COLEÇÃO APRENDER

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA

para o ensino médio – volume II

MANUAL DO PROFESSOR

Miguel Jorge
Mestre em Educação Matemática pela USU-RJ
Bacharel e licenciado em Matemática pela Uerj
Professor da Fundação Getulio Vargas – FGV-RJ
Professor do Colégio Santo Inácio – Rio de Janeiro – RJ
Engenheiro eletricista com especialização de Engenharia Econômica pela UFRJ

Ralph Costa Teixeira
Doutor em Matemática pela Universidade de Harvard, EUA
Mestre em Matemática pelo Impa-RJ
Engenheiro de Computação pelo IME-RJ
Professor adjunto da UFF-RJ

Thales do Couto Filho
Bacharel e licenciado em Matemática pela Sesni-RJ
Engenheiro mecânico pela UFRJ
Professor da PUC-RJ
Professor do Colégio Santo Inácio, Colégio Zacarias e da rede pública estadual do Rio de Janeiro

Felipe Ferreira da Silva
Licenciado em Matemática pela PUC-RJ
Professor do Colégio Santo Inácio e da Escola SESC de Ensino Médio – Rio de Janeiro – RJ

EDITORA do BRASIL

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

SUMÁRIO

1 – O Ensino da Matemática no Ensino Médio

Sabemos que, na atual conjuntura, o ensino da Matemática contempla os múltiplos aspectos envolvidos no binômio ensino-aprendizagem e, para tal, consideramos a experiência da equipe de autores e sugestões de professores e alunos de várias escolas do Brasil, enviadas por e-mail ou feitas durante os muitos contatos em palestras e oficinas promovidas pela Fundação Getulio Vargas – Ensino Médio, na cidade do Rio de Janeiro.

Por outro lado, buscamos incorporar as novas tendências em Educação Matemática, que têm sido usadas para desmistificar a Matemática como uma linguagem hermética, tornado-a, cada vez mais, um instrumento de serviço para a sociedade e para o mundo de uma forma geral.

É nosso propósito que esta obra permita formar cidadãos capazes de: ler, interpretar e analisar informações, muitas vezes apresentadas em gráficos e tabelas, de forma crítica, com autonomia; tomar decisões, a fim de resolver problemas; criar; aprimorar seus conhecimentos; que sejam capazes, enfim, de exercitar o pensar.

Podemos verificar o que os *PCN + Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, de 2002, p. 9, nos apresentam com relação à formação do estudante:

"A intenção de completar a formação geral do estudante nessa fase implica, entretanto, uma ação articulada, no interior de cada área e no conjunto das áreas. Essa ação articulada não é compatível com um trabalho solitário, definido independentemente no interior de cada disciplina, como acontecia no antigo ensino de segundo grau – no qual se pressupunha outra etapa formativa na qual os saberes se interligariam e, eventualmente, ganhariam sentido. Agora, a articulação e o sentido dos conhecimentos devem ser garantidos já no Ensino Médio.

No mundo atual, de tão rápidas transformações e de tão difíceis contradições, estar formado para a vida significa mais do que reproduzir dados, denominar classificações ou identificar símbolos. Significa:

- saber se informar, comunicar-se, argumentar, compreender e agir;
- enfrentar problemas de diferentes naturezas;
- participar socialmente, de forma prática e solidária;
- ser capaz de elaborar críticas ou propostas; e,
- especialmente, adquirir uma atitude de permanente aprendizado."

Assim, com esse propósito, é que percebemos que a Matemática tem um papel importante para a formação do pensamento. Por isso, ela não pode ser vista como algo pronto, pois está em evolução a cada instante e o aluno deve ser incentivado a fazer as descobertas e a saborear os novos saberes com desenvoltura.

Pretendemos, com esta obra, que os alunos possam adquirir uma formação sólida em Matemática nesse nível do ensino, que exige métodos de aprendizado compatíveis, ou seja, condições efetivas para que os alunos possam:

- comunicar-se e argumentar;
- defrontar-se com problemas, compreendê-los, enfrentá-los e resolvê-los;
- participar de um convívio social que lhes dê oportunidades de se realizarem como cidadãos;
- fazer escolhas e proposições;
- tomar gosto pelo conhecimento, aprender a aprender.

2 – Objetivos da coleção

Com esta obra, pretendemos dar a oportunidade para que o estudante possa desenvolver suas habilidades e competências em Matemática, permitindo o aprofundamento e a capacidade de **representação** e **comunicação**; **investigação** e **compreensão**; **contextualização sóciocultural**, objetivos que convergem com a área de Linguagens, Códigos e suas Tecnologias – sobretudo no que se refere ao desenvolvimento da representação, da informação e da comunicação de fenômenos e processos – e com a área de Ciências Humanas e suas Tecnologias – especialmente ao apresentar as ciências e técnicas como construções históricas, com participação permanente no desenvolvimento social, econômico e cultural, conforme propõem os *PCN* + de 2002.

Para isso, você, professor, é nosso aliado. Queremos convocá-lo para essa parceria, pois, ao nosso ver, temos de romper com o ensino tradicional, a escola não pode ficar restrita ao ensino de natureza enciclopédica (**cumprir o programa** × **ensinar o programa**).

Espera-se, com esta obra, que os alunos:

- saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano;
- saibam usar a Matemática para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento;
- compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações;
- percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído;
- saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

Visto que as disciplinas Biologia, Física, Química e Matemática fazem parte da área Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, segundo os PCNEM, pretende-se, nesta obra, sempre que possível, realçar o aspecto interdisciplinar de seus conteúdos básicos, enfatizando situações do cotidiano e buscando aferir, de um conjunto de competências fundamentais, aquelas que estejam relacionadas tanto com a habilitação dos candidatos para progredir em estudos mais avançados, quanto com a estimulação do desenvolvimento da capacidade de análise de situações e de tomada de decisões.

A abordagem proposta pelos eixos interdisciplinares possibilita uma avaliação do conhecimento que não se restrinja, apenas, ao conteúdo disciplinar especializado, favorecendo a ampliação da capacidade de compreensão e interpretação dos fenômenos naturais como um todo. Desse modo, os conteúdos que serão apresentados não se esgotam nesta obra. A tendência é que se construam situações mais a frente pelo trabalho lado a lado do aluno-professor e professor-aluno, construindo de forma ampla os demais fenômenos interdisciplinares no Ensino Médio, sendo a Matemática ferramenta indispensável para as aplicações fundamentais da Ciência.

Assim, é nosso propósito que o aluno tenha domínio nos seguintes temas da Matemática:

- Números e operações
  - Proporcionar aos alunos uma diversidade de situações, de forma a capacitá-los a resolver problemas do cotidiano:
    - ler faturas de consumo de água, luz e telefone; decidir sobre as vantagens/desvantagens de uma compra à vista ou a prazo; usar calculadora e escrever números em notação científica.

- Proporcionar aos alunos uma diversidade de problemas geradores da necessidade de ampliação dos campos numéricos e suas operações, dos números naturais para contar aos números reais para medir.
- Permitir ao aluno a compreensão das estruturas dos algoritmos, prevenindo recorrentes erros na resolução de problemas que envolvam manipulações algébricas.

• Funções
  - Iniciar o estudo de funções com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações:
    - idade e altura; área e raio do círculo; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo etc.
  - Prosseguir com os diferentes modelos que devem ser objeto de estudo na escola – modelos linear, quadrático e exponencial, aplicados a:
    - queda livre de um corpo; crescimento de uma colônia de bactérias; quantidade de medicamento na corrente sanguínea; rendimento financeiro; consumo doméstico de energia elétrica etc.

• Funções especiais
  - Destacar o contraste entre crescimento linear e crescimento exponencial.
  - Evitar exageros com logaritmos.
  - Explorar funções polinomiais simples de grau maior do que 2.
  - Anteceder o estudo de funções trigonométricas (enfatizar seu uso como modelo para funções periódicas) com o estudo da trigonometria no triângulo retângulo e nos demais triângulos.

• Geometria
  - Usar geometria analítica como articulação entre geometria e álgebra, trabalhando as duas vias:
    - entendimento de figuras geométricas, via equações;
    - entendimento de equações, via figuras geométricas.
  - Introduzir a noção de vetor.
  - Associar sistema linear à sua interpretação geométrica.

• Tratamento da informação e Probabilidade
  - Aprimorar as habilidades adquiridas no Ensino Fundamental no que se refere à coleta, à organização e à representação de dados.
  - Intensificar a compreensão sobre as medidas de posição (média, moda e mediana) e as medidas de dispersão (desvio médio, variância e desvio padrão).
  - Entender combinatória como uma organização de técnicas de contagem, principalmente por meio do princípio multiplicativo e sua associação com árvores de enumeração.
  - Destacar probabilidade como ferramenta para modelar incerteza e enfatizar o espírito crítico na construção de espaços equiprováveis.

• Tecnologias
  - Usar a calculadora como instrumento para promover a aprendizagem.
  - Usar programas de computador (ou calculadoras) capazes de construir gráficos.
  - Usar geometria dinâmica (para estimular a experimentação e o raciocínio algorítmico).

- Usar planilhas eletrônicas (para fórmulas, estudo de padrões e simulação probabilística).

Assim é que, com a experiência da equipe de autores e de anos de testagem dessa coleção, podemos afirmar, será um importante auxílio para o professor, que visa dar uma melhor apresentação dos assuntos a serem ensinados.

3 – Estrutura da coleção e conteúdos trabalhados

Esta coleção foi concebida com a aplicação dos conceitos modernos da Educação Matemática, sem perder de vista o rigor dos conceitos matemáticos em toda a obra. Chamamos a sua atenção para os destaques que aparecem nas margens de algumas páginas, pois devem ser apresentados aos alunos como complemento de conceitos ou como forma de enriquecer os assuntos de cada capítulo.

A coleção está dividida em três volumes, de tal modo que o volume I compreende a aplicação da lógica e conjuntos, abordados de forma clara e objetiva, para se apresentar o conceito de função e os seus tipos. Nesse campo, nos preocupamos em apresentar as características de cada uma das funções, como a função afim, a linear, a modular, a quadrática, a exponencial e a logarítmica, dando ênfase às aplicações de forma concreta. Também é valorizada a trigonometria dos triângulos, aplicando-a no ciclo trigonométrico.

Já no volume II, apresentamos as progressões e a aplicação da matemática financeira, a análise combinatória e a probabilidade, assim como o Binômio de Newton. Valorizamos o ensino da geometria, agrupando os grandes assuntos, ou seja, prisma e cilindro, assim como pirâmide e cone, e um estudo completo da esfera e dos poliedros.

No volume III, apresentamos um novo enfoque para o ensino da geometria analítica, pois a desenvolvemos com o tratamento vetorial, uma grande modernidade, visto que os conceitos desse tema ainda não foram tratados com essa visão. Seguindo esse ponto de vista, haverá a contribuição para o amadurecimento desses conceitos pelos estudantes e a facilidade para acompanhar um curso superior. Ainda nesse volume, apresentamos os números complexos, os polinômios e as equações de forma objetiva.

A nossa recomendação é que o professor possa explorar a coleção utilizando-a da melhor forma possível, entretanto devem ser observados os seguintes procedimentos:

- A exposição dos conceitos conforme são apresentados na coleção, dando tempo ao aluno para que ele possa ler e discuti-los, com ou sem ajuda do professor. Assim, o estudante poderá interpretá-los e construir a autonomia no processo de aprendizagem.
- Os exemplos e exercícios resolvidos devem ser estudados pelos alunos, mas não devem servir de modelos que se repetem sem uma lógica, pois são contribuições que irão permitir a formação do conhecimento e sua aplicação nos exercícios seguintes.
- A coleção tem uma variedade e uma quantidade considerável de exercícios e problemas para que o estudante possa consolidar seu conhecimento, resolvendo-os com segurança e podendo escolher entre os mais interessantes. Cabe ao professor instigar e fazer perguntas sobre cada situação proposta.
- No final de cada capítulo da coleção, há uma seção de exercícios de revisão. São testes para a verificação do que foi efetivamente aprendido sobre o capítulo.

Assim, esperamos que o ensino da Matemática possa contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.

4 – Bibliografia indicada

ABRANTES, Paulo. *O trabalho de projeto e a relação dos alunos com a Matemática: uma experiência de Projeto Mat. 789*. Tese (Doutorado). Lisboa: APM, 1994.

ADLER, Irving. *Matemática e desenvolvimento mental*. São Paulo: Cultrix, 1968.

AEBLI, Hans. *Didática psicológica:* aplicação à didática da psicologia de Jean Piaget. Rio de Janeiro: Nacional, 1971.

ÁVILA, Geraldo. *Introdução às funções e à derivada*. São Paulo: Atual, 1994.

BASSANEZI, Rodney C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher/Edusp, 1996.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: MEC, 2002.

______. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *PCN+*: Ensino Médio – Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

______. Secretaria de Educação Básica. *Explorando o ensino da Matemática*. Brasília: MEC, 2004. Artigos: v. 1, 2 e 3.

CÂMARA, Marcelo. Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem em Matemática. *Educação Matemática em Revista*. São Paulo: Sbem, n. 12, 2002.

______. Um exemplo de situação-problema: o problema do bilhar. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo: Sbem, n. 50, 2002.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARRAHER, Terezinha N. et al. *Aprender pensando*. Rio de Janeiro: Vozes, 1989.

______.; CARRAHER, David W.; SCHLIEMANN, Analúcia. *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez, 1988.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. *Metodologia do ensino da Matemática*. São Paulo: Cortez, 1994.

CHENALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. *Estudar Matemática:* o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

COLEÇÃO *Matemática: Aprendendo e Ensinando*. Vários autores. São Paulo: Atual/MIR, 1994. Vários volumes.

COLEÇÃO *O Prazer da Matemática*. Vários autores. Lisboa: Gradiva. Vários volumes.

COLEÇÃO *Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula*. Vários autores. São Paulo: Atual, 1992. Vários volumes.

COUTINHO, Cileda de Q. S. *Introdução ao conceito de probabilidade:* uma visão frequentista. São Paulo: Educ, 1996.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação:* reflexões sobre Educação e Matemática. São Paulo: Summus/Unicamp, 1986.

______. *Educação Matemática:* da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. *O sonho de Descartes*. Rio de Janeiro: Editora Francisco Alves, 1988.

______. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro: Editora Francisco Alves, 1985.

EDUCAÇÃO Matemática em Revista. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Sbem. Semestral.

In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE INFORMÁTICA EDUCATIVA 4., 1998, Brasília. *A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados*. Brasília, 1998, v. 1, p. 25-35.

GUELLI, Oscar. Coleção Contando a História da Matemática. São Paulo: Ática, 1998. Vários volumes.

IFRAH, Georges. *Os números:* a história de uma grande invenção. São Paulo: Globo, 2004.

KOETHE, S. *Pensar é divertido.* São Paulo: Herder, 1977.

KUENZER, Acácia Z. (Org.). *Ensino Médio:* construindo uma proposta para os que vivem do trabalho. São Paulo: Cortez, 2000.

______. O Ensino Médio agora é para a vida: entre o pretendido, o dito e o feito. *Revista Educação & Sociedade,* Campinas: Cedes, ano XXI, n. 70, 2000.

LIMA, Elon L. *Coordenadas no espaço.* Rio de Janeiro: Sbem, 2001. (Coleção do Professor de Matemática).

______. Medida e forma em geometria. Rio de Janeiro: Sbem, 2000. (Coleção do Professor de Matemática).

______.; CARVALHO, Paulo Cezar. *Coordenadas no plano.* Rio de Janeiro: Sbem, 2001. (Coleção do Professor de Matemática).

______.; CARVALHO, Paulo Cezar; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sbem, 2000, v. 1, 2 e 3. (Coleção do Professor de Matemática).

______. *Temas e problemas*. Rio de Janeiro: Sbem, 2001. (Coleção do Professor de Matemática).

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). *Aprendendo e ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994.

LOPES, Celi Espasandin. *A probabilidade e a estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular.* Dissertação (Mestrado em Educação) – Campinas, 1998, p. 125. Faculdade de Educação da Unicamp.

______.; NACARATO, Adair (Org.). *Escritas e leituras na educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MACHADO, Nilson José. *Epistemologia e didática*. São Paulo: Cortez, 1996.

MIORIM, Maria Ângela. *Introdução à história da educação matemática.* São Paulo: Atual, 1998.

MORIN, Edgar. *A cabeça bem-feita:* repensar a reforma, reformar o pensamento. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2000.

NETO, Ernesto Rosa. *Didática da Matemática*. São Paulo: Ática, 1994.

OBERMAIR, Gilbert. *Quebra-cabeças, truques e jogos com palitos de fósforo.* Rio de Janeiro: Ediouro, 1981.

ONRUBIA, Javier. *A atenção à diversidade no Ensino Médio:* algumas reflexões e alguns critérios psicopedagógicos. Porto Alegre: Artmed, 2002.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1944.

PORTUGAL. Ministério da Educação. Departamento do Ensino Secundário. *Didática da Matemática*: Ensino Secundário. Lisboa, 1997.

PRIMEIRO E SEGUNDO GRAUS – MATEMÁTICA. *Telecurso 2000.* Rio de Janeiro: Rede Globo. Programa de TV.

RAMOS, Marise N. O projeto unitário de Ensino Médio sob os princípios do trabalho, da ciência e da cultura. In: FRIGOTTO, Gaudêncio; CIAVATTA, Maria (Orgs.). *Ensino Médio: ciência, cultura e trabalho.* Brasília: MEC/Semtec, 2004.

RATHS, Louis E. *Ensinar a pensar:* teoria e aplicação. São Paulo: EPU, 1977.

REVISTA do professor de matemática. São Paulo: Sbem. Semestral.

REVISTA Nova Escola. São Paulo: Fundação Victor Civita.

STRUIK, Dirk J. *História concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1989.

TAHAN, Malba. *As maravilhas da Matemática*. Rio de Janeiro: Bloch, 1972.

______. *Matemática divertida e curiosa*. Rio de Janeiro: Record, 1993.

______. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 2001.

______. *Os números governam o mundo*. Rio de Janeiro: Ediouro, 1998.

VEIGA, Ilma P. A. (Org.). *Projeto político-pedagógico da escola*. Campinas: Papirus, 2003. 16. ed.

4.1 – Instituições para contato, cursos e obtenção de publicações

Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática (Caem)
Instituto de Matemática e Estatística (IME) – USP
Rua do Matão, 1 010, bloco B, sala 167
CEP 05508-090 – São Paulo, SP
Tel.: (011) 3091-6160

Centro de Ciências de Minas Gerais (Cecimig)
Faculdade de Educação – UFMG
Avenida Antônio Carlos, 6 227
Caixa Postal 253 – CEP 31270-010 – Belo Horizonte, MG
Tel.: (031) 3409-5338; (031) 3409-5337

Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática (Cempem)
Faculdade de Educação – Unicamp
Rua Bertrand Russell, 801, sala 1 103 – Barão Geraldo
Caixa Postal 6 120 – CEP 13083-970 – Campinas, SP
Tel.: (019) 3788-5587
Fax.: (019) 3289-1463

Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática IGCE – Unesp – Rio Claro
Avenida 24A, 1 515 – Bela Vista
Caixa Postal 178 – CEP 13500-230 – Rio Claro, SP
Telefax: (019) 3534-0123

Departamento de Teoria e Prática de Ensino (Dtpen) – Setor de Educação – UFPR
Rua General Carneiro, 460, Edifício D. Pedro I
CEP 80060-150 – Curitiba, PR
Tel.: (041) 3264-3574 (ramal 2 278)

Faculdade de Educação – Departamento de Metodologia – USP
Avenida da Universidade, 308, bloco B, térreo
CEP 05508-090 – São Paulo, SP
Telefax: (011) 3091-1688

Furb – Departamento de Matemática
Rua Antônio da Veiga, 140 – Victor Konder
Caixa Postal 1 507 – CEP 89010-971 – Blumenau, SC
Telefax: (047) 3321-0463

Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (Gepem)
Universidade Santa Úrsula
Rua Fernando Ferrari, 75, prédio VI, sala 1 105 – Botafogo
CEP 22231-040 – Rio de Janeiro, RJ
Telefax: (021) 2554-2500

Laboratório de Ensino de Matemática – Departamento de Matemática – Centro de Ciências Exatas e da Natureza (CCEN) – UFPE
Avenida Prof. Moares Rego, 1 235
CEP 50670-901 – Recife, PE
Tel.: (081) 2126-8006
Fax: (081) 2126-8118

Laboratório de Ensino de Matemática – Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação (Imecc) – Unicamp
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651 – Barão Geraldo
Caixa Postal 6 065 – CEP 13083-970 – Campinas, SP
Telefax: (019) 3521-5937

Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática – (Leacim) – Ufes – Campus de Goiabeiras
Avenida Fernando Ferrari, s.n. – Goiabeiras
CEP 29060-900 – Vitória, ES
Telefax: (027) 3335-2534

Mestrado em Educação Matemática – PUC-SP
Rua Marquês de Paranaguá, 111, prédio 1, 2º andar – Consolação
CEP 01303-050 – São Paulo, SP
Tel.: (011) 3124-7200 (ramal 7 210)
Fax: (011) 3159-0189

Projeto Fundão – Matemática – Instituto de Matemática – UFRJ
IM/UFRJ-CT, bloco C, sala 108
Caixa Postal 68 530 – CEP 21945-970 – Rio de Janeiro, RJ
Telefax: (021) 2562-7511

Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Sbem) – Departamento de Matemática – Centro de Ciências Exatas e da Natureza (CCEN) – UFPE
Rua Prof. Luiz Freire, s.n., sala 108
CEP 50740-540 – Recife, PE
Tel.: (081) 3272-7563

Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)
Estrada Dona Castorina, 110, sala 109
CEP 22460-320 – Rio de Janeiro, RJ
Tel.: (021) 2529-5073

4.2 – Alguns órgãos governamentais

Ministério da Educação e do Desporto (MEC) – Secretaria de Educação Média e Tecnológica
Esplanada dos Ministérios, bloco L, 3º andar, sala 300
CEP 70047-900 – Brasília, DF
Tel.: (061) 2104-8670
Fax: (061) 2104-9848

Secretaria de Educação a Distância
Esplanada dos Ministérios, bloco L, anexo 1, sala 327
CEP 70047-902 – Brasília, DF
Tel.: 0800-61-6161

Secretaria de Estado da Educação do Rio Grande do Sul – Centro de Ciências do Rio Grande do Sul
Av. Borges de Medeiros, 1 501 – Bairro Praia de Belas
CEP 90119-900 – Porto Alegre, RS
Tel. PABX: (051) 3288-4700

Secretaria de Estado da Educação de São Paulo – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (Cenp)
Praça da República, 53, sala 102 – Centro
CEP 01045-903 – São Paulo, SP
Tel.: (011) 3237-2115

Secretarias de educação estaduais e municipais, provavelmente a Secretaria de Educação do estado em que você mora e também a do seu município mantêm equipes pedagógicas e publicações, e oferecem cursos de Matemática a professores. Procure se informar e participar.

4.3 – Sites

- http://www.tvcultura.com.br/artematematica (*Arte e Matemática: uma série de 13 programas para a TV Cultura*. Fundação Padre Anchieta & TV Escola)
- http://www.somatematica.com.br/emedio.php
- http://www.matematica.com.br
- http://www.edulinks.com.br/Matematica
- http://www.brasilescola.com/matematica
- diadematematica.com/modules/xfsection/index.php?category=4
- pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/medio.htm
- http://www.edumatec.mat.ufrgs.br

5 – Comentários sobre cada capítulo

5.1 – Progressões

5.1.1 – Progressão aritmética

Neste capítulo, são apresentadas situações que permitem ao leitor compreender a noção de sequência. Outra proposta deste capítulo é fazer com que o leitor possa relacionar a ideia de progressão aritmética com a de aumentos constantes; para isso, foram exploradas situações que levam à conclusão de que toda progressão aritmética é uma função afim, levando à dedução da fórmula geral e de suas propriedades. A seguir, apresenta-se a soma dos termos da progressão aritmética.

5.1.2 – Progressão geométrica

As progressões geométricas são estudadas por meio da comparação da ideia de taxa relativa de aumentos constantes. É abordada a característica de a PG possuir uma conexão com a função exponencial, já estudada pelo leitor no Volume I da coleção. Também são desenvolvidas a fórmula dos termos gerais e as propriedades da PG. Nesse momento são apresentadas a soma dos termos da PG limitada e da PG ilimitada, assim como as situações concretas de crescimento populacional, por exemplo.

5.2 – Noções de Matemática Financeira

Neste capítulo é introduzido o conceito de grandezas proporcionais e suas consequências, retomando conceitos já vistos no Volume I da coleção. Há a definição de quando as grandezas são diretamente e inversamente proporcionais e a abordagem das regras de três simples e composta, com a apresentação de várias soluções de situações concretas, inclusive a famosa redução à unidade. Nesse ponto é tratada a divisão em partes proporcionais. É introduzido o conceito de porcentagem e apresentada a ideia de redução e acréscimo de valores em problemas concretos, o que permite o estudo de juros de forma moderna e com a noção de pagamentos uniformes.

5.3 – Análise Combinatória

Este capítulo se inicia com a noção fundamental de contagem, caminho moderno para o ensino da Análise Combinatória. Este capítulo se destaca pela apresentação de problemas práticos e criativos. São abordados os diferentes tipos de agrupamentos, como os arranjos simples e os completos; as permutações simples e com elementos repetidos; as permutações em um círculo; e as combinações simples e completas. O capítulo traz como inovação o fluxograma de resolução dos exercícios, que permite ao leitor verificar a diferença entre os agrupamentos.

5.4 – Binômio de Newton

Este capítulo começa com a apresentação do triângulo de Pascal para motivar o leitor a verificar por si só as relações das combinações complementares, a relação de Stifel, a relação de Euler e a soma das combinações. Também são apresentados um estudo para os números figurados e o binômio de Newton com o termo geral e suas consequências e aplicações.

