COLEÇÃO APRENDER
MATEMÁTICA I

MATEMÁTICA

para o ensino médio – volume I

MANUAL DO PROFESSOR

Miguel Jorge
Mestre em Educação Matemática pela USU-RJ
Bacharel e licenciado em Matemática pela Uerj
Professor da Fundação Getulio Vargas – FGV-RJ
Professor do Colégio Santo Inácio – Rio de Janeiro – RJ
Engenheiro eletricista com especialização de Engenharia Econômica pela UFRJ

Ralph Costa Teixeira
Doutor em Matemática pela Universidade de Harvard, EUA
Mestre em Matemática pelo Impa-RJ
Engenheiro de Computação pelo IME-RJ
Professor adjunto da UFF-RJ

Thales do Couto Filho
Bacharel e licenciado em Matemática pela Sesni-RJ
Engenheiro mecânico pela UFRJ
Professor da PUC-RJ
Professor do Colégio Santo Inácio, Colégio Zacarias e da rede pública estadual do Rio de Janeiro

Felipe Ferreira da Silva
Licenciado em Matemática pela PUC-RJ
Professor do Colégio Santo Inácio e da Escola SESC de Ensino Médio – Rio de Janeiro – RJ

1ª edição

EDITORA do BRASIL

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Matemática para o ensino médio: volume I / Miguel
Jorge... [et al.]. – São Paulo: Editora do
Brasil, 2009. – (Coleção aprender)

Outros autores: Ralph Costa Teixeira, Thales do Couto Filho,
Felipe Ferreira da Silva
ISBN 978-85-10-04738-8 (aluno)
978-85-10-04739-5 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Jorge, Miguel. II. Teixeira, Ralph
Costa. III. Couto Filho, Thales do. IV. Silva, Felipe Ferreira da.
V. Série.

09–07966 CDD–510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática: Ensino médio 510.7

Projeto
FGV Ensino Médio da Fundação Getulio Vargas

Presidente da FGV
Carlos Ivan Simonsen Leal

Coordenadora do FGV Ensino Médio
Marieta de Moraes Ferreira

Assistente de coordenação
Renato Franco

Projeto gráfico
Osvaldo Moreira da Silva

Capa
Washington Dias Lessa

Diretora Executiva
Maria Lúcia Kerr Cavalcante Queiroz

Superintendente
Frederico Wolfgang Wickert

Gerência Editorial
Cibele Mendes Curto Santos

Supervisão Editorial
Rita Rodrigues

Coordenação de Licenciamento de Textos
Marilisa Bertolone Mendes

Coordenação de Revisão de Textos
Fernando Mauro S. Pires

Coordenação de Iconografia
Monica de Souza

Coordenação de Artes e Editoração
Ricardo Borges

Supervisão de Processos Editoriais
Marta Dias Portero

Edição de Textos
Valéria Elvira Prete

Assistência Editorial
Cibeli de Oliveira Chibante Bueno

Auxílio Editorial
Mauro Favoretto Júnior

Revisão de Textos
Eduardo Passos e Camila Gutierrez

Pesquisa Iconográfica
Pamela Rosa

Editoração Eletrônica
Departamento de Artes e Editoração e Leandro Hiroshi Kanno

Assistência de Arte
Regiane Santana e Janaína Lima

Ilustrações
Paulo César Pereira

Controle de Processos Editoriais
Leila P. Jungstedt, Carlos Nunes e Vanessa Ouros

1ª edição/1ª impressão – 2009
Impresso no parque gráfico da Editora FTD

FGV ensino médio
Rua Jornalista Orlando Dantas, 37 – Rio de Janeiro/RJ – CEP 22231-010
Fone: 21 3799-4434 – Fax: 21 3799-4436
www.fgv.br/ensinomedio

EDITORA do BRASIL
Rua Conselheiro Nébias, 887 – São Paulo/SP – CEP: 01203-001
Fone: (11) 3226-0211 – Fax: (11) 3222-5583
www.editoradobrasil.com.br

Apresentação

Este livro foi elaborado com a finalidade de oferecer subsídios de matemática elementar ao estudante brasileiro, visando introduzi-lo no ambiente universitário.

