a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9a^3 + 216 = 9a(a+2)^2 \Rightarrow 36a^2 + 36a - 216 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0 \underset{(a>0)}{\Rightarrow} a = 2$$

$$V = \frac{9}{2} \cdot 2^3 = 36 \text{ cm}^3$$

Resposta: D

7) Seja o prisma reto hexagonal regular, com área lateral igual 12 m^2 e volume 4,5 m^3. Determine a aresta da base e a altura do prisma.

Solução:

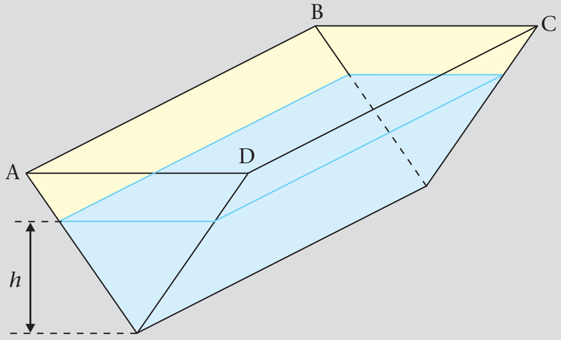
Seja ℓ a aresta da base e h a altura.

$$\text{Temos: } \begin{cases} 6 \cdot \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = 4{,}5 \\ 6\ell h = 12 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\ell = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m e } h = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ m}$$

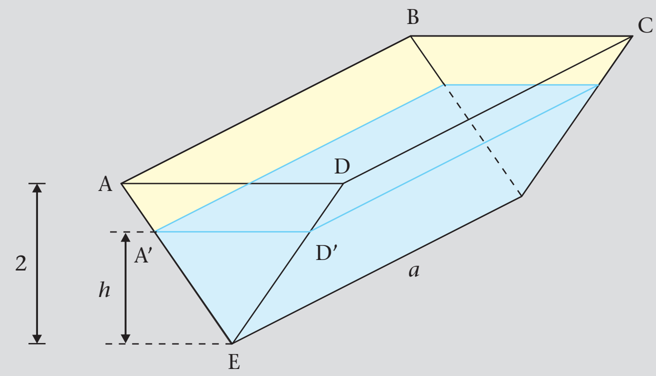
8) O recipiente da figura, que contém água, é um prisma reto cujas bases são triângulos equiláteros de altura 2. A superfície da água é paralela à face ABCD. Se o volume ocupado pela água é metade do volume do prisma, o valor de h é:



(A) $\frac{6}{5}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{3}{4}$

Solução:

Temos a figura:



Seja S_b a área do $\triangle A'D'E$ e S_B a área do $\triangle ADE$.

Os triângulos A'D'E e ADE são semelhantes, com razão de semelhança $k = \frac{h}{2}$ (I).

Do enunciado, temos:

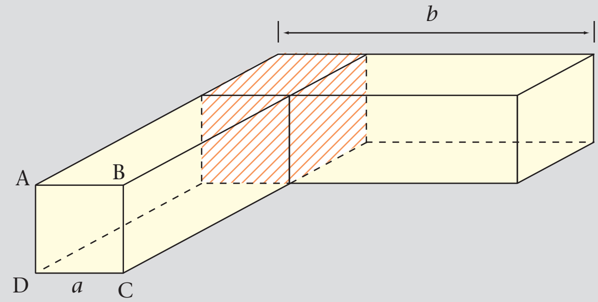
$S_b \cdot a = \frac{1}{2} \cdot S_B \cdot a \Rightarrow \frac{S_b}{S_B} = \frac{1}{2}$

Logo, $k^2 = \frac{1}{2}$. Portanto, $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (II).

De (I) e (II), resulta que $\frac{h}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ou seja, $h = \sqrt{2}$.

Resposta: C

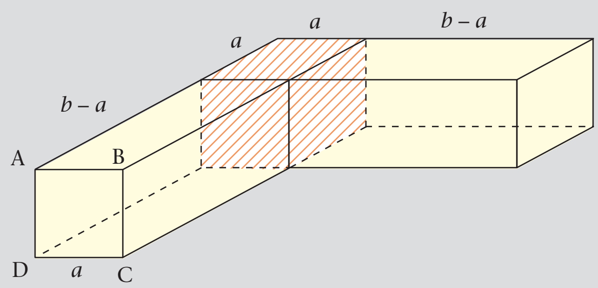
9) Dois paralelogramos retângulos de mesmas dimensões cortam-se conforme a figura, sendo igual a 1 o volume da região assinalada. Se ABCD é um quadrado, e o volume total do sólido obtido, incluindo a região assinalada, é 9, a dimensão b é igual a:



(A) 2 (B) 6 (C) 5 (D) 3 (E) 4

<u>Solução:</u>

Do enunciado, temos a figura:



Ainda, temos:

$$\begin{cases} a^3 = 1 \Rightarrow a = 1 \ \text{(I)} \\ 2 \cdot a \cdot a \cdot (b - a) + a^3 = 9 \ \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) e (II), temos: $2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (b - 1) + 1 = 9 \Rightarrow b = 5$

<u>Resposta:</u> C

10) Num paralelepípedo reto-retângulo, a soma das medidas das arestas é 48 cm e a diagonal mede $5\sqrt{2}$ cm. Calcule a área S do paralelepípedo.

<u>Solução:</u>

Como temos: $4a + 4b + 4c = 48 \Rightarrow a + b + c = 12$

A diagonal é: $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$, se $D = 5\sqrt{2}$

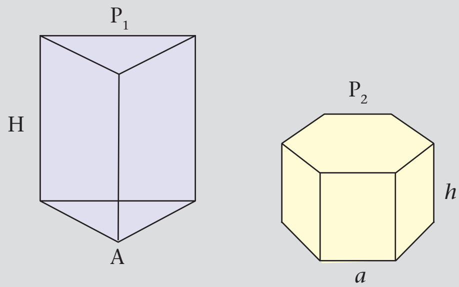
Temos: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 50$

$$\begin{cases} a + b + c = 12 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 50 \end{cases} \Rightarrow (a + b + c)^2 = 12^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 144$$

$D^2 + S = 144 \Rightarrow S = 94$ cm

11) (Uerj) Dois prismas regulares retos P_1 e P_2, o primeiro de base triangular e o outro de base hexagonal, têm a mesma área da base e a mesma área lateral. Calcule a razão entre o volume de P_1 e o de P_2.

Solução:



$$\text{Área da base}\begin{cases} P_1 \Rightarrow \dfrac{A^2\sqrt{3}}{4} \\ P_2 \Rightarrow 6\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

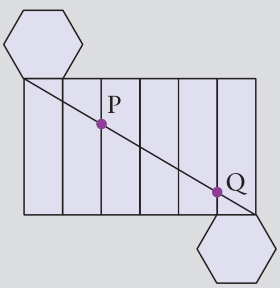
$$A^2 = 6a^2 \Rightarrow A = a\sqrt{6}$$

$$\text{Área lateral}\begin{cases} P_1 \Rightarrow 3\cdot A\cdot H \\ P_2 \Rightarrow 6\cdot a\cdot h \end{cases}$$

$$3AH = 6ah \Rightarrow AH = 2ah \Rightarrow \frac{H}{h} = \frac{2a}{A}$$

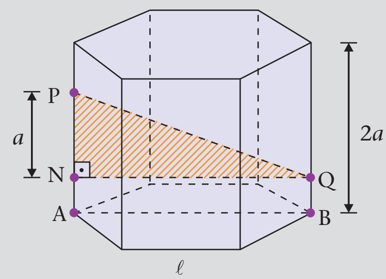
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{B_{P_1}}{B_{P_2}}\cdot\frac{H}{h} = \frac{A^2}{6a^2}\cdot\frac{2a}{A} = \frac{2A}{6a} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

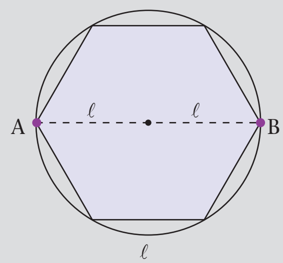
12) (UFRJ) A figura abaixo corresponde à planificação de um prisma regular hexagonal de altura $2a$ e perímetro de base igual a $3a$.
Determine a distância entre os pontos P e Q no prisma.



Solução:

Construindo o prisma, temos:





PN = a

$6\ell = 3a \Rightarrow \ell = \dfrac{a}{2}$

$AB = 2\ell \Rightarrow AB = a$

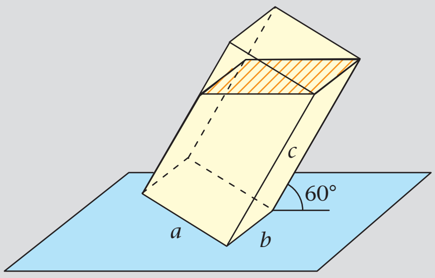
$AB = NQ \Rightarrow NQ = a$

No triângulo NPQ: $PQ^2 = NQ^2 + PN^2$

$PQ^2 = a^2 + a^2$

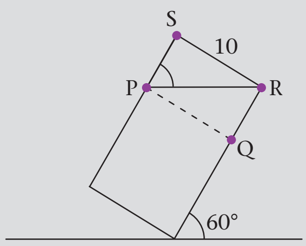
$PQ = a\sqrt{2}$

13) (UFRJ) Uma caixa sem tampa, completamente cheia de leite, tem a forma de um paralelepípedo retângulo de dimensões internas a = 10 cm, b = 7 cm e c = 16 cm.
Inclina-se a caixa de 60° em relação ao plano horizontal de modo que apenas uma das menores arestas fique em contato com o plano, como mostra a figura.



Calcule o volume do leite derramado.

Solução:

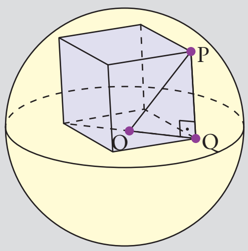


Observe a vista lateral da caixa inclinada. Cortando a caixa por um plano, paralelo à sua base, que passa por $\overline{PQ}$, formamos um paralelepípedo retângulo cujo volume é o dobro do derramado.

No $\triangle$PRS, temos: $\hat{P} = 60°$ e $\text{tg } 60° = \dfrac{10}{PS} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{10}{PS} \Rightarrow PS = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

Volume derramado: $V_d = \dfrac{1}{2} \cdot PS \cdot 10 \cdot 7 = 35 \cdot PS \Rightarrow V_d = \dfrac{350\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3$

14) (Fuvest-SP) Um cubo de aresta *m* está inscrito em uma semi-esfera de raio R de tal modo que os vértices de uma das faces pertencem ao plano equatorial da semi-esfera e os demais vértices pertencem à superfície da semi-esfera. Calcule o valor de *m*.



Solução:

O é o centro da esfera e OP = R.

No $\triangle$OPQ, PQ = m e $OQ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}m$, assim:

$PQ^2 + OQ^2 = OP^2 \Rightarrow m^2 + \dfrac{1}{2}m^2 = R^2 \Rightarrow m^2 = \dfrac{2R^2}{3} \Rightarrow m = \dfrac{R\sqrt{6}}{3}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Calcule a medida da aresta da base de um prisma quadrangular regular que tem altura medindo 4 m e o volume igual a 16 m^3.

2 Uma sala de aulas tem a forma de paralelepípedo retângulo de dimensões proporcionais a 16, 12 e 7. Calcule o volume de ar contido na sala sabendo que as áreas de duas paredes adjacentes e do teto somam 97 m^2.

3 (UFRJ) Uma barra de sabão ABCDEFGH, com a forma de um paralelepípedo retângulo, foi cortada pelo plano que contém os pontos C, D, F e G, como mostrado na figura 1. O sólido ABCDFG obtido foi cortado, mais uma vez, pelo plano que contém os pontos M, N, P e Q que são, respectivamente, os pontos médios das arestas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DF}$, como ilustrado na figura 2.

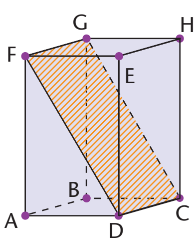


Figura 1

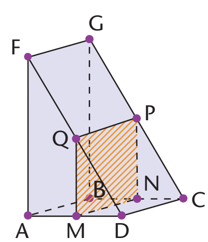


Figura 2

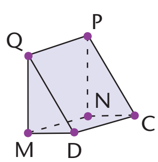


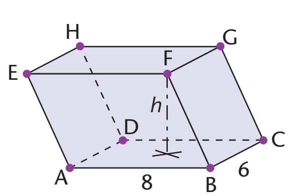
Figura 3

Calcule a razão entre o volume do sólido CDMNPQ resultante desse segundo corte (ilustrado na figura 3) e o volume da barra de sabão original.

4 Determine o volume de um prisma hexagonal regular, sabendo-se que sua área lateral é $36\sqrt{3}$ m^2 e a área total é $63\sqrt{3}$ m^3.

5 Sabendo-se que a altura de um prisma hexagonal regular mede 3 cm, e que sua área lateral é o dobro da área de sua base, determine o seu volume.

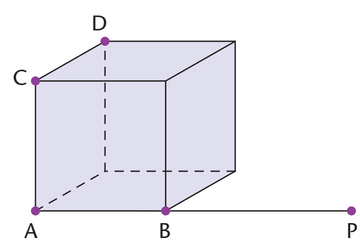
6 Calcule o volume de um paralelepípedo oblíquo cuja base é um retângulo de dimensões 8 dm e 6 dm, sendo a aresta lateral igual a 12 dm. Sabemos, ainda, que a perpendicular baixada de um dos vértices da base superior coincide com o centro da base inferior.



7 A base de um prisma reto é um losango, cujas diagonais estão entre si na razão de 3 para 4. A altura vale a soma das diagonais da base. Sabendo que o volume é 1 134 dm^3, determine a área total desse prisma.

8 Determine a área total do prisma triangular retangular, cujo volume é 129,9 m^3 e a altura vale $\frac{4}{5}$ do perímetro da base.

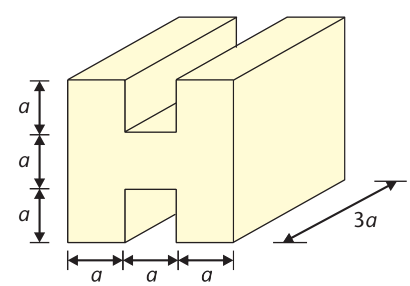
9 (Fuvest-SP) A aresta do cubo mede 2 e BP = 3. Calcule PC e PD.



10 Calcule o volume do cubo da questão anterior.

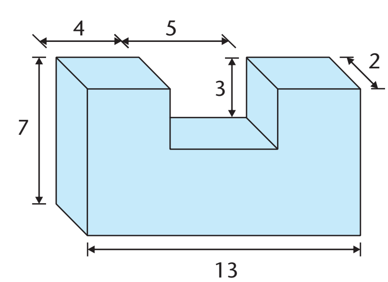
11 (Cesgranrio-RJ) De um bloco cúbico de isopor de aresta 3a recorta-se o sólido, em forma de "H", mostrado na figura. O volume do sólido é:

(A) 27a^3
(B) 21a^3
(C) 18a^3
(D) 14a^3
(E) 9a^3



12 (Mack-SP) A área total do sólido abaixo é:

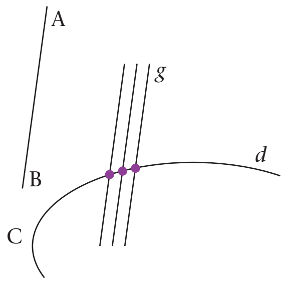
(A) 204
(B) 206
(C) 222
(D) 244
(E) 262



12.6 – Cilindro

Superfície cilíndrica é a superfície curva gerada por uma reta que se desloca paralelamente a uma direção AB apoiando-se sobre uma curva C fixa não coplanar com a reta.

DEFINIÇÃO
Superfície cilíndrica.

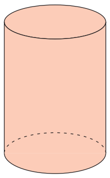


A reta *g* que se desloca é denominada **geratriz** e a curva *d* na qual se apoia a geratriz denomina-se **diretriz** da superfície cilíndrica.

Conforme a diretriz das superfícies cilíndricas, tais superfícies são circulares, elípticas, parabólicas, abertas, fechadas, convexas etc.

Cilindro é um sólido limitado por uma superfície cilíndrica fechada e dois planos paralelos que intersectam todas as geratrizes.

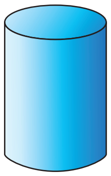
DEFINIÇÃO
Cilindro.



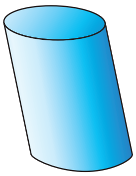
As duas superfícies planas são as **bases** do cilindro e a porção da superfície cilíndrica é a **superfície lateral** do cilindro.

Altura do cilindro é a distância entre as bases do cilindro.

Um cilindro é **reto** ou **oblíquo** quando suas geratrizes são perpendiculares às bases ou oblíquas às bases.

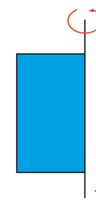


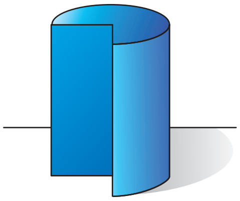
cilindro reto



cilindro oblíquo

Os cilindros circulares retos são também chamados de **cilindros de revolução** porque podem ser obtidos pela rotação completa de um retângulo em torno de um de seus lados.

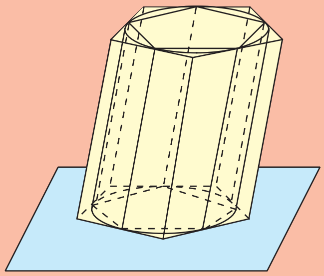




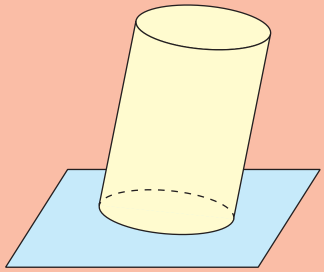
O lado fixo está sobre o **eixo de rotação** e é altura do cilindro; os outros lados são os raios das bases do cilindro.

Propriedade fundamental

Se um prisma cuja base é um polígono regular está inscrito ou circunscrito a um cilindro circular, e o número de lados da base do prisma cresce infinitamente:



i) o volume do cilindro é o limite do volume do prisma;
ii) a área lateral do cilindro é o limite da área lateral do prisma;

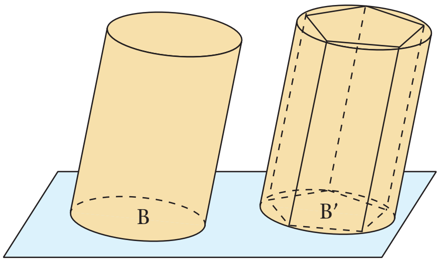


iii) o perímetro da secção reta do cilindro é o limite do perímetro da secção reta do prisma.
Quando o número de lados da base cresce infinitamente, o polígono da base vai se aproximando do círculo levando o prisma a se aproximar do cilindro.

Teoremas

T_1) O volume de um cilindro circular é igual ao produto da área de sua base por sua altura.

Seja V o volume, B a área da base e h a altura do cilindro.



Inscrevamos no cilindro um prisma com sua base um polígono regular de área B' e volume V'. Temos $V' = B' \cdot h$.

Fazendo o número de lados da base infinitamente (tender para o infinito), B' tenderá para B e V' tenderá para V e escrevemos:

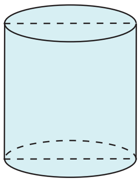
$$V = \lim V' = \lim B'h = Bh \Rightarrow \boxed{V = Bh}$$

Caso particular

No caso do cilindro de revolução, $B = \pi r^2$, sendo r o raio da base, então:

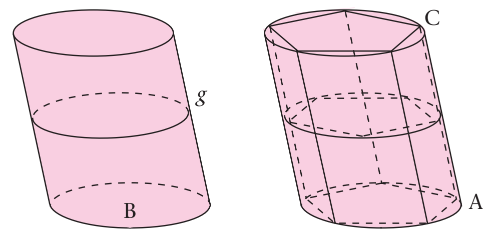
$$\boxed{V = \pi r^2 h}$$

Se o cilindro for equilátero, $V = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$.



NOTA
Um cilindro é equilátero quando sua altura é igual ao diâmetro de sua base, logo sua secção mediana é um quadrado.

T_2) A área lateral de um cilindro circular é igual ao produto do perímetro da secção reta pela sua geratriz.



Demonstração:

Sejam S_L a área lateral, P o perímetro da secção reta e g a geratriz do cilindro.

Inscrevamos no cilindro um prisma com base poligonal regular e seja S_L' sua área lateral e P' o perímetro da secção reta. Temos que $S_L' = P' \cdot AC$, em que $\overline{AC}$ é a aresta do prisma.

Se o número de faces do prisma cresce infinitamente, S_L' se aproximará de S_L, P' se aproximará de P e como $AC = g$, vem:

$$S_L = \lim S_L' = \lim P' \cdot AC = P \cdot g \Rightarrow \boxed{S_L = P \cdot g}$$

Consequentemente a área total do cilindro será:

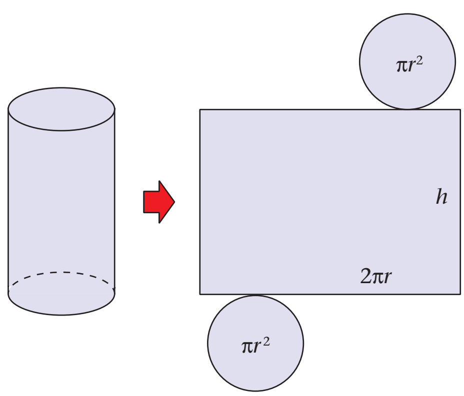
$$\boxed{S_T = P \cdot g + 2B}$$

Caso particular

Quando o cilindro é de revolução, a área lateral se reduz ao produto do comprimento do círculo da base pela altura.

$$g = h \text{ e } P = 2\pi r \Rightarrow S_L = 2\pi rh \text{ e } S_T = 2\pi rh + 2\pi r^2 \Rightarrow \boxed{S_T = 2\pi r(h + r)}$$

Se o cilindro for equilátero,
$S_L = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$ e $S_T = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$.



Exemplos:

i) A área lateral de um cilindro é 50 m², sendo a altura a metade do comprimento da circunferência da base. Determine seu volume.

Sendo x o raio da base, temos:

$$2\pi x \cdot \pi x = 50 \Rightarrow x = \frac{5}{\pi} \text{ m}$$

Então a altura é $h = 5$ m e o volume:

$$V = B \cdot h = \pi \left(\frac{5}{\pi}\right)^2 \cdot 5 = \frac{125}{\pi} \Rightarrow V = \frac{125}{\pi} \text{ m}^3$$

ii) Sendo 100 m o raio da base de um reservatório cilíndrico, qual deve ser sua altura para que sua área lateral seja 600π m²?

Temos que: $r = 100$ m.
A área lateral é: $S_L = (2\pi r) \cdot h$

$$S_L = 600\pi \Rightarrow 600\pi = 2\pi \cdot 100 \cdot h \Rightarrow h = \frac{600\pi}{200\pi} \Rightarrow h = 3 \text{ m}$$

iii) Se o raio da base de um cilindro de revolução mede 8 cm e a geratriz 16 cm, calcule:

a) a área da base;

b) a área lateral;

c) a área total;

d) o volume.

Como $r = 8$ cm, temos:

a) $B = \pi r^2 = \pi \cdot 8^2 \Rightarrow B = 64\pi \text{ cm}^2$

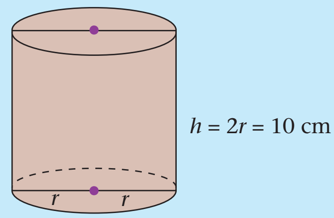
b) $S_L = 2\pi rh = 2\pi \cdot 8 \cdot 16 \Rightarrow S_L = 256\pi \text{ cm}^2$

c) $S_T = S_L + 2 \cdot B = 256\pi + 2 \cdot 64\pi = 384\pi \text{ cm}^2$

d) $V = B \cdot h = 64\pi \cdot 16 \Rightarrow V = 1024\pi \text{ cm}^3$

iv) Calcular a área e o volume do cilindro equilátero de altura 10 cm.

Num cilindro equilátero, a altura é igual ao diâmetro da base. Temos, então:



$h = 10$ cm $\Rightarrow 2r = 10$ cm $\Rightarrow r = 5$ cm

Área lateral:

$S_L = 2\pi rh = 2\pi \cdot 5 \cdot 10 \Rightarrow S_L = 100\pi$ cm^2

Área da base:

$B = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 \Rightarrow B = 25\pi$ cm^2

Área total:

$S_T = S_L + 2B = 100\pi + 2 \cdot 25\pi \Rightarrow S_T = 150\pi$ cm^2

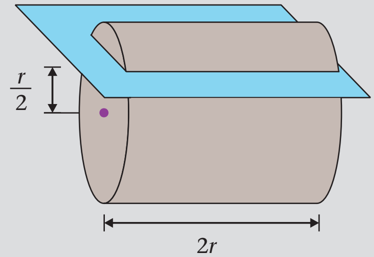
Volume:

$V = B \cdot h = 25\pi \cdot 10 \Rightarrow V = 250\pi$ cm^3

A área é de 150π cm^2 e o volume é de 250π cm^3.

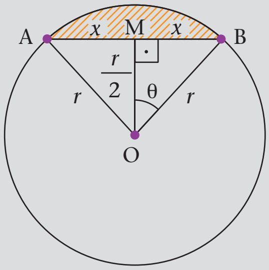
Exercícios resolvidos:

1) (Mauá-SP) Um cilindro circular reto de raio r e altura $h = 2r$ é cortado por um plano paralelo ao seu eixo. Sendo $\frac{r}{2}$ a distância do eixo ao plano secante, calcule o volume do menor segmento cilíndrico resultante dessa secção.



Solução:

Temos, então:



$$x^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = \frac{3r^2}{4} \Rightarrow x = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = r\sqrt{3}$$

$$\text{sen }\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 60°$$

Área do setor circular de ângulo 120°:

$$S_{setor} = \frac{120°}{360°}\pi r^2 = \frac{\pi r^2}{3}$$

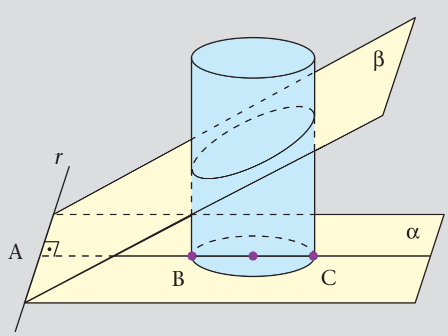
$$S_{segmento} = S_{setor} - S_{\triangle OAB} = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{(r\sqrt{3})\cdot\frac{r}{2}}{2} = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2$$

O volume do segmento cilíndrico (altura = $2r$) é, então:

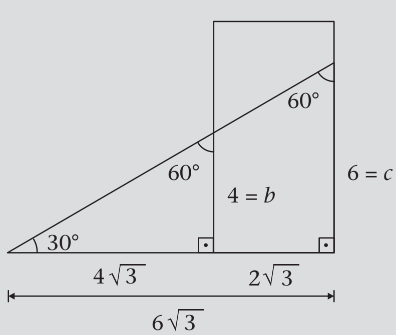
$$V = S_{segmento}\cdot h = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2\cdot 2r = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^3 = (4\pi - 3\sqrt{3})\ \frac{r^3}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = (4\pi - 3\sqrt{3})\ \frac{r^3}{6}$$

2) Considere um cilindro circular reto cuja base está contida em um plano α e é seccionado pelo plano β conforme indica a figura. O ângulo entre os planos α e β mede 30° e a reta que contém o diâmetro $\overline{BC}$ é perpendicular à reta r no ponto A. Se $\overline{BA}$ mede $4\sqrt{3}$ cm e $\overline{BC}$ mede $2\sqrt{3}$ cm, calcule o volume da parte do cilindro compreendida entre os planos α e β.



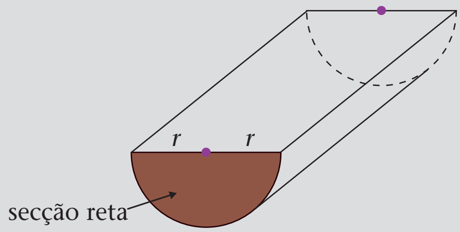
Solução:



$$V = \pi r^2\cdot\left(\frac{b+c}{2}\right) = \pi\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\left(\frac{4+6}{2}\right) = \pi\cdot 3\cdot 5$$

$$V = 15\pi \text{ cm}^3$$

3) Um tronco de madeira foi cortado ao meio tomando a forma de um semicilindro circular reto. Com um barbante, um lenhador mediu o perímetro de sua secção reta e encontrou 100 cm. Sabendo que o comprimento do tronco é igual a 100 cm e considerando $\pi = 3$, calcule o volume do tronco.

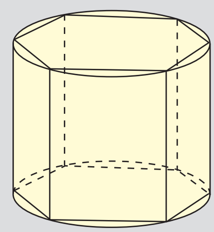


Solução:

$$2r + \frac{2\pi r}{2} = 100 \Rightarrow 2r + 3r = 100 \Rightarrow 5r = 100 \Rightarrow r = 20 \text{ cm}$$

$$V_T = \frac{\pi r^2 h}{2} = \frac{3 \cdot 400 \cdot 100}{2} \Rightarrow V_T = 60\,000 \text{ cm}^3$$

4) Um cilindro está circunscrito em um prisma hexagonal regular conforme mostra a figura abaixo. Determine a razão entre as áreas laterais do cilindro e do prisma.



Solução:

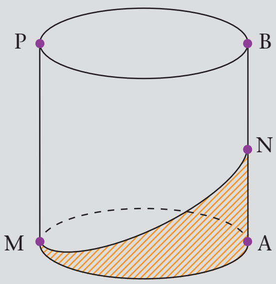
Área lateral do prisma: $S_L = 6Rh$

Área lateral do cilindro: $S_L = 2\pi Rh$

$$\frac{2\pi Rh}{6Rh} = \frac{\pi}{3}$$

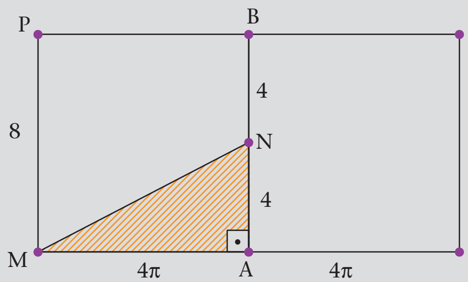
Resposta: A é razão é $\frac{\pi}{3}$.

5) A figura dada representa um cilindro equilátero, com 4 cm de raio, onde $\overline{MA}$ e $\overline{PB}$ são diâmetros paralelos e N é o ponto médio de $\overline{BA}$. Se a linha MN é o menor caminho que liga M até N pela superfície do cilindro, calcule a área da região tracejada AMN.



Solução:

Planificando o cilindro, temos:



$C = 2\pi r = 2\pi 4 = 8\pi \Rightarrow MA = 4\pi$ cm

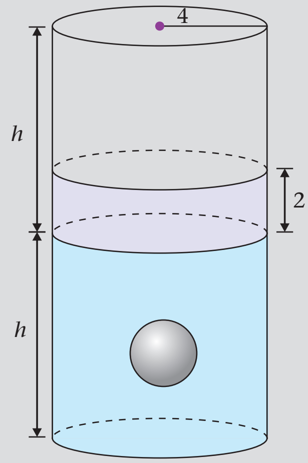
$$S_{AMN} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{16\pi}{2}$$

$$S_{AMN} = 8\pi \text{ cm}^2$$

6) Um recipiente cilíndrico reto, com raio da base igual a 4 cm, contém água até a metade de sua altura. Uma esfera maciça, colocada no seu interior, fica totalmente submersa, elevando a altura da água a 2 cm. Calcule o raio da esfera, sabendo que $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ é o volume da esfera.

Solução:

Do enunciado temos a figura:



O volume da esfera de raio R é igual ao volume de água por ela deslocado, ou seja, o volume da esfera é igual ao volume de um cilindro de raio da base 4 cm e altura 2 cm.

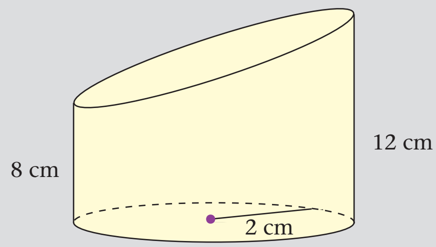
Logo:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \pi \cdot 4^2 \cdot 2$$

$R^3 = 24$

$R = 2\sqrt[3]{3}$ cm

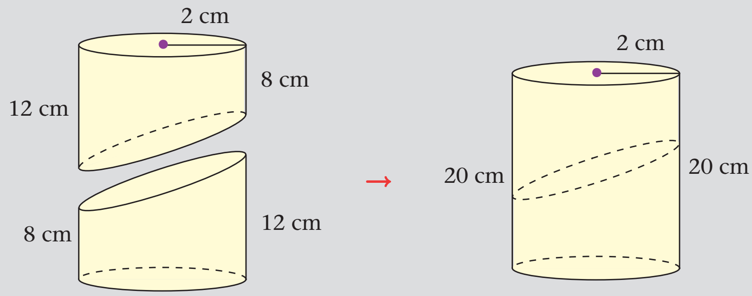
7) Em um cilindro reto de raio 2 cm, fez-se um corte transversal e uma das partes está desenhada abaixo:



Calcule seu volume.

Solução:

Como o sólido obtido não é um cilindro, então não podemos utilizar as relações aprendidas neste capítulo.
Mas se criarmos um outro sólido exatamente igual e encaixarmos o cilindro conforme sugere abaixo, passaremos a ter um cilindro.



O cilindro obtido possui raio de base 2 cm e altura 20 cm.
$V = \pi \cdot 2^2 \cdot 20 = 80\pi \text{ cm}^3$
Como o cilindro contém 2 sólidos iguais, então o volume de cada sólido é a metade do volume do cilindro.

$$V = \frac{80\pi}{2} = 40\pi \text{ cm}^3$$

8) (UFRRJ) Um caminhão pipa carrega 9,42 mil litros de água. Para encher uma cisterna cilíndrica com 2 metros de diâmetro e 3 metros de altura são necessários, no mínimo:

(A) 10 caminhões.
(B) 100 caminhões.
(C) 1 caminhão.
(D) 2 caminhões.
(E) 4 caminhões.

Solução:

Volume da cisterna: $V = \pi r^2 \cdot h \cong 3{,}14 \cdot 1^2 \cdot 3 = 9{,}42\ m^3 = 9\,420\ dm^3 = 9\,420\ L$
Esse volume é igual ao de um caminhão pipa.
Resposta: C

9) (UFRJ) Uma pizzaria vende pizzas grandes e pequenas no tradicional formato circular. As grandes têm 40 cm de diâmetro e custam R$ 18,00; as pequenas têm 20 cm de diâmetro e custam R$ 6,00. Todas têm a mesma espessura.

a) Lúcia e Raquel foram a essa pizzaria dispondo, cada uma, de R$ 10,00. Raquel propôs dividir uma pizza grande; Lúcia sugeriu que pedissem três pequenas. Qual dessas opções permite que elas comam mais?

b) Manoel e Joaquim foram a essa pizzaria, com muita fome, e gastaram R$ 60,00 em 10 pizzas pequenas. Determine de quantas outras formas eles poderiam, nessa pizzaria, gastar os mesmos R$ 60,00 em pizzas.

Solução:

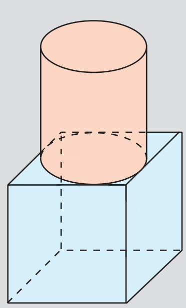
a) Opção de Raquel: $\pi \cdot 20^2 = 400\pi\ cm^2$
Opção de Lúcia: $3 \cdot \pi \cdot 10^2 = 300\pi\ cm^2$

Resposta: A opção de Raquel, que tem maior área.

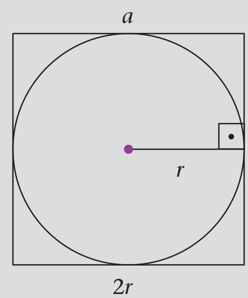
b) Nº de pizzas $\begin{cases} \text{pequenas} = p \\ \text{grandes} = g \end{cases} \Rightarrow 6 \cdot p + 18 \cdot g = 60 \Rightarrow p + 3g = 10$

Pares ordenados $(p; g) \Rightarrow (10; 0)$, $\underline{(7; 1), (4; 2) \text{ e } (1; 3)}$
Resposta: O número de outras formas é 3.

10) A figura representa um cubo e um cilindro circular reto de volumes iguais.
A base do cilindro está inscrita numa face do cubo.
Calcule a razão entre a altura do cilindro e a aresta do cubo.



Solução:



vista superior

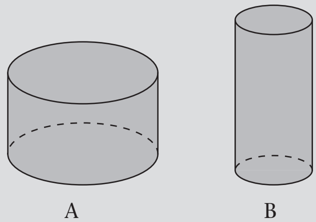
Volume do cubo: $V = a^3 = 8r^3$
Volume do cilindro: $V' = \pi r^2 \cdot h$

$V = V' \Rightarrow 8r^3 = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow 8r = \pi h \Rightarrow h = \dfrac{8r}{\pi}$

$$\frac{h}{a} = \frac{h}{2r} = \frac{\frac{8r}{\pi}}{2r} = \frac{4}{\pi}$$

Resposta: A razão é $\dfrac{4}{\pi}$.

11) (UFRJ) Um produto é embalado em latas cilíndricas (cilindros de revolução).



O raio da embalagem A é igual ao diâmetro da embalagem B e a altura de B é o dobro da altura de A. Assim:

Cilindro A $\begin{cases} \text{altura: } h \\ \text{raio da base: } 2r \end{cases}$

Cilindro B $\begin{cases} \text{altura: } 2h \\ \text{raio da base: } r \end{cases}$

a) As embalagens são feitas do mesmo material (mesma chapa). Qual delas gasta mais material para ser montada?

b) O preço do produto na embalagem A é R$ 780,00 e na embalagem B é R$ 400,00. Qual das opções é mais econômica para o consumidor, supondo-se as duas latas completamente cheias?

Solução:

a) O material gasto depende das superfícies.

$$\left.\begin{array}{l} S_A = 2\pi \cdot (2r) \cdot h + 2\pi \cdot (2r)^2 \Rightarrow S_A = 4\pi r h + 8\pi r^2 \\ S_B = 2\pi \cdot r \cdot (2h) + 2 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow S_B = 4\pi r h + 2\pi r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow S_A > S_B$$

Portanto, a embalagem A gasta mais material.

b) A mais econômica tem a menor razão preço por kg ou preço por volume.

$V_A = \pi \cdot (2r)^2 \cdot h = 4\pi r^2 h$ custa R$ 780,00

$V_B = \pi \cdot r^2 \cdot 2h = 2\pi r^2 h$ custa R$ 400,00 $\Rightarrow 4\pi r^2 h$ custa R$ 800,00

Portanto, a embalagem A é mais econômica.

12) (UFRJ) Mário e Paulo possuem piscinas em suas casas. Ambas têm a mesma profundidade e bases com o mesmo perímetro. A piscina de Mário é um cilindro circular reto e a de Paulo é um prisma reto de base quadrada. A companhia de água da cidade cobra R$ 1,00 por metro cúbico de água consumida.

a) Determine qual dos dois pagará mais para encher de água a sua piscina.

b) Atendendo a um pedido da família, Mário resolve duplicar o perímetro da base e a profundidade de sua piscina, mantendo, porém, a forma circular. Determine quanto Mário pagará pela água para encher a nova piscina, sabendo que anteriormente ele gastava R$ 50,00.

Solução:

a) Sendo: piscina de Mário $\rightarrow$ M; piscina de Paulo $\rightarrow$ P

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Perímetro M:} & 2\pi r \\ \text{Perímetro P:} & 4\ell \end{array}\right\} 4\ell = 2\pi r \Rightarrow \frac{r}{\ell} = \frac{2}{\pi}$$

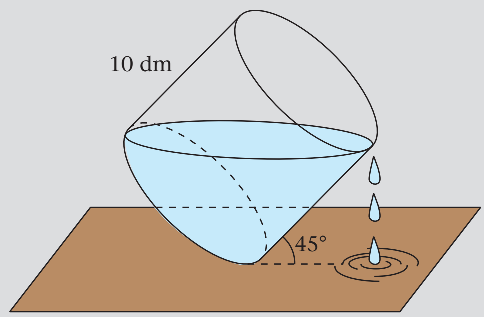
$$\left.\begin{array}{l} \text{Volume M: } V_M \quad \pi r^2 \cdot h \\ \text{Volume P: } V_P = \ell^2 \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{V_M}{V_P} = \frac{\pi r^2}{\ell^2} = \pi \cdot \left(\frac{r}{\ell}\right)^2 = \pi \cdot \left(\frac{4}{\pi^2}\right) = \frac{4}{\pi} \Rightarrow V_M > V_P$$

Logo, Mário pagará mais.

b) $V'_M = \pi \cdot (2r)^2 \cdot 2h = 8\underbrace{\pi r^2 \cdot h}_{V_M} \Rightarrow$ Mário pagará $8 \cdot 50{,}00 =$ R$ 400,00

13) (PUC-RJ) Um tonel cilíndrico, sem tampa e cheio de água, tem 10 dm de altura e 5 dm de raio da base. Inclinando-se o tonel de 45°, qual é o volume da água derramada?

Solução:



Esse tonel é um cilindro equilátero. Inclinando-o 45°, uma diagonal da secção meridiana, que é um quadrado, fica horizontal; portanto, metade do volume é derramado: $V_d = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 10$

$$V_d = 125\pi \cong 392 \text{ dm}^3$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Se a área lateral é igual à área da base num cilindro de revolução de altura *h*, qual é o volume?

2 A área total de um cilindro é 180 m^2. Calcule a área lateral, sabendo-se que a altura é igual ao dobro do raio da base.

3 Determine a área lateral e a área total de um cilindro cujo raio da base vale $\frac{1}{2}$ cm, sendo a altura igual ao comprimento da circunferência da base.

4 Quantos mililitros de tinta podem ser acondicionados no reservatório cilíndrico de uma caneta esferográfica, sabendo que seu diâmetro é 2 mm e seu comprimento é 12 cm?

5 Determine a área total do cilindro equilátero cujo volume é 128π cm^3.

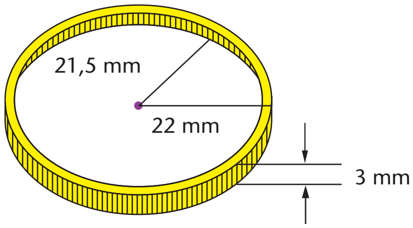
6 Um reservatório que tem a forma de um cilindro reto contém um volume de água igual a $\frac{2}{3}$ de sua capacidade. Se forem retirados 50 litros do líquido, a altura do seu nível baixará de 10%. Determine o volume total do reservatório, em litros.

7 Num cilindro circular de altura 6 cm e raio da base 5 cm, determine:

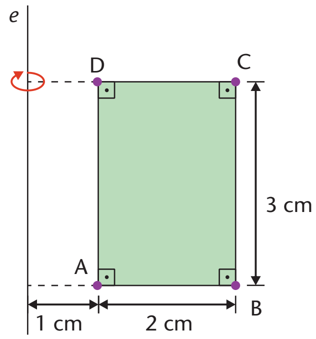
a) a área da secção meridiana;

b) a área de uma secção determinada por um plano paralelo ao eixo, distante 4 cm do eixo.

8 Calcular a massa do ouro utilizado para fazer a aliança indicada no desenho abaixo, sabendo que a massa específica do ouro é 20 g/cm^3. A aliança tem raio externo 22 mm, raio interno 21,5 mm e altura de 3 mm.



9 Determine a área e o volume do sólido obtido pela rotação completa do polígono ABCD em torno do eixo *e* indicado.



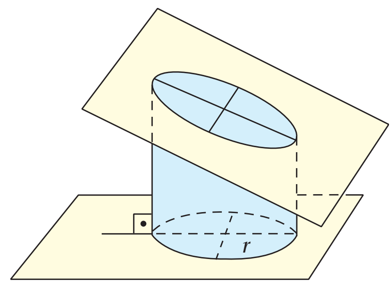
10 A área da secção meridiana de um cilindro equilátero é 100 m^2. Qual a sua área total?

12.6.1 – Tronco de cilindro

DEFINIÇÃO
Tronco de cilindro.

Tronco de cilindro é o sólido limitado por uma superfície cilíndrica e por dois planos não paralelos que cortam todas as geratrizes do cilindro.

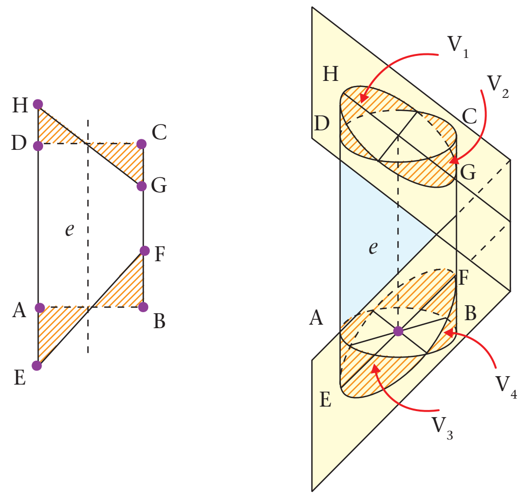
NOTA
As secções desses planos na superfície cilíndrica circular são elipses ou círculos.



Teorema

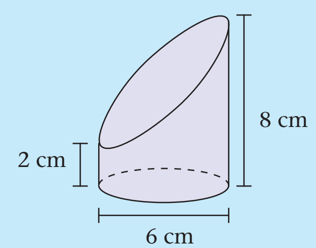
Todo tronco de cilindro de revolução tem o mesmo volume que um cilindro de revolução de mesma secção reta que o tronco e de altura igual à medida do eixo do tronco.

Basta observar na figura abaixo que $V_1 = V_2$ e $V_3 = V_4$.



Exemplo:

Um cilindro reto com diâmetro de base igual a 6 cm é seccionado por um plano oblíquo a ela, que determina, no cilindro, alturas entre 2 cm e 8 cm, como indicado na figura. Qual é o volume, em cm^3?



$$h_m = \frac{2+8}{2} = 5 \text{ cm (medida do eixo do tronco)}$$

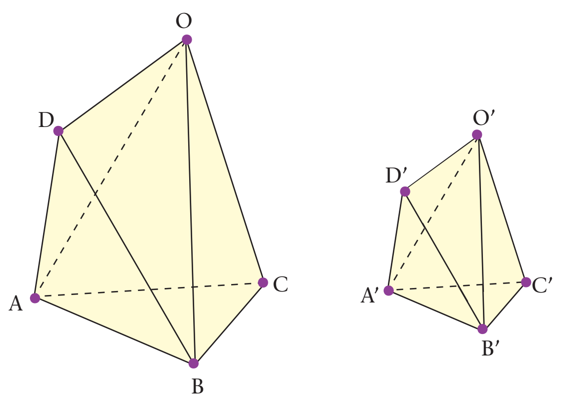
$$V = B \cdot h_m \Rightarrow V = \pi \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$V = 45\pi \text{ cm}^3$$

12.7 – Semelhança de poliedros

Dois **poliedros** são **semelhantes** quando têm o mesmo número de faces respectivamente semelhantes dispostas, tendo seus ângulos poliédricos homólogos congruentes.

DEFINIÇÃO
Poliedros semelhantes.



NOTA
"Homólogos" é o mesmo que "correspondentes".

NOTA
A igualdade dos ângulos poliédricos implica a igualdade dos ângulos diedros homólogos.

Propriedades

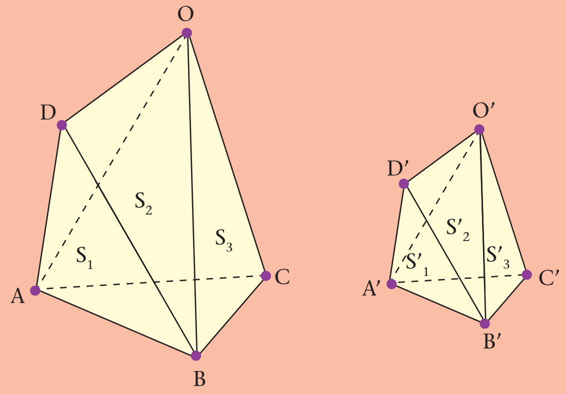
1) As arestas homólogas de dois poliedros semelhantes são proporcionais.

2) A razão da semelhança das arestas é a mesma que de quaisquer linhas homólogas.

3) As faces homólogas de poliedros semelhantes têm suas áreas proporcionais aos quadrados das linhas homólogas.
Portanto, a razão entre as áreas totais de dois poliedros semelhantes também é igual ao quadrado da razão de suas linhas homólogas. De fato, se S_1, S_2, S_3, ... e S'_1, S'_2, S'_3, ... são as áreas das faces homólogas correspondentes, temos:

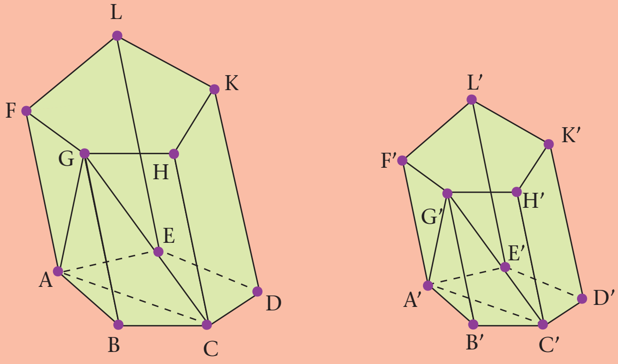
$$k^2 = \frac{S_1}{S'_1} = \frac{S_2}{S'_2} = \frac{S_3}{S'_3} = \ldots = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \ldots}{S'_1 + S'_2 + S'_3 + \ldots}$$

NOTA
As relações de semelhança são válidas para dois cilindros.



Então: $\dfrac{S_T}{S'_T} = k^2$

4) Os volumes de dois poliedros semelhantes estão entre si assim como os cubos das linhas homólogas.



Por exemplo, para prismas, basta ver que $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{Bh}{B'h'}$.

Mas $\dfrac{B}{B'} = \dfrac{(AB)^2}{(A'B')^2}$ e $\dfrac{h}{h'} = \dfrac{AB}{A'B'}$ logo, $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{(AB)^2}{(A'B')^2} \cdot \dfrac{AB}{A'B'}$,

ou seja: $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{(AB)^3}{(A'B')^3}$

Fazendo $\dfrac{AB}{A'B'} = k$, então: $\dfrac{V}{V'} = k^3$

Exemplos:

i) Se a relação entre as áreas de dois cubos é $\frac{25}{49}$, determine a razão entre suas arestas e seus volumes.

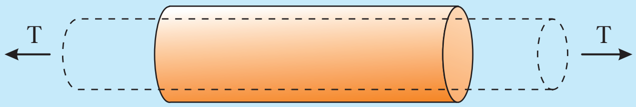
Temos que: $\frac{6a^2}{6A^2} = \frac{25}{49} \Rightarrow \left(\frac{a}{A}\right)^2 = \frac{25}{49} \Rightarrow \frac{a}{A} = \frac{5}{7}$

Logo, a razão entre os volumes será:

$$\frac{V}{V'} = k^3$$

$$\frac{V}{V'} = \left(\frac{a}{A}\right)^3 = \left(\frac{5}{7}\right)^3 \Rightarrow \frac{V}{V'} = \frac{125}{343}$$

ii) (Cesgranrio-RJ) Um bloco cilíndrico de volume V deforma-se quando submetido a uma tração T, conforme indicado esquematicamente na figura. O bloco deformado, ainda cilíndrico, está indicado por linhas tracejadas. Neste processo a área da secção reta diminui de 10% e o comprimento aumenta de 20%. O volume do bloco deformado é:



(A) 0,90 V
(B) V
(C) 1,08 V
(D) 1,20 V
(E) 1,80 V

Sabemos que:
$V = B \cdot h$, logo:
$V' = (90\%\ B) \cdot (120\%\ h) = 0{,}9B \cdot 1{,}2h = 1{,}08Bh = 1{,}08V$
Resposta: C

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (Uerj) Com uma chapa plana delgada, de espessura uniforme e massa homogeneamente distribuída, construíram-se duas peças: uma com a forma de um cubo (Fig. A) e a outra com a forma de um poliedro com 9 faces, formado a partir de um outro cubo congruente ao primeiro, onde as três faces menores são quadrados congruentes (Fig. B).

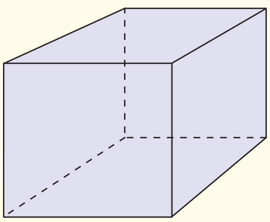


Fig. A

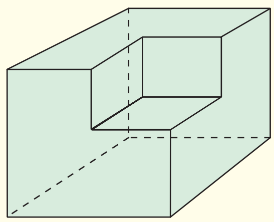


Fig. B

As informações acima possibilitam a seguinte conclusão:

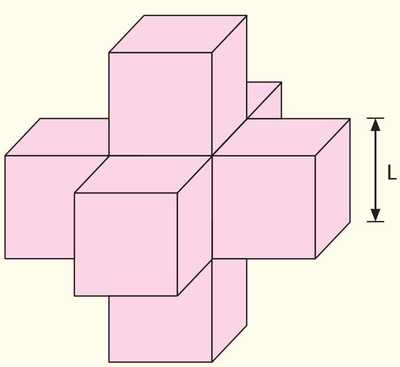
(A) o peso de A é igual ao de B.

(B) o volume de A é igual ao de B.

(C) a superfície de A é maior que a de B.

(D) a superfície de A é menor que a de B.

2 (UFF-RJ) O sólido abaixo representado possui todas as arestas iguais a L.



Sabendo-se que todos os ângulos entre duas faces adjacentes são retos, pode-se afirmar que o seu volume é:

(A) $7L^3$

(B) $9L^3$

(C) $11L^3$

(D) $19L^3$

(E) $27L^3$

3 (Fuvest-SP) O volume de um paralelepípedo reto retângulo é 240 cm^3. As áreas de duas de suas faces são 30 cm^2 e 48 cm^2. A área total do paralelepípedo, em cm^2, é:

(A) 96

(B) 118

(C) 236

(D) 240

(E) 472

4 (PUC-RJ) Um cubo tem área total igual a 72 m^2; sua diagonal vale:

(A) $2\sqrt{6}$

(B) 6

(C) $\sqrt{6}$

(D) $\sqrt{12}$

(E) $2\sqrt{24}$

5 (Mack-SP) Aumentando-se de 1 m a aresta de um cubo, a sua área lateral aumenta de 164 m^2. O volume do cubo original é:

(A) 6000 m^3

(B) 7000 m^3

(C) 8000 m^3

(D) 12000 m^3

(E) 16400 m^3

6 (Mack-SP) Em um paralelepípedo retângulo a diagonal mede $2\sqrt{83}$ cm. Se as suas arestas são proporcionais aos números 3, 5 e 7, o seu volume é:

(A) 332 cm^3

(B) 405 cm^3

(C) 620 cm^3

(D) 740 cm^3

(E) 840 cm^3

7 (Cescea-SP) Seja um paralelepípedo retângulo de arestas a, b e c. Determinar o seu volume sabendo-se que a área total é $4a^2$ e que c é o dobro de b.

(A) $\frac{2a^3}{3}$

(B) $\frac{a^3}{3}$

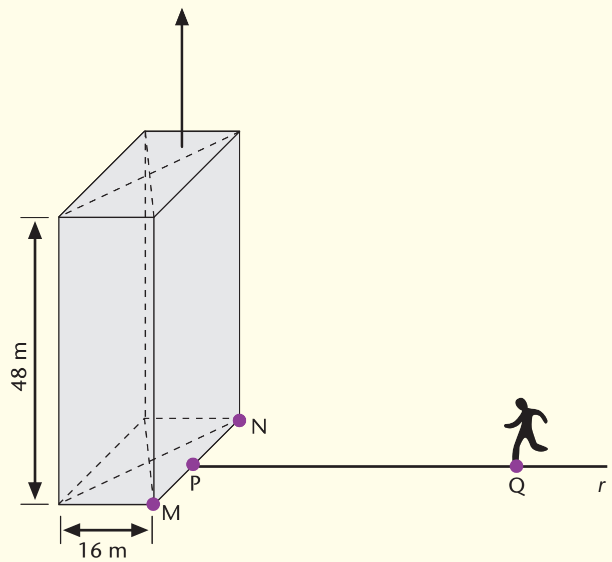
(C) $\frac{a^3}{2}$

(D) a^3

(E) Não sei.

8 (UFF-RJ) Um prédio com a forma de um paralelepípedo retângulo tem 48 m de altura. No centro da cobertura desse prédio e perpendicularmente a essa cobertura, está instalado um para-raios. No ponto Q sobre a reta r – que passa pelo centro da base do prédio e é

perpendicular a $\overline{MN}$ – está um observador que avista somente uma parte do para-raios (ver a figura).



A distância do chão aos olhos do observador é 1,8 m e PQ = 61,6 m.
O comprimento da parte do para-raios que o observador não consegue avistar é:

(A) 16 m
(B) 12 m
(C) 8 m
(D) 6 m
(E) 3 m

9 (Cescem-SP) Um paralelepípedo retângulo tem 142 cm² de superfície total e a soma dos comprimentos de suas arestas vale 60 cm. Sabendo que os seus lados estão em progressão, eles valem (em cm):

(A) 2, 5, 8
(B) 1, 5, 9
(C) 12, 20, 28
(D) 4, 6, 8
(E) 3, 5, 7

10 (PUC-RJ) A área total de um paralelepípedo retângulo mede 28 m² e a diagonal $\sqrt{21}$ m. Sabendo que as dimensões a, b e c estão em progressão geométrica, temos:

(A) $a = 1$ m, $b = 2$ m, $c = 3$ m
(B) $a = 1$ m, $b = 2$ m, $c = 5$ m
(C) $a = 1$ m, $b = 2$ m, $c = 4$ m
(D) $a = 1$ m, $b = 2$ m, $c = 6$ m
(E) $a = 1$ m, $b = 2$ m, $c = 2$ m

11 (Fafi-MG) Um prisma quadrangular reto possui altura de 5 cm, e um dos lados da base mede 2 cm. Sua área lateral, em centímetros quadrados, é:

(A) 28
(B) 40
(C) 48
(D) 60

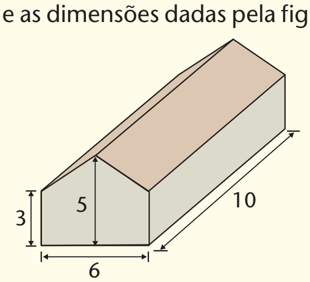
12 (PUC-RJ) A base de um prisma reto é um triângulo de lados iguais a 5 m, 5 m e 8 m e a altura tem 3 m; o seu volume será:

(A) 12 m³
(B) 24 m³
(C) 36 m³
(D) 48 m³
(E) 60 m³

13 (Cescea-SP) O volume do prisma hexagonal regular reto, de altura $\sqrt{3}$ cm e cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm, é:

(A) 18 cm³
(B) $6\sqrt{3}$ cm³
(C) 3 cm³
(D) $\sqrt{3}$ cm³
(E) Não sei.

14 (Cescem-SP) O volume de ar contido em um galpão com a forma e as dimensões dadas pela figura abaixo é:

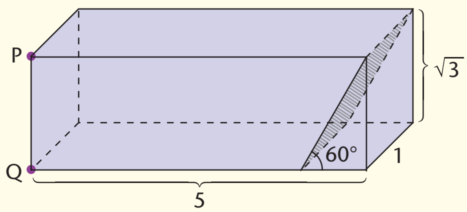


(A) 300
(B) 240
(C) 225
(D) 210
(E) 180

15 (Cesgranrio-RJ) Dado um cubo de aresta a, o ângulo sob o qual um observador situado no centro do cubo vê a diagonal de uma das faces é:

(A) um ângulo cuja tangente é $2\sqrt{2}$.
(B) um ângulo cujo seno é $2\frac{\sqrt{2}}{3}$.
(C) Um ângulo cujo cosseno é $-\frac{1}{3}$.
(D) Um ângulo cuja secante é $-\sqrt{3}$.
(E) Um ângulo cujo seno é $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

16 (Mack-SP) Um paralelepípedo reto-retângulo tem arestas 5, 1, $\sqrt{3}$, como mostra a figura. Um plano passando por uma aresta forma com a base um ângulo de 60° e divide o paralelepípedo em dois sólidos. O volume do sólido que contém $\overline{PQ}$ é:



(A) $\frac{14\sqrt{3}}{3}$

(B) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

17 (Unirio-RJ) Uma piscina na forma de um paralelepípedo retângulo tem 8 m de comprimento, 6 m de largura e 3 m de profundidade. Um nadador que estava totalmente submerso na piscina verificou que, ao sair, o nível da água baixou 0,5 cm.
O volume do nadador, em dm^3, é igual a:

(A) 480

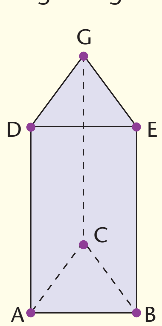
(B) 360

(C) 300

(D) 240

(E) 120

18 (Fuvest-SP) Uma formiga resolveu andar de um vértice a outro do prisma reto de bases triangulares ABC e DEG, seguindo um trajeto especial. Ela partiu do vértice G, percorreu toda a aresta perpendicular à base ABC, para em seguida caminhar toda a diagonal da face ADGC e, finalmente, completou seu passeio percorrendo a aresta reversa a $\overline{CG}$. A formiga chegou ao vértice:



(A) A

(B) B

(C) C

(D) D

(E) E

19 (UFPE) Dois cubos, C_1 e C_2, são tais que a aresta de C_1 é igual à diagonal de C_2. Se V_1 e V_2 são, respectivamente, os volumes dos cubos C_1 e C_2, então, a razão $\frac{V_1}{V_2}$ é igual a:

(A) $\sqrt[3]{3}$

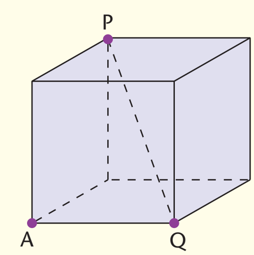
(B) $\sqrt{27}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{27}}$

(D) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

(E) $\sqrt[3]{9}$

20 (Mack-SP) No cubo da figura abaixo, a distância do vértice A à diagonal PQ é $\sqrt{6}$. Então, o volume do cubo é:



(A) $9\sqrt{3}$

(B) $8\sqrt{3}$

(C) 27

(D) 64

(E) 125

21 (Puccamp-SP) Deseja-se construir um recipiente fechado com volume de 0,5 m^3. Seu formato deverá ser o de um paralelepípedo retângulo, com altura de y metros e base quadrada de aresta x metros. O material para a confecção das faces laterais custa R$ 1,50 o metro quadrado, e o material para a tampa e a base custam R$ 2,50 o metro quadrado. Se P é o custo de todo o material usado, em reais, deve-se ter:

(A) $P = 3x^2 + \frac{5}{x}$

(B) $P = 5x^2 + \frac{3}{x}$

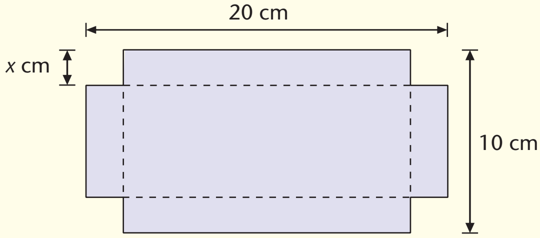
(C) $P = 5x^2 + 3x$

(D) $P = 3x^2 + 5x$

(E) $P = 8x^2$

22 (Vunesp-SP) Considere um pedaço de cartolina retangular de lado menor 10 cm e lado maior 20 cm. Retirando-se 4 quadrados iguais de lados x cm (um quadrado de cada canto) e dobrando-se na linha tracejada conforme mostra a figura, obtém-se uma pequena caixa retangular sem tampa.

O polinômio na variável x que representa o volume desta caixa, em cm³, é:



(A) $4x^3 - 60x^2 + 200x$

(B) $4x^2 - 60x + 200$

(C) $4x^3 - 60x^2 + 200$

(D) $x^3 - 30x^2 + 200x$

(E) $x^3 - 15x^2 + 50x$

23 (ESPM-SP) Uma caixa tem o formato de um paralelepípedo reto cuja base é um retângulo ABCD, com AB = 8 dm e AD = 15 dm, e cuja altura é 20 dm.
Essa caixa inicialmente se encontra destampada, cheia de água e apoiada num chão horizontal.
Em seguida, ela se inclina, mantendo sua aresta AB no chão, até que metade de sua água seja derramada.
Nesse exato instante, a distância do seu vértice D ao chão, em dm, é:

(A) 10

(B) 11

(C) 12

(D) 13

(E) 14

24 (Mack-SP) As dimensões a, b, e c de um paralelepípedo reto-retângulo são tais que $a > b > c$. Aumentando-se a de 25% e mantendo b constante, para que o volume do paralelepípedo mantenha-se o mesmo, a dimensão c deve ser diminuída de:

(A) 15%

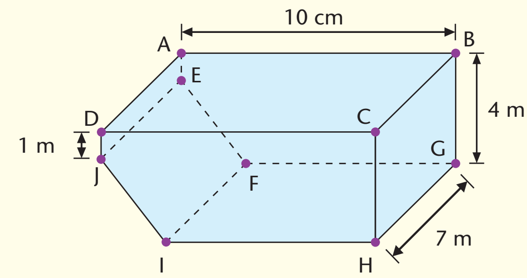
(B) 18%

(C) 20%

(D) 25%

(E) 28%

25 (UFMG) Observe a figura a seguir. Ela representa uma piscina retangular com 10 m de comprimento e 7 m de largura. As laterais AEJD e BGHC são retângulos, situados em planos perpendiculares ao plano que contém o retângulo ABCD. O fundo da piscina tem uma área total de 77 m² e é formado por dois retângulos, FGHI e EFIJ. O primeiro desses retângulos corresponde à parte da piscina onde a profundidade é de 4 m e o segundo, à parte da piscina onde a profundidade varia entre 1 m e 4 m. A piscina, inicialmente vazia, recebe água à taxa de 8 000 litros por hora.
Assim sendo, o tempo necessário para encher totalmente a piscina é de:



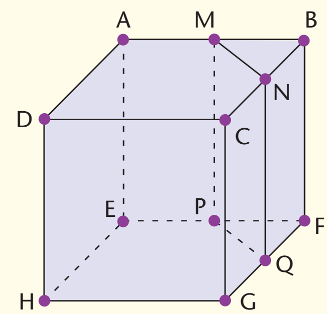
(A) 29 h e 30 min

(B) 30 h e 15 min

(C) 29 h e 45 min

(D) 30 h e 25 min

26 (FEI-SP) Os pontos médios das arestas AB, BC, EF e FG do cubo ABCDEFGH são M, N, P e Q. Quanto vale a razão entre o volume do prisma BMNFPQ e o volume do cubo?



(A) $\frac{1}{3}$

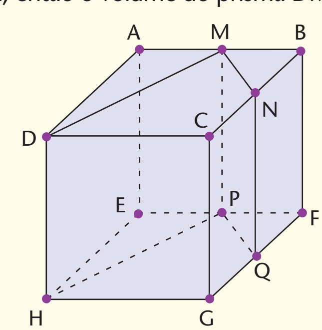
(B) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{4}$

(E) $\frac{1}{8}$

27 (Vunesp-SP) As arestas do cubo ABCDEFGH, representado pela figura, medem 1 cm.
Se M, N, P e Q são os pontos médios das arestas a que pertencem, então o volume do prisma DMNCHPQG é:



(A) 0,625 cm³

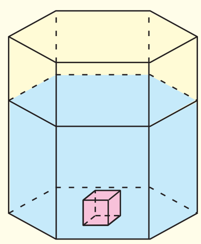
(B) 0,725 cm³

(C) 0,745 cm³

(D) 0,825 cm³

(E) 0,845 cm³

28 (UCDB-MS) Um recipiente em forma de prisma hexagonal regular contém um líquido até certo nível. Colocando-se nesse recipiente um cubo, o nível do líquido aumenta de 2 dm. Sabendo-se que a aresta da base do recipiente mede 3 dm, conclui-se que a aresta do cubo mede, em dm:



(A) $2\sqrt[3]{2}$

(B) $3\sqrt{2}$

(C) $3\sqrt[6]{3}$

(D) $3\sqrt[6]{6}$

(E) $3\sqrt[5]{3}$

29 (Unificado-RJ) Uma caixa-d'água com forma de um paralelepípedo retângulo terá seu volume reduzido à metade do que tinha sido projetado inicialmente. Para isso, o construtor deverá diminuir as dimensões da base dessa caixa de 20% e 50%, respectivamente. Já, em relação à medida da altura dessa caixa-d'água, o construtor irá:

(A) aumentá-la de 15%.

(B) aumentá-la de 25%.

(C) aumentá-la de 30%.

(D) diminuí-la de 25%.

(E) diminuí-la de 30%.