5.5 – Probabilidade

Espera-se que o aluno já tenha noção intuitiva do conceito de probabilidade ao iniciar este capítulo. São apresentados os conceitos de experimento aleatório, de espaço amostral e de evento de forma intuitiva, com exemplos práticos. A proposta também é desenvolver a ideia da união, da intersecção e do complemento, esse como a negação do conjunto dado.

É apresentada a definição de probabilidade e destacado o conceito de frequência relativa de um evento. São abordados os eventos equiprováveis e as propriedades da união de eventos disjuntos; a probabilidade de ocorrência simultânea de eventos independentes; e a união de eventos.

São aplicados os conceitos de probabilidade condicional e de independência por meio de árvores de probabilidade, procurando integrar o assunto com os já desenvolvidos no capítulo.

5.6 – Matrizes

Este capítulo traz uma base para o estudo de Álgebra Linear, um assunto que será desenvolvido no Volume III desta coleção. É apresentado o conceito de matriz e todas as noções básicas, como matriz de uma relação, matriz transposta e matriz triangular. Em seguida é abordada a parte operatória, a adição de matrizes, a multiplicação por um número e a multiplicação de matrizes, a matriz inversa. Em todo o capítulo são destacados problemas de ordem prática e com aplicações reais, sempre que possível.

5.7 – Determinante de uma matriz quadrada

Neste capítulo, é aprofundado o estudo sobre o conceito de uma matriz, com destaque para a matriz quadrada e a definição da existência de um número real associado ao valor do determinante.

Dessa forma, é definido o determinante de segunda ordem e o de terceira ordem e apresentado o desenvolvimento de um determinante por filas. Também se destaca no capítulo o teorema de Jacobi.

5.8 – Sistemas lineares

Neste capítulo, são apresentadas as noções básicas, com destaque para a matriz completa de um sistema linear e para a incompleta. É abordada a possibilidade de dois sistemas terem a mesma solução, desde que sejam equivalentes. O método do escalonamento para matrizes é aplicado e a matriz inversa determinada por escalonamento da matriz dada. É desenvolvido um método para os retângulos com o intuito de facilitar a resolução de sistemas de qualquer ordem. A solução de sistemas homogêneos é apresentada e discutida.

5.9 – Geometria Espacial

Este capítulo começa com os conceitos básicos de ponto, reta e plano. São enfatizadas propriedades que levam o leitor às conclusões básicas, com argumentos lógicos e definições claras. Este capítulo tem o propósito de estimular o leitor, de forma efetiva, para o estudo da Geometria Espacial e de posição. É abordada a concepção das posições de uma reta e um plano, de dois planos, de duas retas, de retas e planos paralelos e de planos paralelos, assim como o conceito de retas reversas.

Procura-se expor de forma clara o teorema das três perpendiculares, e o conceito de distância de um ponto a uma reta, de retas perpendiculares e oblíquas e de retas reversas, com figuras que contribuem para o entendimento do conteúdo apresentado em cada passo.

5.10 – Diedros e triedros

Neste capítulo, são abordados o conceito de diedro e suas características; os planos perpendiculares; a projeção sobre um plano; o ângulo entre dois planos e o plano bissetor; o conceito de ângulo poliédrico ou sólido; os triedros e suas características.

5.11 – Poliedros

Neste momento, convém que o professor apresente aos alunos dois aplicativos que seguramente irão ajudar na percepção da beleza da geometria dos poliedros: software Poly em http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html

Este capítulo permite de forma clara que o leitor perceba o conceito de poliedro, destacando o que são as faces, os vértices e as arestas. Apresenta-se assim o teorema de Euler, $V - A + F = 2$, destacando o número 2 como a característica dos poliedros convexos e as principais relações dos poliedros. São estudados, neste capítulo, os poliedros regulares e suas propriedades.

5.12 – Prismas e cilindros

Neste capítulo são destacados os sólidos que são prismas e os que são cilindros. São apresentadas as propriedades métricas dos prismas, valorizando a aplicação do teorema de Pitágoras e suas implicações. São apresentados a área total e o volume de cada um dos referidos sólidos, a saber, o paralelepípedo, o bloco retangular e os cilindros de forma geral. Foi elaborado o conceito de semelhança de poliedros como consequência do princípio de Cavalieri. São desenvolvidos exercícios de aplicação prática neste capítulo.

5.13 – Pirâmides e cones

Este capítulo aborda os sólidos que são pirâmides e os que são cones. São apresentadas as propriedades métricas da pirâmide, valorizando a aplicação do teorema de Pitágoras e suas implicações. É destacada uma pirâmide em especial: o tetraedro. Também são apresentados a área total e o volume de cada um dos referidos sólidos. É desenvolvido o conceito de tronco de pirâmide e de cone. Os exercícios deste capítulo também trazem aplicações práticas.

5.14 – Esferas

Este capítulo traz o conceito de esfera e suas implicações geométricas, destacando o volume de um segmento esférico de duas bases e o de uma base, para então apresentar o volume da esfera. Com esse conhecimento, é possível deduzir o volume do setor esférico e do anel esférico. Em seguida, são apresentadas as áreas da zona esférica e da calota esférica para, a partir disso, destacar as áreas da esfera, do fuso esférico e de qualquer superfície de revolução.

5.15 – Poliedros regulares

Este capítulo traz um estudo detalhado dos poliedros regulares por meio da construção da esfera inscrita e da circunscrita em cada um deles e do destaque de suas propriedades. São verificadas as diferentes secções de planos com esses poliedros e suas características geométricas. São apresentadas situações práticas que levam o leitor ao entendimento das propriedades, das distâncias, das áreas e dos volumes.

6 – Resolução comentada de alguns exercícios

CAPÍTULO I

Exercícios de fixação, p. 18

7 Note-se que este problema poderia ser enunciado como: "Inserir 5 meios aritméticos entre 18 e 96".

Para resolvê-lo, com a notação que estamos usando, escrevemos (todos os termos em mm):

$a_1 = 18$

$a_7 = a_1 + 6r = 96$

Daqui concluímos que $6r = 96 - 18$, isto é, $r = 13$. Então, os termos da PA são 18, 31, 44, 57, 70, 83 e 96.

8 Apenas uma observação: uma estimativa melhor do período atual do cometa Halley é 75,3 anos; no entanto, devido à influência da gravidade de outros planetas em sua trajetória, este número varia ligeiramente a cada aparição.

Exercícios de fixação, p. 23

1 Seja n o número de filas. Então o número total de soldados é $1 + 2 + ... + n$, que é a soma dos termos de uma PA de razão $r = 1$, com $a_1 = 1$ e $a_n = n$. Assim, devemos ter:

$$S = \frac{(1 + n)n}{2} = 325 \Rightarrow n^2 + n - 650 = 0$$

Resolvendo esta equação quadrática, encontramos $n = 25$ ou $n = -26$. Como n negativo não faz sentido, a resposta é $n = 25$ filas.

5 Supõe-se que o enunciado quer que a soma dos n primeiros termos seja $3n^2$ para qualquer n. Nesse caso, uma solução simples é atribuir alguns valores particulares para n:

$a_1 = 3 \cdot 1^2 = 3$

$a_1 + a_2 = 3 \cdot 2^2 = 12 \Rightarrow a_2 = 9$

A partir disso já fica claro que se alguma PA satisfazer o enunciado, tem de ser a PA cujo primeiro termo é 3 e cuja razão é 6, isto é, 3; 9; 15; 21; 27; ... Como o enunciado indica que esta PA existe, basta agora tomar:

$a_8 = a_1 + 7r = 3 + 42 = 45$ e a questão está resolvida. Isto dito, é mais interessante procurar desde o começo uma PA que satisfaça a condição $S_n = 3n^2$ para todo n. Devemos ter:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = 3n^2 \Leftrightarrow a_1 + a_n = 6n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 + (n - 1)r = 6n \Leftrightarrow rn + (2a_1 - r) = 6n$$

Essa igualdade tem de valer para todo n, então temos de enxergá-la considerando a_1 e r constantes e n uma variável; em outras palavras, temos de considerar o lado esquerdo uma função em n (aliás, é uma função afim, um "ax + b", só que a variável x é n, o coeficiente angular é r e o coeficiente linear é $(2a_1 - r)$ e o lado direito outra função em n (também afim, com coeficiente angular 6 e coeficiente linear 0). A única maneira de as funções dos dois lados serem idênticas é se tivermos $r = 6$ e $2a_1 - r = 0$, isto é, $a_1 = 3$. Assim, chegamos à PA 3; 9; 15; 21; 27; ... e, novamente, $a_8 = 45$.

6 Usando as propriedades dos logaritmos, temos:

$$\log_2 \sqrt[210]{2^a} = \frac{a \log_2 2}{210} = \frac{a}{210}$$

Então:

$$S = \frac{1}{210} + \frac{2}{210} + ... + \frac{20}{210} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{210} + \frac{20}{210}\right) \cdot 20}{2} = 1,$$ já que a soma S é uma PA de razão $\frac{1}{210}$.

7 Este exercício é mais difícil pois, dos dados oferecidos, não é possível determinar a PA!

Mesmo assim, a soma pedida pode ser encontrada. Afinal, lembremos que:

$$a_1 + a_{26} = a_2 + a_{25} = ... = a_5 + a_{22}$$

como na demonstração da fórmula da soma dos termos da PA. Assim:

$$S_{26} = \frac{(a_1 + a_{26})26}{2} = \frac{(a_5 + a_{22})26}{2} = (71)(13) = 923$$

Exercícios de fixação, p. 35

6 Sugerimos que o professor oriente seus alunos a se acostumarem a calcular acréscimos percentuais por meio de **multiplicações** em vez de somas, pois isso é uma preparação para o capítulo seguinte sobre Matemática Financeira (juros compostos). Um acréscimo de 10% é uma multiplicação pelo **fator** $1 + 10\% = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$. Assim, três acréscimos sucessivos são uma multiplicação por $(1{,}1)^3$, isto é, o preço pedido é

R\$ $100{,}00\,(1{,}1)^3 =$ R\$ $133{,}10$.

7 Lembre que, numa PG de números positivos, cada termo é a média geométrica de seus dois vizinhos. Então:

$$a_6 = \sqrt{a_5 a_7} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \cong 12{,}649$$

10 Novamente, o ideal é pensar em fatores. Em vez de pensar "some 4% todo mês" pense em "multiplique pelo fator $1 + 4\% = 1 + 0{,}04 = 1{,}04$ todo mês". Se o fator mensal é 1,04, ao final de um ano os preços serão multiplicados por $(1{,}04)^{12}$, isto é, o fator anual é $(1{,}04)^{12} = 1{,}601...$ (use uma calculadora). Infelizmente, como não se costuma trabalhar com fatores, temos de transformar novamente para acréscimo percentual subtraindo 1: a inflação anual acumulada é $1{,}601 - 1 = 0{,}601 = 60{,}1\%$.

Exercícios de fixação, p. 44

4 O primeiro quadrado tem lado a, e o segundo tem lado $\frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Assim, a área do primeiro é a^2 e a área o segundo é $\frac{a^2}{2}$. Assim, cada área nova é metade da anterior. A soma de todas elas será, então,

$$a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + ... = a^2\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2a^2$$

já que essa soma é a soma dos termos de uma PG infinita de razão $\frac{1}{2}$.

5 A bola desce 9 m, depois sobe 3 m, depois desce 3 m novamente, depois sobe 1 m, desce 1 m, e assim por diante. Então temos de calcular a seguinte soma:

$$S = 9 + 3 + 3 + 1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + ...$$

Note que o primeiro termo é "diferente" e só aparece uma vez. Então façamos o seguinte: agrupemos os outros termos de dois em dois (considerando subidas e descidas), e isolemos aquele 9:

$$S = 9 + \left(6 + 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + ...\right)$$

A expressão dentro dos parênteses é uma PG de primeiro termo 6 e razão $\frac{1}{3}$. Então:

$$S = 9 + \frac{6}{1-\frac{1}{3}} = 9 + 9 = 18 \text{ m}$$

Exercícios de revisão, p. 45

1 Cuidado, os termos a_n não formam uma PA, já que $a_{n+1} - a_n = 3n$ varia com n! A solução é:

$a_{51} = a_{50} + 3(50) = (a_{49} + 3(49)) + 3(50) = ... =$

$= a_1 + (3 + 6 + 9 + ... + 150)$

A expressão entre parênteses é a soma dos 50 termos de uma PA de razão 3. Então:

$$a_{51} = 4 + \frac{(3 + 150) \cdot 50}{2} = 3\,829$$

Alternativa (A).

6 As opções dadas permitem ao aluno encontrar a opção correta sem "resolver" a questão.
Afinal, note que, se (A) fosse verdadeira, (E) também seria (pois se a, b, c são uma PA então c, b, a também são); analogamente, se (C) fosse verdadeira, (B) também seria. Então, partindo do pressuposto de que a questão só tem uma opção correta, ela tem de ser (D).
Isto dito, vamos resolver a questão da maneira "esperada": o número do meio tem de ser a média aritmética dos outros dois. Assim:

$$\frac{1}{y+z} = \frac{\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z}}{2} \Rightarrow \frac{2}{y+z} = \frac{2x+y+z}{(x+y)(x+z)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2(x+y)(x+z) = (2x+y+z)(y+z) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + 2xy + 2xz + 2yz =$

$= 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{y^2 + z^2}{2}$

indicando que y^2, x^2 e z^2 (ou z^2, x^2 e y^2) estão em PA.
Alternativa (D).

8 Cada figura contém dois palitos a mais que a figura anterior. Assim, o número de palitos é uma PA de razão 2 (usando como índice o número de triângulos da figura). Então:
$a_n = a_1 + (n-1)r = 3 + 2(n-1) = 135 \Rightarrow n = 67$
Alternativa (E).

10 Os termos são $a - 2r$, $a - r$, a, $a + r$ e $a + 2r$. Como a soma destes termos é 15, temos $a = 3$, então os termos podem ser reescritos como $3 - 2r$, $3 - r$, 3, $3 + r$, $3 + 2r$. Como o produto é 0, um desses termos deve ser nulo, mas esse termo nulo não pode ser o primeiro (pois teríamos $r = \frac{3}{2}$, e o enunciado diz que a razão é inteira) nem algum dos dois últimos (pois r seria negativo). Assim, a única opção é $3 - r = 0$, isto é, $r = 3$, e o segundo termo é 0.
Alternativa (A).

21 Seja a_i o comprimento do lado $\overline{M_iN_i}$, onde $i = 1, 2, 3, ..., 9$. Note que $a_1 = a_9 = L$, e que $a_5 = 2L$ (propriedade do hexágono regular).
Agora, como o segmento $\overline{M_1M_9}$ está dividido em 8 partes iguais, os temos de a_1 até a_5 formam uma PA (pense assim: $\overline{M_2N_2}$ é base média de $M_1N_1N_3M_3$, então a_2 é a média aritmética de a_1 com a_3; idem para $\overline{M_3N_3}$ e $\overline{M_4N_4}$). Então,

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{(a_1 + a_5)5}{2} = \frac{15L}{2}$$

Analogamente:

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = \frac{15L}{2}$$

Então, a soma desses dois termos é 15L, só que contamos a_5 em ambas! Assim, a soma pedida é:
$S = 15L - a_5 = 13L$.
Alternativa (C).

27 Como são pedidas apenas frações irredutíveis, os numeradores têm de ser ímpares. Então,

$$S = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + ... + \frac{39}{4}$$

que é a soma dos termos de uma PA de razão $\frac{1}{2}$.

Como $\frac{39}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n-1)$, são $n = 20$ termos.

Assim:

$$S = \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{39}{4}\right) \cdot 20}{2} = 100$$

Alternativa (E).

34 Suponha que a PA original tem primeiro termo a_1, razão r e $2n$ termos. Os termos de ordem ímpar formam uma nova PA com n termos cuja soma é:

$$S_1 = \frac{(a_1 + a_{2n-1})}{2}n = \frac{a_1 + (a_1 + (2n-2)r)}{2}n =$$

$= (a_1 + (n-1)r)n$

Analogamente:

$$S_2 = \frac{(a_2 + a_{2n})}{2}n = \frac{(a_1 + r) + (a_1 + (2n-1)r)}{2}n =$$

$= (a_1 + nr)n$

Precisamos eliminar a_1 dessas equações (para obter r em função de S_1, S_2 e n). Então, subtraímo-las:

$$S_2 - S_1 = nr \Rightarrow r = \frac{S_2 - S_1}{n}$$

Alternativa (A).

35 Para que a soma seja a menor possível, somaremos apenas os termos negativos! Note que os termos negativos satisfazem a condição:
$a_n < 0 \Leftrightarrow -177 + (n-1)4 < 0 \Leftrightarrow 4n < 181 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n < \dfrac{181}{4} = 45{,}25$

isto é, o último termo negativo é:
$a_{45} = -177 + (44)(4) = -1$

Então, a soma pedida é $S = \dfrac{(-177 - 1)45}{2} = -4\,005$.

Alternativa (D).

45 Ignore os segmentos verticais (que nada acrescentam à abscissa). Começando de O, a soma dos comprimentos horizontais (um total de 8 segmentos) é:

$$S = 1 - p^2 + p^4 - p^6 + p^8 - p^{10} + p^{12} - p^{14}$$

que é a soma dos termos de uma PG de razão $(-p^2)$. Então:

$$S = 1 \cdot \frac{(-p^2)^8 - 1}{(-p^2) - 1} = \frac{1 - p^{16}}{1 + p^2}$$

Alternativa (D).

57 Seja a o número de exercícios corretos e b o número de exercícios errados. Então, o filho recebeu $1 + 2 + 4 + ... + 2^{a-1} = 2^a - 1$
E pagou $1 + 2 + 4 + ... + 2^{b-1} = 2^b - 1$
Como o "lucro" foi de R$ 120,00, temos:
$2^a - 2^b = 120$.
Claramente, $a > b$: Então, fatorando o 2^b dos dois lados: $2^b(2^{a-b} - 1) = 120$.
O produto do lado esquerdo é de uma potência de 2 por um número ímpar. Assim, fatorando $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ em fatores primos, nossa única opção é que $2^b = 2^3$ seja a potência de 2 ao passo que $2^{a-b} - 1 = 15$ seja a parte ímpar. Em suma, $b = 3$ e $a = 7$.
Alternativa (C).

71 Seja $(0, r, 2r, ...)$ a PA (onde $r < 0$) e seja $(a, aq, aq^2, ...)$ a PG (onde $q > 1$). Temos:
$0 + a = 2$
$r + aq = 1$
$2r + aq^2 = 2$
Substituindo $a = 2$ nas outras duas equações
$r + 2q = 1$
$r + q^2 = 1$
Subtraindo essas equações, temos $q^2 = 2q$; então $q = 2$ (pois foi dado que $q \neq 0$) e $r = -3$. Então a PA é $(0, -3, -6, -9, -12, ...)$ e a PG é $(2, 4, 8, 16, 32, ...)$.
A diferença $a_5 - a_4$ é $(32 - 12) - (16 - 9) = 13$.
Alternativa (A).

Desafios

1 a) Note que os afilhados do sócio n são $2n$ e $2n + 1$. Assim, os afilhados de 5017 são 10034 e 10035.

b) Consequentemente, o número do padrinho é a parte inteira de $\dfrac{n}{2}$. Neste caso, como $\dfrac{5\,017}{2} = 2\,508{,}5$, o padrinho de 5017 é 2508.

c) Note que o primeiro sócio do nível x é o sócio 2^{x-1}. Para calcular o nível de 5017 precisamos descobrir a maior potência de 2 que está abaixo de 5017. Com o auxílio de uma calculadora vemos que $\log_2 5\,017 = 12{,}293...$; assim, o nível do sócio 5017 é 13.

d) O primeiro sócio do nível 13 é $2^{12} = 4\,096$. Assim, há $5\,017 - 4\,096 = 921$ sócios com número menor que 5017 no nível 13.

2 O número de pontos é $1 + 2 + 3 + ... + 100 = 5\,050$. Percorridos em ordem, cada segmento corresponde a um ponto (onde aquele segmento começa),exceto pelo último ponto, onde não começa segmento algum. Assim, há $5\,050 - 1 = 5049$ segmentos.

3 Como são 350 cm de altura e cada azulejo tem 50 cm de lado, serão 7 fileiras de azulejos. De cima para baixo, o número de placas é 1, então 2, então 4, etc., até a fileira de baixo que terá $2^6 = 64$ azulejos. O total de azulejos é

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$$

4 a) Como t era o tempo inicialmente previsto para o pagamento da dívida, o total da dívida era, em reais, de $500t$. No primeiro mês, Geraldo pagou 500; no segundo, $500 + k$; continuando a PA, Geraldo paga $500 + (n - 1)K$ no mês n, até o ultimo mês $\left(\text{de número } \dfrac{t}{2}\right)$.

A soma destes pagamentos é

$$S = \frac{\left(500 + \left(500 + \left(\frac{t}{2} - 1\right)K\right)\right)\frac{t}{2}}{2}$$

Por outro lado, a dívida (que não tinha juros) foi quitada, então

$$S = \frac{\left(500 + \left(500 + \left(\frac{t}{2} - 1\right)K\right)\right)\frac{t}{2}}{2} = 500t$$

Como t ≠ 0, podemos cortá-lo e operar o resto:

$$1000 + \left(\frac{t}{2} - 1\right)K = 2000 \Rightarrow K = \frac{1000}{\frac{t}{2} - 1} = \frac{2000}{t - 2}$$

que é o pedido.

b) Se a dívida original era de 9000, então $t = \frac{9000}{500} = 18$. Então $K = \frac{2000}{18 - 2} = 125$.

5 b) a_{n-1} e a_n são dois números triangulares consecutivos, assim para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$, temos que:

$$a_{n+1} + a_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$$

CAPÍTULO II

Exercícios de fixação, p. 60

5 É mais fácil avaliar o que restou usando multiplicações: em A, restaram $\frac{17}{20}$ do que tínhamos, isto é $\frac{17}{20}$T. Em B, restaram $\frac{12}{17}$ do que ainda há no tanque, isto é, restam no tanque $\frac{12}{17} \cdot \left(\frac{17}{20}T\right) = \frac{3}{5}T$.

Enfim, em C ficam todos estes 10 500 litros. Então, $\frac{3}{5}T = 10\,500 \Rightarrow T = \frac{5}{3}(10\,500) = 17\,500$

$\Rightarrow 16\,000 < T < 19\,000$.

Alternativa (A).

Exercícios de fixação, p. 66

8 Pelo enunciado: $F = kLH^2$
onde k é uma constante a ser determinada.
Usando a primeira linha:

$$2000 = k(3)(4^2) \Rightarrow k = \frac{2000}{48} = \frac{125}{3} \Rightarrow F = \frac{125}{3}LH^2$$

Usando a segunda linha:

$$3000 = \frac{125}{3}2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{9000}{250} = 36 \Rightarrow x = 6$$

(a raiz $x = -6$ é descartada, pois o enunciado nos diz que todos os valores são positivos).
Alternativa (B).

10 Lembremos que a área é proporcional ao quadrado do diâmetro. Então, se x é, em reais, o valor procurado, temos:

$$\frac{x}{30^2} = \frac{3{,}60}{20^2} \Rightarrow x = 8{,}10$$

Alternativa (C).

Exercícios de fixação, p. 71

7 Seja x a parte que cabia a cada ganhador. O prêmio original era $10x$. Como o prêmio de cada um diminuiu em R$ 700,00, temos:

$12(x - 700) = 10x \Rightarrow 2x = 8\,400 \Rightarrow x = 4\,200$,
ou seja, o prêmio original era $10x = 42\,000$.

Alternativa (A).

Exercícios de fixação, p. 75

8 Como sempre, é mais fácil pensar nos fatores de acréscimo e redução (em vez de trabalhar diretamente com as porcentagens), e só ao final retomar as porcentagens, se necessário. Assim, seja a o fator de redução aplicado duas vezes sucessivas (note que, sendo redução, temos $0 < a < 1$).
O enunciado indica que as duas reduções sucessivas são equivalentes a um desconto de 19%, isto é, um fator de redução de $1 - 0{,}19 = 0{,}81$.
Assim, $a^2 = 0{,}81 \Rightarrow a = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9$, ou seja, o porcentual de redução foi $1 - 0{,}9 = 0{,}1 = 10\%$.
Resposta: K = 10.
Alternativa (E).

9 Novamente, utilize fatores. O fator aqui é 1,2, então os lucros são sucessivamente 500, 500 (1,2) = 600 e 600 (1,2) = 720. O lucro acumulado é a soma 500 + 600 + 720 = 1 820.
Alternativa (A).

10 Seja x o número de alunos ao final do ano anterior. O enunciado traz a informação de que $x + 100 - 15$ é 10% a mais do que x, isto é:

$$x + 85 = 1{,}1x \Rightarrow 0{,}1x = 85 \Rightarrow x = 850$$

Então o número de alunos no final do novo ano é $x + 85 = 935$.
Alternativa (D).

14 O itinerário é 1,17 vezes o anterior, mas a velocidade média é 1,3 vezes maior.
Assim, se t era o tempo que este motorista fazia habitualmente, o novo tempo será multiplicado por 1,17 e dividido por 1,3 isto é, o tempo do novo trajeto é:

$$\frac{1{,}17t}{1{,}3} = 0{,}9t$$

Agora, temos de recorrer novamente às porcentagens: uma multiplicação por 0,9 é uma redução de $1 - 0{,}9 = 0{,}1 = 10\%$.
Alternativa (B).

25 Para resolver este problema, a chave é perceber que, como ambas as heranças estão sendo multiplicadas pelo mesmo fator 1,1 todo ano, não há necessidade de fazer contas do tipo $10\ (1{,}1)^{10}$ ou $15\ (1{,}1)^{10}$. A proporção entre ambas as heranças continuará sendo sempre de 10 : 15 ou 2 : 3.
Como a divisão é inversamente proporcional a esses números, o mais rico receberá $\frac{2}{5}$ da herança.
Alternativa (B).