Fomos movidos pelo interesse de tratar com modernidade e rigor os conceitos fundamentais dessa linguagem universal. Em alguns momentos elevamos ligeiramente o nível de dificuldade dos exercícios e aprofundamos os conceitos com apêndices no final dos capítulos.

Este trabalho propõe-se também a complementar a bibliografia existente procurando compatibilizar os conceitos com os que deverão ser aprendidos na universidade.

Por outro lado, procuramos dar enfoques práticos, usados no cotidiano, contextualizando muitos exercícios para colocar o estudante a par das atividades mais frequentes durante a vida.

Assim, sem veleidades, entregamos aos nossos jovens este trabalho.

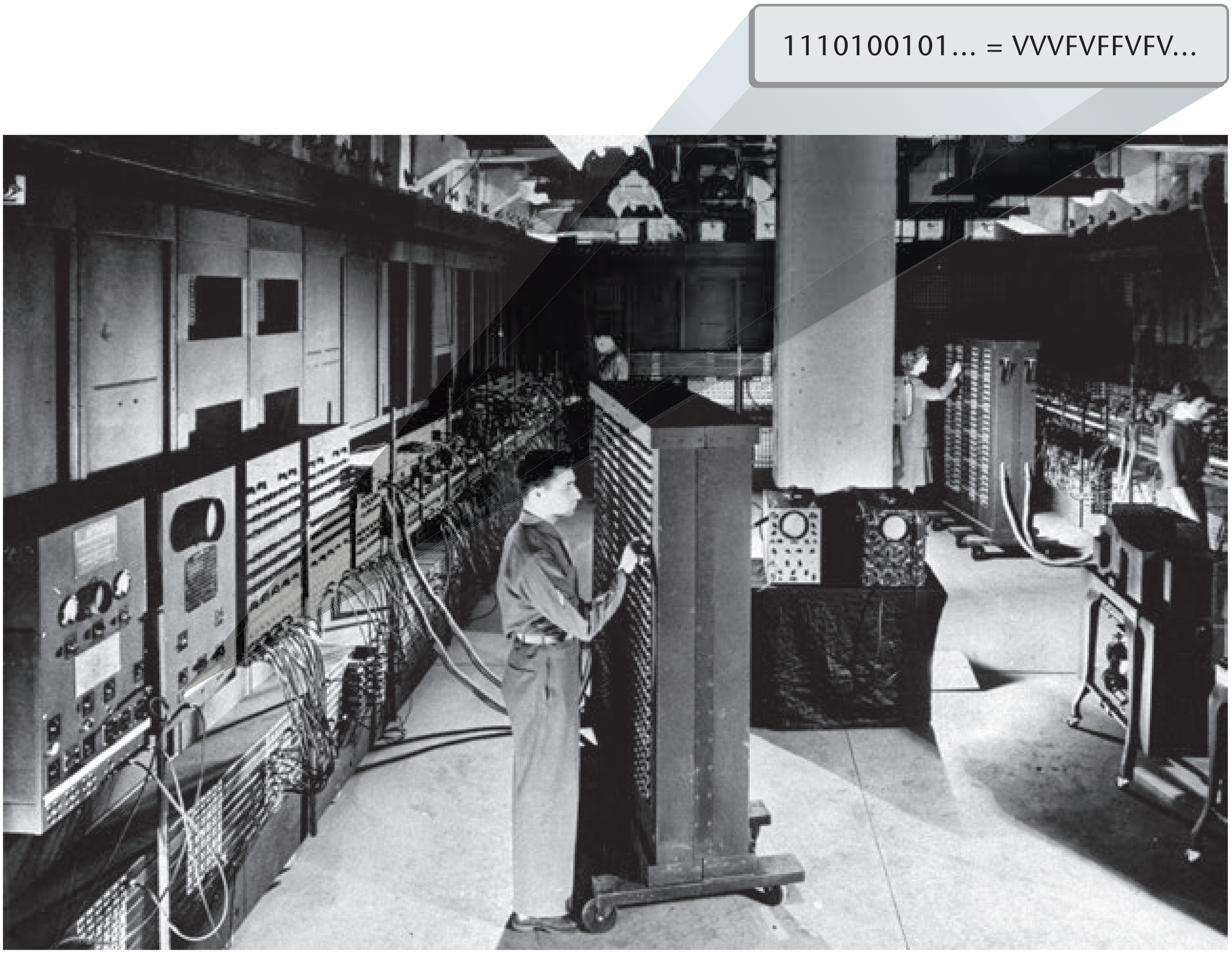
Os autores

Às nossas famílias, que, com paciência e incentivo, compreenderam os momentos de ausência, nos permitindo tornar realidade este trabalho.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO À LÓGICA



Time & Life Pictures/Getty Images

Os computadores modernos são todos digitais, isto é, são baseados em unidades denominadas *bits* que só podem assumir dois estados: "desligado" ou "ligado" (ou seja, "0" ou "1", "falso" ou "verdadeiro"). As operações mais simples que utilizam esses estados são as operações lógicas – as mesmas que fundamentam todo o raciocínio matemático. Na fotografia, o ENIAC, um computador digital construído em 1946 cuja capacidade é comparável a uma simples calculadora digital moderna.

1 – INTRODUÇÃO À LÓGICA

1.1 – Noções fundamentais

1.1.1 – Introdução

Em geral, ao estudar Matemática, o estudante adquire o conhecimento de determinados elementos (operações, propriedades, definições etc.) e, inconscientemente, ele está utilizando a **lógica**. Cabe aqui chamar atenção para as regras que foram utilizadas e procurar desenvolver o raciocínio matemático mediante leis perfeitamente definidas. A Matemática utiliza relações abstratas entre elementos abstratos mas que podem ser aplicados em situações concretas.