30 (Unirio-RJ) Um engenheiro vai projetar uma piscina, em forma de paralelepípedo reto-retângulo, cujas medidas internas são, em m, expressas por x, $20 - x$ e 2. O maior volume que esta piscina poderá ter, em m^3, é igual a:

(A) 240

(B) 220

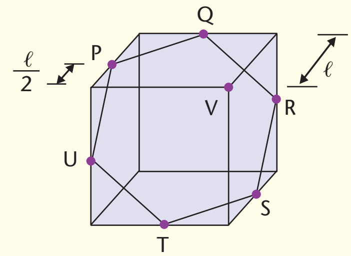
(C) 200

(D) 150

(E) 100

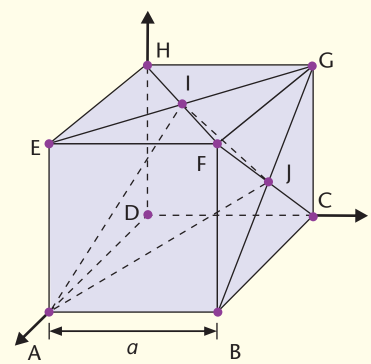
31 (UFRJ) Uma certa quantidade de material é compactado, tomando a forma de um cubo de aresta igual a uma unidade. Pretende-se revesti-lo com uma camada isolante, de espessura e formato tais que cada ponto da superfície externa do sólido a ser obtido diste exatamente uma unidade do cubo radioativo.
Determine o volume ocupado pelo isolante.

32 (UFF-RJ) Unindo-se os pontos médios das arestas de um cubo de aresta ℓ, obtém-se um hexágono regular, PQRSTU, conforme a figura abaixo.



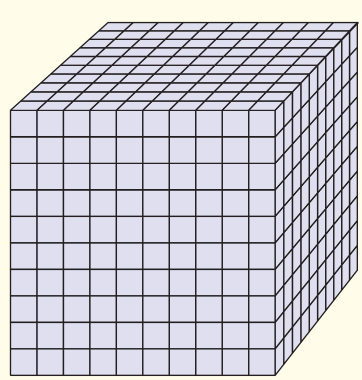
Determine a distância do vértice V ao plano do hexágono.

33 (PUC-RJ) Considere o cubo de lado a (ver figura). Calcule o comprimento dos lados do triângulo AIJ onde I e J são os centros das faces EFGH e BFGC, respectivamente.



34 A soma das medidas de todas as arestas de um paralelepípedo retângulo é 48 cm e sua área total é 94 cm^2. Determine a medida de sua diagonal.

35 Um cubo é formado de 1000 "cubinhos" congruentes e cinco de suas faces, excetuando-se a base, foram pintadas.



Desmontando-se essa pilha de "cubinhos", verificamos que há "cubinhos" que estão pintados em uma face, duas faces e três faces. O número de "cubinhos" pintados em apenas duas faces é igual a:

(A) 80
(B) 72
(C) 68
(D) 64
(E) 60

36 (UFJF-MG) Aumentando-se o raio de um cilindro em 4 cm e mantendo-se a sua altura, a área lateral do novo cilindro é igual à área total do cilindro original. Sabendo-se que a altura do cilindro original mede 1 cm, então o seu raio mede, em cm:

(A) 1
(B) 2
(C) 4
(D) 6

37 (Uepa) Uma fábrica precisa produzir uma embalagem cilíndrica para acondicionar um de seus produtos, todavia pretende investir na apresentação e na economia do material a ser gasto. Nesse sentido foram pensados dois tipos de embalagens cilíndricas (figuras 1 e 2). O material gasto no revestimento de cada embalagem corresponde às suas áreas totais S_1 e S_2, respectivamente.

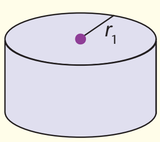


figura 1

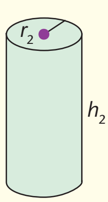


figura 2

Considerando $r_1 = r$ e $r_2 = \frac{r}{2}$; $h_1 = r$ e $h_2 = 2r$, um técnico conseguiu detectar que:

(A) $S_1 = S_2$
(B) $S_1 > S_2$
(C) $S_1 < S_2$
(D) $S_1 = 2S_2$
(E) $S_1 = \frac{S_2}{2}$

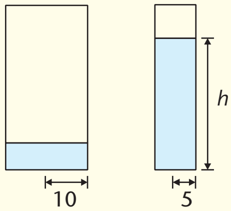
38 (Cesgranrio-RJ) Um salame tem a forma de um cilindro reto com 40 cm de altura e pesa 1 kg. Tentando servir um freguês que queria meio quilo de salame, João cortou um pedaço, obliquamente, de modo que a altura do pedaço variava entre 22 cm e 26 cm. O peso do pedaço é de:

(A) 600 g
(B) 610 g
(C) 620 g
(D) 630 g
(E) 640 g

39 (Cescem-SP) O líquido contido em uma lata cilíndrica deve ser distribuído em potes também cilíndricos cuja altura é $\frac{1}{4}$ da altura da lata e cujo diâmetro da base é $\frac{1}{3}$ do diâmetro da base da lata. O número de potes necessários é:

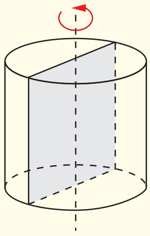
(A) 6 (B) 12 (C) 18 (D) 24 (E) 36

40 (UEL-PR) Dois recipientes cilíndricos têm altura de 40 cm e raio da base medindo 10 cm e 5 cm. O maior deles contém água até $\frac{1}{5}$ de sua capacidade.
Essa água é despejada no recipiente menor, alcançando a altura *h* de:



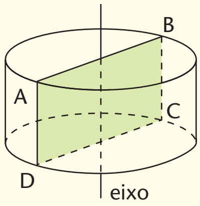
(A) 32 cm
(B) 24 cm
(C) 16 cm
(D) 12 cm
(E) 10 cm

41 A área lateral de um cilindro de revolução é metade da área da base. Se o perímetro de sua secção meridiana é 18 m, o volume vale:



(A) 8π m³
(B) 10π m³
(C) 12π m³
(D) 16π m³
(E) 20π m³

42 (UFMG) Num cilindro de 5 cm de altura, a área da base é igual à área de uma secção por um plano que contém o eixo do cilindro, tal como a secção ABCD na figura abaixo.
O volume desse cilindro é de:



(A) $\dfrac{250}{\pi}$ cm^3

(B) $\dfrac{500}{\pi}$ cm^3

(C) $\dfrac{625}{\pi}$ cm^3

(D) $\dfrac{125}{\pi}$ cm^3

43 (Fatec-SP) Sabe-se que um cilindro de revolução de raio igual a 10 cm, quando cortado por um plano paralelo ao eixo, a uma distância de 6 cm desse eixo, apresenta uma secção retangular equivalente à base. O volume desse cilindro, em centímetros cúbicos, é:

(A) $1\,250\pi$

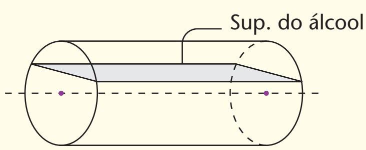
(B) $1\,250\pi^2$

(C) $6{,}25\pi^2$

(D) 625π

(E) $625\pi^2$

44 Um cilindro com eixo horizontal de 15 m de comprimento e diâmetro interno de 8 m contém álcool. A superfície livre do álcool determina um retângulo de área 90 m^2. Qual o desnível entre essa superfície e a geratriz de apoio do cilindro?



(A) 6 m

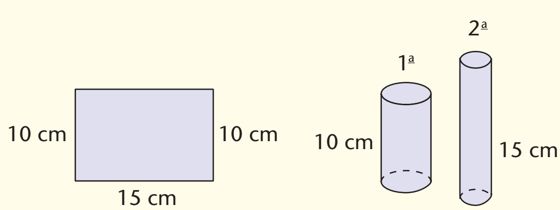
(B) $\sqrt{7}$ m

(C) $(4 - \sqrt{7})$ m

(D) $(4 + \sqrt{7})$ m

(E) $(4 - \sqrt{7})$ m ou $(4 + \sqrt{7})$ m

45 (FGV-SP) Um retângulo metálico medindo 15 cm por 10 cm pode ser utilizado para formar a superfície lateral de uma lata de dois modos distintos, como mostra a figura. O volume da primeira lata é:



(A) igual ao da segunda lata.

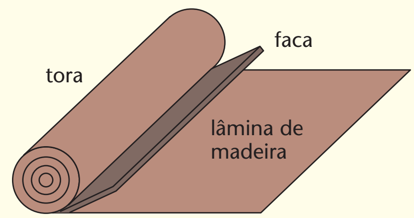
(B) 15% maior que o da segunda lata.

(C) 25% maior que o da segunda lata.

(D) 50% maior que o da segunda lata.

(E) o dobro do da segunda lata.

46 (UFPR) A obtenção de lâminas de madeira para a fabricação de compensados consiste em se colocar uma tora em um torno e cortá-la, ao mesmo tempo em que é girada, com uma faca disposta paralelamente ao eixo da tora. O miolo da tora não é utilizado para a produção de lâminas.



Uma tora em forma de cilindro circular reto de 40 cm de diâmetro e 2 m de comprimento será utilizada para obter lâminas de 0,1 cm de espessura e 2 m de largura. Considere que: a parte utilizada da tora seja transformada em lâmina, sem perda de madeira; o miolo não utilizado da tora seja um cilindro circular reto com 10 cm de diâmetro; a lâmina obtida, quando estendida sobre uma superfície plana, seja um paralelepípedo retângulo de 0,1 cm de altura. Nessas condições, é correto afirmar que:

I) o volume da tora é $0{,}08\pi$ m^3.

II) o volume da lâmina obtida é $0{,}075\pi$ m^3.

III) quando se tiver utilizado 0,02 m^3 da tora, o comprimento da lâmina obtida será 10 m.

IV) de uma lâmina de 5 m de comprimento, poderão ser recortadas 16 chapas retangulares de base 30 cm, altura 2 m e espessura 0,1 cm.

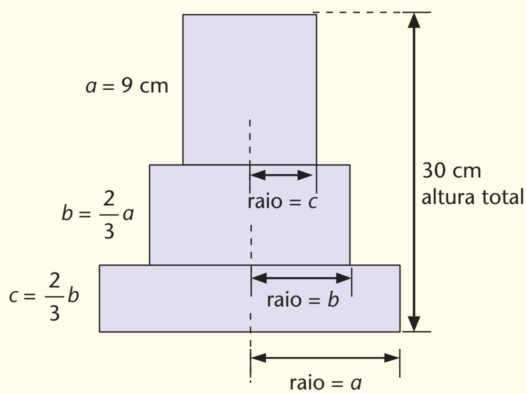
V) durante o processo de obtenção da lâmina, a cada giro completo da tora corresponde um comprimento de lâmina, em centímetros, e a sequência desses comprimentos é uma progressão aritmética de razão $-0{,}1\pi$.

47 (Mack-SP) Um vazamento, em um navio tanque, provoca o aparecimento de uma mancha de óleo que tem forma circular e espessura constante de 2,5 cm, como na figura. O raio da mancha, t minutos depois do início do vazamento, é dado, em metros, pela relação $r(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{5}$.

Adotando $\pi = 3$, o volume, em m^3, de óleo vazado, após 4 minutos do início do vazamento, é:

(A) 0,014
(B) 0,016
(C) 0,08
(D) 0,02
(E) 0,012

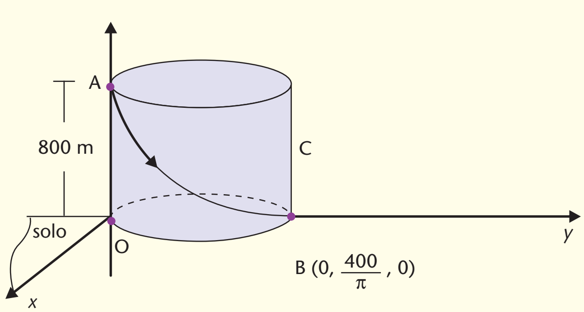
48 (UEL-PR) Certa peça de um motor é feita de aço maciço e tem a forma de três cilindros retos, de alturas iguais, um sobre o outro. Se a peça for seccionada por um plano contendo os centros das bases dos cilindros, tem-se a situação ilustrada abaixo.



O volume dessa peça, em centímetros cúbicos, é:

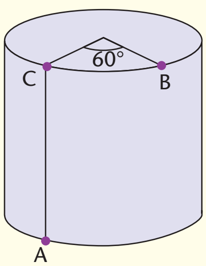
(A) $1\,580\pi$
(B) $1\,330\pi$
(C) $1\,170\pi$
(D) 970π
(E) 190π

49 (UFRJ) Um paraquedista está no ponto A situado a 800 m do solo e, devido a condições técnicas, é obrigado a seguir uma trajetória que está sempre na superfície lateral do cilindro C de revolução cujo raio r da base é igual a $\frac{200}{\pi}$ m.



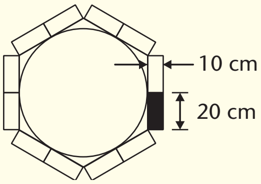
Determine o comprimento do menor caminho percorrido pelo paraquedista para atingir o ponto de pouso $B(0, \frac{400}{\pi}, 0)$.

50 (UFPE) Na figura abaixo, os pontos A e B estão nos círculos das bases de um cilindro reto, de raio da base $\frac{15}{\pi}$ e altura 12. Os pontos A e C pertencem a uma geratriz do cilindro e o arco $\overset{\frown}{BC}$ mede 60 graus. Qual a menor distância entre A e B medida sobre a superfície do cilindro?



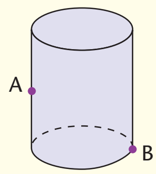
(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

51 Uma chaminé cilíndrica de volume $\frac{6\pi}{5}$ m^3 será revestida por tijolos de dimensões, em cm, $20 \times 10 \times 5$. Considerando a figura como a chaminé vista de cima, cujo revestimento nos dá a ideia da forma hexagonal, pode-se afirmar que a quantidade aproximada de tijolos necessária para revesti-la será de:



(A) 1 200
(B) 2 400
(C) 3 600
(D) 9 600
(E) 12 000

52 (Unirio-RJ) Considere um cilindro equilátero de raio R. Os pontos A e B são pontos da secção meridiana do cilindro, sendo A o ponto médio da geratriz. Se amarrarmos um barbante esticado do ponto A ao ponto B, sua medida deverá ser:



(A) $R\sqrt{5}$

(B) $R\sqrt{1+\pi^2}$

(C) $R\sqrt{1+4\pi^2}$

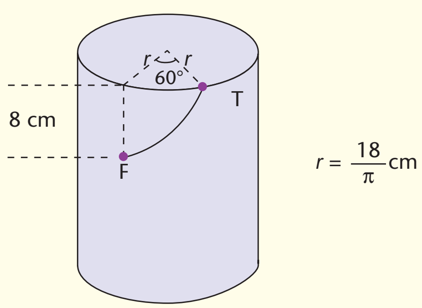
(D) $R\sqrt{4+\pi^2}$

(E) $2R\sqrt{2}$

53 (Unirio-RJ) Um recipiente com a forma de um cilindro reto, cujo diâmetro da base mede 40 cm e altura $\frac{100}{\pi}$ cm, armazena um certo líquido, que ocupa 40% de sua capacidade. O volume do líquido contido nesse recipiente é, em litros, aproximadamente, igual a:

(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 30 (E) 40

54 O caminho mais curto entre uma formiga (F) e um torrão de açúcar (T) sobre a superfície de um copo cilíndrico, já está traçado. Veja a figura.



O problema é que a formiga tem, no máximo, 5 s para chegar ao torrão, caso contrário, ele fica para uma mosca. Qual deve ser, então, a velocidade média mínima da formiga para não perder o seu doce?

55 (UFPI) Uma lata de forma cilíndrica, com tampa, deve ser construída com 60 cm^2 de folha de alumínio. Se *r* é o raio da base e *h* é a altura da lata que proporcionam o volume máximo, então valor de $\frac{r}{h}$ é:

(A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{4}$

56 (FEI-SP) No projeto de um prédio foi inicialmente prevista a construção de um reservatório de água com formato cilíndrico, cujas medidas seriam: raio da base igual a 2 m e altura igual a 3 m. Depois, foi constatado que o volume do reservatório havia sido subestimado, sendo necessário, na verdade, o dobro do volume inicialmente previsto. Qual deverá ser a medida do raio da base, sabendo que a altura do reservatório não poderá ser alterada?

(A) 4 m

(B) 3 m

(C) $2\sqrt{2}$ m

(D) $\sqrt{2}$ m

(E) 6 m

57 (ITA-SP) O raio de um cilindro de revolução mede 1,5 m. Sabe-se que a área da base do cilindro coincide com a área da secção determinada por um plano que contém o eixo do cilindro. Então, a área total do cilindro, em m^2, vale:

(A) $\frac{3\pi^2}{4}$

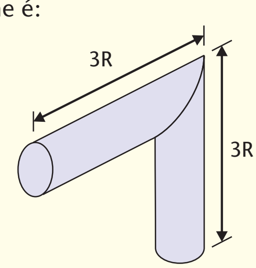
(B) $\frac{9\pi(2+\pi)}{4}$

(C) $\pi(2+\pi)$

(D) $\frac{\pi^2}{2}$

(E) $\frac{3\pi(\pi+1)}{2}$

58 Seccionando-se dois cilindros circulares retos de mesmo raio R por um plano a 45°, montamos um sólido com a forma de um "joelho", como se mostra na figura. Seu volume é:



(A) $5\pi R^3$

(B) $\frac{10}{3}\pi R^3$

(C) $3\pi R^3$

(D) $4\pi R^3$

(E) $6\pi R^3$

59 (PUC-RJ) Um cilindro é equivalente (mesmo volume) a uma pirâmide reta de base quadrada, cujo raio do círculo inscrito na base da pirâmide é $R = \frac{\sqrt{3\pi}}{2}$. Sabendo-se que o cilindro e a pirâmide têm alturas iguais, então o raio da base do cilindro é:

(A) π

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) 1

(D) $\frac{1}{2}$

(E) Nenhuma das anteriores.

60 (Puccamp-SP) Uma piscina circular tem 5 m de diâmetro. Um produto químico deve ser misturado à água na razão de 25 por 500 litros de água. Se a piscina tem 1,6 m de profundidade e está totalmente cheia, quanto do produto deve ser misturado à água? Use: $\pi = 3,1$.

(A) 1,45 kg
(B) 1,55 kg
(C) 1,65 kg
(D) 1,75 kg
(E) 1,85 kg

61 (Fatec-SP) Um tanque para depósito de combustível tem a forma cilíndrica de dimensões: 10 m de altura e 12 m de diâmetro. Periodicamente é feita a conservação do mesmo, pintando-se sua superfície lateral externa. Sabe-se que com uma lata de tinta pintam-se 14 m^2 da superfície. Nessas condições, é verdade que a menor quantidade de latas que será necessária para a pintura da superfície lateral do tanque é:

(A) 14 (B) 23 (C) 27 (D) 34 (E) 54

62 (Faap-SP) Um fabricante de caixas-d'água pré-moldadas deseja fabricá-las na forma cilíndrica com 2 metros de altura interna com capacidade de 2000 litros. Então, o raio da base da caixa-d'água é, em metros, igual a:

(A) $2\sqrt{\pi}$
(B) $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$
(C) $\dfrac{10}{\sqrt{\pi}}$
(D) $\sqrt{\pi}$
(E) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{\pi}}$

63 (Mack-SP) O raio de um cilindro circular reto é aumentado de 25%; para que o volume permaneça o mesmo, a altura do cilindro deve ser diminuída de k%. Então k vale:

(A) 25 (B) 28 (C) 30 (D) 32 (E) 36

64 (Fatec-SP) Uma pessoa comprou um vasilhame para armazenar água em sua casa e, ao colocar $0,256\pi$ m^3 de água, constatou que a parte ocupada correspondia a apenas 40% da capacidade total. Se esse vasilhame tem o formato de um cilindro circular reto e altura de 1 m, então o raio de sua base, em metros, é:

(A) 0,6
(B) 0,7
(C) 0,8
(D) 0,9
(E) 1,0

65 (EP-USP) Aumentando 6 unidades o raio ou a altura de um cilindro, num e noutro caso o seu volume aumenta de y unidades cúbicas. Sendo 2 a altura original, o raio original é:

(A) 2
(B) 4
(C) 6
(D) 6π
(E) Nenhuma das respostas anteriores.

66 (Unicap-PE) Por questões técnicas, pretende-se substituir um reservatório, na forma de um cubo de 3 metros de aresta, por um outro reservatório, na forma de um cilindro circular reto. Os volumes devem ser iguais e a área lateral do cilindro deve ser igual à área da superfície do cubo. Nesse caso:

I) o raio da base do cilindro deve medir 1 metro.
II) a altura do cilindro deve medir 27 metros.
III) π^2 m^2 deve ser a soma das áreas das bases.
IV) $(54 + 2\pi)$ m^2 deve ser a área total do cilindro.
V) supondo que não há desperdício de material, a construção do cilindro consome a mesma quantidade de chapas de ferro que foi usada na construção do cubo.

67 (Cescea-SP) Sabendo-se que um cilindro de revolução tem área total que é o sêxtuplo de sua área lateral, e que a área de sua secção meridiana (secção que contém o eixo de revolução do cilindro) é 40 m^2, o seu volume é:

(A) 100π m^3
(B) 200π m^3
(C) 50π m^3
(D) 90π m^3

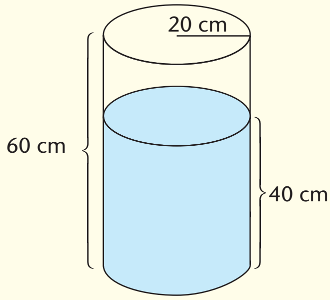
68 (Cescea-SP) A área total de um cilindro reto, de base circular, de 0,5 m de altura é igual à área de um círculo de 1 m de raio. Então, o volume do cilindro é:

(A) $\dfrac{\pi}{12}$ m^3
(B) $\dfrac{\pi}{8}$ m^3
(C) $\dfrac{\pi}{5}$ m^3
(D) $\dfrac{\pi}{10}$ m^3
(E) Não sei.

69 (ITA-SP) Dado um cilindro de revolução de raio r e altura h; sabe-se que a média harmônica entre o raio e a altura é 4 e que sua área total é 2π u.a. O raio r deve satisfazer a relação:

(A) $r^3 - r + 2 = 0$
(B) $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$
(C) $r^3 - r^2 - r + 1 = 0$
(D) $r^3 - 3r - 2 = 0$
(E) Nenhuma das respostas anteriores.

70 (Uerj) Um recipiente cilíndrico de 60 cm de altura e base com 20 cm de raio está sobre uma superfície plana horizontal e contém água até a altura de 40 cm, conforme indicado na figura.



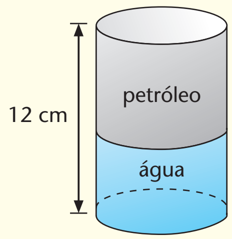
Imergindo-se totalmente um bloco cúbico no recipiente, o nível da água sobe 25%. Considerando π igual a 3, a medida, em cm, da aresta do cubo colocado na água é igual a:

(A) $10\sqrt{2}$
(B) $10\sqrt[3]{2}$
(C) $10\sqrt{12}$
(D) $10\sqrt[3]{12}$

71 (PUC-PR) Dado o retângulo de área 24 m², determinar os lados desse retângulo de modo que os volumes dos dois cilindros gerados pela rotação do retângulo em torno de cada um estejam entre si como 3 : 2.
A diferença entre os comprimentos dos lados do retângulo é:

(A) 1 m
(B) 2 m
(C) 3 m
(D) 4 m
(E) 5 m

72 (Vunesp-SP) Um tanque subterrâneo, que tem a forma de um cilindro circular reto na posição vertical, está completamente cheio com 30 m³ de água e 42 m³ de petróleo. Se a altura do tanque é 12 metros, a altura, em metros, da camada de petróleo é:



(A) 2π
(B) 7
(C) $\frac{7\pi}{3}$
(D) 8
(E) $\frac{8\pi}{3}$

73 (Cescem-SP) Um cilindro de revolução está inscrito em um paralelepípedo reto retângulo. Se representarmos por V_1 o volume do cilindro e por V_2 o volume do paralelepípedo, podemos escrever que:

(A) $\pi V_2 = 4V_1$
(B) $4V_2 = \pi V_1$
(C) $\pi V_1 = V_2$
(D) $V_1 = \pi V_2$
(E) $V_2 = 2\pi V_1$

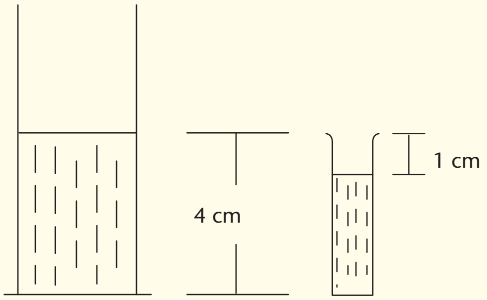
74 (PUC-RJ) Faz-se girar um retângulo ao redor de um dos lados que tem 1 m. O comprimento do outro lado, para que o volume gerado seja aproximadamente 31,41593 dm³, é:

(A) 8 cm
(B) 10 cm
(C) 6 cm
(D) 12 cm
(E) 14 cm

75 (Cesgranrio-RJ) Estamos pintando uma caixa-d'água cilíndrica, cuja altura é igual ao diâmetro da base. Sabemos que foram necessários 16 litros de tinta para pintar a tampa (considerada como um disco com o mesmo diâmetro da base da caixa). Para completar a pintura interna, o número de litros de tinta a ser ainda gasto será de:

(A) 160 (B) 64 (C) 48 (D) 80 (E) 96

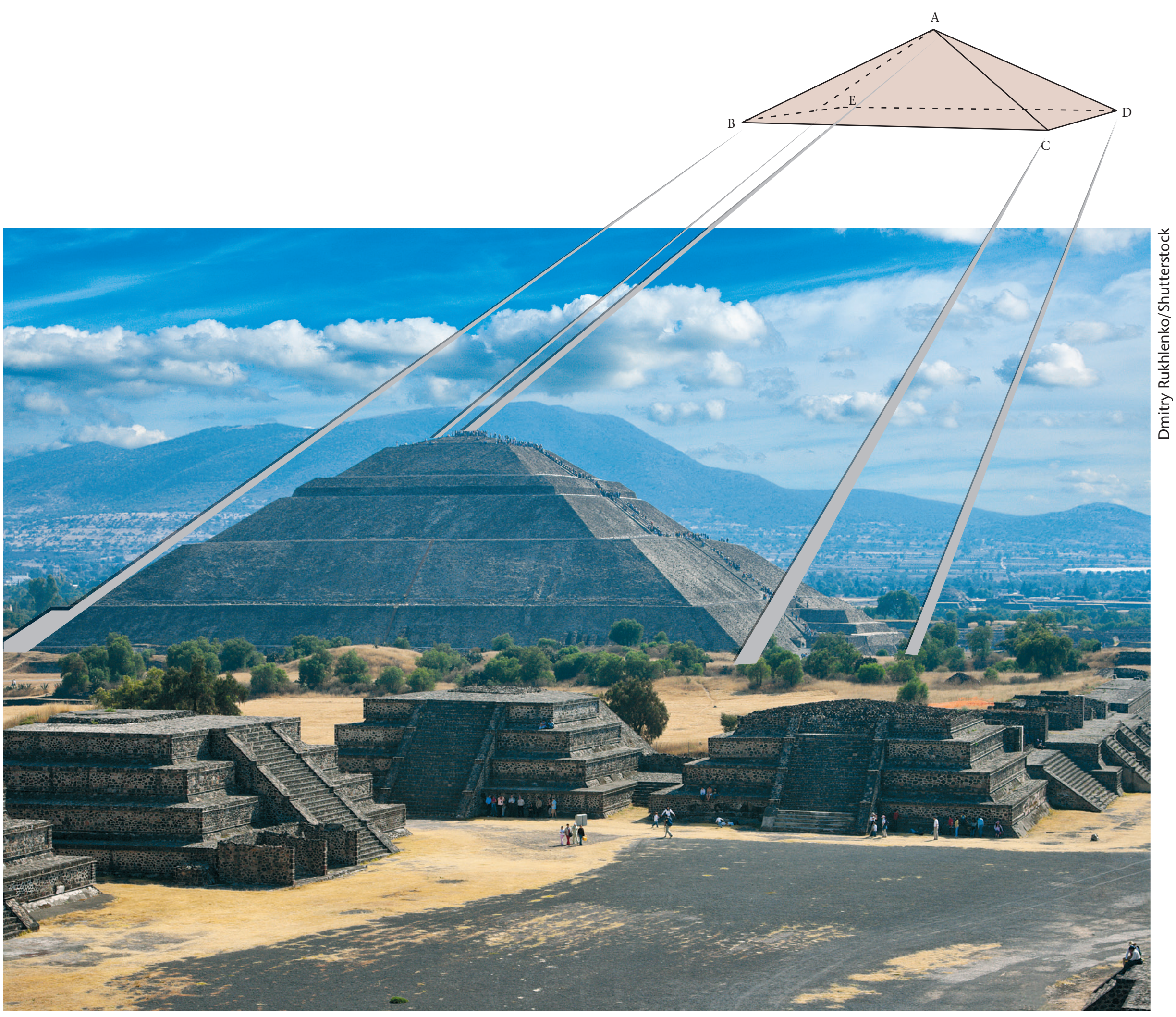
76 (PUC-RJ) Uma proveta de laboratório tem 3 cm de diâmetro e contém uma solução que ocupa a altura de 4 cm. Para centrifugar essa solução deve-se transferi-la para tubos de ensaio de 1 cm de diâmetro e 4 cm de altura, mas é preciso deixar 1 cm de folga para evitar transbordamento. Então, são necessários:



(A) 4 tubos.
(B) 8 tubos.
(C) 16 tubos.
(D) 12 tubos.
(E) 20 tubos.

CAPÍTULO XIII

PIRÂMIDES E CONES



Pirâmides e cones são obtidos ao conectarmos um ponto (o vértice) a todos os pontos de uma figura plana (seja ela um polígono ou uma região curva). Na fotografia, a pirâmide do Sol, em Teotihuacán, no México, construída por volta de 100 a. C. por povos que precederam os astecas.

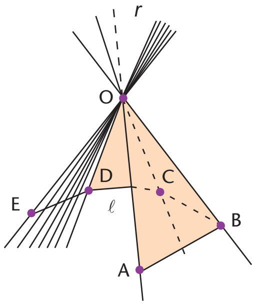
13 – PIRÂMIDES E CONES

13.1 – Pirâmide

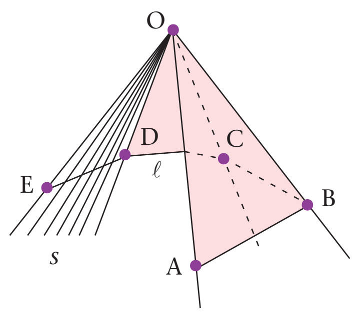
DEFINIÇÃO
Superfície piramidal.

Superfície piramidal de uma folha é a superfície gerada por uma semirreta *s* de origem fixa O que se desloca apoiando-se sobre uma linha poligonal fechada plana ℓ.

OBSERVAÇÃO
Quando, em vez de uma semirreta, tivermos uma reta *r* em deslocamento e passando pelo ponto fixo O, obtemos uma **superfície piramidal de duas folhas**.



superfície de duas folhas

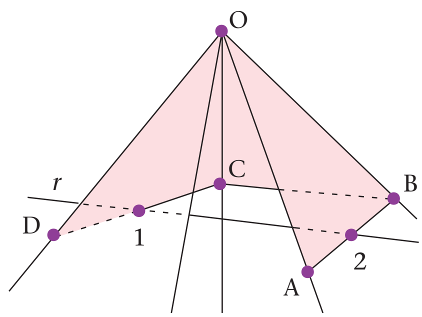


A superfície será convexa quando a poligonal for convexa, e não convexa, caso contrário.

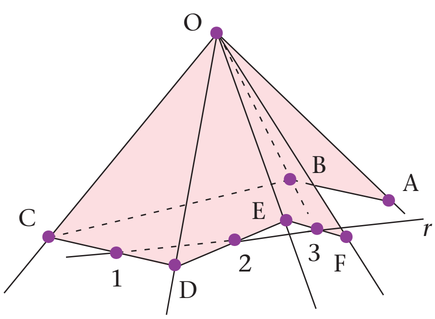
Quando a superfície é convexa, toda reta *r* que não está sobre a superfície, a intersectará em no máximo dois pontos.

Na superfície não convexa existe alguma reta *r* que não está sobre a superfície, que a intersecta em mais de dois pontos.

NOTA
Numa superfície convexa, os planos das faces não a intersectam. Ela fica integralmente num dos semiespaços definidos por qualquer face.



convexa



não convexa

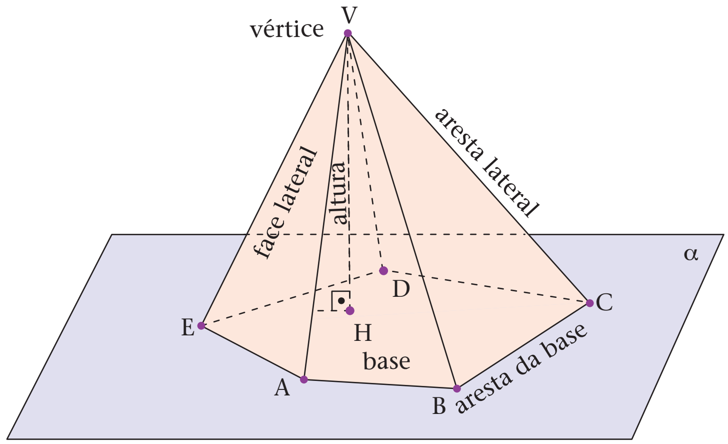
DEFINIÇÃO
Pirâmide.

Pirâmide é o poliedro limitado por uma superfície piramidal fechada e por um plano α que intersecta todas as arestas da superfície.

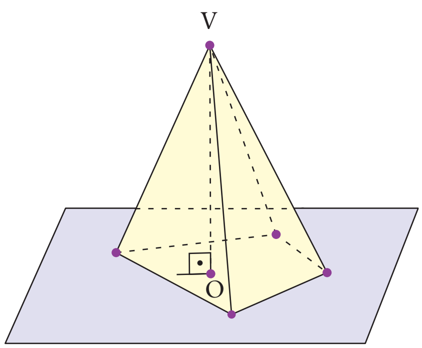
A secção que o plano α determina é a base da pirâmide. Os segmentos compreendidos entre o **vértice** V **da pirâmide** e os vértices da base são as **arestas laterais**, e os lados do polígono da base são as **arestas da base**.

As **faces laterais** são triângulos limitados pelo vértice e pelas arestas da base.

A **altura** é o comprimento da perpendicular do vértice ao plano da base.



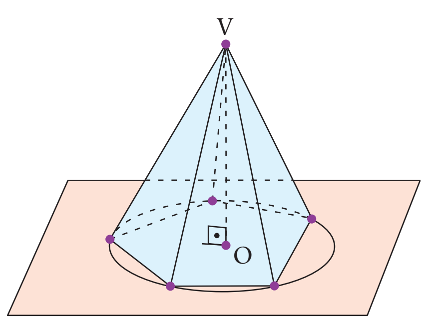
As pirâmides são triangulares, quadrangulares, pentagonais etc., conforme suas bases forem triangulares, quadrangulares etc.



pirâmide quadrangular

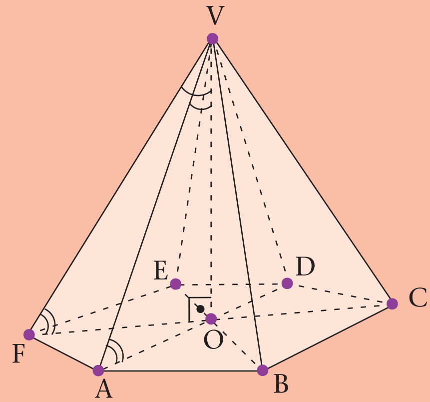
Uma pirâmide é **regular** quando a base é um polígono regular e seu centro coincide com o pé da perpendicular baixada do vértice ao plano da base. Essa perpendicular é também chamada **eixo da pirâmide regular**.

NOTA
Uma pirâmide é **reta** quando sua base for um polígono inscritível num círculo, sendo o pé de sua altura o centro deste círculo.



Propriedades

1) As arestas laterais de uma pirâmide regular são congruentes e formam ângulos iguais com a base e com a altura da pirâmide.

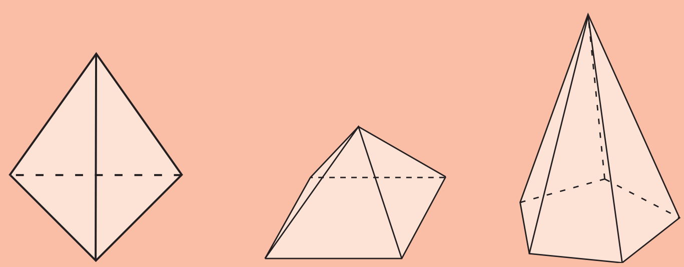


$A\hat{V}O \equiv F\hat{V}O \equiv \ldots$

$V\hat{A}O \equiv V\hat{F}O \equiv \ldots$

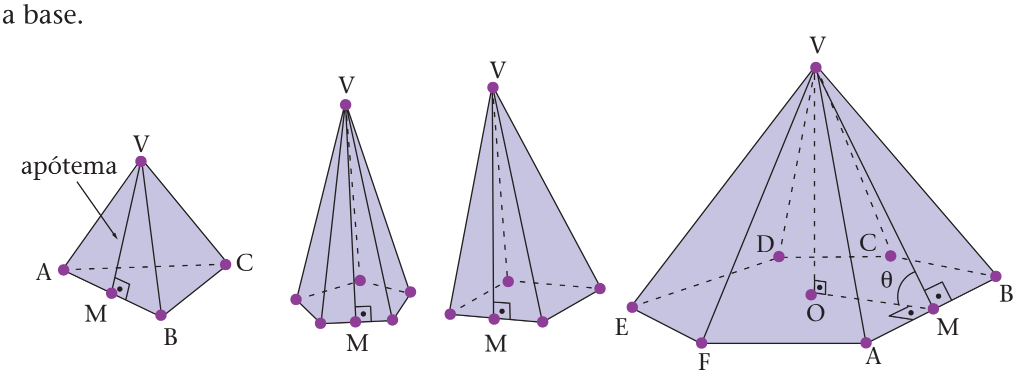
$VA \equiv VB \equiv VC \equiv \ldots$

2) As faces laterais de uma pirâmide regular são triângulos isósceles ou equiláteros.



13.1.1 – Relações métricas na pirâmide regular

Apótema de uma pirâmide regular é a altura de qualquer uma de suas faces. Ela divide a aresta da base em duas partes iguais. O apótema $\overline{VM}$ de uma pirâmide é o segmento de maior declive da face VAB em relação à base da pirâmide. O ângulo θ de uma face com a base é o ângulo que o apótema $\overline{VM}$ faz com sua projeção sobre a base.



Temos no triângulo retângulo VOM: $a^2 = h^2 + m^2$

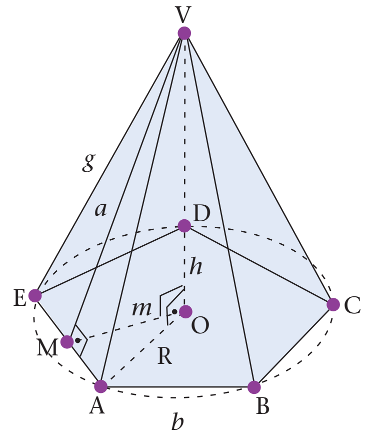
onde a é o apótema da pirâmide, h é a altura e m é o apótema da base.

Temos no triângulo retângulo VOA: $g^2 = h^2 + R^2$

em que g é a medida da aresta lateral e R é o raio do círculo circunscrito ao polígono da base.

Temos no triângulo retângulo VMA: $g^2 = a^2 + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2$

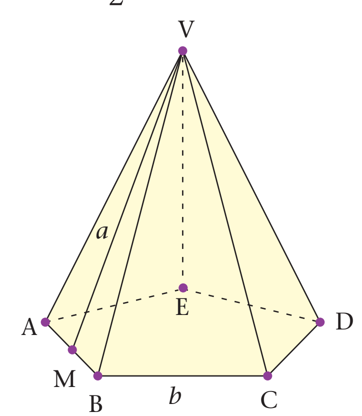
ou ainda $g^2 = a^2 + \dfrac{b^2}{4}$, onde b é a aresta da base.



13.2 – Áreas e volumes de pirâmides

13.2.1 – Área lateral da pirâmide regular

Chamamos S_L a área lateral e b a aresta da base. A soma das áreas dos n triângulos das faces laterais será: $S_L = n \cdot \dfrac{b \cdot a}{2}$, em que a é o apótema da pirâmide.



Como $nb = 2p$ (perímetro da base),

$$S_L = \frac{2p}{2} \cdot a \Rightarrow S_L = pa$$

A área lateral da pirâmide é o produto do semiperímetro da base pelo apótema da pirâmide.

13.2.2 – Área total da pirâmide regular

É a soma da área lateral com a área da base da pirâmide.

Chamando de S_T a área total e de S_L e S_b as áreas respectivas da lateral e da base da pirâmide, vem:

$$S_T = S_L + S_b$$

Mas $S_T = p \cdot a$ e $S_b = p \cdot m$, onde m é o apótema da base, então temos:

$$S_T = pa + pm \Rightarrow \boxed{S_T = p(a + m)}$$

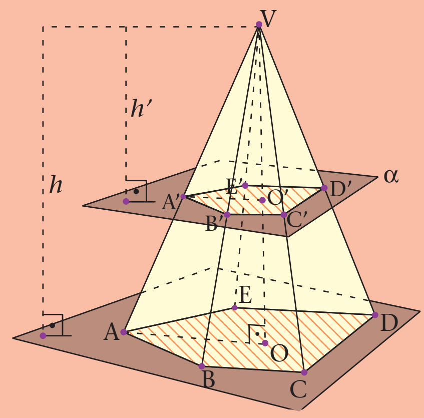
A área total da pirâmide regular é o produto do semiperímetro da base pela soma dos apótemas da pirâmide e do polígono da base.

Teorema

Se uma pirâmide é cortada por um plano α paralelo à base:

i) as arestas e a altura ficam divididas na mesma razão;

ii) a secção é um polígono semelhante à base.



Demonstração:

i) Como o plano α é paralelo à base, $\overline{A'B'}$ é paralelo a $\overline{AB}$, $\overline{B'C'}$ é paralelo a $\overline{BC}$ etc., então $\dfrac{VA'}{VA} = \dfrac{VB'}{VB} = ... = \dfrac{VO'}{VO} = \dfrac{h'}{h}$

ii) Como o triângulo VA'B' é semelhante a VAB, o triângulo VB'C' é semelhante a VBC etc., temos:

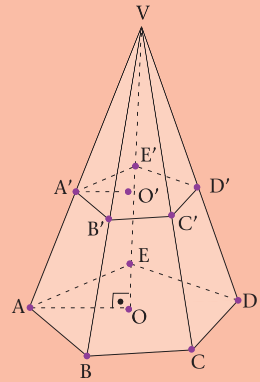
$\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{VB'}{VB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{VC'}{VC} = \dfrac{C'D'}{CD} = ...$, isto é, os lados homólogos dos polígonos são proporcionais.

Por outro lado, $\overline{A'B'}$ é paralelo a $\overline{AB}$, $\overline{B'C'}$ é paralelo a $\overline{BC}$, $\overline{C'D'}$ é paralelo a $\overline{CD}$ etc., então os ângulos $A'\hat{B}'C' = A\hat{B}C, B'\hat{C}'D' = B\hat{C}D$ etc. e os ângulos correspondentes são congruentes.

Logo a secção A'B'C'D'... é semelhante à base ABCD...

Corolários

1) A área da secção paralela à base está para a área da base assim como o quadrado da distância da secção ao vértice está para o quadrado da altura da pirâmide.



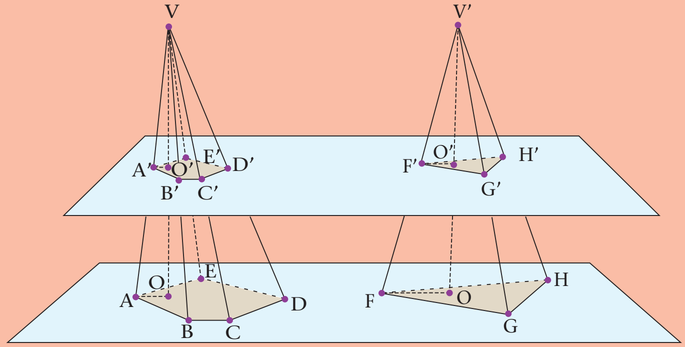
Demonstração:

Com efeito, como $\dfrac{VO'}{VO} = \dfrac{A'B'}{AB} \Rightarrow \dfrac{VO'^2}{VO^2} = \dfrac{A'B'^2}{AB^2}$

Por outro lado, a razão entre as áreas é o quadrado da razão entre as linhas homólogas, então:

$$\frac{S'_b}{S_b} = \frac{A'B'^2}{AB^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{S'_b}{S_b} = \frac{h'^2}{h^2} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2}$$

2) Se duas pirâmides com alturas de mesma medida são cortadas por planos paralelos às bases e a igual distância dos vértices, as secções têm a mesma razão que as bases.



Demonstração:

Temos: $\dfrac{S_{A'B'C'D'E'}}{S_{ABCDE}} = \dfrac{VO'^2}{VO^2} = \dfrac{S_{F'G'H'}}{S_{FGH}}$

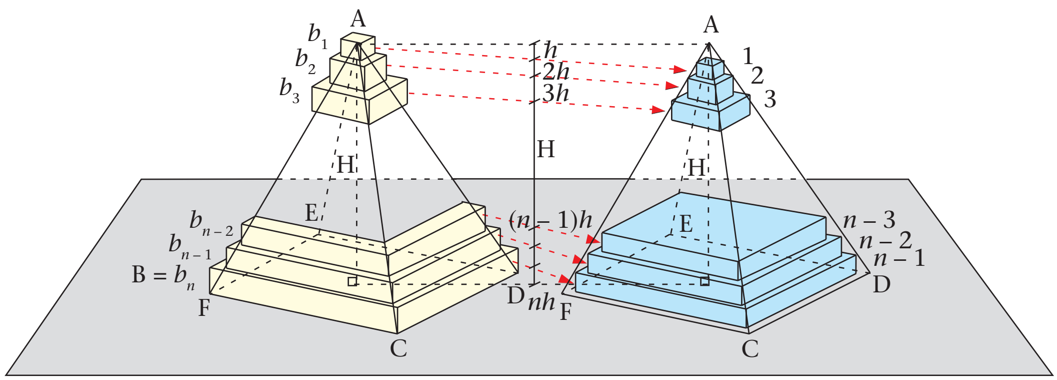
3) Se duas pirâmides têm alturas iguais e bases equivalentes, as secções feitas por um plano paralelo às bases, e a igual distância dos vértices, são equivalentes.

13.2.3 – Volume da pirâmide

O volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura da pirâmide.

A demonstração desse resultado será feita a seguir em várias etapas.

Quando se corta uma pirâmide por planos paralelos à base e que dividam a altura em n partes iguais, pode-se, em cada tronco obtido, circunscrever um prisma exterior e inscrever um prisma interior de modo que a soma dos volumes dos prismas circunscritos (exteriores) se aproxime, tanto quanto se deseje, da soma dos volumes dos inscritos (interiores) e, como consequência, também do volume da pirâmide.



De fato, consideremos a pirâmide ACDEF de base qualquer de área B e altura H.

Dividamos a altura H em n partes congruentes e pelos pontos de divisão tracemos planos paralelos à base da pirâmide. Esses planos decompõem a pirâmide em $n – 1$ troncos piramidais e uma pequena pirâmide no vértice, todas de mesma altura $h = \dfrac{H}{n}$.

Em cada um desses troncos, inclusive na pequena pirâmide do vértice, circunscrevemos um prisma. Cada um desses prismas exteriores terá um volume maior que o do tronco nele inscrito. Portanto, a soma dos volumes V_c desses prismas circunscritos é maior que o volume V da pirâmide.

Inscrevamos, agora, em cada um dos troncos obtidos um novo prisma. Cada um desses prismas inscritos terá um volume menor que o do tronco nele circunscrito. Portanto, a soma dos volumes V_i desses prismas inscritos é menor que o volume V da pirâmide.

Assim, $\boxed{V_i < V < V_c}$.

Observe que cada um dos prismas circunscritos é equivalente a um prisma inscrito até o $(n-1)$-ésimo, pois são prismas correspondentes de mesma base e mesma altura $h = \frac{H}{n}$. O n-ésimo prisma circunscrito não tem correspondente inscrito da mesma base. O volume desse n-ésimo prisma exterior de base BCDE é igual a $B \cdot h = \frac{B \cdot H}{n}$, e esse volume é exatamente a diferença entre a soma dos volumes dos prismas exteriores e dos prismas interiores, isto é:

$$V_c - V_i = \frac{BH}{n} = BH\frac{1}{n}$$

Suponhamos, agora, que o número n de divisões cresça infinitamente $(n \to \infty)$. A fração positiva $\frac{1}{n}$ decrescerá e tenderá para zero $\left(\text{simbolicamente: } \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\right)$.

É claro, então, que para n suficientemente grande, a diferença $(V_c - V_i)$ se torne tão pequena quanto se deseje e podemos dizer que V_c e V_i tendem a coincidir com o volume V da pirâmide, pois $V - V_i < V_c - V_i$ e $V_c - V < V_c - V_i$.

Concluímos então que:

$$\lim V_c = \lim V_i = V$$

quando n cresce infinitamente.

Para calcular o volume V da pirâmide, basta calcular o limite de uma das somas V_c ou V_i.

Calculemos V_c. Chamemos os volumes dos prismas de $v_1, v_2, v_3, ..., v_{n-1}, v_n$ cujas áreas das bases são $b_1, b_2, b_3, ..., b_{n-1}, b_n$ e alturas $h = \frac{H}{n}$. Temos que:

$$V_c = v_1 + v_2 + ... + v_{n-1} + v_n = b_1h + b_2h + ... + b_{n-1}h + b_nh$$

mas: $\frac{b_1}{B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2, \ \frac{b_2}{B} = \left(\frac{2h}{H}\right)^2, \ \frac{b_3}{B} = \left(\frac{3h}{H}\right)^2, \ ..., \frac{b_n}{B} = \left(\frac{n \cdot h}{H}\right)^2$

logo: $b_1 = \frac{Bh^2}{H^2}, \ b_2 = \frac{B \cdot 2^2 h^2}{H^2}, \ b_3 = B \cdot \frac{3^2 h^2}{H^2}, ..., b_n = B \cdot \frac{n^2 h^2}{H^2}$

Substituindo, temos:

$$V_c = \left(\frac{Bh^2}{H^2} + \frac{B2^2h^2}{H^2} + \frac{B3^2h^2}{H^2} + ... + \frac{Bn^2h^2}{H^2}\right) \cdot h$$

$$V_c = \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2\right)\frac{Bh^3}{H^2}$$

OBSERVAÇÃO
A soma dos quadrados dos *n* primeiros números naturais positivos foi calculada no capítulo I desse livro, em progressão aritmética.

Como $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ e $h = \dfrac{H}{n}$, vem:

$$V_c = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{B}{H^2} \cdot \frac{H^3}{n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \cdot \frac{B \cdot H}{6}$$

$$V_c = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{1}{6} \cdot B \cdot H = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{6}BH$$

Como $\dfrac{1}{n}$ tende para zero, vem:

$$V = \lim V_c = (1+0)(2+0)\frac{1}{6}BH$$

$$\boxed{V = \frac{1}{3}BH}$$

Exemplo:

O volume de uma pirâmide quadrangular regular, cuja aresta da base mede 3 cm e a altura 8 cm será:

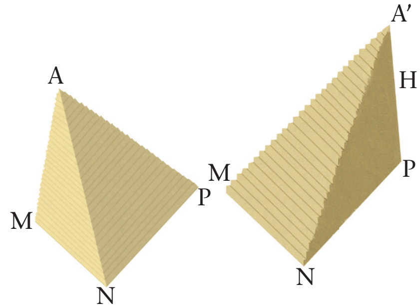
$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 8$$

$$V = 24 \text{ cm}^3$$

Não importa se a pirâmide é inclinada ou reta, o que importa apenas é o valor da área da base e da altura da pirâmide.

Intuitivamente, podemos entender essas propriedades imaginando uma pilha de lâminas muito finas e cortando-as na forma de uma pirâmide (triangular por simplicidade).

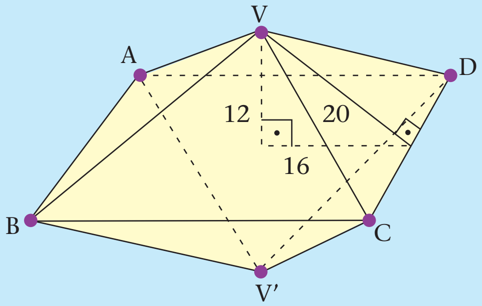


Essa pirâmide fica então formada por lâminas triangulares sobrepostas que vão diminuindo sucessivamente desde a base MNP até o vértice A.

Fazendo essas lâminas deslizarem umas sobre as outras (como as cartas de um baralho) de modo a formar outra pirâmide, essas duas pirâmides terão a mesma base MNP e a mesma altura H (soma das espessuras das lâminas), logo terão o mesmo volume (soma dos volumes das lâminas).

Exemplos:

i) Um sólido é formado por duas pirâmides quadrangulares regulares, conforme mostra a figura abaixo. A distância dos vértices V e V' é 24 cm e o lado do quadrado ABCD mede 32 cm. Calcule a área total desse sólido.

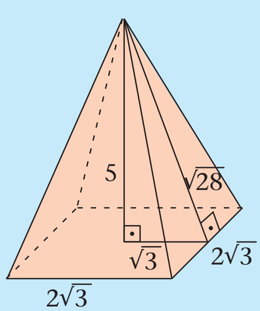


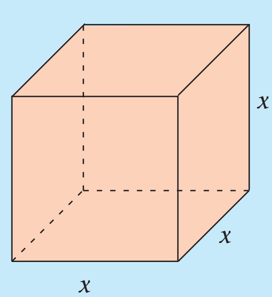
$$S_T = 8 \cdot \frac{CD \cdot 20}{2}$$

$$S_T = 4 \cdot 32 \cdot 20 \Rightarrow S_T = 2\,560 \text{ cm}^2$$

<u>Resposta</u>: 2 560 cm²

ii) Considere uma pirâmide quadrangular regular cuja aresta da base mede $2\sqrt{3}$ cm e o apótema da pirâmide mede $\sqrt{28}$ cm. Calcule a aresta do cubo cujo volume é igual a $\frac{16}{5}$ cm³ do volume dessa pirâmide.





$$\left(\sqrt{28}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 5^2$$

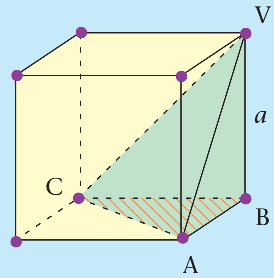
$$V_c = \frac{16}{5} \cdot V_p$$

$$x^3 = \frac{16}{\cancel{5}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot \cancel{5}$$

$$x^3 = 64 \Rightarrow x = 4 \text{ cm}$$

<u>Resposta:</u> 4 cm

iii) Considere uma pirâmide VACB definida em um cubo, conforme mostra a figura abaixo. Se o volume da pirâmide mede 36 cm³, calcule a área da sua face CBA.



$$\frac{1}{3} \cdot S_{CBA} \cdot a = 36 \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = 36$$

$$a^3 = 216 \Rightarrow a = 6 \text{ cm}$$

$$S_{CBA} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$$

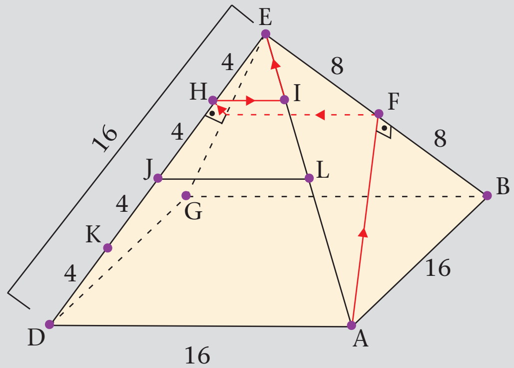
Resposta: 18 cm²

Exercícios resolvidos:

1) (IBMEC-SP) Considere uma pirâmide reta cuja base é um quadrado de lado 16 cm e cujas faces laterais são triângulos equiláteros. Uma formiga posicionada inicialmente num dos vértices do quadrado da base vai escalar a pirâmide. Ela inicia sua trajetória de maneira retilínea sobre uma das faces triangulares adjacentes ao vértice em que está, indo diretamente ao ponto médio do lado oposto, subindo assim metade da altura total a que irá se elevar. Como está cansada, caminha até o ponto médio do outro lado (não pertencente à base) sobre o triângulo adjacente ao que acabou de percorrer, mantendo-se no mesmo nível de altura. No triângulo seguinte, ela caminha de maneira retilínea até o ponto da outra aresta (não pertencente à base) cuja altura é três quartos da altura da pirâmide. Mantém-se nesse nível da altura durante sua caminhada no triângulo seguinte e chega a um ponto sobre a mesma aresta do ponto onde começou, pela qual sobe diretamente até o vértice superior da pirâmide. Em toda sua caminhada, a formiga andou:

(A) $(12\sqrt{3}+16)$ cm
(B) $(16\sqrt{3}+20)$ cm
(C) $(20\sqrt{3}+24)$ cm
(D) $(24\sqrt{3}+28)$ cm
(E) $(28\sqrt{3}+32)$ cm

Solução:
Do enunciado, temos a figura, cotada em cm, em que A é o ponto de partida da formiga:



Temos:

- $AF = \dfrac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ (altura do $\triangle ABE$)
- $FG = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$ (base média do $\triangle ECB$)
- $JG = \dfrac{DC}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$ (base média do $\triangle EDC$)
- $GH = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (altura do $\triangle EJG$)
- $JL = \dfrac{DA}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$ (base média do $\triangle EDA$)
- $HI = \dfrac{JL}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ (base média do $\triangle EJL$)

Em toda a sua caminhada, a formiga andou

$AF + FG + GH + HI + IE = 8\sqrt{3} + 8 + 4\sqrt{3} + 4 + 4,$ ou seja, $12\sqrt{3} + 16.$

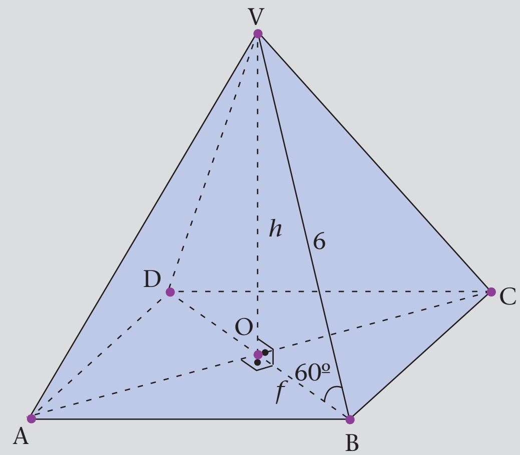
<u>Resposta:</u> $12\sqrt{3} + 16$ cm

2) Numa pirâmide regular de base quadrada, as arestas laterais medem 6 cm e formam 60° com o plano da base. O volume dessa pirâmide, em cm³, é igual a:

(A) $8\sqrt{3}$ (B) $9\sqrt{3}$ (C) $12\sqrt{3}$ (D) $15\sqrt{3}$ (E) $18\sqrt{3}$

<u>Solução:</u>

Sendo *h* a medida da altura da pirâmide e *f* a distância do centro da base a um dos vértices da base, do enunciado temos a figura, cotada em cm:



No triângulo retângulo VOB, temos:

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\cos 60° = \frac{f}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{f}{6} \Rightarrow f = 3 \text{ cm}$$

Logo, o volume V, em cm³, da pirâmide é dado por:

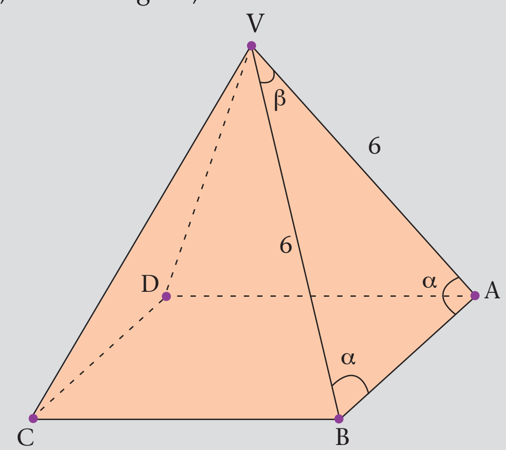
$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(4 \cdot \frac{3 \cdot 3}{2}\right) \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

Resposta: E

3) (IBMEC-SP) Considere uma pirâmide regular de vértice V e arestas laterais medindo 6 cm, cuja base é um quadrado de diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Se a área lateral dessa pirâmide totaliza 36 cm², determine os possíveis valores para a medida do ângulo $V\hat{A}B$.

Solução:

Do enunciado, temos a figura, cotada em cm.



Como a área lateral da pirâmide é igual a 36 cm², temos:

$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot VA \cdot VB \cdot \operatorname{sen} \beta = 36$$

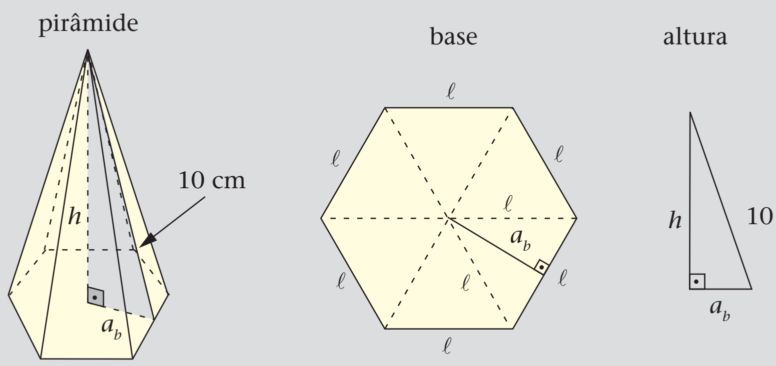
$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \operatorname{sen} \beta = 36$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} \begin{cases} \beta = 30° \Rightarrow \alpha = 75° \\ \text{ou} \\ \beta = 150° \Rightarrow \alpha = 15° \end{cases}$$

<u>Resposta:</u> os possíveis valores para a medida do ângulo $V\hat{A}B$ são 75° ou 15°.

4) Calcule o volume de uma pirâmide regular de apótema de 10 cm, em que a base é um hexágono de perímetro $24\sqrt{3}$ cm.

<u>Solução:</u>



$6\ell = 24\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 4\sqrt{3}$ cm　　　$h^2 = 10^2 - a_b^2$

$a_b = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_b = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 6$ cm　　　$h = 8$ cm

Área da base:

$$S_b = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_b = 6 \cdot \frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 72\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Volume:

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 72\sqrt{3} \cdot 8 = 192\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

<u>Resposta:</u> O volume é de $192\sqrt{3}$ cm³.

5) (UFMG) A área total de uma pirâmide regular, cuja base é um triângulo equilátero de lado a, é 5 vezes a área da base. Calcular o volume dessa pirâmide.

Solução:

Cálculo do apótema da pirâmide (a_p):

$$\left.\begin{aligned} S_T &= 5\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ S_T &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\cdot\frac{a\cdot a_p}{2} \end{aligned}\right\} a_p = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Como a base é um triângulo equilátero de lado a, o apótema da base é $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Cálculo da altura da pirâmide (h):

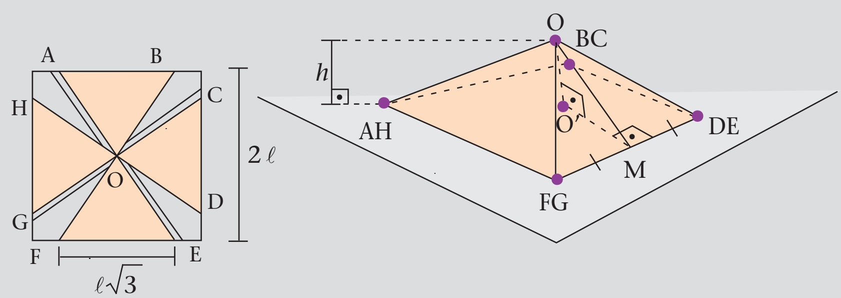
$$a_p^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Então: $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^3\sqrt{15}}{24}$.

Resposta: $\frac{a^3\sqrt{15}}{24}$

6) (Cesgranrio-RJ) Para fazer o telhado de uma casa de cartolina, um quadrado de centro O e de lado 2ℓ é recortado, como mostra a figura I. Os lados AB = CD = EF = GH medem $\ell\sqrt{3}$. Montado o telhado (figura II), qual é sua altura h?

figura I figura II



Solução:

$EF = \ell\sqrt{3} \Rightarrow O'M = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

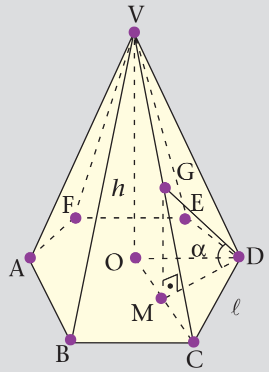
OM = metade do lado do quadrado recortado = ℓ

$h^2 = OM^2 - O'M^2 = \ell^2 - \frac{3\ell^2}{4} = \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\ell}{2}$

Resposta: $\frac{\ell}{2}$

7) (Cesgranrio-RJ) Considere uma pirâmide hexagonal regular de altura h e lado da base ℓ, como mostrada na figura. Traça-se o segmento GD ligando o vértice D ao ponto G que divide a aresta VC ao meio. Se α é o ângulo agudo formado por GD e sua projeção na base da pirâmide, então tg α é:

(A) $\dfrac{h\sqrt{3}}{3\ell}$ (B) $\dfrac{h}{2\ell}$ (C) $\dfrac{h\sqrt{2}}{\ell}$ (D) $\dfrac{h\sqrt{3}}{2\ell}$ (E) $\dfrac{h\sqrt{3}}{\ell}$



Solução:

$$\left.\begin{array}{l}\triangle VOC \sim \triangle GMC \\ GC = \dfrac{VC}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow GM = \frac{VO}{2} = \frac{h}{2}$$

$$DM = \text{altura do } \triangle COD = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

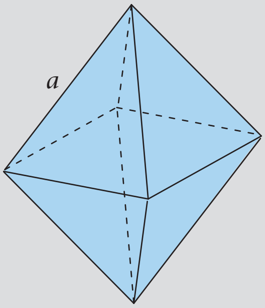
$$\text{No } \triangle DMG: \text{tg } \alpha = \frac{GM}{MD} = \frac{\frac{h}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{h\sqrt{3}}{3\ell}$$

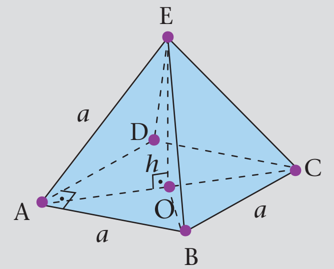
Resposta: A

8) Calcule o volume do octaedro regular de aresta a.

Solução:

Observe que o sólido é formado por duas pirâmides quadrangulares regulares (as faces laterais são triângulos equiláteros e a base é quadrada) cuja área da base é $A_{base} = a^2$.





OA é a metade da diagonal do quadrado da base. Portanto, OA = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

No triângulo retângulo AOE, temos: $a^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Logo, o volume do octaedro é:

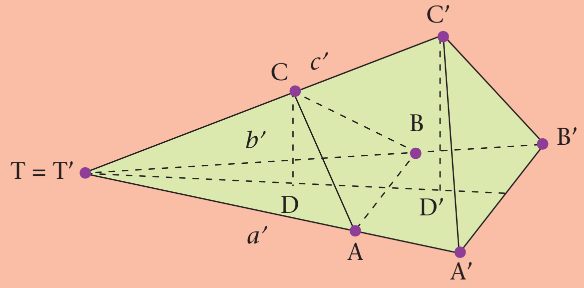
$$V_{\text{octaedro}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

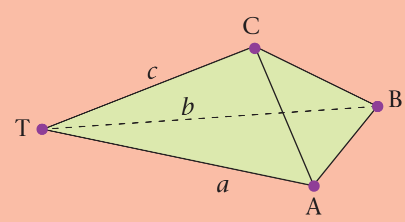
13.3 – Tetraedros

13.3.1 – Tetraedros com um triedro comum

Os volumes de dois tetraedros que têm um triedro congruente estão entre si, assim como os produtos das três arestas desses triedros.

NOTA
Os tetraedros TABC e T'A'B'C' podem não ser semelhantes.