Exercícios de fixação, p. 86

7 Lembre-se de que uma das duas parcelas é paga no ato da compra, e, portanto, não há juros que nela incidam. Dos R$ 702,00 iniciais, R$ 390,00 foram pagos à vista, restando apenas uma dívida de R$ 702,00 – R$ 390,00 = R$ 312,00 a serem pagos. Como pagamos R$ 390,00 novamente, o fator pelo qual a dívida cresceu foi $\frac{390}{312} = 1{,}25$ indicando juros de 25% ao mês.

Alternativa (D).

15 Se houvesse apenas um depósito no início do período, João teria $10\,000\ (1{,}05)^{11}$ = R$ 17.103,00 ao final de seu investimento (no início do décimo segundo mês – note que há apenas 11 meses entre o primeiro depósito e o último). Mas note que João deposita mais 10 000 todo mês! Então o segundo depósito de 10 000 tem 10 meses para render juros, o terceiro tem 9 meses, e assim por diante. O montante que procuramos é:

$$S = 10\,000\ (1{,}05)^{11} + 10\,000\ (1{,}05)^{10} + \ldots +$$
$$+ 10\,000\ (1{,}05)^{2} + 10\,000\ (1{,}05) + 10\,000$$

em que a última parcela é o último depósito, que ainda não teve tempo de render juros. Lendo de trás para a frente, esta é a soma dos termos de uma PG cujo primeiro termo é 10 000 e a razão é 1,05.
Então:

$$S = 10\,000\frac{1{,}05^{12} - 1}{1{,}05 - 1} = 10\,000\frac{1{,}8 - 1}{1{,}05 - 1} =$$
$$= 10\,000\frac{0{,}8}{0{,}05} = 160\,000$$

Alternativa (B).

Exercícios de revisão, p. 92

8 Resolva usando fatores. No primeiro ano, o fator foi 1,25; no segundo ano, o fator foi x. Então, ao final de dois anos consecutivos, temos:

$$1{,}25x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{1{,}25} = 1{,}6$$

Assim, o fator de valorização foi de 1,6 no segundo ano. Recorrendo às porcentagens: a valorização foi de 60% no segundo ano.

25 Uma taxa de juros de 5% significa um fator multiplicativo de 1,05 ao mês. Se a última parcela era de R$ 462,00, um mês antes o pagamento deve ser reduzido por este fator, isto é, o valor da última prestação é:

$$\frac{462}{1{,}05} = 440 \text{ reais}$$

Alternativa (C).

27 Seja x a quantia investida em ouro (em milhares de reais, para facilitar o cálculo). Então, a quantia investida em CDBs é $100 - x$.

Agora, com os dois acréscimos (usando fatores), o novo saldo é (em milhares de reais):

$$x(1{,}08) + (100 - x)(1{,}10) = 108{,}5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0{,}02x = 1{,}5 \Rightarrow x = 75$$

Alternativa (B).

CAPÍTULO III

Exercícios de fixação, p. 105

7 O item (a) tem várias respostas possíveis. Para o item (b), basta seguir este raciocínio: há 7 opções para a primeira nota; independentemente de qual seja a primeira nota, há 6 opções para a segunda (qualquer nota exceto a primeira, que não pode ser repetida); qualquer que seja esta, há 6 opções para a terceira nota (qualquer uma, exceto a segunda); enfim, para cada escolha das três primeiras notas, há 6 opções para a última nota (qualquer uma, exceto a terceira). Pelo princípio multiplicativo, há um total de $7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1\,512$ possíveis melodias.

12 É mais fácil contar todos os números que contêm esses algarismos e então retirar os que não contêm o algarismo 2. Então, são:
$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ números de três algarismos que têm os dígitos de 1 a 5. Se não pudermos usar o dígito 2, ficam $4^3 = 64$ possibilidades. Assim, há $5^3 - 4^3 = 125 - 64 = 61$ números com 3 dígitos de 1 a 5 que contêm o dígito 2.

Outra opção é contar diretamente:

- o conjunto A dos números da forma $2xy$ tem $5 \cdot 5 = 25$ elementos;
- o conjunto B dos números da forma $x2y$ tem 25 elementos;
- o conjunto C dos números da forma $xy2$ tem 25 elementos.

Porém, não basta somar estas contagens: números que contenham mais de um dígito 2 serão contados mais de uma vez! Então, se desejarmos uma solução desse tipo, temos de usar o princípio da inclusão-exclusão (cap. 2, vol. 1):

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) -$
$- n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

onde $A \cup B \cup C$ é o conjunto dos números que tem algum 2 em sua representação, ou seja, o que desejamos calcular. Os outros termos são:

- o conjunto $A \cap B$ é o conjunto dos números da forma $22z$, então tem 5 elementos. Analogamente, $n(A \cap C) = n(B \cap C) = 5$. Enfim, o conjunto $A \cap B \cap C$ tem apenas o elemento 222, portanto, tem apenas um elemento.

Juntando tudo:
$n(A \cup B \cup C) = 25 + 25 + 25 - 5 - 5 - 5 + 1 = 61$

14 A chave para a resolução está em perceber que uma rota de A para B tem sempre de ir por uma das estradas secundárias ou para a direita; se, em qualquer momento, a rota for para a esquerda, ela não conseguirá chegar a B sem autointersecção. Então, há as seguintes escolhas:

- na saída de A, pode-se escolher a rota de cima ou a de baixo: 2 escolhas;
- em qualquer caso, ao se chegar à primeira estrada secundária, pode-se escolher segui-la ou não: 2 escolhas;
- independentemente da opção escolhida, em seguida, a rota tem de ir para a direita até chegar à segunda estrada secundária; ali, novamente há a opção de seguir esta rota ou não: 2 escolhas.

E assim por diante; cada estrada secundária oferece uma bifurcação, e, seguindo ou não tal estrada, a única opção é continuar para a direita. No total, são $2 \cdot 2^{10}$ opções (o primeiro 2 referente à escolha na saída de A, os outros fatores 2 correspondentes a cada uma das estradas secundárias).
Portanto, a resposta é $2^{11} = 2\,048$.

15 À frente, deve ir a locomotiva; para o carro seguinte, temos 5 opções; independentemente de qual foi a primeira escolha, há 5 opções para o próximo carro (os 4 vagões restantes ou o carro-restaurante, que agora pode ser considerado um vagão qualquer); agora há 4 opções

para o próximo, 3 para o seguinte, e 2 para os últimos dois carros.
A resposta é, portanto, $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 600$.
Outra maneira para resolver é a seguinte: primeiro, escolha o **lugar** do carro-restaurante: como ele não pode ocupar a primeira posição, há 5 opções para tanto. A partir de agora, é só escolher onde ficarão os outros carros: 5 possíveis lugares para o vagão A, 4 para o vagão B etc., até o vagão E, que fica com o lugar que restou obrigatoriamente.
Resposta: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 600$ (de novo).

17 Como as diagonais têm de estar sobre os eixos, temos de escolher 2 vértices em cada eixo.
Mais ainda, como o quadrilátero deve ser convexo, não podemos escolher os pontos do eixo x do mesmo lado com relação ao eixo y. Por exemplo, escolher M_{11}, M_{12} e dois pontos do eixo y dá um quadrilátero não convexo, pois a diagonal sobre o eixo y cortaria a reta que passa por M_{11} e M_{12} fora do segmento que os une.
Assim, somos levados a escolher um ponto em cada um dos 4 semieixos que saem da origem. Sendo 3 opções sobre o eixo $x+$, para cada uma destas 3 em $y+$, 2 em $x-$ e 4 em $y-$, temos um total de $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 72$ opções.
Alternativa (C).

19 Enquanto não é difícil listar todos os divisores de 72 explicitamente, é melhor resolver da seguinte forma: a decomposição em fatores primos de 72 é $72 = 2^3 \cdot 3^2$.
Um divisor de 72 é um número que tem esses mesmos fatores, com expoentes menores ou iguais aos presentes em 72. Por exemplo, $2^2 \cdot 3$, $2^3 \cdot 3^0$ são divisores, mas $2^2 \cdot 5$ e $2^4 \cdot 3$ não servem. Em suma, os divisores de 72 são os números da forma $2^i \cdot 3^j$ para os quais $i \in \{0, 1, 2, 3)$ e $j \in \{0, 1, 2\}$. Como há 4 opções para i e 3 para j, são, no total, $4 \cdot 3 = 12$ divisores.
Note que este raciocínio é facilmente generalizável: o número de divisores de $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \ldots p^z$ (em que esta é a decomposição em fatores primos do número em questão) é $(a + 1)\ (b + 1)\ (c + 1) \ldots (z + 1)$.

Exercícios de fixação, p. 109 e 117

Apenas um comentário a respeito das seções sobre arranjos e permutações: a maioria dos exercícios dessas seções pode ser feita diretamente pelo princípio multiplicativo – não há realmente a necessidade de usar as fórmulas de arranjos e permutações, a menos que o enunciado já as proponha.

Exercícios de fixação, p. 117

2 Basta considerar AR uma unidade, como se fosse uma letra só. Então temos de permutar as "quatro letras" C, L, AR e A: $P_4 = 4! = 24$ maneiras.

8 Façamos uma contagem detalhada de todos os números com os dígitos 1, 3, 5, 7 (sem repetição) que são menores que 5 731:

- começando por 1 ou 3: há $2 \cdot 3! = 12$ opções (duas opções para o primeiro dígito, uma permutação dos outros 3 dígitos);
- começando por 5, com segundo dígito 1 ou 3: há $2 \cdot 2! = 4$ opções (duas para o segundo dígito, duas para o terceiro; explicitamente, são os números 5 137, 5 173, 5 317 e 5 371);
- começando por 57: há apenas 5 713, ou seja, mais uma opção.

Resumindo, há $12 + 4 + 1 = 17$ números antes de 5 731. Portanto, 5 731 é o décimo oitavo elemento.

9 Este problema é análogo ao anterior. Os números menores que 61 473 na lista são:

- começando por 1, 3 ou 4: são $3 \cdot 4! = 72$ opções;
- começando por 6, o segundo dígito tem que ser 1; as opções são 61 347, 61 374 e 61 437.

Como há $72 + 3 = 75$ opções antes de 61 473, ele é o 76º da lista.
Alternativa (A).

11 O numerador da fração pode ser fatorado por $n!$. Afinal:
$(n + 1)! - n! = (n + 1)n! - n! = n!(n + 1 - 1) = n \cdot n!$
Colocando isso na equação, temos:
$$\frac{n \cdot n!}{(n - 1)!} = 7n$$

Agora é só lembrar que $n! = n \cdot (n-1)!$:

$$n \cdot n = 7n \Rightarrow n^2 = 7n \Rightarrow n = 0 \text{ ou } n = 7$$

Como esta álgebra foi feita com implicações lógicas (não com equivalências), as raízes têm de ser testadas. Em particular, note que $n = 0$ não dá solução (pois neste caso $(n-1)! = (-1)!$ não faz sentido). Testando $n = 7$: $\frac{8! - 7!}{6!} = 49$

Assim, $n = 7$ é a única resposta.

Exercícios de fixação, p. 133

5 Para que a soma seja par, há apenas dois casos a considerar: ou todos são pares (PPP), ou dois são ímpares e um é par (IIP). Façamos cada um desses casos separadamente:

- PPP: nesse caso, escolheremos 3 dentre os 15 números pares que há de 1 a 30, são: $C_{15}^3 = 455$ possibilidades.
- IIP: nesse caso, escolheremos 2 dentre os 15 ímpares e um dos 15 pares, são: $C_{15}^2 \cdot C_{15}^1 = 1\,575$ possibilidades.

Juntando tudo, são $1\,575 + 455 = 2\,030$ possibilidades.

8 É melhor separar a situação em dois casos mutuamente exclusivos:

- se escolhermos o casal, sobram 2 vagas para 8 estudantes: $C_8^2 = 28$ possibilidades.
- caso contrário, são 4 vagas para 8 estudantes: $C_8^4 = 70$ possibilidades.

Total: 98 maneiras.

10 Cuidado, esta questão não é de "combinação"! Como cada porta está aberta ou fechada, são $2^5 = 32$ possibilidades de posicionamento das portas, das quais apenas uma não serve (todas fechadas).
A resposta é, portanto, 31.

11 Em vez de somar os números diretamente, é melhor pensar na contribuição de cada dígito. Por exemplo, o dígito "5" aparecerá na posição das centenas 6 vezes (pois, se o "5" está nas centenas, ainda há 3 opções para as dezenas e 2 para as unidades). Analogamente, ele aparece 6 vezes na posição das dezenas e mais 6 vezes na posição das unidades. Portanto, a contribuição total do dígito 5 na soma que queremos calcular é:
$500 \cdot 6 + 50 \cdot 6 + 5 \cdot 6 = 555 \cdot 6 = 5 \cdot 111 \cdot 6 =$
$= 5 \cdot 666 = 3\,330$
Analogamente, a contribuição do dígito a será $666a$. Enfim, a contribuição de todos eles será $666\ (1 + 3 + 4 + 5) = 8\,658$, que é a resposta procurada.

13 Podemos escolher dois pontos de s e um de t, ou vice-versa. Melhor separar estes casos mutuamente excludentes:

- *sst*: há $C_5^2 \cdot C_8^1 = 80$ possibilidades;
- *stt*: há $C_8^2 \cdot C_5^1 = 140$ possibilidades.

O total é então de 220 triângulos.

Exercícios de revisão, p. 144

1 Temos:
$20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot ... \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 2\ (10)\ 2\ (9)\ 2\ (8) \cdot ... \cdot 2\ (3)\ 2\ (2)\ 2\ (1) = 2^{10} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2^{10} \cdot 10!$
Alternativa (D).

2 Queremos que $n!$ seja divisível por $1\,000 = 2^3 \cdot 5^3$, isto é, temos de encontrar os fatores primos 2 e 5 pelo menos 3 vezes no produto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$. Note que para $n = 4$ já temos todos os fatores 2 necessários, pois, no produto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, há um fator 2 em 2 e dois fatores 2 em 4). Para conseguirmos os fatores 5, precisamos que 5, 10 e 15 apareçam no produto (cada um contribuindo com um fator 5). Portanto, a resposta é $n = 15$.
Alternativa (B).
A título de curiosidade: com o auxílio de uma calculadora, é rápido obter:
$14! = 87\,178\,291\,200$ e
$15! = 1\,307\,674\,368\,000$.

3 Este problema é semelhante ao anterior: precisamos descobrir quantos fatores 2 e 5 há no produto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 1\,000$. Aliás, note que sempre haverá muito mais fatores 2, então o número de zeros ao final de $1\,000!$ é determinado pelo número de fatores 5 neste produto.
Assim:

- os números 5, 10, 15, 20, ..., 1 000 contribuem com fatores 5 – só aqui há 200 fatores 5;

- mas os números 25, 50, 75, ..., 1000 contribuem com **dois** fatores cada, isto é, um fator **extra** cada. Então somamos mais 40 fatores 5 que não havíamos contado;
- ainda não acabou: $5^3 = 125$ e seus múltiplos 250, 375, ..., 1000 contribuem com ainda mais fatores extras que não contamos no item anterior. Dessa forma, são mais 8 fatores 5;
- enfim, ainda temos de notar que $5^4 = 625$ está na lista, e só contamos 3 dos 4 fatores com que ele contribui – ou seja, adicione mais 1 fator 5.

Somando tudo, são $200 + 40 + 8 + 1 = 249$ fatores 5 no produto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 1000$; o que corresponderá a 249 zeros ao final de 1000!.

A propósito, uma calculadora não conseguirá calcular explicitamente os 2568 dígitos deste número, mas um bom computador consegue fazê-lo:

1000! = 402 387 260 077 093 773 543 702 433
923 003 985 719 374 864 210 714 632 543 799
910 429 938 512 398 629 020 592 044 208 486
969 404 800 479 988 610 197 196 058 631 666
872 994 808 558 901 323 829 669 944 590 997
424 504 087 073 759 918 823 627 727 188 732
519 779 505 950 995 276 120 874 975 462 497
043 601 418 278 094 646 496 291 056 393 887
437 886 487 337 119 181 045 825 783 647 849
977 012 476 632 889 835 955 735 432 513 185
323 958 463 075 557 409 114 262 417 474 349
347 553 428 646 576 611 667 797 396 668 820
291 207 379 143 853 719 588 249 808 126 867
838 374 559 731 746 136 085 379 534 524 221
586 593 201 928 090 878 297 308 431 392 844
403 281 231 558 611 036 976 801 357 304 216
168 747 609 675 871 348 312 025 478 589 320
767 169 132 448 426 236 131 412 508 780 208
000 261 683 151 027 341 827 977 704 784 635
868 170 164 365 024 153 691 398 281 264 810
213 092 761 244 896 359 928 705 114 964 975
419 909 342 221 566 832 572 080 821 333 186
116 811 553 615 836 546 984 046 708 975 602
900 950 537 616 475 847 728 421 889 679 646
244 945 160 765 353 408 198 901 385 442 487
984 959 953 319 101 723 355 556 602 139 450
399 736 280 750 137 837 615 307 127 761 926
849 034 352 625 200 015 888 535 147 331 611
702 103 968 175 921 510 907 788 019 393 178
114 194 545 257 223 865 541 461 062 892 187
960 223 838 971 476 088 506 276 862 967 146
674 697 562 911 234 082 439 208 160 153 780
889 893 964 518 263 243 671 616 762 179 168
909 779 911 903 754 031 274 622 289 988 005
195 444 414 282 012 187 361 745 992 642 956
581 746 628 302 955 570 299 024 324 153 181
617 210 465 832 036 786 906 117 260 158 783
520 751 516 284 225 540 265 170 483 304 226
143 974 286 933 061 690 897 968 482 590 125
458 327 168 226 458 066 526 769 958 652 682
272 807 075 781 391 858 178 889 652 208 164
348 344 825 993 266 043 367 660 176 999 612
831 860 788 386 150 279 465 955 131 156 552
036 093 988 180 612 138 558 600 301 435 694
527 224 206 344 631 797 460 594 682 573 103
790 084 024 432 438 465 657 245 014 402 821
885 252 470 935 190 620 929 023 136 493 273
497 565 513 958 720 559 654 228 749 774 011
413 346 962 715 422 845 862 377 387 538 230
483 865 688 976 461 927 383 814 900 140 767
310 446 640 259 899 490 222 221 765 904 339
901 886 018 566 526 485 061 799 702 356 193
897 017 860 040 811 889 729 918 311 021 171
229 845 901 641 921 068 884 387 121 855 646
124 960 798 722 908 519 296 819 372 388 642
614 839 657 382 291 123 125 024 186 649 353
143 970 137 428 531 926 649 875 337 218 940
694 281 434 118 520 158 014 123 344 828 015
051 399 694 290 153 483 077 644 569 099 073
152 433 278 288 269 864 602 789 864 321 139
083 506 217 095 002 597 389 863 554 277 196
742 822 248 757 586 765 752 344 220 207 573
630 569 498 825 087 968 928 162 753 848 863
396 909 959 826 280 956 121 450 994 871 701
244 516 461 260 379 029 309 120 889 086 942
028 510 640 182 154 399 457 156 805 941 872
748 998 094 254 742 173 582 401 063 677 404
595 741 785 160 829 230 135 358 081 840 096
996 372 524 230 560 855 903 700 624 271 243
416 909 004 153 690 105 933 983 835 777 939
410 970 027 753 472 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000.
Pode confirmar: 249 zeros no final.

5 Note que $n!$ termina com 00 sempre que $n \geqslant 10$. Assim, os dois últimos algarismos desta expressão são determinados pelos dois últimos algarismos de $1! + 2! + ... + 9!$. Agora é só descobrir os dois últimos algarismos de cada um destes fatoriais:
$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8! + 9!$ termina com os mesmos dois algarismos de $01 + 02 + 06 + 24 + 20 + 20 + 40 + 20 + 80 = 213$, ou seja, os dois últimos algarismos da soma pedida são 1 e 3.

14 Três pontos determinam um plano. Assim, dos 20, basta escolher 3 (e nenhum plano será contado mais de uma vez, pois não há 4 pontos coplanares).
Portanto, a resposta é $C_{20}^{3} = 1\,140$.

20 Como as damas e cavalheiros têm de se alternar, há apenas duas opções: DCDCDCDC ou CDCDCDCD (C é cavalheiro, D é dama). No primeiro caso, há 4! maneiras de ordenar apenas as damas da esquerda para a direita, e, para cada uma delas, há 4! maneiras de permutar os cavalheiros. Em outras palavras, o número de ordenações do tipo DCDCDCDC é $(4!)^2 = 576$. No caso CDCDCDCD, analogamente, há 576 outras maneiras de ordenar as 8 pessoas. Assim, no total, são $576 + 576 = 1\,152$ disposições.

24 O caminho tem de começar pela letra I. A partir dali, há duas escolhas para chegar à letra B – indo para baixo ou para a direita. Agora note que, não importa em que letra B estejamos, ainda há duas opções, para baixo ou para a direita, para chegar à letra M. E assim por diante, para cada caminho até a letra M, há duas opções, esquerda ou direita, para chegar ao E. Portanto, o total de caminhos é $2^4 = 16$ (note que há 5 letras, então há 4 mudanças entre as letras).
Alternativa (A).

27 Para responder a esta questão, é necessário utilizar-se de um conhecimento de Biologia: os únicos pares de bases possíveis são AT e GC (e suas reordenações TA e CG). Um fragmento, portanto, deverá conter um os pares AT ou TA e o outro terá de ser GC ou CG. Assim, temos 2 escolhas para o primeiro fragmento, 2 escolhas para o segundo, e 2 maneiras de ordenar estes dois fragmentos.
Portanto, a resposta é $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.
Alternativa (B).

31 Com as informações do enunciado, é impossível descobrir exatamente qual é a disposição dos times em chaves. Até é possível que um dos times tenha sido favorecido de forma que sua primeira e única partida no torneio seja o jogo final! Mesmo assim, o seguinte raciocínio resolve o problema: cada partida elimina um time; como 17 times têm de ser eliminados, o número de partidas tem de ser 17. (Uma versão mais complicada deste problema é o problema 43, a seguir).

35 Como os pontos estão sobre uma circunferência, não há 3 colineares. Assim, cada par de pontos determina uma reta distinta das demais.
Portanto, a resposta é $C_{100}^{2} = 4\,950$.

36 A chave para a resolução está em perceber que, como a partícula tem de terminar onde começou, devem ser 5 movimentos para a esquerda e 5 para a direita. Representando um movimento para a esquera por "E" e um movimento para a direita por "D", a trajetória da partícula pode ser representada por uma sequência de letras do tipo DDEDEEDEED (e sequências distintas nos dão trajetórias distintas). Em suma, das 10 "posições" para as letras, temos de escolher 5 para colocar as letras D, e as outras 5 ficam automaticamente reservadas para a letra E.
Portanto, a resposta é $C_{10}^{5} = 252$.

38 Há $C_{9}^{3} = 84$ maneiras de escolher 3 pontos para serem os vértices de um triângulo. Mas, cuidado: algumas destas escolhas não geram triângulos de fato, pois os vértices seriam colineares! Quantas escolhas então são "ruins" e devem ser descartadas? Cada uma das 3 colunas é uma

escolha não válida, assim como cada uma das 3 linhas e cada uma das 2 diagonais. Dessa forma, são 8 escolhas que devem ser descartadas. Portanto, a resposta é 84 – 8 = 76.

43 Como no problema 31 comentado anteriormente, não é possível determinar o formato exato do campeonato, mas é possível descobrir quantas partidas houve: afinal, cada jogador eliminado (que são 20 – 1 = 19 jogadores) perdeu exatamente 2 partidas. Juntando todas essas partidas (note que nenhuma delas foi contada duas vezes, pois há apenas um perdedor por partida), são $19 \cdot 2 = 38$ partidas. Também é possível considerar que o campeão tenha perdido uma partida, então o total de partidas jogadas é 38 ou 39.
Como a questão pede o número máximo, a resposta é 39.

44 Esta é uma interessante questão de contagem. Para garantirmos um par de bolinhas diferentes, temos de retirar pelo menos 19 + 1 = 20 bolinhas. Afinal, retirar 19 não é suficiente (com muito azar, é possível retirar exatamente as 19 roxas). Por outro lado, com 20, não há como todas serem da mesma cor (o máximo de bolas da mesma cor é máx(13, 17, 19) = 19).
Então, a resposta é 20.

53 Se os réus forem $P_1P_2P_3M_1M_2G_1G_2G_3B_1B_2$, há 10! maneiras de permutá-los. As ordenações que não servem são aquelas em que os 3 paulistas aparecem juntos; para contá-las, imagine que P é um bloco dos 3 julgamentos dos paulistas, e permute P com os outros 7 réus – há 8! maneiras de fazer isso. Note que para cada uma destas 8! maneiras ainda há 3! maneiras de permutar os paulistas dentro do bloco P; então, são de fato 3!8! permutações que não servem.
Portanto, a resposta é $10! - 3! \cdot 8! = P_{10} - P_8P_3$.
Alternativa (E).

54 Sendo n o número de piadas que o professor conta, temos C_n^3 possíveis escolhas das 3 piadas que ele vai contar em um determinado ano. Assim, precisamos ter:

$$C_n^3 \geq 35 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \geq 35 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) \geq 210$$

Em vez de resolver esta equação algebricamente, é mais fácil lembrar que n deve ser um natural positivo e experimentar alguns valores até encontrar o mínimo necessário (até porque C_n^3 aumenta quando n aumenta). Se denotarmos $f(n) = n(n-1)\ (n-2)$, note que $f(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ não serve; $f(6) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ ainda é pouco; mas $f(7) = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ está na medida exata. Assim, a resposta é que o mínimo de piadas que ele contou foi 7.