Quando se escreve, por exemplo, $a = b$ quer dizer que um mesmo elemento foi representado pelos símbolos a e b. Se, ao invés, a e b são diferentes, então, escreve-se $a \neq b$. Ao escrever $s = a + b$ estamos indicando que o símbolo s representa a soma dos números a e b. Tal valor pode representar, por exemplo, o volume total de um líquido obtido da junção dos líquidos de um recipiente de volume a com o de um recipiente de volume b.

Como se pode observar, a Matemática utiliza símbolos que têm determinado significado dado por uma **definição**.

Alguns desses símbolos são: $=$, $>$, $<$, $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt{\ }$, a, b, 1, 2, π, ( ), [ ], { }, |, $\rightarrow$ etc. Tais símbolos reunidos convenientemente, dando um sentido coerente, constituem a linguagem simbólica, que é a linguagem matemática.

Quando dizemos, por exemplo, $\pi > \sqrt{2}$, estamos dizendo que o número representado por π é maior que o número representado por $\sqrt{2}$.

NOTA
Note que certas letras, π por exemplo, tem um significado determinado para nós. (Valor de π: 3,14 15926535897932384626433832...). A representação decimal deste número é infinita e não periódica (número irracional).

1.1.2 – Termos

São as expressões (ou "palavras") da linguagem matemática. Designam uma coisa, uma qualidade ou uma ideia.

Por exemplo: $a + b$; diagonal do quadrado; $A\hat{O}B$; xy^2; triângulo; reta; π.

1.1.3 – Enunciados

São as sentenças (ou "frases") da linguagem matemática. São composições com **termos** que têm um determinado sentido.

Exemplos:

i) Não existe a divisão por zero.

ii) A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

iii) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

1.1.4 – Variáveis

São elementos representados por letras, que num enunciado ou termo podem ser substituídos por elementos de um conjunto indicado pelo enunciado ou pelo termo.