Demonstração:

Façamos TA = a, TB = b, TC = c, T'A' = a', T'B' = b' e T'C' = c' e o triedro T' coincidir em T.

As alturas CD e C'D' são tais que $\dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{TC}{T'C'} = \dfrac{c}{c'}$.

A razão $\dfrac{V}{V'}$ entre os volumes dos tetraedros TABC e T'A'B'C' será:

$$\frac{V}{V'} = \frac{\cancel{\frac{1}{3}} S_{TAB} \cdot CD}{\cancel{\frac{1}{3}} S_{T'A'B'} \cdot C'D'} = \frac{\frac{1}{2}\, ab \text{ sen } A\hat{T}B}{\frac{1}{2}\, a'b' \text{ sen } A'\widehat{T'}B'} \cdot \frac{c}{c'}$$

Como os ângulos $A\hat{T}B$ e $A'\widehat{T'}B'$ são congruentes, $\text{sen } A\hat{T}B = \text{sen } A'\widehat{T'}B'$, logo:

$$\boxed{\frac{V}{V'} = \frac{abc}{a'b'c'}}$$

OBSERVAÇÃO

No caso dos tetraedros serem semelhantes, temos:

$\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = k \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{V}{V'} = \dfrac{a}{a'} \cdot \dfrac{b}{b'} \cdot \dfrac{c}{c'} =$

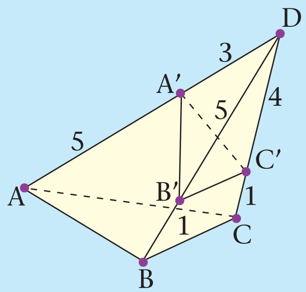
$= k \cdot k \cdot k = k^3$

$$\boxed{\frac{V}{V'} = k^3}$$

sendo k a razão entre as linhas homólogas.

Exemplos:

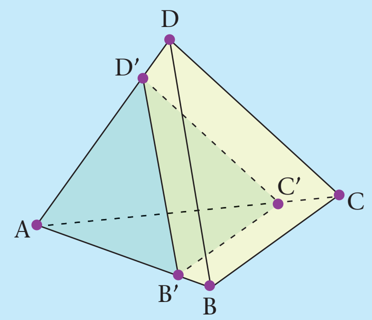
i) Na figura, a pirâmide DABC foi seccionada por um plano, determinando a secção A'B'C' e os segmentos indicados em cm. Se o seu volume é 36 cm³, calcular o volume da pirâmide DA'B'C'.



Temos: $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{a'b'c'}{abc} \Rightarrow \dfrac{V'}{36} = \dfrac{3 \cdot 4 \cdot 5}{5 \cdot 6 \cdot 8} \Rightarrow V' = \dfrac{36}{4}$

V' = 9 cm³

ii) Secciona-se o tetraedro ABCD de volume 640 cm³ por um plano paralelo à base BCD de modo que $AB' = \frac{3}{4}AB$. Calcular o volume do tetraedro AB'C'D'.



Temos que os tetraedros são semelhantes, logo:

$$\frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}} = \left(\frac{AB'}{AB}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_{AB'C'D'}}{640} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

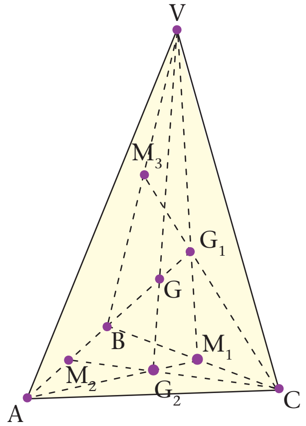
$$V_{AB'C'D'} = 640 \cdot \frac{27}{64} = 270 \text{ cm}^3$$

13.3.2 – Baricentro do tetraedro

NOTA

O **baricentro de um triângulo** é o ponto de encontro das medianas e está a $\frac{2}{3}$ do vértice e a $\frac{1}{3}$ da base, tomados sobre a mediana.

Baricentro do tetraedro é o ponto de encontro das retas que unem um vértice ao baricentro da face oposta.



Portanto, o baricentro é o ponto G de encontro das retas AG_1 e VG_2, onde G_1 é o ponto de encontro das medianas VM_1 e CM_3 do triângulo VBC e G_2 o ponto de encontro das medianas AM_1 e CM_2 do triângulo ABC.

Sabemos que:

$$\frac{AM_1}{G_2M_1} = \frac{VM_1}{G_1M_1} = \frac{VA}{G_1G_2} = 3, \quad \text{logo, } \frac{AG}{GG_1} = \frac{VG}{GG_2} = \frac{VA}{G_1G_2} = 3$$

Como $VG = 3GG_2$, então $VG_2 = VG + GG_2 = 3GG_2 + GG_2 = 4GG_2$.

Assim, $GG_2 = \frac{1}{4}VG_2$ e $VG = \frac{3}{4}VG_2$.

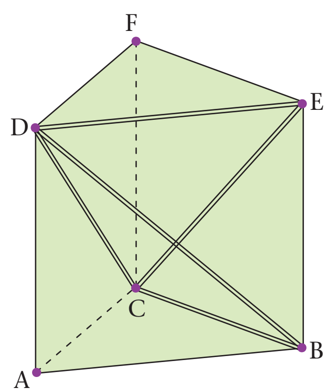
O baricentro de um tetraedro se encontra a $\frac{1}{4}$ da base e a $\frac{3}{4}$ do vértice tomados sobre a reta que une esse vértice ao baricentro da face oposta (base).

NOTA
A propósito, esta propriedade é que garante que as 4 retas que unem cada vértice ao baricentro da face oposta encontrem-se, de fato, num único ponto.

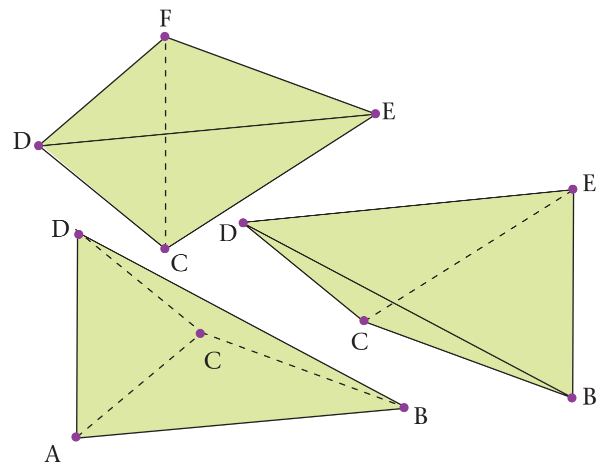
13.3.3 – Decomposição do prisma em tetraedros

Todo prisma triangular ABCDEF se decompõe em três tetraedros de mesmo volume.

O tetraedro DABC tem o mesmo volume que o tetraedro CDEF, pois a base ABC tem a mesma área que a base DEF e ambos têm a mesma altura, que é a distância entre as bases.



Por outro lado, o tetraedro CDAB tem o mesmo volume que o tetraedro CBED, pois a área da base BAD é igual à área da base BED, por ser a metade da área do paralelogramo ABED, e possuem a mesma altura, que é a distância do ponto C até a face ABED.



Assim, os volumes dos tetraedros DABC, CDEF e CBED são iguais e valem a terça parte do volume do prisma triangular.

Esta propriedade confirma a fórmula: $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{base} \cdot (\text{altura})$

Exemplos:

i) Considere um tetraedro trirretângulo DABC cujas arestas perpendiculares duas a duas DA, DB e DC medem respectivamente $3\sqrt{14}$ cm, $\sqrt{70}$ cm e $3\sqrt{11}$ cm.

Calcular:

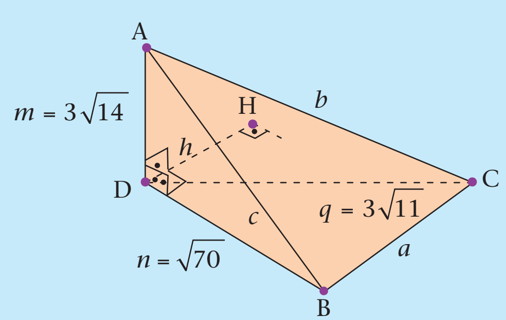
a) o volume do tetraedro;

b) as arestas BC = a, AC = b e AB = c;

c) a área do triângulo ABC;

d) a área total do tetraedro;

e) a altura relativa à face ABC.



a) O volume será: $V = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot AD = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} nq\right) m$

$$V = \frac{1}{6} mnq = \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{14} \cdot \sqrt{70} \cdot 3\sqrt{11} = 21\sqrt{55}\ \text{cm}^3$$

b) $a = \sqrt{n^2 + q^2} = \sqrt{70 + 99} = \sqrt{169} = 13$ cm

$b = \sqrt{m^2 + q^2} = \sqrt{126 + 99} = \sqrt{225} = 15$ cm

$c = \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{126 + 70} = \sqrt{196} = 14$ cm

pois são catetos dos triângulos retângulos BDC, ADC e ADB, respectivamente.

c) A área do triângulo ABC será obtida aplicando-se a fórmula de Heron:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ em que $p = \frac{a+b+c}{2}$ então $S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84\ \text{cm}^2$

d) A área total será: $S = \frac{1}{2}(mn + mq + nq) + S_{ABC}$

Então: $S = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{14} \cdot \sqrt{70} + 3\sqrt{14} \cdot 3\sqrt{11} + 3\sqrt{11} \cdot \sqrt{70}\right) + 84$

$$S = \frac{1}{2}\left(42\sqrt{5} + 9\sqrt{154} + 3\sqrt{770}\right) + 84\ \text{cm}^2$$

e) A altura relativa se obtém usando o teorema de Monge-Hachette:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{q^2}$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{126} + \frac{1}{70} + \frac{1}{99} = \frac{1}{14}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{99} = \frac{1}{45} + \frac{1}{99} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{11}\right)$$

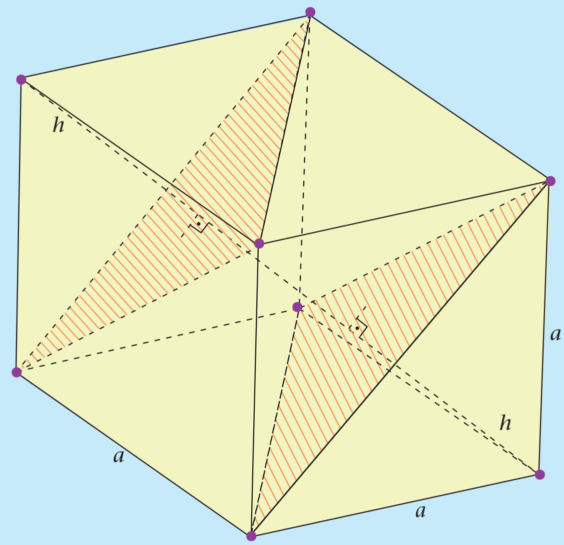
Uma solução alternativa será:

$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DH = \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot h = 28h$

Então: $21\sqrt{55} = 28h \Rightarrow h = \frac{3}{4}\sqrt{55}$ cm

ii) Obtém-se um tetraedro a partir de uma secção do cubo de aresta a por um plano que passa nas extremidades de três arestas perpendiculares que partem do mesmo vértice, como indicado na figura. Mostre que esse plano divide a diagonal do cubo na razão de $\frac{1}{3}$.

NOTA
Os dois planos secantes da figura dividem a diagonal do cubo em três partes congruentes.

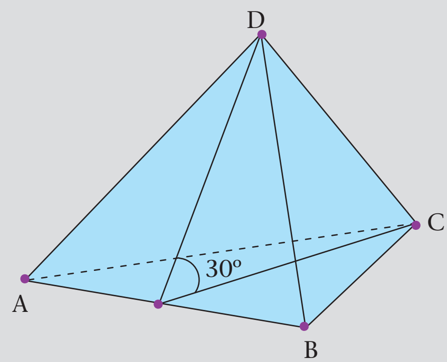


Pelo teorema de Monge-Hachette:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Exercícios resolvidos:

1) O tetraedro ABCD tem aresta AB medindo 12; a face ABD tem área 48, e a face ABC tem área 60. Se o ângulo entre as faces ABC e ABD mede 30°, qual o volume do tetraedro?

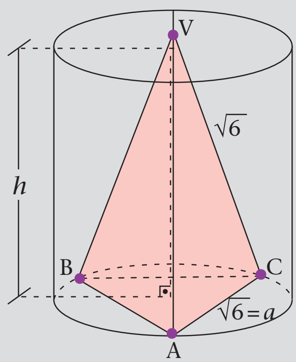


Solução:

A altura relativa ao lado $\overline{AB}$ do triângulo ABD mede $\frac{2 \cdot 48}{12} = 8$ e a altura do tetraedro, relativa à base ABC, mede $8 \cdot \text{sen } 30° = 4$. O volume do tetraedro é $\frac{60 \cdot 4}{3} = 80$.

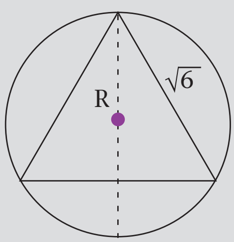
Resposta: 80

2) Um tetraedro regular de aresta medindo $\sqrt{6}$ tem o vértice V no centro de uma das bases do cilindro circular reto, e a face ABC está inscrita na outra base do cilindro, conforme mostra a figura. Calcule a razão entre o volume do cilindro e o volume do tetraedro.



Solução:

Calculando o raio da base:



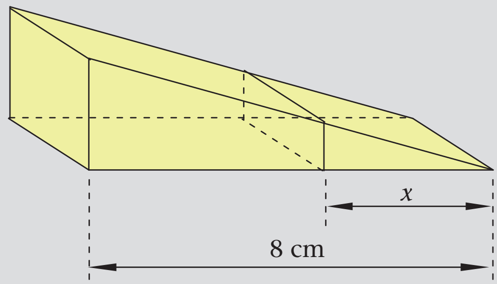
$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}$$

$$h^2 + R^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = 6 - 2 \Rightarrow h = 2$$

$$\frac{V_c}{V_t} = \frac{\pi R^2 h}{\frac{1}{3} S_B h} = \frac{3\pi R^2}{S_B} = \frac{3\pi\left(\sqrt{2}\right)^2}{\frac{\left(\sqrt{6}\right)^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$$

Resposta: A razão é $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}$.

3) Um pedaço de queijo tem a forma de um prisma triangular reto tendo por base um triângulo com um dos lados medindo 8 cm, como ilustrado a seguir.



O queijo deve ser dividido em dois pedaços de mesmo volume por um plano paralelo a uma das faces, como ilustrado acima. Qual o valor de x?

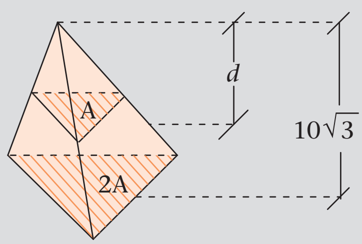
Solução:

A base de uma das partes em que o queijo fica dividido é semelhante à base do queijo original, com alturas iguais.

Portanto, $\left(\frac{x}{8}\right)^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{8}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^3}{2^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{2^8} = 4\sqrt[3]{4}$.

Resposta: $4\sqrt[3]{4}$ cm

4) A que distância do vértice deve-se seccionar uma pirâmide, por um plano paralelo à base, a fim de obter uma secção cuja área seja metade da área da base? É dada a altura da pirâmide: $h = 10\sqrt{3}$ cm.



$$\frac{A}{2A} = \left(\frac{d}{10\sqrt{3}}\right)^2$$

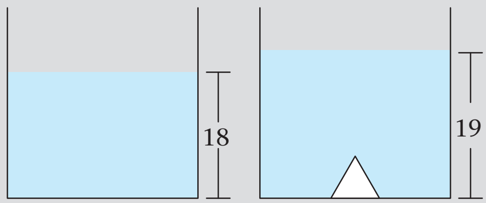
$$\frac{1}{2} = \left(\frac{d}{10\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{d}{10\sqrt{3}}$$

$$d = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{6} \text{ cm}$$

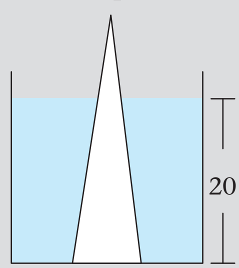
Resposta: $5\sqrt{6}$ cm

5) (UFRJ) Em um tanque no formato de um cubo de aresta 25 cm, contendo líquido, foi posta uma pirâmide P_1, de altura igual a 6 cm, com a base apoiada no fundo do tanque.
Com isso, o nível de líquido passou de 18 cm para 19 cm.



a) Calcule o volume, em cm^3, da pirâmide P_1.

b) A pirâmide P_1 foi retirada do tanque e o nível de líquido voltou ao inicial. Uma pirâmide P_2, de 30 cm de altura, foi então posta no tanque, com a base apoiada no fundo, o que elevou em 2 cm o nível de líquido.



Determine o volume da pirâmide P_2.

Solução:

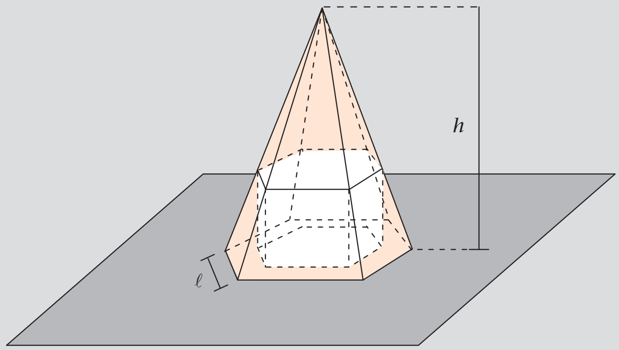
a) O volume da pirâmide P_1 é igual ao volume de líquido deslocado, dado por $25 \cdot 25 \cdot 1$.
Resposta: $V_1 = 625 \text{ cm}^3$

b) Sejam V_2 o volume da pirâmide P_2 e V o volume da parte de P_2 não submersa. Então, o volume do tronco de pirâmide submerso, V_T, é:

$$V_T = V_2 - V = 2 \cdot 625 = 1\,250 \text{ e } \frac{V}{V_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_2 - 1250}{V_2} = \frac{1}{27} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V_2 = 1250 \cdot \frac{27}{26} = \frac{16\,875}{13}$$

Resposta: $V_2 = \dfrac{16\,875}{13} \text{ cm}^3$

6) (Mauá-SP) Numa pirâmide hexagonal regular de altura h e cuja aresta da base vale ℓ, faz-se uma secção paralela à base e no tronco resultante inscreve-se um prisma reto cuja base é a menor das bases desse tronco, como na figura a seguir. Sendo $\frac{h}{3}$ a altura do prisma, determinar o seu volume.



Solução:

Sendo a a aresta da base do prisma hexagonal, temos que $a = \frac{2\ell}{3}$.

Assim:

$$V = \left(6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \cdot \frac{h}{3} \Rightarrow V = \left(6 \cdot \frac{\left(\frac{2\ell}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) \cdot \frac{h}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\ell^2 h$$

Resposta: $\frac{2\sqrt{3}}{9}\ell^2 h$

7) (UFPA) A base de uma pirâmide regular é um quadrado de 6 m de lado, e sua área lateral é 10 vezes a área da base. Sua altura em metros é um número entre:

(A) 0 e 10 (B) 10 e 20 (C) 20 e 30 (D) 30 e 40 (E) 40 e 50

Solução:

$$S_L = 10S_b \Rightarrow 4 \cdot \frac{6a_p}{2} = 10 \cdot 6^2 \Rightarrow a_p = 30 \text{ m}$$

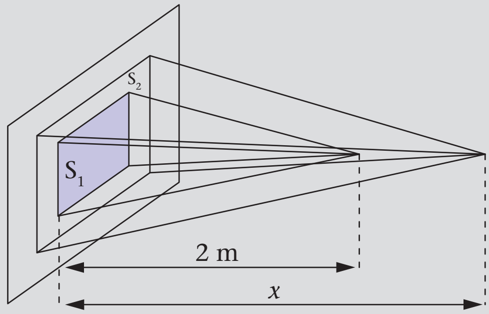
$$a_p^2 = h^2 + a_b^2 \Rightarrow h^2 = 30^2 - 3^2 = 891 \Rightarrow 20 < h < 30$$

Resposta: C

8) (PUC-SP) Um projetor está a uma distância de 2 metros de uma parede. A que distância da parede deve ser colocado o projetor para que a área de um quadro projetado aumente 50%?

(A) $\sqrt{6}$ m (B) $2\sqrt{3}$ m (C) 3 m (D) 4,5 m (E) $3\sqrt{2}$ cm

Solução:



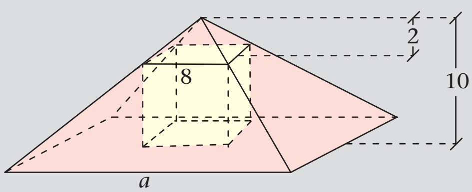
$S_2 = 150\%\ S_1$

$\dfrac{S_2}{S_1} = 1,5$

$\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = 1,5 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$ m

Resposta: A

9) Em uma pirâmide regular, cuja altura mede 10 cm, está inscrito um cubo cuja aresta mede 8 cm conforme indica a figura abaixo. Calcule o volume dessa pirâmide.



Solução:

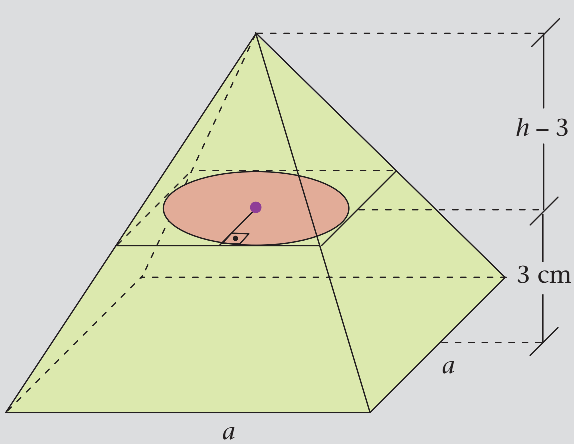
$\dfrac{8}{a} = \dfrac{2}{10} \Rightarrow a = 40$ cm

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 40^2 \cdot 10 = \dfrac{16\,000}{3}$

Resposta: $\dfrac{16\,000}{3}$ cm^3

10) (ITA-SP) Consideremos uma pirâmide regular cuja base quadrada tem área que mede 64 cm². Numa secção paralela à base que dista 30 mm desta, inscreve-se um círculo. Se a área desse círculo mede 4π cm², determine a altura dessa pirâmide.

Solução:

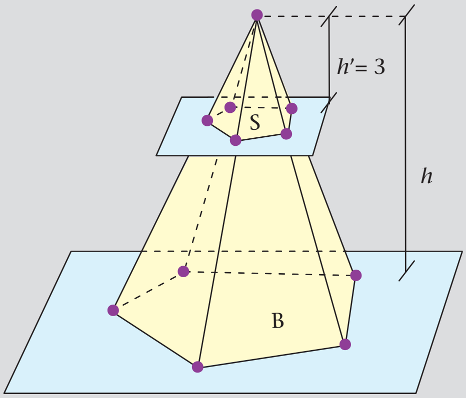


$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 64 \Rightarrow a = 8 \text{ cm} \\ \pi x^2 = 4\pi \Rightarrow x = 2 \text{ cm} \end{array}\right\} \dfrac{h-3}{h} = \dfrac{2x}{a} \Rightarrow \dfrac{h-3}{h} = \dfrac{4}{8} \Rightarrow h = 6 \text{ cm}$$

Resposta: 6 cm

11) Calcule o volume de uma pirâmide, sabendo que a área de sua base é igual a 50 m² e que o plano paralelo à base e distante 3 m do vértice produz uma secção de 2 m².

Solução:



Designando por S e por B as áreas da secção e da base, e por h e por h' as distâncias de seus planos ao vértice da pirâmide, podemos escrever:

$$\frac{S}{B} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \Rightarrow \frac{2}{50} = \left(\frac{3}{h}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{25} = \frac{9}{h^2} \Rightarrow$$

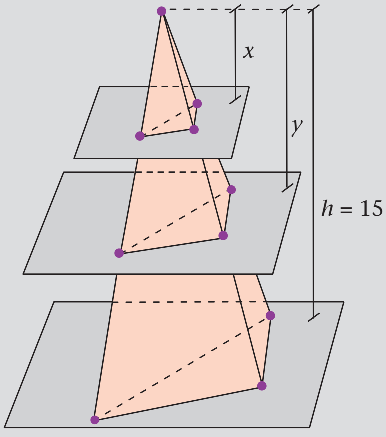
$$\Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{3}{h} \Rightarrow h = 15 \text{ m}$$

$$V = \frac{Bh}{3} = \frac{50 \cdot 15}{3} \Rightarrow = 250 \text{ m}^3$$

Resposta: 250 m³

12) Dois planos paralelos ao da base de uma pirâmide de 15 m de altura dividem a pirâmide em três sólidos, cujos volumes, considerados a partir do vértice da pirâmide, são diretamente proporcionais aos números 1, 7 e 19. Calcule as distâncias desses dois planos ao vértice da pirâmide.

Solução:



Dos próprios dados, temos:

$$\frac{V_1}{1} = \frac{V_2}{7} = \frac{V_3}{19} = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{1+7+19} = \frac{V}{27}$$

As pirâmides V_1 e V (a dada) são semelhantes.
Logo:

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{x}{15}\right)^3 \Rightarrow \frac{1}{27} = \left(\frac{x}{15}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = 5 \text{ m}$$

Analogamente, porque as pirâmides $(V_1 + V_2)$ e V são semelhantes, vem:

$$\frac{V_1 + V_2}{V} = \left(\frac{y}{15}\right)^3 \Rightarrow \frac{1+7}{27} = \frac{8}{27} = \left(\frac{y}{15}\right)^3 \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{y}{15} \Rightarrow y = 10 \text{ m}$$

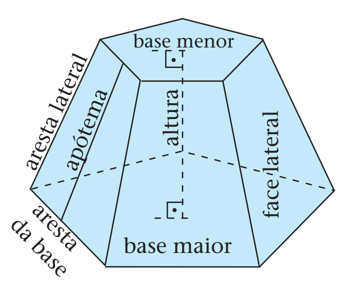
Resposta: 5 m e 10 m

13.4 – Tronco de pirâmide

Tronco de pirâmide é a porção da pirâmide compreendida entre a base e uma secção paralela à base.

DEFINIÇÃO

Tronco de pirâmide.



As **faces laterais** de um tronco de pirâmide são trapézios. A área lateral do tronco é a soma das áreas desses trapézios.

A **altura** do tronco é a distância entre os planos das bases.

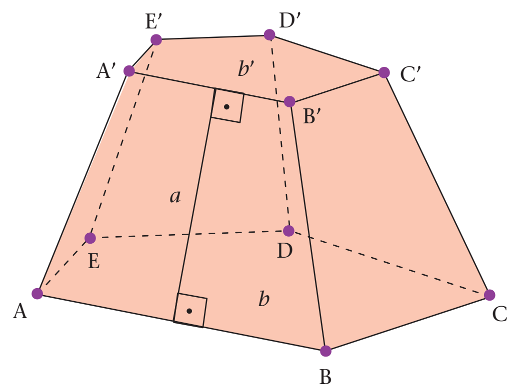
O **apótema** do tronco da pirâmide regular é a altura desses trapézios.

13.4.1 – Área do tronco de pirâmide

A área lateral de um tronco de pirâmide regular é o produto da soma dos semi-perímetros das bases pelo apótema *a* do tronco.

Demonstração:

A área lateral será a soma das áreas dos trapézios das faces. Cada trapézio tem a área igual a $\dfrac{(AB + A'B')a}{2}$.



A área lateral será então:

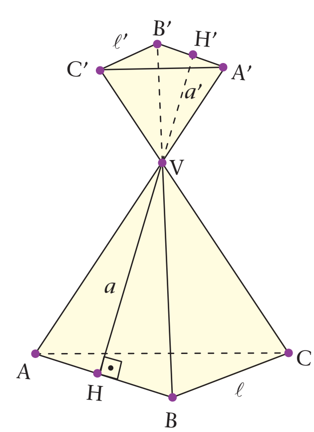
$S_L = \dfrac{(AB + A'B')a}{2} \cdot n$, sendo n o número de lados das bases.

$S_L = (n \cdot AB + n \cdot A'B')\dfrac{a}{2}$. Mas $n \cdot AB = 2p$ e $n \cdot A'B' = 2p'$, logo $S_L = (2p + 2p')\dfrac{a}{2}$, ou ainda $S_L = (p + p')a$, em que p e p' são respectivamente os semiperímetros das bases.

Chamando de b e b' às áreas das bases do tronco, a área total do tronco será:

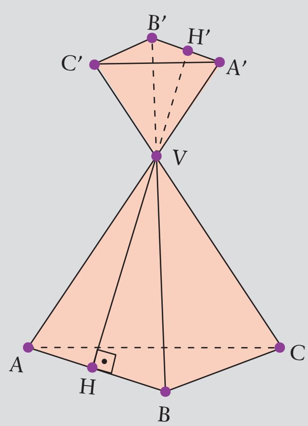
$$S_T = (p + p')a + b + b'$$

Um **tronco de pirâmide de segunda espécie** é obtido seccionando-se a superfície piramidal em suas duas folhas. É formado por duas pirâmides invertidas, semelhantes.



Exercício resolvido:

Calcule a área total do tronco de pirâmide regular de segunda espécie da figura abaixo. Dados: HH’ = 12 cm e os lados das bases 2 cm e 6 cm.



Solução:

Como os tetraedros VABC e VA’B’C’ são semelhantes, temos:

$\frac{VH'}{VH} = \frac{2}{6}$, mas VH + VH’ = 12 cm. Portanto, VH = 9 cm e VH’ = 3 cm.

Com isso:

$$S_{L(VABC)} = 3 \cdot \frac{6 \cdot 9}{2} = 81 \text{ cm}^2 \Rightarrow S_T = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} + 81 = 9\left(\sqrt{3} + 9\right) \text{ cm}^2$$

$$\frac{S_{T(VA'B'C')}}{S_{L(VABC)}} = \left(\frac{2}{6}\right)^2 \Rightarrow S_{T(VA'B'C')} = \left(\sqrt{3} + 9\right) \text{cm}^2$$

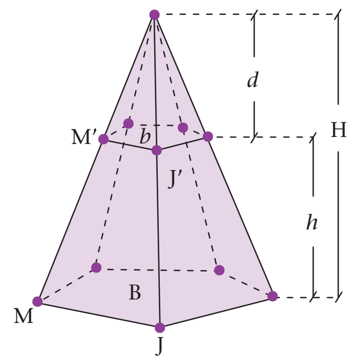
Enfim:

$$S_{Total} = 9\left(\sqrt{3} + 9\right) + \left(\sqrt{3} + 9\right) = 10\left(\sqrt{3} + 9\right) \text{cm}^2$$

Resposta: $10\left(\sqrt{3} + 9\right)$

13.4.2 – Volume do tronco de pirâmide

O volume de um tronco de pirâmide é o produto de um terço da altura pela soma das bases com a média geométrica delas.



Demonstração:

O volume do tronco será igual à diferença entre o volume da pirâmide de altura H e base inferior B e o da pirâmide de altura d e base b.

Chamemos, por simplicidade, a área da base inferior de B e a área da base superior de b.

Temos que o volume do tronco é: $V = \frac{1}{3}BH - \frac{1}{3}bd$.

Temos também: $\frac{b}{B} = \frac{d^2}{H^2}$ e $H = d + h$.

Eliminando nessas três equações os parâmetros H e d, teremos o volume do tronco em função de B, b e h. Assim:

$$\frac{d^2}{(d+h)^2} = \frac{b}{B} \Rightarrow \frac{d}{d+h} = \sqrt{\frac{b}{B}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}} \Rightarrow \frac{d}{h} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}} \cdot h$$

Portanto:

$$H = d + h \Rightarrow H = \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}} + 1\right)h \Rightarrow H = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}} \cdot h$$

Enfim, o volume do tronco será:

$$V = \frac{1}{3}(BH - bd) = \frac{1}{3}\left(B\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}h - b\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}h\right)$$

Racionalizando os denominadores, vem:

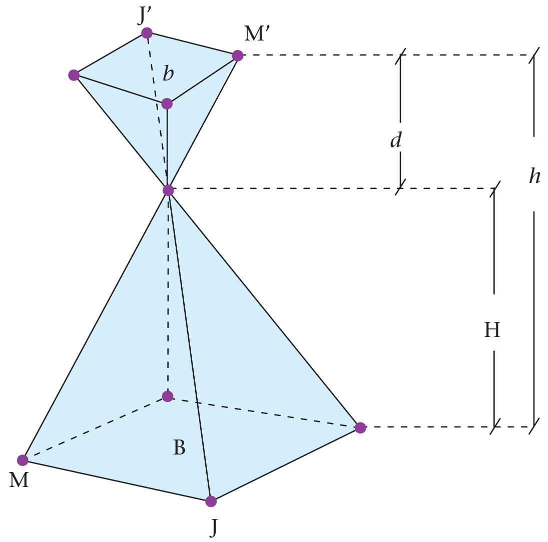
$$V = \frac{1}{3}\left[\frac{\left(B\sqrt{B}h - b\sqrt{b}h\right)\left(\sqrt{B}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{B}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{B}+\sqrt{b}\right)}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{\left(B^2 + B\sqrt{B}\sqrt{b} - b\sqrt{b}\sqrt{B} - b^2\right)h}{B-b}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{(B-b)(B+b)+(B-b)\sqrt{Bb}}{B-b}\right]h$$

Enfim:

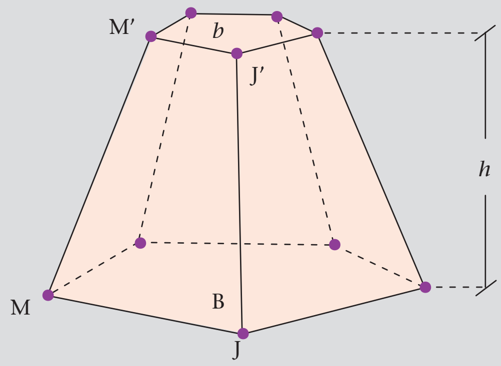
$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(B + b + \sqrt{Bb}\right)}$$

Para um **tronco de segunda espécie**, a altura será a soma das alturas das duas pirâmides. Parte-se do volume $V = \frac{1}{3}BH + \frac{1}{3}bd$, com $h = H + d$ e $\frac{b}{B} = \frac{d^2}{H^2}$ e analogamente se obtém $V = \frac{1}{3}h\left(B + b - \sqrt{Bb}\right)$.



Exercícios resolvidos:

1) Na figura abaixo, tem-se $\frac{M'J'}{MJ} = k$. Calcule o volume do tronco da pirâmide em função de B, h e k.



Solução:

Sabemos que:

$V = \frac{1}{3}h\left(B + b + \sqrt{Bb}\right)$, porém, $\frac{b}{B} = k^2 \Rightarrow b = k^2B$.

Substituindo, vem:

$$V = \frac{1}{3}h\left(B + k^2B + \sqrt{Bk^2B}\right)$$

$$V = \frac{1}{3}h\left(B + k^2B + Bk\right) = \frac{1}{3}Bh\left(1 + k + k^2\right)$$

<u>Resposta:</u> $\frac{1}{3}Bh\left(1 + k + k^2\right)$

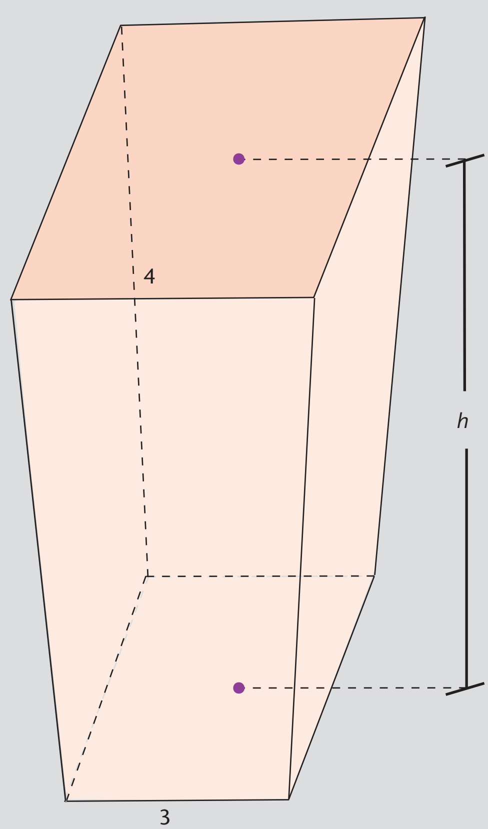
2) (USP) A relação entre as áreas das bases b e B de um tronco de pirâmide de bases paralelas é $\frac{1}{4}$. Qual a relação entre seu volume e altura?

<u>Solução:</u>

$$\frac{b}{B} = \frac{1}{4} \Rightarrow B = 4b$$

$$V_t = \cdot h_t\left(B + b + \sqrt{Bb}\right) \Rightarrow \frac{V_t}{h_t} = \frac{1}{3}\left(4b + b + \sqrt{4bb}\right) \Rightarrow \frac{V_t}{h_t} = \frac{7}{3}b$$

3) Um cesto de lixo tem a forma de tronco de pirâmide regular de bases paralelas. As arestas das bases do tronco medem 3 dm e 4 dm. Se a altura do tronco é h = 7 dm, calcule o seu volume.



$$V = \frac{h}{3}\left(B + \sqrt{Bb} + b\right)$$

$$V = \frac{7}{3}\left(16 + \sqrt{16 \cdot 9} + 9\right)$$

$$V = \frac{7}{3}\left(25 + 12\right) = \frac{259}{3}\ \text{dm}^3$$

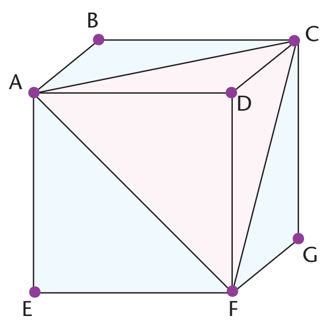
<u>Resposta</u>: $\frac{259}{3}$ dm^3

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 (Unirio-RJ) Um engenheiro está construindo um obelisco de forma piramidal regular, onde cada aresta da base quadrangular mede 4 m e cada aresta lateral mede 6 m. A inclinação entre cada face lateral e a base do obelisco é um ângulo α, tal que:

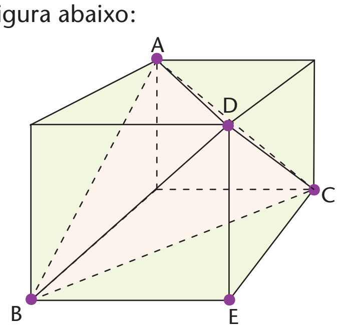
(A) $60° < \alpha < 90°$
(B) $45° < \alpha < 60°$
(C) $30° < \alpha < 45°$
(D) $15° < \alpha < 30°$
(E) $0° < \alpha < 15°$

2 A altura da pirâmide de base ACF contida no cubo de aresta igual a 3 abaixo, é:



(A) $\sqrt{6}$
(B) $\sqrt{3}$
(C) $\frac{1}{3}$
(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(E) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

3 (Uerj) Com os vértices A, B, C e D de um cubo de aresta a, construiu-se um tetraedro regular, como mostra a figura abaixo:

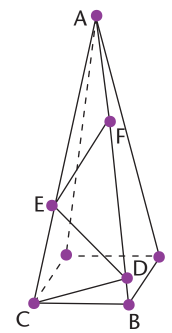


Calcule:

a) o volume da pirâmide EBCD em função de a;

b) a razão entre os volumes do tetraedro ABCD e do cubo.

4 (UNB-DF) Cada estrutura lateral de uma torre metálica, em forma de uma pirâmide regular de base quadrada, consiste de um triângulo isósceles ABC, de base BC, conforme representado na figura abaixo. Para minimizar o número de peças de tamanhos distintos na fabricação da torre, as barras metálicas BC, CD, DE, EF e FA têm comprimentos iguais. Sabendo que AB mede 50 m, e representando por x o comprimento de BC e por α a medida do ângulo BAC, julgue os itens seguintes:



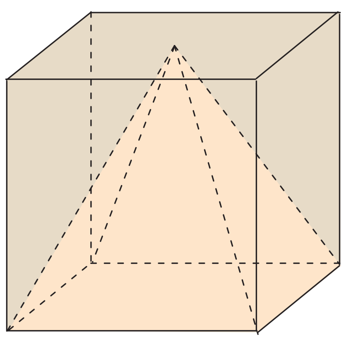
I) A altura da torre, em metros, é igual a $\sqrt{2500 - x^2}$.

II) O ângulo DFE tem medida igual a 2α.

III) Os triângulos ABC e CDB são semelhantes.

IV) O ângulo α mede mais de 30°.

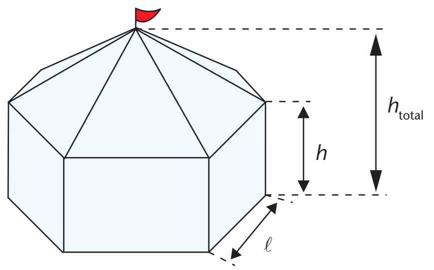
5 (Unirio-Ence-RJ)



Uma pirâmide está inscrita num cubo, como mostra a figura acima. Sabendo-se que o volume da pirâmide é de 6 m³, então, o volume do cubo, em m³, é igual a:

(A) 9
(B) 12
(C) 15
(D) 18
(E) 21

6 (Cefet-PR) Em "Imaginópolis" chegou o "Grande Circo Geométricus", cuja tenda tem o formato de uma pirâmide hexagonal regular justaposta sobre um prisma hexagonal regular de aresta da base $\ell = 20$ m e altura $h = 3$ m. Considerando que a altura total da tenda é $h_{total} = (3 + 2\sqrt{69})$ m, a quantidade total de lona utilizada nela é de:

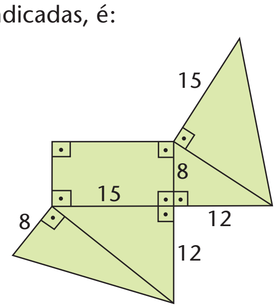


(A) 360 m²
(B) 1 920 m²
(C) 1 440 m²
(D) 1 560 m²
(E) 1 800 m²

7 (Cesgranrio-RJ) Uma folha de papel colorido, com a forma de um quadrado de 20 cm de lado, será usada para cobrir todas as faces e a base de uma pirâmide quadrangular regular com altura de 12 cm e apótema da base medindo 5 cm. Após se ter concluído essa tarefa, e levando-se em conta que não houve desperdício de papel, a fração percentual que sobrará dessa folha de papel corresponde a:

(A) 20%
(B) 16%
(C) 15%
(D) 12%
(E) 10%

8 (UFRGS-RS) A figura abaixo representa a planificação de um sólido. O volume desse sólido, de acordo com as medidas indicadas, é:



(A) 180
(B) 360
(C) 480
(D) 720
(E) 1 440

9 Um tetraedro regular tem área total igual a $6\sqrt{3}$ cm². Então sua altura, em cm, é igual a:

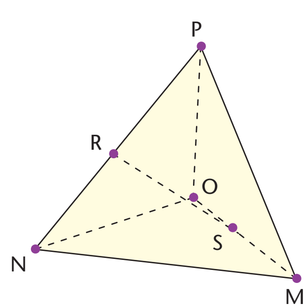
(A) 2
(B) 3
(C) $2\sqrt{2}$
(D) $3\sqrt{2}$
(E) $3\sqrt{3}$

10 (UFC-CE) Em um tetraedro regular VABC, seja M o ponto médio da aresta $\overline{BC}$, seja α o ângulo cujo vértice é M e cujos lados são os segmentos de reta $\overline{MA}$ e $\overline{MV}$. Então $\cos \alpha$ é igual a:

(A) $\frac{1}{3}$
(B) $\frac{1}{2}$
(C) $\frac{3}{4}$
(D) $\frac{5}{6}$
(E) $\frac{7}{8}$

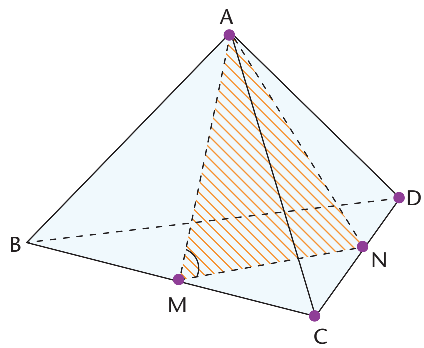
11 (UFF-RJ) No tetraedro regular representado na figura, R e S são, respectivamente, os pontos médios de NP e OM.

A razão $\frac{RS}{MN}$ é igual a:



(A) $\sqrt{3}$
(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(C) $\sqrt{2}$
(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(E) $3\sqrt{2}$

12 (UFRGS-RS) O tetraedro regular ABCD está representado na figura abaixo. M é o ponto médio da aresta $\overline{BC}$ e N é o ponto médio da aresta $\overline{CD}$. O cosseno do ângulo NMA é:



(A) $\frac{1}{6}$

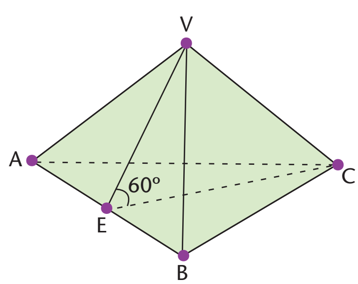
(B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

13 (Fuvest-SP) A figura abaixo representa uma pirâmide de base triangular ABC e vértice V. Sabe-se que ABC e ABV são triângulos equiláteros de lado ℓ e que E é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Se a medida do ângulo $V\hat{E}C$ é 60°, então o volume da pirâmide é:



(A) $\frac{\sqrt{3}\ell^3}{4}$

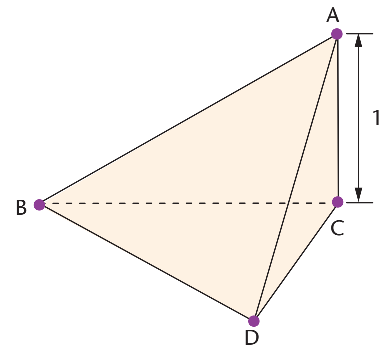
(B) $\frac{\sqrt{3}\ell^3}{8}$

(C) $\frac{\sqrt{3}\ell^3}{12}$

(D) $\frac{\sqrt{3}\ell^3}{16}$

(E) $\frac{\sqrt{3}\ell^3}{18}$

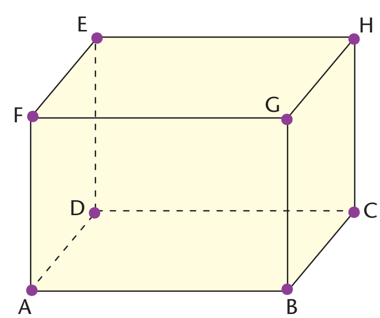
14 (Mack-SP) O volume do sólido da figura abaixo é:



(A) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{18}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{20}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{24}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{36}$

Dados: $C\hat{A}B = D\hat{A}C = 30°$; $B\hat{C}D = 60°$; $\overline{AC} \perp \overline{DC}$

15 (UFPR) A figura abaixo representa um paralelepípedo de dimensões 2 cm, 1 cm e 1 cm. A respeito desse paralelepípedo, é correto afirmar:



(01) A área do triângulo de vértices A, F e C é $\frac{\sqrt{5}}{2}$ cm².

(02) O número de caminhos com distância 4 cm entre os vértices B e E é 12.

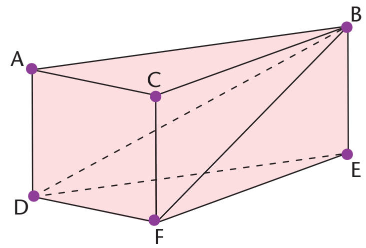
(04) A menor distância entre os vértices A e H é $\sqrt{6}$ cm.

(08) O volume da pirâmide de vértices A, B, C, D e E é igual a 1 cm³.

(16) O perímetro do retângulo de vértices A, C, F e H é igual a $2+\sqrt{5}$ cm.

Calcule a soma dos números associados às alternativas corretas.

16 (UFMG) Observe a figura abaixo. Ela representa um prisma reto de base triangular. O plano que contém os vértices B, D e F divide esse prisma em dois sólidos: DACFB, de volume V_1, e DEFB, de volume V_2.



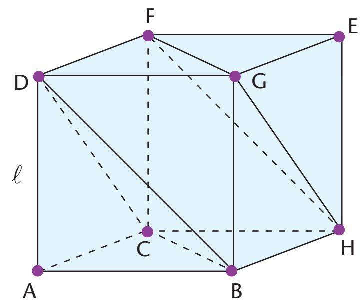
Assim sendo, a razão $\frac{V_1}{V_2}$ é:

(A) 1
(B) $\frac{3}{2}$
(C) 2
(D) $\frac{5}{2}$

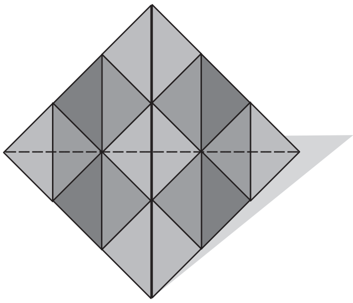
17 No tetraedro ABCD, a face ABC é um triângulo equilátero de lado 4 e a aresta AD, que mede 3, é perpendicular às arestas AB e AC. A distância do vértice A à face BCD é:

(A) $4\sqrt{3}$
(B) 6
(C) $\frac{6\sqrt{7}}{7}$
(D) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$
(E) $\frac{2\sqrt{21}}{21}$

18 Seja ABCDEFGH um cubo no qual AB, AC, AD, EF, EG, EH são 6 de suas 12 arestas, de sorte que A e E são vértices opostos. Calcule o volume do sólido BCDFGH em termos do comprimento ℓ das arestas do cubo.



19 (Uerj) A figura abaixo representa o brinquedo Piramix. Ele tem a forma de um tetraedro regular, com cada face dividida em 9 triângulos equiláteros congruentes. Se, a partir de cada vértice, for retirada uma pirâmide regular cuja aresta é $\frac{1}{3}$ da aresta do brinquedo, restará um novo sólido. A razão entre as superfícies totais desse sólido e do Piramix equivale a:

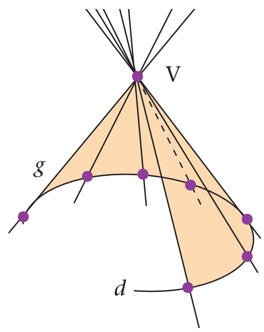


(A) $\frac{4}{9}$
(B) $\frac{5}{9}$
(C) $\frac{7}{9}$
(D) $\frac{8}{9}$

13.5 – Cone

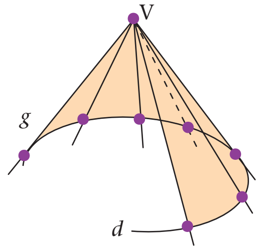
Superfície cônica é a superfície gerada por uma reta *g* que se desloca apoiando-se sobre uma curva *d* fixa e passando num ponto fixo V não pertencente ao plano da curva *d*.

DEFINIÇÃO
Superfície cônica.



A reta *g* que se desloca é denominada **quatriz** e a curva *d* na qual se apoia a quatriz se denomina **diretriz** da superfície cônica. O ponto fixo V é o **vértice** da superfície.

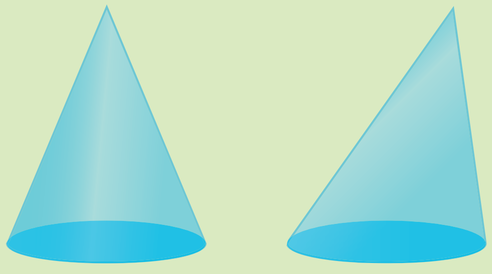
Quando a superfície é gerada por uma semirreta de origem no ponto V, a superfície é dita **de uma folha** e é dita **de duas folhas** quando é gerada pela reta prolongada infinitamente.



superfície cônica de uma folha

Conforme a diretriz, a superfície pode ser aberta ou fechada. Dependendo da forma da diretriz, a superfície cônica é circular, elíptica etc.

Cone é um sólido limitado por uma superfície cônica de uma folha fechada e por um plano que intersecte todas as geratrizes.

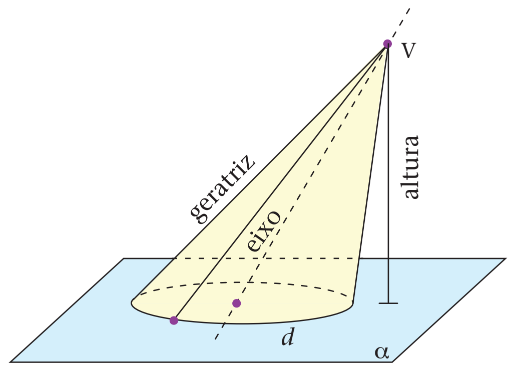


DEFINIÇÃO
Cone.

O **vértice** do cone é o vértice da superfície cônica.

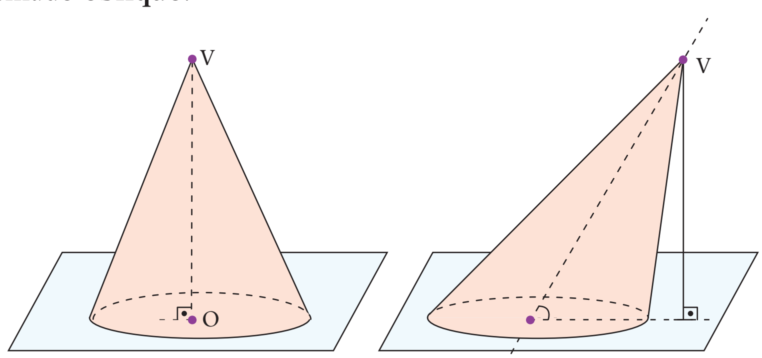
Geratriz do cone é qualquer segmento que une o vértice V aos pontos da diretriz *d*.

Base do cone é a porção do plano compreendida entre todas as geratrizes do cone.



Altura do cone é a distância do vértice V ao plano α da base do cone.

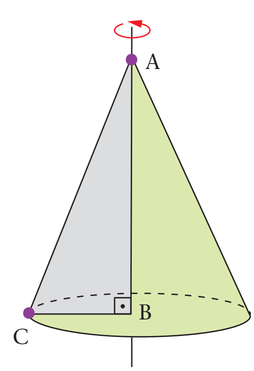
Eixo do cone circular é a reta que une o vértice ao centro da base. Se o eixo é perpendicular à base, o cone é chamado **reto**. Quando o eixo é oblíquo à base, o cone é chamado **oblíquo**.



cone circular reto cone circular oblíquo

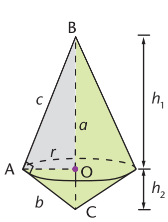
13.5.1 – Cone circular

O cone circular reto é chamado **cone de revolução** porque pode ser gerado pela revolução completa de um triângulo retângulo em torno de um cateto.

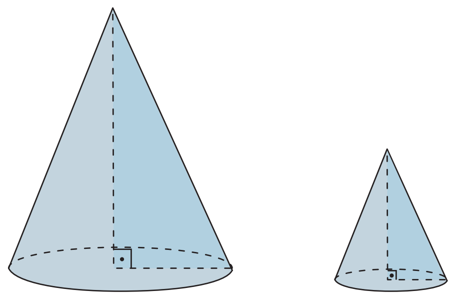


OBSERVAÇÃO

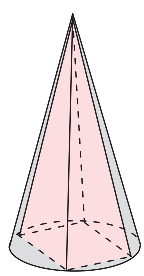
Quando a revolução se faz tomando como eixo de revolução a hipotenusa, obtêm-se dois cones de mesma base cujo raio é a altura do triângulo retângulo relativa à hipotenusa.



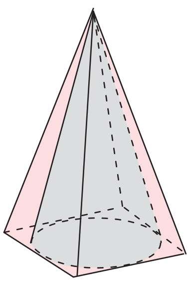
Cones de revolução semelhantes são cones gerados por triângulos retângulos semelhantes.



Uma pirâmide é dita **inscrita** ou **circunscrita** num cone quando tem o mesmo vértice e a base inscrita ou circunscrita no círculo da base do cone.

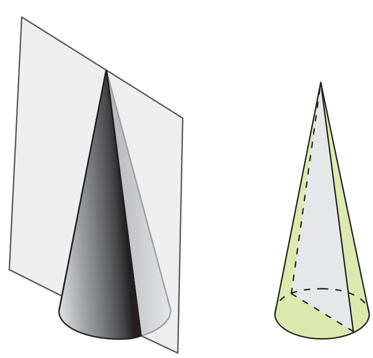


pirâmide inscrita

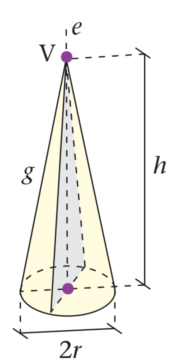


pirâmide circunscrita

Toda secção num cone circular feita por um plano passando pelo vértice e pelo centro da base é um triângulo. Quando o cone é de revolução, as secções produzidas por planos que contêm o eixo do cone (denominadas **meridianas**) são triângulos isósceles congruentes.

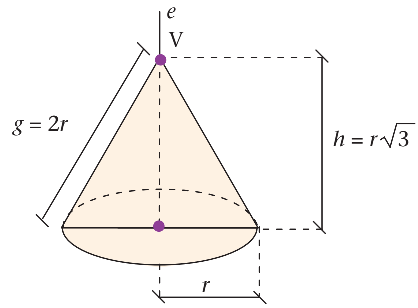


Neste caso, a base, a altura e os lados da secção são iguais, respectivamente, ao diâmetro da base, à altura e à geratriz do cone.

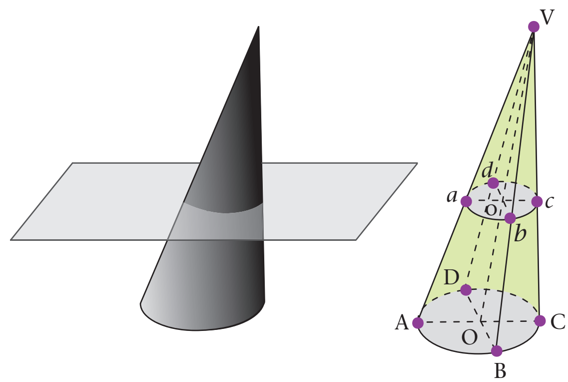


No caso particular da secção meridiana ser um triângulo equilátero, o cone é dito **equilátero**. Temos então:

$g = 2r$ e $h = r\sqrt{3}$



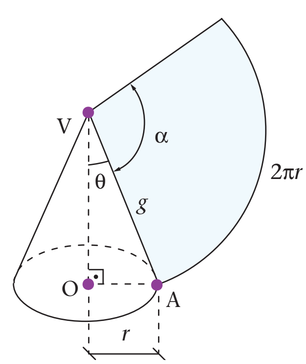
Toda secção num cone circular feita por um plano paralelo à base é um círculo.



13.5.2 – Planificação do cone de revolução

O cones de revolução podem ser planificados, dando um setor circular de raio igual à geratriz do cone e cujo arco tem o comprimento igual ao comprimento do círculo da base. Assim:

$$\alpha g = 2\pi r \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2\pi r}{g}}$$



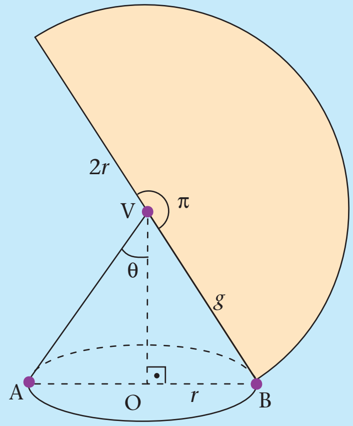
Para relacionar o ângulo θ formado pela geratriz e o eixo do cone com o ângulo α da planificação, temos, no triângulo VOA: $\frac{r}{g} = \operatorname{sen}\theta$. Como $\frac{r}{g} = \frac{\alpha}{2\pi}$, vem:

$$\boxed{\frac{\alpha}{2\pi} = \operatorname{sen}\theta}$$

Exemplo:

Se o cone for equilátero, temos:

$g = 2r \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi r}{2r} \Rightarrow \alpha = \pi$(radianos), ou seja, a planificação do cone é um semicírculo de raio igual ao diâmetro da base do cone.



Observe que todo semicírculo é o desenvolvimento de um cone equilátero. Basta ver que, se usarmos a relação $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\alpha}{2\pi}$, teremos $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\pi}{2\pi} \Rightarrow$ $\Rightarrow \operatorname{sen}\,\theta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30°$.

NOTA
Desenvolver uma superfície é o mesmo que planificá-la.

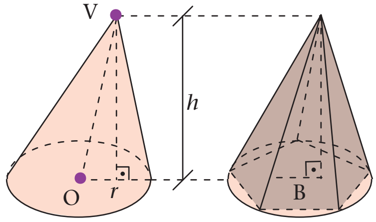
13.6 – Volumes e áreas de cones

O volume de um cone circular é igual ao terço do produto da área de sua base pela sua altura.

Demonstração:

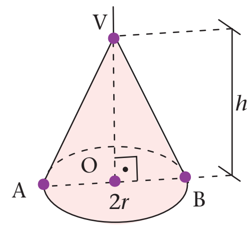
Inscrevendo uma pirâmide regular no cone e fazendo o número de faces tender para infinito, o volume do cone será o limite do volume da pirâmide. Temos que B tende para πr^2 e a altura h não varia, então:

$$V = \lim \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h \Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$



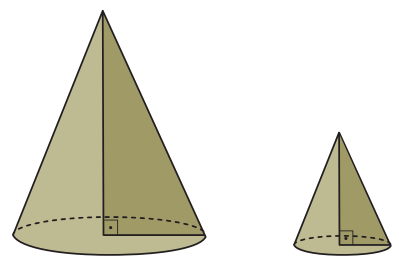
No caso particular do cone equilátero, temos $h = r\sqrt{3}$.

Logo: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot r\sqrt{3} \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\pi r^3\sqrt{3}$



Assim como nos outros sólidos, as áreas laterais e as áreas totais de dois cones semelhantes estão entre si como os quadrados de suas alturas, raios ou geratrizes; seus volumes estão entre si como os cubos de suas alturas, raios ou geratrizes.

$$\frac{S_T}{S'_T} = \frac{S_L}{S'_L} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2 = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 = \left(\frac{g}{g'}\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{V}{V'} = \left(\frac{h}{h'}\right)^3 = \left(\frac{r}{r'}\right)^3 = \left(\frac{g}{g'}\right)^3$$

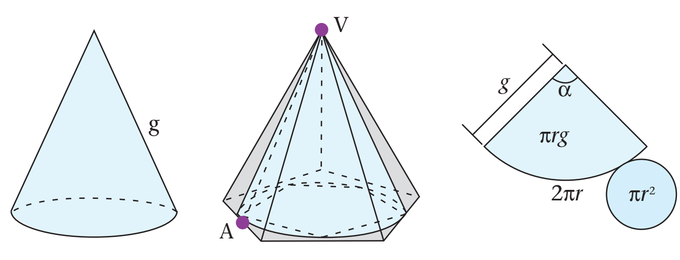


A área lateral de um cone de revolução é igual ao semiproduto do comprimento do círculo da base pela geratriz do cone.

Demonstração:

Circunscrevendo ou inscrevendo ao cone uma pirâmide regular, quando o número de faces da pirâmide crescer infinitamente, o perímetro da base $2p$ tenderá para $2\pi r$ e o apótema a = VA para a geratriz g, logo:

$$S_L = \lim pa = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot g \Rightarrow \boxed{S_L = \pi r g}$$



A área total da pirâmide será então:

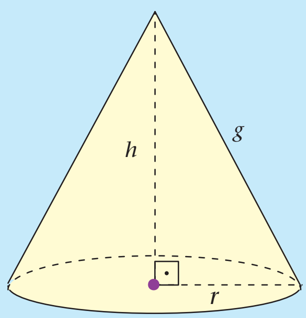
$$S_T = \pi rg + \pi r^2 \Rightarrow \boxed{S_T = \pi r(g + r)}$$

No caso particular do cone equilátero, temos:
$g = 2r \Rightarrow S_L = 2\pi r^2$ e $S_T = 3\pi r^2$

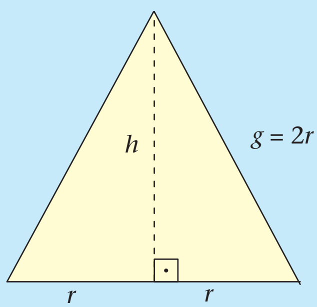
Exemplo:

Se um cone equilátero tem 30 cm de altura, calcule sua área lateral, sua área total e seu volume.

Solução:



secção meridiana



Num cone equilátero, a secção meridiana é um triângulo equilátero.
$h = r\sqrt{3} = 30 \Rightarrow r = 10\sqrt{3}$ cm
$g = 2r \Rightarrow g = 20\sqrt{3}$ cm

Área lateral:
$S_L = \pi rg \Rightarrow S_L = \pi \cdot 10\sqrt{3} \cdot 20\sqrt{3} \Rightarrow S_L = 600\pi$ cm²

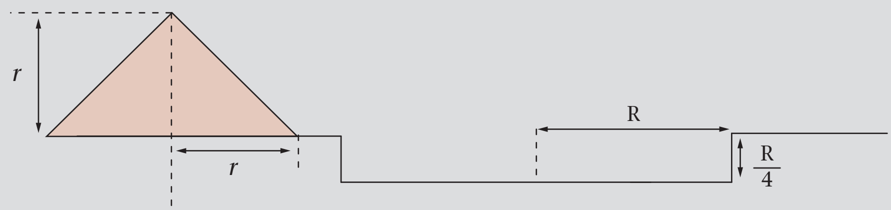
Área da base:
$B = \pi r^2 \Rightarrow B = \pi \cdot \left(10\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow B = 300\pi$ cm²

Área total:
$S = S_L + B \Rightarrow 600\pi + 300\pi \Rightarrow S = 900\pi$ cm²

Volume:
$V = \frac{1}{3}Bh \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 300\pi \cdot 30 \Rightarrow V = 3\,000\pi$ cm³

Exercícios resolvidos:

1) (Cesgranrio-RJ) Para construir uma piscina cilíndrica, com fundo circular, cava-se num terreno plano um buraco com raio R e profundidade $\frac{R}{4}$. A terra fofa, retirada do buraco, ocupa um volume 20% maior que o do buraco cavado e é amontoada na forma de um cone de revolução. Supondo que o raio *r* da base do cone é igual à sua altura, então a melhor aproximação da razão $\frac{r}{R}$ é:



(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 1,2 (D) $\frac{\pi}{2}$ (E) $\sqrt{3}$

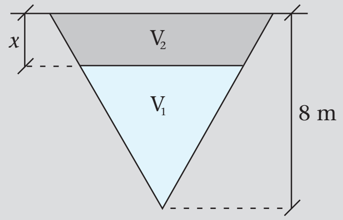
Solução:

$$V_{cone} = 1{,}20V_{buraco} \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot r = 1{,}2\cdot\pi R^2\cdot\frac{R}{4} \Rightarrow \frac{r^3}{R^3} = 0{,}9 \Rightarrow \frac{r}{R} = \sqrt[3]{0{,}9} \cong 0{,}97$$

Resposta: B

2) (PUC-RJ) Um tanque subterrâneo tem a forma de um cone circular invertido, de eixo vertical, e está cheio até a boca (nível do solo) com 27 000 litros de água e 37 000 litros de petróleo (o qual é menos denso que a água). Sabendo que a profundidade total do tanque é 8 metros e que os dois líquidos não são miscíveis, determine a altura da camada de petróleo.

Solução:



$V_1 = 27\,000\ell = 27\ m^3$
$V_2 = 37\,000\ell = 37\ m^3$
$V = V_1 + V_2 = 64\ m^3$

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{8-x}{8}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{8-x}{8}\right)^3 = \frac{27}{64} \Rightarrow \frac{8-x}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 2\ m$$

Resposta: 2 metros

3) (Cesgranrio-RJ)

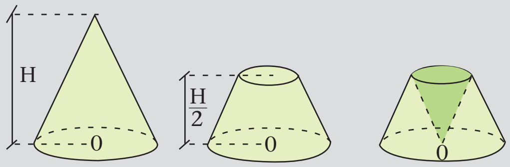


Fig. I Fig. II Fig. III

De um cone de centro da base O e de altura H (fig. I), obtém-se um tronco de cone de altura $\frac{H}{2}$ (fig. II). Neste tronco, faz-se um furo cônico com vértice O, como indicado na fig. III. Se o volume do cone da fig. I é V, então o volume do sólido da fig. III é:

(A) $\frac{3V}{4}$ (B) $\frac{V}{2}$ (C) $\frac{5V}{8}$ (D) $\frac{2V}{3}$ (E) $\frac{4V}{7}$

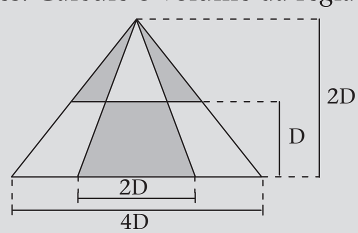
Solução:

$$V_{cone} = V \Rightarrow V_{tronco} = V - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot V = \frac{7}{8}V \Rightarrow V_{sólido} = \frac{7}{8}V - \frac{1}{8}V = \frac{6}{8}V = \frac{3}{4}V$$

$$V_{sólido} = \frac{3V}{4}$$

Resposta: A

4) (ITA-SP) A figura abaixo é a secção de dois cones retos cortados por um plano paralelo às bases. Calcule o volume da região hachurada.