CAPÍTULO IV

Exercícios de fixação, p. 154

2 A ideia é primeiro escrever $C_5^4 + C_5^5 = C_6^5$ usando a relação de Stifel. Agora dá para comparar isto com o lado direito:
$C_6^5 = C_6^{x+2} \Leftrightarrow x + 2 = 5$ ou $x + 2 + 5 = 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -1$

7 Antes de resolver este exercício, o professor deve, observando o triângulo de Pascal, analisar a igualdade de combinações que têm o mesmo índice superior. Em termos algébricos, considere a equação $C_m^a = C_n^a$ (o caso analisado no texto era distinto: nele, os índices inferiores eram iguais). Uma interpretação desta equação é a seguinte: duas combinações estão na mesma coluna (dada por a) do triângulo de Pascal. Como elas podem ser iguais?
Note no triângulo de Pascal que não há duas combinações iguais na mesma coluna – à medida que descemos no triângulo, os números certamente aumentam (uma maneira de justificar isto é a relação de Stifel). A única coluna que é exceção para esta regra é a primeira: nela, todos os números são iguais a 1.
Em suma, como podemos ter $C_m^a = C_n^a$? Há apenas duas opções:

- ou: temos $a = 0$ e estamos na primeira coluna (então seria $C_m^a = C_n^a = 1$ independentemente de m e n);

- ou: $m = n$ e ambas as combinações estão também na mesma linha.

Agora podemos resolver este problema sem ter de abrir as combinações em polinômios grandes. Queremos: $C^2_{n-1} = C^4_{n+1}$

Mas sabemos que $C^2_{n-1} = C^{(n-1)-2}_{n-1} = C^{n-3}_{n-1}$, ao passo que $C^4_{n+1} = C^{(n+1)-4}_{n+1} = C^{n-3}_{n+1}$. Assim, podemos reescrever esta equação como: $C^{n-3}_{n-1} = C^{n-3}_{n+1}$.

Agora podemos usar a discussão anterior: como os índices superiores são iguais, há apenas duas hipóteses, $n - 3 = 0$ ou $n + 1 = n - 1$. A segunda opção não oferece solução, então fica apenas o caso $n = 3$ (que é a única solução).

Exercícios de fixação, p. 160

9 Veremos posteriormente uma maneira de resolver este exercício notando que esta soma é exatamente $(1 - 1)^{10}$ quando expandido pelo binômio de Newton. Por ora, uma solução é escrever cada combinação destas em função da linha anterior usando a relação de Stifel várias vezes:

$C^0_{10} = C^0_9$

$-C^1_{10} = -C^0_9 - C^1_9$

$C^2_{10} = C^1_9 + C^2_9$

$-C^3_{10} = -C^2_9 - C^3_9$

...

$-C^9_{10} = -C^8_9 - C^9_9$

$C^{10}_{10} = C^9_9$

Somando tudo, note que os termos à direita cancelam todos! Portanto, a resposta é 0.

Exercícios de fixação, p. 169

15 Vamos escrever $x = \sqrt{2}$ e $a = \sqrt[3]{5}$ para facilitar a notação. O termo geral é $T_{k+1} = C^k_7 a^k x^{7-k}$.

Para que este termo seja racional, precisamos que o expoente de $\sqrt{2}$ seja par e o de $\sqrt[3]{5}$ seja divisível por 3. Como $7 - k$ tem de ser ímpar, k tem de ser ímpar. Então k tem de ser um múltiplo ímpar de 3. Como $k = 0, 1, 2, ..., 7$, a única opção é $k = 3$. O termo correspondente é:

$$T_4 = C^3_7 a^3 x^4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} \cdot 5 \cdot 4 = 700$$

18 O termo geral é $T_{k+1} = C^k_{50} \dfrac{1}{10^k} 1^{50-k} = \dfrac{C^k_{50}}{10^k}$

Para encontrar o termo máximo, vamos comparar T_k com T_{k+1} – o primeiro é menor se, e somente se,

$$\frac{C^{k-1}_{50}}{10^{k-1}} < \frac{C^k_{50}}{10^k} \Leftrightarrow \frac{50!}{(k-1)!(50-(k-1))!10^{k-1}} <$$

$$< \frac{50!}{k!(50-k)!10^k} \Leftrightarrow \frac{10^k k!}{10^{k-1}(k-1)!} < \frac{(51-k)!}{(50-k)!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10k < 51 - k \Leftrightarrow k < \frac{51}{11} = 4{,}636...$$

Assim, temos $T_0 < T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < T_5 > T_6 > ...$, ou seja, o termo máximo é:

$$T_5 = \frac{C^4_{50}}{10^4} = \frac{230\,300}{10\,000} = 23{,}03$$

Exercícios de revisão, p. 173

5 Substituir x e y na expressão do jeito como está é uma opção trabalhosa demais. O melhor é, em primeiro lugar, usar o binômio de Newton para coletar os termos:

$x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 = (x - y)^4$

Agora é bem mais simples, afinal:

$$(x-y)^4 = \left(\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt[4]{5}} - \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt[4]{5}}\right)^4 = \left(\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right)^4 = \frac{2^4}{5}$$

Alternativa (C).

6 Novamente, para evitar cálculos trabalhosos, usemos o binômio de Newton:

$99^5 + 5(99)^4 + 10(99)^3 + 10(99)^2 + 5(99) + 1 =$

$= (99 + 1)^5 = 100^5 = 10^{10}$

Alternativa (D).

20 Em primeiro lugar, observe a notação para números binomiais, e lembre que $C^p_n = \dbinom{n}{p}$ (cuidado com a inversão da ordem dos índices!). Agora basta notar que os termos equidistantes dos extremos correspondem a combinações complementares e, portanto, se cancelam, isto é:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$$

$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$

...

Assim, a expressão pedida tem valor 0.

22 Antes de começar, reescreva a expressão coletando os termos entre parênteses:

$(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^3 = ((x - 1)^3)^3 = (x - 1)^9$

Agora sim, a questão volta aos padrões familiares. O termo geral é $T_{k+1} = C_9^k(-1)^k x^{9-k}$

Para termos grau 4 em x, escolhemos $k = 5$. Então, $T_6 = C_9^5(-1)^5 x^4 = -126x^4$

Portanto, o coeficiente pedido é –126.

29 O termo geral é $T_{k+1} = C_{10}^k(\sqrt{5})^k(2\sqrt{3})^{10-k}$.

Para que este termo seja um número racional, é necessário e suficiente que k e $10 - k$ sejam ambos pares, isto é, que k seja um número par. Como k varia entre 0 e 10, os valores que resultam em termos racionais são $k = 0$; 2; 4; 6; 8; 10, isto é, seis termos (que supomos não terem sido coletados em um único número, é claro).

Alternativa (B).

30 Pelo binômio de Newton, temos:

$(1 + a)^{20} = 1 + C_{20}^1 a + C_{20}^2 a^2 + ... =$

$= 1 + 20a + 190a^2 + ...$

Note que, se a é bem pequeno (como é o caso aqui), os termos rapidamente diminuem à medida que a potência de a aumenta. Então,

$(1 + 0{,}003)^{10} \simeq 1 + 20\,(0{,}003) = 1{,}06$

já que o primeiro termo descartado na aproximação, $190\,(0{,}003)^2 = 190\,(0{,}000009) = 0{,}00171$, já está na casa dos milésimos e nenhuma das respostas apresenta esta precisão (além disso, os termos descartados só aumentariam a nossa estimativa, e todas as outras respostas estão abaixo de 1,06).

Alternativa (D).

32 Esta é a relação de Stifel, então vale para qualquer valor de n, desde que as combinações existam. Para tanto, precisamos ter $n - 1 \geq 3$, isto é, $n \geq 4$. Como n é natural, esta condição é equivalente a $n > 3$.

Alternativa (D).

CAPÍTULO V

Exercícios de fixação, p. 190

4 Denotemos "K" para Cara e "C" para Coroa. Se acreditarmos que os lançamentos das moedas não têm influência entre si, então é razoável pressupor que os quatro resultados possíveis CC, KC, CK e KK são igualmente prováveis, cada um com probabilidade $\frac{1}{4}$.

Assim, a probabilidade pedida é:

$p(\{CC, KC, CK\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

5 O espaço amostral é a tabela apresentada na seção 5.2, isto é, é $\Omega = A \times A$, onde $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ (note que Ω tem 36 elementos, supostamente igualmente prováveis). Há apenas 4 pares destes onde a soma é 5, isto é, o evento "a soma é 5" é $E = \{(1, 4); (2, 3); (3, 2); (4, 1)\}$; em que cada um destes quatro eventos elementares tem probabilidade $\frac{1}{36}$.

Assim, a probabilidade pedida é:

$p(E) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} =$

$= 0{,}111... \simeq 11{,}11\%$

6 A resposta desta questão depende de como os números são escolhidos. Vamos supor que cada uma das possíveis escolhas é igualmente provável; como são $C_{10}^2 = 45$ escolhas, cada uma delas deve ter probabilidade $\frac{1}{45}$.

Para que o produto dos dois números seja ímpar, ambos têm de ser ímpares; assim, há $C_5^2 = 10$ maneiras distintas de escolher um par de números ímpares, cada uma com probabilidade $\frac{1}{45}$. Portanto, a probabilidade pedida é:

$$\underbrace{\frac{1}{45} + \frac{1}{45} + ... + \frac{1}{45}}_{\text{10 termos}} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

8 Vamos à tabela com as 36 possibilidades para o resultado dos lançamentos. Note que as que

servem ao enunciado estão próximas à diagonal principal da tabela, enfatizadas a seguir:

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Ou seja, são 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 = 16 possibilidades favoráveis, cada uma com probabilidade $\frac{1}{36}$.

Portanto, a resposta é:

$$\underbrace{\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\ldots+\frac{1}{36}}_{16\text{ termos}}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}\simeq 44{,}44\%$$

Comentário geral: note que estamos demonstrando as resoluções do "jeito comprido": somando várias probabilidades do tipo $\frac{1}{N}$ para obter as respostas. A vantagem de seguir esse raciocínio inicialmente é que, se o aluno tiver de lidar com espaços amostrais que não são equiprováveis (dados ou moedas viciadas, pesquisas estatísticas em que não há o mesmo número de leitores para cada candidato etc.), este método da soma continua valendo, ao passo que a famosa fórmula "número de casos possíveis sobre número de casos favoráveis" falha (apesar de ela ser extremamente útil se os eventos forem igualmente prováveis, como veremos na seção a seguir).

Exercícios de fixação, p. 198

Em todos os exercícios que se seguem, temos de supor que os dados, moedas etc. são justos, e que lançamentos consecutivos são independentes, a menos que indicado o contrário na própria questão. Sem essa hipótese, é impossível resolver muitos desses problemas.

6 São $P_3 = 3! = 6$ maneiras de obter estes três resultados em qualquer ordem, de um total de $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$ resultados possíveis e supostamente equiprováveis. Assim, a probabilidade é $\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$.

10 São 6^3 possibilidades para a trinca ordenada que nos dá os três resultados; supondo que o dado é justo e os lançamentos são independentes, todas teriam a mesma probabilidade de $\frac{1}{6^3}$.

a) Se os números devem ser diferentes, há 6 possibilidades para o primeiro lançamento, 5 para o segundo e 4 para o terceiro. Então, há $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ resultados possíveis.

b) Podemos listar explicitamente as poucas possibilidades de obter soma maior ou igual a 16. São elas:

- se um dos dados for 3 ou menos, os outros dois têm de somar 13 ou mais, o que é impossível;
- se um dos dados for 4, os outros dois têm de somar 12. Então, temos apenas (4, 6, 6) e suas permutações: 3 possibilidades;
- se um dos dados for 5, a soma dos outros dois tem de ser 11 ou 12. Então, temos (5, 5, 6) e permutações (3 possibilidades) ou (5, 6, 6) e permutações (3 possibilidades);
- enfim, se todos os dados forem (6, 6, 6), temos a soma 18; o que nos dá mais 1 possibilidade.

Assim, são 3 + 3 + 3 + 1 = 10 casos favoráveis dentre os 6^3 casos possíveis. A probabilidade pedida é:

$$\frac{10}{6^3}=\frac{5}{108}\simeq 4{,}62\%$$

Ou seja, é possível, mas um pouco incomum.

13 Há $75 \cdot 74 \cdot 73$ maneiras de escolher as 3 primeiras bolas; como a cartela de bingo tem 24 números, há $24 \cdot 23 \cdot 22$ maneiras de estes números estarem na cartela.

Portanto, a resposta é:

$$\frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{75 \cdot 74 \cdot 73}=\frac{2024}{67\,525}\simeq 3{,}00\%$$

Ou seja, outro evento possível, mas um pouco raro.

14 Seja ABCDEF o hexágono. Há apenas duas maneiras de os vértices escolhidos formarem um triângulo equilátero, com as escolhas ACE e BDF. Portanto, a resposta é:

$$\frac{2}{C_6^3} = \frac{1}{10} = 10\%$$

15 a) As bolinhas favoráveis são 3, 6, 9, 12, 15. São cinco possibilidades favoráveis de 15 possíveis, então a probabilidade é $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

b) Como o sorteio é feito sem reposição, são $C_{15}^2 = 105$ possíveis escolhas (supostamente igualmente prováveis). Destas, há 14 pares em que os números são consecutivos ({1, 2}; {2, 3}; ...; {14, 15}).
Então, a probabilidade pedida é:

$$\frac{14}{105} = \frac{2}{15} \simeq 13{,}33\%$$

Exercícios de fixação, p. 203

3 Seja A o evento "número da etiqueta é múltiplo de 2" e B o evento "número da etiqueta é múltiplo de 5".
Como há 10 números pares entre 1 e 20, temos $p(\text{A}) = \frac{10}{20}$.
Como há 4 múltiplos de 5 entre 1 e 20, temos $p(\text{B}) = \frac{4}{20}$.
Como há 2 múltiplos de 10, temos

$p(\text{A e B}) = \frac{2}{20}$.

Então, $p(\text{A ou B}) = \frac{10}{20} + \frac{4}{20} - \frac{2}{20} = \frac{12}{20} = 60\%$.

4 Com a notação usual,
$p(6 \text{ ou cara}) = p(6) + p(\text{cara}) - p(6 \text{ e cara}) =$
$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$.

5 Como o dado é viciado, não podemos mais usar "favoráveis sobre possíveis"! Ainda assim, podemos resolver o problema da seguinte forma: seja A o evento "obter 3 ou mais" e seja B o evento "obter 3 ou menos". Note que $p(\text{A ou B}) = 100\%$ (não importa se o dado é viciado: sempre obteremos "3 ou mais" ou "3 ou menos"!).
Então, $p(\text{A e B}) = p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A ou B}) =$
$= 95\% + 18\% - 100\% = 13\%$
Note que A e B significa exatamente "obter 3 no dado", já que esta é a única hipótese comum a "3 ou mais" e "3 ou menos".
Portanto, a resposta é 13%.

Exercícios de fixação, p. 210

3 O espaço amostral é Ω = {KK, CC, CK, KC}.
Seja A o evento "pelo menos uma vez deu cara" e B o evento "deu cara em ambas as vezes". Explicitamente, temos A = {KK, CK, KC} e B = {KK}.
Então, o pedido é:

$$p(\text{B}|\text{A}) = \frac{p(\text{B e A})}{p(\text{A})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

pois B e A é o mesmo que B.
Outra maneira de resolver: como é sabido que pelo menos uma das moedas deu cara, nosso novo universo é o conjunto A. Ele apresenta 3 situações igualmente prováveis; qual a chance de obtermos KK nesse conjunto?
Resposta: 1 de 3 igualmente prováveis, então $\frac{1}{3}$.

Comentário: note que dizer que "pelo menos uma delas deu cara" é diferente de dizer "a primeira moeda deu cara". Se a questão fosse: "Sabendo que a **primeira** moeda deu cara, qual a probabilidade de ter dado cara em ambas as vezes", então o novo universo seria apenas {KK; KC} e a resposta seria $\frac{1}{2}$; a resposta dependeria apenas da outra moeda, que tem 50% de chance de ser cara também.
Se quisermos ir além: suponha que alguém viu o resultado de **ambas** as moedas. Você pergunta a essa pessoa "pelo menos uma moeda deu cara?", e essa pessoa, em quem confiamos sem restrições, diz que **sim**. Este é o caso do enunciado original: a chance de haver duas caras é $\frac{1}{3}$.
Agora, se você pessoalmente espiou **uma** das moedas (que será designada aqui "a primeira"),

e viu que ela é cara, então a situação não é a do enunciado! Aqui, a resposta seria $\frac{1}{2}$.

Em suma, devemos tomar muito cuidado ao considerar informações obtidas nos nossos cálculos de probabilidade condicional – a resposta pode também depender de **como** a informação foi obtida.

Se você não acredita nisto, faça experiências dos dois tipos (perguntando a quem viu as moedas, ou espiando uma delas aleatoriamente) com seus alunos, e note como as proporções variam! Cerca de 50% das vezes em que você espiou uma moeda K havia KK, mas em apenas cerca de $\frac{1}{3}$ das situações em que o aluno disse **sim** à pergunta "uma delas é cara?" havia de fato duas caras. Não é que há mais KKs de um jeito ou de outro – é que o aluno responde **sim** mais frequentemente do que você **vê** uma cara! De fato, ele diz **sim** todas as vezes que você viu cara, mas também em todas as vezes em que a **outra** moeda, que você não viu, é cara.

6 Este problema pode ser feito apenas com fórmulas, mas é mais fácil fazer uma tabela assim:

	Suspeitas	Não suspeitas	Total
Fraudulentas			
Não Fraudulentas			
Total			

Queremos começar a preencher a tabela pelo total geral do número de declarações, mas este número não é dado nem é possível obtê-lo! Assim, escolheremos 1 000 como referência (escolhemos 1 000 para facilitar o cálculo). Como 10% delas são "suspeitas", temos para começar:

	Suspeitas	Não suspeitas	Total
Fraudulentas			
Não Fraudulentas			
Total	$10\% \cdot 1\,000 = 100$	$1\,000 - 100 = 900$	1 000

Lembre-se: o número 1 000 foi inventado e é apenas uma referência; **não** é verdade que este é o número de declarações. Porém, os números da nossa tabela "fictícia" respeitarão as **proporções** dos números corretos. Então, como 20% daquelas 100 suspeitas são fraudulentas e 2% das não suspeitas são fraudulentas:

	Suspeitas	Não suspeitas	Total
Fraudulentas	$20\% \cdot 100 = 20$	$2\% \cdot 900 = 18$	
Não Fraudulentas			
Total	100	900	1 000

Agora é só acertar as outras células por somas e subtrações. Temos:

	Suspeitas	Não suspeitas	Total
Fraudulentas	20	18	38
Não Fraudulentas	80	882	962
Total	100	900	1 000

Podemos resolver qualquer questão referente a proporções dentre estas quantias. No caso:

a) Proporcionalmente, são 20 suspeitas fraudulentas dentre 1 000 declarações, ou seja, a probabilidade é $\frac{20}{1\,000} = 2\%$.

b) Proporcionalmente, são 20 suspeitas dentre as 38 fraudulentas, ou seja, a probabilidade é $\frac{20}{38} \simeq 52{,}6\%$.

Exercícios de fixação, p. 221

3 Cuidado com a interpretação de sentenças do tipo "ter isso mais do que aquilo". Com porcentagens, por exemplo, ter "50% mais carpas do que trutas" seria dizer que "o número de carpas é 1,5 vezes o número de trutas". Devemos adicionar 1 à porcentagem para obter o fator multiplicativo, e a palavra "vezes" não aparece junto da porcentagem.

No entanto, a expressão "ter n vezes mais X do que Y" (note agora a palavra "vezes") é usada em língua portuguesa com outro significado. Afinal, interpreta-se "n vezes mais trutas do

que carpas" como "o número de trutas é n vezes o número de carpas" (sem adicionar 1 para se obter o fator). Além disso, não se ouve alguém dizer "eu tenho 1 vez mais trutas do que carpas" (simplesmente não se usa esta expressão com $n = 1$).

Então vamos resolver a questão usando a interpretação usual (ainda que ligeiramente ilógica – afinal, o uso da linguagem é que acaba por determinar o seu significado). Dessa forma, se Fernando pescou x carpas, suporemos que Fernando pescou $2x$ trutas ("duas vezes mais trutas do que carpas"), em um total de $3x$ peixes. Então Cláudio pescou um terço disto, isto é, x peixes, divididos igualmente entre carpas e trutas. Fica mais fácil ver tudo isso em uma tabela, na qual apresentamos o cálculo de alguns totais:

	Trutas	Carpas	Total
Fernando	$2x$	x	$3x$
Cláudio	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	x
Total	$2x + \frac{x}{2} = \frac{5x}{2}$	$x + \frac{x}{2} = \frac{3x}{2}$	$3x + x = 4x$

Note que é impossível determinar o valor de x, mas também é desnecessário: ao escolher uma das $\frac{5x}{2}$ trutas ao acaso, a chance de ela ser de Fernando é $\frac{2x}{\frac{5x}{2}} = \frac{4}{5} = 80\%$.

4 a) Para que o produto seja par, é necessário e suficiente que pelo menos um dos números seja par. Cálculos probabilísticos com "pelo menos um" costumam ser facilmente resolvidos pela sua negação – vamos então calcular a probabilidade de o produto ser ímpar, isto é, de que todos os três números lançados sejam ímpares. Cada um dos dados tem $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ de probabilidade de mostrar um número ímpar; como eles são independentes, a probabilidade de todos serem ímpares é $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Assim, a probabilidade pedida é a do complementar $p(\text{produto par}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

b) Para que o produto seja múltiplo de 10, é necessário e suficiente que (pelo menos) um dos dados seja par, e também (pelo menos) um dos dados seja múltiplo de 5.

Denotemos por P a obtenção de um número par (2, 4, 6) em um dos lançamentos; por 5 a obtenção do número 5; e por N a obtenção de nenhum desses casos (isto é, 1 ou 3). Assim, o resultado do lançamento pode ser descrito por expressões como PPP (três números pares) ou N5P (primeiro número é 1 ou 3, segundo é 5, terceiro é par). Para que o produto seja múltiplo de 10, há três casos para serem considerados:

- dois P e um 5: são três subcasos {PP5, P5P, 5PP}, cada um com probabilidade $p(P) \cdot p(P) \cdot p(5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$.
  No total, estes três casos nos oferecem $\frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}$ de probabilidade;
- um P e dois 5: são três subcasos {P55, 5P5, 55P}, cada um com probabilidade $p(P) \cdot p(5) \cdot p(5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$. No total, estes três casos nos oferecem $\frac{1}{72} + \frac{1}{72} + \frac{1}{72} = \frac{1}{24}$ de probabilidade;
- um P, um 5 e outro que não é par nem múltiplo de 5: são seis subcasos (P5N e suas permutações), cada um com probabilidade $p(P) \cdot p(5) \cdot p(N) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{36}$.
  No total, esses seis casos nos dão $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ de probabilidade.

Juntando tudo (é um caso, **ou** outro, **ou** outro, e eles não têm intersecção), a probabilidade de o produto ser múltiplo de 10 é:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \simeq 33{,}33\%$$

Outra solução (curta, mas mais difícil): seja A o evento “produto é par” e seja B o evento “produto é múltiplo de 5”. Como no item (a), é fácil obter

$$p(\overline{A}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow p(A) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}.$$

Analogamente, B só não acontece se nenhum número for múltiplo de 5:

$$p(\overline{B}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \Rightarrow p(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$$

Enfim, A **ou** B só **não** acontece se nenhum dado for par nem 5. Em outras palavras, **o produto não é par nem múltiplo de 5** se, e somente se, todos os dados forem 1 ou 3. Em símbolos:

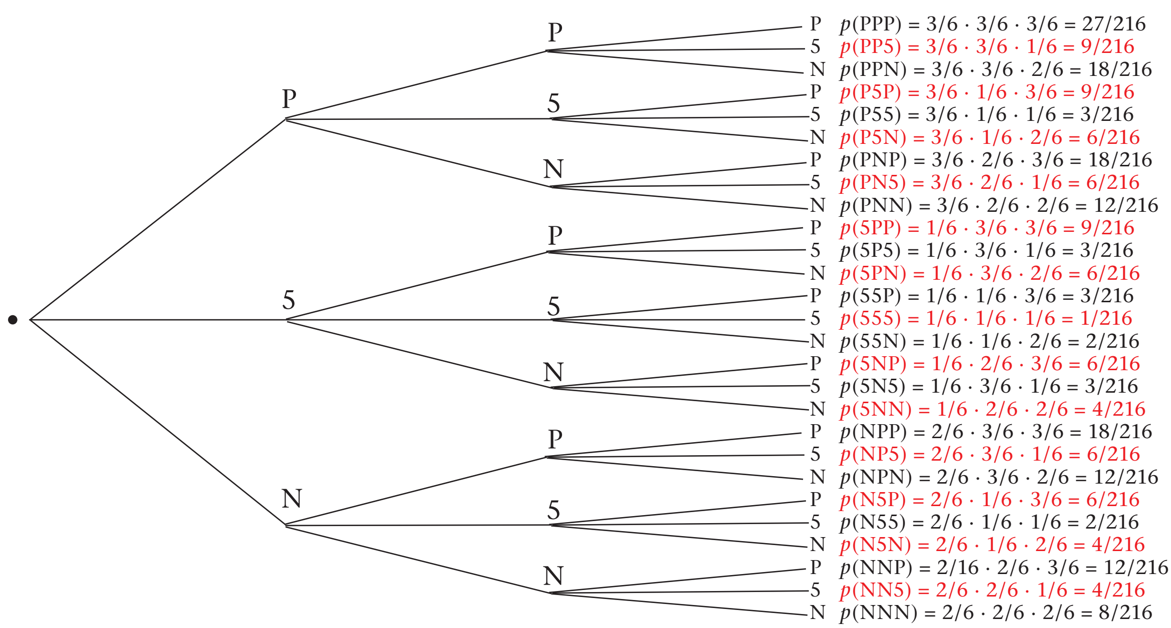
$$p(\overline{A \text{ ou } B}) = \left(\frac{2}{6}\right)^3 \Rightarrow p(A \text{ ou } B) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{26}{27}$$

Agora, usamos a lei da adição:

$$p(A \text{ e } B) = p(A) + p(B) - p(A \text{ ou } B) =$$
$$= \frac{7}{8} + \frac{91}{216} - \frac{26}{27} = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$$

Comentário 1: Cuidado! Queremos $p(A \text{ e } B)$, mas não podemos igualar isso com $p(A) \cdot p(B)$, pois A e B não são independentes! Os dados são independentes, mas os eventos A e B não o são. Intuitivamente, quando A ocorre, a probabilidade de B é afetada para menos (se algum dado é par, é uma chance a menos para algum dado ser 5).