Exemplos:

i) No termo $2x + 1$, x é a variável que pode ser substituída por qualquer número, mas não pode ser substituída por uma figura geométrica ou pela palavra *água*.

ii) No enunciado $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$, as variáveis x e y podem ser substituídas por números quaisquer, 2 e 3 por exemplo, e obteremos: $(2 - 3)(2 + 3) = 4 - 9$.

iii) Em $x^2 - 2x - 3 = 0$ podemos substituir x por 2 e 3, encontrando $4 - 4 - 3 = 0$ e $9 - 6 - 3 = 0$ respectivamente.

NOTA
O enunciado $4 - 4 - 3 = 0$ tem sentido coerente, mas é falso.

1.1.5 – Termos primitivos

São termos que não se definem numa linguagem. São chamados **conceitos primitivos**. Por exemplo: ponto, reta, plano, conjunto, elemento e pertinência.

1.1.6 – Axiomas

São enunciados considerados verdadeiros. São relações entre termos primitivos que não se demonstram. Parte-se deles para demonstrar outros enunciados.

NOTA
Axiomas são verdades aceitas sem demonstração.

Exemplos:

i) Dois pontos determinam uma reta.

ii) Dois conjuntos são iguais se, e somente se, têm os mesmos elementos.

iii) Existe um conjunto $\mathbb{N}$, chamado conjunto dos números naturais, que possui 0 e o sucessor de cada um dos seus elementos (n' é sucessor de n se $n' = n + 1$).

1.1.7 – Proposições

São enunciados aos quais se pode atribuir a qualidade de serem verdadeiros ou falsos. Assim, o valor verdade ou lógico da proposição será V ou F.

Exemplos:

i) $3 + 5 = 8$ (V)

ii) Paris é capital do Brasil. (F)

iii) O camelo é um peixe. (F)

iv) Existem homens inteligentes. (V)

v) Todo múltiplo de 4 é par. (V)

Toda proposição deve ter as seguintes características:

1.1.7.1 – Características das proposições

1) Não devem permitir ambiguidade (dúvida a respeito de ser verdadeira ou falsa).
2) Devem ser declarativas.
3) Devem ter verbo.

As sentenças interrogativas, exclamativas, suplicativas etc. não são proposições.

Exemplos:

i) Carlos vai ao cinema? (interrogação não é proposição)

ii) Que dia lindo! (exclamação também não é proposição)

1.1.8 – Função proposicional ou sentença aberta

São enunciados em que constam uma ou mais variáveis.

Não são por si só proposições. Tornam-se proposições quando se atribuem às variáveis valores de certo conjunto, chamado *conjunto de definição desta variável* ou *universo desta variável*.

Exemplos:

i) x é capital do Brasil.
Se x = Brasília, então temos uma proposição verdadeira.
Se $x \neq$ Brasília, temos uma proposição falsa.
Não tem sentido atribuir a x um valor que não seja do conjunto das cidades do mundo. (Conjunto de definição da variável x.)

ii) $x + 1 > 5$
Se $x > 4$, o enunciado se transforma numa proposição verdadeira.
Se $x \leq 4$, tem-se uma proposição falsa.
Não tem sentido atribuir a x um valor que não seja um número real.

iii) x é triangular.
Se x é uma figura de 5 lados, a proposição é falsa.
Se x é uma figura de 3 lados, tem-se uma proposição verdadeira.
Não teria sentido dar a x o valor João. ("João é triangular" não teria nexo.)
O universo da variável x é o conjunto das figuras geométricas.

1.1.9 – Proposições simples e compostas

Chamam-se **proposições simples** aquelas que têm um só sujeito e um só predicado.

Exemplos:

p: Maria é nome de mulher. (V)

q: 12 é um número par. (V)

r: os números pares são primos. (F)

Chamam-se **proposições compostas** todas as proposições que se obtêm combinando-se duas ou mais proposições simples.

Exemplos:

Sejam *p* e *q* as proposições:

p: Maria é bela.

q: João é inteligente.

Essas duas proposições simples podem ser combinadas formando várias proposições compostas distintas.

1ª) Maria é bela **e** João é inteligente.