Solução:

Repare na figura os seguintes cones:

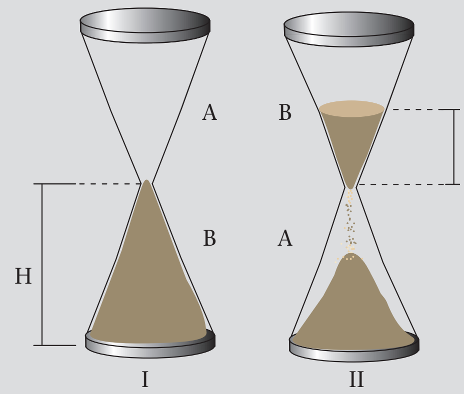
- de raio D e altura 2D $\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi D^2 \cdot 2D = \frac{2}{3}\pi D^3$
- de raio D e altura D $\Rightarrow V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi D^2 \cdot D = \frac{1}{3}\pi D^3$
- de raio $\frac{D}{2}$ e altura D $\Rightarrow V_3 = \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot D = \frac{1}{12}\pi D^3$

O volume da região hachurada é $(V_1 - V_3) + (V_2 - V_3)$. Temos:

$$(V_1 - V_3) + (V_2 - V_3) = V_1 + V_2 - 2V_3 = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{12}\right)\pi D^3 = \frac{5}{6}\pi D^3$$

Resposta: $\frac{5}{6}\pi D^3$

5) (Cesgranrio-RJ) Uma ampulheta repousa numa mesa como mostra a figura I (o cone B completamente cheio de areia). A posição da ampulheta é invertida. A figura II mostra o instante em que cada cone mantém metade da areia. Nesse instante, a areia no cone B forma um cone de altura:



(A) $\dfrac{H}{\sqrt{3}}$ (B) $\dfrac{H}{2}$ (C) $\dfrac{H}{\sqrt[3]{2}}$ (D) $\dfrac{H}{\sqrt[3]{3}}$ (E) $\dfrac{H}{4}$

Solução:

$$\frac{1}{2} = \frac{V'}{V} = \left(\frac{H'}{H}\right)^3 \Rightarrow H' = \frac{H}{\sqrt[3]{2}}$$

Resposta: C

6) (UFBA) O cone representado abaixo tem 12 cm de raio e 16 cm de altura, sendo *d* a distância do vértice a um plano α paralelo à base. Para que as duas partes do cone separadas pelo plano α tenham volumes iguais, *d* deve ser igual a:

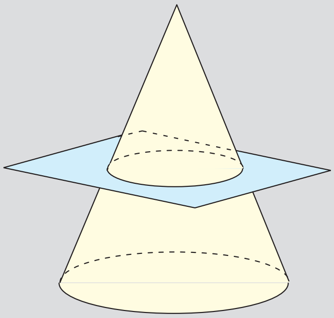
(A) $8\sqrt[3]{4}$ cm

(B) $8\sqrt{2}$ cm

(C) 8 cm

(D) 10 cm

(E) 12 cm

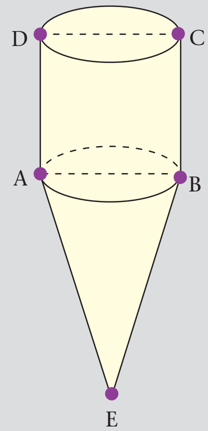


Solução:

Do exercício anterior, temos: $H' = \dfrac{H}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{16}{\sqrt[3]{2}} = 8\sqrt[3]{4}$ cm $= d$

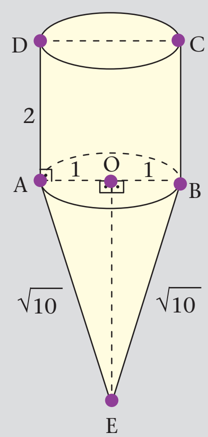
Resposta: A

7) (Mack-SP) No sólido da figura, ABCD é um quadrado de lado 2 e $AE = BE = \sqrt{10}$. Calcule o volume desse sólido.



Solução:

Do enunciado, temos a figura:



No triângulo retângulo AOE, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$OE^2 + AO^2 = AE^2$

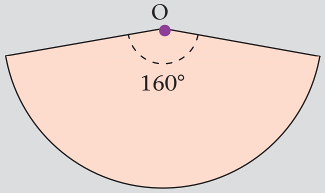
$OE^2 + 1^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 \Rightarrow OE^2 = 9 \Rightarrow OE = 3$

O volume V pedido pode ser dado pela soma dos volumes do cilindro e do cone.

Logo, $V = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 + \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 3$, ou seja, $V = 3\pi$.

Resposta: 3π

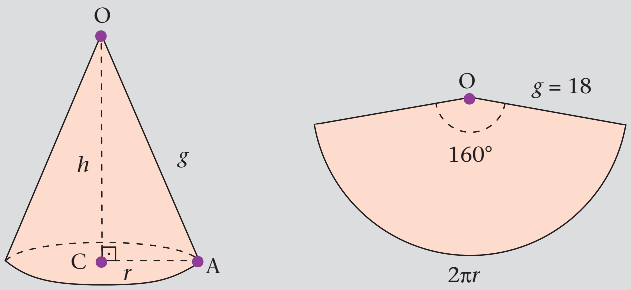
8) (Mack-SP) Planificando a superfície lateral de um cone, obtém-se o setor circular da figura, de centro O e raio 18 cm. Dos valores abaixo, o mais próximo da altura desse cone é:



(A) 12 cm (B) 18 cm (C) 14 cm (D) 16 cm (E) 20 cm

<u>Solução:</u>

Sendo *g*, *h* e *r*, respectivamente, as medidas da geratriz, da altura e do raio da base desse cone, do enunciado, temos as figuras:



Temos:
$2\pi \cdot 18$ —— $360°$
$2\pi \cdot r$ —— $160°$
Portanto, $r = 8$ cm.

Do triângulo retângulo OCA, vem:

$h^2 + r^2 = g^2$

$h^2 + 8^2 = 18^2 \Rightarrow h = \sqrt{260}$

Temos: $\sqrt{256} < \sqrt{260} < \sqrt{289}$

Então: $16 < \sqrt{260} < 17$

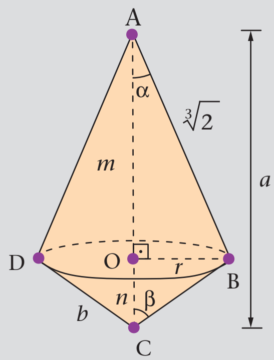
Logo, dos valores apresentados nas alternativas, o mais próximo é 16.

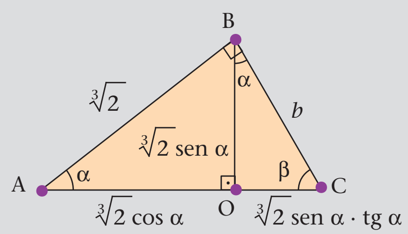
<u>Resposta</u>: D

9) (ITA-SP) Um dos catetos de um triângulo mede $\sqrt[3]{2}$ cm. O volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa é π cm³. Determine os ângulos deste triângulo.

<u>Solução:</u>

O triângulo ADC foi rotacionado em torno do eixo AC.





No $\triangle$ABO, temos: $\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{BO}{AB} \Rightarrow BO = \sqrt[3]{2}\cdot\operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha = \dfrac{AO}{AB} \Rightarrow AO = \sqrt[3]{2}\cdot\cos\alpha \end{cases}$

No $\triangle$CBO, temos: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{OC}{BO} \Rightarrow OC = \sqrt[3]{2}\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$

Sendo V = π cm³, temos: $\dfrac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot m + \dfrac{1}{3}\pi r^2\cdot n = \pi \Rightarrow \dfrac{1}{3}r^2(m+n) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{2}\ \operatorname{sen}\ \alpha\right)^2\left(\sqrt[3]{2}\ \cos\ \alpha + \sqrt[3]{2}\ \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{tg}\ \alpha\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\sqrt[3]{4}\cdot\operatorname{sen}^2\alpha\cdot\sqrt[3]{2}\,(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\operatorname{sen}^2\alpha(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha) = 1 \Rightarrow (1-\cos^2\alpha)\left[\cos\alpha + \frac{(1-\cos^2\alpha)}{\cos\alpha}\right] = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\cos^2\alpha)(\cos^2\alpha + 1 - \cos^2\alpha) = \frac{3}{2}\cos\alpha \Rightarrow 1-\cos^2\alpha = \frac{3}{2}\cos\alpha \Rightarrow$$

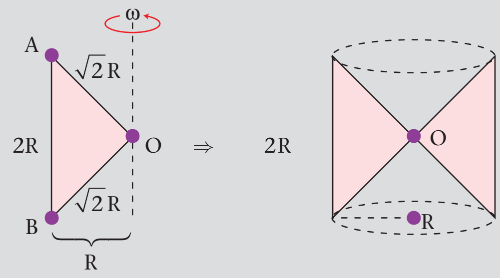
$$\Rightarrow 2\cos^2\alpha + 3\cos\alpha - 2 = 0$$

Logo: $\cos\alpha = \dfrac{-3\pm 5}{4}$. Portanto: $\begin{cases} \cos\alpha_1 = \dfrac{1}{2} \\ \cos\alpha_2 = -2 \text{ (não convém)} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 60°$

<u>Resposta</u>: Os ângulos dos triângulos são 30°, 60° e 90°.

10) (ITA-SP) Considere o triângulo isósceles OAB, com lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ de comprimento $\sqrt{2}R$ e lado $\overline{AB}$ de comprimento 2R. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação deste triângulo em torno da reta que passa por O e é paralela ao lado $\overline{AB}$.

Solução:



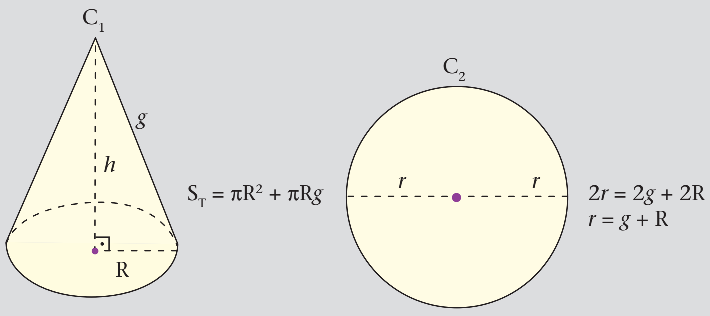
O volume do sólido formado pela revolução do triângulo em torno do eixo ω será o volume do cilindro menos o volume dos dois cones:

$$V = \pi R^2 \cdot 2R - 2\left[\frac{\pi R^2 \cdot R}{3}\right] \Rightarrow V = 2\pi R^3\left(1 - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

11) (ITA-SP) A área total da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base mede R cm, é igual à terça parte da área de um círculo de diâmetro igual ao perímetro da secção meridiana do cone. Calcule o volume deste cone, em cm³.

Solução:

Seja o cone e o círculo abaixo:



Do enunciado segue que:

$$\pi R^2 + \pi R g = \frac{1}{3}\pi r^2 \Rightarrow \pi R(R + g) = \frac{1}{3}\pi(g + R)^2 \Rightarrow 3R = g + R \Rightarrow g = 2R$$

$$g^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow (2R)^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow 3R^2 = h^2 \Rightarrow h = R\sqrt{3}$$

Logo, o volume do cone é dado por: $V = \frac{1}{3}\pi R^2\left(R\sqrt{3}\right) \Rightarrow V = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot R^3$ cm³

13.7 – Tronco de cone

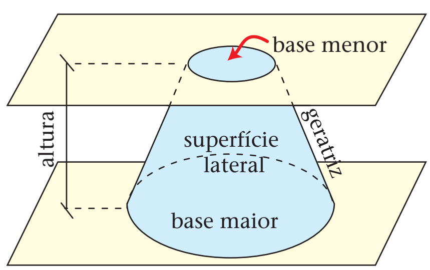
Tronco de cone de primeira espécie é a porção de um cone compreendida entre a base e um plano paralelo à base.

DEFINIÇÃO
Tronco de cone.

A base do cone que dá origem ao tronco é a **base maior** do tronco e a secção do plano paralelo é a **base menor**.

A **altura** do tronco é a distância entre os planos paralelos das bases.

A **superfície lateral do tronco** é a porção da superfície lateral do cone compreendida entre as bases do tronco.



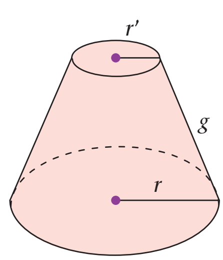
13.7.1 – Área do tronco do cone

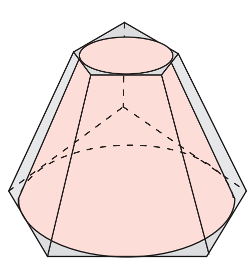
A área lateral de um tronco de cone de revolução é igual ao produto da soma dos semiperímetros das bases pela geratriz do tronco.

<u>Demonstração</u>:

Analogamente ao caso do cone, a área do tronco se obtém a partir do tronco de pirâmide.

$S_L = \lim(p + p')a = \pi(r + r')g \Rightarrow \boxed{S_L = \pi(r + r')g}$





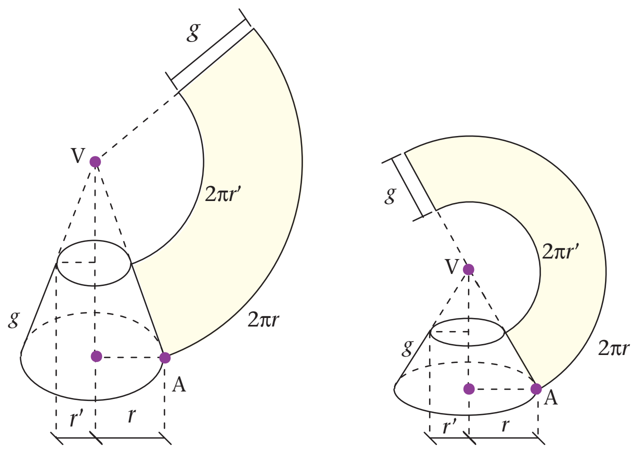
E a área total será:

$$S_T = S_L + B + B' \Rightarrow \boxed{S_T = \pi(r + r')g + \pi(r^2 + \pi'^2)}$$

13.7.2 – Planificação do tronco de cone circular

A planificação de um tronco de cone de primeira espécie reduz-se a um setor de coroa circular cujos arcos são os comprimentos dos círculos das bases e largura igual à geratriz.

Quando o tronco se origina de um cone equilátero, a planificação torna-se a diferença de dois semicírculos. É uma semicoroa circular de largura igual à geratriz do tronco.



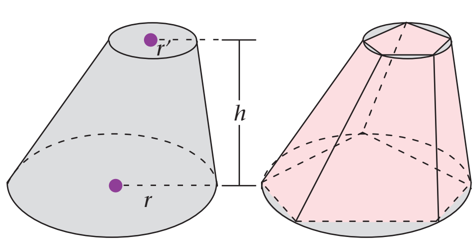
13.7.3 – Volume do tronco de cone

O volume de um tronco de cone circular é equivalente à soma dos volumes de três cones de altura comum igual à do tronco e cujas bases são a menor, a maior e a média geométrica das bases do tronco.

<u>Demonstração:</u>

Consideremos o tronco de pirâmide inscrito no tronco de cone. Temos que:

$$V = \frac{1}{3}h\left(B + b + \sqrt{Bb}\right)$$



em que B e b são, respectivamente, as áreas das bases maior e menor.

Quando o número de faces do tronco de pirâmide tende para infinito, temos:

$$V = \frac{h}{3}\left(\pi r^2 + \pi r'^2 + \sqrt{\pi r^2 \cdot \pi r'^2}\right)$$

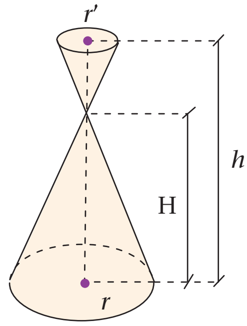
Então: $\boxed{V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + r'^2 + rr')}$

Para o **tronco de cone de revolução de segunda espécie** temos, analogamente:

$$V = \frac{1}{3}h\left(B + b - \sqrt{Bb}\right), \text{ que nos leva a:}$$

$$V = \frac{h}{3}\left(\pi r^2 + \pi r'^2 - \sqrt{\pi r^2 \cdot \pi r'^2}\right)$$

$$\boxed{V = \frac{\pi h}{3}\left(r^2 + r'^2 - rr'\right)}$$



Exercícios resolvidos:

1) Uma xícara de chá tem a forma de um tronco de cone reto, conforme a figura.

Supondo $\pi = 3$, o volume máximo de líquido que ela pode conter é:

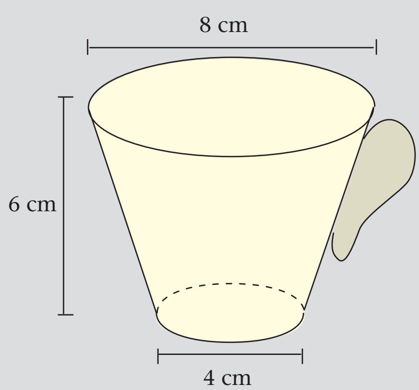
(A) 168 cm³

(B) 172 cm³

(C) 166 cm³

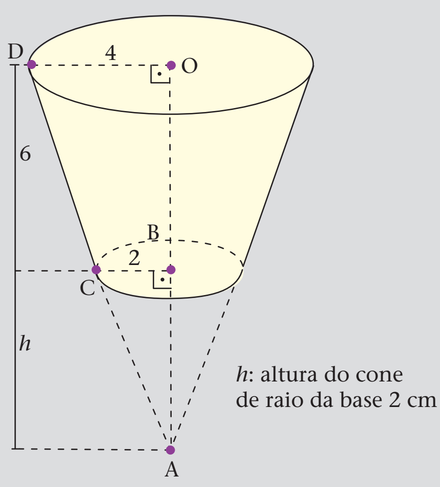
(D) 176 cm³

(E) 164 cm³



Solução:

Do enunciado, temos a figura:



Os triângulos OAD e BAC são semelhantes, logo:

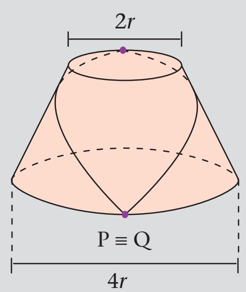
$$\frac{h+6}{h} = \frac{4}{2} \Rightarrow h = 6 \text{ cm}$$

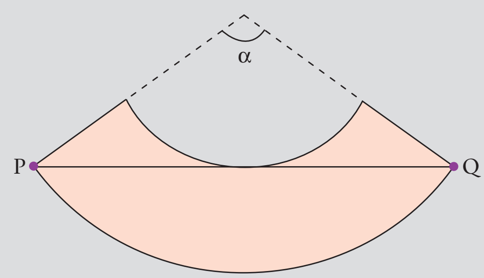
O volume (V) pedido é:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4^2 \cdot (6+6) - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 6 \Rightarrow V = 168 \text{ cm}^3$$

Resposta: A

2) (IBMEC-RJ) As figuras, fora de escala, mostram a cúpula de um abajur com a forma da superfície lateral de um tronco de cone circular reto, cujo raio da base maior mede o dobro do raio da base menor, e o recorte de tecido que foi utilizado na sua confecção.

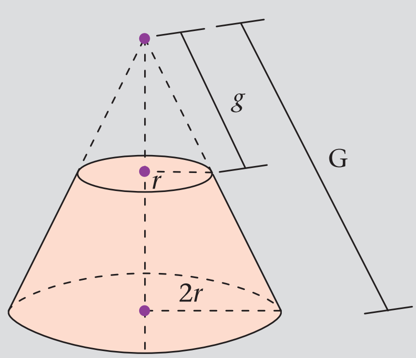




Sabendo que a linha decorativa que aparece na cúpula foi obtida traçando-se, no tecido, a corda $\overline{PQ}$ da circunferência maior, sendo $\overline{PQ}$ tangente à circunferência menor, calcule a medida do ângulo central α.

Solução:

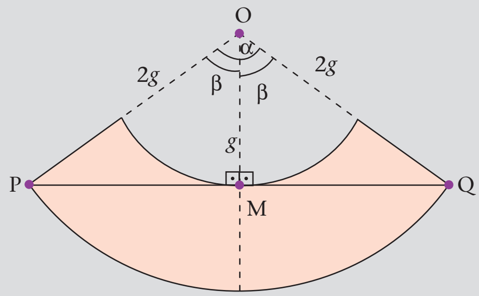
Do enunciado, temos a figura:



Os dois cones da figura são semelhantes.

Logo: $\frac{G}{g} = \frac{2r}{r} \Rightarrow G = 2g$

Assim, temos a figura:



No triângulo retângulo OMQ, temos:

$\cos\beta = \frac{g}{2g} \Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 60°$

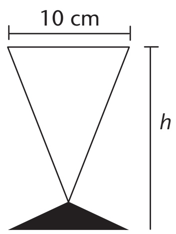
e

$\alpha = 2\beta = 120°$

Resposta: 120°

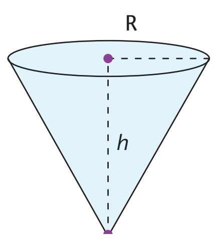
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 (Unirio-RJ) Uma tulipa de chope tem a forma cônica, como mostra a figura abaixo. Sabendo-se que sua capacidade é de 100π mL, a altura h é igual a:



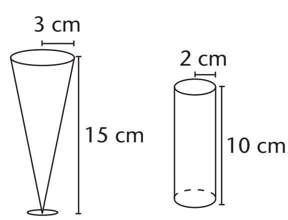
(A) 20 cm
(B) 16 cm
(C) 12 cm
(D) 8 cm
(E) 4 cm

2 (UFPI) Uma caixa-d'água, com capacidade de 810 m³ de volume, tem a forma de um cone circular reto invertido, conforme a figura. Se o nível da água na caixa corresponde a $\frac{1}{3}$ da altura do cone, o volume da água existente, em litros, é:



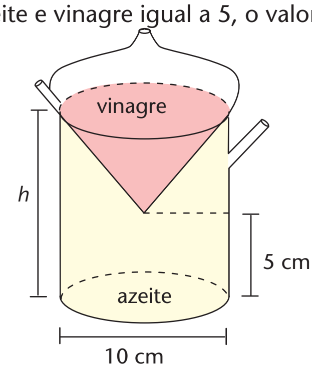
(A) 10 000
(B) 20 000
(C) 30 000
(D) 40 000
(E) 50 000

3 (Ufop-MG) Dois amigos, Antônio e José, foram tomar chope num lugar onde existem dois tipos diferentes de copos, conforme as figuras abaixo. Antônio escolheu o copo cônico, José escolheu o cilíndrico e cada um tomou 10 copos de chope.
Considerando $\pi = 3{,}14$, pode-se afirmar que:



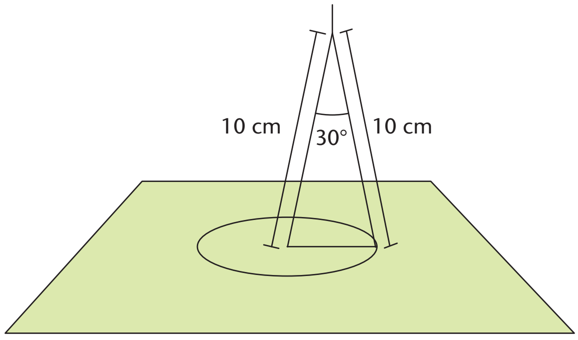
(A) Antônio tomou mais de 2 litros de chope.
(B) Antônio e José tomaram quantidades iguais de chope.
(C) Antônio tomou $\frac{1}{2}$ litro de chope a mais que José.
(D) Antônio e José, juntos, tomaram mais de 2 litros de chope.

4 (UFSC) A figura representa um galheteiro para a colocação de azeite e vinagre em compartimentos diferentes, sendo um cone no interior de um cilindro. Considerando h como a altura máxima de líquido que o galheteiro comporta e a razão entre a capacidade total de azeite e vinagre igual a 5, o valor de h é:



(A) 7 cm
(B) 8 cm
(C) 10 cm
(D) 12 cm
(E) 15 cm

5 (UFF-RJ) Determine a área de um círculo traçado com um compasso de abertura 30°, sabendo-se que suas hastes medem, cada uma, 10 cm.



6 (ESPM-SP) Em Ribeirão Preto, um copo de chope com formato cônico custa R$ 1,50. Em São Paulo, um copo de chope com formato cilíndrico custa R$ 3,60. Considerando que os dois chopes são da mesma marca e

que os dois copos têm a mesma altura e bocas com mesmo diâmetro, pode-se concluir que o preço do chope de São Paulo, em relação ao chope de Ribeirão Preto, está:

(A) 60% mais caro.

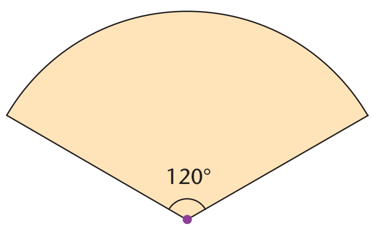
(B) 40% mais caro.

(C) 14% mais caro.

(D) 20% mais barato.

(E) 25% mais barato.

7 (Mack-SP) O setor circular abaixo é a superfície lateral de um cone cuja base tem diâmetro 4 e área igual a k % da área total do cone. Então k vale:



(A) 20

(B) 25

(C) 30

(D) 35

(E) 40

8 (ITA-SP) O ângulo da geratriz com o eixo de um cone de revolução mede 30°. Se S é a área de sua secção reta a uma distância h do vértice, qual a relação entre S e h?

(A) $S = \dfrac{\pi h^2}{2}$

(B) $S = \dfrac{3\pi}{2}h^2$

(C) $S = \dfrac{\pi h^2}{3}$

(D) $S = \dfrac{2\pi}{3}h^2$

(E) Nenhuma das anteriores.

9 (Mack-SP)

I) Se a razão entre as áreas totais de dois cubos é $\dfrac{4}{9}$, então a razão entre seus volumes é $\dfrac{8}{27}$.

II) Se todas as arestas de uma pirâmide triangular regular medem $\sqrt{6}$, então a altura da pirâmide mede 2.

III) Se a geratriz de um cone é o dobro do raio da base, então a área lateral do cone é igual a quatro vezes a área da base.

Das afirmações acima, apenas:

(A) I é verdadeira.

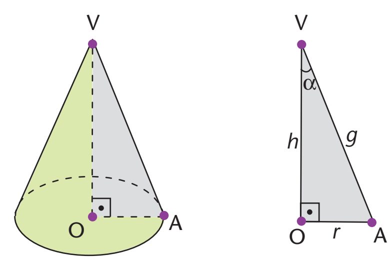
(B) I e II são verdadeiras.

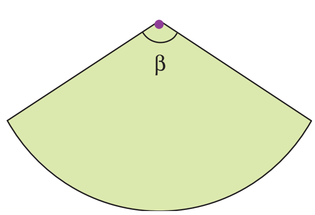
(C) II é verdadeira.

(D) II e III são verdadeiras.

(E) III é verdadeira.

10 As figuras abaixo representam um cone de revolução, seus elementos e a planificação de sua superfície lateral. Expresse β em função de α.





11 (Mack-SP) A planificação da superfície lateral de um cone é um semicírculo de raio $10\sqrt{3}$. O volume do cone é:

(A) 357π

(B) 573π

(C) 375π

(D) 537π

(E) 735π

12 (Mack-SP) Calculou-se o volume de um cone reto de geratriz 1 e área lateral k. O maior valor inteiro que k pode assumir é:

(A) 2

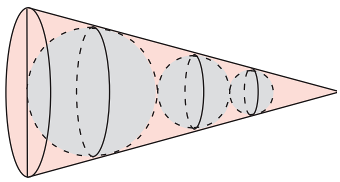
(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

13 (UFF-RJ) A figura abaixo representa um cone equilátero, onde foram colocadas 3 esferas de tal modo que cada uma delas é tangente à superfície lateral do cone, sendo a esfera do meio tangente às outras duas, e a maior tangente à base do cone.



Se o menor dos raios das esferas mede 1 m, determine o raio da base do cone.

14 (UFCE) Um cone circular reto e uma pirâmide de base quadrada têm a mesma altura e o mesmo volume. Se r é a medida do raio da base do cone, e b é a medida do lado da base da pirâmide, então o quociente $\frac{b}{r}$ é igual a:

(A) $\frac{1}{3}$

(B) 1

(C) $\sqrt{\pi}$

(D) π

(E) 2π

15 (FCMSC-SP) Um cone reto circular tem mesmo raio da base e mesma altura que um cilindro reto circular. O raio da base e a altura são iguais a 1 m. Em relação às áreas laterais do cone e do cilindro é correto afirmar:

(A) São iguais.

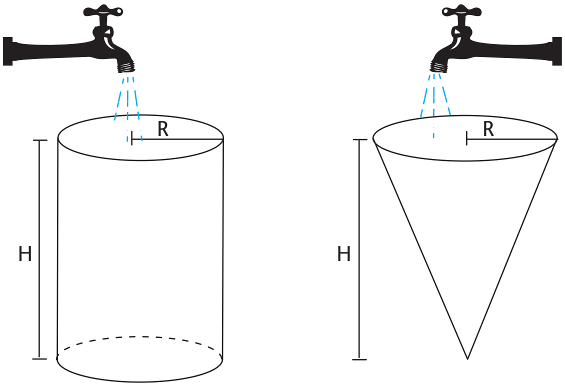
(B) Área lateral do cone = $\frac{1}{3}$ da área lateral do cilindro.

(C) Área lateral do cone + área lateral do cilindro = $= \sqrt{2} \times$ (área lateral do cilindro).

(D) Área lateral do cilindro = $\sqrt{2} \times$ (área lateral do cone).

(E) Área lateral do cone = $\frac{1}{2}$ da área lateral do cilindro.

16 (Cesgranrio-RJ) No desenho abaixo, dois reservatórios de altura H e raio R, um cilíndrico e outro cônico, estão totalmente vazios e cada um será alimentado por uma torneira, ambas de mesma vazão. Se o reservatório cilíndrico leva 2 horas e meia para ficar completamente cheio, o tempo necessário para que isto ocorra com o reservatório cônico será de:



(A) 2 h

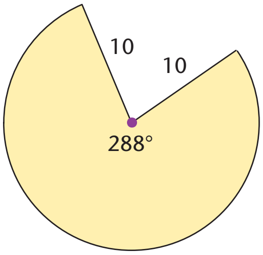
(B) 1 h e 30 min

(C) 1 h

(D) 50 min

(E) 30 min

17 Planificando-se a superfície lateral de um cone reto, obtém-se um setor circular de 288° e raio de 10 cm, conforme a figura. O volume desse cone é:



(A) 256π cm³

(B) 128π cm³

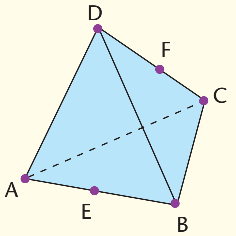
(C) 64π cm³

(D) 130π cm³

(E) 32π cm³

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (Fuvest-SP) Na figura abaixo, ABCD é um tetraedro regular de lado a. Sejam E e F os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Então, o valor de $\overline{EF}$ é:



(A) $\frac{a}{2}$

(B) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

(C) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

(D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

(E) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

2 (PUC-RJ) A distância de um ponto do espaço ao plano de um triângulo equilátero ABC de lado 6 m e equidistante 4 m de cada vértice mede:

(A) 1 m

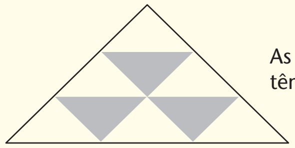
(B) 2 m

(C) 3 m

(D) 4 m

(E) 5 m

3 (FEI-SP) Em cada face de um tetraedro regular desenhou-se um trevo de 3 folhas estilizado, conforme indicado a seguir. Se a medida da aresta do tetraedro é t, a soma das áreas de todas as folhas de todos os trevos desenhados é:



As três folhas do trevo têm dimensões iguais.

(A) $\frac{t^2\sqrt{3}}{2}$

(B) $\frac{t^2\sqrt{3}}{3}$

(C) $\frac{t^2\sqrt{3}}{6}$

(D) $\frac{t^2\sqrt{3}}{9}$

(E) $\frac{t^2\sqrt{3}}{12}$

4 (Mack-SP) A soma dos ângulos de todas as faces de uma pirâmide é 18π rad. Então o número de lados do polígono da base da pirâmide é:

(A) 8

(B) 9

(C) 10

(D) 11

(E) 12

5 (ITA-SP) O volume de um tetraedro regular de aresta igual a ℓ é:

(A) $\ell\sqrt{2}$

(B) $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{2}$

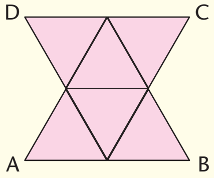
(C) $\frac{\ell^2\sqrt{2}}{3}$

(D) $\frac{\ell^3\sqrt{3}}{2}$

(E) n.d.a.

6 (Unicamp-SP) Uma pirâmide regular, de base quadrada, tem altura igual a 20 cm. Sobre a base dessa pirâmide constrói-se um cubo de modo que a face oposta à base do cubo corte a pirâmide em um quadrado de lado igual a 5 cm. Faça uma figura representativa dessa situação e calcule o volume do cubo.

7 (UFRGS-RS) O desenho abaixo representa a planificação de um sólido que pode ser obtido ligando-se os pontos A, B, C e D. Os triângulos menores do desenho são equiláteros de lado $\sqrt{2}$ cm. O volume do sólido é de:



(A) $\frac{1}{3}$ cm³

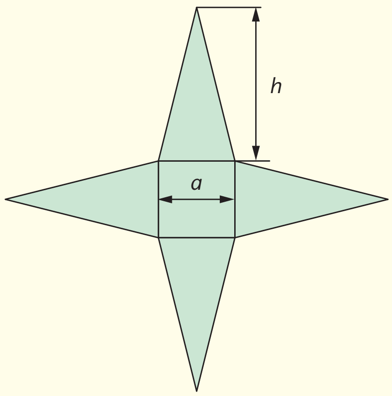
(B) $\frac{2}{3}$ cm³

(C) 1 cm³

(D) $\frac{4}{3}$ cm³

(E) $\frac{5}{3}$ cm³

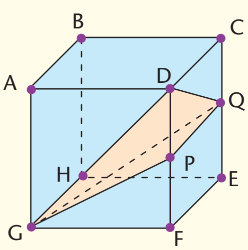
8 (UFRGS-RS) Considere uma pirâmide regular de base quadrada, construída a partir do padrão plano abaixo. Se a altura da pirâmide é o dobro do lado a da base, o valor de h no padrão é:



(A) $h = \dfrac{\sqrt{17}a}{2}$ (C) $h = \dfrac{\sqrt{22}a}{2}$ (E) $h = \dfrac{5a}{2}$

(B) $h = \sqrt{5}a$ (D) $h = \sqrt{6}a$

9 No cubo abaixo esquematizado, de volume 8, P é o ponto médio da aresta $\overline{DF}$ e Q é o ponto médio da aresta $\overline{CE}$. O volume do tetraedro DGPQ é:



(A) $\dfrac{1}{6}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (E) $\dfrac{3}{2}$

(B) $\dfrac{1}{3}$ (D) 1

10 (ITA-SP) Uma pirâmide regular tem por base um quadrado de lado 2 cm. Sabe-se que as faces formam com a base ângulos de 45°. Então, a razão entre a área da base e a área lateral é igual a:

(A) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{6}$ (E) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(B) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

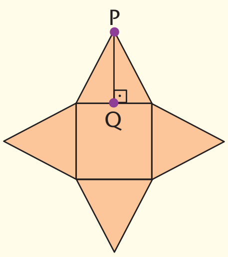
11 Em um tetraedro, duas arestas opostas são ortogonais e têm a mesma medida a. Essas arestas são também perpendiculares ao segmento de medida b que une seus pontos médios. O volume do tetraedro é:

(A) $\dfrac{ab^2}{6}$ (D) $\dfrac{a^2b}{4}$

(B) $\dfrac{ab^2}{2}$ (E) $\dfrac{a^2b}{6}$

(C) $\dfrac{2a^2b}{3}$

12 (UFF-RJ) A figura abaixo representa a planificação de uma pirâmide quadrangular regular.



Sabendo-se que $\overline{PQ}$ mede $3\sqrt{3}$ cm e que as faces laterais são triângulos equiláteros, o volume da pirâmide é:

(A) $18\sqrt{2}\ cm^3$ (D) $60\sqrt{2}\ cm^3$

(B) $36\sqrt{2}\ cm^3$ (E) $72\sqrt{2}\ cm^3$

(C) $48\sqrt{2}\ cm^3$

13 (Cescem-SP) Três segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ são perpendiculares dois a dois e têm o mesmo ponto médio M. Então o octaedro ABCDEF:

(A) tem todas as faces iguais.

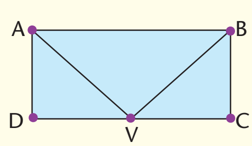
(B) tem todas as faces equiláteras.

(C) tem todas as faces retângulas.

(D) é regular.

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

14



A figura mostra a vista de cima de uma pirâmide VABCD de base retangular ABCD. A projeção ortogonal do vértice V sobre o plano da base divide a aresta CD ao meio.

Se AB = 10, BC = 5 e a altura da pirâmide é 5, então o comprimento da aresta VB é:

(A) $\frac{20}{3}$

(B) $\frac{15}{2}$

(C) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$

(D) $5\sqrt{2}$

(E) $5\sqrt{3}$

15 (Fuvest-SP) Um telhado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide regular de base quadrada. O lado da base mede 8 m e a altura da pirâmide 3 m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem 1 m². Supondo que possa haver 10 lotes de telhas desperdiçadas (quebras e emendas), o número mínimo de lotes de telhas a ser comprado é:

(A) 90

(B) 100

(C) 110

(D) 120

(E) 130

16 (ITA-SP) Considere uma pirâmide regular de altura igual a 5 cm e cuja base é formada por um quadrado de área igual a 8 cm². A distância de cada face desta pirâmide ao centro de sua base, em cm, é igual a:

(A) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

(B) $\frac{5\sqrt{6}}{9}$

(C) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$

(D) $\frac{7}{5}$

(E) $\sqrt{3}$

17 Em um tetraedro OABC, os ângulos entre as arestas que concorrem em O são todos iguais a 90°. Se OA = 3, OB = 5 e OC = 12, o comprimento da maior aresta do tetraedro é:

(A) 20

(B) 13

(C) 15

(D) 12

(E) $\frac{25}{2}$

18 (Mack-SP) Uma pirâmide cuja base é um quadrado de lado $2a$ tem o mesmo volume que um prisma cuja base é um quadrado de lado a. A razão entre as alturas da pirâmide e do prisma, nessa ordem, é:

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{a}{3}$

(E) $3a$

19 Em uma pirâmide triangular regular VABC, o triedro de vértice V é trirretângulo, e as arestas VA, VB e VC têm comprimentos iguais. O cosseno do ângulo diedro formado pelas faces ABC e VAB vale, aproximadamente:

(A) 0,33

(B) 0,50

(C) 0,58

(D) 0,71

(E) 0,84

20 (Uerj) Um triângulo equilátero ABC (fig. 1) de papelão foi dobrado na sua altura AH. Apoia-se o papelão dobrado com os lados AB e AC sobre a mesa, de modo que o ângulo $B\hat{H}C$ tenha 60° (fig. 2).

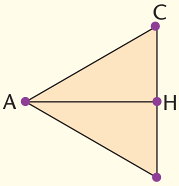


fig. 1

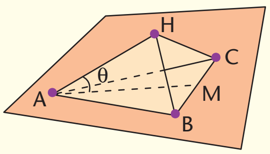


fig. 2

A tangente do ângulo θ que $\overline{AH}$ faz com o plano da mesa é igual a:

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{3}$

21 (ITA-SP) Consideremos um tetraedro regular de aresta a. Podemos calcular o volume V deste sólido, em função da aresta a. Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

(A) $12\sqrt{2}V = 2a^3$

(B) $2\sqrt{2}V = 2a^3\sqrt{3}$

(C) $12V - \sqrt{2} = a^3\sqrt{2}$

(D) $5V - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}a^3$

(E) As afirmações A, B, C e D são falsas.

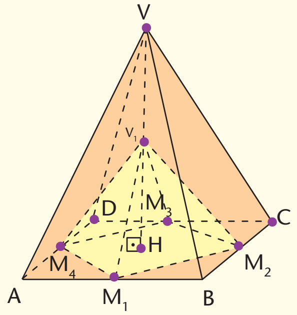
22 (Mack-SP) ABCD é um quadrado de lado *a*. Seja E o ponto médio do lado $\overline{AB}$ e M um ponto do espaço tal que $\overline{EM}$ seja perpendicular ao plano do quadrado. Sabendo que a reta $\overleftrightarrow{MC}$ faz com o plano do quadrado um ângulo de 60°, a medida de $\overline{EM}$ é:

(A) $\frac{\sqrt{15}}{2}a$ (D) $4\sqrt{5}a$

(B) $\frac{5\sqrt{3}}{2}a$ (E) $3\sqrt{5}a$

(C) $4\sqrt{3}a$

23 Na figura, a pirâmide regular de base ABCD e altura $\overline{VH}$ possui todas as arestas medindo 4 m. Sabendo-se que V_1 é ponto médio de $\overline{VH}$ e que M_1, M_2, M_3 e M_4 são pontos médios dos lados da base ABCD, pede-se:

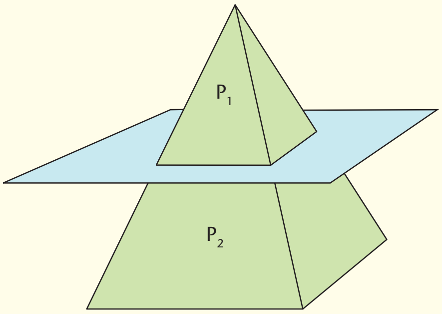


(A) o valor do lado $\overline{M_1M_2}$;

(B) a área do polígono $M_1M_2M_3M_4$;

(C) o volume da pirâmide $V_1M_1M_2M_3M_4$.

24 Pelo médio da altura de uma pirâmide, passa-se um plano paralelo à sua base, que secciona essa pirâmide em duas partes P_1 e P_2. O percentual do volume da parte inferior (P_2) em relação ao volume total da pirâmide é:

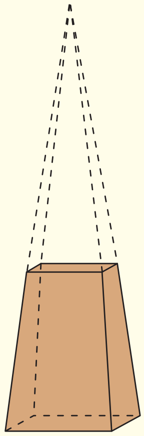


(A) 50% (D) 87,5%

(B) 63,5% (E) 90%

(C) 75%

25 Calcule o volume do tronco de pirâmide quadrangular regular de primeira espécie, sabendo que os lados das bases medem 3 cm e 4 cm e a altura mede 6 cm.



(A) 37 cm^3

(B) 26 cm^3

(C) 74 cm^3

(D) 148 cm^3

(E) 222 cm^3

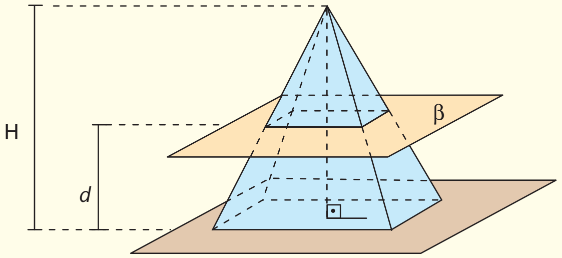
26 (ITA-SP) Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10 m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja $\frac{1}{8}$ do volume da pirâmide original?

(A) 2 m (D) 6 m

(B) 4 m (E) 8 m

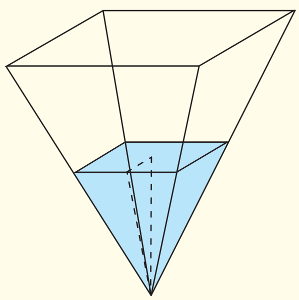
(C) 5 m

27 (UFF-RJ) A figura abaixo representa uma pirâmide regular de base quadrangular que foi seccionada por um plano β paralelo à base.



Sabendo-se que a altura da pirâmide é H e que *d* é a distância entre β e a base, determine o valor de *d* para que a pirâmide fique dividida em dois sólidos de volumes iguais.

28 (UFSM-RS) Um técnico agrícola utiliza um pluviômetro na forma de pirâmide quadrangular para verificar o índice pluviométrico de uma certa região. A água, depois de recolhida, é colocada num cubo de 10 cm de aresta. Se, na pirâmide, a água atinge uma altura de 8 cm e forma uma pequena pirâmide de 10 cm de apótema lateral, então a altura atingida pela água no cubo é de:



(A) 2,24 cm

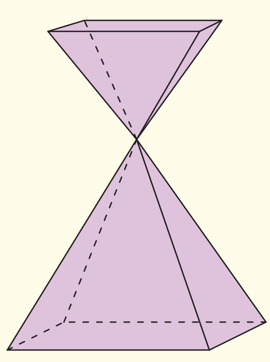
(B) 2,84 cm

(C) 3,84 cm

(D) 4,24 cm

(E) 6,72 cm

29 Calcule o volume do tronco de pirâmide quadrangular regular de segunda espécie, sabendo que os lados das bases medem 3 cm e 4 cm e a altura mede 6 cm.



(A) 37 cm^3

(B) 26 cm^3

(C) 74 cm^3

(D) 148 cm^3

(E) 222 cm^3

30 Uma pirâmide tem 30 m de altura e cada uma de suas secções planas paralelas à base é um quadrado.
Calcule a que distância do topo da pirâmide está a secção que determina um tronco de pirâmide de volume igual a $\frac{7}{8}$ do volume total da pirâmide.

31 (Unificado-RJ) Um projetor de *slides*, colocado a 4 metros de distância de uma tela de cinema, projeta sobre ela um quadrado. Para que o lado desse quadrado aumente 20%, a que distância da tela, em metros, deve ser colocado o projetor?

(A) 4,20

(B) 4,50

(C) 4,80

(D) 5,60

(E) 6,00

32 Secciona-se uma pirâmide por dois planos paralelos à base que dividem sua altura em três partes iguais. Determine os números proporcionais aos volumes dos três sólidos em que fica dividida a pirâmide.

33 (PUC-RJ) Uma pirâmide tem 10 dm^2 de base e 2 m de altura. A distância da base que se deve traçar um plano paralelo para que a secção seja $\frac{1}{5}$ da base é, aproximadamente:

(A) 1,041 m

(B) 1,106 m

(C) 1,021 m

(D) 1,341 m

(E) 1,204 m

34 (Mack-SP) Na figura a seguir, *b* é a medida da aresta de um cubo e aresta da base de uma pirâmide de altura *h*; *m* é a medida do lado do quadrado ABCD.
Então existe *b*:

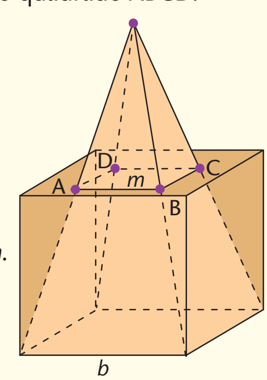
(A) se $h = 2$ m.

(B) se $h = 3$ m.

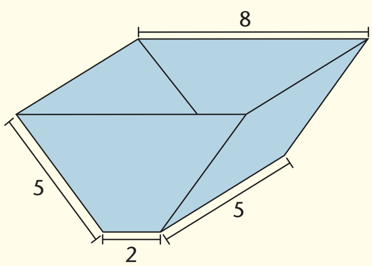
(C) se $h = 4$ m.

(D) quaisquer que sejam *h* e *m*.

(E) Não sei.



35 (PUC-SP) Um tanque de uso industrial tem a forma de um prisma cuja base é um trapézio isósceles. Na figura abaixo, são dadas as dimensões, em metros, do prisma. O volume desse tanque, em metros cúbicos, é:



(A) 50
(B) 60
(C) 80
(D) 100
(E) 120

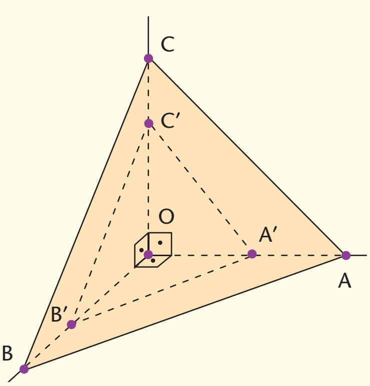
36 (Mack-SP) A base de uma pirâmide mede 180 m². A secção plana paralela à base, distante 3 m do vértice, mede 45 m² de área. A altura da pirâmide mede:

(A) 4 m
(B) 5 m
(C) 6 m
(D) 8 m
(E) 12 m

37 (FEI-SP) Na figura temos:

OA = OB = OC = 2 cm

OA′ = OB′ = OC′ = 1 cm



O volume da parte da figura entre os planos A′B′C′ e ABC é:

(A) metade do volume de OABC.

(B) $\frac{2}{3}$

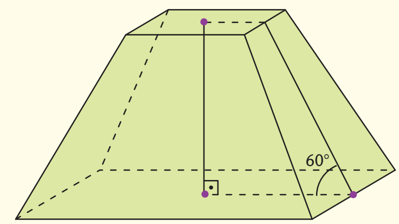
(C) $\frac{1}{8}$

(D) $\frac{7}{8}$

(E) $\frac{7}{6}$

38 (UEL-PR) Considere o tronco de uma pirâmide regular de bases quadradas representado na figura abaixo.

Se as diagonais das bases medem $10\sqrt{2}$ cm e $4\sqrt{2}$ cm, a área total desse tronco, em centímetros quadrados, é:



(A) 168
(B) 186
(C) 258
(D) 266
(E) 284

39 (USP) Sejam T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 pirâmides de bases quadradas com a seguinte propriedade: o lado da base e a altura de T_i são iguais ao dobro das medidas correspondentes de T_{i+1}, $i = 1, 2, 3, 4$. A soma dos volumes das cinco pirâmides é:

(A) $\frac{(2^{15}-1)}{7}$ vezes o volume de T_5.

(B) $\frac{(2^{15}-1)}{7}$ vezes o volume de T_1.

(C) $\frac{(2^{15}-1)}{15}$ vezes o volume de T_5.

(D) $\frac{(2^{15}+1)}{7}$ vezes o volume de T_5.

(E) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

40 (PUC-RJ) Um tronco de pirâmide de bases quadradas mede 21 dm³ de volume; a altura do tronco mede 30 cm e o lado do quadrado de base maior 40 cm. Então, o lado do quadrado de base menor mede:

(A) 8 cm
(B) 6 cm
(C) 10 cm
(D) 12 cm
(E) 14 cm

41 (ITA-SP) Considere uma pirâmide regular com altura de $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$ cm. Aplique a esta pirâmide dois cortes planos e paralelos à base de tal maneira que a nova pirâmide e os dois troncos obtidos tenham, os três, o mesmo volume. A altura do tronco cuja base é a base da pirâmide original é igual a:

(A) $2\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}\right)$ cm

(B) $2\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}\right)$ cm

(C) $2\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}\right)$ cm

(D) $2\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)$ cm

(E) $2\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}\right)$ cm

42 (Cefet-PR) Uma pirâmide hexagonal regular, com a aresta da base 9 cm e aresta lateral 15 cm, foi seccionada por dois planos paralelos à sua base que dividiram sua altura em três partes iguais. A parte da pirâmide compreendida entre esses planos, tem volume, em cm³, igual a:

(A) $106\sqrt{3}$ (D) $120\sqrt{3}$

(B) $110\sqrt{3}$ (E) $126\sqrt{3}$

(C) $116\sqrt{3}$

43 (ITA-SP) Construindo-se um prisma e uma pirâmide sobre uma mesma base de área A e de volumes V_1 e V_2, a área da secção da pirâmide com a outra base do prisma é:

(A) $A\dfrac{V_1}{V_1+V_2}$

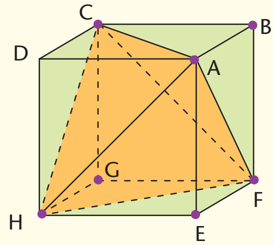
(B) $\dfrac{V_2-V_1}{AV_2}$

(C) $A\left(1-\dfrac{V_1}{3V_2}\right)$

(D) $A\dfrac{3V_2-V_1}{2}$

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

44 (UFSCar-SP) Na figura, os pontos ACFH são os vértices de um tetraedro inscrito em um cubo de lado 3. O volume do tetraedro é:

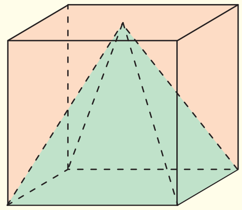


(A) $\dfrac{27}{8}$ (D) $\dfrac{27\sqrt{13}}{8}$

(B) $\dfrac{9\sqrt{39}}{8}$ (E) 18

(C) 9

45 (Unirio-RJ) Uma pirâmide está inscrita num cubo, como mostra a figura abaixo. Sabendo-se que o volume da pirâmide é de 6 m³, então o volume do cubo, em m³, é igual a:



(A) 9 (D) 18

(B) 12 (E) 21

(C) 15

46 (Puccamp-SP) Uma pirâmide reta, cuja base é um quadrado de lado ℓ e cuja altura é h, está inscrita num cilindro reto com raio da base r e altura H. Nessas condições, é verdade que:

(A) $\ell = r$ (D) $2H = h$

(B) $\ell = \sqrt{2}r$ (E) $H = 2h$

(C) $\ell = 2r$

47 (Mack-SP) Os centros de simetria das faces de um cubo de aresta a são os vértices de um poliedro cujo volume é dado por:

(A) $a^3\sqrt{7}$

(B) $a^3\sqrt{5}$

(C) $\dfrac{a^3}{12}$

(D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$

(E) Nenhuma das alternativas anteriores.

48 (EESC-USP) Dividindo-se uma pirâmide de altura a com um plano paralelo ao da base, à distância x do vértice, obtêm-se duas partes de áreas laterais iguais. O valor de x é:

(A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

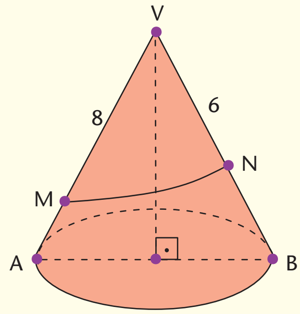
(B) $\frac{a}{2}$

(C) $\frac{3a}{2}$

(D) $\frac{(2+\sqrt{2})a}{2}$

(E) Nenhum desses valores.

49 Sejam M e N pontos situados nas geratrizes VMA e VNB de um cone equilátero, cuja secção meridiana é o triângulo VBA, como se vê na figura abaixo.



Lembrando que a superfície lateral do cone é planificável e supondo que VM = 8 e VN = 6, então o menor caminho de M até N mede:

(A) 10

(B) 14

(C) $\frac{21}{2}$

(D) $\frac{19}{2}$

(E) $7\sqrt{2}$

50 (USP) A superfície total do cone equilátero de geratriz g é igual a:

(A) $\frac{3}{4}\pi g^2$

(B) $2\pi g^2$

(C) $\frac{2}{3}\pi g^2$

(D) $\frac{4}{3}\pi g^2$

(E) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

51 Com um cartão em forma de setor circular com 15 cm de raio e 216° de ângulo central, constrói-se um cone cujo volume é:

(A) 15 cm³

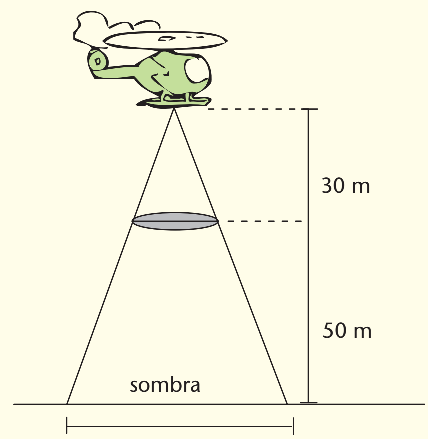
(B) 324π cm³

(C) 216π cm³

(D) 65π cm³

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

52 (Unirio-Ence-RJ) Numa cidade do interior, à noite, surgiu um objeto voador não identificado, em forma de disco, que estacionou a 50 m do solo, aproximadamente. Um helicóptero do exército, situado a aproximadamente 30 m acima do objeto, iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura a seguir.



Sendo assim, pode-se afirmar que o raio do disco-voador mede, em m, aproximadamente:

(A) 3,0

(B) 3,5

(C) 4,0

(D) 4,5

(E) 5,0

53 A geratriz de um cone circular reto forma com o eixo desse cone um ângulo de 45°. Sabendo-se que o perímetro de sua secção meridiana mede 2 cm, podemos afirmar que a área total desse cone vale:

(A) $\frac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-2)$ cm²

(B) $\pi(\sqrt{2}-1)$ cm²

(C) $\pi(\sqrt{3}-1)$ cm²

(D) $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-2)$ cm²

(E) $\pi(\sqrt{5}-1)$ cm²

54 (UFPR) O formato interno de um reservatório de água é o de um cone circular reto com o vértice embaixo e o eixo na vertical. Se a altura e o raio da base do cone medem, respectivamente, 6 m e 8 m, calcule a soma dos números associados às alternativas corretas.

(01) Quando o reservatório contém água até a altura de x metros, o volume da água é $\frac{16\pi x^3}{27}$ metros cúbicos.

(02) Quando o nível da água está a 3 m do vértice do cone, a superfície da água forma um círculo de raio igual a 3 m.

(04) A geratriz do cone mede 10 m.

(08) A capacidade desse reservatório é menor que a de outro cujo formato interno é o de um cubo de 6 m de aresta.

55 O desenvolvimento da superfície lateral de um cone reto é um setor circular de raio a e ângulo central igual a 60°. O volume desse cone é:

(A) $\frac{a^3}{6}\pi$

(B) $\pi\sqrt{35} \cdot a^3$

(C) $\frac{1}{3}\pi a^3$

(D) $\pi\left(\frac{a}{6}\right)^3$

(E) $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{6}\right)^3\sqrt{35}$

56 (Mack-SP) Na fórmula $V = \frac{\pi}{3}r^2h$, se r for reduzido à metade e h ao dobro, então V:

(A) se reduz à metade.

(B) permanece o mesmo.

(C) se reduz à quarta parte.

(D) dobra de valor.

(E) quadruplica de valor.

57 (EESC-USP) Um cone C tem volume V. Qual o volume de um cone C' de base igual à de C e cujo vértice está sobre a circunferência de centro no vértice de C, situada num plano paralelo ao da base de C e de raio igual ao dobro do raio da base de C?

(A) 2V

(B) 4V

(C) 6V

(D) 3V

(E) V

58 (USP) Desenvolvendo a superfície lateral de um cone reto de raio 4 e altura 3, obtém-se um setor circular cujo ângulo central mede:

(A) 216°

(B) 240°

(C) 270°

(D) 288°

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

59 (UEL-PR) Um cone circular reto tem altura de 8 cm e raio da base medindo 6 cm. Qual é, em centímetros quadrados, sua área lateral?

(A) 20π

(B) 30π

(C) 40π

(D) 50π

(E) 60π

60 (PUC-MG) Um cone reto de raio $r = 4$ cm tem volume equivalente ao de um prisma de altura $h = 12$ cm e de base quadrada de lado $\ell = \sqrt{\pi}$. A altura do cone, em cm, é:

(A) 1,25

(B) 2,00

(C) 2,25

(D) 3,00

(E) 3,25

61 (Cescea-SP) A geratriz de um cone circular reto mede 6 cm e forma com o plano da base um ângulo de 60°. Então, o volume do cone é:

(A) $54\sqrt{3}\pi$ cm³

(B) $27\sqrt{3}\pi$ cm³

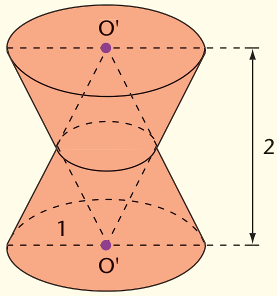
(C) $18\sqrt{3}\pi$ cm³

(D) $9\sqrt{3}\pi$ cm³

(E) $15\sqrt{3}\pi$ cm³

62 (Unificado-RJ) A partir de um triângulo retângulo são criados dois cones de revolução, separadamente, girando-se o triângulo ao redor de cada cateto. Sabendo-se que a hipotenusa mede $3\sqrt{5}$ cm e que o volume de um dos cones é o dobro do volume do outro, calcule o cateto maior.

63 A figura mostra dois cones de revolução iguais de altura 2 e raio da base 1. O vértice de cada um deles é o centro da base do outro. O volume da parte comum aos dois cones é:



(A) $\frac{\pi}{12}$

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{3}$

(E) $\frac{\pi}{2}$

64 (ESPM-SP) Uma taça perfeitamente cônica foi colocada sob uma torneira que estava pingando. Em 20 minutos o nível da água atingiu a metade da altura da taça. A continuar nesse ritmo, a taça estará completamente cheia em mais:

(A) 20 minutos.

(B) 40 minutos.

(C) 1 hora e 20 minutos.

(D) 2 horas e 20 minutos.

(E) 3 horas.

65 (EESC-USP) Dois cones de mesma base têm alturas iguais a 18 cm e 6 cm respectivamente. A razão de seus volumes é:

(A) 3

(B) 2

(C) 6

(D) 9

(E) 4

66 A que distância da base de um cone de altura H se deve passar um plano paralelo à sua base, a fim de que a secção determinada seja $\frac{1}{9}$ da base do cone?

(A) $\frac{1}{2}$H

(B) $\frac{2}{3}$H

(C) $\frac{3}{4}$H

(D) $\frac{4}{5}$H

(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$H

67 (Cescem-SP) Consideremos um cone reto de altura H. Queremos cortá-lo por um plano paralelo à base à distância *h* do vértice e tal que o cone obtido e o tronco de cone tenham mesmo volume. Então $\frac{h}{H}$ vale:

(A) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(D) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

(E) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

68 (Unilins-SP) Um cone tem *h* cm de altura e sua base, 54 cm² de área. À distância $\frac{h}{3}$ cm do vértice do cone traça-se um plano paralelo à sua base. A área da secção que o plano determina no cone é:

(A) 9 cm²

(B) 6 cm²

(C) 18 cm²

(D) 3π cm²

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

69 Um cone circular reto tem 24 cm de altura e raio da base medindo 9 cm. Esse cone é cortado por dois planos paralelos à sua base e que dividem sua altura em três partes iguais. Em cm³, o volume do tronco de cone compreendido entre esses dois planos é:

(A) 24π

(B) 168π

(C) 192π

(D) 504π

(E) 648π

70 (PUC-RJ) Um triângulo equilátero ABC, de lado igual a 2 cm, efetua uma revolução em torno da reta que contém o vértice A e é paralela ao lado BC. O volume assim gerado é de:

(A) 4π cm³

(B) 6π cm³

(C) $3\pi\sqrt{3}$ cm³

(D) $4\pi\sqrt{3}$ cm³

(E) $\frac{10\pi\sqrt{3}}{3}$ cm³

71 Um triângulo retângulo ABC, no qual $\hat{A} = 90°$, AC = 3 e AB = 4, efetua uma revolução completa em torno de um eixo que passa por B e é paralelo a $\overline{AC}$. Calcule o volume do sólido assim gerado.

(A) $\frac{32\pi}{3}$

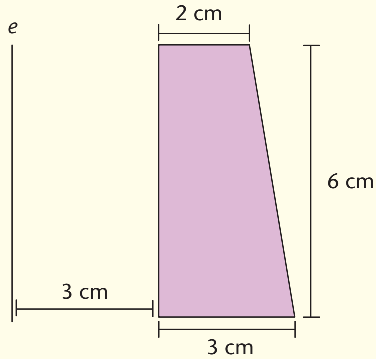
(B) 16π

(C) 32π

(D) $\frac{128\pi}{3}$

(E) 64π

72 (Unirio-RJ) O volume do sólido gerado pela rotação completa da figura a seguir, em torno do eixo *e* é, em cm³:



(A) 38π

(B) 54π

(C) 92π

(D) 112π

(E) 128π

73 O volume gerado pela revolução de um hexágono regular de lado *a* em torno de um de seus lados é igual a:

(A) $\frac{9\pi}{2}a^3$

(B) $\frac{7\pi}{2}a^3$

(C) $\frac{5\pi}{2}a^3$

(D) $\frac{3\pi}{2}a^3$

(E) $3\pi a^3$

74 (EESC-USP) As áreas totais S_a e S_b dos cilindros gerados pela rotação de um retângulo de lados *a* e *b*, em torno de cada um dos seus lados *a* e *b* respectivamente são:

(A) proporcionais aos lados *a* e *b*.

(B) iguais.

(C) proporcionais aos quadrados dos lados *a* e *b*.

(D) inversamente proporcionais aos lados *a* e *b*.

(E) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

75 (FEI-SP) Qual o volume do sólido gerado por um trapézio retângulo que gira em torno de sua base menor? A base maior do trapézio mede 8, a base menor 5 e a altura 2.

(A) 60π

(B) 28π

(C) 56π

(D) 64π

76 (Cice-RJ) Sejam V_a, V_b e V_c os volumes gerados por um triângulo retângulo em torno, respectivamente, da hipotenusa e dos catetos. Então:

(A) $\frac{2}{V_a} = \frac{1}{V_b} + \frac{1}{V_c}$

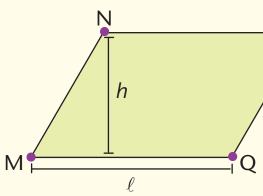
(B) $V_a = V_b + V_c$

(C) $\frac{V_b}{c} + \frac{V_c}{b} = \frac{2a}{bc}$

(D) $\frac{V_b}{c} + \frac{V_c}{b} = \frac{V_a}{h}$ em que *h* é a altura relativa à hipotenusa.

(E) Nenhuma das anteriores.

77 (UFF-RJ) A figura a seguir representa o paralelogramo MNPQ. O volume do sólido obtido pela rotação do paralelogramo em torno da reta suporte do lado MQ é dado por:



(A) $\frac{\pi h^2(\ell + h)}{2}$

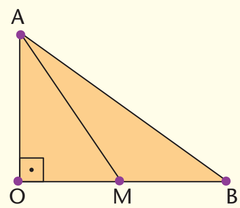
(B) $\frac{\pi h^2}{2}$

(C) $\pi h^2(\ell + h)$

(D) $\pi h(\ell + h)^2$

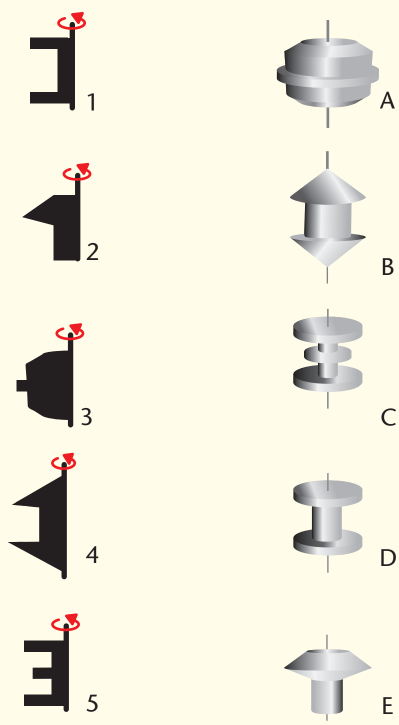
(E) $\pi h^2 \ell$

78 (Ufop-MG) Os triângulos retângulos AOB e AOM giram em torno do cateto AO, gerando sólidos no espaço, conforme a figura abaixo. Se o volume do sólido gerado por AOB é o dobro do volume do sólido gerado por AOM, então a razão entre OB e OM é:



(A) 2 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

79 (Enem) Assim como na relação entre o perfil de um corte de um torno e a peça torneada, sólidos de revolução resultam da rotação de figuras planas em torno de um eixo. Girando-se as figuras a seguir em torno da haste indicada, obtêm-se os sólidos de revolução que estão na coluna da direita.



A correspondência correta entre as figuras planas e os sólidos de revolução obtidos é:

(A) 1A, 2B, 3C, 4D, 5E

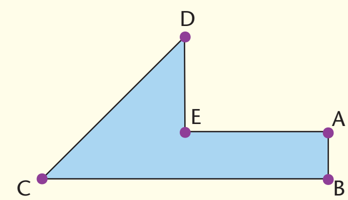
(B) 1B, 2C, 3D, 4E, 5A

(C) 1B, 2D, 3E, 4A, 5C

(D) 1D, 2E, 3A, 4B, 5C

(E) 1D, 2E, 3B, 4C, 5A

80 (Unioeste-PR) Na figura ABCDE abaixo tem-se: AB = 1 unidade, BC = 6 unidades, AE = 3 unidades e DE = 2 unidades. Sabendo-se, ainda, que o segmento AB é paralelo ao segmento DE e perpendicular aos segmentos BC e AE, calcule a soma dos números associados às alternativas corretas.