Comentário 2: desenhar uma árvore com todas as possibilidades é cansativo demais: são 6^3 = 216 possíveis resultados para os 3 números procurados. Isso dito, a árvore pode ser reduzida consideravelmente se os ramos representarem apenas o que nos interessa: se o resultado é par, múltiplo de 5 ou não. Uma possível árvore (ainda bastante complexa, mas desenhável) seria:



Essa árvore indica o seguinte espaço amostral:

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} \text{PPP, PP5, PPN, P5P, P55, P5N, PNP, PN5,} \\ \text{PNN, 5PP, 5P5, 5PN, 55P, 555, 55N, 5NP,} \\ \text{5N5, 5NN, NPP, NP5, NPN, N5P, N55,} \\ \text{N5N, NNP, NN5, NNN} \end{matrix}\right\}$$

$\Big($note que a soma de todas as probabilidades à direita é, de fato, $\frac{216}{216} = 1\Big)$. As possibilidades que dão múltiplos de 10 são as que contenham pelo menos um P e um 5.

Explicitamente, são elas:

Z = {PP5, P5P, P55, P5N, PN5, 5PP, 5P5, 5PN, 55P, 5NP, NP5, N5P}

Agora, tome muito cuidado: apesar de haver 12 elementos aqui, de um espaço amostral com 27, a probabilidade não é $\frac{12}{27}$. Afinal, a fórmula "casos favoráveis sobre casos possíveis" só serve se todos os tais casos forem igualmente prováveis, que não é o caso deste espaço amostral (veja a probabilidade de cada caso à direita da árvore – note como 555 é muito mais raro que PPP, por exemplo). Em vez disso, a probabilidade desejada no item (b) pode ser obtida pela soma das probabilidades dos eventos acima:

$$p(\text{Z}) = p(\text{PP5}) + p(\text{P5P}) + ... + p(\text{N5P}) =$$

$$= \frac{3 \cdot 9 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6}{216} = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$$

Comentário: A desvantagem da árvore é que ela dá bastante trabalho. A vantagem é que, uma vez feita, qualquer problema de probabilidade (que envolva números pares ou múltiplos de 5) pode ser resolvida com a árvore! Experimente descobrir na árvore onde estão os eventos A, B, A ou B da solução anterior.

8 Denotando por A a extração de uma bola azul e por V a extração de uma bola vermelha, temos o espaço amostral:
Ω = {AA, AV, VA, VV}
Destes eventos, nos interessa:
X = {AV, VA}
Mas cuidado novamente: os eventos do espaço amostral não são igualmente prováveis, então colocar a probabilidade em $\frac{2}{4}$ = 50% é um erro!
Em vez disso, calculemos:

$$p(\text{AV}) = p(\text{A}) \cdot p(\text{V}|\text{A}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

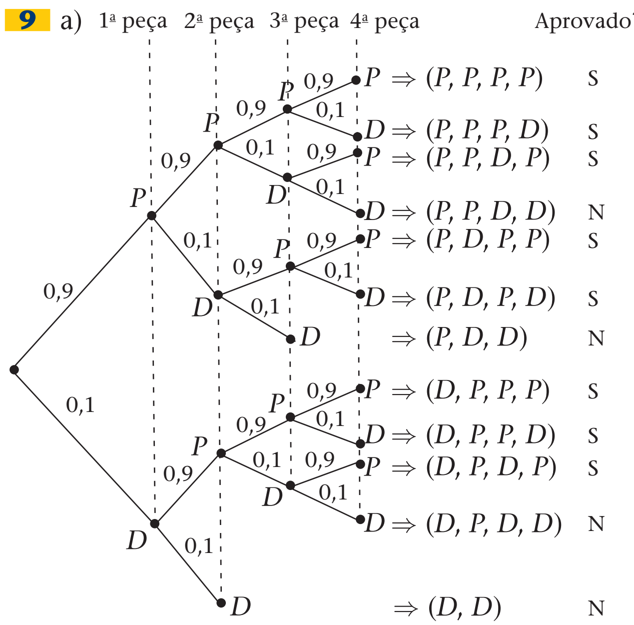
$$p(\text{VA}) = p(\text{V}) \cdot p(\text{A}|\text{V}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

(Em palavras: no começo, há 3 bolas azuis em 5; retirada 1 bola azul, ficam 2 vermelhas de 4; isto explica a primeira linha. A segunda é análoga.)

Então, $p(\text{X}) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$ = 60%.

Comentário: novamente, apesar de termos $p(\text{A}) = \frac{3}{5}$ e $p(\text{V}) = \frac{2}{5}$, não podemos dizer que $p(\text{A e V}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$, pois esses eventos não são independentes!

9 a)



b) $p(\text{rep}) = p(\text{PPDD}) + p(\text{PDD}) + p(\text{DD}) \neq p(\text{DPDD})$
$= (0{,}9)^2(0{,}1)^2 + (0{,}9)(0{,}1)^2 + (0{,}1)^2 + (0{,}9)(0{,}1)^3 =$
$= 2{,}80\%$

c) $p(\text{D}_1) = 0{,}1$

$$p(\text{rep}|\text{D}_1) = \frac{p(\text{DD}) + p(\text{DPDD})}{p(\text{D}_1)} =$$

$$= \frac{(0{,}1)^2 + (0{,}9)(0{,}1)^3}{(0{,}1)} = 10{,}9\%$$

Exercícios de revisão, p. 222

2 No momento em que se diz que a bola é ímpar, o "novo universo" é {1, 3, 5, 7, 9, 11}. Supondo que o sorteio é "justo", estas bolas seriam igualmente prováveis. A probabilidade de o número ser menor que 5 (isto é, 1 ou 3) é então $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

4 No primeiro caso, a probabilidade X de ele ganhar é:

$$X = \frac{3}{10} = 30\%$$

No segundo caso, é um pouco mais complicado calcular a probabilidade de ele ganhar diretamente (ele pode ganhar no primeiro sorteio, no segundo ou em ambos). É mais fácil descobrir a probabilidade de ele não ganhar, o que significa não ganhar no primeiro nem no segundo:

$$1 - Y = \frac{8}{10} \cdot \frac{9}{10} = 72\%$$

Dessa forma, a probabilidade de ele ganhar alguma coisa é:

$$Y = 1 - \frac{72}{100} = 28\%$$

Finalmente, no terceiro caso, a probabilidade de ele nada ganhar é:

$$1 - Z = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{729}{1000} = 72{,}9\%$$

E a probabilidade de ele ganhar algum prêmio é $Z = 27{,}1\%$.

Portanto, $X > Y > Z$.

Alternativa (E).

Comentário: se você estranhou esta resposta – há menos chance de ganhar alguma coisa no caso Z. Porém isto é compensado pelo fato de que, nesse caso, há uma pequena chance de o apostador ganhar mais de uma vez!

5 Veja solução anterior: $1 - Z = 72\%$.

Alternativa (C).

11 Representemos por O_i a retirada de uma moeda de ouro da gaveta i, e por P_i a retirada de uma moeda de prata. O espaço amostral é, então,

$\Omega = \{P_1P_2, P_1O_2, O_1P_2, O_1O_2\}$

e queremos a probabilidade do evento

$X = \{P_1O_2, O_1O_2\}$

mas, claramente, não podemos considerar os eventos igualmente prováveis. Mas não é difícil calcular cada probabilidade separadamente. Por exemplo:

$$p(P_1O_2) = p(P_1) \cdot p(O_2|P_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

já que há 3 moedas de prata dentre 5 na primeira gaveta e, se uma moeda de prata foi retirada da primeira e colocada na segunda gaveta, a segunda gaveta terá 2 moedas de ouro dentre 4.

Analogamente:

$$p(O_1O_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

Portanto, a resposta é:

$$p(X) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5} = 60\%$$

12 Melhor separar em dois casos.

- Caso 1: ambos tiram 0 coroas:

$$p(A = 0 \text{ e } B = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

- Caso 2: ambos tiram 1 coroa cada:

$$p(A = 1 \text{ e } B = 1) = \left(C_2^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Como os casos não têm intersecção, a probabilidade total é:

$$p(A = B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

16 Para resolver este problema, é necessário que se suponha que os eventos são independentes, isto é, que a probabilidade de um jogador errar não se altera quando o outro erra (o que não é necessariamente correto em uma competição – se seus companheiros erraram pênaltis, você pode se empenhar mais no seu, ou pode ficar abalado e piorar a sua pontaria). Com essa hipótese, temos:

$$p(\text{erros} = 3) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{5}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{20} = 5\%$$

Alternativa (B).

18 Estamos supondo que todas as 5 chaves serão testadas (o normal é parar quando se acha a chave correta – neste caso, sim, a correta é sempre a última), e que são igualmente prováveis (já que são “parecidas”). Então, a chance de a primeira ser a correta é $\frac{1}{5} = 20\%$, assim como a chance de a quinta chave ser correta. A chance de a chave correta não ser a primeira seria $1 - 20\% = 80\%$.

Em suma, as respostas são, na ordem, 80%, 20% e 20%.

Comentário: A impressão de que a gente nunca acerta de primeira é um viés da nossa memória – tipicamente lembramos mais as vezes em que tivemos de tentar várias chaves até achar a correta, especialmente quando estamos com pressa.

20 Baseado na tabela, admitiremos que o dado é viciado, com probabilidades $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{1}{12}$ e $\frac{3}{12}$, respectivamente, para os números de 1 a 6. Não há certeza de que apareçam 2, 4 ou 6 nos próximos 2 lançamentos (apesar de pelo menos um deles ser bastante provável), então eliminamos as opções (A), (B) e (D).
A probabilidade de ocorrência de uma face par em um dado é $\frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Assim, a chance de não ocorrer face par alguma em dois dados é $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$; isto é, a chance de ocorrer pelo menos uma face par é $\frac{8}{9}$. A chance de ocorrer duas faces pares é $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, então a chance de ocorrer exatamente uma face par é $\frac{8}{9} - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$. Em suma, seja qual for a interpretação da opção (E), nenhuma das probabilidades acima é $\frac{1}{2}$.

A chance de não ocorrer 6 algum é $\frac{9}{12} \cdot \frac{9}{12} = \frac{9}{16}$, então a chance de aparecer algum 6 é $1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$.

Alternativa (C).

21 É razoável supor que cada setor do disco tem a mesma chance de ser sorteado. Assim, o espaço amostral de uma rodada do ponteiro é $\Omega = \{1, 2, 3\}$, cujas probabilidades são $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{6}$ respectivamente.

Para que a soma seja 5 em dois números, os resultados têm de ser (2, 3) ou (3, 2). Supondo que os giros são independentes, temos:

$$p((2, 3)) = p((3, 2)) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

Ou seja, $p(\text{soma} = 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Alternativa (C).

35 Se n é ímpar, nenhuma diagonal passa pelo centro, então a probabilidade é 0. Se n é par, são um total de $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais, das quais $\frac{n}{2}$ passam pelo centro. Então, a probabilidade seria $\frac{n}{n(n-3)} = \frac{1}{n-3}$.

Alternativa (E).

36 a) A probabilidade de A tirar o 6 em uma jogada é $\frac{1}{6}$.

b) Para isto ocorrer, A não pode ganhar na primeira jogada $\left(\text{probabilidade } \frac{5}{6}\right)$, e, em seguida, B deve tirar 6 $\left(\text{probabilidade } \frac{1}{6}\right)$. Assim, a probabilidade de B vencer na segunda jogada é $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

c) Continuando o padrão do item anterior:
- a probabilidade de A vencer na terceira jogada é $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{6^3}$ (A e B não tiram 6, mas então A tira 6);
- a probabilidade de A vencer na quinta jogada é $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}$ (as primeiras quatro jogadas não dão 6, mas a quinta dá);

  ...
- a probabilidade de A vencer na $(2n + 1)$-ésima jogada é $\left(\frac{5}{6}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{6}$.

Assim, a chance de A vencer em algum momento é:

$$p = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \ldots$$

que é a soma dos termos de uma PG cujo primeiro termo é $\frac{1}{6}$ e a razão é $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ (que é menor que 1, então podemos fazer a soma infinita). Assim, esta soma dá:

$$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{36}{11} = \frac{6}{11}$$

Ou seja, A tem uma ligeira vantagem por "ir primeiro".

39 Das 36 possibilidades equiprováveis para o lançamento de dois dados, há 6 em que os números são iguais. As outras 30 são divididas: 15 em que o número de X é maior, 15 em que o número de Y é maior. Como X ganha mesmo que os números estejam empatados, temos:

$$p(\text{X ganhar}) = \frac{15 + 6}{36} = \frac{7}{12}$$

Alternativa (C).

40 Os pares (n_1, n_2) que dão $n = 7$ são:

- se $n_1 > n_2$, temos (6, 1), (5, 2) e (4, 3);
- se $n_1 \leqslant n_2$, devemos ter $n_1 = 7 - 1 = 6$; então só pode ser (6, 6).

Assim, são 4 possibilidades de 36 igualmente prováveis.

Alternativa (A).

42 Para resolver esta questão, temos de pressupor que os 6 números são igualmente prováveis (que é uma suposição duvidosa se os jogadores estão tentando fazer o máximo de pontos). Então a pergunta é "qual a probabilidade de obter soma 4 nos dois próximos lançamentos". Como são 3 opções (1, 3), (2, 2), (3, 1) de 36 possíveis, a probabilidade seria $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

44 São $6^3 = 216$ resultados possíveis. Destes, $6 \cdot 5 \cdot 4$ têm números distintos. Agora, cada resultado com três números distintos aparece em $3! = 6$ ordens diferentes, das quais apenas uma serve. Assim, são $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$ possibilidades que prestam. Então, a probabilidade é $\frac{20}{216} = \frac{5}{54}$.

Alternativa (B).

46 São 52! maneiras distintas de arrumar as cartas. Destas, temos $13 \cdot 12 \cdot 50!$ maneiras válidas – 13 opções para a carta de cima, 12 para a carta de baixo (pois a de cima já foi de copas), e as outras 50 podem ser ordenadas de qualquer jeito. Assim, a probabilidade é:

$$\frac{13 \cdot 12 \cdot 50!}{52!} = \frac{13 \cdot 12}{52 \cdot 51} = \frac{1}{17}$$

Alternativa (A).

54 O enunciado quer que uma flecha não atinja o alvo $\left(\text{probabilidade } 1 - \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{10}\right)$ e que as outras duas atinjam a região III. Há 3 possibilidades de isso acontecer, dependendo de qual das 3 flechas não atinja o alvo), cada uma com probabilidade $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{40}$. Assim, a probabilidade pedida é $\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \frac{1}{40} = \frac{3}{40}$.

55 Basicamente, queremos saber qual a probabilidade de o aluno encontrar 2 ou mais sinais fechados. Seja x o número de sinais fechados; a distribuição binomial nos permite escrever:

$$p(x = 2) = C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

$$p(x = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

Então, a resposta é $\frac{2}{9} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$.

59 A chave para a resolução deste problema é analisar o jogo de duas em duas rodadas. Afinal, em duas rodadas, há apenas as seguintes opções:

- Caso A: o jogador A ganha ambos os lançamentos $\left(\text{probabilidade } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\right)$. Se isso acontecer, o jogo acaba.

- Caso B: o jogador B ganha ambos os lançamentos $\left(\text{probabilidade } \frac{1}{4}\right)$. Se isso acontecer, o jogo acaba.
- Caso C: cada jogador vence um lançamento $\left(\text{probabilidade } 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\right)$. Se isso acontecer, o jogo continua.

Ou seja, a cada 2 lançamentos, a chance de o jogo acabar é $\frac{1}{2}$ e a chance de continuar é também $\frac{1}{2}$. Mas, mais importante, se o jogo continuar, ele volta ao estado original, e podemos aplicar o mesmo raciocínio de novo! Em outras palavras, a chance de o jogo continuar após 4 rodadas é $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ (50% de chance de sobreviver às duas primeiras, e 50% de chance de sobreviver às duas próximas); após 6 rodadas, a chance de o jogo não ter acabado é $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. E assim por diante, a chance de o jogo não ter acabado após $2n$ rodadas é $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Portanto, a chance de o jogo não ter acabado após 98 rodadas é $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$. Se o jogo chegar à 98ª rodada, certamente chegará à centésima (possivelmente terminando na centésima, mas isso está incluído na pergunta). Assim, a probabilidade pedida é $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$.

CAPÍTULO VI

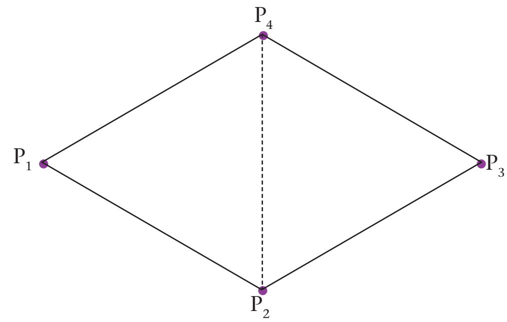
Exercícios de fixação, p. 245

3 Concentremo-nos na metade triangular superior desta matriz. Os dados são os seguintes:

$$P_1P_2 = P_1P_4 = P_2P_3 = P_2P_4 = P_3P_4 = 1$$

Isso indica que $P_2P_3P_4$ é um triângulo equilátero de lado 1, assim como $P_1P_2P_4$. A princípio, poderia ser que P_1 e P_2 fossem o mesmo ponto, mas então $P_1P_2P_3P_4$ não seria um quadrilátero.

Então, conclui-se que o quadrilátero é de fato um losango formado por dois triângulos equiláteros justapostos, congruente à figura abaixo:



A partir disso, é fácil ver que a distância de P_1 a P_3 é duas vezes a altura de cada triângulo, isto é, $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Este é o elemento que falta na matriz, e é o pedido no enunciado.

4 A afirmação é verdadeira. De fato, seja $B = A + A^t$, e note que

$$B^t = (A + A^t)^t = A^t + A^{t\,t} = A^t + A = B$$

mostrando que B é simétrica. Analogamente, seja $C = A - A^t$, e note que

$$C^t = (A - A^t)^t = A^t - A^{t\,t} = A^t - A = -(A - A^t) = -C$$

mostrando que C é antissimétrica (seja lá qual for a matriz A).

6 a) A soma de cada linha é K, ao passo que S pode ser pensada como a soma de todas as linhas.

Então, $S = 3K$, ou seja, $K = \frac{S}{3}$.

b) Some as duas diagonais e a linha e a coluna do meio. Pela propriedade do quadrado mágico, isso dá $4K = \frac{4S}{3}$. Por outro lado, escrevendo essa mesma soma em função das variáveis em cada célula, temos:

$$a + b + c + d + 4e + f + g + h = \frac{4S}{3}$$

(pois cada letra aparece exatamente uma vez, exceto e, que aparece nas 4 fileiras usadas). Assim:

$$S + 3e = \frac{4S}{3} \Rightarrow e = \frac{S}{9}$$

Exercícios de fixação, p. 266

8 Comecemos, calculando A^2:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Isso significa que $A^3 = A^2 \cdot A = A$, que $A^4 = A^2 \cdot A^2 = I$, e assim por diante – todas as potências pares de A são I, e todas as ímpares são A mesmo. Então:

a) $A^2 + A^3 = I + A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

b) $\sum_{i=1}^{10} A^i = A + I + A + I + \ldots + A + I = 5(A + I) =$

$$= 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ \frac{5}{2} & 5 \end{bmatrix}.$$

9 a) Para facilitar, usemos como unidade "milhares de reais". Assim, seja x a quantia, em milhares de reais, aplicada em A. O ganho esperado do investidor em um ano será:
$x(1{,}15) + (40 - x)(1{,}30)$.
Como queremos que isto corresponda a um ganho esperado de 18% ao ano, devemos ter:
$x(1{,}15) + (40 - x)(1{,}30) = 40(1{,}18) \Rightarrow$
$\Rightarrow 15x = 480 \Rightarrow x = 32$
Ou seja, ele deve aplicar R$ 32.000,00 em A e R$ 8.000,00 em B.

b) Como na equação acima, para obter o ganho esperado, devemos ter:
$1{,}15x + 1{,}30y = (1 + R)C$
e, por outro lado, há uma relação entre x e y que é: $x + y = C$
Uma maneira de escrever essas duas equações em forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} 1{,}15 & 1{,}30 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + R)C \\ C \end{bmatrix}$$

mas não é a única: nada impede que a ordem das linhas seja trocada, ou, subtraindo $x + y = C$ da primeira equação, fiquemos com o sistema equivalente:

$$\begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}30 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RC \\ C \end{bmatrix}$$

10 Novamente, o meio para descobrir um padrão nas potências sucessivas de A é a tentativa. Temos:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} = -8I$$

Assim:

$$A^{1998} = (A^3)^{666} = (-8I)^{666} = 8^{666}I^{666} =$$

$$= 2^{1998}I = \begin{bmatrix} 2^{1998} & 0 \\ 0 & 2^{1998} \end{bmatrix}$$

Exercícios de fixação, p. 272

5 Prestando bastante atenção, é possível resolver equações matriciais sem ter de abrir tudo em coordenadas e matrizes. Por exemplo:

a) $AX + B = C \Leftrightarrow AX = C - B$
Como a solução é única, A deve ser inversível. Multiplicando ambas as equações por A^{-1} **pelo lado esquerdo** (o lado é importante!), temos:

$$A^{-1}AX = A^{-1}(C - B) \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$$

b) $XA - X + B = C \Leftrightarrow X(A - I) = C - B$
Agora, multiplicamos por $(A - I)^{-1}$ **pelo lado direito**, para ficar com

$$X = (C - B)(A - I)^{-1}$$

que é a resposta.

6 a) Não há grande segredo neste item, é só fazer o cálculo:

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Há uma dica que pode ajudar. Note que

$(PAP^{-1})^6 = (PAP^{-1})(PAP^{-1})...(PAP^{-1}) =$

$= PA(P^{-1}P)A(P^{-1}P)A(P^{-1}P)A...AP^{-1} =$

$= PAIAI...AP^{-1} = PA^6P^{-1}$

Assim, podemos calcular PA^6P^{-1} elevando o resultado do item anterior à sexta potência. Como PAP^{-1} é uma matriz diagonal, temos:

$$PA^6P^{-1} = (PAP^{-1})^6 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^6 =$$

$$= \begin{bmatrix} 4^6 & 0 \\ 0 & (-1)^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\,096 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercícios de revisão, p. 273

19 Novamente, o truque é tentar achar padrões nas sucessivas potências de A. Temos:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Portanto, todas as potências pares de A são da forma $A^{2n} = (A^2)^n = I^n = I$ e todas as ímpares são $A^{2n+1} = A^{2n} \cdot A = I \cdot A = A$. A soma pedida é:

$A + A^2 + ... + A^{40} = A + I + A + I + ... + A + I =$

$$= 20(A + I) = 20\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Alternativa (A).

29 Como $Y = AX$ (onde A é a matriz 3×3 dada, X é 3×1 e, por consequência, Y é 3×1), se tomarmos $X = (a, b, c)$ e $Y = (64, 107, 29)$, vem:

$$\begin{bmatrix} 64 \\ 107 \\ 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 64 \\ 3a + 3b + c = 107 \\ a + c = 29 \end{cases}$$

(note como os vetores têm de ser transpostos para que as multiplicações façam sentido). Agora é só resolver o sistema: por exemplo, fazendo a segunda equação menos as outras duas, temos $b = 107 - 64 - 29 = 14$. Substituindo na primeira, temos $2a + 28 = 64 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 18$. Na terceira, $18 + c = 29 \Rightarrow c = 11$. Assim, a mensagem original é (18, 14, 11), isto é, “SOL”.

CAPÍTULO VII

Exercícios de fixação, p. 286

2 A maneira usual para resolver este exercício é calcular primeiro

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$$

para depois fazer

$\det AB = 8 \cdot 8 - 10 \cdot 5 = 14$.

Por outro lado, podemos utilizar uma decorrência do produto de duas matrizes quadradas: dadas duas matrizes A e B quadradas de ordem n, tem-se $\det AB = \det A \cdot \det B$.

É um exercício interessante mostrar esta propriedade pelo menos para matrizes 2×2 (para matrizes maiores, dá bastante trabalho demonstrar isto). De qualquer forma, sabendo que vale esta propriedade, poderíamos ter feito:

$\det AB = \det A \cdot \det B = (4 - 6) \cdot (-1 - 6) = 14$

Alternativa (E).

Exercícios de fixação, p. 293

5 Pode-se usar a regra de Sarrus, ou desenvolver o determinante pela primeira linha:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{vmatrix} = (-1)x \cdot \begin{vmatrix} x & x \\ x & 0 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} x & 0 \\ x & x \end{vmatrix} =$$

$= -x \cdot (-x^2) + x \cdot x^2 = 2x^3$

Uma terceira opção válida: podemos dividir cada linha por x; para compensar, multiplicamos tudo por x^3 (pois são 3 linhas). Então:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{vmatrix} = x^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

E o determinante que sobrou é mais simples de ser calculado (de novo, por Sarrus ou desenvolvendo por alguma fila).

7 Como no exercício 5, como cada linha pode ser “fatorada por x”, é fácil ver que o cálculo deve ser “algo vezes x^3”. Afinal:

$$\begin{vmatrix} -x & x & x \\ x & -x & x \\ x & x & -x \end{vmatrix} = x \cdot x \cdot x \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Agora, é só descobrir o número que dá aquele determinante – fazendo o cálculo, o número é 4.

Exercícios de fixação, p. 301

2 Não há uma solução única! Aqui, para facilitar a notação, sejam C_1, C_2 e C_3 as colunas da matriz. Vamos trocar C_3 por $C_3 - C_2$ (pois esta troca não altera o determinante, mantém todos os números inteiros e cria um 1 na segunda linha); a seguir trocaremos C_2 por $C_2 - C_1$ (pelos mesmos motivos). Ficamos com:

$$D = \begin{vmatrix} -5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & -11 & 8 \end{vmatrix} C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \begin{vmatrix} -5 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & -11 & 19 \end{vmatrix}$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \begin{vmatrix} -5 & 12 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & -17 & 19 \end{vmatrix}$$

Dessa forma, se trocarmos C_1 por $C_1 - C_2$ (isto é, usando a **nova** coluna C_2 – as operações com linhas ou colunas têm de ser feitas de forma sequencial, uma de cada vez), temos:

$$D = \begin{vmatrix} -5 & 12 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & -17 & 19 \end{vmatrix} C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \begin{vmatrix} -17 & 12 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 23 & -17 & 19 \end{vmatrix}$$

que é um determinante com apenas números inteiros, e a segunda linha tem apenas o número 1.

3 Trocando a primeira linha pela sua soma com a segunda, temos:

$$D = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$= \begin{vmatrix} a-c & b-a & c-b \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$$

E, neste novo determinante, a primeira linha é um múltiplo (fator –1) da terceira. Então, $D = 0$.

4 Há várias maneiras de resolver (incluindo usar a regra de Sarrus diretamente e expandir tudo). Aqui, faremos o seguinte: vamos subtrair a terceira coluna da segunda e, em seguida somar a (nova) segunda coluna à primeira:

$$D = \begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_3$$

$$\begin{vmatrix} b+c & -b & a \\ c+a & -c & b \\ a+b & -a & c \end{vmatrix} C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$

$$\begin{vmatrix} c & -b & a \\ a & -c & b \\ b & -a & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{vmatrix}$$

(na última passagem, fatoramos o –1 que aparece na segunda coluna). Não há muito mais a se simplificar na matriz – agora, é usar a regra de Sarrus mesmo (ou notar que este é exatamente o determinante do último exercício resolvido desta seção).

$$D = -(ccc + bbb + aaa - bac - bac - bac) =$$
$$= 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$

6 Temos:

$$\det kD = \begin{vmatrix} k & -k & 2k \\ 3k & k & 4k \\ 6k & 0 & 5k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3k & k & 4k \\ 6k & 0 & 5k \end{vmatrix} =$$

$$= k^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6k & 0 & 5k \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -16k^3$$

Observe que, em geral, se A é uma matriz $n \times n$, então $\det kA = k^n \det A$ (em vez de $k \det A$) – veja a próxima seção.

8 a) Como a terceira linha foi multiplicada por 5, o novo determinante é 5 vezes o anterior, isto é, a resposta é 5A.

b) A matriz dada é a transposta da anterior, então o determinante não se altera.

Resposta: A.

c) A primeira linha foi multiplicada por 3, a segunda por 2 e a terceira por 5; assim, o novo determinante é $2 \cdot 3 \cdot 5$ vezes o anterior!
A resposta é 30A.

Exercícios de fixação, p. 312

5 Vamos começar desenvolvendo pela primeira linha:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

O primeiro determinante pode ser resolvido pela regra de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x^3 + 0 + 0 - x - 0 - x = x^3 - 2x$$

O segundo pode ser feito pela primeira coluna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 - 1$$

Portanto:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x(x^3 - 3x) - 1(x^2 - 1) = x^4 - 4x^2 + 1$$

6 A primeira operação a fazer é diminuir a quantidade de "x" presente na equação. Por exemplo, subtraindo a primeira linha das demais, temos:

$$\begin{vmatrix} x+2 & x+7 & x+6 \\ x+9 & x+5 & x+1 \\ x+4 & x+3 & x+8 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x+2 & x+7 & x+6 \\ 7 & -2 & -5 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

Agora, desenvolvemos pela primeira linha (outra possibilidade útil era somar todas as colunas à primeira – deixamos esta alternativa para o leitor):

$$\begin{vmatrix} x+2 & x+7 & x+6 \\ 7 & -2 & -5 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = (x+2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(x+7) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (x+6) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -24(x+2) - 24(x+7) - 24(x+6) = -24(3x+15)$$

Finalmente, podemos resolver a equação da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} x+2 & x+7 & x+6 \\ x+9 & x+5 & x+1 \\ x+4 & x+3 & x+8 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = -5$$

Exercícios de revisão, p. 313

14 Temos:

$$\begin{vmatrix} 2 & a_1+1 & b_1+1 & c_1+1 \\ 2 & a_2+1 & b_2+1 & c_2+1 \\ 2 & a_3+1 & b_3+1 & c_3+1 \\ 2 & a_4+1 & b_4+1 & c_4+1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & a_1+1 & b_1+1 & c_1+1 \\ 1 & a_2+1 & b_2+1 & c_2+1 \\ 1 & a_3+1 & b_3+1 & c_3+1 \\ 1 & a_4+1 & b_4+1 & c_4+1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

onde, no primeiro passo, fatoramos o 2 da primeira coluna; e, no segundo, subtraímos a primeira coluna de cada uma das outras.
Alternativa (D).

16 Basta notar que a soma das duas primeiras colunas é a terceira.
Portanto, a resposta é zero.
Alternativa (E).

22 Sugerimos desenvolver pela última coluna (pois assim os termos de cada grau em x já vêm juntos):

$$g(x) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & x^2 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ x^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 8x^2 + x + 3$$

que é uma função quadrática de discriminante $\Delta = 1 - 4 \cdot 8 \cdot 3 < 0$. Assim, $g(x)$ não tem raízes reais, isto é, seu gráfico não intersecta o eixo OX.
Alternativa (D).

23 Queremos resolver det $(A - \lambda I) = 0$, isto é:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Somando a segunda e terceira colunas à primeira, temos:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 2-\lambda & -\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

No determinante que resta, podemos subtrair a primeira linha da segunda, depois desenvolver pela segunda linha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda)$$

Juntando tudo na equação original, temos:

$$\lambda^2(2-\lambda) = 0$$

cujas raízes são $\lambda = 0$ (raiz dupla) e $\lambda = 2$. Assim, a soma pedida é 2.
Alternativa (B).

24 Para facilitar a notação, façamos $2^x = y$. Então $4x = 2^{2x} = y^2$ e $8^x = y^3$. Então, desenvolvendo pela primeira linha:

$$\begin{vmatrix} y & y^2 & y^3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = y(2-0) - y^2(2+1) + y^3(0+1) =$$

$= y^3 - 3y^2 + 2y = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 1$ ou $y = 2$

Voltando para x, temos:

$2^x = 0 \Rightarrow$ impossível

$2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$2^x = 2 \Rightarrow x = 1$

Assim, os valores reais de x que resolvem a equação são apenas 0 e 1.
Alternativa (E).

25 Abrindo D_1 pela primeira linha:

$D_1 = 2^n(2^n - 0) + 1(1 - 2 \cdot 2^n) =$
$= 2^{2n} - 2 \cdot 2^n + 1 = (2^n - 1)^2$

Por outro lado:

$D_2 = 2^{2n} - 1 = (2^n + 1)(2^n - 1)$

Como $n \neq 0$, temos $2n - 1 \neq 0$, então:

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{(2^n-1)^2}{(2^n+1)(2^n-1)} = \frac{2^n-1}{2^n+1}$$

Alternativa (C).

27 Abrindo tudo pela primeira linha:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} =$$

$= \cos\theta(\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta) + \operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}^2\theta - \cos\theta) =$
$= \operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta) = -\operatorname{sen}\theta\cos 2\theta$

Assim, os valores de θ (entre 0 e 2π) que zeram essa expressão correspondem a:

$\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi, 2\pi$ ou

$$\cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

Resposta: $\left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\right\}$

CAPÍTULO VIII

Exercícios de fixação, p. 334

2 e) A matriz completa é:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 12 & 7 \\ 1 & 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

Trocaremos L_1 por L_3 (para que fiquemos com coeficiente 1 em x na primeira linha, o que facilita um pouco as contas). Em seguida, vamos escalonar o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 & 3 \\ 3 & -4 & 12 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 & 3 \\ 0 & -10 & 30 & -2 \\ 0 & -5 & 15 & -1 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_2 - 2L_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 & 3 \\ 0 & -10 & 30 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eliminando a linha formada apenas por zeros, ficamos com um sistema equivalente ao original, escalonado, com 2 equações e 3 incógnitas, a saber:

$$\begin{cases} x + 2y - 6z = 3 \\ -10y + 30z = -2 \end{cases}$$

Como há mais incógnitas do que equações, o sistema será indeterminado. Para encontrar todas as soluções, identificamos a(s) variável(is) "solta(s)" – no caso, podemos tomar $z = k$ como um número real qualquer e y fica em função de z pela segunda equação. Dessa forma, substituindo y e z na primeira equação, encontraremos x (possivelmente em função de k). Façamos os cálculos:

$$-10y + 30k = -2 \Rightarrow y = \frac{15k + 1}{5} = 3k + \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 2\left(3k + \frac{1}{5}\right) - 6k = 3 \Rightarrow x = \frac{13}{5}$$

Em suma, as soluções (x, y, z) do sistema são as ternas da forma $\left(\frac{13}{5}, 3k + \frac{1}{5}, k\right)$ na qual k é um número real qualquer! Em outras palavras, o conjunto-solução é:

$$S = \left\{\left(\frac{13}{5}, 3k + \frac{1}{5}, k\right) \mid k \in \mathbb{R}\right\}$$

Por exemplo, tomando $k = 0$, encontramos $\left(\frac{13}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$, que é uma solução; tomando $k = 4$, temos a solução $\left(\frac{13}{5}, \frac{61}{5}, 4\right)$; e assim por diante.

g) Como um dos coeficientes não tem valor numérico conhecido, temos de fazer o escalonamento com mais atenção. Trocando a ordem das linhas para facilitar o escalonamento, temos a seguinte matriz completa e seu escalonamento:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ 0 & 1 - a^2 & 1 + a \end{bmatrix}$$

E esta já é a matriz do sistema escalonada. Temos:

- O sistema será impossível se a última linha representar uma equação do tipo $0x + 0y = b$, onde $b \neq 0$. Isto ocorre se e somente se $1 - a^2 = 0$, mas $1 + a \neq 0$, isto é, se $a = 1$. Em suma: se $a = 1$, o sistema é impossível.

- Caso contrário, temos de analisar se a última linha pode representar uma equação do tipo $0x + 0y = 0$. Isto ocorre se e somente se $1 - a^2 = 0$ e também $1 + a = 0$, ou seja, se $a = -1$. Em suma: se $a = -1$, o sistema é possível indeterminado (pois tem uma equação e duas incógnitas). Aliás, é fácil escrever a única equação que restou:
$x - y = -1 \Rightarrow$ solução geral o tipo $(k - 1, k)$ para qualquer k real.

- Finalmente, se tivermos $1 - a^2 \neq 0$, isto é, se $a \neq \pm 1$, o sistema escalonado tem duas equações e duas incógnitas, e é portanto possível e determinado. Aliás, neste caso, não é difícil encontrar a solução:
$(1 - a^2)y = (1 + a) \Rightarrow$
$$\Rightarrow y = \frac{1 + a}{(1 + a)(1 - a)} = \frac{1}{1 - a} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + ay = -1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = -ay - 1 = \frac{-a}{1 - a} - 1 = -\frac{1}{1 - a}$$
ou seja, no caso possível determinado, a única solução é $(x, y) = \left(-\frac{1}{1 - a}, \frac{1}{1 - a}\right)$.

Resposta completa:

- Se $a = 1$, o conjunto solução é $S = \varnothing$ (sistema impossível).

- Se $a = -1$, o conjunto solução é $S = \{(k - 1, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$(sistema possível indeterminado).
- Caso contrário, o conjunto solução é $S = \left\{\left(-\dfrac{1}{1-a}, \dfrac{1}{1-a}\right)\right\}$ (sistema possível determinado).

Exercícios de fixação, p. 339

2 Como não precisamos descobrir a matriz inversa, em vez de fazer o escalonamento, vamos apenas verificar se o determinante é não nulo. Em outras palavras, a matriz não é invertível se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} 1 & x-3 & 4 \\ 3 & 0 & -x \\ -2x & 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

Usando Sarrus, vem:

$0 + 2x^2(x - 3) + 48 - 0 + 4x + 24(x - 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 + 28x - 24 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 14x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x + 12) = 0$

Como a função quadrática $x^2 - 2x + 12$ não tem raízes reais, a conclusão é que a matriz não é invertível apenas para $x = 1$.

Portanto, a resposta é $x \neq 1$.

Exercícios de fixação, p. 349

2 Para usar o método dos retângulos, vamos começar trocando a ordem das equações (para garantir que $a_{11} \neq 0$). Então, usando o método dos retângulos, temos:

x	y	
2	a	$3a + 1$
a	2	5
	$4 - a^2$	$-3a^2 - a + 10$

A última linha indica que $(a^2 - 4)y = 3a^2 + a - 10$. Temos os seguintes casos a considerar:

- Se $a = -2$, esta equação indica que $0y = 0$, ou seja, y está livre. Ficamos apenas com a primeira equação $2x - 2y = -5$. O sistema é, portanto, possível indeterminado.
- Se $a = 2$, esta equação indica que $0y = 4$. O sistema é impossível.
- Enfim, caso $a \neq \pm 2$, temos:

$$y = \frac{3a^2 + a - 10}{a^2 - 4} = \frac{(3a - 5)(a + 2)}{(a + 2)(a - 2)} = \frac{3a - 5}{a - 2}$$

Substituindo novamente na primeira equação:

$2x + ay = 3a + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 3a + 1 - a\left(\dfrac{3a - 5}{a - 2}\right) = \dfrac{-2}{a - 2} \Rightarrow x = \dfrac{-1}{a - 2}$

ou seja, nesse caso, o sistema é possível e determinado com única solução dada por $(x, y) = \left(-\dfrac{1}{a - 2}, \dfrac{3a - 5}{a - 2}\right)$.

4 Pelo método dos retângulos:

x	y	z	
1	1	-3	-6
5	1	-4	-5
1	1	-1	0
1	5	m	-1
	-4	11	25
	0	2	6
	4	$m + 3$	5
		-8	-24
		$-4m - 56$	-120

A penúltima linha indica que $-8z = -24$, isto é, $z = 3$. Para que haja solução, este valor de z tem de servir para a última linha, isto é,

$(-4m - 56)z = (-4m - 56) \cdot 3 = -120 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4m + 56 = 40 \Rightarrow m = -4$

Com este valor de m, é certo que o método dos retângulos terminará por encontrar uma solução (x, y, z), então o problema está resolvido. De qualquer forma, vamos encontrar explicitamente esta solução:

$-4y + 11z = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4y = 11z - 25 = 11 \cdot 3 - 25 = 8 \Rightarrow y = 2$

$x + y - 3z = -6 \Rightarrow x = 3z - y - 6 = 9 - 2 - 6 = 1$

Ou seja, para $m = -4$; a solução (única) do sistema é $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

12 Pelo algoritmo dos retângulos:

x	y	z	
1	2	–1	0
1	$-m$	–3	0
1	3	m	m
	$-m-2$	–2	0
	1	$m+1$	m

Troquemos a ordem das linhas antes de continuar (evitando discutir separadamente o caso $-m-2=0$):

1	$m+1$	m
$-m-2$	–2	0
	m^2+3m	$m(m+2)$

O comportamento do sistema depende apenas desta última equação:
$m(m+3)z = m(m+2)$

- Se $m = 0$, a equação torna-se $0z = 0$; neste caso, z está livre e o método dos retângulos obterá x e y em função de z, a saber:

  $y + z = 0 \Rightarrow y = -z$

  $x + 2y - z = 0 \Rightarrow x = z - 2y = z + 2z = 3z$

Ou seja, se m = 0, o sistema é indeterminado com solução geral $(x, y, z) = (3z, -z, z)$.

- Se $m = -3$, a equação torna-se $0z = 3$, fazendo com que o sistema seja impossível.
- Caso contrário, o sistema é possível e determinado. Apesar de a solução não ter sido pedida explicitamente, vamos encontrá-la assim mesmo:

  $$m(m+3)z = m(m+2) \Rightarrow z = \frac{m+2}{m+3}$$

  $$y + (m+1)z = m \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow y = m - (m+1)\frac{m+2}{m+3} = -\frac{2}{m+3}$$

  $$x + 2y - z = 0 \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow x = z - 2y = \frac{m+2}{m+3} + \frac{4}{m+3} = \frac{m+6}{m+3}$$

  ou seja, neste caso a única solução é

  $$(x, y, z) = \left(\frac{m+6}{m+3}, \frac{-2}{m+3}, \frac{m+2}{m+3}\right).$$

A análise do sistema está completa.

As respostas são:

a) O sistema admite (pelo menos uma) solução para $m \neq -3$.

b) Se $m = 0$, a solução geral é $(x, y, z) = (3\alpha, -\alpha, \alpha)$ onde α é um real qualquer.

13 Como está, o sistema não parece ser linear, mas é só reescrevê-lo:

$$3^x \cdot 3^y \cdot 3^z = 1 \Leftrightarrow 3^{x+y+z} = 3^0 \Leftrightarrow x + y + z = 0$$

$$\frac{2^x}{2^y \cdot 2^z} = 4 \Leftrightarrow 2^{x-y-z} = 2^2 \Leftrightarrow x - y - z = 2$$

$$4^{-x}16^y4^z = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4^{-x+2y+z} = 4^{-1} \Leftrightarrow -x + 2y + z = -1$$

Agora, é resolver o sistema linear pelo seu método favorito – nós gostamos do algoritmo dos retângulos:

x	y	z	
1	1	1	0
1	–1	–1	2
–1	2	1	–1
	–2	–2	2
	1	0	1
		2	–4

Então:

$2z = -4 \Rightarrow z = -2$

$-2y - 2z = 2 \Rightarrow y = -1 - z = 1$

$x + y + z = 0 \Rightarrow x = -y - z = -1 + 2 = 1$

Resposta: a única solução é $(x, y, z) = (1, 1, -2)$.

Exercícios de fixação, p. 353

3 Note que o sistema é homogêneo, e tem 3 equações e 3 incógnitas. Se ele for possível determinado, a única solução será $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Isto acontece exatamente quando o seguinte determinante não se anula:

$$\begin{vmatrix} k & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 6 & k-3 & 15 \end{vmatrix} = -4k^2 - 4k + 24 = -4(k+3)(k-2)$$

Ou seja, se $k \neq 2$ e $k \neq -3$, a única solução é $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Se $k = 2$ ou $k = -3$, o sistema terá outras soluções. Vejamos:

- Caso $k = 2$. O método dos retângulos nos dá:

x	y	z	
2	3	–1	0
1	–1	4	0
6	–1	15	0
	–5	9	0
	–20	36	0
		0	0

A presença da última linha de zeros já era esperada (para que o sistema seja indeterminado).
A variável z está livre, digamos, $z = \alpha$ em que α é um real qualquer. As outras variáveis ficam em função de z:

$$-5y + 9z = 0 \Rightarrow y = \frac{9z}{5} = \frac{9\alpha}{5}$$

$$2x + 3y - z = 0 \Rightarrow x = \frac{z - 3y}{2} = \frac{\alpha - \frac{27\alpha}{5}}{2} = -\frac{11\alpha}{5}$$

Assim, se $k = 2$, a solução geral é $(x, y, z) = \left(-\frac{11\alpha}{5}, \frac{9\alpha}{5}, \alpha\right)$ (ou, trocando α por 5β: $(x, y, z) = (-11\beta, 9\beta, 5\beta)$ com β real qualquer).

- Caso $k = -3$. Então:

x	y	z	
–3	3	–1	0
1	–1	4	0
6	–6	15	0
	0	–13	0
	0	–39	0

Temos de interromper o procedimento aqui: os zeros na coluna do y indicam que y é que tem de ser a variável livre, digamos, $y = \alpha$. Então, qualquer uma das duas últimas linhas diz o mesmo: $-13z = 0$ ou $-39z = 0$, isto é, $z = 0$ (z não está livre!). Colocando tudo na primeira linha:

$$-3x + 3y - z = 0 \Rightarrow x = y - \frac{z}{3} = \alpha$$

Ou seja, se $k = -3$, a solução geral é $(x, y, z) = (\alpha, \alpha, 0)$.

Resumindo tudo:

- Se $k = -3$, então $S = \{(\alpha, \alpha, 0 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.
- Se $k = 2$, então $S = \{(-11\beta, 9\beta, 5\beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$.
- Caso contrário ($k \neq 2$ e $k \neq -3$), temos $S = \{(0, 0, 0)\}$.

4 a) Queremos:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -2$$

Ou seja, as raízes são –2 e 1.

b) Para $\lambda = -2$, o sistema é homogêneo. Como $\det A = 0$, já sabemos de antemão que ele será possível indeterminado. Vamos resolvê-lo:

x	y	z	
–2	1	1	0
1	–2	1	0
1	1	–2	0
	3	–3	0
	–3	3	0
		0	0

Note como a última linha confirma que o sistema é indeterminado, e que, de $0z = 0$, podemos concluir que $z = \alpha$ é um real qualquer. Os valores de y e x devem resolver a primeira linha de cada bloco, de baixo para cima:

$$3y - 3z = 0 \Rightarrow y = z = a$$

$$-2x + y + z = 0 \Rightarrow x = \frac{y + z}{2} = \alpha$$

Assim, se $\lambda = -2$, a solução geral do sistema é $(x, y, z) = (\alpha, \alpha, \alpha)$ onde α é um real qualquer.

Exercícios de revisão, p. 354

8 Pelo método dos retângulos:

x	y	z	
1	-1	2	1
3	1	-1	m
1	3	n	$2m - n$
	4	-7	$m - 3$
	4	$n - 2$	$2m - n - 1$
		$4n + 20$	$4m - 4n + 8$

A última equação, $(4n + 20)z = 4m - 4n + 8$, ou seja, $(n + 5)z = m - n + 2$, classifica o sistema.
Os casos são:

- Se $n = -5$ e $m - n + 2 = 0$, isto é, $m = -7$, então esta equação é $0z = 0$ e o sistema é indeterminado. A solução geral em função de $z = \alpha$ é:

$$4y - 7z = m - 3 = -10 \Rightarrow y = \frac{7\alpha - 10}{4}$$

$$x - y + 2z = 1 \Rightarrow x = y - 2z + 1 =$$
$$= \frac{7\alpha - 10}{4} - 2\alpha + 1 = \frac{-\alpha - 6}{4}$$

- Se $n = -5$ e $m - n + 2 \neq 0$, isto é, $m \neq -7$, então esta equação é do tipo $0z \neq 0$ e o sistema é impossível.
- Enfim, se $n \neq -5$, o sistema é possível determinado.

Agora, respondemos às questões:

a) Para que o sistema admita infinitas soluções, ele tem de ser possível indeterminado, isto é, $m = -7$ e $n = -5$.

b) No caso indeterminado, a solução que tem $x = 0$ exige que $\frac{-\alpha - 6}{4} = 0$, isto é, $\alpha = -6$. Assim,

$$y = \frac{7\alpha - 10}{4} = -13 \text{ e } z = \alpha = -6$$

ou seja, esta solução é $(0, -13, -6)$.

12 Em primeiro lugar, vamos reescrever o sistema no formato ao qual estamos acostumados e multiplicar as linhas por 2, 3 e 4 respectivamente, para evitar frações:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2p \\ x + 3y + z = 3p \\ x + y + 4z = 4p \end{cases}$$

Pelo método dos retângulos:

x	y	z	
2	1	1	$2p$
1	3	1	$3p$
1	1	4	$4p$
	5	1	$4p$
	1	7	$6p$
		34	$26p$

Então:

$$34z = 26p \Rightarrow z = \frac{13p}{17}$$

$$5y + z = 4p \Rightarrow 5y = 4p - z = \frac{55p}{17} \Rightarrow y = \frac{11p}{17}$$

$$2x + y + z = 2p \Rightarrow 2x = 2p - y - z =$$
$$= 2p - \frac{11p}{17} - \frac{13p}{17} = \frac{10p}{17} \Rightarrow x = \frac{5p}{17}$$

Então, a única solução é $(x, y, z) = \left(\frac{5p}{17}, \frac{11p}{17}, \frac{13p}{17}\right)$.

Daqui:

a) Se x, y e z são inteiros, então p tem de ser múltiplo de 17 (para eliminar o 17 do denominador). Isto demonstra a letra (a).

b) Por outro lado, se $p = 17k$ para algum k inteiro, o raciocínio acima mostra que $(x, y, z) = (5k, 11k, 13k)$ será uma solução do sistema (e note que $5k$; $11k$ e $13k$ serão inteiros).

13 O determinante do sistema é simplesmente:

$$(1 + a)^2 - (1 - a)^2 = 4a$$

Sempre que $a \neq 0$, o sistema terá solução única (pois tem 2 equações e 2 incógnitas). Por outro lado, se $a = 0$, o sistema é:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

que é claramente indeterminado, com uma infinidade de soluções.
Então as respostas são:

- O sistema tem solução para todo a real.
- A solução é única sempre que a $a \neq 0$.

16 Este sistema não é linear, mas pode ser resolvido, primeiro elevando a primeira equação ao quadrado, vem:

$$(x + y + z)^2 = (-1)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1$$

Agora, substituindo a segunda e a terceira equações nesta, vem:

$$1 + 2 \cdot (2) = 1 \Rightarrow 5 = 1$$

Assim, o sistema é impossível.
Alternativa (C).

20 Usando a linearidade do determinante, temos:

$$\begin{vmatrix} a+m+1 & b+n+1 & c+p+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m & n & p \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 2A - 2B$$

já que a última tem duas linhas iguais (e a terceira linha é o dobro da terceira linha das matrizes dadas).
Alternativa (A).

26 Para que os sistemas sejam equivalentes, eles devem ter as mesmas soluções. Em particular, a solução do primeiro sistema é $(x, y) = (-1, 2)$; estes valores têm de servir no outro sistema, então:

$$\begin{cases} -a - 2b = 5 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, vem $a = 1$ e $b = -3$.
Alternativa (E).

27 A única solução das duas primeiras equações é $(x, y) = (2, 4)$. Ela tem de satisfazer à terceira equação, isto é:

$$2(m - 1) + 8m = 105 \Rightarrow m = 10{,}7$$

Alternativa (D).