(01) O polígono ABCDE é um pentágono convexo.

(02) O ângulo C mede 60°.

(04) A área do polígono ABCDE é 7,5 unidades de área.

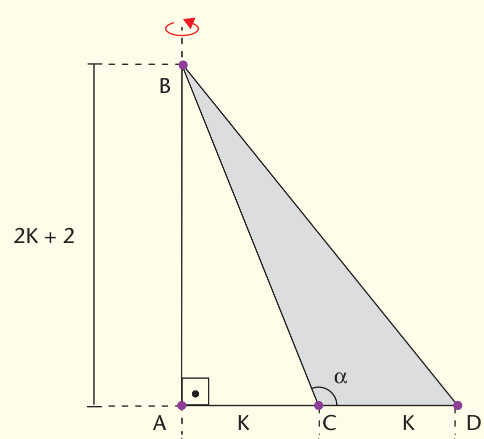
(08) A área da superfície total do sólido gerado pela rotação do polígono ABCDE em torno de $\overline{BC}$ é $(15+9\sqrt{2})\pi$ unidades de área.

(16) O perímetro da figura formada pelo polígono ABCDE e seu simétrico em relação ao eixo que passa por AB é $20+6\sqrt{2}$ unidades.

(32) O volume do sólido gerado pela rotação de ABCDE em torno de BC é 12π unidades de volume.

(64) O volume do sólido gerado pela rotação do polígono ABCDE em torno do segmento BC é igual ao volume do sólido gerado pela rotação do polígono ABCDE em torno do segmento AB.

81 (Mack-SP) Na figura, a rotação completa do triângulo CBD em torno de $\overline{AB}$ gera um sólido de volume:



(A) 72π

(B) 108π

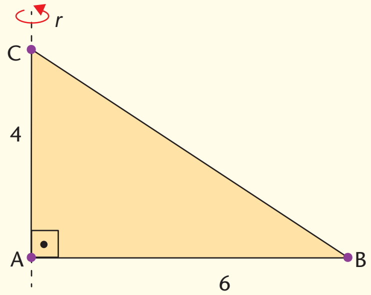
(C) 60π

(D) 144π

(E) 54π

Dado: $\text{tg}\ \alpha = -\frac{8}{3}$.

82 (Mack-SP) Na rotação do triângulo ABC da figura abaixo, em torno da reta *r*, o lado AB descreve um ângulo de 270°. Dessa forma, o sólido obtido tem volume de:



(A) 48π

(B) 144π

(C) 108π

(D) 72π

(E) 36π

83 (Cice-RJ) Um triângulo retângulo possui catetos de comprimentos *a* e *b*. Seja V_a o volume do cone obtido pela rotação do triângulo em torno do cateto de comprimento *a*; analogamente, seja V_b o volume do cone gerado pela rotação do triângulo em torno do outro cateto. O quociente $\frac{V_a}{V_b}$ vale:

(A) $\frac{ab}{a^2+b^2}$

(B) $\frac{a}{a+b}$

(C) $\frac{b}{a}$

(D) $\frac{a+1}{b+1}$

(E) $\frac{a^2+b^2}{\pi ab}$

84 (Cescem-SP) Dado um triângulo retângulo, cuja hipotenusa mede 10 e um dos catetos mede 6, o volume do sólido gerado, quando o triângulo gira em torno do outro cateto, é:

(A) 128π

(B) 120π

(C) 96π

(D) 94π

(E) 87π

85 (Mack-SP) Dada a função real definida por $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ de $[-2, 2]$ em $[0, 2]$. Considere a origem e os pontos (x, y) do gráfico da função tais que $|x| = 1$. A rotação do triângulo assim obtido, em torno do eixo das abscissas, gera um sólido de volume:

(A) $\frac{4\pi}{3}$

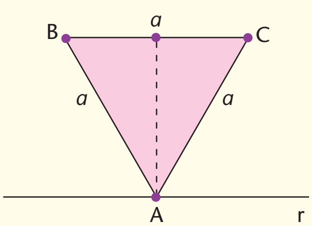
(B) 2π

(C) $\frac{2\pi}{3}$

(D) 4π

(E) 6π

86 (PUC-RJ) A medida dos lados de um triângulo equilátero ABC é *a*. O triângulo ABC gira em torno de uma reta *r* do plano do triângulo, paralela ao lado $\overline{BC}$ e passando pelo vértice A. O volume gerado por esse triângulo mede:



(A) $\frac{\pi a^3}{3}$

(B) $\frac{\pi a^3}{2}$

(C) πa^3

(D) $\frac{3\pi a^3}{2}$

(E) $\frac{\pi a^3}{5}$

87 (Mack-SP) Um triângulo retângulo isósceles de catetos unitários gira em torno da hipotenusa. O volume do sólido gerado é:

(A) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{6}$

(B) $\dfrac{\pi\sqrt{6}}{2}$

(C) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}$

(D) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{3}$

(E) Nenhuma das anteriores.

88 (UFPE) Um cone reto tem altura $12\sqrt[3]{2}$ cm e está cheio de sorvete. Dois amigos vão dividir o sorvete em duas partes de mesmo volume, usando um plano paralelo à base do cone. Qual deverá ser a altura do cone menor assim obtido?

(A) 12 cm

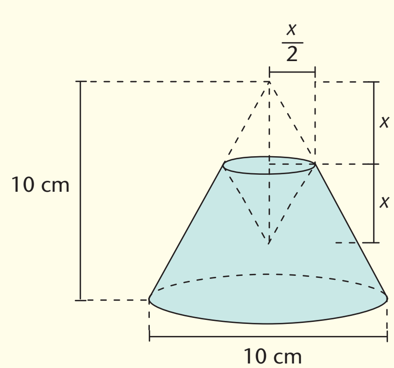
(B) $12\sqrt{2}$ cm

(C) $12\sqrt{3}$ cm

(D) $10\sqrt{2}$ cm

(E) $10\sqrt{3}$ cm

89 (Faap-SP) Um chapéu de papel em forma de cone tem 10 centímetros de diâmetro e 10 centímetros de profundidade. Seu vértice é empurrado para baixo e para dentro conforme a figura abaixo.
Que distância sua ponta penetra no espaço interno do chapéu se o novo volume do chapéu é $\dfrac{4}{5}$ do volume original?



(A) $x = \sqrt[3]{200}$

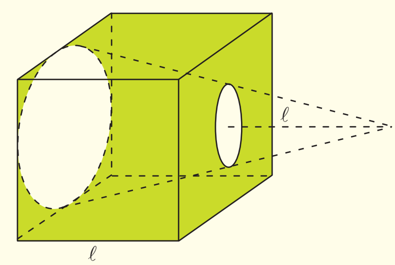
(B) $x = \sqrt[3]{80}$

(C) $x = \sqrt[3]{100}$

(D) $x = \sqrt[3]{300}$

(E) $x = \sqrt[3]{150}$

90 (PUC-PR) Necessita-se confeccionar uma peça metálica dotada de um furo tronco-cônico, a partir de um cubo de lado ℓ, conforme a figura. O volume de material para confeccionar a peça é:



(A) $\ell^3\left(1 - \dfrac{7\pi}{48}\right)$

(B) $\dfrac{7\pi\ell^3}{48}$

(C) $\dfrac{7\pi\ell^3}{16}$

(D) $\dfrac{\pi\ell^3}{16}$

(E) $\ell^3\left(1 - \dfrac{\pi}{48}\right)$

91 (USP) Seja C um cone circular de altura h. Um plano paralelo à base dividirá o cone em duas partes de volumes iguais se sua distância do plano da base for:

(A) $\dfrac{h}{\sqrt{3}}$

(B) $\dfrac{1}{2}h$

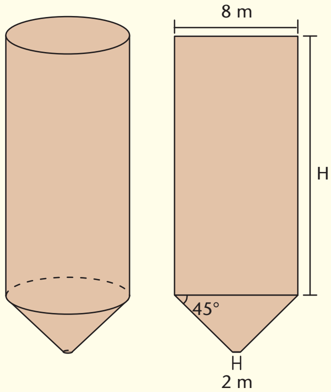
(C) $\dfrac{h}{\sqrt[3]{2}}$

(D) $\dfrac{(\sqrt[3]{2} - 1)h}{\sqrt[3]{2}}$

(E) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

92 (UEL-PR) O proprietário de uma fazenda quer construir um silo com capacidade para 770 m³, para armazenamento de grãos. O engenheiro encarregado do projeto mostrou-lhe o esquema do silo, composto de um cilindro acoplado a um tronco de cone, como mostra a figura a seguir.

Se, em seus cálculos, o engenheiro considerou $\pi = \frac{22}{7}$, então a altura H do silo, em metros, é:



(A) 15

(B) 16

(C) 17

(D) 18

(E) 19

93 (EESC-USP) Tem-se dois vasilhames, geometricamente semelhantes. O primeiro é uma garrafa de vinho, cuja altura é 27 cm. O segundo é uma miniatura do primeiro, usado como propaganda do produto, e cuja altura é 9 cm. Quantas vezes seria preciso esvaziar o conteúdo da miniatura na garrafa comum, para enchê-la completamente?

(A) 3 vezes

(B) 9 vezes

(C) 18 vezes

(D) 27 vezes

(E) 36 vezes

94 (Cice-RJ) Um reservatório cilíndrico C contém um líquido até o nível H. Este líquido cabe todo num reservatório tronco-cônico T, de altura igual a $\frac{3}{7}$ H e menor raio igual ao raio de C, se e só se a razão do raio maior para o raio menor de T:

(A) é ≥ 2

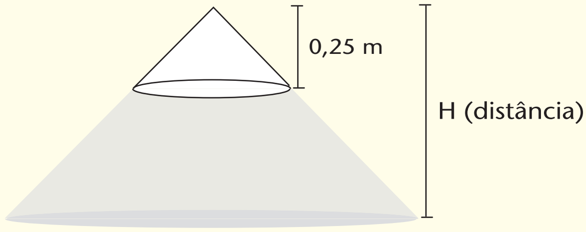
(B) é $\geq \frac{3}{7}$

(C) é $> \frac{7}{3}$

(D) é $\geq \frac{9}{49}$

(E) é outra.

95 (UFRRJ) Considerando um lustre de formato cônico com altura e raio da base igual a 0,25 m, a distância do chão (H) em que se deve pendurá-lo para obter um lugar iluminado em forma de círculo com área de 25π m² é de:



(A) 12 m

(B) 10 m

(C) 8 m

(D) 6 m

(E) 5 m

96 (Faap-SP) Um copo de chope é um cone (oco) cuja altura é o dobro do diâmetro. Se uma pessoa bebe desde que o copo está cheio até o nível da bebida ficar exatamente na metade da altura do copo, a fração do volume total que deixou de ser consumida é:

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{3}{8}$

(E) $\frac{1}{8}$

97 (UEL-PR) Um cone circular tem volume V. Interceptando-o na metade de sua altura por um plano paralelo à base, obtém-se um novo cone cujo volume é:

(A) $\frac{V}{2}$

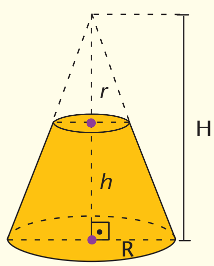
(B) $\frac{V}{3}$

(C) $\frac{V}{4}$

(D) $\frac{V}{8}$

(E) $\frac{V}{16}$

98 (EESC-USP) Qual das expressões abaixo dá o volume do tronco de cone circular de bases paralelas em função de H, R, h, r (figura abaixo).



(A) $\frac{1}{3}\pi[HR^2 + (H - h)r^2]$

(B) $\frac{1}{3}\pi[HR^2 - (H + h)r^2]$

(C) $\frac{1}{3}\pi[HR^2 - (H - h)r^2]$

(D) $\frac{1}{3}\pi[HR^2 + (H + h)r^2]$

(E) Nenhuma das respostas precedentes é exata.

99 (Cescem-SP) Um cone de revolução está inscrito em um cilindro de revolução de mesma base, de raio R, e mesma altura h. O volume do espaço compreendido entre o cilindro e o cone é:

(A) $\frac{2}{3}\pi R^2 h$

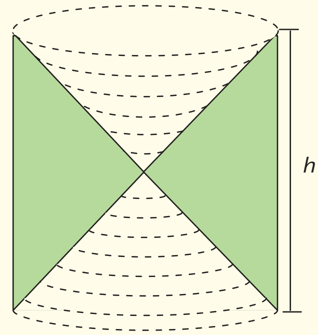
(B) $\frac{2}{3}\pi R h^2$

(C) $\frac{1}{3}\pi R^2 h$

(D) $\frac{1}{3}\pi R h^2$

(E) $\frac{1}{6}\pi R^2 h$

100 (Cescem-SP) De um cilindro de altura $h = 2r$ e raio da base r, exclui-se um tronco de cone de segunda espécie de bases coincidentes com as do cilindro. O volume da figura obtida é:



(A) $\frac{5}{3}\pi r^3$

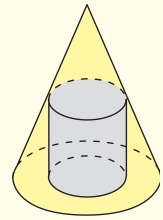
(B) $\frac{2}{3}\pi r^3$

(C) $\frac{4}{3}\pi r^3$

(D) $\frac{1}{3}\pi r^3$

(E) $2\pi r^3$

101 (PUC-RJ) Considere um cilindro circular reto inscrito em um cone circular reto com 10 cm de raio e 24 cm de altura. Expresse o volume desse cilindro como uma função do raio da base do cilindro. Explicite o domínio da função.



102 (Unifor-CE) Dois cones retos, C_1 e C_2 têm alturas iguais e raios da base de medidas r_1 cm e r_2 cm, respectivamente. Se $r_1 = \frac{4}{5}r_2$, então a razão entre os volumes de C_1 e C_2, nessa ordem, é:

(A) $\frac{24}{25}$

(B) $\frac{16}{25}$

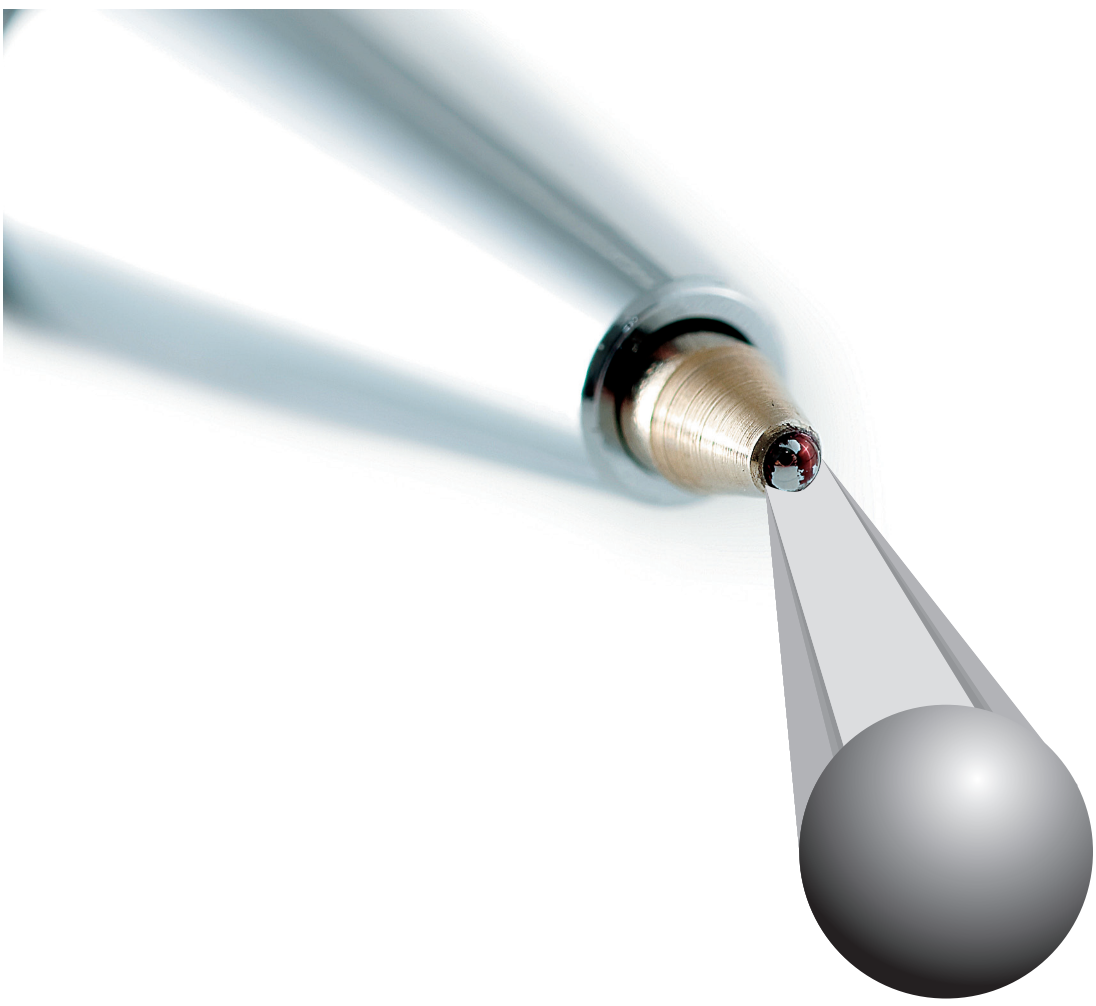
(C) $\frac{18}{25}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{22}{25}$

CAPÍTULO XIV

ESFERAS



Plmrue/Dreamstime.com

Neste capítulo, estudaremos as esferas e várias de suas secções. Na fotografia, a ponta de uma caneta esferográfica, que lhe dá o nome.

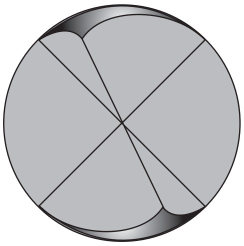
14 – ESFERAS

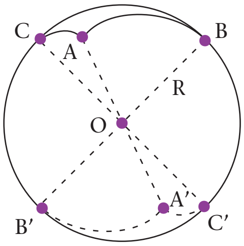
14.1 – Noções básicas

DEFINIÇÃO
Esfera.

Esfera é o sólido limitado por uma superfície em que todos os pontos são equidistantes de um ponto fixo chamado **centro da esfera**.

Raio (R) da esfera é todo segmento de reta que une o centro a qualquer ponto da superfície esférica.





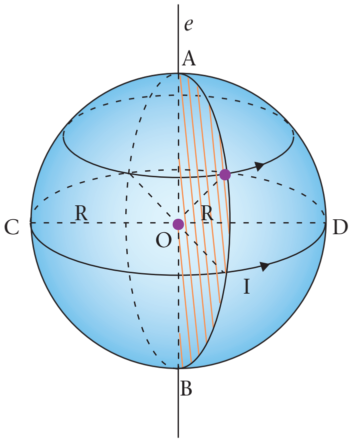
NOTA
Todos os raios de uma esfera são iguais, assim como todos os diâmetros.

Diâmetro da esfera é o segmento que passa pelo centro O e é limitado pela superfície esférica. Tem como medida o dobro do raio.

$$AA' = BB' = CC' = \ldots = 2R$$

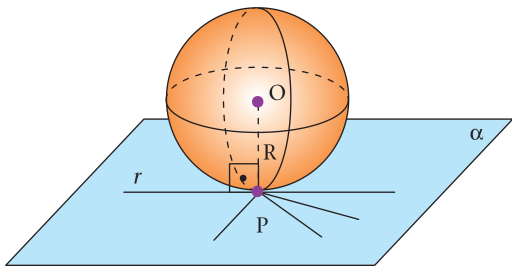
As extremidades de um mesmo diâmetro são chamadas **pontos antípodas**.

Uma esfera é um sólido gerado pela revolução de um semicírculo AIB em torno do diâmetro AB como eixo.



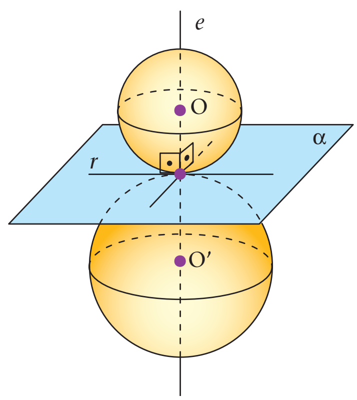
Uma reta *r* ou um plano α são tangentes a uma esfera quando têm exatamente um ponto na superfície da esfera.

Todo plano tangente a uma esfera é perpendicular ao raio no ponto de tangência e reciprocamente todo plano perpendicular a um raio OP, passando por P, é tangente à esfera em P.

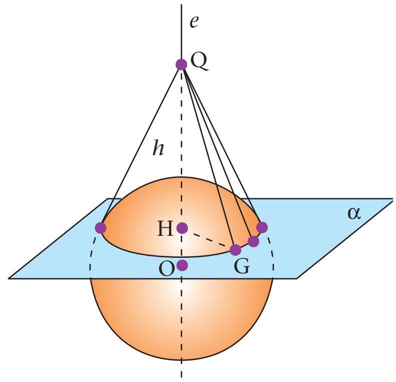


Num ponto P da superfície de uma esfera todas as retas *r* tangentes a ela estão contidas no plano α tangente nesse ponto.

Duas esferas são tangentes se suas superfícies têm exatamente um ponto comum. Esferas tangentes têm um eixo comum coincidente com a reta que une seus centros (OO').

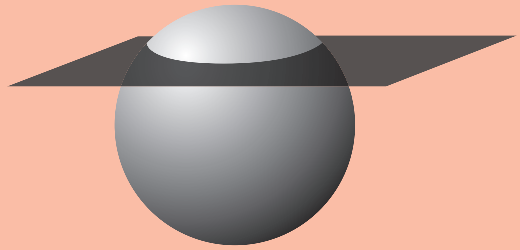


Por um ponto Q fora de uma esfera, pode-se traçar infinitas retas tangentes à esfera, formando a superfície de um cone de revolução de vértice Q e base na linha de contato da superfície do cone com a esfera. $\overline{QH}$ é a altura do cone e $\overline{HG}$, o raio da base. A base do cone se situa num plano α perpendicular ao eixo do cone.



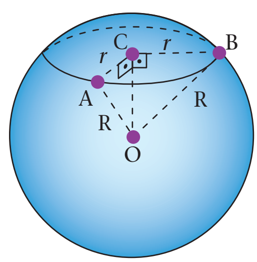
Teorema

Toda secção de uma esfera por um plano é um círculo.

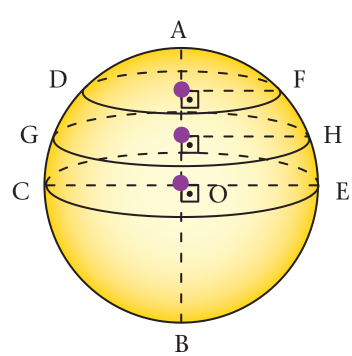


Demonstração:

Basta ver que qualquer que seja a posição do ponto B, $CB^2 = OB^2 - OC^2$. Como OC é constante por ser a distância d do centro da esfera ao plano secante e OB também constante por ser o raio da esfera, então CB será constante e igual ao raio r do círculo da secção. Assim, $r^2 = R^2 - d^2$, onde $\boxed{r = \sqrt{R^2 - d^2}}$.

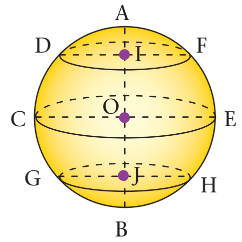


À medida que a distância d (do centro da esfera ao plano secante) diminui, o raio da secção $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ aumenta.



Os círculos secções vão aumentando, e, quando o plano secante passa pelo centro, obtém-se o **círculo máximo** da esfera.

Planos paralelos igualmente afastados do centro da esfera produzem secções congruentes. (OI = OJ).

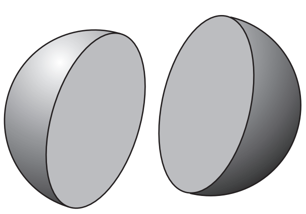


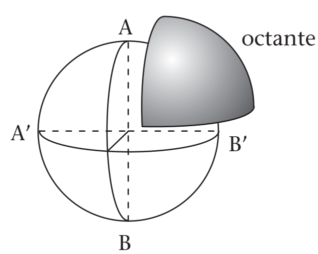
NOTA
As secções por planos paralelos numa superfície esférica são chamadas **paralelos da esfera**.

O **eixo** AB de um círculo contido numa esfera é o diâmetro AB da esfera, perpendicular ao plano do círculo. As extremidades A e B desse diâmetro são chamadas **polos do círculo**. Portanto, os círculos paralelos têm os mesmos polos e o mesmo eixo.

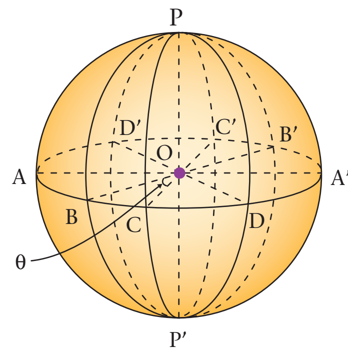
Círculos máximos são congruentes e dividem uma esfera em duas partes congruentes chamadas **hemisférios**. Se os planos de dois círculos máximos são perpendiculares, cada um deles passa pelos polos do outro. A esfera fica dividida em oito partes congruentes chamadas **octantes**.

hemisférios





Chamam-se **meridianos** de uma superfície esférica todas as semicircunferências produzidas por planos que contêm o eixo PP′.

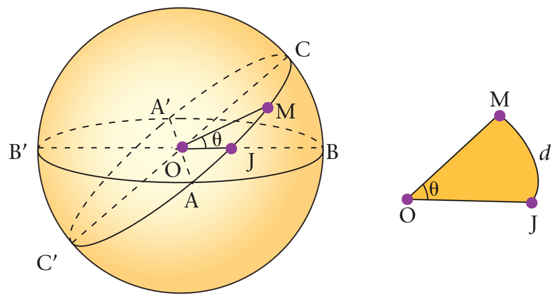


Todos os meridianos são congruentes. Quando se faz uma rotação de um meridiano PAP′ em torno do eixo obtém-se sucessivamente todos os demais, PBP′, PCP′, ...

Ângulo entre dois meridianos é o ângulo diedro formado pelos planos desses meridianos. Esse ângulo é aquele formado, por exemplo, pelos raios OB e OC do círculo máximo perpendicular ao eixo PP′.

NOTA
Esta distância esférica é maior que a distância retilínea entre os pontos M e J.

Dados dois pontos M e J sobre a superfície esférica, chama-se **distância esférica** entre esses dois pontos ao comprimento do menor arco de círculo máximo da esfera compreendido entre os pontos M e J.



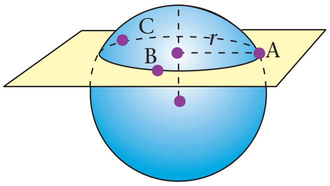
Sendo θ a medida do ângulo central em radianos, essa distância será:

$$d = \theta R$$

O círculo máximo dos pontos M e J está determinado pela intersecção do plano que possui o centro O da esfera e os pontos M e J, com a superfície esférica.

Exemplo:
A distância esférica entre os polos P e P′ de um círculo máximo é o arco de círculo máximo que subtende seu diâmetro POP′.
É o semicírculo de comprimento πR.

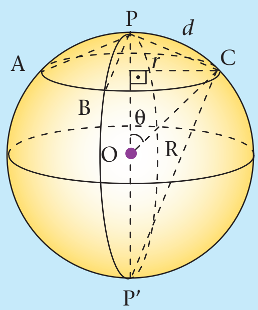
Existe apenas um círculo que passa por três pontos situados na superfície de uma esfera. Esse círculo é a interseção do plano que possui esses três pontos com a superfície da esfera.



Distância polar de um círculo contido numa superfície esférica é a distância esférica (comprimento do arco) do polo mais próximo a qualquer ponto do círculo.

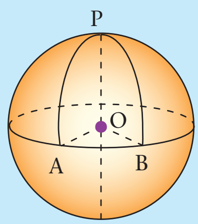
Exemplos:

i) Se numa esfera de raio R, tivermos um círculo a uma distância polar d de seu polo: $d = \theta R \Rightarrow \theta = \dfrac{d}{R} \Rightarrow r = R \cdot \text{sen}\ \theta \Rightarrow r = R \cdot \text{sen}\ \dfrac{d}{R}$.

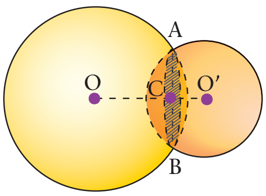


ii) A distância polar de um círculo máximo é um quadrante de círculo máximo,

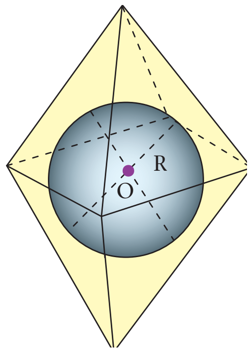
isto é, $d = \frac{\pi R}{2}$. Neste caso, $r = R \cdot \text{sen}\left(\frac{\frac{\pi R}{2}}{R}\right) = R$, como era de se esperar.



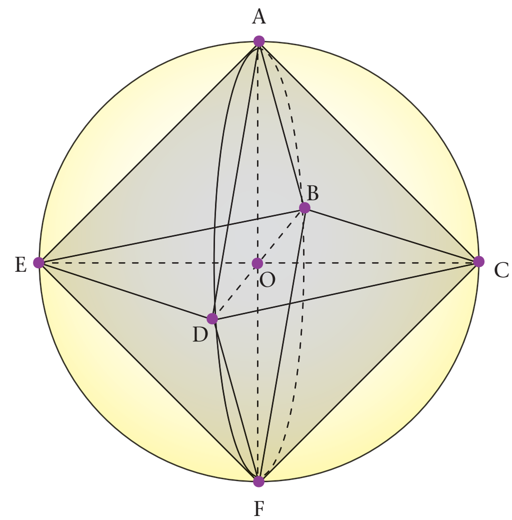
A intersecção de duas superfícies esféricas é um círculo perpendicular à linha dos centros OO' e cujo centro C está sobre essa linha.



Uma esfera está inscrita num poliedro quando todas as faces do poliedro são tangentes à superfície da esfera.



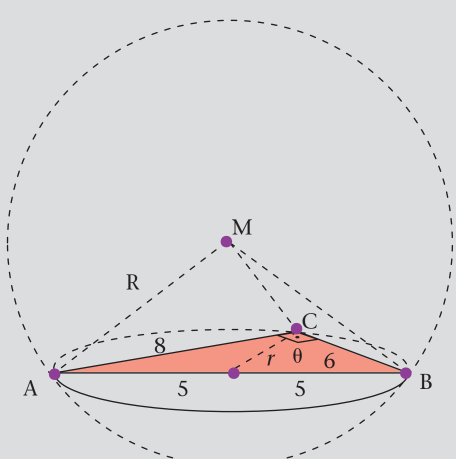
Uma esfera está circunscrita a um poliedro quando todos os seus vértices estão na superfície da esfera.



Exercícios resolvidos:

1) Em um plano α está traçado um triângulo, cujos lados medem 6 cm, 8 cm e 10 cm, respectivamente. O ponto M, exterior ao plano, é equidistante dos três vértices do triângulo e a distância comum é igual ao diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo. Calcule a distância do ponto M ao plano α.

Solução:



Observe que M é o centro de uma esfera de raio R que passa pelos vértices A, B e C do triângulo.

Note que ABC é um triângulo retângulo em θ (pois $10^2 = 8^2 + 6^2$), portanto o diâmetro do círculo que o contém é sua hipotenusa AB = 10 cm, sendo que $r = 5$ cm.

Do enunciado vem: R = 10, daí em $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ se obtém $5 = \sqrt{100 - d^2} \Rightarrow$

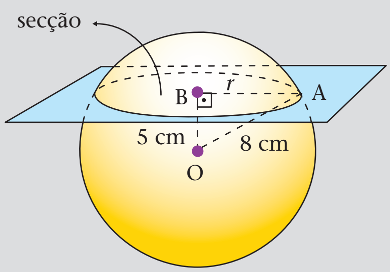
$\Rightarrow d^2 = 75$ e $d = 5\sqrt{3}$ cm

Resposta: $5\sqrt{3}$ cm

2) Uma esfera de raio 8 cm é seccionada por um plano distante 5 cm do seu centro. Calcule o raio da secção.

Solução:

A intersecção do plano com a esfera determina a secção indicada na figura:



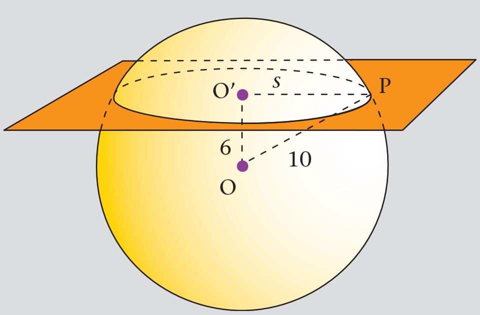
Do triângulo retângulo OBA: $8^2 = 5^2 + r^2 \Rightarrow 64 = 25 + r^2 \Rightarrow r^2 = 39$

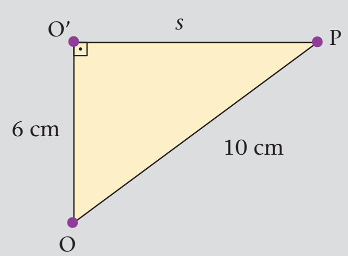
Como r é positivo, obtemos $r = \sqrt{39}$ cm

Resposta: $\sqrt{39}$ cm

3) Calcule a área da secção determinada numa esfera de raio 10 cm por um plano distante 6 cm do centro.

Solução:





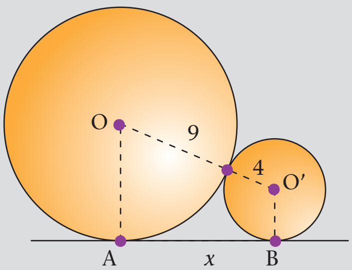
$s^2 = 10^2 - 6^2 = 8^2$

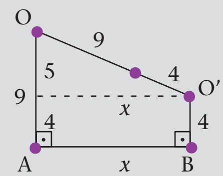
$A_s = \pi s^2 = \pi \cdot 64 \Rightarrow A_s = 64\pi$

Resposta: A área da secção é 64π cm².

4) Duas esferas de raios 9 cm e 4 cm são tangentes exteriormente e tangenciam um plano α nos pontos A e B. Calcule a distância entre A e B.

Solução:





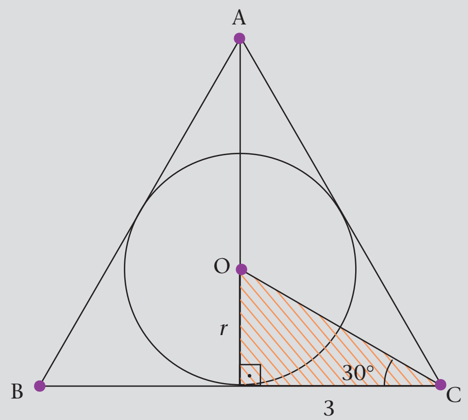
$x^2 + 5^2 = 13^2$

$x^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow x = 12$

Resposta: A distância entre A e B é de 12 cm.

5) (ITA-SP) A circunferência inscrita num triângulo equilátero com lados de 6 cm de comprimento é a intersecção de uma esfera de raio igual a 4 cm com o plano do triângulo. Calcule a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo.

Solução:

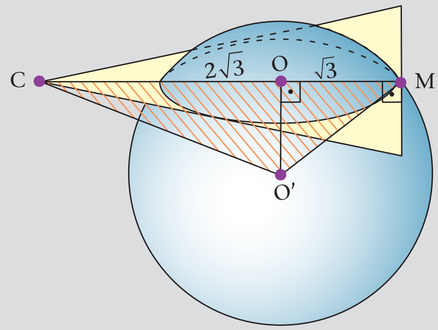


$$\text{tg } 30° = \frac{r}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{3} \Rightarrow r = \sqrt{3} \text{ cm}$$

Como O é baricentro, temos:

$$AO = CO = BO = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

A esfera de raio 4 cm é seccionada pelo plano α(ABC) do triângulo.



$\triangle MOO'$: $(MO')^2 = (MO)^2 + (OO')^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (4)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + (OO')^2 \Rightarrow (OO')^2 = 13$

$\triangle COO'$: $(CO')^2 = (CO)^2 + (OO')^2$

$\Rightarrow (CO')^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 13 = 12 + 13$

$\Rightarrow (CO')^2 = 25 \Rightarrow CO' = 5$ cm

Resposta: 5 cm

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Em uma esfera, os polos de um círculo se acham a 6 cm e 8 cm do mesmo. Determine, nestas condições, a área do círculo (considere $\pi = 3{,}14$).

2 Uma esfera tem raio igual a 5 cm. Calcule a área da secção plana feita nessa esfera a 3 cm do centro.

3 Determine a área da secção feita em uma esfera de 2 m de raio, a 40 cm do centro.

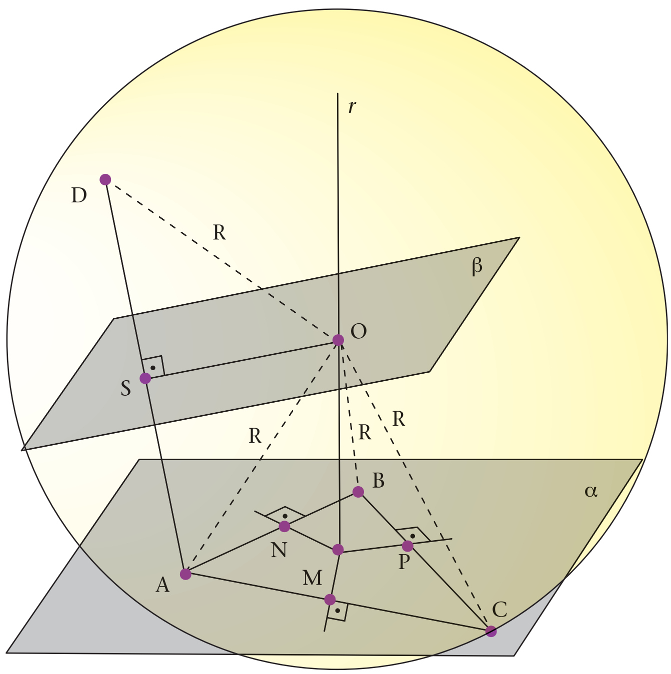
4 Calcule a área de um círculo produzido por uma secção perpendicular ao diâmetro, tal que as distâncias polares medem 3 cm e 5 cm.

5 Em uma esfera de 25 cm de raio, descreveu-se uma circunferência de distância polar 8 cm. Calcule a distância do plano produzido por essa circunferência ao centro da esfera.

14.1.1 – Determinação de uma esfera

Uma esfera fica determinada por quatro pontos não coplanares.

Demonstração:



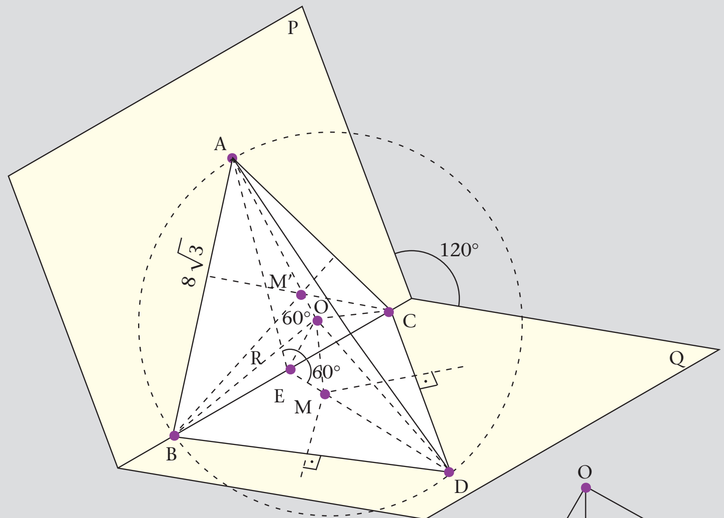
O centro O da esfera deve ser equidistante dos quatro pontos A, B, C e D. Esse centro deverá se situar na reta *r* comum aos planos mediadores dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e também ao plano β mediador de $\overline{AD}$. O centro da esfera será o ponto comum aos planos mediadores das arestas do tetraedro ABCD. O raio é então o valor comum R = OA = OB = OC = OD.

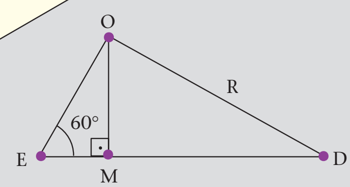
Exercício resolvido:

ABC e DBC são dois triângulos equiláteros de lado $8\sqrt{3}$ m. O planos P e Q dos dois triângulos formam um ângulo de 120°. Calcule o raio da esfera que passa pelos pontos A, B, C e D.

Solução:

Na figura, M é o centro do triângulo equilátero BCD. Portanto $\overline{OM} \perp Q$.
Como ABC e BCD são congruentes, ambos têm o mesmo raio do círculo circunscrito *r*.





Assim, $OM = OM' = \sqrt{R^2 - r^2}$, isto é, O equidista dos planos P e Q.

Portanto, O está no bissetor do diedro PQ e, assim, $O\hat{E}M = O\hat{E}A = 60°$.

Agora, $EM = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{6} = 4$ m. Então, $MO = EM \cdot \text{tg } 60° = 4\sqrt{3}$ m.

Enfim, no $\triangle MOD$, temos também $MD = 2 \cdot EM = 8$ m.

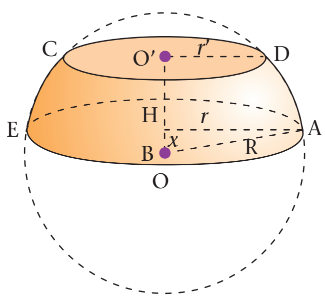
Então: $R^2 = OM^2 + MD^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 8^2 = 112 \Rightarrow R = 4\sqrt{7}$ m.

14.2 – Volumes

14.2.1 – Volume do segmento esférico de duas bases

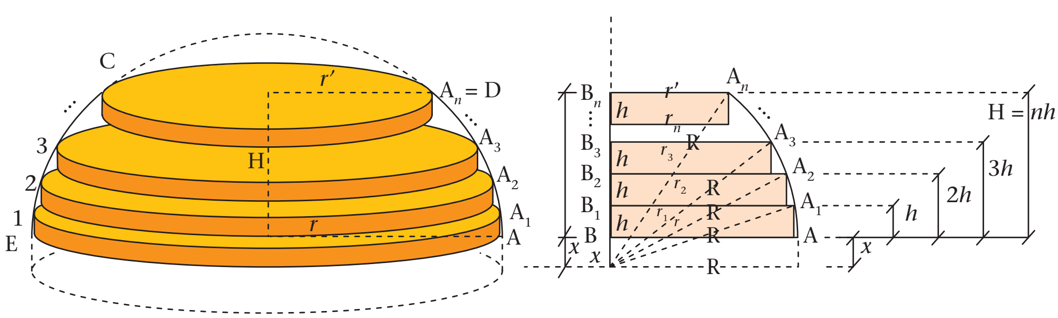
Chama-se **segmento esférico de duas bases** a porção da esfera compreendida entre dois planos paralelos.

As **bases** são as secções na esfera pelos dois planos.
A **altura do segmento** é a distância H entre os planos paralelos.



Para calcular o volume do segmento esférico de duas bases AECD, vamos seccioná-lo por $(n - 1)$ planos paralelos e equidistantes compreendidos entre as bases AE e CD.

Com bases nas secções circulares, feitas por esses planos, construamos n cilindros de altura $h = \dfrac{H}{n}$ formando uma pilha de n cilindros superpostos.



Os raios das bases dos cilindros 1, 2, 3, ..., n, serão respectivamente $r_1, r_2, ..., r_n$ e todos terão a mesma altura $h = \dfrac{H}{n}$. Calculemos seus respectivos volumes $V_1, V_2, ..., V_n$.

$$V_1 = \pi r_1^2 h,\ V_2 = \pi r_2^2 h,\ V_3 = \pi r_3^2 h,\ ...,V_n = \pi r_n^2 h$$

Os raios $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ dos círculos das secções podem ser obtidos dos triângulos retângulos OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3, ..., OA_nB_n respectivamente.

As hipotenusas $OA_1, OA_2, OA_3, ..., OA_n$ são iguais a R (o raio de esfera). Os catetos são:

$$OB_1 = h + x,\ OB_2 = 2h + x,\ OB_3 = 3h + x,\ ...,\ OB_n = nh + x$$

em que x é a distância do centro da esfera ao plano da base AE do segmento esférico. Os outros catetos são $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$.

Temos então:

$$r_1^2 = OA_1^2 - OB_1^2 = R^2 - (h+x)^2,\ r_2^2 = OA_2^2 - OB_2^2 = R^2 - (2h+x)^2,$$

$$r_3^2 = OA_3^2 - OB_3^2 = R^2 - (3h+x)^2\ \ldots,\ r_n^2 = OA_n^2 - OB_n^2 = R^2 - (nh+x)^2$$

Somemos os volumes dos cilindros da pilha:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n$$

$$V = \pi r_1^2 h + \pi r_2^2 h + \pi r_3^2 h + \ldots + \pi r_n^2 h$$

$$V = \pi h\ (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_n^2)$$

$$V = \pi h\ \left[R^2 - (h + x)^2 + R^2 - (2h + x)^2 + R^2 - (3h + x)^2 + \ldots + R^2 - (nh + x)^2\right]$$

Como são n parcelas entre os colchetes (n raios), vem:

$$V = \pi h\ \left[nR^2 - (h^2 + 2hx + x^2) - (2^2h^2 + 4hx + x^2) - \ldots - (n^2h^2 + 2nhx + x^2)\right]$$

Agrupando os termos em h^2 e em h, vem:

$$V = \pi h\ \left[nR^2 - (h^2 + 2^2h^2 + \ldots + n^2h^2) - 2hx\ (1 + 2 + \ldots + n) - (x^2 + x^2 + \ldots + x^2)\right]$$

$$V = \pi h\ \left[nR^2 - h^2\ (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - 2hx\ (1 + 2 + \ldots + n) - nx^2\right]$$

Levando em conta que $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{1}{6}\ n(n + 1)(2n + 1)$

e $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{(1+n)n}{2}$, temos:

$$V = \pi h\left[nR^2 - h^2 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 2hx\frac{n(n+1)}{2} - nx^2\right]$$

$$V = \pi h\left[n(R^2 - x^2) - \frac{h^2}{6} n(n+1)(2n+1) - hx\ \ n(n+1)\right]$$

Como no triângulo OAB, $R^2 - x^2 = r^2$, onde r é o raio de uma das bases do segmento esférico, temos:

$$V = \pi h\left[nr^2 - \frac{h^2}{6} n(n+1)(2n+1) - hxn(n + 1)\right]$$

Substituindo $h = \dfrac{H}{n}$, vem:

$$V = \pi \frac{H}{n} \cdot n\left[r^2 - \frac{1}{6} \cdot \frac{H^2}{n^2}(n+1)(2n+1) - x \cdot \frac{H}{n} \cdot (n+1)\right]$$

$$V = \pi H\left[r^2 - \frac{H^2}{6} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} - Hx \cdot \frac{n+1}{n}\right]$$

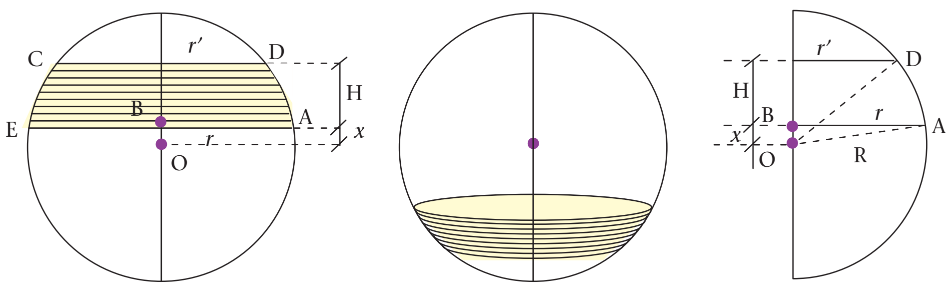
Separando as frações em duas: $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{n}{n} + \dfrac{1}{n}$ e $\dfrac{n+2}{n} = \dfrac{n}{n} + \dfrac{2}{n}$

$$V = \pi H\left[r^2 - \frac{H^2}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) - Hx\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

Fazendo o número n de divisões aumentar infinitamente, as frações $\frac{1}{n}$ tenderão para zero e o limite da soma dos volumes dos cilindros será o volume V do segmento esférico de duas bases de altura H.

$$V = \pi H\left[r^2 - \frac{H^2}{6}(1+0)(2+0) - Hx(1+0)\right]$$

$$V = \pi H\left(r^2 - \frac{H^2}{3} - Hx\right)$$



Para expressar esse volume em função dos raios r e r' das bases e da altura H, basta ver que: $(H + x)^2 + r'^2 = R^2$, logo:

$$H^2 + 2Hx + x^2 + r'^2 = R^2 \Rightarrow 2Hx = R^2 - H^2 - r'^2 - x^2 = r^2 - H^2 - r'^2,$$

pois $R^2 - x^2 = r^2$ no triângulo OAB.

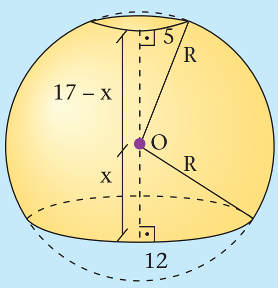
$$V = \pi H\left(r^2 - \frac{H^2}{3} - \frac{r^2 - H^2 - r'^2}{2}\right)$$

$$V = \pi \frac{H}{6}\left(6r^2 - 2H^2 - 3r^2 + 3H^2 + 3r'^2\right)$$

$$V = \frac{\pi H}{6}\left(3r^2 + 3r'^2 + H^2\right) \text{ ou } V = \frac{\pi r^2 H}{2} + \frac{\pi r'^2 H}{2} + \frac{\pi H^3}{6}$$

Exemplo:

Num segmento esférico de duas bases, a altura mede 17 cm, o raio maior mede 12 cm e o raio menor mede 5 cm. Determine o volume do segmento esférico.



Cálculo do raio da esfera:

$$\begin{cases} R^2 = 5^2 + (17 - x)^2 \\ R^2 = 12^2 + x^2 \end{cases} \Rightarrow x = 5 \text{ cm e } R = 13 \text{ cm}$$

O volume é:

$$V = \frac{\pi r^2 H}{2} + \frac{\pi R^2 H}{2} + \frac{\pi H^3}{6}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 17}{6}(3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 12^2 + 17^2) = \frac{\pi \cdot 17}{6} \cdot 796$$

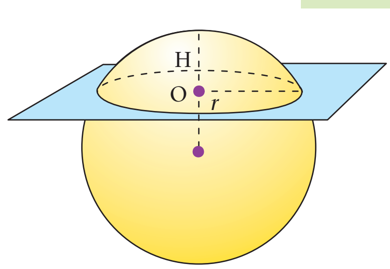
$$V = \frac{6\,766\pi}{3} \text{ cm}^3$$

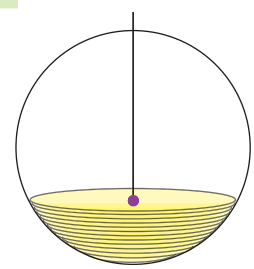
14.2.2 – Volume do segmento esférico de uma base

NOTA
Observe que tanto o segmento de duas bases quanto o segmento de uma base são sólidos.

Quando o segmento esférico é de apenas uma base, $r' = 0$ e a fórmula fica:

$$V = \frac{\pi r^2 H}{2} + \frac{\pi H^3}{2}$$





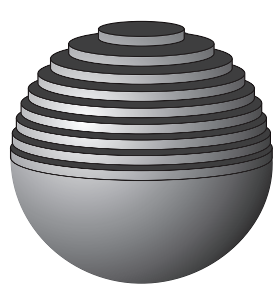
14.2.3 – Volume da esfera

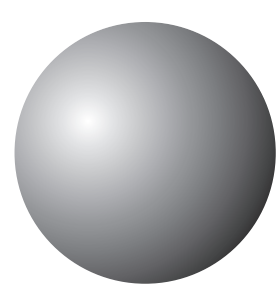
Podemos considerar a esfera de raio R como um segmento esférico cuja altura H é igual ao diâmetro 2R.

Assim, para H = 2R, $r = 0$ e a fórmula do volume fica:

$$V = \frac{\pi \cdot 0^2 \cdot R}{2} + \frac{\pi(2R)^3}{6} = \frac{0 + \pi \cdot 8R^3}{6}$$

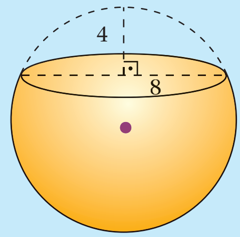
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$





Exemplos:

i) Um segmento esférico tem 4 cm de altura e 8 cm de raio. Calcular o volume do segmento esférico de uma base.



O volume é: $V = \dfrac{\pi H}{6} \cdot \left(3r^2 + 3R^2 + H^2\right)$. Como H = 4, $r = 0$ e R = 8, temos:

$$V = \frac{\pi \cdot 4}{6} \cdot \left(3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 8^2 + 4^2\right)$$

$$V = \frac{416\pi}{3}\ \text{cm}^3$$

ii) Determine o volume da esfera cujo raio é 3 cm.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{\cancel{3}}\pi 3^{\cancel{3}\,2} = 4 \cdot \pi \cdot 9 \Rightarrow V = 36\pi\ \text{cm}^3$$

iii) Uma esfera tem volume ℓ^3. Determine o seu raio.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \ell^3 \Rightarrow R^3 = \frac{\ell^3 \cdot 3}{4\pi} \Rightarrow R = \frac{\ell \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4\pi}}$$

Exercícios resolvidos:

1) (UFCE) Calcule, em cm³, o volume de um dado fabricado a partir de um cubo de aresta igual a 4 cm, levando em conta que os buracos representativos dos números, presentes em suas faces, são semiesferas de raio igual a $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7\pi}}$ cm.

Solução:

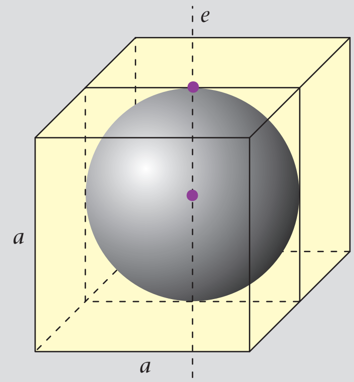
Temos que:

$$V_{dado} = V_{cubo} - 21 \cdot V_{semiesfera} \Rightarrow V_{dado} = 4^3 - 21 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{7\pi}}\right)^3 \Rightarrow V_{dado} = 62\ \text{cm}^3$$

Resposta: 62 cm³

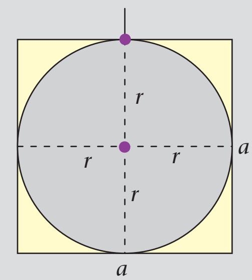
2) Determine o volume de uma esfera que está inscrita e da que está circunscrita a um cubo de aresta a.

<u>Solução:</u>



esfera inscrita no cubo
(cubo circunscrito à esfera)

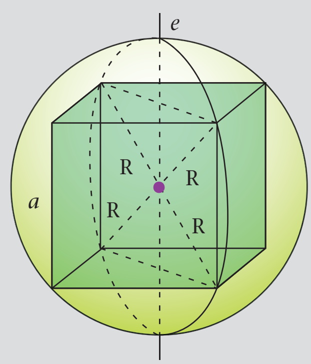
secção (visão frontal)



$2r$ = aresta do cubo

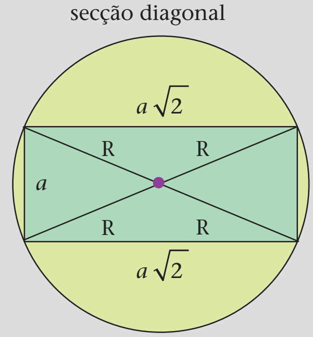
A esfera inscrita tem centro no centro do cubo e tangencia internamente as seis faces, exatamente no centro de cada uma. Sendo r o raio, temos:

$$2r = a \Rightarrow r = \frac{a}{2} \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3}{6}$$



esfera circunscrita ao cubo
(cubo inscrito na esfera)

secção diagonal



2R = diagonal do cubo

A esfera circunscrita tem centro no centro do cubo e passa pelos oito vértices. O centro coincide com o ponto de encontro das diagonais do cubo. Sendo R o raio, temos:

$$2R = a\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$$

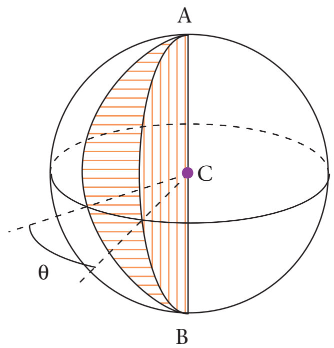
<u>Resposta</u>: inscrita $\frac{\pi a^3}{6}$; circunscrita $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$

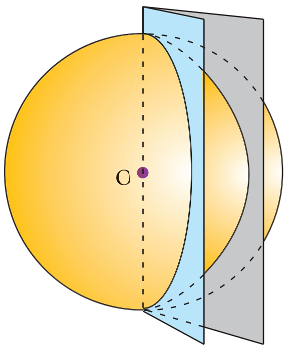
14.2.4 – Volume da cunha esférica

Chama-se **cunha esférica** a porção da esfera limitada pela esfera e por dois círculos máximos de mesmo diâmetro.

A cunha esférica é a parte comum a uma esfera e um diedro cuja aresta passa pelo centro da esfera.

O **ângulo da cunha esférica** é o ângulo retilíneo do diedro que determina a cunha esférica.





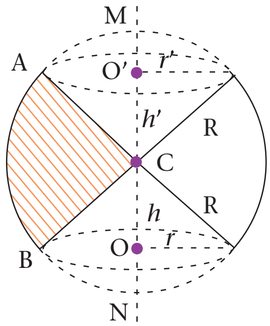
Como a cunha esférica tem um ângulo de 2π radianos, tem como volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (esfera), isto é, a cunha esférica de ângulo θ terá volume igual a:

$$V = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\boxed{V = \frac{2\theta}{3} R^3}$$

14.2.5 – Volume do setor esférico

Chama-se **setor esférico** o sólido gerado pela rotação de um setor circular CAB em torno de um diâmetro MN que passa pelo seu vértice C.



Para calcular o volume do setor, basta subtrair do segmento de duas bases O e O' os dois cones de raios r e r' e alturas respectivas h e h'.

Temos então:

$$V_{setor} = \left(\frac{\pi\, r^2 H}{2} + \frac{\pi\, r'^2 H}{2} + \frac{\pi H^3}{6}\right) - \frac{\pi r^2 h}{3} + \frac{\pi\ '^2 h'}{3}$$

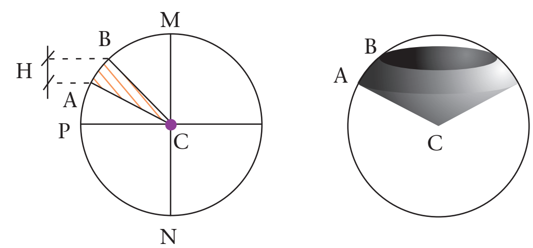
$$V = \frac{\pi}{6}\left(3r^2H + 3r'^2H + H^3 - 2r^2h - 2r'^2h'\right)$$

Como $h' = H - h$, $r^2 = R^2 - r^2$ e $r'^2 = R^2 - h'^2 = R^2 - (H - h)^2$

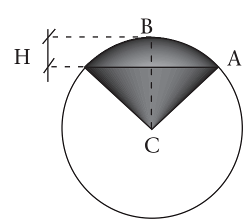
$$V = \frac{\pi}{6}\left[3\left(R^2 - h^2\right)H + 3\left(R^2 - H^2 + 2hH - h^2\right)H + H^3 - 2(R^2 - h^2)h - 2(R^2 - H^2 + 2hH - h^2)(H - h)\right]$$

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot 4R^2H \Rightarrow \boxed{V = \frac{2}{3}\pi R^2 H}$$

NOTA
O volume do setor esférico é dois terços do volume do cilindro de raio igual ao círculo máximo e altura igual à projeção do arco gerador sobre o eixo de rotação do setor.



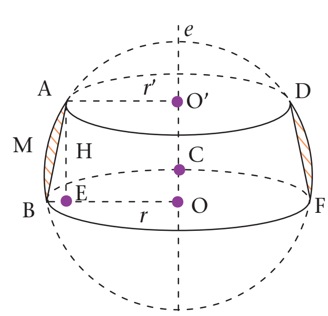
Quando R′ = 0 e H < R, o setor esférico se transforma em um pião.



14.2.6 – Volume do anel esférico

Chama-se **anel esférico** o sólido gerado pela revolução completa de um segmento circular AMB em torno de um diâmetro que não o intersecta.

Esse diâmetro é o **eixo do anel esférico**.



Para calcular o volume do anel, basta subtrair do volume do segmento de duas bases ABFD o volume do tronco de cone de raios *r* e *r'* e altura H.

Temos:

$$V = \left(\frac{\pi r^2 H}{2} + \frac{\pi r'^2 H}{2} + \frac{\pi H^3}{6}\right) - \left(\frac{\pi r^2 H}{3} + \frac{\pi r'^2 H}{3} + \frac{\pi r r' H}{3}\right)$$

$$V = \frac{\pi r^2 H}{6} + \frac{\pi r'^2 H}{6} + \left(\frac{\pi H^3}{6} - \frac{\pi r r' H}{3}\right)$$

$$V = \frac{\pi H}{6}(r^2 + r'^2 + H^2 - 2rr') = \frac{\pi H}{6}[(r - r')^2 + H^2]$$

Mas $(r - r')^2 + H^2 = AB^2$, pois $r - r' = BE$ e $H = EA$.

Logo: $V_{anel} = \dfrac{\pi AB^2 H}{6}$

Exemplo:

No caso particular de AB = 2R, temos o volume de esfera:

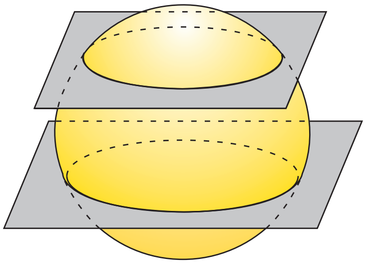
$$V = \frac{\pi}{6}(2R)^3 = \frac{8\pi R^3}{6} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

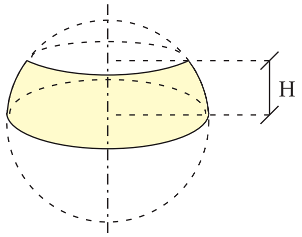
14.3 – Áreas de superfície

14.3.1 – Área da zona esférica

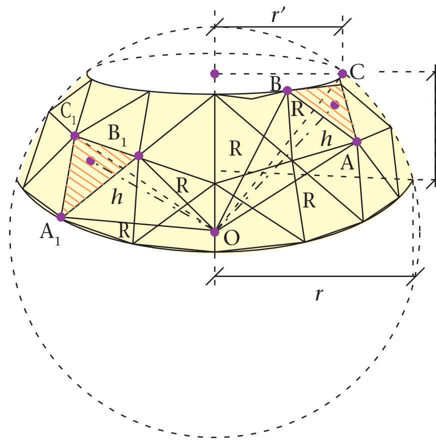
Chama-se **zona esférica** a porção da superfície esférica compreendida entre dois planos paralelos.

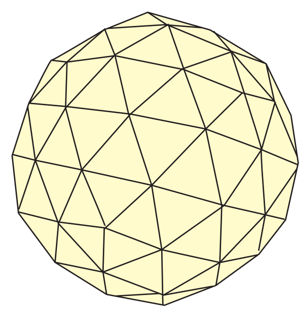
Os círculos determinados pelas secções dos planos paralelos na superfície esférica são as **bases** da zona e a distância entre esses planos é a **altura** da zona.

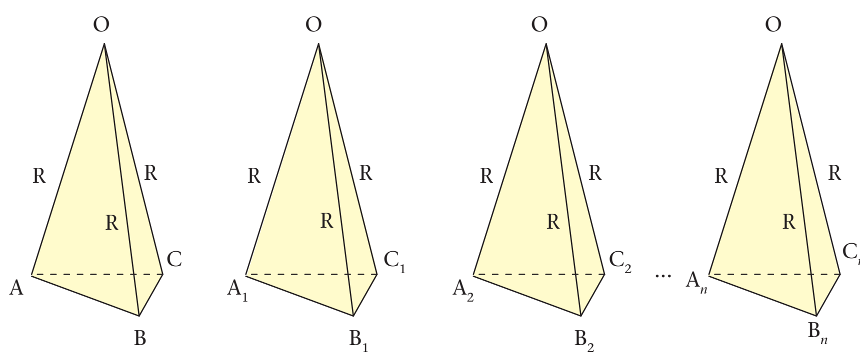




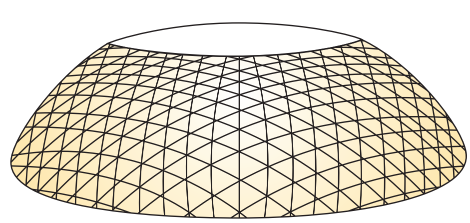
Para calcular a área da zona, construiremos com vértices no centro O da esfera, triedros OABC, $OA_1B_1C_1$, ..., $OA_nB_nC_n$ de modo que as intersecções das arestas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ com a superfície da esfera determinem triângulos ABC, $A_1B_1C_1$, ..., $A_nB_nC_n$ inscritos na zona esférica que serão faces de um poliedro convexo de faces triangulares. Com bases nesses triângulos, consideremos as pirâmides OABC, $OA_1B_1C_1$, ..., $OA_nB_nC_n$ cujas arestas laterais são iguais ao raio R da esfera e cujas bases são os triângulos ABC, $A_1B_1C_1$, ..., $A_nB_nC_n$ de áreas iguais a s, s_1, s_2, s_3, ... s_n.







Imaginemos que foram inscritos n triângulos na zona esférica e com isto as pirâmides ficaram inscritas num setor esférico.



Quando a área de cada triângulo tender a zero e o número de triângulos tender para infinito, a soma ($s + s_1 + s_2 + ... + s_n$) das áreas dos triângulos tenderá para a área da zona.

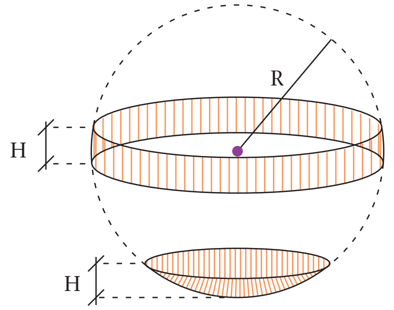
Logo, a soma dos volumes das pirâmides $v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n = \frac{1}{3}(sh + s_1h_1 + s_2h_2 + + ... + s_nh_n)$ tenderá para o volume do setor $\frac{2}{3}\pi R^2H$, e as alturas das pirâmides tenderão para o raio da esfera.

Assim, teremos:

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{3}(sh + s_1h_1 + s_2h_2 + ... + s_nh_n) = \frac{1}{3}$ (área da zona) $\cdot$ R, que será igual ao volume do setor $\frac{2}{3}\pi R^2H$. Logo, $\frac{1}{3}$ (área da zona)R $= \frac{2}{3}\pi R^2H$, onde área da zona $= 2\pi RH$.

A área da zona esférica é o produto do perímetro do círculo máximo da esfera pela altura da zona.

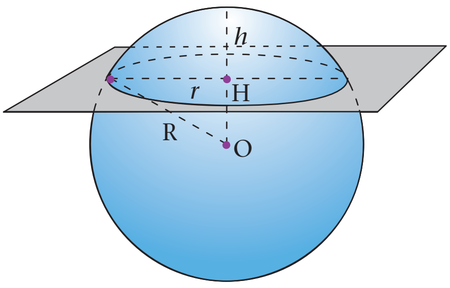
Chamando de S_z a área da zona, $S_z = 2\pi RH$.

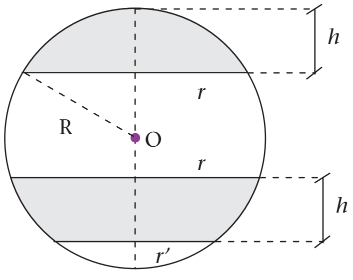


14.3.2 – Área da calota esférica

Chama-se **calota esférica** toda porção da superfície esférica compreendida entre dois planos paralelos em que um deles é tangente à esfera.
A calota é uma zona em que uma das bases se reduz a um ponto.

Então a área da calota será ainda: $S_c = 2\pi Rh$.