33 Em primeiro lugar, a equação de cima pode ser escrita como $x = 0$ ou $x + 3y = 0$. Assim, temos dois sistemas para resolver:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + 3y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

O primeiro nos dá a solução $(0, -2)$, ao passo que o segundo nos dá $\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$. A soma pedida é então $-2 - \frac{1}{2} = \frac{-5}{2}$.

Alternativa (A).

35 Como as equações nunca serão múltiplas uma da outra (note que ambos os termos independentes são 1; se as equações fossem múltiplas uma da outra, seriam iguais, mas então $a = a + 1$, o que é impossível), o sistema nunca será possível indeterminado. Para que o sistema seja impossível, basta então que o determinante do sistema $a \cdot (-a) - (a + 1)(a - 1) = -2a^2 + 1$ seja nulo, isto é, $a^2 = \frac{1}{2}$.

Alternativa (A).

44 Sejam x, y e z respectivamente os preços unitários do hamburguer, refrigerante e porção de fritas. Os dados levam às equações:

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 18 \\ 6x + 8y + 3z = 30 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema pelo método dos retângulos, temos:

x	y	z	
4	2	2	18
6	8	3	30
	20	0	12

A última equação nos diz que $20y = 12$, isto é, $y = 0{,}60$. Por outro lado, a variável z está livre (0 na sua coluna do último bloco), e a variável x pode ser colocada em função de z da seguinte forma:

$$4x + 2y + 2z = 18 \Rightarrow x = \frac{9 - y - z}{2} = 4{,}20 - \frac{z}{2}$$

Em suma, as soluções daquele sistema são todas da forma $(x, y, z) = \left(4{,}20 - \frac{z}{2}; 0{,}60; z\right)$. O fato de x e z terem de ser positivos impõe restrições a z, a saber, $z < 8{,}40$ e $z > 0$, respectivamente.

Vejamos o que sabemos sobre a conta da terceira mesa:

$$2x + 3y + z = 2\left(4{,}20 - \frac{z}{2}\right) + 3(0{,}60) + z = 10{,}20$$

Ou seja, mesmo sem saber os valores exatos de x e z, sabemos que esta conta será de R\$ 10,20; e o valor unitário do refrigerante é y, isto é, R\$ 0,60.
Alternativa (A).

49 Suponha que x é o número de litros de P_1 que produziremos, e que y é o número de litros de P_2 que produziremos. Supondo que os volumes se mantêm nas misturas, precisamos de $0{,}2x$ de A e $0{,}8x$ de B para produzir P_1, e precisamos de mais $0{,}1y$ de A e $0{,}9y$ de B para produzir P_2.
Em suma:

$$\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}1y = 2 \\ 0{,}8x + 0{,}9y = 13 \end{cases}$$

Fazendo a segunda equação menos quatro vezes a primeira, temos $0{,}5y = 5$, isto é, $y = 10$. Substituindo de volta na primeira, temos $0{,}2x + 1 = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 5$. É fácil verificar que $(x; y) = (5; 10)$ realmente resolve ambas as equações, então:
Resposta: Ela pode fabricar 5 litros de P_1 e 10 litros de P_2.

51 Suponha que são x filhos e y filhas. Temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} x - 1 = y \\ x = 2(y - 1) \end{cases}$$

Agora é só resolver o sistema: $(x, y) = (4, 3)$, e o total é 7.
Alternativa (E).

58 **Primeira solução**: faça com calma, passo a passo. Suponha que inicialmente os números eram:

$$(x, y, z)$$

Após a primeira transferência de y palitos da primeira para a segunda, ficam:

$$(x - y, 2y, z)$$

Em seguida, são z palitos que vão da segunda para a terceira:

$$(x - y, 2y - z, 2z)$$

Enfim, $x - y$ vão da terceira para a primeira:

$$(2x - 2y, 2y - z, 2z - (x - y))$$

Como estes números são iguais a 24 (pois são 72 no total), temos o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 24 \\ 2y - z = 24 \\ -x + y + 2z = 24 \end{cases}$$

que pode ser resolvido pelos métodos usuais.

Segunda solução: achamos mais interessante, porém, começar da última posição e **desfazer** os movimentos um a um. Na última fase, tínhamos:

$$(24, 24, 24)$$

Devolvendo metade dos palitos da primeira caixa para a terceira:

$$(12, 24, 36)$$

Devolvendo metade dos palitos da terceira para a segunda:

$$(12; 42; 18)$$

E, finalmente, devolvendo metade dos palitos da segunda para a primeira:

$$(33, 21, 18)$$

Esta era a configuração inicial!
Alternativa (C).

61 Seja x o número de irmãos e y o número de irmãs. Temos:

$$\begin{cases} y - 1 = \dfrac{x}{4} \\ x - 1 = 3y \end{cases}$$

Resolvendo, vem $(x, y) = (16, 5)$. São 5 filhas.
Alternativa (A).

64 Vamos ao método dos retângulos:

x	y	z	
2	–1	3	α
1	2	–1	3
7	4	3	13
	5	–5	$6 - \alpha$
	15	–15	$26 - 7\alpha$
		0	$40 - 20\alpha$

Note que o sistema não pode ser determinado, por causa da equação $0z = 40 - 2\alpha$. A única maneira de ele ser possível é tomar $40 - 2\alpha = 0$, isto é, $\alpha = 2$. Assim, esta última equação deixa z livre, isto é, $z = \alpha$ com α real qualquer. Para as outras variáveis, temos:

$$\begin{cases} 5y - 5z = 6 - \alpha = 4 \Rightarrow y = z + \dfrac{4}{5} = \alpha + \dfrac{4}{5} \\ 2x - y + 3z = \alpha = 2 \Rightarrow x = 1 + \dfrac{y - 3z}{2} = \dfrac{7}{5} - \alpha \end{cases}$$

Os valores de α podem ser escolhidos de várias formas; por exemplo, tomando $\alpha = 0$ vem a solução $\left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$; tomando $\alpha = \frac{2}{5}$ vem $\left(1, \frac{6}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

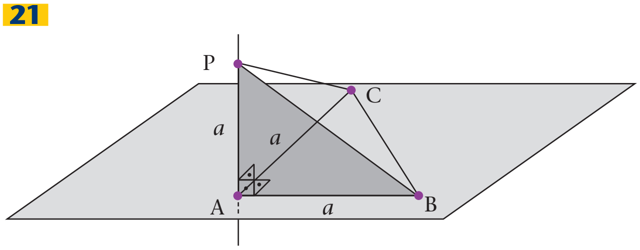
Em suma:

- Para que o sistema seja possível, devemos ter $\alpha = 2$.
- A solução geral é $(x, y, z) = \left(\frac{7}{5} - \alpha, \alpha + \frac{4}{5}, \alpha\right)$; onde α é um real qualquer.
- Duas dessas soluções são $\left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$ e $\left(1, \frac{6}{5}, \frac{2}{5}\right)$ (dentre outras).

CAPÍTULO IX

Exercícios de revisão, p. 397

21



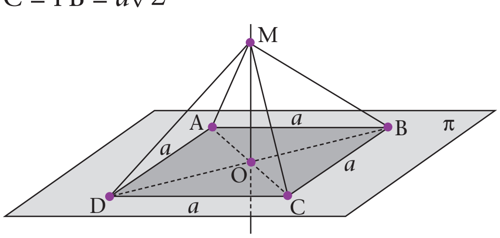
$\triangle PAB$ é retângulo $\Rightarrow PB^2 = PA^2 + AB^2$

$PB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = \sqrt{2a^2}$

$PB^2 = a\sqrt{2}$

$PC = PB = a\sqrt{2}$

23



$AO = BO = CO = DO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\overline{OM}$ é comum aos 4 triângulos e $\overline{OM}$ é perpendicular ao plano π.

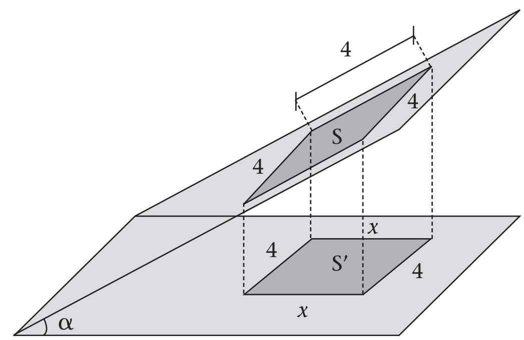
Os triângulos são equiláteros congruentes.

$$OM^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2$$

$$OM^2 = a^2 - \frac{2a^2}{4} = \frac{2a^2}{4}$$

$$OM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

25



$S' = 8\ m^2$

$4x = 8 \Rightarrow x = 2$ m

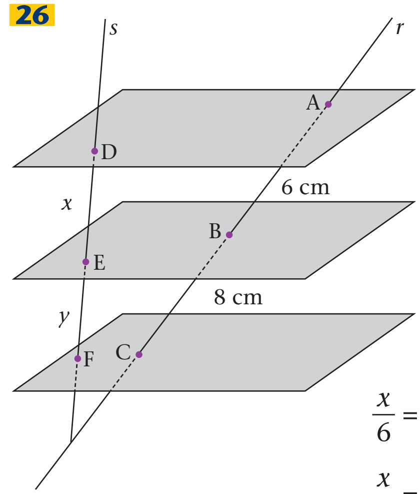
$2p = 4 + 4 + 2 + 2 \Rightarrow 2p = 12$ m

$S' = S \cdot \cos\alpha$

$8 = 16 \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$

$\alpha = 60^\circ$

26



$$\frac{x}{6} = \frac{y}{8} = \frac{x + y}{6 + 8} = \frac{21}{14}$$

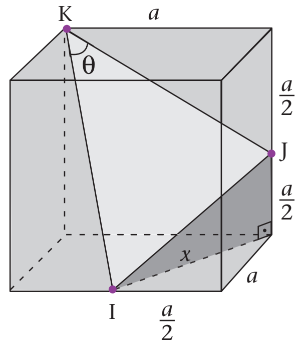
$$\frac{x}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 9 \text{ cm}$$

$$\frac{y}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = 12 \text{ cm}$$

CAPÍTULO X

Exercícios de fixação, p. 422

7



a) $x^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$x^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$JI^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$JI^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} \Rightarrow JI = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

b) $KJ^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow KJ = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$KI^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$KI^2 = \frac{4a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} \Rightarrow KI = \frac{3a}{2}$

Pela lei dos cossenos:

$$\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cos\theta$$

$$\frac{6a^2}{4} = \frac{9a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} - \frac{6a^2\sqrt{5}}{4} \cos\theta$$

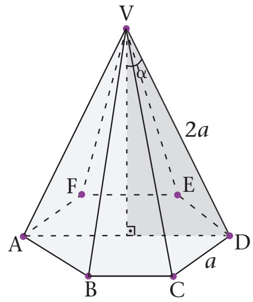
$$6a^2\sqrt{5} \cos\theta = 8a^2$$

$$\cos\theta = \frac{8}{6\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{30} = \frac{4\sqrt{5}}{15}$$

$$\theta = \text{arccos}\left(\frac{4\sqrt{5}}{15}\right)$$

Exercícios de revisão, p. 435

2



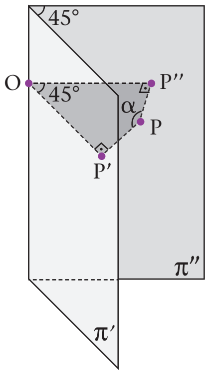
$\text{sen } \alpha = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$\alpha = 30°$

$A\hat{V}D = 2\alpha = 60°$

Alternativa (C).

3



OPP'P'' é um quadrilátero.

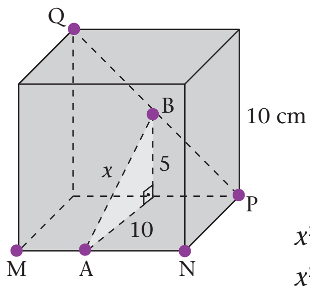
$S_i = 360°$

$90° + 90° + 45° + \alpha = 360°$

$\alpha = 135°$

Alternativa (E).

6



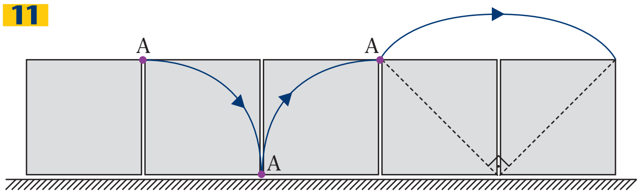
$x^2 = 5^2 + 10^2$

$x^2 = 25 + 100 = 125$

$x = 5\sqrt{5}$

Alternativa (A).

11



$$C = \frac{2\pi R}{4} + \frac{2\pi R}{4} + \frac{2\pi R\sqrt{2}}{4}$$

onde R = aresta do cubo = 1 m

$$C = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \frac{2\pi + \pi\sqrt{2}}{2}$$

$$C = \frac{(2 + \sqrt{2})\pi}{2}$$

Alternativa (A).

CAPÍTULO XI

Exercícios de fixação, p. 443

1 $S_i = 360^o\ (A - F)$

$1\,440 = 360\ (10 - F)$

$10 - F = \frac{1\,440}{360} = 4 \Rightarrow 10 - 4 = F$

$F = 6$

3 $F = 8$

$A_k = \frac{1}{6}A$

$S_i = 360^o\ (A - F)$

$30\pi = 2\pi\ (A - 8) - \pi(k - 2)$

$30 = 2A - 16 - k + 2$

$$\begin{cases} 2A - k = 44 \\ k = \frac{A}{6} \Rightarrow A = 6k \end{cases}$$

$2 \cdot 6k - k = 44$

$12k - k = 44 \Rightarrow 11k = 44$

$k = 4$ (quadrilátero)

Alternativa (B).

Exercícios de fixação, p. 449

4 $F = 15$

$V_5 = 2$

$V_4 = 4$

$V_3 = x$

$A = ?$

$3V_3 + 4V_4 + 5V_5 = 2A$

$3 \cdot x + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 2A$

$3x + 16 + 10 = 2A$

$3x - 2A = -26$

$V + F = A + 2$

$6 + x + 15 = A + 2$

$x = A - 19$

$3(A - 19) - 2A = -26$

$3A - 57 - 2A = -26$

$A = 31$

10 $F_4 = x$

$F_3 = y$

$A = 20$

$V = 10$

$3F_3 + 4F_4 = 2A$

$3y + 4x = 2 \cdot 20$

$4x + 3y = 40$

$V + F = A + 2$

$10 + x + y = 20 + 2$

$x + y = 12$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 40 \\ x - y = 12 \Rightarrow y = 12 - x \end{cases}$$

$4x + 3(12 - x) = 40$

$4x + 36 - 3x = 40$

$x = 4 \Rightarrow y = 8$

Exercícios de fixação, p. 454

5 O icosaedro é formado por 20 triângulos equiláteros. $a = 6$ cm

$A_{icos} = 20 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5 \cdot 6^2\sqrt{3} \Rightarrow A_{icos} = 180\sqrt{3}\ cm^2$

$S_{arestas} = 30 \cdot 6 = 180$ cm

Exercícios de revisão, p. 455

4 $F_3 = 80$

$F_5 = 12$

$3F_3 + 5F_5 = 2A$

$3 \cdot 80 + 5 \cdot 12 = 2A$

$240 + 60 = 2A$

$300 = 2A$

$A = 150$

$V + F = A + 2$

$V + 92 = 150 + 2$

$V = 60$

Alternativa (B).

5 $S_i = 5\,760°$
$F_3 = x$
$F_7 = y$
$A = 28$

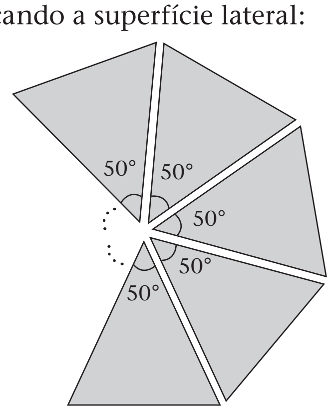
$180x + 180 \cdot 5y = 5\,760°$

$$\begin{cases} x + 5y = 32 \Rightarrow x = 32 - 5y \\ 3x + 7y = 2 \cdot 28 \end{cases}$$

$3(32 - 5y) + 7y = 56$
$96 - 15y + 7y = 56$
$-8y = -40$
$y = 5 \Rightarrow x = 7$
Alternativa (C).

10 $F = 6$
$V = 8$
$A = ?$
Para fechar basta colocar 1 face.
Os números de arestas e vértices não se alteram.
$F' = 7$
$V = 8$
$V + F = A + 2$
$7 + 8 = A + 2$
$A = 13$
Alternativa (D).

15 Planificando a superfície lateral:



$50° \cdot n \leq 360°$

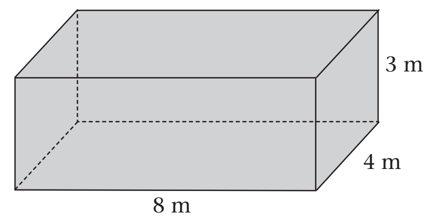
$$n \leq \frac{360}{50}$$

$n \leq 7{,}2$
Logo: $n = 7$
Alternativa (C).

CAPÍTULO XII

Exercícios de fixação, p. 467

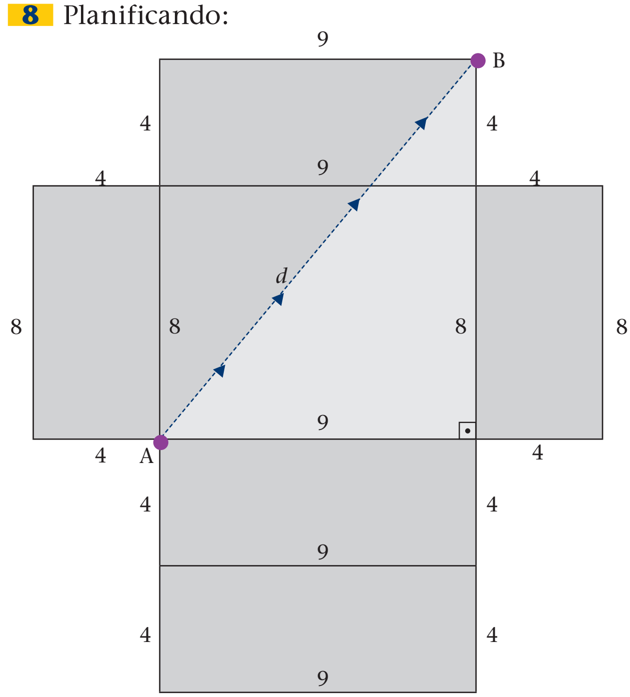
6 1 lata $\Rightarrow$ 50 m²



$S_L = 2 \cdot 8 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3$
$S_L = 48 + 24$
$S_L = 72$ m²
50 m² — 100%
28 m² — x
$x = 56\%$

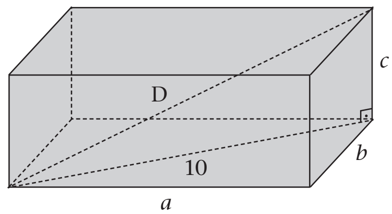
Exercícios de fixação, p. 472

8 Planificando:



$d^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$
$d = 15$

10 $a + b + c = 15$
$S_T = 124$ cm²
$d_B = 10$ cm



$$(a + b + c)^2 = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{D^2} + \underbrace{2(ab + ac + bc)}_{S_T}$$

$15^2 = D^2 + 124$

$225 - 124 = D^2$

$D^2 = 101$

$D^2 = 10^2 + c^2$

$101 = 100 + c^2$

$c = 1$ cm

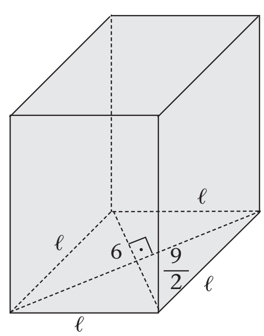
$$\begin{cases} a + b = 14 \\ a^2 + b^2 = 100 \end{cases}$$

$a = 8$ cm

$b = 6$ cm

Exercícios de fixação, p. 486

7



$D = 4 \cdot 3 = 12$ dm

$d = 3 \cdot 3 = 9$ dm

$h = 21$ dm

$$\ell^2 = 6^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 36 + \frac{81}{4}$$

$$\ell^2 = \frac{144 + 81}{4} = \frac{225}{4}$$

$$\ell = \frac{15}{2} \text{ dm}$$

$$\frac{d}{D} = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} d = 3x \\ D = 4x \end{cases}$$

$h = D + d \Rightarrow h = 7x$

$V = 1\,134$ dm^3

$S_T = ?$

$V = S_B \cdot h$

$$V = \left(\frac{D \cdot d}{2}\right) \cdot h = 1\,134$$

$$\frac{4x \cdot 3x}{2} \cdot (7x) = 1\,134$$

$42x^3 = 1\,134 \Rightarrow x^3 = 27$

$x = 3$

$S_T = 2 \cdot S_B + S_L$

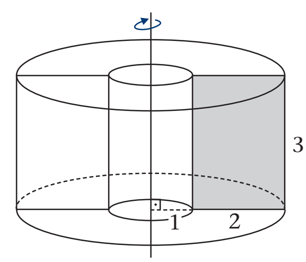
$$S_T = 2 \cdot \frac{D \cdot d}{2} + 4 \cdot \ell h$$

$$S_T = 12 \cdot 9 + 4 \cdot \frac{15}{2} \cdot 21 = 108 + 630$$

$S_T = 738$ dm^2

Exercícios de fixação, p. 501

9



$V = V_{cil.gr} - V_{cil.pq}$

$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$

$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 3 - \pi \cdot 1^2 \cdot 3 = 27\pi - 3\pi$

$V = 24\pi$ cm^3

$S = 2\pi R h + 2\pi r h + 2(\pi R^2 - \pi r^2)$

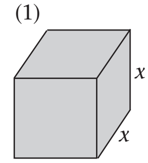
$S = 2\pi \cdot 3 \cdot 3 + 2\pi \cdot 1 \cdot 3 + 2(9\pi - \pi)$

$S = 18\pi + 6\pi + 16\pi \Rightarrow S = 40\pi$ cm^2

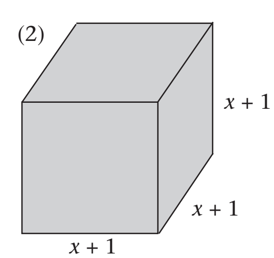
Exercícios de revisão, p. 506

5

(1)



(2)



$S_{T1} = 4 \cdot x^2$

$S_{T2} = 4 \cdot (x + 1)^2$

$S_{T2} = S_{T1} + 164$

$4(x^2 + 2x + 1) = 4x^2 + 164$

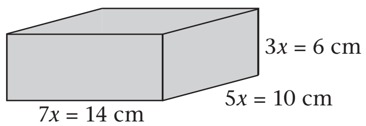
$4x^2 + 8x + 4 = 4x^2 + 164$

$8x = 160 \Rightarrow x = 20$

$V = x^3 = 20^3 \Rightarrow V = 8\,000 \text{ m}^3$

Alternativa (C).

6



$(2\sqrt{83})^2 = (7x)^2 + (5x)^2 + (3x)^2$

$4 \cdot 83 = 49x^2 + 25x^2 + 9x^2$

$4 \cdot 83 = 83x^2$

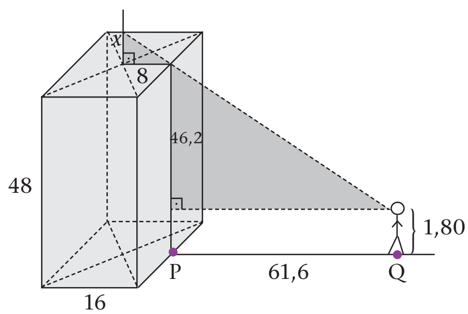
$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

$V = 14 \cdot 10 \cdot 6$

$V = 840 \text{ cm}^3$

Alternativa (E).

8

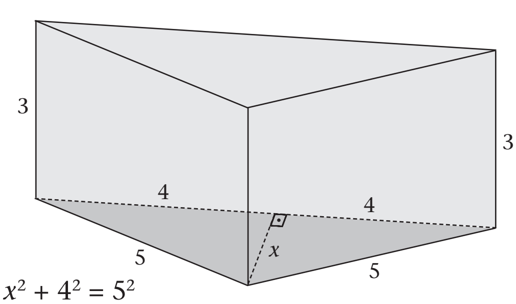


$\dfrac{x}{46{,}2} = \dfrac{8}{61{,}6}$

$x = 6$ m

Alternativa (D).

12



$x^2 + 4^2 = 5^2$

$x = 3$

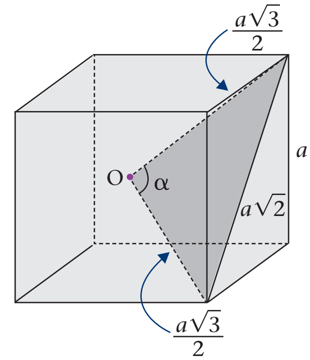
$V = S_B \cdot h$

$S_B = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{8 \cdot 3}{2} = 12 \text{ m}^2$

$V = 12 \cdot 3 = 36 \text{ m}^3$

Alternativa (C).

15



Lei dos cossenos:

$$(a\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\cos\alpha$$

$$2a^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - \frac{6a^2}{4}\cos\alpha$$

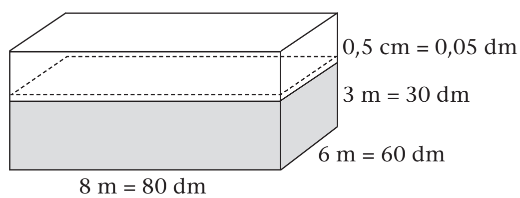
$$\frac{6a^2}{4}\cos\alpha = -\frac{2a^2}{4}$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$$

Alternativa (C).

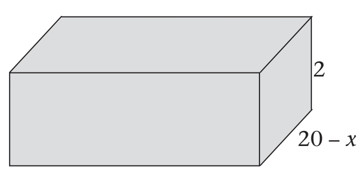
17



$V_N = 80 \cdot 60 \cdot 0{,}05 = 240 \text{ dm}^3$

Alternativa (D).