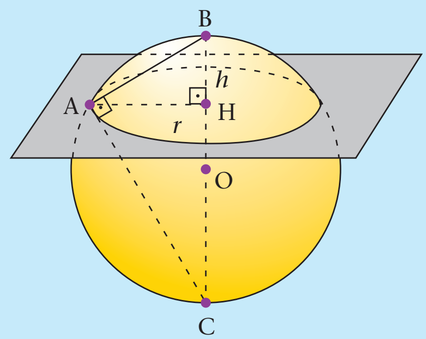


Exemplo:

A área da calota pode ser expressa em função da corda $\overline{AB}$ do seu arco gerador.

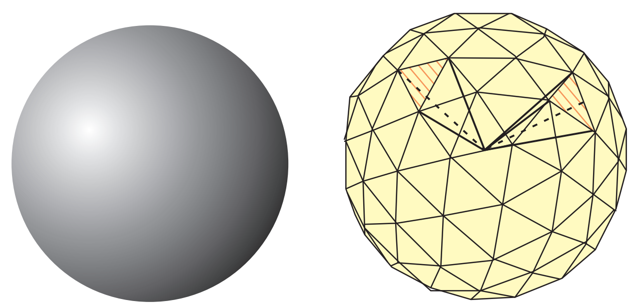
No triângulo ABC, $AB^2 = BC \cdot BH$, logo $AB^2 = 2R \cdot h$, logo $S_c = \pi \cdot AB^2$.

Como $AB^2 = r^2 + h^2$, temos também $S_c = \pi(r^2 + h^2)$.



14.3.3 – Área da superfície da esfera

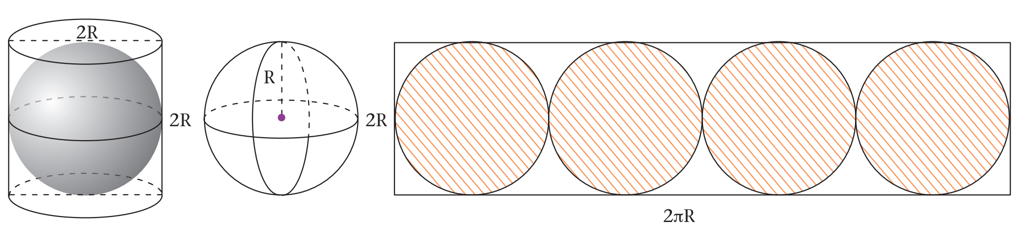
A área da esfera pode ser obtida tratando-a como uma zona esférica cuja altura H é o diâmetro da esfera.



Assim, chamando de S_e a área da superfície esférica, temos:

$$H = 2r \Rightarrow S_e = 2\pi R \cdot 2R \Rightarrow S_e = 4\pi R^2$$

A área da superfície esférica é equivalente à área de quatro círculos máximos.



Por outro lado, a área da superfície esférica é equivalente à área lateral de um cilindro equilátero de altura igual ao diâmetro da esfera.

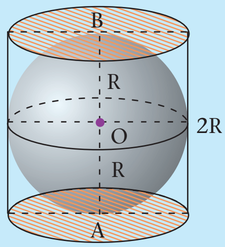
Basta ver que:

Área lateral do cilindro $= 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$

Exemplo:

Teorema de Arquimedes

O volume da esfera é igual a dois terços do volume do cilindro equilátero circunscrito assim como a área da superfície esférica é dois terços da área total do mesmo cilindro.



De fato temos:

Volume do cilindro = $\pi R^2 \cdot (2R) = 2\pi R^3 = V_{cil}$

Volume da esfera = $\frac{4}{3}\pi R^3 = V_{esf}$

$$V_{esf} = \frac{2}{3} \cdot 2\pi R^3 \Rightarrow \boxed{V_{esf} = \frac{2}{3} V_{cil}}$$

Área total do cilindro = $2\pi R \cdot (2R) + 2\pi R^2 = S_{cil} = 6\pi R^2$

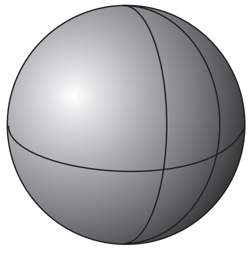
Área da superfície da esfera = $4\pi R^2 = S_{esf}$

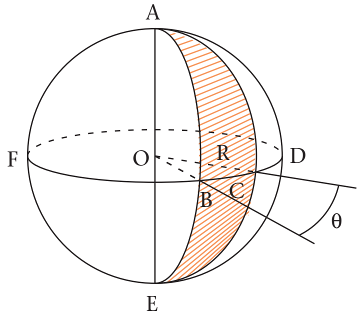
$$S_{esf} = \frac{2}{3} \cdot 6\pi R^2 \Rightarrow \boxed{S_{esf} = \frac{2}{3} S_{cil}}$$

14.3.4 – Área do fuso esférico

Chama-se **fuso esférico** a porção da superfície esférica compreendida entre dois semicírculos máximos que têm o mesmo diâmetro.

A superfície esférica pode ser considerada como um fuso de 2π rad.





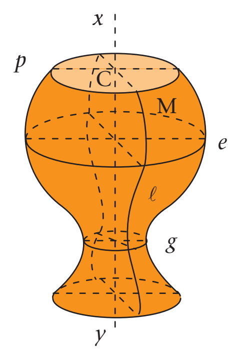
Assim, a área do fuso esférico de ângulo θ será:

$$S_f = \frac{\theta}{2\pi} \cdot 4\pi R^2 \Rightarrow \boxed{S_f = 2\pi \theta R^2}$$

14.4 – Superfícies de revolução

Chama-se **superfície de revolução** à figura gerada pela rotação de uma linha ℓ em torno de um eixo xy.

A linha ℓ se chama **geratriz** da superfície de revolução e xy é o seu **eixo**.



Todo ponto M da linha ℓ descreve um círculo p cujo plano é perpendicular ao eixo e cujo centro C está sobre o eixo. Esse círculo se chama **paralelo** da superfície.

Um **sólido de revolução** é um sólido limitado por uma superfície de revolução.

O paralelo e de maior raio da superfície de revolução é chamado de **equador** da superfície e o paralelo g de menor raio da superfície chama-se **círculo de gola**.

Chama-se **plano meridiano** de uma superfície de revolução qualquer plano que contenha o eixo da superfície.

A secção de um plano mediano no sólido de revolução é chamada **secção meridiana** desse sólido.

Meridiano é a intersecção do semiplano com origem no eixo xy com a superfície de revolução.

Todos os meridianos de uma superfície de revolução são congruentes. Dois meridianos podem então coincidir por meio de uma rotação em torno do seu eixo de simetria (eixo da superfície).

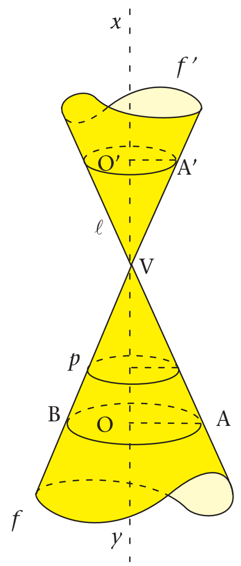
Uma superfície de revolução pode também ser entendida como a superfície gerada por um círculo p que se desloca continuamente mantendo-se perpendicular a um eixo xy com seu centro C sobre esse eixo e apoiando-se sobre uma linha fixa ℓ. Neste caso, a geratriz é um círculo p e a diretriz a linha ℓ. A diretriz ℓ é um meridiano de superfície.

Para o nosso estudo, as principais superfícies de revolução são:

14.4.1 – Superfície cônica de revolução

É a superfície de revolução cuja geratriz ℓ é uma reta que se apoia sobre o eixo xy. O ponto de concurso da geratriz com o eixo é o vértice V da superfície. Este ponto é o ponto comum das duas folhas f e f' da superfície.

O círculo de gola reduz-se ao vértice V. Os paralelos são os círculos p. A secção meridiana é um ângulo AVB cujo eixo de revolução xy é a bissetriz do ângulo AVB.



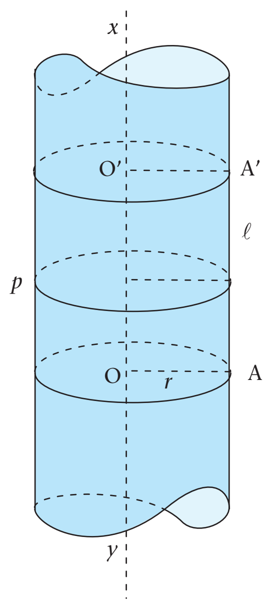
14.4.2 – Superfície cilíndrica de revolução

É a superfície de revolução cuja geratriz ℓ é uma reta paralela ao eixo *xy*.

Os círculos *p* paralelos são congruentes e todos são círculo de gola.

Os paralelos são as secções retas na superfície e seus raios *r* são a distância da geratriz ℓ ao eixo *xy*.

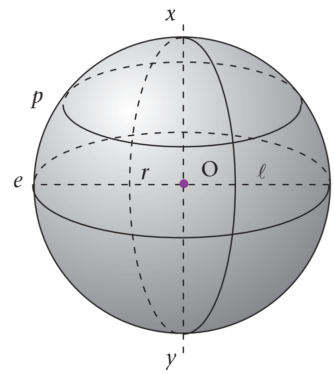
O meridiano é constituído de uma reta paralela ao eixo.



14.4.3 – Superfície esférica

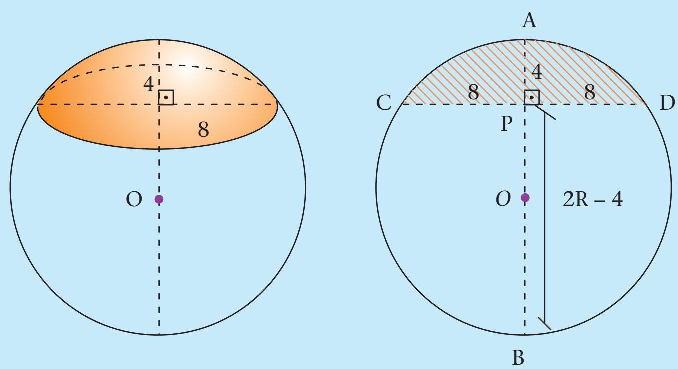
É a superfície de revolução cuja geratriz é um semicírculo ℓ e cujo eixo *xy* é o diâmetro do mesmo.

O equador será um círculo máximo e o círculo de gola é um dos polos da esfera.



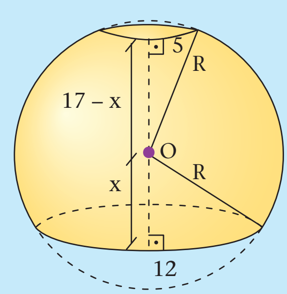
Exemplos:

i) Um segmento esférico tem 4 cm de altura e 8 cm de raio. Determinar a área de sua calota.
A área da calota é dada por $S_c = 2\pi R h$, logo:



$\cancel{4} \cdot (2R - 4) = \overset{2}{\cancel{8}} \cdot 8$
$2R - 4 = 16$
$2R = 20 \Rightarrow R = 10$ cm
$S_c = 2\pi \cdot 10 \cdot 4 \Rightarrow S_c = 80\pi$ cm^2

ii) Num segmento esférico de duas bases a altura mede 17 cm, o raio maior mede 12 cm e o raio menor mede 5 cm. Determinar a área total do segmento esférico.



Calculando o raio da esfera, temos:

$\begin{cases} R^2 = 5^2 + (17 - x)^2 \\ R^2 = 12^2 + x^2 \end{cases}$, logo $x = 5$ cm e R = 13 cm.

A área da zona esférica é dada por $S_z = 2\pi Rh$, logo:

$$S_z = 2\pi \cdot 13 \cdot 17 \Rightarrow S_z = 442\pi \text{ cm}^2$$

A área total é a soma da área da zona esférica com as áreas das bases:

$$S_t = S_z + S_r + S_R = 442\pi + 25\pi + 144\pi = 611\pi$$

$$S_t = 611\pi \text{ cm}^2$$

iii) São dadas duas esferas tais que o raio R, da maior, é igual ao dobro do raio r, da menor. Sabendo, ainda, que o fuso de 60°, na maior, tem a mesma área de uma zona de 1,5 m de altura, na outra, calcular o raio R, da maior esfera.

Temos: $R = 2r$

$S_f = \dfrac{\pi R^2 \cdot 60°}{90°} = \dfrac{2}{3}\pi R^2$

$S_z = 2\pi r \cdot h = 2\pi r \cdot 1{,}5 = 3\pi r$

Então: $\dfrac{2}{3}\pi(2r)^2 = 3\pi r \Rightarrow r = \dfrac{9}{8}$ m e $R = \dfrac{9}{4}$ m

iv) Uma esfera está inscrita num cubo. Calcular o volume da porção não ocupada pela esfera, sabendo que a aresta do cubo mede 12 m ($\pi = 3{,}14$).

O diâmetro da esfera é igual à aresta do cubo.

Temos: $2R = a$; $V_{cubo} = a^3 = 1\,728$ m³

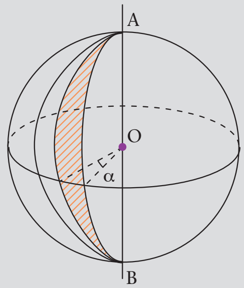
$V_{esf} = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 6^3$

Finalmente, $V_{porção} = V_{cubo} - V_{esf} = 1\,728 - 904{,}32 = 823{,}68$ m².

Exercícios resolvidos:

1) (ITA-SP) Uma esfera de raio r é seccionada por n planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semiesfera formam uma progressão aritmética de razão $\dfrac{\pi r^3}{45}$. Se o volume da menor cunha for igual a $\dfrac{\pi r^3}{18}$, calcule n.

<u>Solução:</u>



PA: $(V_1; V_2; V_3; ...; V_n)$ com: $V_1 = \dfrac{\pi r^3}{18}$, razão $= \dfrac{\pi r^3}{45}$ e $\sum_{i=1}^{n} V_i = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{2}{3}\pi r^3$

Pelo termo geral da PA, temos: $V_n = \dfrac{\pi r^3}{18} + (n-1)\dfrac{\pi r^3}{45}$

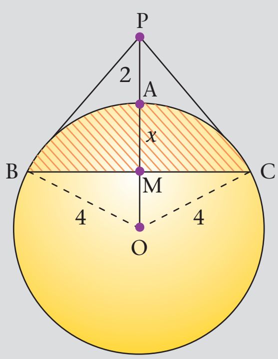
Soma dos termos: $\dfrac{(V_1 + V_n)n}{2} = \dfrac{2}{3}\pi r^3$

Assim: $\left[\dfrac{\pi r^3}{18} + \dfrac{\pi r^3}{18} + (n-1)\dfrac{\pi r^3}{45}\right] \cdot \dfrac{n}{2} = \dfrac{2}{3}\pi r^3$

Simplificando, temos a equação: $n^2 + 4n - 60 = 0 \Rightarrow n = -10$ (não convém) e $n = 6$.
Resposta: O número de planos meridiano é 6.

2) Um ponto luminoso está situado a 2 m de distância de uma esfera de raio igual a 4 m. Qual o valor da área da porção iluminada da esfera?

Solução:



Temos AP = 2 m, OB = OA = R = 4 m.

A porção iluminada será a calota de altura MA = x.

Vem:

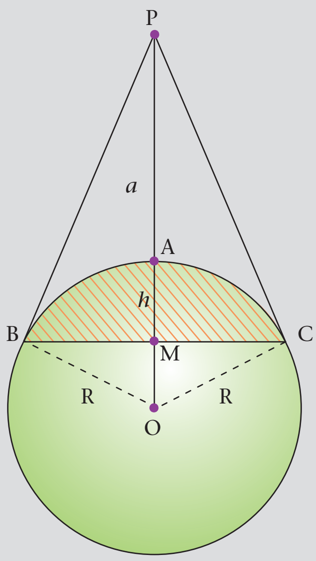
$OB^2 = OM \cdot OP \Rightarrow R^2 = (R - x)(R + 2) \Rightarrow x = \dfrac{4}{3}$ m

$S_c = 2\pi R \cdot h = \dfrac{32}{3}\pi \text{ m}^2$

Resposta: $\dfrac{32}{3}\pi \text{ m}^2$

3) Que fração da área do globo terrestre pode ser vista por um observador situado a uma altura $a = 20$ km, acima do solo?

Solução:



A Terra é suposta esférica, com raio R = 6 300 km.
A área vista pelo observador situado em P é a calota BAC.
No triângulo retângulo PCO:

$R^2 = OM \cdot OP = (R - h)(R + a)$, onde $h = \dfrac{aR}{R + a}$.

Então, a área da calota ($S_c = 2\pi Rh$) transformar-se-á em:

$$S_c = 2\pi R \cdot \frac{aR}{R + a} = \frac{2\pi a R^2}{R + a}$$

Comparemos com a área da esfera para obter a fração pedida:

$$\frac{S_c}{S_e} = \frac{\dfrac{2\pi a R^2}{R + a}}{4\pi R^2} = \frac{a}{2(R + a)}$$

Substituindo a e R pelos seus valores numéricos e simplificando, encontramos, afinal:

$$\frac{S_c}{S_e} = \frac{1}{632}.$$

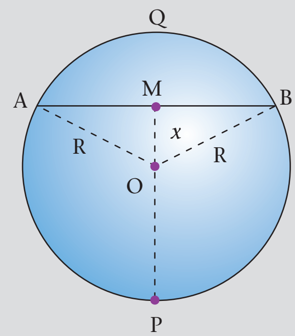
4) Corta-se uma esfera de raio R por um plano AB. Determinar a distância deste plano ao centro, sabendo que a área da calota menor AQB é igual, sucessivamente,

I) à área lateral de cone AOB cuja base é o círculo da secção e tem o vértice no centro da esfera;

II) à área da esfera de diâmetro $\overline{OM}$;

III) à área da esfera de diâmetro $\overline{PM}$.

<u>Solução:</u>



I) Consideremos OM = x.

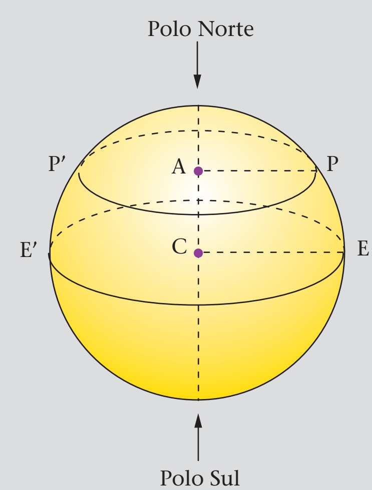
$2\pi R(R - x) = \pi\sqrt{R^2 - x^2} \cdot R$

Quadrando e simplificando temos: $4(R - x) = R + x \Rightarrow x = \frac{3}{5}R$

II) Sempre utilizando as notações do enunciado, vem:
$2\pi R(R - x) = \pi x^2 \Rightarrow x^2 + 2Rx - 2R^2 = 0 \Rightarrow x = R(\sqrt{3} - 1)$

III) No terceiro caso, teremos:
$2\pi R(R - x) = \pi(R + x)^2 \Rightarrow x^2 + 4Rx - R^2 = 0 \Rightarrow x = 2R(\sqrt{5} - 2)$

5) (Cesgranrio-RJ) Supondo a Terra esférica de centro C, o comprimento do paralelo PP', mostrado na figura, é a metade do comprimento do Equador EE'. A latitude $P\hat{C}E$ do paralelo é:



(A) 30°

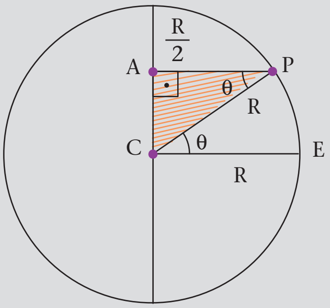
(B) 40°

(C) 45°

(D) 60°

(E) 70°

Solução:



$\triangle PAC: \cos\theta = \dfrac{\frac{R}{2}}{R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60°$

Resposta: D

6) (Cesgranrio-RJ) Macapá e Porto Alegre estão situadas sobre o mesmo meridiano. A primeira cidade está sobre a linha do Equador e a segunda tem latitude de 30° Sul, contada a partir do Equador. Suposta a Terra esférica, com circunferência máxima de 40 000 km, a melhor aproximação da distância entre as duas cidades, ao longo do meridiano, vale:

(A) 3 101 km

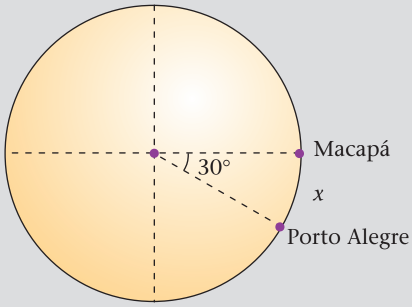
(B) 3 152 km

(C) 3 180 km

(D) 3 254 km

(E) 3 333 km

Solução:



$360° \text{ ——— } 40\,000 \text{ km}$

$30° \text{ ——— } x$

$x = \dfrac{30 \cdot 40\,000}{360} \cong 3\,333 \text{ km}$

Resposta: E

7) (USP) Dois semiplanos tangentes a uma esfera de raio unitário formam um diedro de medida a. A corda por eles interceptada mede:

(A) cos a

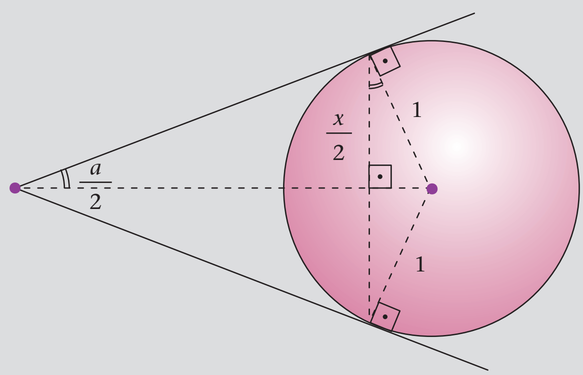
(B) tg a

(C) $2\cos\left(\frac{a}{2}\right)$

(D) $2\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right)$

(E) n.d.a.

Solução:



$$\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\frac{x}{2}}{1}$$

$$x = 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)$$

Resposta: C

8) (Unesp-SP) Dois planos que se interceptam segundo a reta r também cortam uma esfera segundo as circunferências de centros O_1 e O_2. Tais centros distam de r, respectivamente, 13 e 14. Se o raio da circunferência de centro O_1 mede 3, então o raio da circunferência de centro O_2 mede:

(A) 4

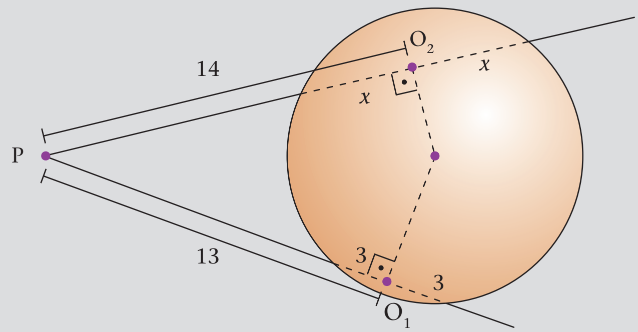
(B) 6

(C) 8

(D) 9

(E) 12

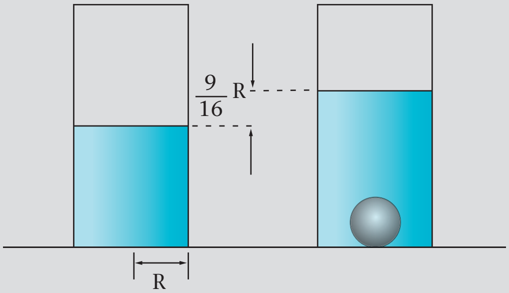
Solução:



($r \perp$ plano do papel em P)

Usando potência do ponto P em relação à circunferência:
$(14 - x)(14 + x) = (13 - 3)(13 + 3)$
$x = 6$
Resposta: B

9) (Cesgranrio-RJ) Um tanque cilíndrico com água tem raio da base R. Mergulha-se nesse tanque uma esfera de aço e o nível da água sobe $\frac{9}{16}$R (vide figura). O raio da esfera é:



(A) $\frac{3R}{4}$

(B) $\frac{9R}{16}$

(C) $\frac{3R}{5}$

(D) $\frac{R}{2}$

(E) $\frac{2R}{3}$

Solução:
O volume da esfera é igual ao da água deslocada. Então:
$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \left(\pi R^2\right)\cdot\frac{9}{16}R \Rightarrow r^3 = \frac{27}{64}R^3 \Rightarrow r = \frac{3}{4}R$$
Resposta: A

10) (FCMSC-SP) Um octaedro regular está inscrito numa esfera cujo raio mede $3\sqrt{2}$ cm. O volume desse octaedro, em cm³, é:

(A) 36

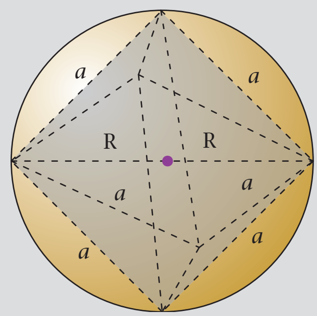
(B) 216

(C) $216\sqrt{2}$

(D) $108\sqrt{2}$

(E) $72\sqrt{2}$

Solução:



$$2R = a\sqrt{2}$$

$$2 \cdot 3\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow a = 6$$

$$V_{oct} = \frac{(a^3)\sqrt{2}}{3} = \frac{(6^3)\sqrt{2}}{3} = 72\sqrt{2}$$

Resposta: E

11) (ITA-SP) Uma esfera de raio $r = \sqrt{3}$ cm está inscrita num prisma hexagonal regular que, por sua vez, está inscrito numa esfera de raio R. Pode-se afirmar que a medida do raio R vale, em cm:

(A) $\sqrt{7}$

(B) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

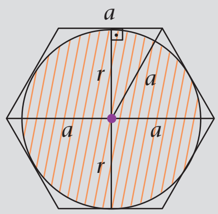
(C) $2\sqrt{3}$

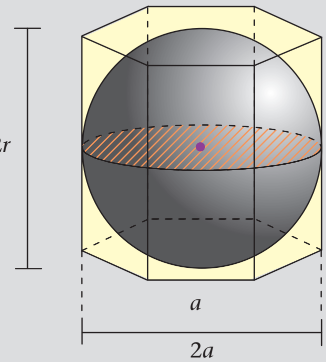
(D) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

(E) $4\sqrt{3}$

Solução:

Secção transversal pelo centro da esfera inscrita:





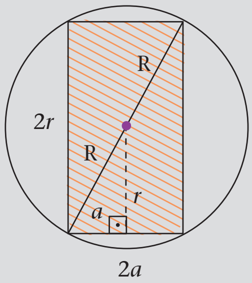
$r = \sqrt{3}$ cm

$r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \dfrac{2r}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = 2$ cm

Altura do prisma:

$h = 2r = 2\sqrt{3}$ cm

Secção vertical, com a esfera circunscrita:



$R^2 = r^2 + a^2$

$R^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2$

$R^2 = 7$

$R = \sqrt{7}$ cm

Resposta: A

12) (ITA-SP) Considere uma esfera inscrita num cone circular reto tal que a área da superfície total do cone é n vezes a área da superfície da esfera, $n > 1$. Se o volume da esfera é r cm³ e se a área da base do cone é s cm², o comprimento em centímetros da altura do cone é dado por:

(A) $\dfrac{r}{s}$

(B) $\dfrac{nr}{s}$

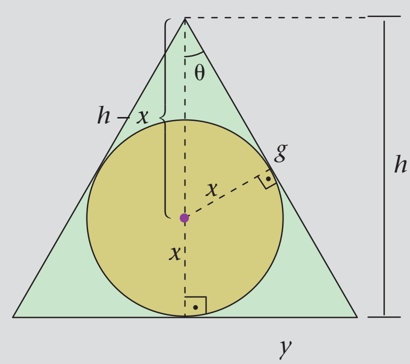
(C) $\dfrac{2nr}{s}$

(D) $\dfrac{3nr}{s}$

(E) $\dfrac{4nr}{s}$

<u>Solução:</u>

Vista frontal.



$$\left.\begin{array}{l} S_{cone} = n \cdot S_{esf} \Rightarrow \pi y^2 + \pi y g = n 4\pi x^2 \\ V_{esf} = r \Rightarrow \dfrac{4}{3}\pi x^3 = \mathrm{r} \\ S_{\text{base cone}} = s \Rightarrow \pi y^2 = s \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{s}{\pi},\ x^3 = \frac{3r}{4\pi} \text{ e } y(y+g) = 4nx^2$$

$$\text{Temos : sen } \theta = \frac{y}{g} = \frac{x}{h-x} \Rightarrow h = x + \frac{gx}{y} \Rightarrow h = \frac{x(y+g)}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{xy(y+g)}{y^2} \Rightarrow h = \frac{x \cdot 4nx^2}{y^2} \Rightarrow h = \frac{4nx^3}{y^2} = \frac{4n\left(\dfrac{3r}{4\pi}\right)}{\left(\dfrac{s}{\pi}\right)} \Rightarrow h = \frac{3nr}{s}$$

<u>Resposta</u>: D

13) (ITA-SP) Um cone equilátero está inscrito em uma esfera de raio 4 cm. Cortam-se os sólidos (esfera e cone) por um plano paralelo à base, de modo que a diferença entre as áreas das secções seja igual à área da base do cone. O raio da secção do cone é:

(A) $2\sqrt{3}$ cm

(B) $\sqrt{3}$ cm

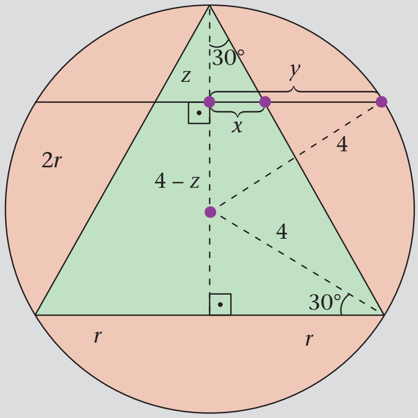
(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ cm

(D) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm

(E) n.d.a.

<u>Solução:</u>

Vista frontal.



$$\left.\begin{array}{l} \cos 30° = \dfrac{r}{4} \Rightarrow r = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \\ y^2 + (4-z)^2 = 4^2 \\ \operatorname{tg} 30° = \dfrac{x}{z} \Rightarrow z = x\sqrt{3} \\ \pi y^2 - \pi x^2 = \pi r^2 \Rightarrow y^2 = x^2 + r^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \sqrt{3}$$

<u>Resposta</u>: B

14) (USP) Um cone de vértice no centro de uma esfera de raio R intersecta a superfície esférica segundo uma região de área S. A intersecção do cone com a esfera tem volume igual a:

(A) $\dfrac{1}{2} \cdot \pi SR$

(B) $\dfrac{1}{3} \cdot \pi SR$

(C) $\dfrac{1}{2} \cdot SR$

(D) $\dfrac{1}{3} \cdot SR$

(E) n.d.a.

Solução:

O volume V da intersecção do cone com a esfera é proporcional à área S. Então:

$$\begin{matrix} S & \text{——} & V \\ 4\pi R^2 & \text{——} & \frac{4}{3}\pi R^3 \end{matrix} \Rightarrow V = \frac{S \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} \Rightarrow V = \frac{1}{3}SR$$

Resposta: D

Observação: Tal intersecção é constituída de um cone mais um segmento esférico, cujos volumes somam $\frac{1}{3}$SR.

15) (ITA-SP) Consideremos uma esfera de raio $r = 1$ cm e um ponto P fora desta esfera. Sabemos que a distância deste ponto P à superfície da esfera mede 2 cm. Qual é a razão k entre a área da superfície da esfera e a da calota visível do ponto P?

(A) $k = 1$

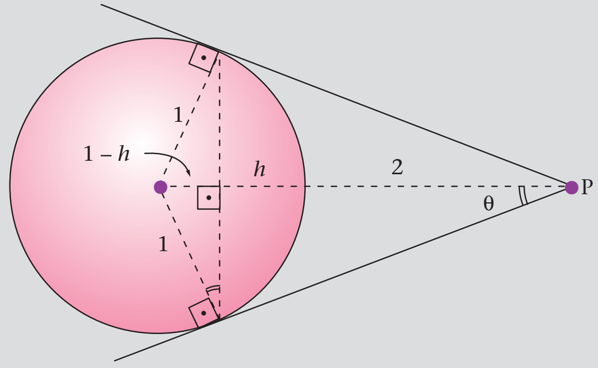
(B) $k = 2$

(C) $k = 3$

(D) $k = \frac{5}{2}$

(E) n.d.a.

Solução:



$$\text{sen}\,\theta = \frac{1-h}{1} = \frac{1}{1+2} \Rightarrow h = \frac{2}{3}$$

$$k = \frac{S_e}{S_c} = \frac{4\pi \cdot 1^2}{2\pi \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}} = 3$$

Resposta: C

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (Unificado-RJ) A razão entre os volumes de uma esfera de raio R e um cilindro equilátero de raio 2R é:

(A) $\frac{3}{4}$

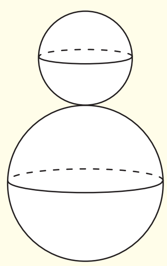
(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{6}$

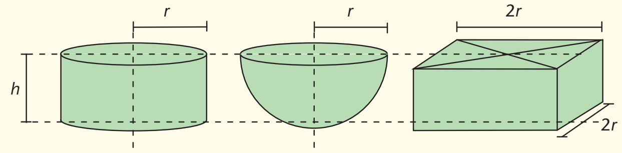
(E) $\frac{1}{12}$

2 (UFRJ) Ping Oin recolheu 4,5 m³ de neve para construir um grande boneco de 3 m de altura, em comemoração à chegada do verão no Polo Sul.
O boneco será composto por uma cabeça e um corpo, ambos em forma de esfera, tangentes, sendo o corpo maior que a cabeça, conforme mostra a figura a seguir.
Para calcular o raio de cada uma das esferas, Ping Oin aproximou π por 3.



Calcule, usando a aproximação considerada, os raios das duas esferas.

3 (UFF-RJ) Na figura estão representados três sólidos de mesma altura *h* – um cilindro, uma semiesfera e um prisma de base quadrada – cujos volumes são V_1, V_2 e V_3, respectivamente.



A relação entre V_1, V_2 e V_3 é:

(A) $V_3 < V_2 < V_1$

(B) $V_2 < V_3 < V_1$

(C) $V_1 < V_2 < V_3$

(D) $V_3 < V_1 < V_2$

(E) $V_2 < V_1 < V_3$

4 (Uerj) A superfície de uma esfera pode ser calculada pela fórmula $4\pi R^2$, onde R é o raio da esfera. Sabe-se que $\frac{3}{4}$ da superfície do planeta Terra são cobertos por água e $\frac{1}{3}$ da superfície restante é coberto por desertos. Considere o planeta Terra esférico, com seu raio de 6 400 km e use π igual a 3.

A área dos desertos, em milhões de quilômetros quadrados, é igual a:

(A) 122,88

(B) 81,92

(C) 61,44

(D) 40,96

5 (UFF-RJ) Considere *r* e *s* duas retas ortogonais e $\overline{MN}$ um segmento de reta contido em *r*. Pode-se afirmar, quanto à existência de esferas de centros na reta *s* que passam por M e N, que:

(A) existem duas únicas.

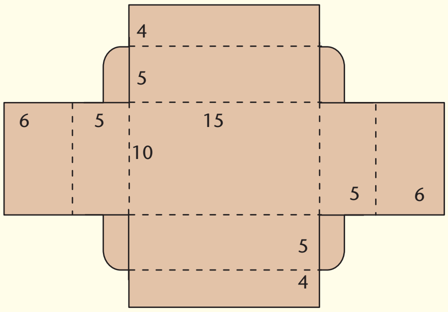
(B) existem, no máximo, três.

(C) existe uma infinidade.

(D) não existe nenhuma.

(E) se existir uma, existirá uma infinidade.

6 (Enem) Um fabricante de brinquedos recebeu o projeto de uma caixa que deverá conter cinco pequenos sólidos, colocados na caixa por uma abertura em sua tampa. A figura representa a planificação da caixa, com as medidas dadas em centímetros.



Os sólidos são fabricados nas formas de:

I) um cone reto de altura 1 cm e raio da base 1,5 cm;

II) um cubo de aresta 2 cm;

III) uma esfera de raio 1,5 cm;

IV) um paralelepípedo retangular reto, de dimensões 2 cm, 3 cm e 4 cm;

V) um cilindro reto de altura 3 cm e raio da base 1 cm.

O fabricante não aceitou o projeto, pois percebeu que, pela abertura dessa caixa, só poderia colocar os sólidos dos tipos:

(A) I, II e III.

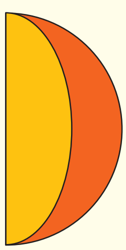
(B) I, II e V.

(C) I, II, IV e V.

(D) II, III, IV e V.

(E) III, IV e V.

7 (Cesgranrio-RJ) Uma laranja pode ser considerada uma esfera de raio R, composta por 12 gomos exatamente iguais.



A superfície total de cada gomo mede:

(A) $2\pi R^2$

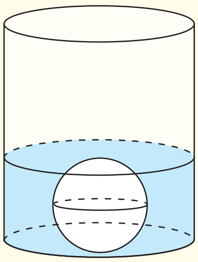
(B) $4\pi R^2$

(C) $\frac{3\pi}{4}R^2$

(D) $3\pi R^2$

(E) $\frac{4\pi}{3}R^2$

8 (UFRGS-RS) Uma esfera de raio 2 cm é mergulhada num copo cilíndrico de 4 cm de raio, até encostar no fundo, de modo que a água do copo recubra exatamente a esfera.



Antes de a esfera ser colocada no copo, a altura de água era:

(A) $\frac{27}{8}$ cm

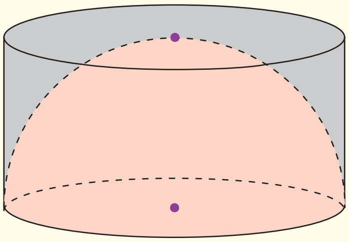
(B) $\frac{19}{6}$ cm

(C) $\frac{18}{5}$ cm

(D) $\frac{10}{3}$ cm

(E) $\frac{7}{2}$ cm

9 Os raios de uma semiesfera e de um cilindro de revolução são iguais à altura desse cilindro, como mostra a figura:



Se a área lateral do cilindro mede 12π cm², então a área total da semiesfera, em cm², é igual a:

(A) 24π

(B) 20π

(C) 18π

(D) 16π

(E) 12π

10 (Cescem-SP) Três esferas de raios 1, 1 e 4 são tangentes exteriormente duas a duas e tangentes ao plano α nos pontos A, B e C respectivamente. Os lados do triângulo ABC medem:

(A) 5, 5 e 2

(B) 4, 2 e 2

(C) 4, 4 e 2

(D) com os dados não é possível calculá-los.

(E) nenhuma das respostas anteriores.

11 Uma esfera é cortada por dois planos paralelos afastados de 9 cm. As intersecções dos planos com a esfera são círculos de raios iguais a $3\sqrt{6}$ cm e 9 cm. A superfície da esfera, em cm², é:

(A) 360π

(B) 270π

(C) 240π

(D) 180π

(E) 90π

12 (Ufam) Um plano secciona uma esfera determinando um círculo de 16π cm² de área. Sabendo-se que o plano dista 3 cm do centro da esfera, então o volume da esfera é igual a:

(A) $\frac{100\pi}{3}$ cm³

(B) $\frac{125\pi}{3}$ cm³

(C) 150π cm³

(D) $\frac{500\pi}{3}$ cm³

(E) 200π cm³

13 (Cescem-SP) Uma cunha esférica de raio 1 m tem volume de 1 m³. Seu ângulo diedro mede:

(A) 1,5 rd

(B) $\frac{\pi}{2}$ rd

(C) $\sqrt{2}$ rd

(D) $\frac{3\pi}{4}$ rd

(E) π rd

14 A área da superfície de uma esfera cresce 4,04% quando o raio dessa esfera sofre um aumento de:

(A) 3%

(B) 2,5%

(C) 2,2%

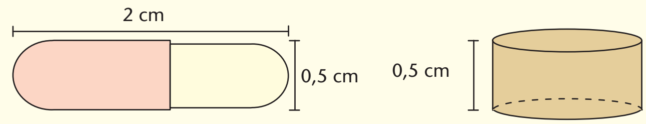
(D) 2%

(E) 1,5%

15 Como deve ser alterado o raio de uma cesta de basquete se o volume da bola for alterado por um fator multiplicativo α? Não leve em conta a folga existente entre a cesta e a bola.

O texto abaixo refere-se às questões 16 a 19.

A razão na qual um comprimido de vitamina C começa a dissolver-se depende da área da superfície do comprimido. Uma marca de comprimido tem forma cilíndrica, comprimento 2 centímetros, com hemisférios de diâmetro 0,5 centímetro cada extremidade, conforme figura a seguir. Uma segunda marca de comprimido vai ser fabricada em forma cilíndrica, com 0,5 centímetro de altura.



16 (Faap-SP) Determine a área de superfície do primeiro comprimido (em cm²), sabendo-se que:

- comprimento da circunferência: $C = 2\pi R$;
- área de superfície esférica: $A = 4\pi R^2$.

(A) $\frac{3\pi}{4}$

(B) 3π

(C) $\frac{3\pi}{2}$

(D) 2π

(E) π

17 (Faap-SP) Determine o diâmetro do segundo comprimido de modo que o seu volume seja igual ao do primeiro comprimido.

(A) 1

(B) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{12}}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$

(D) $\frac{1}{2}$

(E) $\frac{3}{4}$

18 (Faap-SP) Determine o volume do primeiro comprimido (em cm³), sabendo-se que:

- volume da esfera: $V = \frac{4\pi R^3}{3}$;
- volume do cilindro: $V = \pi R^2 H$.

(A) $\frac{\pi}{8}$

(B) $\frac{7\pi}{96}$

(C) $\frac{7\pi}{48}$

(D) $\frac{11\pi}{96}$

(E) $\frac{11\pi}{48}$

19 (Faap-SP) Determine o diâmetro do segundo comprimido de modo que a área de sua superfície seja igual à do primeiro comprimido.

(A) 2,0 cm

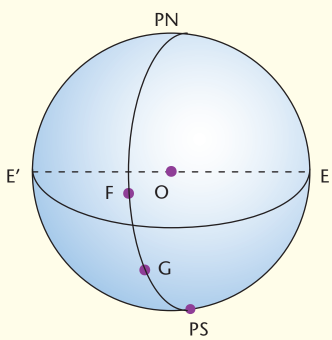
(B) 1,5 cm

(C) 2,5 cm

(D) 0,5 cm

(E) 1,0 cm

20 Admitamos que a Terra seja esférica, conforme a representação abaixo, e que sua circunferência máxima tenha comprimento 4×10^4 km.



Se as cidades F e G têm a mesma longitude e latitude 9° N e 27° S, respectivamente, então a distância de F a G, medida sobre o meridiano, vale:

(A) 3 200 km

(B) 3 600 km

(C) 3 800 km

(D) 4 000 km

(E) 4 200 km

21 (Enem) As cidades de Quito e Cingapura encontram-se próximas à linha do equador e em pontos diametralmente opostos no globo terrestre. Considerando o raio da Terra igual a 6 370 km, pode-se afirmar que um avião saindo de Quito, voando em média 800 km/h, descontando as paradas de escala, chega a Cingapura em aproximadamente:

(A) 16 horas

(B) 20 horas

(C) 25 horas

(D) 32 horas

(E) 36 horas

22 (Cescem-SP) Supondo a Terra esférica com circunferência meridiana de 40 000 km, a área de um fuso horário é de:

(A) $\frac{32}{3\pi^2} 10^{12}$ km^2

(B) $\frac{4}{9\pi^2} 10^{12}$ km^2

(C) $\frac{2}{3\pi} 10^{8}$ km^2

(D) $\frac{4}{3}\pi 10^{8}$ km^2

(E) $\frac{4}{3}\pi^2 10^{12}$ km^2

23 (Puccamp-SP) Considere as sentenças:

I) Se um plano intercepta uma superfície esférica, a intersecção é um ponto ou uma circunferência.

II) Se os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são dois diâmetros de uma esfera, então o quadrilátero ABCD é um retângulo.

III) Todo plano tangente a uma superfície esférica é perpendicular ao raio que contém o ponto de tangência.

É correto afirmar que:

(A) somente I é verdadeira.

(B) somente II é verdadeira.

(C) somente III é verdadeira.

(D) somente I e III são verdadeiras.

(E) I, II e III são verdadeiras.

24 (UEL-PR) Considere três planos que sejam dois a dois perpendiculares entre si e esferas com 10 cm de raio. Quantas dessas esferas poderão tangenciar simultaneamente os três planos?

(A) Uma.

(B) Duas.

(C) Quatro.

(D) Oito.

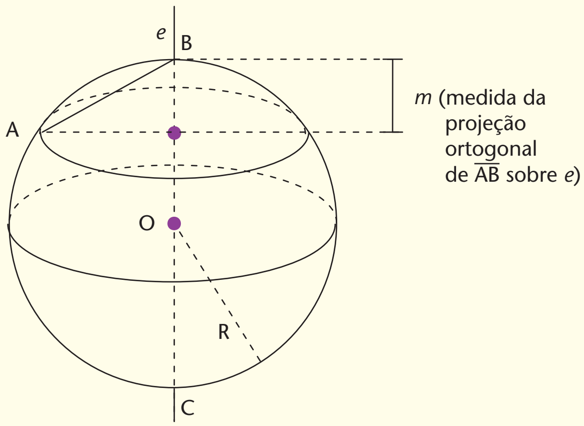
(E) Infinitas.

25 (UFPE) Derretendo uma peça maciça de ouro de forma esférica, quantas peças da mesma forma se pode

confeccionar com esse ouro, se o raio das novas peças é um terço do raio da anterior? Admita que não houve perda de ouro durante o derretimento.

(A) 3
(B) 9
(C) 18
(D) 21
(E) 27

26 (Uerj)



Na figura acima, há um círculo de raio R e uma reta *e* que contém o seu centro – ambos do mesmo plano. Fez-se uma rotação de uma volta desse círculo ao redor da reta *e*. O menor arco AB nele assinalado descreveu a superfície de uma calota esférica, cuja área pode ser calculada através da fórmula $2\pi Rm$, sendo *m* a projeção ortogonal do arco AB sobre a reta *e*.

a) Calcule o comprimento da corda AB, do círculo original, em função de R e *m*.

b) Demonstre que a área da calota esférica gerada pelo arco AB é equivalente à área plana limitada por uma circunferência de círculo cujo raio tem a mesma medida da corda AB.

27 (Unicamp-SP) Em uma pirâmide de base quadrada, as faces laterais são triângulos equiláteros e todas as oito arestas são iguais a 1.

a) Calcule a altura e o volume da pirâmide.

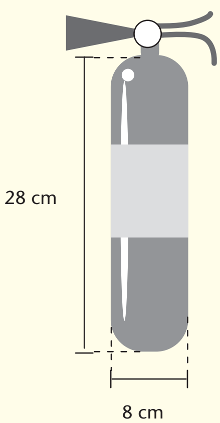
b) Mostre que a esfera centrada no centro da base da pirâmide, e que tangencia as arestas da base, também tangencia as arestas laterais.

c) Calcule o raio do círculo intersecção da esfera com cada face lateral da pirâmide.

28 (UFRGS-RS) O volume de uma esfera A é $\frac{1}{8}$ do volume de uma esfera B. Se o raio da esfera B mede 10, então o raio da esfera A mede:

(A) 5
(B) 4
(C) 2,5
(D) 2
(E) 1,25

29 (Cesgranrio-RJ) Os extintores de incêndio vendidos para automóveis têm a forma de uma cápsula cilíndrica com extremidades hemisféricas, conforme indica a figura. Eles são feitos de ferro e contêm cerca de 1 litro de CO_2, sob pressão de 2,8 atmosferas na temperatura de 21 °C. A fórmula do volume da esfera é $\frac{4\pi R^3}{3}$. Considere, para efeito de cálculo, $\pi = 3$ e que o CO_2 se comporte como um gás ideal.



O volume de ferro utilizado na confecção da cápsula, em cm³, é de, aproximadamente:

(A) 108
(B) 216
(C) 288
(D) 312
(E) 356

30 (Vunesp-SP) Uma circunferência contida na superfície de uma esfera diz-se circunferência máxima da esfera se seu raio é igual ao raio da esfera. Assim, pode-se afirmar que:

(A) toda circunferência contida na superfície de uma esfera é uma circunferência máxima da esfera.

(B) um plano e uma esfera que se cortam ou têm um único ponto em comum ou sua intersecção contém uma circunferência máxima da esfera.

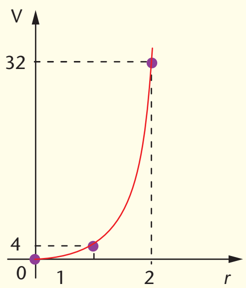
(C) os planos determinados por duas circunferências máximas distintas de uma mesma esfera são necessariamente secantes e sua intersecção contém um diâmetro comum às duas.

(D) dadas duas esferas concêntricas distintas, uma circunferência máxima de uma e uma circunferência máxima da outra são necessariamente circunferências concêntricas coplanares.

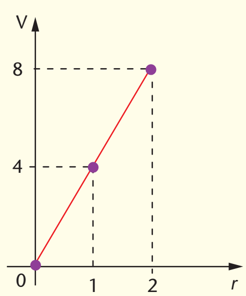
(E) duas circunferências máximas de uma mesma esfera estão necessariamente contidas em planos perpendiculares.

31 (Ufal) Sabe-se que o volume V de uma esfera de raio r é dado pela expressão $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$. Dos gráficos a seguir, aquele que mais se aproxima do gráfico do volume de uma esfera em função do seu raio é:

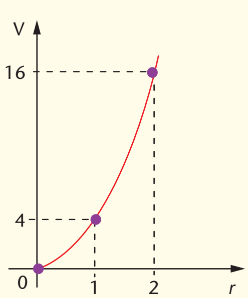
(A)



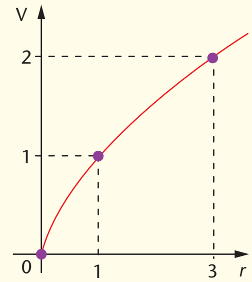
(B)



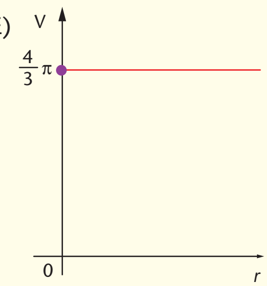
(C)



(D)



(E)



32 (Vunesp-SP) Seja r um número real positivo e P um ponto do espaço. O conjunto formado por todos os pontos do espaço, que estão a uma distância de P menor ou igual a r, é:

(A) um segmento de reta medindo $2r$ e tendo P como ponto médio.

(B) um cone cuja base é um círculo de centro P e raio r.

(C) um cilindro cuja base é um círculo de centro P e raio r.

(D) uma esfera de centro P e raio r.

(E) um círculo de centro P e raio r.

33 (UFR-RJ) Na famosa cidade de Sucupira, foi feito um monumento de concreto com pedestal em forma de uma esfera de raio igual a 5 m, em homenagem ao anti-herói “Zeca Diabo”.
O cidadão “Nezinho do Jegue” foi informado de que, apesar de o preço do metro cúbico do concreto ser 260 reais, o custo total do concreto do pedestal, feito com dinheiro público, foi de 500 mil reais. Nezinho do Jegue verificou, então, que houve um superfaturamento:

(A) menor que 50 mil reais.

(B) entre 50 e 200 mil reais.

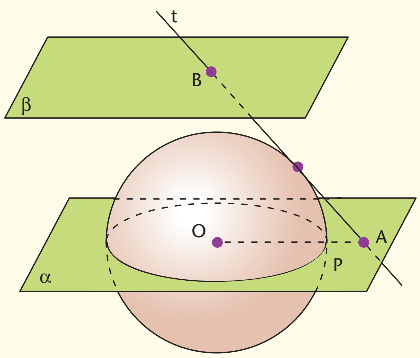
(C) entre 200 e 300 mil reais.

(D) entre 300 e 400 mil reais.

(E) acima de 400 mil reais.

Observação: Considere $\pi = 3{,}14$.

34 (UEL-PR) Na figura a seguir têm-se uma esfera de raio 5 cm e os planos paralelos α e β. O plano α contém o centro O da esfera e dista 10 cm de β. Uma reta *t*, tangente à esfera, intercepta α em A e β em B.



Se o segmento AB mede 18 cm e o plano determinado pelos pontos A, B e O é perpendicular a α e a β, então a medida do segmento OA, em centímetros, é:

(A) 9

(B) 8,5

(C) 8

(D) 7,5

(E) 7

35 (UFR-RJ) Sendo S uma esfera de raio *r*, o valor pelo qual deveríamos multiplicar *r*, a fim de obtermos uma nova esfera S′, cujo volume seja o dobro do volume de S, é:

(A) $\sqrt[3]{2}$

(B) $2\sqrt[3]{2}$

(C) 2

(D) 3

(E) $\sqrt{3}$

36 (Cescem-SP) A área da intersecção de um plano com uma bola de raio 13 é 144π. A distância do plano ao centro da bola é:

(A) 1

(B) 5

(C) 8

(D) 12

(E) 25

37 (USP) Dadas duas esferas tangentes e de raios respectivamente 1 e 2, o volume do cone reto circunscrito a essas duas esferas é:

(A) 16π

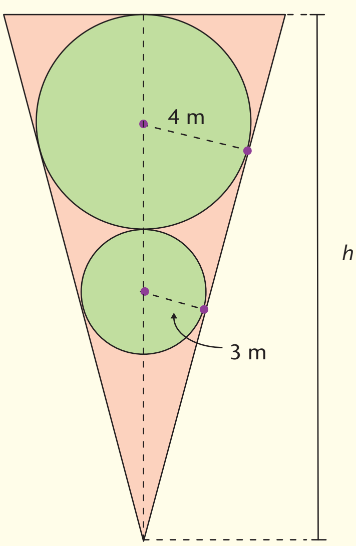
(B) $32\sqrt{2}\pi$

(C) 27π

(D) $\frac{64}{3}\pi$

(E) 32π

38 (Cescem-SP) Duas esferas de raios 3 m e 4 m têm centro no eixo do cone da figura, são tangentes entre si e ao cone.



A altura *h* do cone mede:

(A) $512\frac{\sqrt{3}}{7}$ m

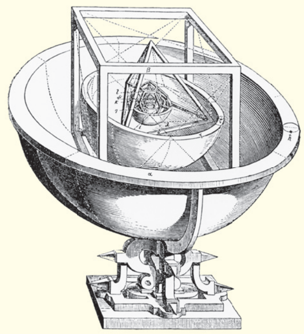
(B) $32\sqrt{\frac{6}{7}}$ m

(C) $32\left(\sqrt{\frac{6}{7}} + \sqrt{\frac{1}{42}}\right)$ m

(D) 32 m

(E) 21 m

39 (Uerj) O modelo astronômico heliocêntrico de Kepler, de natureza geométrica, foi construído a partir dos cinco poliedros de Platão, inscritos em esferas concêntricas, conforme ilustra a figura abaixo.



SPL/Latinstock

Ilustração do *Mysterium Cosmographicum* de Johannes Kepler, 1609.

A razão entre a medida da aresta do cubo e a medida do diâmetro da esfera a ele circunscrita é:

(A) $\sqrt{3}$

(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

40 (ITA-SP) Seja S uma semiesfera de raio R dado. Sejam p e q dois planos paralelos e distantes entre si $\frac{R}{2}$ e tais que interceptem S paralelamente à sua base. Seja T o tronco do cone com bases b e c, onde b e c são intersecções de p e q com S. Seja x o valor da menor das distâncias d e D, onde d é a distância entre p e a base de S, e D é a distância entre q e a base de S.

Seja k $\left[(R^2 - x^2)\left(R^2 - \left(x + \frac{R}{2}\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

Então o volume de T, como função de x, $0 \leqslant x \leqslant \frac{R}{2}$, vale:

(A) $\frac{\pi R}{6}\left(\frac{7}{4}R^2 - 2x^2 - Rx + K\right)$

(B) $\frac{\pi R}{12}\left(\frac{7}{4}R^2 - 2x^2 - Rx + K\right)$

(C) $\frac{\pi R}{12}\left(\frac{7}{4}R^2 - 2x^2 - Rx - K\right)$

(D) $\frac{\pi R}{6}\left(\frac{7}{4}R^2 - 2x^2 - Rx - K\right)$

(E) n.d.a.

41 (UFU-MG) Em um cubo de aresta a considere um ponto P situado em uma das arestas, e que dista $\frac{a}{4}$ de um dos vértices do cubo. Chame de O o centro da esfera inscrita no cubo e de Q o ponto da esfera situado sobre o segmento OP. A distância de P a Q é igual a:

(A) $\frac{a}{8}$

(B) $\frac{a}{4}$

(C) $\frac{a}{4}\left(\sqrt{5} - 2\right)$

(D) $\frac{a}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$

42 (USP) A área de uma esfera, a área total do cilindro equilátero circunscrito a ela e a área total do cone equilátero também circunscrito a essa esfera são proporcionais aos números:

(A) 1, 2, 3

(B) 0, 1, $\frac{1}{2}$

(C) 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}

(D) π, π^2, π^3

(E) 4, 6, 9

43 (Mack-SP) A altura de um cone reto é igual ao raio da esfera a ele circunscrita. Então o volume da esfera é:

(A) o dobro do volume do cone.

(B) o triplo do volume do cone.

(C) o quádruplo do volume do cone.

(D) $\frac{4}{3}$ do volume do cone.

(E) $\frac{8}{3}$ do volume do cone.

44 (Mack-SP) A razão entre a área lateral do cilindro equilátero e a área da superfície esférica nele inscrita é:

(A) 1

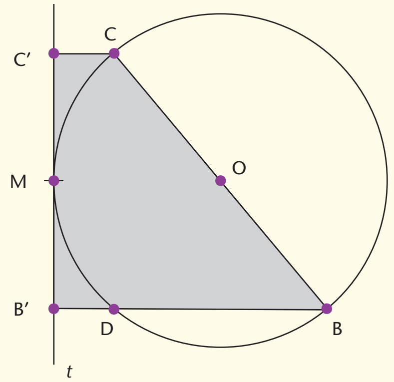
(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{1}{4}$

(E) $\frac{2}{3}$

45 (ITA-SP) Seja $\overline{B'C'}$ a projeção do diâmetro $\overline{BC}$ de um círculo de raio r sobre a reta tangente t por um ponto M deste círculo. Seja $2k$ a razão da área total do tronco do cone gerado pela rotação do trapézio BCB′C′ ao redor da reta tangente t e a área do círculo dado. Qual é o valor de k para que a medida do segmento $\overline{MB'}$ seja igual a metade do raio r?



(A) $k = \frac{11}{3}$

(B) $k = \frac{15}{4}$

(C) 2

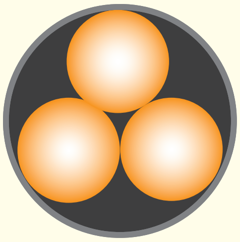
(D) $k = \frac{1}{3}$

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

46 (Cescea-SP) Um reservatório cilíndrico de raio 3 m e altura 6 m estava totalmente cheio de água. Uma esfera de raio 2 m foi completamente imersa no reservatório. Após a imersão da esfera, permaneceu no reservatório X% da água inicialmente existente. Então, entre os valores abaixo, assinale o que mais se aproxima de X:

(A) 79,1
(B) 80,24
(C) 81,12
(D) 81,28
(E) Não sei.

47 (Cefet-PR) Uma indústria de cosméticos deseja embalar sabonetes esféricos de raio 3 cm. A embalagem deverá ter formato cilíndrico de forma a acondicionar 3 sabonetes, como mostra a figura (vista superior da embalagem aberta).

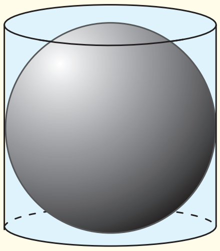


A medida do raio e a altura da embalagem, em cm, deverão ser de, aproximadamente:

(A) 6,73 e 3.
(B) 3,46 e 6.
(C) 6,73 e 6.
(D) 6,46 e 6.
(E) 6,46 e 3.

Dado: $\sqrt{3} = 1{,}73$.

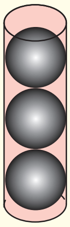
48 (UCDB-MS) Um cilindro equilátero de volume V m^3 encontra-se cheio de água, quando uma esfera, cujo raio coincide com o raio da base do cilindro, é mergulhada completamente no cilindro fazendo transbordar certa quantidade de água.



Nessas condições, o volume, em m^3, de água restante no cilindro é igual a:

(A) 0
(B) $\frac{V}{4}$
(C) $\frac{V}{3}$
(D) $\frac{V}{2}$
(E) $\frac{3V}{4}$

49 (Cefet-PR) A indústria de bolas de borracha Cilimbola quer produzir embalagens cilíndricas para colocar 3 bolas com 3 cm de raio cada, conforme a figura.



A quantidade total de material utilizado para o fabrico da embalagem, incluindo a tampa, em cm^2, será de:

(A) 126π
(B) 108π
(C) 127π
(D) 72π
(E) 90π

50 (ITA-SP) Considere um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência de raio R tal que a projeção de um dos catetos sobre a hipotenusa vale $\frac{R}{m}(m \geq 1)$. Considere a esfera gerada pela rotação desta circunferência

em torno de um de seus diâmetros. O volume da parte desta esfera, que não pertence ao sólido gerado pela rotação do triângulo em torno da hipotenusa, é dado por:

(A) $\frac{2}{3}\pi R^3\left(\frac{m-1}{m}\right)^2$

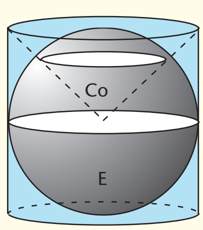
(B) $\frac{2}{3}\pi R^3\left[1-\left(\frac{m+1}{m}\right)^2\right]$

(C) $\frac{2}{3}\pi R^3\left(\frac{m+1}{m}\right)^2$

(D) $\frac{2}{3}\pi R^3\left[1+\left(\frac{m-1}{m}\right)^2\right]$

(E) Nenhuma das alternativas anteriores.

51 (UFG-GO) Quando foi questor na Sicília, o orador romano Cícero encontrou e restaurou o túmulo abandonado de Arquimedes, no qual estava esculpido o diagrama, que aparece em seu trabalho *Sobre a esfera e o cilindro*, de uma esfera inscrita em um cilindro. A figura a seguir mostra uma esfera E, de raio R, inscrita num cilindro reto C, cujo raio da base é R e altura 2R e Co representa um cone de altura R e raio da base também R, com vértice no centro da esfera.



Com base nessa figura, julgue os itens.

1) A intersecção do cilindro e da esfera com um plano que contém o eixo do cilindro determina um círculo inscrito num quadrado.

2) A intersecção desse sólido com um plano paralelo à base do cilindro, que não intercepta o cone, a uma distância $d = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ do centro da esfera, determina dois círculos concêntricos de raios r e R, onde $r < R$. As áreas do círculo menor e da coroa circular são iguais.

3) O comprimento da circunferência determinada pela intersecção da superfície da esfera E com a superfície do cone Co é igual a $\pi\sqrt{2}R$.

4) O volume do sólido obtido pela intersecção da esfera com o cone Co é igual a $\frac{1}{4}$ do volume da esfera.

$$\left(\text{Sugestão: volume (Co)} = \frac{1}{6}\text{volume (C)}; \frac{\text{volume (C)}}{\text{volume (E)}} = \frac{3}{2}\right)$$

52 (Cescea-SP) O volume da esfera inscrita no cilindro equilátero de área lateral 36π cm² é:

(A) $\frac{4}{3}\pi$ cm³
(B) 36π cm³
(C) 12π cm³
(D) 3π cm³
(E) Não sei.

53 (UFV-MG) Considere as afirmações abaixo:

I) A esfera de volume igual a 12π cm³ está inscrita em um cilindro equilátero cujo volume é 24π cm³.

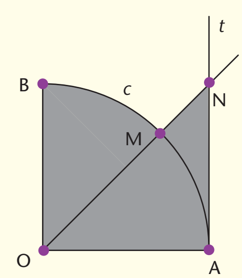
II) A esfera de raio $4\sqrt{3}$ cm circunscreve um cubo de volume igual a 64 cm³.

III) Dobrando o raio da base de um cilindro circular reto, o seu volume será quadruplicado.

Assinalando V para as afirmações verdadeiras e F para as afirmações falsas, obtém-se a seguinte sequência correta:

(A) V – F – V
(B) F – V – F
(C) V – V – F
(D) F – F – V
(E) V – V – V

54 (ITA-SP) Seja c um quarto de circunferência $\overset{\frown}{AB}$ de raio R e centro O, e seja t a reta tangente a c em A. Traça-se pelo centro O de c uma reta que corta c num ponto M, e corta a reta tangente num ponto N, distintos de A. Seja k a razão entre o volume gerado pelo setor OAM e o volume gerado pelo triângulo OAN, ambos obtidos girando-se de 2π em torno de $\overline{AO}$.



O comprimento do segmento $\overline{AN}$ é igual ao raio R se:

(A) $1 < k < 2{,}5$ (D) $0 < k < 1{,}5$

(B) $2{,}5 \leq k \leq 3$ (E) n.d.a.

(C) $0 < k \leq 2$

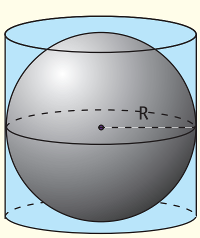
55 (UFC-CE) Um ponto L dista $2r$ unidades de comprimento do centro de uma circunferência cujo raio mede r unidades de comprimento. A partir de L conduza duas tangentes à circunferência e denote os pontos de tangência por P e T. Então, a área lateral do cone circular reto gerado pela rotação do triângulo LPT, tendo como eixo de rotação a mediana que parte de L, medida em unidades de área, é:

(A) πr^2 (D) $2\pi r^2$

(B) $\dfrac{3\pi r^2}{2}$ (E) $5\pi r^2$

(C) $\dfrac{\pi r^2}{2}$

56 (UFRGS-RS) A figura a seguir representa um cilindro circunscrito a uma esfera.



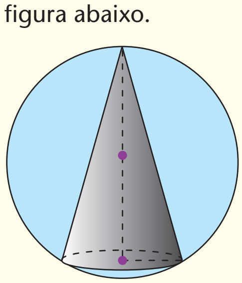
Se V_1 é o volume da esfera e V_2 é o volume do cilindro, então a razão $\dfrac{V_1}{V_2 - V_1}$ é:

(A) $\dfrac{1}{3}$ (D) 2

(B) $\dfrac{1}{2}$ (E) 3

(C) 1

57 (PUC-SP) Um cone circular reto, cujo raio da base é 3 cm, está inscrito em uma esfera de raio 5 cm, conforme mostra a figura abaixo.



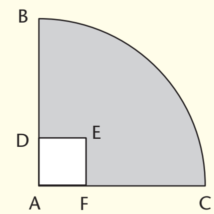
O volume do cone corresponde a que porcentagem do volume da esfera?

(A) 26,4% (D) 18,6%

(B) 21,4% (E) 16,2%

(C) 19,5%

58 (UFMG) Observe a figura abaixo. Nela, ABC é um quadrante de círculo de raio 3 cm e ADEF é um quadrado cujo lado mede 1 cm. Considere o sólido gerado pela rotação de 360°, em torno da reta AB, da região sombreada na figura.



Sabe-se que o volume de uma esfera de raio r é igual a $\dfrac{4\pi r^3}{3}$.

Assim sendo, esse sólido tem um volume de:

(A) 14π cm³ (C) 16π cm³

(B) 15π cm³ (D) 17π cm³

59 (FEI-SP) A base de uma pirâmide regular OABCD é um quadrado ABCD de lado 2 m e a altura da pirâmide é m. Uma superfície esférica de centro O e raio $R < m$ intercepta a pirâmide numa superfície de área:

(A) $\dfrac{\pi R^2}{\sqrt{2}}$

(B) $\dfrac{\pi R^2}{2}$

(C) πR^2

(D) $\dfrac{2\pi R^2}{3}$

(E) Nenhuma das anteriores.

60 (Cescem-SP) Em uma caixa cúbica de aresta 1 são colocadas N^3 esferas maciças, cada uma delas com diâmetro $\dfrac{1}{N}$, N inteiro, estritamente positivo. A diferença entre o volume do cubo e o volume ocupado pelas esferas é:

(A) igual a $1 - \frac{\pi}{3}$.

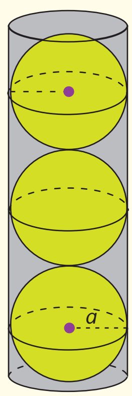
(B) igual a $1 - \frac{\pi}{6}$.

(C) igual a $1 - \frac{4\pi}{3}$.

(D) estritamente crescente com N.

(E) estritamente decrescente com N.

61 (UFSM-RS) Bolas de tênis são vendidas, normalmente, em embalagens cilíndricas contendo 3 unidades. Supondo-se que as bolas têm raio *a* em centímetros e tangenciam as paredes internas da embalagem, o espaço interno dessa embalagem que não é ocupado pelas bolas é, em cm³:



(A) $2\pi a^3$

(B) $\frac{4\pi a^3}{3}$

(C) $\frac{\pi a^3}{3}$

(D) a^3

(E) $\frac{2\pi a^3}{3}$

62 (Cice-RJ) Seja S a área total do cilindro equilátero inscrito numa esfera de área T e seja U a área total do cone equilátero inscrito na mesma esfera. Entre S, T, U, existe uma das seguintes relações. Assinale-a:

(A) $S + U = T$

(B) $T^2 = U \cdot S$

(C) $S^2 = U \cdot T$

(D) $U^2 = S \cdot T$

(E) $S = \frac{1}{2}(U^2 + T^2)$

63 (FEI-SP) Se uma esfera tem raio *r*, a esfera de volume duplo tem o raio:

(A) $2r$

(B) r^3

(C) $r\sqrt[3]{2}$

(D) πr

(E) $\frac{3}{2}r$

64 (USP) Uma esfera de raio 1 cm repousa sobre uma abertura em madeira, em forma de triângulo equilátero, de lado 2 cm; a altura da calota acima do plano de madeira é:

(A) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm

(B) $\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ cm

(C) 1,5 cm

(D) 1 cm

(E) Nenhuma das afirmações é verdadeira.

65 (USP) Um cone de vértice no centro de uma esfera de raio R intercepta a superfície esférica segundo uma região de área S. A intersecção do cone com a esfera tem volume igual a:

(A) $\frac{1}{2}\pi SR$

(B) $\frac{1}{3}\pi SR$

(C) $\frac{1}{2}SR$

(D) $\frac{1}{3}SR$

(E) n.r.a.

66 (PUC-RJ) O diâmetro de uma esfera mede 4 m; uma corda paralela a esse diâmetro mede 2 m. A área da superfície que se obtém girando a corda ao redor do diâmetro vale:

(A) $\frac{\pi}{2}\sqrt{3}$

(B) $\pi\sqrt{3}$

(C) $2\pi\sqrt{3}$

(D) $4\pi\sqrt{3}$

(E) $5\pi\sqrt{3}$

67 (Cefet-MG) Um recipiente cônico tem o diâmetro de sua tampa e as geratrizes com comprimentos iguais a 6 dm. Dentro deste recipiente está uma esfera sólida, que toca todas as geratrizes e a tampa. O restante está cheio de água, cujo volume, em litros, é igual a:

(A) $\pi\sqrt{3}$

(B) $4\pi\sqrt{3}$

(C) $5\pi\sqrt{3}$

(D) $9\pi\sqrt{3}$

(E) $23\pi\sqrt{3}$

68 Sendo S a área de uma superfície esférica e P a área lateral do cilindro circunscrito, tem-se:

(A) $S = P$

(B) $S < P$

(C) $P = 2S$

(D) $P = \dfrac{S\sqrt{3}}{2}$

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

69 (FCMSC-SP) A relação entre o volume e a área de uma mesma esfera é igual a 3 m. Pode-se então dizer que esta esfera:

(A) tem o volume três vezes maior que a área.

(B) tem volume três vezes maior que o volume da esfera de 1 m de raio.

(C) tem área três vezes maior que a área da esfera de 1 m de raio.

(D) tem raio de 3 m.

(E) tem área de 324π m^2.

70 (UFSC) Calcule a soma dos números associados às alternativas corretas.

(01) Quando exposta ao Sol, uma barra de metal com 30 m de comprimento aumenta em 1% o seu comprimento. Logo, essa barra de metal quando exposta ao Sol passa a medir 30,03 m.

(02) Uma parede de 4 m^2 pode ser revestida completamente com 50 azulejos de 20 cm por 40 cm.

(04) Quando se duplica o raio da base de um cone (mantendo fixa a altura), o seu volume fica quadruplicado, e quando se duplica a sua altura (mantendo fixo o raio da base), o seu volume fica duplicado.

(08) Se uma esfera com volume igual a 288π cm^3 está inscrita num cilindro equilátero, então a altura do cilindro é 12 cm.

71 (UEPG-PR) A relação entre o volume e a área de uma esfera é 1. Calcule a soma dos números associados às alternativas corretas.

(01) A área dessa esfera é igual a três vezes a área de uma esfera de 1 u.c. de raio.

(02) O raio dessa esfera vale 3 u.c.

(04) A aresta de um cubo circunscrito a essa esfera vale 6 u.c.

(08) Essa esfera pode ser inscrita num cilindro equilátero de altura 6 u.c.

(16) A geratriz de um cone cujo raio da base tem a mesma medida do raio dessa esfera e cuja altura é 4 u.c. vale 5 u.c.

72 (Cescem-SP) Em uma esfera de raio 2R, inscreve-se um cilindro cuja base tem raio R. A área lateral do cilindro vale:

(A) $3\pi\sqrt{2R^2}$

(B) $12\pi R^2$

(C) $8\pi R^2$

(D) $4\pi\sqrt{3R^2}$

(E) a metade da área da superfície esférica.

73 (PUC-RJ) O volume de um cone equilátero, circunscrito a uma esfera de raio R é:

(A) πR^3

(B) $3\pi R^3$

(C) $2\pi R^3$

(D) $4\pi R^3$

(E) $5\pi R^3$

74 (ITA-SP) Consideremos uma esfera de raio *r* e nela inscrevemos um cone reto cujo diâmetro da base tem comprimento igual ao da geratriz. O volume V do cone em função do raio da esfera verifica uma das afirmações abaixo. Assinale-a.

(A) $V = 3\pi r^3$

(B) $V = \dfrac{3}{8}\pi r^3$

(C) $V = \dfrac{2}{3}\pi r^3$

(D) $V = \dfrac{3}{2}\pi r^3$

(E) Nas condições dadas, não é possível obter o volume V em função do raio.

75 (Mack-SP) A razão entre o volume de um cone, de altura igual a 4 vezes o raio da esfera inscrita, e o volume desta esfera é:

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) $\dfrac{4}{3}$

(E) $\dfrac{5}{4}$

76 (ITA-SP) Um cone circular reto com altura de $\sqrt{8}$ cm e raio da base de 2 cm está inscrito numa esfera que, por sua vez, está inscrita num cilindro. A razão entre as áreas das superfícies totais do cilindro e do cone é igual a:

(A) $\frac{3(\sqrt{2}-1)}{2}$

(B) $\frac{9(\sqrt{2}-1)}{4}$

(C) $\frac{9(\sqrt{6}-1)}{4}$

(D) $\frac{27(\sqrt{3}-1)}{8}$

(E) $\frac{27(\sqrt{3}-1)}{16}$

77 (ITA-SP) Consideremos uma esfera de raio $r = 1$ cm e um ponto P fora desta esfera. Sabemos que a distância deste ponto P à superfície da esfera mede 2 cm. Qual é a razão K entre a área da superfície da esfera e a da calota visível do ponto P?

(A) K = 1

(B) K = 2

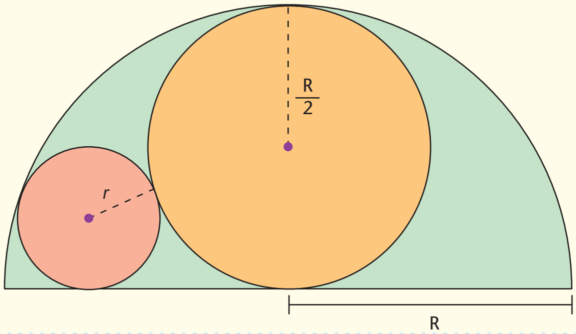
(C) K = 3

(D) $K = \frac{5}{2}$

(E) N.D.A.

78 (UFRJ) Um grupo de cientistas parte em expedição do Polo Norte e percorre 200 km em direção ao sul, onde estabelece um primeiro acampamento para realizar experiências. Após algum tempo, o grupo percorre 200 km em direção ao leste, onde instala o segundo acampamento para experimentos. Após três dias, o grupo parte em viagem e percorre 200 km em direção ao norte, onde estabelece o terceiro acampamento. Supondo que a superfície da Terra seja perfeitamente esférica, determine a distância entre o terceiro acampamento e o Polo Norte. Justifique sua resposta (faça um desenho, se preferir).

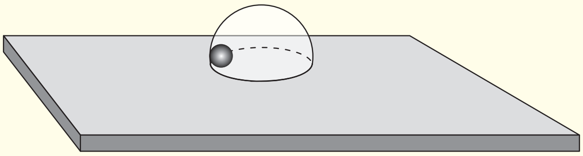
79 (UFRJ) Uma semiesfera de vidro, de raio interno R, é posta sobre uma mesa plana, conforme a figura. Entre as duas, é colocada ainda uma bola de raio $\frac{R}{2}$. No espaço remanescente (entre a semiesfera, a mesa e a bola), colocam-se bolas de raio r, de modo que r seja o maior possível.



a) Calcule r.

b) É possível colocar 8 bolas de raio r no espaço entre a semiesfera, a bola de raio $\frac{R}{2}$ e a mesa?

80 (Uerj) Uma cuba de superfície semiesférica, com diâmetro de 8 cm, está fixada sobre uma mesa plana. Uma bola de gude de forma esférica, com raio igual a 1 cm, encontra-se sob essa cuba.



Desprezando a espessura do material usado para fabricar a cuba, determine:

a) a maior área, em cm^2, pela qual a bola de gude poderá se deslocar na superfície da mesa;

b) o volume, em cm^3, da maior esfera que poderia ser colocada embaixo dessa cuba.

81 (Uerj) Uma esfera maciça de metal foi colocada dentro de uma caixa cúbica de plástico, sem folga (fig. A), e o espaço vazio preenchido com água. Uma outra caixa, igual à primeira, foi preenchida por 64 esferas congruentes maciças e do mesmo metal, sem folga (fig. B), e no espaço vazio colocou-se água.

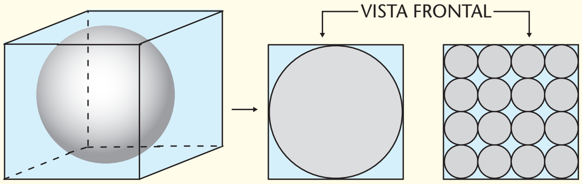


Fig. A Fig. A Fig. B

Sejam V_A e V_B, respectivamente, os volumes de metal contidos nos cubos correspondentes às figuras A e B. Sobre os volumes V_A e V_B e as suas respectivas superfícies de contato com a água, S_A e S_B, pode-se concluir que:

(A) $V_A > V_B$ e $S_A > S_B$

(B) $V_A < V_B$ e $S_A < S_B$

(C) $V_A = V_B$ e $S_A = S_B$

(D) $V_A = V_B$ e $S_A < S_B$

CAPÍTULO XV

POLIEDROS REGULARES

Mihfoto/Dreamstime.com

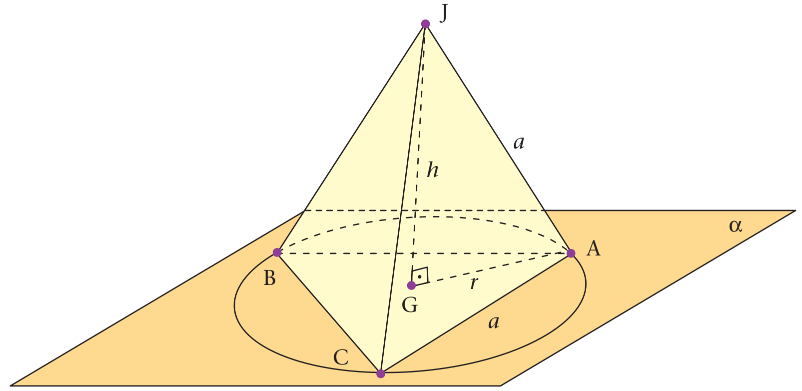
Curiosamente, enquanto há polígonos regulares de vários números de lados no plano, há apenas cinco poliedros regulares convexos tridimensionais. Este fato já tinha sido demonstrado por contemporâneos de Platão, cerca de 360 a. C. (estes poliedros também são chamados de *sólidos platônicos*). Neste capítulo, resumimos as principais propriedades métricas destes poliedros. Na imagem, vários dados justos, mas três deles não são poliedros regulares – quais?

15 – POLIEDROS REGULARES

15.1 – Tetraedro regular

15.1.1 – Raio do círculo circunscrito a uma face

Sabemos da Geometria Plana que em um triângulo equilátero $a = r\sqrt{3}$.



No triângulo JGA retângulo em G, temos:

$h^2 = a^2 - r^2 = (r \cdot \sqrt{3})^2 - r^2 = 3r^2 - r^2 = 2r^2$

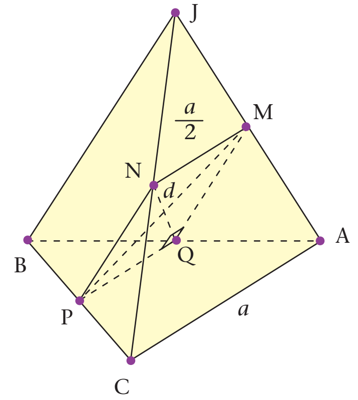
$h = r\sqrt{2}$

Reunindo as duas relações, temos:

$$\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{r}{\sqrt{1}}$$

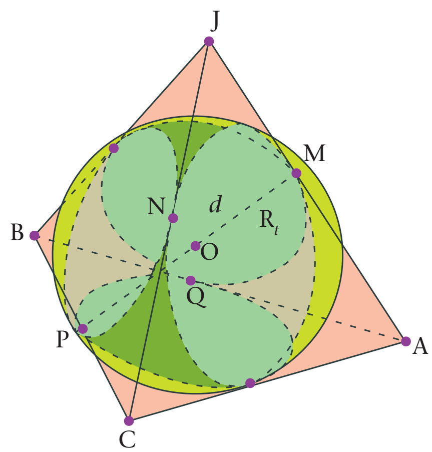
15.1.2 – Distância entre duas arestas opostas

Como o tetraedro é regular, esta distância será a **distância entre os pontos** M e P **médios das arestas** $\overline{AJ}$ e $\overline{BC}$ ou $\overline{CJ}$ e $\overline{AB}$, respectivamente.



O plano que contém os pontos MNPQ secciona o tetraedro segundo um quadrado de lado $\frac{a}{2}$, pois $\frac{MN}{AC} = \frac{JN}{JC} = \frac{1}{2}$. A distância desejada é a **diagonal do quadrado** MNPQ, logo: $d = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

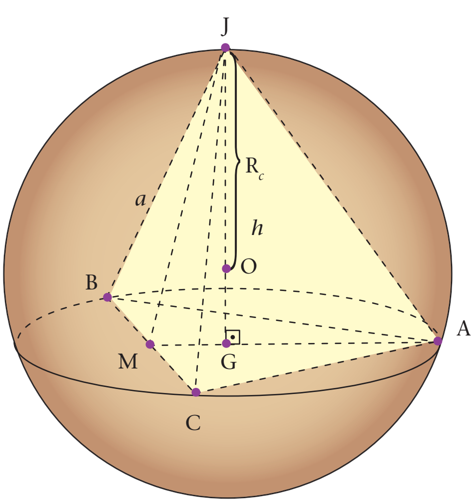
15.1.3 – Raio da esfera tangente às arestas



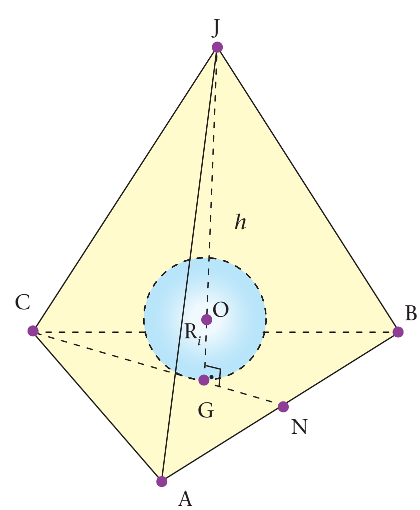
OBSERVAÇÃO
As intersecções da esfera tangente às arestas do tetraedro com as faces são círculos inscritos nos triângulos das faces.

O centro da esfera é o centro do quadrado MNPQ. O **raio** R_t é a **metade da distância** d **entre duas arestas opostas**, logo: $R_t = \frac{a}{4}\sqrt{2}$

15.1.4 – Raios das esferas inscrita e circunscrita



esfera circunscrita



esfera inscrita

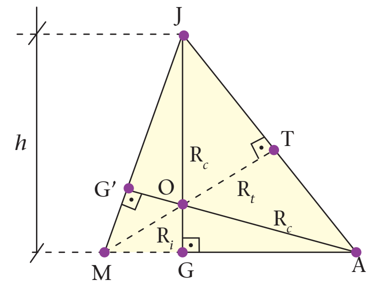
Consideremos o plano mediador da aresta BC. Este plano secciona o tetraedro segundo o triângulo isósceles AMJ, em que MA = MJ. Temos que:

$$h^2 = MJ^2 - MG^2$$

Mas $MJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ por ser altura de um triângulo equilátero de lado a.

$MG = \frac{1}{3}MA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ porque G é o ponto de encontro das medianas do triângulo ABC. Então:

$$h^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} = \frac{24a^2}{36} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



O ponto O é o centro das duas esferas. Sejam $OG = R_i$ e $OJ = R_c$. A semelhança dos triângulos AOG e AMG′ nos dá: $\frac{AO}{AM} = \frac{OG}{MG'} \Rightarrow \frac{R_c}{AM} = \frac{R_i}{MG}$, pois MG′ = MG. Como AM = 3MG, vem $R_c = 3R_i$. A altura h é a soma $h = R_c + R_i = 3R_i + R_i = 4R_i$, onde:

$$4R_i = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \boxed{R_i = \frac{a\sqrt{6}}{12}} \text{ e } \boxed{R_c = \frac{a\sqrt{6}}{4}}$$

OBSERVAÇÃO

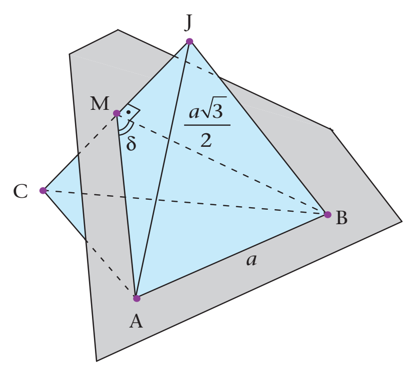
O ponto O, centro dessas esferas, é o **baricentro** do tetraedro que fica a $\frac{3}{4}$ do vértice e a $\frac{1}{4}$ da base sobre a altura do tetraedro.

$\boxed{R_i = \frac{h}{4}}$ e $\boxed{R_c = \frac{3h}{4}}$

O **raio da esfera tangente** às arestas é **média geométrica dos raios das esferas inscrita e circunscrita** ao tetraedro. $R_i \cdot R_c = \frac{a\sqrt{6}}{12} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = R_t^2$.

15.1.5 – Ângulos diedros

Os ângulos diedros δ do tetraedro se calculam no triângulo isósceles AMB.



Temos AM = MB = $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ e AB = a.

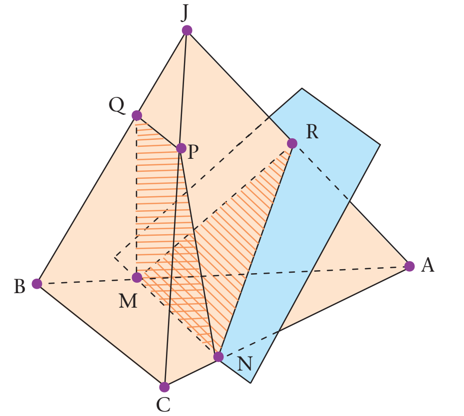
Pela lei dos cossenos:

$$a^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot$$

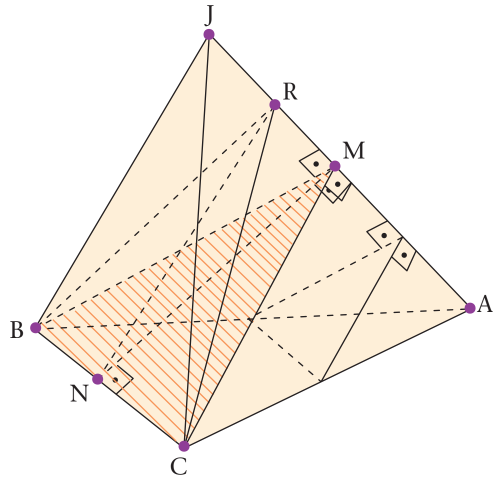
$$\cos\delta = \frac{1}{3} \Rightarrow \delta = \text{arccos}\ \frac{1}{3} = 70°\,31'\,43''$$

15.1.6 – Secções

Todo **plano paralelo a uma aresta** BC intersecta o tetraedro em **trapézios isósceles** MNPQ ou **triângulos isósceles** MNR.



Dentre os **planos secantes que contêm uma aresta** BC, o que passa pelo M médio da aresta oposta intersecta o tetraedro num **triângulo isósceles** BMC de perímetro e área mínimos.

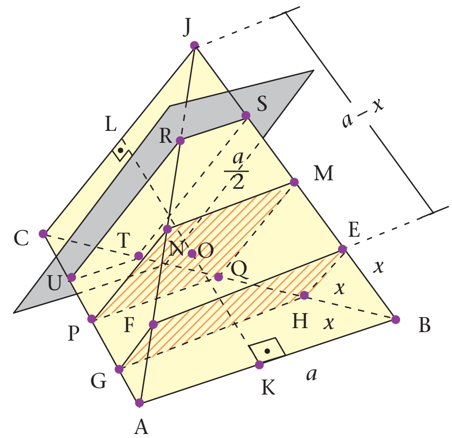


Planos perpendiculares a uma aresta AJ intersectam o tetraedro em **triângulos isósceles paralelos** ao triângulo BMC.

O plano mediador de uma aresta AJ contém o triângulo BMC.

Portanto, as arestas opostas JA e BC são ortogonais.

O **plano paralelo a duas arestas opostas** passando pelo ponto médio O da perpendicular comum LK secciona o tetraedro num **quadrado** MNPQ de lado $\frac{a}{2}$.



Todos os planos paralelos a duas arestas opostas definem secções de mesmo perímetro, exceto o do quadrado, cujo valor é $2a$.

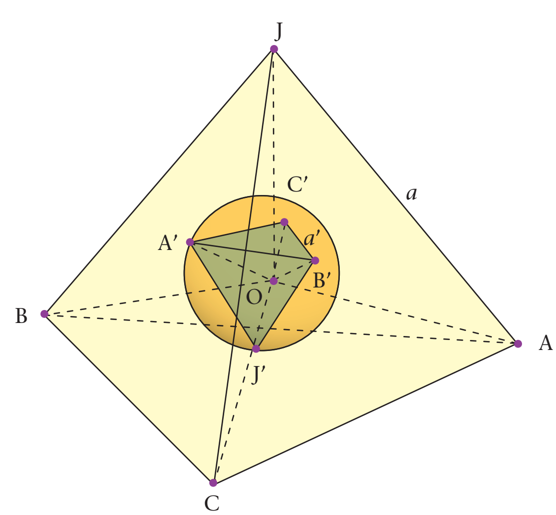
Com efeito, basta ver que o triângulo EBH é equilátero, e, sendo EB = x, teremos JE = $a - x$ = EF. O perímetro será então: p = 2(FE + EH) = $2(a - x + x) \Rightarrow$ $p = 2a$

A área será: S = FE · EH = $(a - x)x \Rightarrow$ $S = -x^2 + ax$

Para $x = \frac{a}{2}$, temos o quadrado MNPQ cuja área será $S = -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}$, que é a área máxima.

15.1.7 – Poliedros especiais

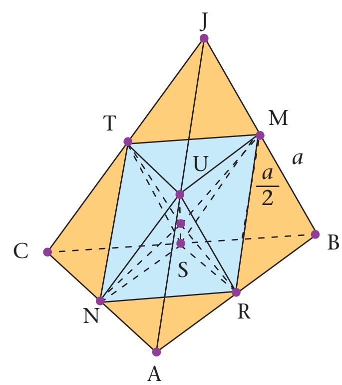
O tetraedro formado pelos pés das alturas é chamado **tetraedro órtico** e é semelhante ao tetraedro original com razão de semelhança $\frac{1}{3}$.



Basta ver que o raio da esfera inscrita no tetraedro JABC é o raio da circunscrita no tetraedro J'A'B'C'.

$$R_i = R'_c \Rightarrow \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{a'\sqrt{6}}{4} \Rightarrow a = 3a' \text{ ou } a' = \frac{1}{3}a$$

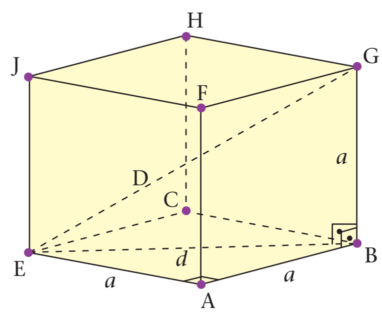
O **octaedro regular** formado pelos **pontos médios das arestas do tetraedro** tem para diagonais as perpendiculares comuns a duas arestas opostas do tetraedro.



Suas arestas são as metades das do tetraedro. Suas diagonais são congruentes e se cruzam no baricentro do tetraedro.

15.2 – Hexaedro regular ou cubo

15.2.1 – Diagonais do cubo



Sabemos que a diagonal de face é: $d = a\sqrt{2}$.

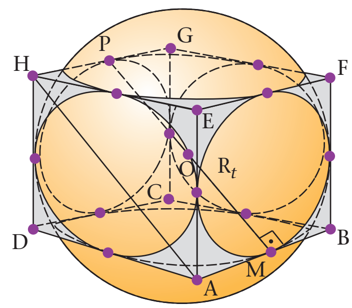
No triângulo retângulo DBF, $D^2 = d^2 + a^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$; então $D = a\sqrt{3}$ ou ainda $\frac{a}{\sqrt{1}} = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{D}{\sqrt{3}}$.

15.2.2 – Distância entre duas arestas

- Se as arestas forem JE e BC, a distância será a aresta do cubo $EC = a$.
- Se as arestas forem JE e BG, a distância será a diagonal da face $BE = d = a\sqrt{2}$.

15.2.3 – Raio da esfera tangente às arestas

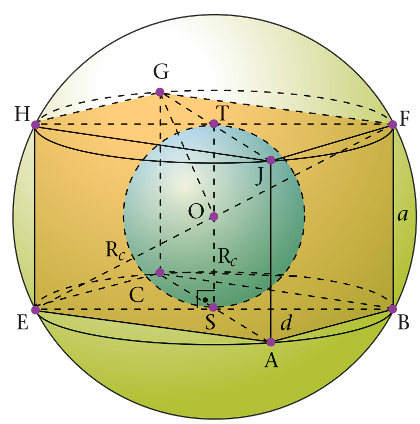
O centro da esfera é o centro do cubo, ponto médio da distância entre duas arestas opostas paralelas.



$$R_t = \frac{MP}{2} = \frac{AH}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{R_t = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

As intersecções da **esfera tangente às arestas do cubo** são **círculos inscritos nos quadrados das faces.**

15.2.4 – Raios das esferas inscrita e circunscrita

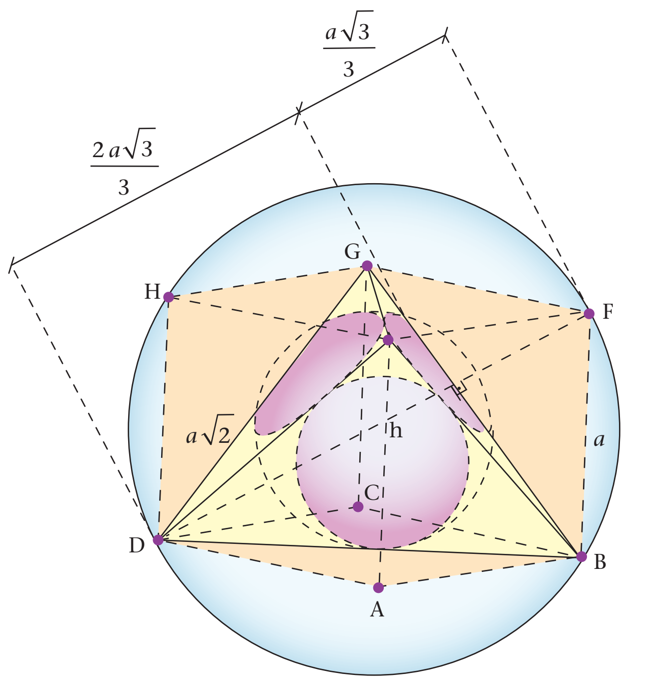


Como a **esfera inscrita** tangencia duas faces opostas, seu diâmetro ST é igual à aresta do cubo, logo $2R_i = a \Rightarrow \boxed{R_i = \frac{a}{2}}$.

A **esfera circunscrita** tem por diâmetro um segmento EF igual à diagonal D do cubo, logo $2R_c = D \Rightarrow R_c = \frac{D}{2} \Rightarrow \boxed{R_c = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$.

As três esferas têm o mesmo centro que é o centro do cubo, ponto de encontro de suas diagonais.

15.2.5 – Tetraedro regular inscrito no cubo



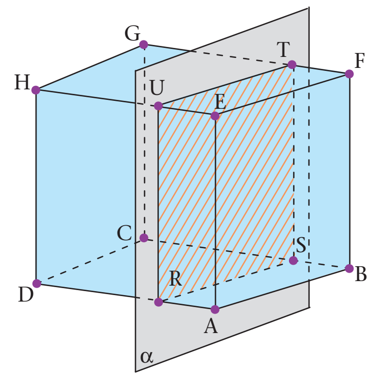
O tetraedro regular inscrito no cubo tem como arestas as diagonais das faces cujo valor é $a\sqrt{2}$.

A altura do tetraedro é $\frac{2}{3}$ da diagonal do cubo, logo sua altura é $h = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

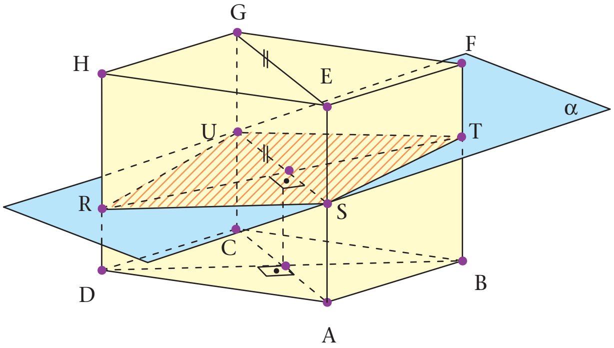
A esfera inscrita no cubo é tangente às arestas do tetraedro regular inscrito nele.

A esfera circunscrita ao cubo é circunscrita ao tetraedro, pois os vértices do tetraedro são também do cubo.

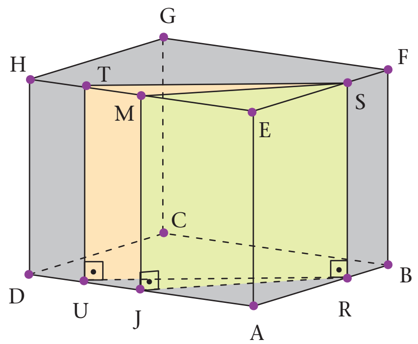
15.2.6 – Secções



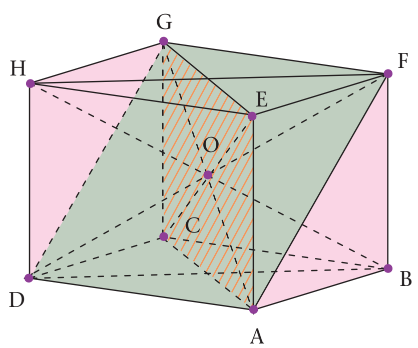
Secções por um **plano** α **paralelo** a uma face ABFE do cubo são **quadrados** RSTU.



Secções por um **plano α que intersecta quatro arestas paralelas** são **paralelogramos**. Quando o plano α é paralelo à diagonal GE de uma face, a secção é um losango RSTU.

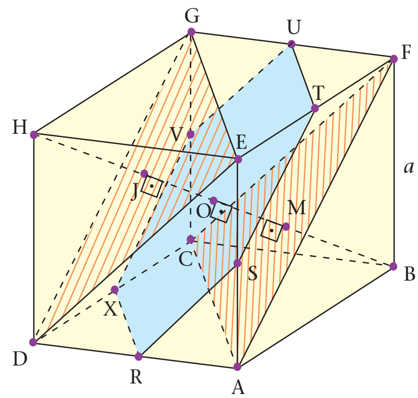


Quando o **plano secante** é perpendicular a uma face, a secção formada é um **retângulo** RSTU ou um **quadrado** RSMJ.



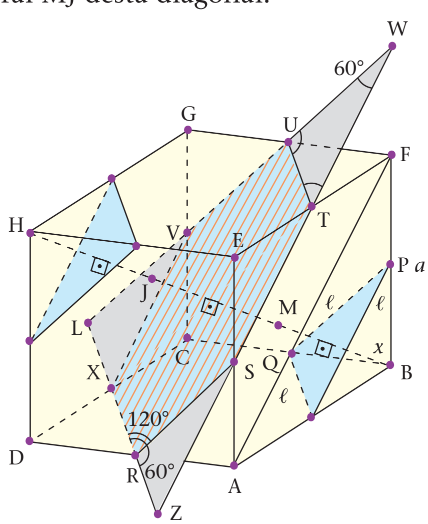
Os **planos diagonais** AFGD, AEGC e BDHF cortam-se num ponto, que é o centro de simetria do cubo.

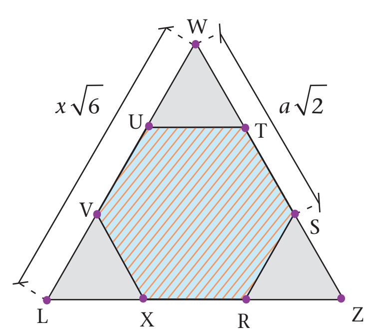
Este ponto é o ponto de encontro das diagonais CE, AG, DF e BH.



Os **planos** AFC e DEG **perpendiculares à diagonal** HB a dividem em **3 partes congruentes**. Os pontos M e J são, respectivamente, baricentros dos triângulos AFC e DEG.

A secção no cubo por um plano que passa pelos pontos médios R, S, T, U, V e X das arestas AD, AE, EF, FG, GC e CD, respectivamente, é um hexágono regular de lado $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Este plano é o plano mediador da diagonal do cubo e também do terço central MJ desta diagonal.





Os **planos perpendiculares à diagonal do cubo** o intersectam:

1) no primeiro terço em triângulos equiláteros NPQ cujo perímetro (p) varia de zero a $3a\sqrt{2}$. Com efeito, seja x a distância do plano secante ao vértice B. Temos $\dfrac{x}{BM} = \dfrac{\ell}{a\sqrt{2}}$. Como $BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, vem:

$$\ell = a\sqrt{2}x \cdot \frac{3}{a\sqrt{3}} = x\sqrt{6} \Rightarrow p = 3\ell = 3x\sqrt{6} \text{ em que: } 0 \le x \le \frac{a\sqrt{3}}{3}, \text{ logo:}$$

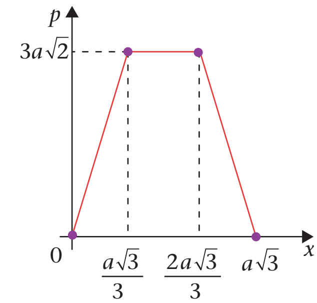
$$0 \le p \le 3a\sqrt{2}$$

2) no segundo terço em hexágonos equiângulos (120°) de perímetro constante $3a\sqrt{2}$. Basta ver que os triângulos UTW são equiláteros e UT = TW = WU. Como SW = AF (pois SAFW é um paralelogramo), logo ST + TU = ST + TW = = SW = AF = $a\sqrt{2}$. Analogamente, UV + VX = UL = $a\sqrt{2}$ e XR + RS = CA = $= a\sqrt{2}$, logo qualquer secção para $\frac{a\sqrt{3}}{3} \le x \le \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ tem $p = 3a\sqrt{2}$.

3) no último terço, repete-se inversamente o que ocorreu no primeiro terço, logo

$$\frac{p}{\sqrt{3}-x} = \frac{3a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow p = \left(a\sqrt{3}-x\right) \cdot 3\sqrt{6}.$$

Temos, então, a função que define o perímetro p da secção em função da distância x do plano secante perpendicular à diagonal a um vértice.



$$f : [0,\ a\sqrt{3}\,] \to \mathbb{R}, \text{ tal que } f(x) = \begin{cases} 3x\sqrt{6}, \text{ se } 0 \le x \le \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \\ 3a\sqrt{2}, \text{ se } \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \le x \le \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \\ \left(a\sqrt{3}-x\right)3\sqrt{6}, \text{ se } \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \le x \le a\sqrt{3} \end{cases}$$

Se desejássemos a **área da secção**, teríamos:

1) $0 \le x \le \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \Rightarrow 0 \le S \le \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

2) $\frac{a\sqrt{3}}{3} \le x \le \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

$$S = S_{WLZ} - 3 \cdot S_{UTW} = \left(x\sqrt{6}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \left(x\sqrt{6} - a\sqrt{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(-2x^2 + 2\sqrt{3}ax - a^2\right)$$

Observe que a área S será máxima quando:

$$x = -\frac{2\sqrt{3}a}{-4} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (ponto médio da diagonal)}$$

$$\text{e } S = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left[-2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} - a^2\right] = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

que é a área de hexágono regular, secção do plano pelo ponto médio da diagonal.

3) $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \le x \ \le a\sqrt{3}$

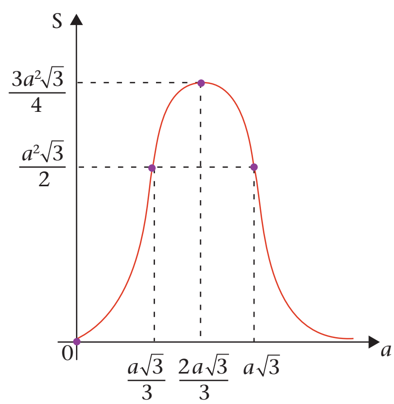
$S = \dfrac{3\sqrt{3}}{3}\left(a\sqrt{3} - x\right)^2$ por simetria ao caso 1.

Reunindo as hipóteses, temos a função que define a área da secção:

$f : [0,\ a\sqrt{3}\ ] \to \mathbb{R}$, tal que:

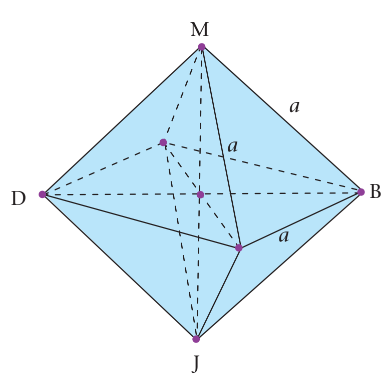
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3\sqrt{3}}{2}x^2, \text{ se } 0 \le x \le \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(-2x^2 + 2\sqrt{3}ax - a^2\right), \text{ se } \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \le x \le \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(a\sqrt{3} - x\right)^2, \text{ se } \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \le x \le a\sqrt{3} \end{cases}$$

Cujo gráfico é:



15.3 – Octaedro regular

15.3.1 – Diagonal



Como os planos diagonais intersectam o octaedro segundo quadrados de lados iguais à aresta do octaedro (MBJD), a **diagonal (MJ) do octaedro** é a do quadrado de lado a, logo $d = a\sqrt{2}$.

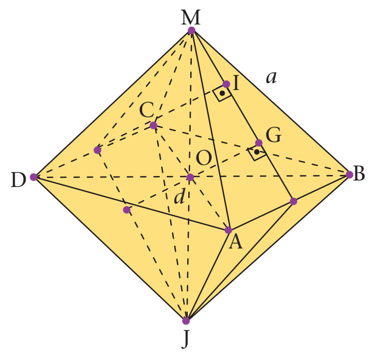
Os planos diagonais se intersectam formando um triedro trirretângulo por serem perpendiculares dois a dois.

15.3.2 – Distância entre duas faces opostas

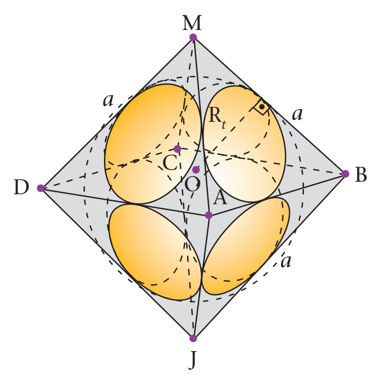
Como o triedro OABM é trirretângulo, e OG é a altura de O relativa à face ABM, temos:

$$\frac{1}{OG^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Rightarrow \frac{1}{OG^2} = \frac{6}{a^2} \Rightarrow OG = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

A **distância** em questão é: $2 \cdot OG = 2\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$



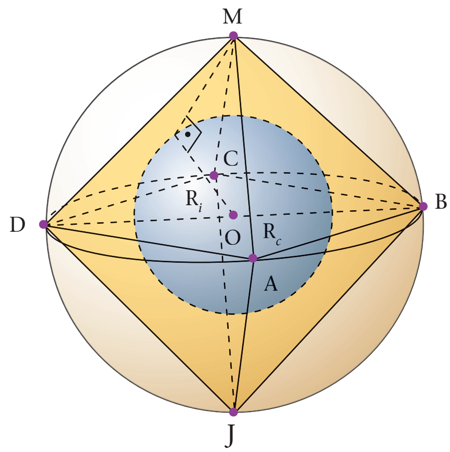
15.3.3 – Raio da esfera tangente às arestas



Como este raio é perpendicular à aresta MB, ele é paralelo às arestas opostas paralelas DM e BJ, valendo, portanto, a metade da aresta do octaedro.

$$R_t = \frac{a}{2}$$

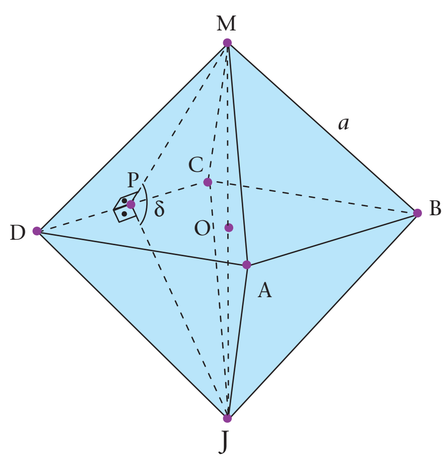
15.3.4 – Raios das esferas inscrita e circunscrita ao octaedro



O raio da **esfera inscrita** é a metade da distância entre duas faces paralelas MDC e ABJ. Então: $R_i = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

O raio da **esfera circunscrita** é a metade da diagonal BD: $R_c = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

15.3.5 – Ângulos diedros



Os **ângulos diedros** δ **do octaedro** se obtêm no triângulo isósceles MPJ.

Temos $MP = PJ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ e $MJ = a\sqrt{2}$.

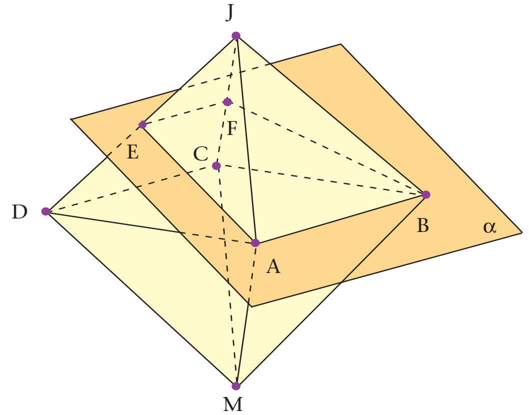
Pela lei dos cossenos:

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\cos\delta$$

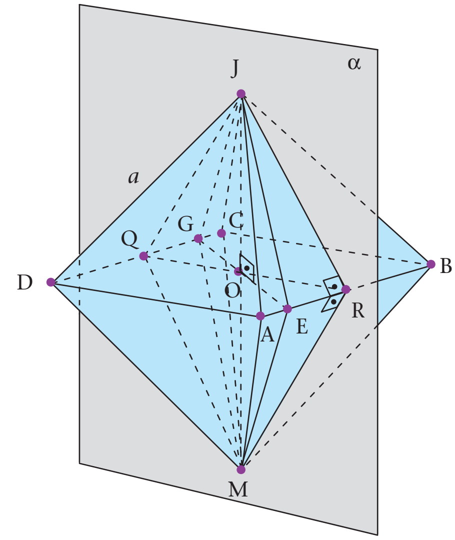
$$\cos\delta = -\frac{1}{3} \Rightarrow \delta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 109°28'16''$$

Os diedros dos tetraedros regulares e dos octaedros regulares são suplementares (sua soma é 180°).

15.3.6 – Secções

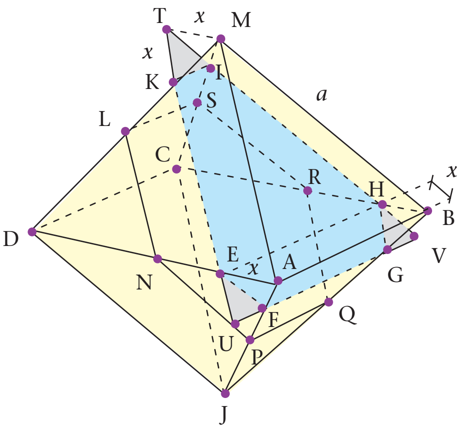


Planos α **paralelos a duas arestas** AB e CD do octaedro seccionam o octaedro em **trapézios paralelos** ao trapézio ABFE.



As secções por **planos que contêm uma diagonal** são **losangos**. No caso particular do plano mediador de uma aresta, o losango (RJQM) tem diagonais que medem a e $a\sqrt{2}$.

Os **planos diagonais** (por exemplo, AJCM) determinam **secções quadradas**.



As secções por **planos paralelos a duas faces opostas** são **hexágonos irregulares** EFGHIK equiângulos e de mesmo perímetro $3a$.

De fato, efetuando uma translação BH = x ao longo da aresta BC, o triângulo ABM se desloca para EHT, logo $\hat{E} = \hat{H} = \hat{T} = \hat{K} = \hat{I} = 60°$, logo o triângulo TKI é equilátero. Então $K\hat{I}H = 120° = I\hat{H}G = H\hat{G}F = G\hat{F}E = F\hat{E}K = E\hat{K}I$. Por outro lado, o triângulo BHG equilátero é congruente ao triângulo MTK, logo, TK = HG = BH. Assim, BH + HC = EK + KI = EK + KT = a. Do mesmo modo, IH + HG = GF + FE = a, e o perímetro do hexágono é $3a$, qualquer que seja x. A área deste hexágono variável será a área do triângulo equilátero TUV menos 3 vezes a área do triângulo TKI, então:

$$S = \frac{(a+x)^2\sqrt{3}}{4} - 3\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(-2x^2 + 2ax + a^2)$$

Esta área será máxima quando $x = -\frac{2a}{-4} = \frac{a}{2}$, que se dá quando o hexágono é regular LNPQRS. A área máxima será $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$.

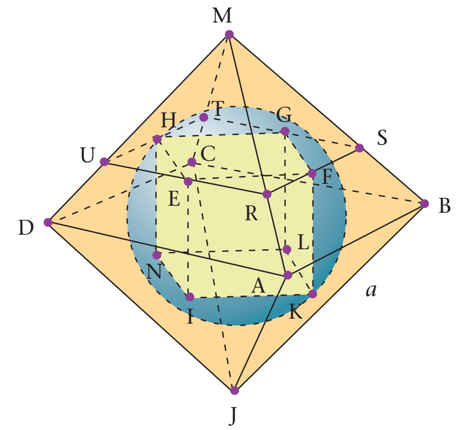
15.3.7 – Poliedros especiais

O poliedro que tem seus **vértices nos baricentros das faces do octaedro** é um **cubo**. As arestas do cubo (EF, por exemplo) medem a metade da diagonal US do quadrado RSTU. O lado deste quadrado $RS = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}a$, pois o ponto F é o baricentro do triângulo MAB.

Mas $US = RS\sqrt{2} = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$, então $EF = \frac{US}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, logo a aresta do cubo inscrito é a terça parte da diagonal do octaedro, isto é, $\frac{1}{3}\cdot a\sqrt{2}$.

Note que este cubo está inscrito também na esfera inscrita no octaedro, pois esta tangencia as faces do octaedro.

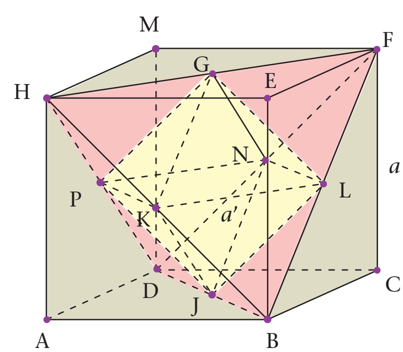
A **diagonal do cubo inscrito** é a **distância entre duas faces opostas do octaedro**.



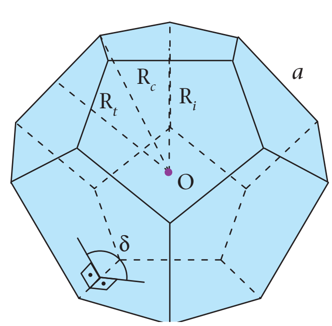
O poliedro cujos **vértices são os centros das faces do cubo** é um **octaedro regular**. As diagonais do octaedro são iguais às arestas do cubo. Sendo a a aresta do cubo e a' a aresta octaedro, temos: $a'\sqrt{2} = a \Rightarrow a' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, que é a metade da diagonal da face.

O octaedro inscrito num cubo está inscrito na esfera e no tetraedro inscritos no cubo.

A esfera circunscrita ao octaedro é tangente às arestas do tetraedro inscrito no cubo.



15.4 – Dodecaedro



Para o dodecaedro temos os **raios das esferas**:

$R_c = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4} \cdot a$ (**circunscrita**)

$R_i = \dfrac{\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}}{20} \cdot a$ (**inscrita**)

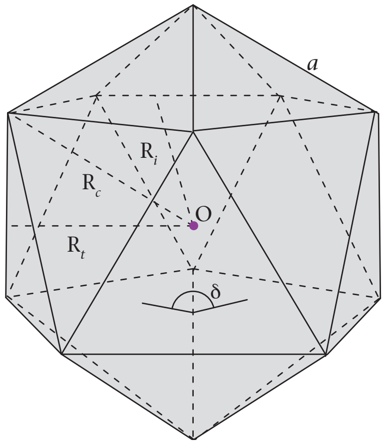
$R_t = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4} \cdot a$ (**tangente às arestas**)

$\delta = 116°33'54''$ (**ângulo diedro**)

$\cos\delta = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

O poliedro cujos **vértices são os centros das faces do dodecaedro** é um **icosaedro regular**.

15.5 – Icosaedro



Para o icosaedro temos os **raios das esferas**:

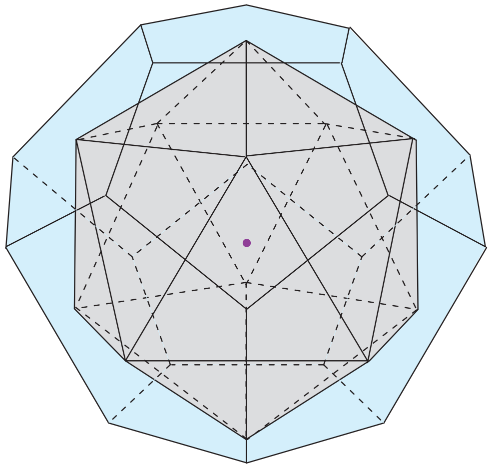
$R_c = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \cdot a$ (**circunscrita**)

$R_i = \dfrac{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12} \cdot a$ (**inscrita**)

$R_t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \cdot a$ (**tangente às arestas**)

$\delta = 138°11'22''$ (**ângulo diedro**)

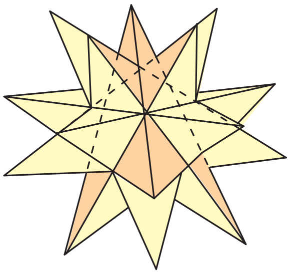
$\cos\delta = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$



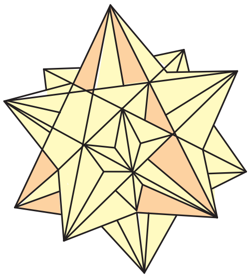
O poliedro cujos **vértices são os centros das faces do icosaedro** é um **dodecaedro regular**.

15.6 – Poliedros regulares estrelados

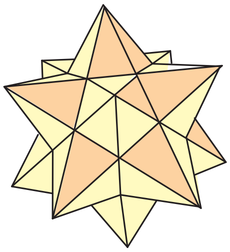
Existem apenas quatro poliedros regulares estrelados. Como ilustração, apresentamos sua forma geométrica abaixo.



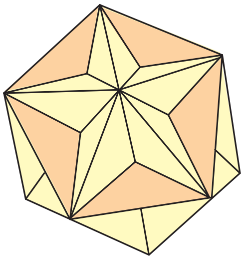
(1)
Dodecaedro regular estrelado de faces pentagonais estreladas (20 vértices)



(2)
Icosaedro regular estrelado de faces triangulares (12 vértices)



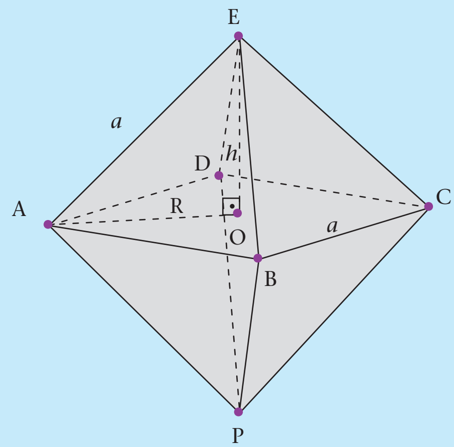
(3)
Dodecaedro regular estrelado de faces pentagonais estreladas (12 vértices)



(4)
Dodecaedro regular estrelado de faces pentagonais convexas (12 vértices)

Exemplos:

i) Encontrar o volume do octaedro regular por meio da aresta *a*.
Podemos considerar o octaedro como formado por duas pirâmides quadrangulares. Avaliemos o volume da primeira, ABCDE.



Temos: $V_1 = \frac{1}{3} \cdot S_{base} \cdot h$

A base é um quadrado de lado *a* e, sendo R o raio do círculo circunscrito, vem:

$a = R\sqrt{2}$

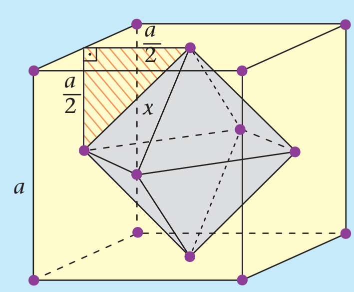
Assim: $h^2 = a^2 - R^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow h = \frac{a^2}{\sqrt{2}}$

$V_1 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}$

O volume do octaedro será o dobro do encontrado. Portanto:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$$

ii) Dado um cubo de aresta *a*, calcular, em função da mesma, a área e o volume do poliedro que tem os vértices nos centros das faces do cubo.
O poliedro é um octaedro cuja aresta *x* se determina empregando o triângulo sombreado.

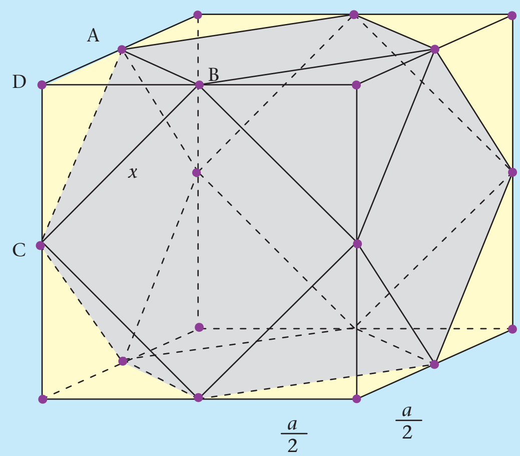


$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{oct} = \frac{8x^2}{4}\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$$

$$V_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3}x^3 = \frac{a^3}{6}$$

iii) Dado um cubo de aresta a, calcular em função dela a área e o volume do poliedro (cubo-octaedro) cujos vértices são os pontos médios das suas arestas. Temos:



S = 6 · (área quadrado lado x) + 8 · (área triângulo equilátero lado x)
V = (volume cubo de aresta a) – 8 · (volume pirâmide triangular (DABC))
Resta-nos, pois, calcular a expressão de x.
Vem:

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ onde } x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Assim:

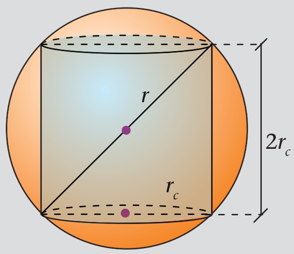
$$S = 6 \cdot \frac{a^2}{2} + 8 \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(3 + \sqrt{3}\right)a^2$$

$$V = a^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{5}{6}a^3$$

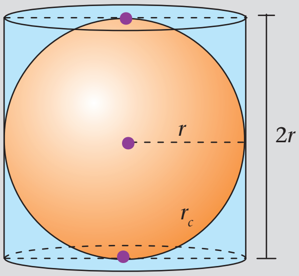
Exercícios resolvidos:

1) Calcule o volume do cilindro equilátero inscrito e o do cilindro circunscrito a uma esfera de raio *r*.

Solução:



cilindro equilátero inscrito
(esfera circunscrita)



cilindro circunscrito
(esfera inscrita)

$$2r = 2r_c\sqrt{2} \Rightarrow r_c = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

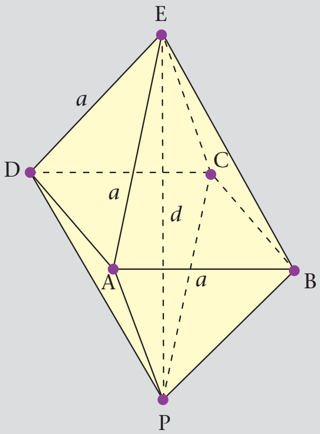
$$V_c = \pi \cdot r_c^2 \cdot 2r_c = 2\pi r_c^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi r^3$$

$$r_c = r$$
$$V_c = 2\pi r_c^3 = 2\pi r^3$$

Resposta: O volume do cilindro equilátero inscrito é $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi r^3$; o do cilindro circunscrito é $2\pi r^3$.

2) Calcule a área e o volume de um octaedro regular, em função da sua diagonal, *d*.

Solução:



Diagonal do octaedro: $d = EP$

Temos: $d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow a = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$

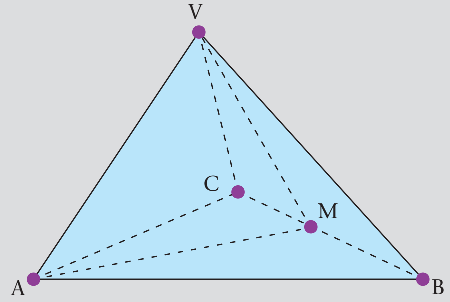
Área do octaedro regular: $S = \sqrt{3}d^2$

Volume do octaedro regular: $V = \dfrac{d^3}{6}$

3) Demonstre que, em qualquer tetraedro regular VABC, as arestas $\overline{VA}$ e $\overline{BC}$ são ortogonais.

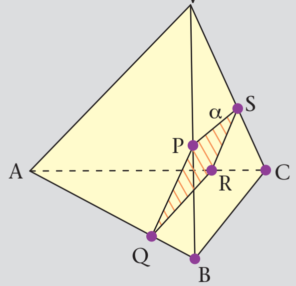
<u>Solução:</u>

De fato, seja M o ponto médio da aresta $\overline{BC}$.



Nos triângulos equiláteros VBC e ABC, as medianas $\overline{VM}$ e $\overline{AM}$ são, também, alturas.
Então, $\overline{BC}$ é perpendicular a $\overline{VM}$;
$\overline{BC}$ é perpendicular a $\overline{AM}$.
Logo, $\overline{BC}$ é perpendicular ao plano AMV, já que é perpendicular a duas retas deste. Assim, $\overline{BC}$ será perpendicular a $\overleftrightarrow{VA}$ contida neste plano.

4) Corta-se um tetraedro regular por um plano α, paralelo a duas arestas opostas. Demonstre que a secção feita pelo plano é um retângulo. Calcule a área dessa secção quando o plano for equidistante das duas arestas opostas consideradas e a aresta do tetraedro medir 10 m.
<u>Solução:</u>



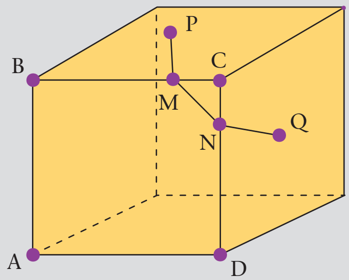
Sejam $\overline{BC}$ e $\overline{VA}$ as arestas opostas.

Temos $\overline{PS}$ paralela a $\overline{BC}$ e $\overline{QR}$ paralela a $\overline{BC}$.
Portanto, $\overline{PS}$ é paralela a $\overline{QR}$.
Pela mesma razão, $\overline{PQ}$ é paralela a $\overline{RS}$.
Demais, $\overline{PS}$, paralela a $\overline{BC}$, é perpendicular a $\overline{VA}$.
Logo, o quadrilátero PQRS é um retângulo.
No caso da aplicação, teremos um quadrado de lado PS = 5 m e área = 25 m^2.

5) (ITA-SP) Considere os pontos P e Q sobre faces adjacentes de um cubo. Uma formiga percorre, sobre a superfície do cubo, a menor distância entre P e Q, cruzando a aresta $\overline{BC}$ em M e a aresta $\overline{CD}$ em N, conforme ilustrado na figura abaixo. É dado que os pontos P, Q, M e N são coplanares.

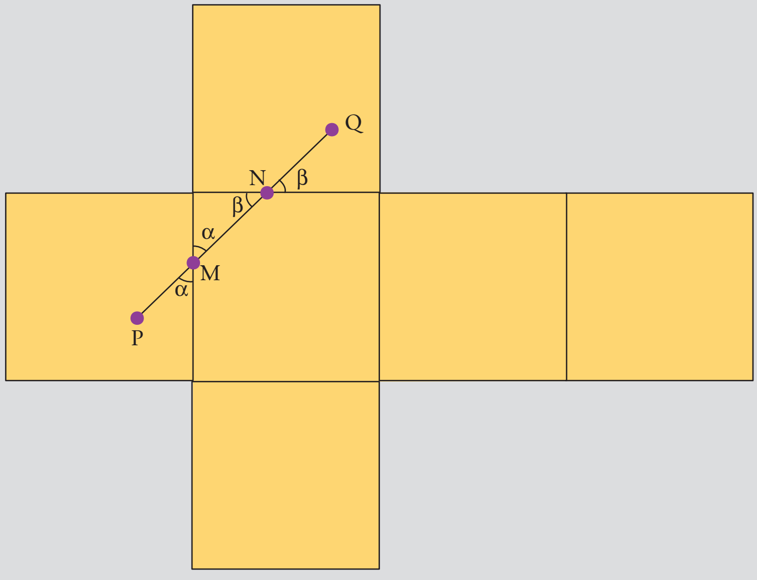
a) Demonstre que $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{AC}$.

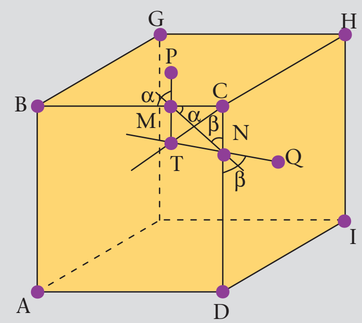
b) Calcule a área da secção do cubo determinada pelo plano que contém P, Q e M em função de $\overline{BC} = a$ e $\overline{BM} = b$.



Solução:

a) Se o caminho é mínimo, na planificação do cubo, P, M, N e Q estão alinhados:



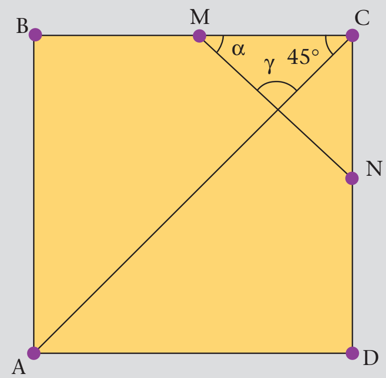


Se P, M, N e Q são coplanares, $\overline{PM}$ e $\overline{NQ}$ se encontram num ponto T.
Como $\overleftrightarrow{PM} \subset BCHG$ e $\overleftrightarrow{NQ} \subset CDIH$, então T pertence à intersecção destes planos.
Logo, T pertence a $\overleftrightarrow{CH}$.

Como $T\hat{N}C$ vale β, então $tg\,\beta = \dfrac{TC}{NC} \Rightarrow NC = \dfrac{TC}{tg\,\beta}$

Como $T\hat{M}C$ vale α, então $tg\,\alpha = \dfrac{TC}{MC} \Rightarrow MC = \dfrac{TC}{tg\,\alpha}$

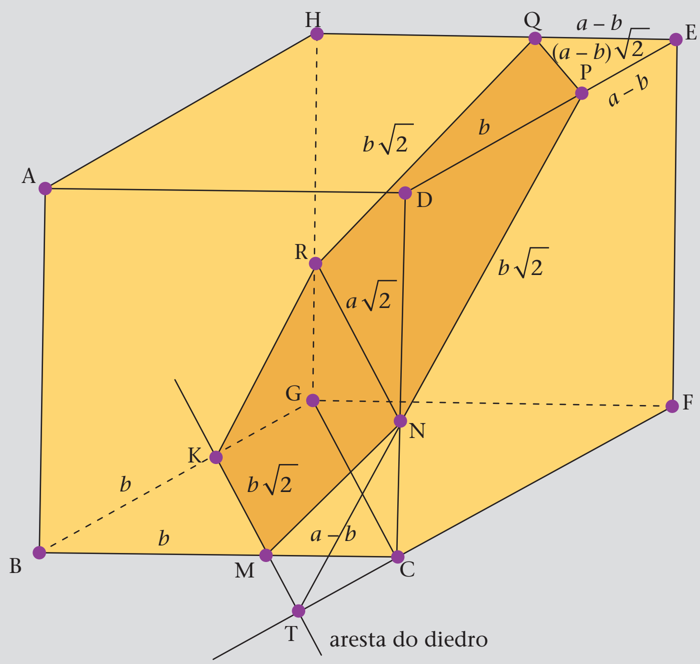
Do $\triangle MNC$: $tg\,\alpha = \dfrac{NC}{MC} = \dfrac{TC}{tg\,\beta} \cdot \dfrac{tg\,\alpha}{TC} \Rightarrow tg\,\beta = 1 \Rightarrow \beta = 45° \text{ e } \alpha = 45°$



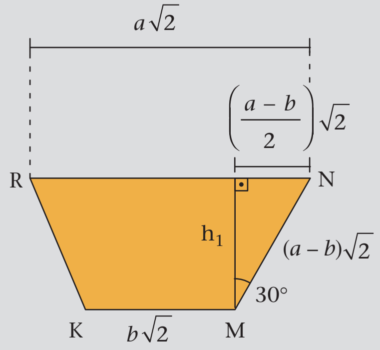
$\alpha = 45° \Rightarrow \gamma = 90°$

Portanto, $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{AC}$.

b) Para melhor visualização da secção, invertemos as bases do cubo:



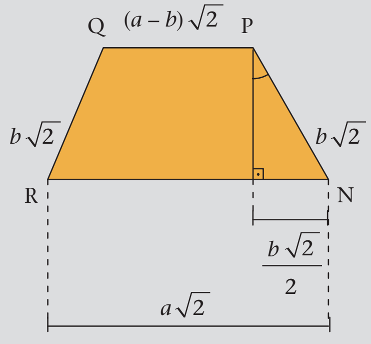
A construção da secção é feita tomando $\overleftrightarrow{KM}$ como aresta do diedro.
O prolongamento da aresta $\overline{CF}$ intercepta a aresta do diedro em T. Como T e N pertencem à face DCFE, a aresta $\overline{TN}$ intercepta $\overline{DE}$ em P. Os pontos Q, R e K são simétricos em relação ao plano mediador ABFE.
A intersecção do plano PQM com o cubo é o hexágono KMNPQR.
Para calcular a área da figura, vamos utilizar os trapézios isósceles KMNR e NPQR.



$$\cos 30° = \frac{h_1}{(a-b)\sqrt{2}}$$

$$h_1 = (a-b)\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h_1 = (a-b)\frac{\sqrt{6}}{2}$$



$$\cos 30^\circ = \frac{h_2}{b\sqrt{2}} \Rightarrow h_2 = b\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h_2 = \frac{b\sqrt{6}}{2}$$

Logo, a área da secção PQRKMN é:

$$S = \left(\frac{a\sqrt{2}+b\sqrt{2}}{2}\right)\cdot(a-b)\frac{\sqrt{6}}{2} + \left[\frac{(a-b)\sqrt{2}+a\sqrt{2}}{2}\right]\cdot\frac{b\sqrt{6}}{2}$$

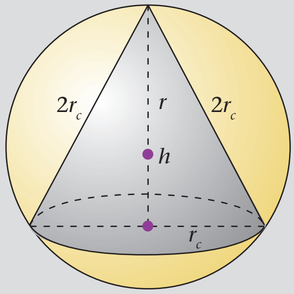
$$S = \left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)\sqrt{3} + \left(\frac{2a-b}{2}\right)\cdot b\sqrt{3} = \left(a^2-b^2+2ab-b^2\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resposta: $S = \left(a^2 + 2ab - 2b^2\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$

6) Calcule o volume do cone equilátero inscrito e o do circunscrito a uma esfera de raio r.