30



$V = abc$

$V = x \cdot (20 - x) \cdot 2$

$V = 40x - 2x^2$

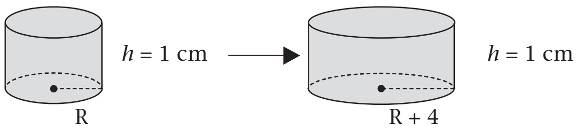
$V(x) = -2x^2 + 40x$

$\Delta = 40^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0 = 1\,600$

Volume máximo $\Rightarrow y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{-1\,600}{-8} = 200$

Alternativa (C).

36



$S_T = 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 1$

$S_L = 2\pi(R + 4) \cdot h = 2\pi(R + 4) \cdot 1$

$S_L = 2\pi R + 8\pi$

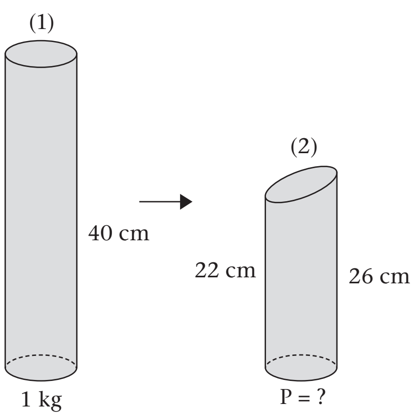
$2\pi R^2 + 2\pi R = 2\pi R + 8\pi$

$2\pi R^2 = 8\pi \Rightarrow R^2 = 4$

$R = \pm 2 \Rightarrow$ solução positiva $R = 2$ cm

Alternativa (B).

38



$V_1 = \pi R^2 \cdot 40$

$V_1 = 40\pi R^2$

$V_2 = \pi R^2 \left(\dfrac{22 + 26}{2}\right)$

$V_2 = 24\pi R^2$

$40\pi R^2$ — 1 kg

$24\pi R^2$ — P kg

$\dfrac{40}{24} = \dfrac{1}{P}$

$P = \dfrac{24}{40} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6 \text{ kg} = 600 \text{ g}$

Alternativa (A).

41 $S_L = \dfrac{1}{2} S_B \Rightarrow 2\pi R h = \dfrac{1}{2}\pi R^2$

$4h = R$

$4R + 2h = 18$

$4 \cdot 4h + 2h = 18 \Rightarrow 18h = 18$

$h = 1$ m $\qquad R = 4$ m

$V = \pi R^2 h$

$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 1 \Rightarrow V = 16\pi \text{ m}^3$

Alternativa (D).

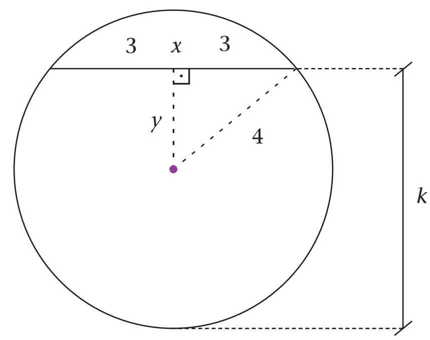
44 $h = 15$ m

$d = 8 \text{ m} \Rightarrow R = 4$ m

$S = 90 \text{ m}^2$

$x \cdot 15 = 90$

$x = 6$ m



$4^2 = y^2 + 3^2$

$16 = y^2 + 9$

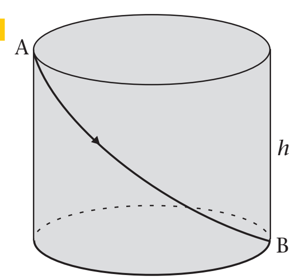
$y^2 = 7$

$y = \sqrt{7}$ m

$k = \left(4 + \sqrt{7}\right)$ m

Alternativa (D).

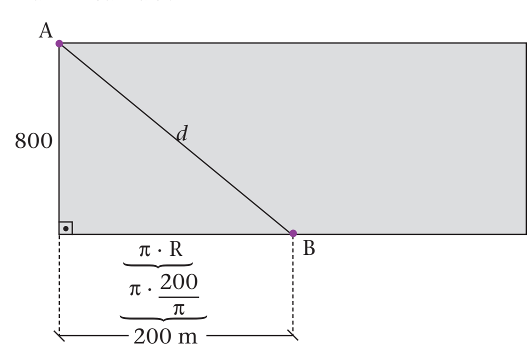
49



$800 \text{ m} = h$

$R = \dfrac{200}{\pi}$ m

Planificando:



$d^2 = 800^2 + 200^2$

$d^2 = 640\,000 + 40\,000 = 680\,000$

$d = 200\sqrt{17}$ m

CAPÍTULO XIII

Exercícios de fixação, p. 553

2 $V = \frac{1}{3} \cdot S_B \cdot h$

Considerando como base o △ABC, temos:

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}$

Considerando como base o △ACF:

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{2} \cdot H$

$V = \frac{9 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{12} \cdot H \Rightarrow V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot H$

Como a pirâmide é a mesma, seu volume é igual independentemente da escolha de sua base, logo:

$\frac{3\sqrt{3}}{2} H = \frac{9}{2} \Rightarrow H = \sqrt{3}$

Alternativa (B).

12 Lei dos cossenos:

$\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \hat{M}$

$\frac{3\ell^2}{4} = \frac{\ell^2}{4} + \frac{3\ell^2}{4} - \frac{2\ell^2\sqrt{3}}{4} \cos \hat{M}$

$\frac{2\ell^2\sqrt{3}}{4} \cos \hat{M} = \frac{\ell^2}{4}$

$2\sqrt{3} \cos \hat{M} = 1$

$\cos \hat{M} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos \hat{M} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Alternativa (B).

Exercícios de fixação, p. 576

4 Vinagre:

$V_{vin} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot (h - 5)$

$V_{vin} = \frac{25\pi(h - 5)}{3}$

Azeite:

$V_{az} = \pi R^2 \cdot h - V_{vin}$

$V_{az} = 25\pi h - \frac{25\pi}{3}(h - 5)$

$V_{az} = 25\pi \left[h - \frac{h}{3} + \frac{5}{3}\right]$

$\frac{V_{az}}{V_{vin}} = \frac{25\pi\left[\frac{2h}{3} + \frac{5}{3}\right]}{\frac{25\pi}{3}(h - 5)} = \frac{2h + 5}{h - 5} = 5$

$5h - 25 = 2h + 5 \Rightarrow 3h = 30$

$h = 10$ cm

Alternativa (C).

7 $d = 4$

$R = 2$

$S_L = \pi RG$

$\frac{1}{3}\pi G^2 = \pi RG$

$\frac{G}{3} = R = 2 \Rightarrow G = 6$

$S_B = \pi R^2 = \pi 2^2 = 4\pi$

$S_T = 4\pi + \pi \cdot 2 \cdot 6 = 16\pi$

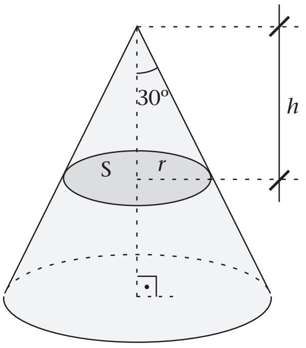
4π — $k\%$

16π — 100%

$k = 25$

Alternativa (B).

8



$S = \pi r^2$

$\text{tg } 30° = \frac{r}{h}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{h}$

$r = \frac{h\sqrt{3}}{3}$

Elevando ao quadrado, temos:

$r^2 = \frac{3h^2}{9} = \frac{h^2}{3}$

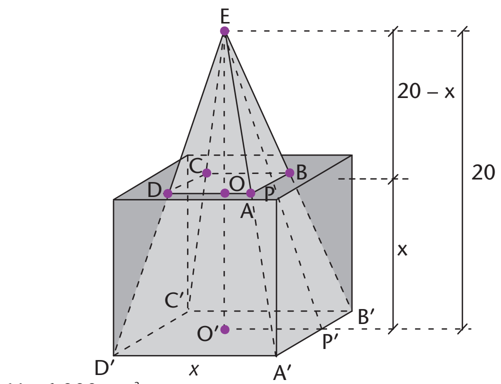
Substituindo em S, vem:

$S = \pi \cdot \frac{h^2}{3}$

Alternativa (C).

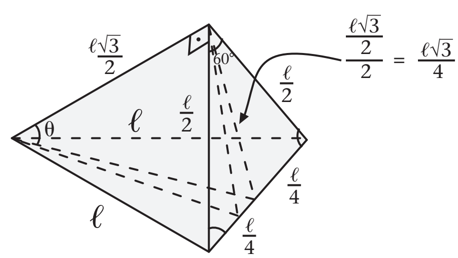
Exercícios de revisão, p. 579

6 Admitindo que a base do cubo seja coincidente com a base da pirâmide, conforme figura, temos:



$V = 1\,000\ cm^3$

20



$$\text{tg}\ \theta = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{4}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}$$

Alternativa (C).

24 $\dfrac{V_1}{V_2} = \left(\dfrac{h}{H}\right)^3 = \left(\dfrac{h}{2h}\right)^3 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow V_2 = 8V_1$

$V_{tronco} = V_2 - V_1 = 7V_1$

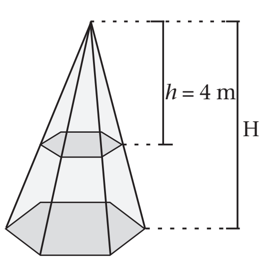
$8V_1$ — 100%

$7V_1$ — P%

P = 87,5%

Alternativa (D).

26



$S_B = 144\ m^2$

$S_b = 64\ m^2$

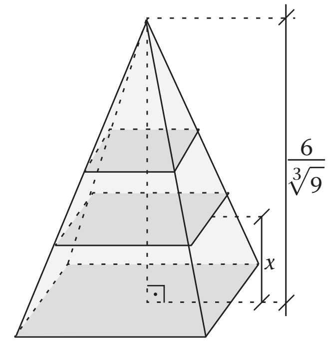
$$\left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{S_b}{S_B}$$

$$\left(\frac{4}{H}\right)^2 = \frac{64}{144} \Rightarrow \frac{16}{H^2} = \frac{64}{144}$$

$H^2 = 36 \Rightarrow H = 6\ m$

Alternativa (D).

41



Volume de cada parte: V

$$\frac{2V}{3V} = \left(\frac{\frac{6}{\sqrt[3]{9}} - x}{\frac{6}{\sqrt[3]{9}}}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{6}{\sqrt[3]{9}} - x}{\frac{6}{\sqrt[3]{9}}} \Rightarrow \frac{6}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{6}{\sqrt[3]{9}} - x$$

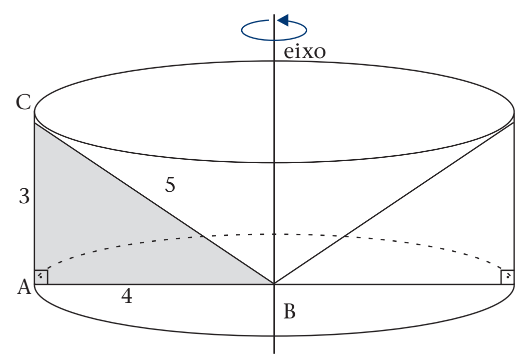
$$\frac{6\sqrt[3]{2}}{3} = \frac{6}{\sqrt[3]{9}} - x \Rightarrow \frac{6\sqrt[3]{2}}{3} = \frac{6\sqrt[3]{3}}{3} - x$$

$x = 2\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2}$

$x = 2\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)$ cm

Alternativa (D).

71



$V_{sólido} = V_{cil} - V_{con}$

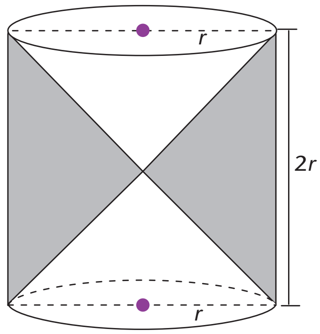
$$V_{sol} = \pi R^2 h - \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$V_{sol} = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{2}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3$$

$V = 32\pi$

Alternativa (C).

100



$V_{\text{sólido}} = V_{\text{cil}} - 2 \cdot V_{\text{cone}}$

$V_{\text{cil}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$

$V_{\text{cone}} = \dfrac{\pi r^2 \cdot r}{3} = \dfrac{\pi r^3}{3}$

$V_{\text{sol}} = 2\pi r^3 - \dfrac{2\pi r^3}{3} \Rightarrow V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

Alternativa (C).

CAPÍTULO XIV

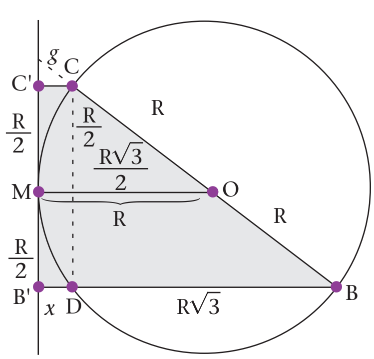
Exercícios de revisão, p. 637

26 b) $\left.\begin{array}{l}\overline{AB} = \sqrt{2Rm} \Rightarrow \overline{AB}^2 = 2Rm \\ S = 2\pi Rm \Rightarrow S = \pi(2Rm)\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \pi(\overline{AB}^2)$, que é a área do círculo cujo raio mede $\overline{AB}$.

27 b) Basta mostrar que a distância do centro às arestas laterais é igual à distância do centro às arestas da base, isto é, igual à metade da aresta da pirâmide.

45



$CC' = x$

$x = R - \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2R - R\sqrt{3}}{2}$

$x = \dfrac{R}{2}(2 - \sqrt{3})$

$BB' = BD + DB'$

$BB' = R\sqrt{3} + R - \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R\sqrt{3} + 2R}{2}$

$BB' = \dfrac{R}{2}(\sqrt{3} + 2)$

Área do tronco:

$S_T = \pi \cdot \left[\dfrac{R}{2}(2 - \sqrt{3})\right]^2 + \pi \cdot \left[\dfrac{R}{2}(\sqrt{3} + 2)\right]^2 + S_L$

$S_T = \dfrac{\pi R^2}{4} \cdot \left[(4 - 4\sqrt{3} + 3) + (3 + 4\sqrt{3} + 4)\right] + S_L$

$S_T = \dfrac{\pi R^2}{4} \cdot 14 + S_L$

Semelhança:

$\dfrac{g}{G} = \dfrac{r}{R}$

$\dfrac{g}{g + 2R} = \dfrac{\dfrac{R}{2}(2 - \sqrt{3})}{\dfrac{R}{2}(2 + \sqrt{3})}$

$2g + g\sqrt{3} = 2g - g\sqrt{3} + 4R - 2R\sqrt{3}$

$2g\sqrt{3} = 4R - 2R\sqrt{3}$

$g = \dfrac{2R - R\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}R - 3R}{3}$

$g = \dfrac{R}{3}(2\sqrt{3} - 3)$

$G = \dfrac{2\sqrt{3}R - 3R}{3} + 2R = \dfrac{2\sqrt{3}R - 3R}{3}$

$G = \dfrac{R}{3}(2\sqrt{3} + 3)$

Área lateral:

$S_L = \pi RG - \pi rg = \pi(RG - rg)$

$S_L = \pi \cdot \left[\dfrac{R}{2}(\sqrt{3} + 2) \cdot \dfrac{R}{3}(2\sqrt{3} + 3) - \dfrac{R}{2}(2 - \sqrt{3}) \cdot \right.$

$\left. \cdot \dfrac{R}{3}(2\sqrt{3} - 3)\right]$

$S_L = \dfrac{\pi R^2}{6}\left[(6 + 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 6) - (4\sqrt{3} - 6 - 6 + 3\sqrt{3})\right]$

$S_L = \dfrac{\pi R^2}{6} \cdot \left[12 + 7\sqrt{3} + 12 - 7\sqrt{3}\right] = \dfrac{\pi R^2}{6} \cdot 24$

$S_L = 4\pi R^2$

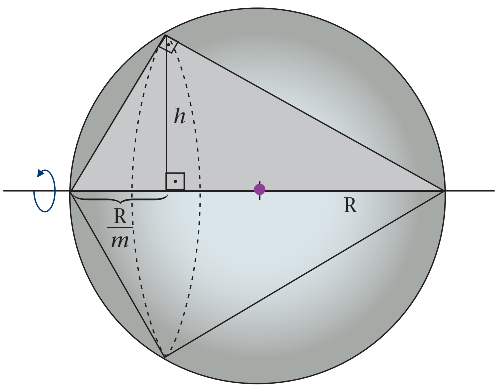
Área total:

$S_{\text{Total}} = \dfrac{7\pi R^2}{2} + 4\pi R^2 = \dfrac{15\pi R^2}{2}$

$\dfrac{\dfrac{15\pi R^2}{2}}{\pi R^2} = 2k \Rightarrow k = \dfrac{15}{4}$

Alternativa (B).

50



Projeção 1: $\frac{R}{m}$

Projeção 2: $2R - \frac{R}{m}$

$h^2 = (\text{proj } 1) \cdot (\text{proj } 2)$

$h^2 = \frac{R}{m}\left(2R - \frac{R}{m}\right) = \frac{2R^2}{m} - \frac{R^2}{m^2}$

$h^2 = \frac{2R^2m - R^2}{m^2}$

$m \geq 1$

$V_{esf} = \frac{4}{3}\pi R^3$

$V_{sólido} = V_{cone1} + V_{cone2}$

$V_{cone1} = \pi\left(\frac{2R^2m - R^2}{m^2}\right) \cdot \frac{R}{m}$

$V_{cone2} = \pi\left(\frac{2R^2m - R^2}{m^2}\right) \cdot \left(2R - \frac{R}{m}\right)$

$V_{sólido} = \pi\left(\frac{2R^2m - R^2}{m^2}\right) \cdot \left(\frac{R}{m} + 2R - \frac{R}{m}\right)$

$V_{sólido} = \frac{2\pi R^3}{m^2}(2m - 1)$

$V = V_{esf} - V_{sólido}$

$V = \frac{4\pi R^3}{3} - \frac{2\pi R^3}{m^2}(2m - 1)$

$V = \frac{2\pi R^3}{3m^2}\left[2m^2 - 3(2m + 1)\right]$

$V = \frac{2\pi R^3}{3m^2}(2m^2 - 6m - 3)$

$V = \frac{2\pi R^3}{3}\left[2 + \frac{6}{m} - \frac{3}{m^2}\right]$

Alternativa (E).

58 $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$

Meia esfera: $V = \frac{36\pi}{2} = 18\pi$

$V_{cil} = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$

$V_{sólido} = 18\pi - \pi$

$V_{sólido} = 17\pi \text{ cm}^3$

Alternativa (D).

61 $V_{des} = V_{cil} - 3V_{esf}$

$V_{des} = \pi \cdot a^2 \cdot 6a - 3 \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$

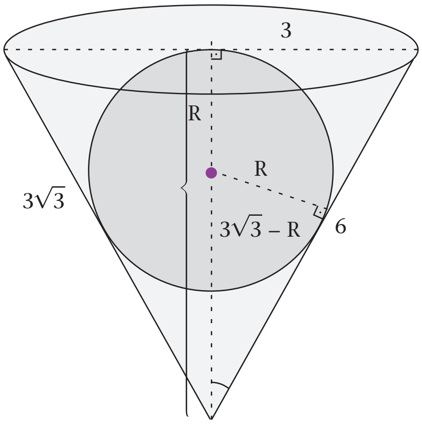
$V_{des} = 6a^3\pi - 4a^3\pi$

$V_{des} = 2\pi a^3$

Alternativa (A).

67 $g = 6$ dm

$R = 3$ dm



$\frac{R}{3} = \frac{3\sqrt{3} - R}{6}$

$2R = 3\sqrt{3} - R$

$3R = 3\sqrt{3}$

$R = \sqrt{3}$

$V_{líq} = V_{cone} - V_{esfera}$

$V_{líq} = \frac{1}{3}\pi\, 3^2 \cdot 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^3$

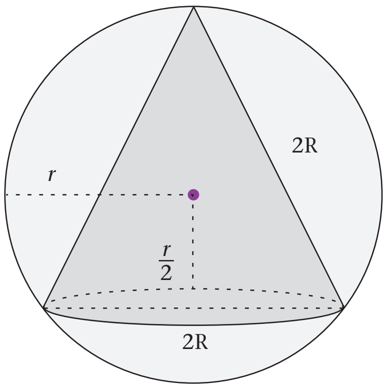
$V_{líq} = \pi 9\sqrt{3} - \pi 4\sqrt{3}$

$V_{líq} = 5\sqrt{3}\pi \text{ dm}^3$

$V_{líq} = 5\sqrt{3}\pi$ litros

Alternativa (C).

74



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r\sqrt{3}$$

$$V = \frac{\pi r^3\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{3R}{2} = r\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{3R}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^3 \cdot \sqrt{3}$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot R^3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \sqrt{3}$$

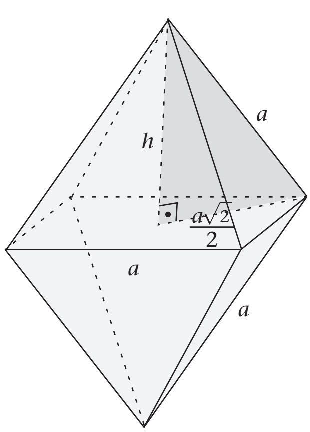
$$V = \frac{3\pi R^3}{8}$$

Alternativa (B).

CAPÍTULO XV

Exercícios de revisão, p. 681

1



$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$h^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$h = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

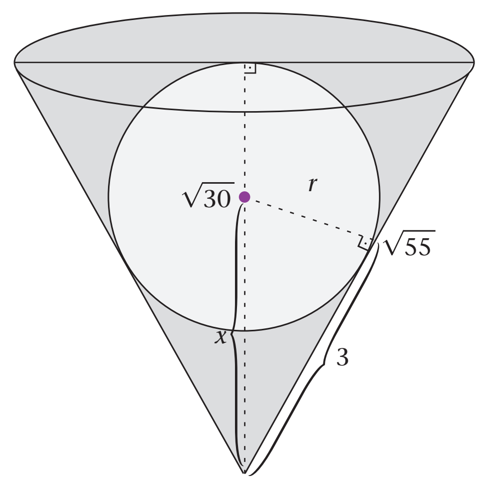
$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

$$V = \frac{2}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

Alternativa (D).

13



$$\frac{x}{\sqrt{55}} = \frac{3}{\sqrt{30}}$$

$$x = 3 \cdot \sqrt{\frac{55}{30}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{11}{6}}$$

$$3^2 + r^2 = x^2$$

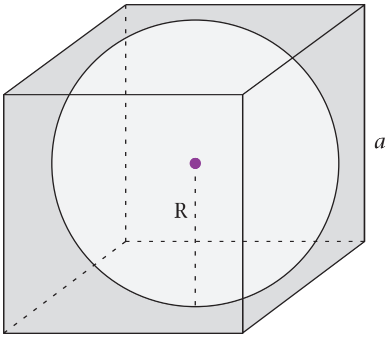
$$9 + r^2 = 9 \cdot \frac{11}{6}$$

$$r^2 = \frac{33}{2} - \frac{18}{2} = \frac{15}{2} = \frac{30}{4}$$

$$r = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

Aternativa (C).

25



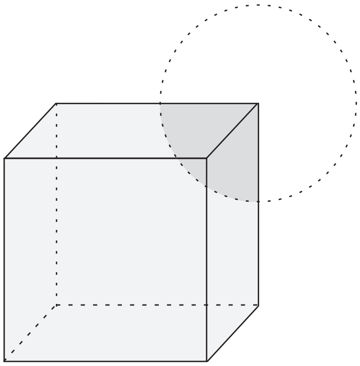
$a = 2R$

Razão:

$$\frac{4\pi R^2}{6a^2} = \frac{4\pi R^2}{6 \cdot (2R)^2} \Rightarrow \frac{4\pi R^2}{6 \cdot 4R^2} = \frac{\pi}{6}$$

Alternativa (A).

33



$$\frac{1}{8}V_{esf} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi R^3}{6}$$

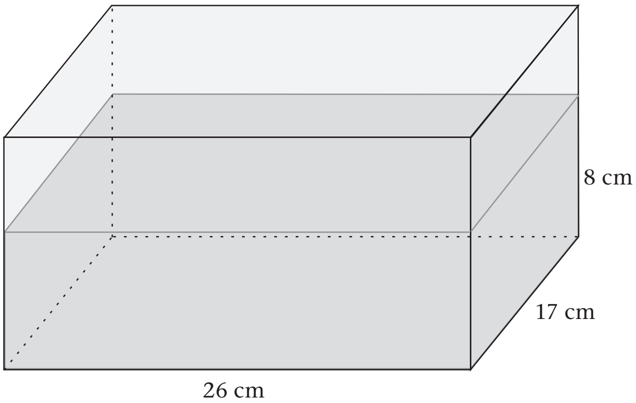
$$V = 8 \cdot \frac{\pi R^2}{6} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$V = \frac{4\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{3} = \frac{\frac{4\pi a^3}{8}}{3}$$

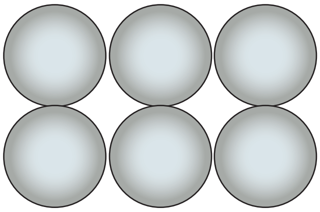
$$V = \frac{\pi a^3}{6}$$

Alternativa (C).

36



A maior esfera deve ter raio igual a 4 cm.



Cabem 6 bolas.

Alternativa (D).

39 $S_L = \frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{2} + \frac{k \cdot k\sqrt{2}}{2} + \frac{k \cdot k\sqrt{2}}{2} =$

$= k^2 + k^2\sqrt{2} = k^2\left(1 + \sqrt{2}\right)$

$k^2\left(1 + \sqrt{2}\right) = 4 + 4\sqrt{2}$

$k^2\left(1 + \sqrt{2}\right) = 4\left(1 + \sqrt{2}\right)$

$k^2 = 4$

$k = 2$

$V = V_{cubo} - V_{pir}$

$$V = 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{24 - 8}{3} = \frac{16}{3}$$

Alternativa (E).