Solução:

a)

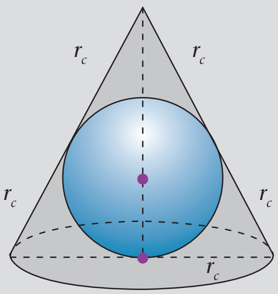


cone equilátero inscrito
(esfera circunscrita)

$$h = \frac{3r}{2} = 2r_c\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r_c = \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

$$V_c = \frac{1}{3}\pi r_c^2 h = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{3r^2}{4}\cdot\frac{3r}{2} = \frac{3}{8}\pi r^3$$

b)



cone equilátero circunscrito
(esfera inscrita)

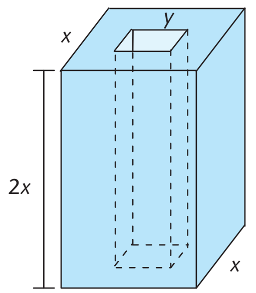
$$h = 3r = 2r_c \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r_c = r\sqrt{3}$$

$$V_c = \frac{1}{3}\pi r_c^2 h = \frac{1}{3}\ \pi \cdot 3r^2 .\ 3r = 3\pi r^3$$

Resposta: O volume do cone equilátero inscrito é $\frac{3}{8}\pi r^3$ e o do circunscrito é $3\pi r^3$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 (Ufla-MG) Em um paralelepípedo retangular com dimensões dadas na figura, foi feita uma cavidade em forma de um paralelepípedo retangular com base quadrada de lado *y*. Calcule *y* em função de *x*, tal que o sólido resultante tenha volume igual à metade do volume do paralelepípedo inicial.

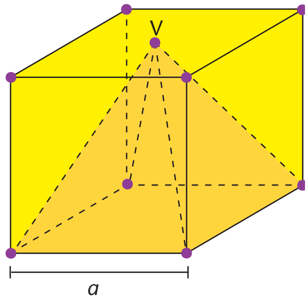


2 (Unic-MT) Um marceneiro dispõe de um pedaço de madeira maciço em forma de paralelepípedo retangular, cujas dimensões são: 8 cm, 12 cm e 20 cm e deseja construir uma pirâmide quadrangular regular maciça com 8 cm de aresta da base e 20 cm de altura. Calcular a razão entre o volume dessa pirâmide e o volume de madeira descartado do pedaço inicial.

3 (Mack-SP) Uma pirâmide, cuja base é um quadrado de lado $2a$, tem o mesmo volume que um prisma, cuja base é um quadrado de lado a. Determine a razão entre as alturas da pirâmide e do prisma.

4 (PUC-SP) Determine o volume de uma pirâmide hexagonal regular, cuja aresta lateral tem 10 m e o raio da circunferência circunscrita à base mede 6 m.

5 (Esal-MG) Em um cubo de aresta a, inscreve-se uma pirâmide, como na figura abaixo. O vértice V da pirâmide é o ponto de intersecção das diagonais da face superior do cubo.



a) Calcule a razão entre o volume do cubo e o da pirâmide.

b) Calcule a área lateral da pirâmide.

6 (UFG-GO) Um tetraedro regular é um poliedro cujas faces são quatro triângulos equiláteros, como mostra a figura 1.
Um octaedro regular é um poliedro cujas faces são oito triângulos equiláteros (figura 2).
Considere um octaedro regular cujos vértices situam-se nos pontos médios das arestas de um tetraedro regular, como mostra a figura 3.
Calcule o volume deste octaedro em função da aresta a do tetraedro.

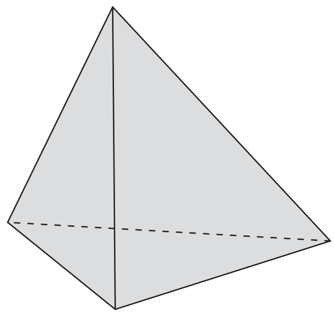


figura 1

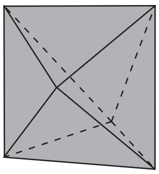


figura 2

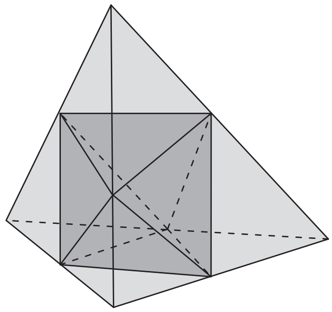


figura 3

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (PUC-RJ) O volume do octaedro regular em função de sua aresta *a* é:

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$

(B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$

(C) $V = a^3\sqrt{2}$

(D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

(E) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$

2 Calcule o volume do poliedro ABCDEF, cujas faces são um quadrado ABCD de lado *a*, dois triângulos equiláteros ADF e BEC e dois trapézios CDEF e ABEF, ambos com bases maior EF = 2*a*.

3 (Mack-SP) Um cubo está inscrito numa esfera de raio R. Sua área total é:

(A) $12R^2$

(B) $4R^2$

(C) $6R^2$

(D) $8R^2$

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

4 (Cescem-SP) Os vértices de um tetraedro regular de volume 1 m^3 são centros das faces de outro tetraedro regular. O volume deste outro tetraedro vale:

(A) 1 m^3

(B) 3 m^3

(C) 9 m^3

(D) 27 m^3

(E) 81 m^3

5 (ITA-SP) Um octaedro regular é inscrito num cubo, que está inscrito numa esfera, e que está inscrita num tetraedro regular. Se o comprimento da aresta do tetraedro é 1, qual é o comprimento da aresta do octaedro?

(A) $\sqrt{\dfrac{2}{27}}$

(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(D) $\dfrac{1}{6}$

(E) n.d.a.

6 Os vértices de um tetraedro regular coincidem com os centros das faces de um outro tetraedro regular. A razão dos volumes desses dois sólidos é:

(A) 2

(B) 4

(C) 8

(D) 27

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

7 (Cescem-SP) Num tetraedro regular a distância de um vértice à face oposta é igual a quatro vezes o raio da esfera inscrita porque:

(A) a esfera inscrita não encontra as arestas.

(B) o centro da esfera inscrita é equidistante das 4 faces.

(C) todo tetraedro é uma pirâmide.

(D) o centro da esfera inscrita e uma das faces do tetraedro regular determinam uma pirâmide cujo volume é a quarta parte do volume do tetraedro regular.

(E) o centro da esfera circunscrita é equidistante dos vértices.

8 Dado um cubo de aresta ℓ, qual é o volume do octaedro cujos vértices são os centros das faces do cubo?

9 (Udesc) Um cubo de lado *h* é inscrito num cilindro de mesma altura. A área lateral desse cilindro é:

(A) $\dfrac{\pi h^2}{4}$

(B) $\dfrac{\pi h^2\sqrt{2}}{4}$

(C) $\dfrac{\pi h^2\sqrt{2}}{2}$

(D) $\pi h^2\sqrt{2}$

(E) $2\pi h^2$

10 (ITA-SP) Consideremos um cone de revolução de altura *h* e um cilindro nele inscrito. Seja *d* a distância do vértice do cone à base superior do cilindro. A altura H de um segundo cilindro inscrito neste cone (diferente do primeiro) e de mesmo volume do primeiro é dada por:

(A) $H = \dfrac{h - \sqrt{h-d}}{3}$

(B) $H = \dfrac{h \pm \sqrt{h^2 - d^2}}{3}$

(C) $H = \dfrac{h - d + h\sqrt{h^2 - d^2}}{2}$

(D) $H = \dfrac{h + d - \sqrt{(h-d)(h+3d)}}{2}$

(E) n.d.a.

11 (Cice-RJ) Se a razão entre os volumes de dois cubos dados é $\frac{1}{5}$, qual a razão entre as suas arestas?

(A) $\sqrt{5}$

(B) $\dfrac{1}{5}$

(C) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$

(D) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{5}$

(E) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

12 (UFG-GO) Um cubo de aresta ℓ e uma esfera E estão dispostos de modo que cada aresta do cubo intercepta a superfície esférica de E em um único ponto. Com base nessas informações, julgue os itens abaixo.

a) A intersecção da esfera E com cada face do cubo determina um círculo de raio $r = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$.

b) A medida do diâmetro da esfera E é igual a $\dfrac{2}{3}$ da medida da diagonal do cubo.

c) O volume da esfera E é maior que o volume da esfera inscrita no cubo.

d) A área da superfície da esfera E é igual à área da superfície do cubo.

13 (ITA-SP) Uma esfera é colocada no interior de um vaso cônico com $\sqrt{55}$ cm de geratriz e $\sqrt{30}$ cm de altura. Sabendo-se que os pontos de tangência estão a 3 cm do vértice, o raio da esfera vale:

(A) $2\sqrt{30}$ cm.

(B) $\dfrac{\sqrt{35}}{2}$ cm.

(C) $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$ cm.

(D) 3 cm.

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

14 (ITA-SP) Constrói-se um cone cuja geratriz é tangente a uma esfera de raio r, e cujo eixo passa pelo centro dessa esfera, de modo que sua base esteja situada a uma distância $\frac{r}{2}$ do centro da esfera. O volume do cone é:

(A) $\dfrac{3}{2}\pi r^3$

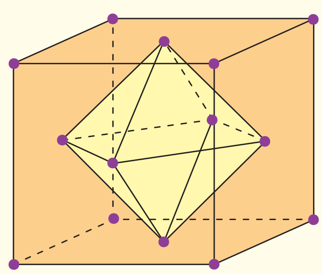
(B) $\dfrac{1}{3}\pi r^3$

(C) $\dfrac{4}{3}\pi r^3$

(D) $\dfrac{9}{8}\pi r^3$

(E) Nenhum dos resultados acima é válido.

15 (UFRGS-RS) Um octaedro tem seus vértices localizados nos centros das faces de um cubo de aresta 2.



O volume do octaedro é:

(A) $\dfrac{2}{3}$

(B) $\dfrac{4}{3}$

(C) 2

(D) $\dfrac{8}{3}$

(E) $\dfrac{10}{3}$

16 (Mack-SP) A razão entre os volumes das esferas circunscrita e inscrita a um mesmo cubo é:

(A) $\sqrt{3}$

(B) $2\sqrt{3}$

(C) $3\sqrt{3}$

(D) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

(E) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

17 (Uerj) O menor número de secções planas que se pode fazer em uma peça cúbica de modo a dividi-la em 27 cubos congruentes é:

(A) 3

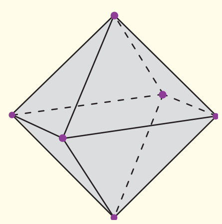
(B) 4

(C) 6

(D) 9

(E) 27

18 (Puccamp-SP) Um octaedro regular é um poliedro constituído por 8 faces triangulares congruentes entre si e ângulos poliédricos congruentes entre si, conforme mostra a figura abaixo.



Se o volume desse poliedro é $72\sqrt{2}$ cm³, a medida de sua aresta, em centímetros, é:

(A) $\sqrt{2}$

(B) 3

(C) $3\sqrt{2}$

(D) 6

(E) $6\sqrt{2}$

19 (PUC-RJ) Tem-se um cubo de aresta a = 6 cm e no seu interior uma esfera inscrita, isto é, tangente às faces do cubo. O volume da região interior ao cubo e exterior à esfera é, em cm³:

(A) 27π

(B) $6(10\pi - 12)$

(C) 216π

(D) $36(6 - \pi)$

(E) Nenhuma das anteriores.

20 (Fuvest-SP) Um cubo de aresta m está inscrito em uma semiesfera de raio R de tal modo que os vértices de uma das faces pertencem ao plano equatorial da semiesfera e os demais vértices pertencem à superfície da semiesfera. Então, m é igual a:

(A) $\frac{R\sqrt{2}}{3}$

(B) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$

(C) $\frac{R\sqrt{3}}{3}$

(D) R

(E) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$

21 (Cescem-SP) A esfera circunscrita ao octaedro regular de aresta a tem raio igual a:

(A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

(B) $a\sqrt{2}$

(C) $2a$

(D) O octaedro regular é inscritível.

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

22 (ITA-SP) Numa pirâmide triangular regular, a área da base é igual ao quadrado da altura H. Seja R o raio da esfera inscrita nessa pirâmide. Desse modo, a razão $\frac{H}{R}$ é igual a:

(A) $\sqrt{\sqrt{3}+1}$

(B) $\sqrt{\sqrt{3}-1}$

(C) $1+\sqrt{3\sqrt{3}+1}$

(D) $1+\sqrt{3\sqrt{3}-1}$

(E) $\sqrt{3}+1$

23 (PUC-RJ) Num cubo de aresta a, inscreve-se uma esfera, depois um cubo nesta esfera, neste último cubo, e assim indefinidamente. O limite da soma dos volumes de todos os cubos será:

(A) $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+1}a^3$

(B) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}a^3$

(C) $\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}a^3$

(D) $\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+2}a^3$

(E) Nenhuma das anteriores.

24 (Fuvest-SP) Um tetraedro tem um triedro trirretângulo de arestas *a*, *b*, c e está circunscrito a uma esfera de raio *r* que tangencia as faces do citado triedro em P, Q e R.
Os lados do triângulo PQR são:

(A) proporcionais a $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$, $\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{b}$ e $\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}$.

(B) proporcionais a *a*, *b* e c.

(C) proporcionais a $\frac{ab}{c}$, $\frac{ac}{b}$ e $\frac{bc}{a}$.

(D) iguais a $r\sqrt{2}$.

(E) perpendiculares às faces do triedro.

25 (Mack-SP) A razão entre a área de uma superfície esférica e a do cubo circunscrito é:

(A) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{8}$

(E) Nenhuma das resposta anteriores.

26 (Cescea-SP) Se V_1 é o volume de uma esfera inscrita num cubo de aresta 10 cm e V_2 é o volume de um cilindro reto de altura 4 cm e raio da base 2 cm, então, $V_1 + V_2$ vale:

(A) $\frac{548\pi}{3}$ cm³

(B) $\frac{148\pi}{3}$ cm³

(C) $\frac{516\pi}{3}$ cm³

(D) 141π cm³

(E) 182π cm³

27 (PUC-RJ) O raio R de uma esfera circunscrita a um tetraedro regular de aresta *a* é:

(A) $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

(B) $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

(C) $R = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

(D) $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

(E) $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

28 Numa esfera de raio R está inscrito um cubo. Sua aresta mede:

(A) $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$

(B) $R\sqrt{2}$

(C) $\frac{2}{3}R$

(D) $R\sqrt{6}$

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

29 (Mack-SP) A razão entre os volumes dos cilindros inscrito e circunscrito num prisma triangular regular é:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{8}$

(D) $\frac{1}{3}$

(E) $\frac{2}{3}$

30 (EESC-USP) Os centros das seis faces de um cubo são vértices de um octaedro regular. A razão entre o volume do primeiro sólido e do segundo é:

(A) $3\sqrt{2}$

(B) 4

(C) $2\sqrt[3]{5}$

(D) 6

(E) $5\sqrt{2}$

31 O volume do cubo circunscrito a uma esfera, em função do volume V da esfera, é:

(A) $\frac{3V}{4\pi}$

(B) $\frac{4V}{3\pi}$

(C) $\frac{6V}{\pi}$

(D) $\frac{\pi}{3V}$

(E) πV

32 Determine a razão entre o volume de um tetraedro e o volume do octaedro cujos vértices são os pontos médios das arestas do tetraedro.

33 (Mack-SP) Um cubo de aresta a tem em cada vértice o centro de uma esfera de raio $\frac{a}{2}$. O volume da parte comum do cubo com as esferas é:

(A) πa^3

(B) $\frac{\pi a^3}{4}$

(C) $\frac{\pi a^3}{6}$

(D) $\frac{\pi a^3}{8}$

(E) $\frac{\pi a^3}{16}$

34 (ITA-SP) Se numa esfera de raio R circunscrevemos um cone reto cuja geratriz é igual ao diâmetro da base, então a expressão do volume deste cone em função do raio da esfera é dada por:

(A) $3 - R^3$

(B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi R^3$

(C) $3\sqrt{3}\,\pi R^3$

(D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi R^3$

(E) n.d.a.

35 (Mack-SP) Um cubo está inscrito numa esfera. Se a área total do cubo é 8, o volume da esfera é:

(A) $\frac{8\pi}{3}$

(B) $\frac{4\pi}{3}$

(C) $\frac{16\pi}{3}$

(D) 12π

(E) 8π

36 (Fuvest-SP) Numa caixa em forma de paralelepípedo retorretângulo, de dimensões 26 cm, 17 cm e 8 cm, que deve ser tampada, coloca-se a maior esfera que nela couber. O maior número de esferas iguais a essa que cabem juntas na caixa é:

(A) 1

(B) 2

(C) 4

(D) 6

(E) 8

37 (UFSE) Cada vértice de um cubo de aresta x é centro de uma esfera de raio $\frac{x}{2}$. O volume da parte comum ao cubo e às esferas é:

(A) $\frac{\pi x^3}{12}$

(B) $\frac{\pi x^3}{8}$

(C) $\frac{\pi x^3}{6}$

(D) $\frac{\pi x^3}{4}$

(E) $\frac{\pi x^3}{2}$

38 (Mack-SP) Seja 36π o volume de uma esfera circunscrita a um cubo. Então a razão entre o volume da esfera e o volume do cubo é:

(A) $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

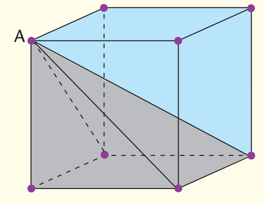
(B) $\frac{8\pi}{3}$

(C) $\frac{2\pi}{3}$

(D) $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$

(E) $\sqrt{3}\pi$

39 (Mack-SP) Na figura a seguir, a pirâmide de vértice A tem por base uma das faces do cubo de lado k.



Se a área lateral dessa pirâmide é $4+4\sqrt{2}$, então o volume do sólido contido no cubo e externo à pirâmide é:

(A) $\frac{8}{3}$

(B) 16

(C) 8

(D) $\frac{4}{3}$

(E) $\frac{16}{3}$

40 (PUC-RJ) Dada a medida ℓ das arestas de um cubo, a área lateral de uma pirâmide que tem para base uma face do cubo e para vértice o centro da face oposta é:

(A) $\sqrt{3}\ell^2$

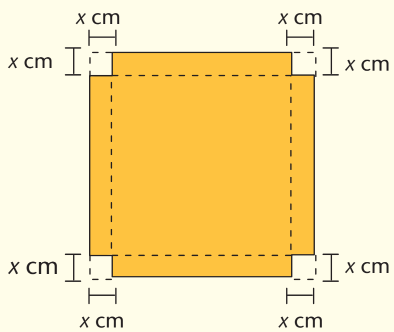
(B) $\sqrt{5}\ell^2$

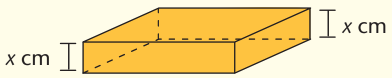
(C) $\frac{4\ell^2}{3}$

(D) $3\ell^2$

(E) Nenhuma das anteriores.

41 (Puccamp-SP) De uma folha quadrada de papelão, com 60 cm de lado, devem ser cortados os quatro cantos, para montar a base inferior e as faces laterais de uma caixa de base quadrada, como mostram as figuras.





Essa caixa será fechada com uma tampa de acrílico e no seu interior serão colocadas bolas com 3 cm de raio, acomodadas em uma única camada ou em várias camadas, dependendo da medida x da altura da caixa. Se todas as camadas devem ter o mesmo número de bolas, a maior quantidade de bolas que podem ser acomodadas é:

(A) 72
(B) 64
(C) 48
(D) 24
(E) 16

42 (UFU-MG) Considere que cada vértice de um cubo de aresta 1 cm é também o centro de uma esfera de raio $\frac{1}{2}$ cm. O volume da região do espaço interna ao cubo e externa às oito esferas é igual a:

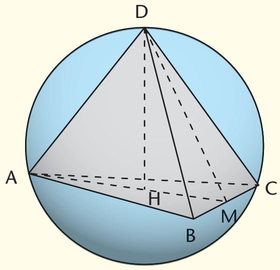
(A) $\frac{12-\pi}{12}$ cm^3

(B) $\frac{3-\pi}{3}$ cm^3

(C) $\frac{6-\pi}{6}$ cm^3

(D) $\frac{2-\pi}{2}$ cm^3

43 Considere o tetraedro regular (4 faces iguais) inscrito em uma esfera de raio R, onde R mede 3 cm.



A soma das medidas de todas as arestas do tetraedro é dada por:

(A) $16\sqrt{3}$ cm

(B) $13\sqrt{6}$ cm

(C) $12\sqrt{6}$ cm

(D) $8\sqrt{3}$ cm

(E) $6\sqrt{3}$ cm

GABARITO

Capítulo I
PROGRESSÕES

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 18

1 a) razão igual a 2 (crescente)
b) razão igual a –8 (decrescente)
c) razão igual a 0 (constante ou estacionária)

2 $a_n = 2n + 2$

3 $a_{40} = 119$

4 $a_1 = -37$

5 $n = 80$

6 $a_{17} = a + 7b$

7 31 mm, 44 mm, 57 mm, 70 mm e 83 mm.

8 27 vezes

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 23

1 25 filas

2 150

3 25 linhas por página

4 $10^{10} \cdot (10^{10} + 1)$

5 $a_8 = 45$

6 S = 1

7 923

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 35

1 a) crescente
b) crescente
c) decrescente
d) decrescente
e) constante ou estacionária
f) oscilante ou alternante

2 $a_n = 2^n$

3 $a_9 = 81$

4 $a_1 = \frac{1}{256}$

5 A razão é $q = 2$. E a PG é (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256).

6 Será R$ 133,10.

7 A razão $q = 1{,}2649$ e o $a_6 \cong 12{,}649$.

8 A

9 (3, 6, 12) ou (12, 6, 3)

10 60,1%

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 44

1 $S_5 = 968$

2 $S_{10} = 29\,524$

3 $\frac{3}{2}$

4 $2a^2$

5 18 m

6 a) $\frac{32}{99}$ b) $\frac{109}{90}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 45

1 A

2 B

3 D

4 70

5 D

6 D

7 B

8 E

9 A

10 A

11 E

12 B

13 E

14 A

15 120°

16 a) 150° b) $\frac{1}{4}$

17 B

18 E

19 A

20 900 latas

21 C

22 E

23 A

24 C

25 B

26 D

27 E

28 A

29 E

30 D

31 $2^{\frac{99}{2}}$

32 D

33 B

34 A

35 D

36 a) 295 b) N = 83

37 a) 120 b) 14 859

38 D

39 A

40 A

41 C

42 A

43 C

44 E

45 D

46 A

47 C

48 2 420 cartas

49 D

50 C

51 C

52 C

53 D

54 E

55 D

56 A

57 C

58 D

59 C

60 a) F c) V
b) V d) V

61 A

62 B

63 C

64 A

65 B

66 E

67 A

68 C

69 a) $\dfrac{1}{1 + \text{tg}\,\theta}$ b) $\dfrac{5}{2}$

70 E

71 A

72 A

73 B

DESAFIOS

1 a) 10 034 e 10 035 c) nível 13
b) 2 508 d) 921 sócios

2 5 049 segmentos

3 127 placas

4 Sugestão:
a) Demonstração.
b) K = 125

5 a) $\dfrac{n^2 + n}{2}$
b) Demonstração.

Capítulo II

NOÇÕES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Página 60

1 a) $\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{4}{5}$

2 a) $\dfrac{3}{2}$
b) Não. A razão entre moças e rapazes até 2 horas foi de $\dfrac{7}{6}$.
c) Às 22 horas.

3 280 km/h

4 D

5 A

6 B

7 D

8 A

9 B

10 C

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Página 66

1 6 dias

2 20 horas diárias

3 2 560 peças

4 10 horas

5 D

6 B

7 R$ 36,00

8 B

9 D

10 C

11 B

12 D

13 E

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Página 71

1 C

2 Comprei 30 de uva, 20 de laranja e 10 de guaraná.

3 80; 60 e 120

4 80; 32 e 20

5 D

6 B

7 A

8 R$ 50,00

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 75

1 A

2 A

3 A

4 A

5 C

6 B

7 A

8 E

9 A

10 D

11 D

12 E

13 C

14 B

15 B

16 D

17 D

18 E

19 A

20 E

21 E

22 A

23 A

24 C

25 B

26 E

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 80

1 D

2 D

3 D

4 B

5 20%

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 86

1 E

2 E

3 E

4 A

5 A

6 B

7 D

8 E

9 A

10 B

11 R$ 100,00

12 a) R$ 3.036,00 b) 51,8%

13 R$ 500,00

14 C

15 B

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 92

1 B

2 A

3 E

4 A

5 B

6 R$ 3.960,00

7 B

8 60%

9 D

10 D

11 D

12 B

13 B

14 C

15 D

16 D

17 B

18 B

19 E

20 C

21 A

22 C

23 A

24 B

25 C

26 C

27 B

28 A

29 A

30 E

31 B

32 E

33 a) Não, M = R$ 288,40.
b) 1,45

34 E

35 a) R$ 280,00 b) R$ 269,00

36 B

Capítulo III
ANÁLISE COMBINATÓRIA

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 105

1 a) 900 b) 648

2 336

3 360

4 C

5 D

6 a) 158 184 000 placas b) ≅ 3,85%

7 a) Resposta pessoal. b) 1 512 melodias

8 C

9 B

10 630

11 50

12 61

13 B

14 2 048 rotas

15 600

16 D

17 C

18 13 440

19 12

20 A

21 250

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 109

1 a) 860 b) 64

2 a) 8 b) 8

3 a) 1 680 b) 210 c) 210 d) 30 e) 480 f) 360 g) 840 h) 144

4 56

5 132

6 420

7 342

8 216 palavras

9 729

10 720

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 117

1 360

2 24

3 24

4 a) 362 800 b) 10 080

5 a) 120 b) 24

6 a) 7! b) 7! · 3! c) 8! d) 8! · 3!

7 a) 8! b) 4! · 4! · 2 c) $4! \cdot 2^4$ d) 2 · 6!

8 18º lugar

9 A

10 a) $\frac{15}{4}$ b) 9! c) $n!$ d) $n^2 \cdot n!$ e) $\frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!}$

11 $n = 7$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 119

1 a) 10 b) 60 c) 60 d) 34 650

2 300

3 a) $\frac{9!}{2! \cdot 2!}$ b) $\frac{8!}{2! \cdot 2!}$ c) $\frac{8!}{2!}$ d) $\frac{8!}{2!} + \frac{8!}{2! \cdot 2!}$

4 $\frac{5!}{2! \cdot 3!}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 123

1 120

2 2 880

3 240

4 a) 20! b) 19!

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 133

1 B

2 56

3 210 copos

4 200

5 2 030

6 1 500

7 a) 120 b) 56

8 98

9 10

10 31

11 8 658

12 a) 210 b) 140 c) 70

13 220 triângulos

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 140

1 a) 15 b) $n = 5$

2 a) 21 b) 56 c) 35

3 a) 6 b) 10 c) 4

4 a) 15 b) 35 c) 15

5 5

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 144

1 D

2 B

3 249

4 E

5 1 e 3

6 B

7 8 462

8 E

9 D

10 160

11 5 760 configurações

12 C

13 840 comissões

14 1 140 planos

15 210 triângulos

16 132 jogos

17 40 retas

18 90

19 110 880

20 1 152

21 161 280

22 58º lugar

23 C

24 A

25 C

26 1 800

27 B

28 72

29 55

30 21

31 17 jogos

32 E

33 C_{80}^{5}

34 792

35 4 950 retas

36 252

37 C

38 76 triângulos

39 C

40 240

41 2 880

42 86 400

43 39 jogos

44 20

45 20

46 B

47 $(4!)^2$

48 3^{10} talões

49 B

50 D

51 210

52 56

53 E

54 7 piadas

55 B

56 B

57 C

58 E

59 45

60 21

61 84

62 C_{16}^{10}

Capítulo IV
BINÔMIO DE NEWTON

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 154

1 $x = 1$

2 $x = -1$ ou $x = 3$

3 a) $x = -1$ ou $x = 4$
b) $x = 1$ ou $x = 2$
c) $x = 2$ ou $x = 3$

4 $\dfrac{x-4}{5}$

5 $x = 6$

6 Demonstração.

7 $n = 3$

8 a) $x = 1$ b) $p = 3$ ou $p = 2$

9 $n = 90$

10 $n = 3$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 160

1 $n = 10$

2 $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3 $\begin{cases} m = 8;\ p = 4 \\ m = 8;\ p = 5 \end{cases}$ ou

4 C_{m+1}^{k}

5 2^m

6 $2^n - 1$

7 32

8 a) $m = 11$ b) $m = 12$

9 zero.

10 $(-1)^p \cdot C_{n-1}^p$

11 $S = 6 \cdot C_{101}^4$

12 C_{56}^5

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 169

1 $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

2 $\dfrac{62048}{729}$

3 $448x^4$

4 70

5 6

6 $59136x^6$

7 153

8 $\dfrac{105}{32}$

9 a) T_{12} b) 1

10 $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11 1

12 $n = 5$; T_{11}

13 $n = 4$; T_6

14 64

15 700

16 1

17 $n = 4$; $C_{16}^8 x^{12}$

18 23,03

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 173

1 D

2 B

3 A

4 B

5 C

6 D

7 D

8 C

9 E

10 B

11 B

12 C

13 B

14 C

15 E

16 D

17 A

18 B

19 8

20 zero.

21 90

22 –126

23 C

24 B

25 96

26 B

27 B

28 C

29 B

30 D

31 A

32 D

33 D

34 B

35 D

36 C

37 C

38 E

39 B

40 D

41 A

42 B

43 B

44 D

Capítulo V
PROBABILIDADE

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 185

1 Ω = {uva, coco, limão, manga, chocolate}

2 Ω = {janeiro, fevereiro, março, abril, maio, junho, julho, agosto, setembro, outubro, novembro, dezembro}

3 a) $\Omega = \{(1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,3); (2,4); (3,1); (3,2); (3,4); (4,1); (4,2); (4,3)\}$
b) $E = \{(1,2); (2,1)\}$
c) $E = \{(1,2); (1,3); (1,4); (2,3); (2,4); (3,4)\}$
d) $E = \varnothing$
e) $E = \{(1,2); (1,4); (2,1); (2,3); (2,4); (3,2); (3,4); (4,1); (4,2); (4,3)\}$
f) $E = \varnothing$

4 a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
b) $E = \{5, 6\}$
c) $E = \{1, 3, 5\}$
d) $E = \{2, 3, 5\}$
e) $E = \{1, 2, 4, 5, 6\}$
f) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
g) $E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
h) $E = \varnothing$

5 a) $E = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
b) $E = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\}$
c) $E = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$
d) $E = \{25\}$
e) $E = \varnothing$

6 a) Lançamentos

$1^o \backslash 2^o$	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

b) E = {(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6)}
c) E = {(2,1); (1,2); (1,1)}
d) E = {(5,1); (4,2); (3,3); (2,4); (1,5)}
e) E = Ø
f) E = o próprio espaço amostral

7 a) Ω = {(V, V); (V, A), (V, P); (A, V); (A, P); (P, V); (P, A)}
b) E = {(V, V)}
c) ~E = {(V, A); (V, P); (A, V); (A, P); (P, V); (P, A}
d) D = {(V, V); (V, A); (V, P)}

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 190

1 $\frac{1}{2}$

2 a) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$
b) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{30}$
c) $\frac{1}{5}$

3 $\frac{1}{3}$ ou 33,33...%

4 $\frac{3}{4}$ ou 75%

5 $\frac{1}{9}$ ou 11,11...%

6 $\frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{9}$

7 $\frac{496}{500}$ ou 99,2%

8 $\frac{4}{9}$

9 $\frac{4}{52}$ ou $\frac{1}{13}$

10 $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ ou 25%

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 198

1 $\frac{2}{3}$ ou ≅ 66,6...%

2 a) $\frac{3}{8}$ ou 37,5% b) $\frac{7}{8}$ ou 87,5%

3 a) $\frac{7}{20}$ ou 35% b) $\frac{13}{20}$ ou 65%

4 $\frac{C_{25}^5}{C_{45}^5} = \frac{230}{5\,289} \simeq 4{,}35\%$

5 a) $\frac{1}{52}$ ou 1,92%
b) $\frac{1}{13}$ ou 7,69%
c) $\frac{48}{52} = \frac{12}{13}$ ou 92,3%

6 $\frac{1}{36}$ ou 2,77%

7 $\frac{1}{28}$ ou 3,57%

8 $\frac{1}{552}$ ou 0,18%

9 a) 3 000 b) $\frac{7}{30}$ ou 23,3%

10 a) 120 b) $\frac{5}{108}$ ou 4,62%

11 a) 20 b) 70%

12 a) 108 b) $\frac{2}{9}$ ou 22,2%

13 $\frac{A_{24}^3}{A_{75}^3} \cong 3{,}0\%$

14 $\frac{1}{10}$ ou 10%

15 a) $\frac{1}{3}$ ou 33,3% b) $\frac{2}{15}$ ou 13,3%

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 203

1 a) $\frac{5}{6}$ ou 83,3% b) $\frac{1}{3}$ ou 33,3%

2 $\frac{2}{3}$ ou 66,6%

3 $\frac{3}{5}$ ou 60%

4 $\frac{7}{12}$ ou 58,3%

5 13%

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 210

1 a) $\frac{1}{4}$ ou 0,25 ou 25%
b) $\frac{1}{7}$ ou 14,2%

2 $\frac{1}{10}$ ou 0,1 ou 10%

3 $\frac{1}{3}$ ou 0,33... ou 33,3%

4 $\frac{27}{50}$ ou 0,54 ou 54%

5 a) $\frac{71}{400}$ ou 17,75%
b) $\frac{1}{4}$ ou 25%

6 a) 2% b) 52,6%

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 221

1 $\frac{1}{4}$ ou 25%

2 $\frac{33}{95}$ ou 34,73%

3 80% ou $\frac{4}{5}$ ou 0,8

4 a) $\frac{7}{8}$ ou 87,5%
b) $\frac{1}{3}$

5 a) 150 b) 9%

6 a) $\frac{1}{12}$ ou 8,33%
b) $n > \log_{\frac{5}{6}} 0{,}5$ ou ($n \geq 4$, pois $\log_{\frac{5}{6}} 0{,}5 \cong 3{,}8$)

7 a) $\frac{3}{8}$ ou 37,5%
b) $\frac{1}{2}$ ou 50%

8 $\frac{3}{5}$ ou 60%

9 a) Construir árvore de possibilidades.
b) 2,80%
c) 10,9%

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 222

1 a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{16}$

2 $\frac{1}{3}$

3 $\frac{9}{190}$

4 E

5 C

6 B

7 A

8 D

9 7,2%

10 $\frac{1}{2}$

11 $\frac{3}{5}$ ou 60%

12 $\frac{3}{8}$ ou 37,5%

13 E

14 E

15 B

16 B

17 B

18 a) 80% b) 20% c) 20%

19 A

20 C

21 C

22 C

23 D

24 A

25 A

26 7

27 C

28 B

29 C

30 B

31 D

32 B

33 C

34 0,73

35 E

36 a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{36}$ c) $\frac{6}{11}$

37 $\frac{1}{64}$

38 C

39 C

40 A

41 A

42 $\frac{1}{12}$

43 C

44 B

45 B

46 A

47 $\frac{1}{8}$

48 a) 120 b) $\frac{5}{108}$

49 C

50 a) X = 11 b) $\frac{7}{25}$

51 a) 87 500 b) $\frac{2}{7}$

52 D

53 a) $\frac{1}{945}$ b) $\frac{8}{63}$

54 $\frac{3}{40}$

55 $\frac{7}{27}$

56 E

57 $\frac{13}{18\,424}$

58 a) $x = 400$, $y = 1\,100$, $z = 300$ e $w = 1\,400$

b) $\frac{1}{5}$

59 $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$

Capítulo VI
MATRIZES

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 239

1 a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 $\sqrt{2}$

3 48

4 a) 2ª linha

b) 107ª coluna

5 a) 3 unidades

b) 33 unidades

6 $a = 2$; $b = -5$; $x = 1$ e $y = 2$

7 Não existem.

8 $x = 2$; $y = 4$; $z = 1$; $w = 1$

9 $x = -3$; $y = 5$; $z = \pm 9$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 245

1 a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

2 $l_1 = \sqrt{2}$; $l_2 = \sqrt{6}$ e $l_3 = \sqrt{10}$

3 $a_{13} = \sqrt{3}$

4 verdadeira

5 B

6 a) $K = \frac{S}{3}$ b) $e = \frac{S}{9}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Página 254

1 a) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

d) não existe i) $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

e) não existe j) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

3 $x = -2$

4 $T = \begin{bmatrix} 4 & 32 & -8 \\ -12 & 20 & 28 \end{bmatrix}$

5 $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{2} & -8 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \\ 8 & \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$

6 $n = 10$

7 a) tr A = 5 b) tr B = 4

8 A

9 C

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Página 266

1 a) $(AB)_{2 \times 4}$ d) não existe

b) não existe e) $(A \cdot A^t)_{2 \times 2}$

c) não existe

2 a) $[56]$ c) $\begin{bmatrix} 35 \\ 33 \\ -5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 16 & -8 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 0 & -9 & 6 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

4 94

5 $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

6 $a = 1$ e $b = -1$

7 $x = 2$, $y = 2$ e $z = 4$

8 a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ \frac{5}{2} & 5 \end{bmatrix}$

9 a) R$ 32.000,00 em A;

R$ 8.000,00 em B.

b) $\begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}30 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RC \\ C \end{bmatrix}$

10 $\begin{bmatrix} 2^{1998} & 0 \\ 0 & 2^{1998} \end{bmatrix}$

11 a) $\begin{bmatrix} 25 & 50 & 200 & 20 \\ 28 & 60 & 150 & 22 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1{,}00 & 1{,}00 \\ 8{,}00 & 10{,}00 \\ 0{,}90 & 0{,}80 \\ 1{,}50 & 1{,}00 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 635 & 705 \\ 676 & 770 \end{bmatrix}$; R$ 164,00

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Página 272

1 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

2 a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

b) Não admite inversa.

3 $\begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

4 I) V II) V III) F IV) F V) V

5 a) $X = A^{-1} \cdot (C - B)$

b) $X = (C - B) \cdot (A - I)^{-1}$

6 a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4\,096 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix} a & -a+1 \\ a+1 & -a \end{bmatrix}$ é inversa de si mesma.

8 $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -2 \\ \frac{5}{6} & -4 \end{bmatrix}$

9 C

10 E

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

Página 273

1 C

2 D

3 D

4 E

5 A

6 A

7 C

8 A

9 B

10 D

11 D

12 D

13 E

14 D

15 D

16 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17 B

18 C

19 A

20 W = 65%

21 $\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

22 B

23 E

24 a) $\begin{bmatrix} 1 & \text{sen } 2x \\ \text{sen } 2x & 1 \end{bmatrix}$

b) $\{0; 2\pi\}$

25 C

26 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

27 A

28 B

29 X = (18, 14, 11), que é SOL.

30 C

31 A

32 E

33 C

34 $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}$

35 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

36 C

37 E

38 a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

b) 3

39 D

40 D

41 A

42 A

Capítulo VII
DERTERMINANTE DE UMA MATRIZ QUADRADA

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 286

1 a) 22 b) –10

2 E

3 $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 7\}$

4 a) {–1, 4} b) {0, 3}

5 2

6 a) 61 b) 169

7 $\frac{A}{B} = 4$

8 a) $x = 1$ ou $x = 4$ b) $x = 1$

9 $x = 1$ ou $x = 5$

10 $k = 37$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 293

1 –148

2 Sim, são iguais $a = -2$.

3 –36

4 $-\frac{2}{3}\begin{vmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 1 & -21 & 3 \\ 1 & 30 & -30 \end{vmatrix}$

5 É verdadeira a igualdade.

6 É verdadeira a igualdade.

7 É verdadeira a igualdade.

8 $x = a$

9 $\text{sen}(a - b) + \text{sen}(b - c) + \text{sen}(c - a)$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 301

1 $x \cdot y$

2 Não há resposta única; uma possibilidade é $\begin{vmatrix} -17 & 12 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 23 & -17 & 19 \end{vmatrix}$.

3 Zero.

4 Demonstração.

5 O determinante fica ao final assim: $\begin{vmatrix} 8 & 9 & 891 \\ 3 & 7 & 374 \\ 4 & 6 & 462 \end{vmatrix}$.

6 $-16k^3$

7 det A = 6 e det T = 6

8 a) 5A b) A c) 30A

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 312

1 769

2 12

3 $x = -1$, ou $x = -2$ ou $x = 3$

4 a) 0, pois C_1 ou C_4 são iguais a zero.
b) 0, pois $C_4 = C_2 - C_3$.

5 Demonstração.

6 $x = -5$

7 12

8 $m^2 + n^2 + p^2 - 2mn - 2mp - 2np$ ou $(m + n - p)^2 - 4mn$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 313

1 D

2 1

3 B

4 E

5 61

6 A

7 1

8 C

9 A

10 C

11 A

12 C

13 D

14 D

15 B

16 E

17 B

18 E

19 B

20 A

21 a) $\frac{1}{5}$ b) zero.

22 D

23 B

24 E

25 C

26 B

27 $\left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\right\}$

28 D

29 B

30 C

31 A

32 C

33 C

34 A

35 E

Capítulo VIII
SISTEMAS LINEARES

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 326

1 a) Coeficientes: –2, 3 e –6; termo independente: 3.
b) Coeficientes: 4, 3 e –6; termo independente: 0.

2 Sim.

3 Sim.

4 Não.

5 a) $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -8 \end{array}\right]$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right]$ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

6 Sim.

7 Não.

8 a) S = {(2, 2)}
b) S = {(2, 4)}
c) S = {(+4, –2)}
d) S = {(–1, 2)}
e) S = {(0, –10, –5)}
f) $S = \left\{\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)\right\}$
g) S = {(6, 3, 2)}
h) S = {(1, 2, 3)}
i) S = {(3, –2, 2)}
j) $S = \left\{\left(2, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right)\right\}$
k) S = {(2, –3, 5)}
l) S = {(sen α, cos α)}
m) S $\Rightarrow$ O sistema é indeterminado, tendo solução geral dada por $(-\alpha; -1 - \lambda; \lambda)$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 334

1 Para $a \neq 2$, o sistema é possível determinado.
Para $a = 2$, o sistema é impossível.

2 a) O sistema é impossível.
b) O sistema é possível determinado; solução única: S = {(–3, 1)}.
c) Solução única: S = {(4, 4)}.
d) O sistema é impossível; S = ∅.
e) O sistema é possível indeterminado, solução geral: $S = \left\{\left(\frac{13}{5}; \frac{15k+1}{5}; k\right)\right\}$.
f) Solução única: S = {(0, 1, 1)}.
g) Se $a \neq 1$ e $a \neq -1$, o sistema é possível determinado; se $a = 1$, o sistema é impossível; se $a = -1$, o sistema é indeterminado.

3 S = {(4, –2)}

4 S = {(3, 5)}

5 S = {(1, 2, –1)}

6 $k \neq -9$

7 a) S = {(–1, 1)}
b) S = {(0, 0); (0, 2)}

8 a) $S = \left\{\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)\right\}$ b) S = {(–4k, 2k, k)}

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 339

1 a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

c) A matriz não admite inversa.

d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2 $x \neq 1$

3 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

4 a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$

d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{8}{15} & \frac{2}{5} \\ -1 & \frac{9}{15} & \frac{6}{15} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{15} & -\frac{1}{15} \end{pmatrix}$

e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{72} & \frac{1}{252} & \frac{1}{504} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{28} & \frac{1}{56} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

f) Não existe A^{-1}.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 349

1 a) V = {(6, –1)}
b) V = {(2, 0)}
c) V = ∅
d) V = ∅
e) V = {(1, 1, 1)}
f) V = {(1, 2, 3)}

g) V = {(–1, 0, 1)}
h) V = {(1, 1, 1, 1)}
i) V = {(11, –1, –2, –3, –4)}

2 $a \neq 2$: possível e determinado
$a = -2$: possível e indeterminado
$a = +2$: impossível

3 a) $m \neq 2$: sistema indeterminado
$m = 2$: sistema impossível
b) $k \neq 10$: sistema determinado
$k = 10$: sistema indeterminado
c) $k \neq 1$; $k \neq 0$, sistema possível e determinado
$k = 1$; sistema impossível
$k = 0$; sistema possível e indeterminado

4 $m = -4$

5 5 mesas.

6 R$ 1.900,00

7 8,9 F

8 Faca: R$ 5,50; colher: R$ 3,00; garfo: R$ 4,00

9 $a = 2$

10 $a = 3$ e $b = 4$

11 a) $S = \left\{\left(\frac{13}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ b) $m = -9$ e $n = \frac{1}{3}$

12 a) $m \neq -3$
b) $S = \{(3\alpha, -\alpha, \alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$

13 $x = 1$; $y = 1$ e $z = -2$

14 a) $\begin{cases} x + y + z = 0{,}5 \\ 5x + 20y + 16z = 5{,}75 \\ y = \frac{1}{3} \cdot (x + z) \end{cases}$
em que x, y e z são as quantidades de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará.
b) $x = 250$ g; $y = 125$ g e $z = 125$ g.

15 a) Se $m \neq 1$, há uma só solução, sistema determinado.
b) $m = -1$ e $p = 80$, sistema indeterminado, infinitas soluções.
c) $m = -1$ e $p \neq 80$, sistema impossível, não há solução.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 353

1 a) V = {(0, 0)} c) V = {(0, 0, 0)}
b) V = {(0, 0)} d) V = {(0, 0, 0)}

2 Para $k \neq 6$.

3 Se $k = -3$, então $S = \{(\alpha, \alpha, 0); \alpha \in \mathbb{R}\}$.
Se $k = 2$, então $S = \{(-11\beta, 9\beta, 5\beta); \beta \in \mathbb{R}\}$.
Caso contrário, ($k \neq 2$ e $k \neq -3$), S = {(0, 0, 0)}.

4 a) 1 e –2
b) $S = \{(\alpha, \alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$

5 a) $a = -4$ b) $a = -1$ ou $a = \frac{5}{2}$

6
- $a \neq 0$ e $a \neq 1$, sistema possível e determinado.
- $a = 0$ ou $a = 1$, sistema possível e indeterminado.

7 a) Demonstração.
b) $S = \{(\alpha, -\alpha, 0), \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 354

1 E

2 D

3 A

4 C

5 Uma reta.

6 –37; 8; 39 e 40

7 $V = \left\{\left(-\frac{15}{17}; \frac{25}{6}\right)\right\}$

8 a) $m = -7$; $n = -5$ b) (0, –13, –6)

9 $a = \frac{10}{3}$ e $b = 10$

10 A

11 5

12 a) Demonstração.
b) Demonstração.

13 $\{a \in \mathbb{R} \mid a \neq 0\}$

14 B

15 D

16 C

17 C

18 C

19 D

20 A

21 D

22 D

23 E

24 D

25 B

26 E

27 D

28 B

29 B

30 E

31 C

32 C

33 A

34 A

35 A

36 C

37 a) F b) V c) F d) F

38 B

39 a) R$ 1,10 b) R$ 18,40

40 B

41 D

42 15 de A; 4 de B e 2 de C.

43 R$ 4,00; R$ 13,00 e R$ 5,00

44 A

45 C

46 100 W; 60 W; 150 W

47 B

48 C

49 5 e 10 litros.

50 4; 6 e 6

51 E

52 C

53 7; 8 e 10

54 C

55 a) 5 b) 9

56 325 km

57 8

58 C

59 $t = 40$; $m = 20$ e $p = 30$

60 200 g; 400 g e 400 g

61 A

62 B

63 B

64 $\alpha = 2$; $S = \left\{\left(\frac{7}{5} - t;\ t + \frac{4}{5};\ t\right) \middle|\ t \in \mathbb{R}\right\}$

$t = \frac{7}{5} \Rightarrow (x, y, z) = \left(0, \frac{11}{5}, \frac{7}{5}\right)$

$t = 0 \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$

65 E

66 $16 < x < 20$

67 C

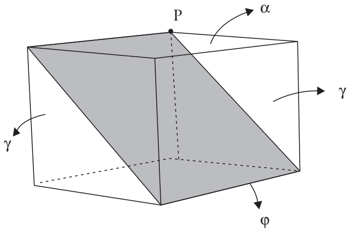
68 B

69 E

Capítulo IX
GEOMETRIA ESPACIAL

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 371

1 Infinitos planos passam por P. Veja, por exemplo, a figura a seguir, onde destacamos pelo menos 4 planos.



2 a) V b) V c) V d) V e) F f) F g) V h) V i) F j) F k) V l) F m) F n) F o) F p) F q) F r) F

3 quatro

4 $C_7^3 = 35$ planos.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 381

1 B

2 A

3 I) a) F b) F c) V d) F
II) a) V b) F c) V d) V

4 a) F b) V c) F d) F e) V f) F g) V h) V

5 D

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 386

1 a) V b) F c) F d) F e) V f) V g) F h) V i) V

2 D

3 E

4 A

5 E

6 E

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 396

1 a) $2\sqrt{2}$ cm
b) $2\sqrt{2}$ cm
c) $2\sqrt{3}$ cm
d) $2\sqrt{3}$ cm
e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
f) $\frac{2\sqrt{6}}{9}$
g) $\sqrt{2}$ cm

2 A

3 90°

4 60°

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 397

1 B

2 C

3 B

4 A

5 C

6 E

7 E

8 E

9 E

10 B

11 E

12 E

13 E

14 A

15 A

16 C

17 C

18 D

19 E

20 A

21 $PB = PC = a\sqrt{2}$

22 $AM = a\sqrt{2}$

23 $OM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

24 12 cm

25 Perímetro 12 cm e $\alpha = 60°$.

26 DE = 9 cm; EF = 12 cm

27 13 cm

28 42 cm

Capítulo X
DIEDROS E TRIEDROS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 412

1 54°

2 60°

3 14 m

4 B

5 E

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 422

1 40°

2 96°

3 66°

4 74° 46′

5 45°; 90°; 90°

6 45°; 120°

7 a) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

b) $\theta = \arccos\left(\frac{4\sqrt{5}}{15}\right)$

8 13,3 cm

9 14,07 cm

10 $a\frac{\sqrt{3}}{2}$

11 45°

12 $a\frac{\sqrt{6}}{6}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 433

1 D

2 D

3 $110° < c < 170°$

4 a) $a\sqrt{2}$; $a\sqrt{3}$; $a\sqrt{2}$

b) $a\frac{\sqrt{2}}{2}$; $a\frac{\sqrt{2}}{2}$; $a\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $a\frac{\sqrt{6}}{3}$

5 $a\frac{\sqrt{3}}{3}$

6 60°

7 120°

8 VA = 117 m; VB = 44 m; VC = 240 m

9 105°; 90°; 75°

10 72°

11 67° 30′ e 112° 30′

12 90 cm^2

13 $\frac{\sqrt{481}}{16}$

14 25 cm

15 4,62 cm

16 B

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 435

1 D

2 C

3 E

4 10 cm

5 A

6 A

7 B

8 a) $9\frac{\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

9 A

10 1 cm

11 A

12 OS = $a\frac{\sqrt{6}}{6}$

13 AD = $a\frac{\sqrt{3}}{2}$; $3\frac{a}{4}$

Capítulo XI
POLIEDROS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 443

1 6

2 a) 0 b) 3 c) 4

3 B

4 a) V = 20 c) 6 840°
b) 60 d) 155 diagonais.

5 E

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 449

1 E

2 F = 8

3 V = 12

4 A = 31

5 F = 11

6 B

7 V = 9

8 V = 10

9 A = 15 e V = 10

10 8 faces triangulares e 4 faces quadrangulares.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 454

1 Icosaedro.

2 A = 30 e V = 20

3 F = 5, V = 6 e 1ª = 0

4 Tetraedro, hexaedro e dodecaedro.

5 $180\sqrt{3}$ cm^2 e 180 cm

6 3 600°

7 10 triangulares e 2 pentagonais.

8 5 quadrangulares e 2 pentagonais.

9 5 quadrangulares e 10 triangulares.

10 C

11 D

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

Página 455

1 D

2 E

3 D

4 B

5 C

6 A

7 F = 12

8 F = 17, A = 35, V = 20, $S_i = 648°$ e D = 133

9 C

10 D

11 A

12 D

13 D

14 D

15 C

16 C

17 a) V = 12, F = 8 e A = 18

b) $7\sqrt{3}\,a^2$

18 E

19 B

Capítulo XII
PRISMAS E CILINDROS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Página 467

1 94 m²

2 $240 + 75\sqrt{3}$ m² ou $5\left(48 + 15\sqrt{3}\right)$ m²

3 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ m

4 $A_t = 192\sqrt{3}$ m²

5 6 dm

6 56%

7 $\frac{\sqrt{7}}{7}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Página 472

1 $a = 5$ cm

2 $D = 2\sqrt{3}$ m

3 15 m

4 $A_t = 2D^2$

5 15 m

6 3 cm, 4 cm e 5 cm

7 a) Projeto 1: R$ 4.820,00

Projeto 2: R$ 5.000,00

b) $C(x) = \frac{8\,000}{x} + 20x + 4\,000$

8 15

9 2 m, 3 m e 4 m

10 8 cm, 6 cm e 1 cm

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Página 486

1 2 m

2 168 m³

3 $\frac{1}{8}$

4 81 m³

5 $54\sqrt{3}$ cm³

6 $V = 48\sqrt{119}$ dm³

7 738 dm²

8 $\ell = 5$ m, $h = 12$ m e $A_t = 180$ m²

9 $PC = \sqrt{29}$ e $PD = \sqrt{33}$

10 V = 8

11 B

12 D

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Página 501

1 $V = 4\pi h^3$

2 120 m

3 $h = 2$ cm

4 0,3768 mℓ

5 96π cm²

6 750 ℓ

7 a) 60 cm²

b) $A_s = 36$ cm²

8 Aproximadamente 4 g de ouro.

9 40π cm² e 24π cm³

10 150π cm²

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

Página 506

1 A

2 A

3 C

4 B

5 C

6 E

7 C

8 D

9 E

10 C

11 B

12 C

13 A

14 B

15 C

16 B

17 D

18 E

19 B

20 C

21 B

22 A

23 A

24 C

25 C

26 E

27 A

28 C

29 B

30 C

31 $\left(6 + \frac{13}{3}\pi\right)$ unidades

32 $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

33 $\overline{AI} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$

$\overline{AJ} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$

$\overline{IJ} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$

34 $5\sqrt{2}$ cm

35 C

36 B

37 B

38 A

39 E

40 A

41 D

42 B

43 E

44 D

45 D

46 V, V, V, V, F

47 E

48 B

49 $200\sqrt{17}$ m

50 D

51 B

52 B

53 A

54 2 m/s

55 C

56 C

57 B

58 D

59 C

60 B

61 C

62 B

63 E

64 C

65 C

66 V, F, F, V, F

67 B

68 B

69 A

70 D

71 B

72 B

73 A

74 B

75 D

76 D

Capítulo XIII
PIRÂMIDES E CONES

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 553

1 A

2 B

3 a) $\frac{a^3}{6}$ b) $\frac{1}{3}$

4 I) F II) V III) V IV) F

5 D

6 E

7 E

8 C

9 A

10 A

11 D

12 B

13 D

14 E

15 5 = 01 + 04

16 C

17 C

18 $\frac{2}{3}\ell^2$

19 C

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 576

1 C

2 C

3 D

4 C

5 $200\pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ cm²

6 B

7 B

8 C

9 B

10 $\beta = 2\pi \text{ sen } \alpha$

11 C

12 B

13 $9\sqrt{3}$ m

14 C

15 D

16 D

17 B

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

Página 579

1 B

2 B

3 B

4 C

5 E

6 $V = 1\,000\ cm^3$

7 B

8 A

9 C

10 D

11 E

12 B

13 A

14 E

15 A

16 B

17 B

18 A

19 C

20 C

21 A

22 A

23 a) $2\sqrt{2}$ m b) $8\ m^2$ c) $\frac{8\sqrt{2}}{3}\ m^2$

24 D

25 C

26 D

27 $d = H\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$

28 C

29 B

30 15 m

31 C

32 1, 7 e 19

33 B

34 C

35 D

36 C

37 E

38 E

39 A

40 C

41 D

42 E

43 E

44 C

45 D

46 B

47 E

48 A

49 A

50 A

51 C

52 A

53 B

54 5 = 01 + 04

55 E

56 A

57 E

58 D

59 E

60 C

61 D

62 6 cm

63 E

64 D

65 A

66 B

67 E

68 B

69 B

70 A

71 C

72 E

73 A

74 D

75 B

76 C

77 E

78 B

79 D

80 44 = 04 + 08 + 32

81 A

82 E

83 C

84 C

85 D

86 B

87 A

88 A

89 C

90 B

91 D

92 C

93 D

94 A

95 E

96 E

97 D

98 C

99 A

100 C

101 $V = \dfrac{12\pi R^2}{5}(10 - R)\ cm^3$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < R < 10\}$

102 B

CAPÍTULO XIV
ESFERAS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 606

1 72,34 cm^2

2 $16\pi\ cm^2$

3 12,06 m^2

4 0,2070 m^2

5 33,72 cm

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 637

1 E

2 $r = \dfrac{1}{2}$ m e R = 1 m

3 E

4 D

5 E

6 C

7 E

8 D

9 E

10 C

11 E

12 D

13 A

14 D

15 O raio deve ser multiplicado por $\sqrt[3]{a}$.

16 E

17 B

18 D

19 E

20 D

21 C

22 C

23 E

24 D

25 E

26 a) $\overline{AB} = \sqrt{2Rm}$
b) Demonstração.

27 a) $h = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $V = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

b) Demonstração.

c) $r = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

28 A

29 B

30 C

31 A

32 D

33 D

34 A

35 A

36 B

37 D

38 D

39 C

40 A

41 B

42 E

43 C

44 A

45 B

46 B

47 D

48 D

49 A

50 E

51 1) V 2) V 3) V 4) V

52 C

53 D

54 E

55 B

56 D

57 E

58 D

59 D

60 B

61 A

62 C

63 C

64 B

65 D

66 D

67 C

68 A

69 E

70 14 = 02 + 04 + 08

71 30 = 02 + 04 + 08 + 16

72 D

73 B

74 B

75 A

76 D

77 C

78 zero.

79 a) $\frac{R}{4}$ b) Sim.

80 a) 8π b) $\frac{32\pi}{3}$

81 D

Capítulo XV
POLIEDROS REGULARES

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 680

1 $y = \frac{x\sqrt{2}}{2}$

2 $\frac{2}{7}$

3 $\frac{3}{4}$

4 $144\sqrt{3}$ m^3

5 a) 3 b) $a^2\sqrt{5}$

6 $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 681

1 D

2 $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

3 D

4 D

5 D

6 D

7 D

8 $\frac{\ell^3}{6}$

9 D

10 D

11 B

12 a) F b) F c) V d) F

13 C

14 E

15 B

16 C

17 C

18 D

19 D

20 A

21 A

22 C

23 C

24 D

25 A

26 A

27 A

28 A

29 B

30 D

31 C

32 2

33 C

34 A

35 B

36 D

37 C

38 A

39 E

40 B

41 A

42 B

43 C

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

Símbolo	Significado	Seção (página)
lim	limite (de uma soma)	1.2.5 (p. 37)
$\neq$	diferente	2.1 (p. 56)
%	dividido por 100 (por cento)	2.5 (p. 72)
$\cong$	aproximadamente igual	2.6.2 (p. 82)
!	fatorial	3.1 (p. 104)
A_n^p	arranjos simples de n elementos, p a p	3.2.1 (p. 107)
$(AC)_n^p$	arranjos completos de n elementos, p a p	3.2.2 (p. 108)
P_n	permutações de n elementos	3.3.1 (p. 110)
$P_n^{\alpha,\beta,\ldots}$	permutações com elementos repetidos	3.3.2 (p. 118)
$(PD)_n$	permutações circulares	3.3.3 (p. 120)
C_n^p ou $\binom{n}{p}$	combinações de n elementos, p a p	3.4.1 (p. 124)
$(CC)_n^p$	combinações completas de n elementos, p a p	3.4.2 (p. 134)
Σ	somatória	4.1.3 (p. 155)
$\notin$	não pertence a; não é elemento de	4.2 (p. 164)
$\leq$	menor ou igual a	4.2 (p. 166)
$p(E)$	probabilidade do evento E	5.3.1 (p. 189)
$\overline{A}$	evento complementar de A	5.4.1 (p. 194)
$p(B\|A)$	probabilidade condicional de B, dado A	5.5 (p. 204)
$\wedge$	e (conectivo lógico)	6.1.3 (p. 233)
I	matriz identidade	6.1.6 (p. 235)
A^t	matriz transposta de A	6.2 (p. 240)
$-A$	matriz oposta de A	6.3.3 (p. 248)
tr M	traço da matriz M	6.3.5 (p. 253)
$\nexists$	não existe	6.4 (p. 258)
A^{-1}	matriz inversa de A	6.5 (p. 267)
det S	determinante da matriz S	7.1 (p. 280)
$\overleftrightarrow{AB}$	reta AB	9.1 (p. 364)
$\overrightarrow{AB}$	semirreta AB	9.1 (p. 364)
$\overline{AB}$	segmento de reta AB	9.1 (p. 364)
$r \mathbin{//} \alpha$	reta r paralela ao plano α	9.2.1 (p. 369)
$\equiv$	coincidente	9.2.2 (p. 370)
$r \perp \alpha$	reta r perpendicular ao plano α	9.3.1 (p. 385)
$O\hat{D}C$	ângulo ODC	9.3.1 (p. 386)
$\triangle BJD$	triângulo BJD	9.3.4 (p. 391)

ALFABETO GREGO

Letra maiúscula	Letra minúscula	Nome em português
Α	α	Alfa
Β	β	Beta
Γ	γ	Gama
Δ	δ	Delta
Ε	ε	Épsilon
Ζ	ζ	Zeta
Η	η	Eta
Θ	θ	Teta
Ι	ι	Iota
Κ	κ	Capa
Λ	λ	Lambda
Μ	μ	Mi
Ν	ν	Ni
Ο	ο	Ômicron
Π	π	Pi
Ξ	ξ	Csi
Ρ	ρ	Rô
Σ	σ	Sigma
Τ	τ	Tau
Υ	υ	Ípsilon
Φ	φ	Fi
Χ	χ	Qui
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Ômega

SIGNIFICADO DAS SIGLAS

Cefet-MG – Centro Federal de Educação Tecnológica (Minas Gerais)
Cefet-PR – Centro Federal de Educação Tecnológica (Paraná)
Cescea-SP – Centro de Seleção de Candidatos às Escolas de Administração (São Paulo)
Cescem-SP – Centro de Seleção de Candidatos às Escolas Médicas (São Paulo)
Cesgranrio-RJ – Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio (Rio de Janeiro)
Cice-RJ – Comissão Interdisciplinar de Concurso de Engenharia (Rio de Janeiro)
Covest-PE – Comissão do Vestibular das Universidades Federal e Federal Rural de Pernambuco
EESC-USP – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo
Enem – Exame Nacional do Ensino Médio
Esal-MG – Escola Superior de Agricultura de Lavras (Minas Gerais)
ESCCAI-MG – Escola Superior de Ciências Contábeis e Administrativas de Ituiutaba (Minas Gerais)
ESPM-SP – Escola Superior de Propaganda e Marketing (São Paulo)
FCChagas-SP – Fundação Carlos Chagas (São Paulo)
Faap-SP – Fundação Armando Alvares Penteado (São Paulo)
Facs-BA – Faculdade de Salvador (Bahia)
Fafi-MG – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (Minas Gerais)
Fama-SP – Faculdade de Mauá (São Paulo)
Fatec-SP – Faculdade de Tecnologia de São Paulo
FCMSC-SP – Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa de São Paulo
FEI-SP – Faculdade de Engenharia Industrial (São Paulo)
Fepam-MG – Fundação Educacional de Patos de Minas (Minas Gerais)
FGV-RJ – Fundação Getulio Vargas (Rio de Janeiro)
FGV-SP – Fundação Getulio Vargas (São Paulo)
FGV-Eaesp – Fundação Getulio Vargas, Escola de Administração de Empresas de São Paulo
FMABC-SP – Faculdade de Medicina do ABC (São Paulo)
Funrei-MG – Fundação de Ensino Superior de São João del Rei (Minas Gerais)
Furg-RS – Fundação Universidade Federal do Rio Grande (Rio Grande do Sul)
Fuvest-SP – Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)
IBMEC-RJ – Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais (Rio de Janeiro)
IBMEC-SP – Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais (São Paulo)
IME-RJ – Instituto Militar de Engenharia (Rio de Janeiro)
ITA-SP – Instituto Tecnológico de Aeronáutica (São Paulo)
Mack-SP – Universidade Presbiteriana Mackenzie (São Paulo)
Mauá-SP – Instituto Mauá de Tecnologia (São Paulo)
Osec-SP – Organização Santamarense de Educação e Cultura (São Paulo)
Poli-SP – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Puccamp-SP – Pontifícia Universidade Católica de Campinas (São Paulo)
PUC-MG – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

PUC-PR – Pontifícia Universidade Católica do Paraná
PUC-RJ – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC-RS – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUC-SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
UA-AM – Universidade do Amazonas
UCDB-MS – Universidade Católica Dom Bosco (Mato Grosso do Sul)
UCDB-MT – Universidade Católica Dom Bosco (Mato Grosso)
UCG-GO – Universidade Católica de Goiás
UCPel-RS – Universidade Católica de Pelotas (Rio Grande do Sul)
Ucsal-BA – Universidade Católica de Salvador (Bahia)
Udesc – Universidade do Estado de Santa Catarina
Uece – Universidade Estadual do Ceará
UEG-GO – Universidade Estadual de Goiás
UEL-PR – Universidade Estadual de Londrina (Paraná)
Uepa – Universidade do Estado do Pará
UEPG-PR – Universidade Estadual de Ponta Grossa (Paraná)
UEPR – Universidade Estadual do Paraná
Uerj – Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Uespi – Universidade Estadual do Piauí
Ufal – Universidade Federal de Alagoas
Ufam – Universidade Federal do Amazonas
UFBA – Universidade Federal da Bahia
UFC-CE – Universidade Federal do Ceará
Ufes – Universidade Federal do Espírito Santo
UFF-RJ – Universidade Federal Fluminense (Rio de Janeiro)
UFG-GO – Universidade Federal de Goiás
UFJF-MG – Universidade Federal de Juiz de Fora (Minas Gerais)
Ufla-MG – Universidade Federal de Lavras (Minas Gerais)
UFMA – Universidade Federal do Maranhão
UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais
UFMS – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Ufop-MG – Universidade Federal de Ouro Preto (Minas Gerais)
UFPA – Universidade Federal do Pará
UFPB – Universidade Federal da Paraíba
UFPE – Universidade Federal de Pernambuco
UFPI – Universidade Federal do Piauí
UFPR – Universidade Federal do Paraná
UFRGS-RS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFRRJ – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina
UFSCar-SP – Universidade Federal de São Carlos (São Paulo)
UFSE – Universidade Federal de Sergipe
UFSM-RS – Universidade Federal de Santa Maria (Rio Grande do Sul)

UFTM-MG – Universidade Federal do Triângulo Mineiro (Minas Gerais)
UFU-MG – Universidade Federal de Uberlândia (Minas Gerais)
UFV-MG – Universidade Federal de Viçosa (Minas Gerais)
UMC-SP – Universidade de Mogi das Cruzes (São Paulo)
Umesp – Universidade Metodista de São Paulo
UNB-DF – Universidade de Brasília (Distrito Federal)
Unesp-SP – Universidade Estadual Paulista (São Paulo)
Unicamp-SP – Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)
Unicap-PE – Universidade Católica de Pernambuco
Unic-MT – Universidade de Cuiabá (Mato Grosso)
Unificado-RJ – Vestibular unificado (Rio de Janeiro)
Unifor-CE – Universidade de Fortaleza (Ceará)
Unilins – Centro Universitário de Lins (São Paulo)
Unioeste-PR – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Unirio-RJ – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Unirio-Ence-RJ – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Escola Nacional de Ciências Estatísticas (Rio de Janeiro)
Unisinos-RS – Universidade do Vale do Rio dos Sinos (Rio Grande do Sul)
Unitau-SP – Universidade de Taubaté (São Paulo)
UPE – Universidade de Pernambuco
USP – Universidade de São Paulo
Vunesp-SP – Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista (São Paulo)