2ª) Maria é bela **ou** João é inteligente.

3ª) *Se* Maria é bela, **então** João é inteligente.

4ª) Maria é bela **se, e somente se**, João é inteligente.

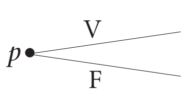
As diversas maneiras de formar uma proposição composta a partir das simples serão analisadas quando estudarmos os **conectivos lógicos**.

1.1.10 – Tabelas verdade

AXIOMA
p sendo dada, ela terá apenas um dos dois valores lógicos: V ou F

São tabelas que reúnem todas as hipóteses possíveis quanto aos valores verdade de uma proposição.

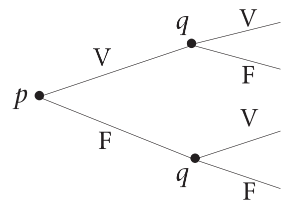
i) Considerando apenas uma proposição *p* temos apenas duas hipóteses: V ou F.



p
V
F

NOTA
A proposição composta será constituída por apenas um dos $2^2 = 4$ pares possíveis.

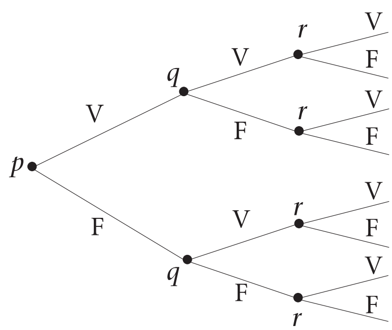
ii) Considerando duas proposições p e q temos 4 hipóteses que podem ser obtidas pelo **diagrama em árvore**:



p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

NOTA
Basta combinar cada hipótese anterior, com V ou F da terceira, dando $2^2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ casos possíveis.

iii) Considerando três proposições p, q e r, temos 8 hipóteses que são obtidas analogamente:



p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

NOTA
Caso tenhamos n proposições serão duas possibilidades para cada uma delas, logo: $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ vezes}} = 2^n$

Generalizando:
Assim, para n proposições, o número total de casos será 2^n.

1.1.11 – Proposições equivalentes

Duas proposições p e q são **equivalentes** exatamente quando têm a mesma tabela verdade, isto é, têm os mesmos valores lógicos nas mesmas situações.

Usa-se a notação: $p \Leftrightarrow q$ e se lê "p se, e somente se, q" ou "p é equivalente a q".

Toda definição estabelece uma equivalência entre proposições.

Exemplo:

Define-se um triângulo equilátero como aquele que tem lados iguais.

Assim, estabelecemos a equivalência:

ABC é equilátero $\Leftrightarrow$ AB = AC = BC

1.2 – Operações lógicas – negação, conjunção e disjunção

1.2.1 – Negação de uma proposição

Chama-se **negação** de uma proposição p e representamos por $\sim p$ a operação que associa a cada proposição p uma nova proposição $\sim p$, tal que:

i) $\sim p$ será **verdadeira** se, e somente se, p for **falsa**.

ii) $\sim p$ será **falsa** se, e somente se, p for **verdadeira**.

DEFINIÇÃO
A negação $\sim p$ de uma proposição p.

Chamamos $\sim p$ de "não p", ou "não é verdade que p". Temos então a **tabela verdade** abaixo, onde na coluna da direita estão os valores assumidos pela nova proposição, em correspondência com os valores de p.

OBSERVAÇÃO
Na linguagem usual, o conceito de negação se faz com o uso da palavra "não".

p	$\sim p$
V	F
F	V

A negação de uma proposição simples se faz antepondo-se ao verbo a palavra *não* ou cortando-se o sinal que substitui o verbo com um traço inclinado.

A negação de uma proposição é chamada a sua **complementar**.

Exemplos:

i) p: João é inteligente.
$\sim p$: João não é inteligente.

ii) p: $2 + 3 = 5$ (V)
$\sim p$: $2 + 3 \neq 5$ (F)

iii) p: $3 > 7$ (F)
$\sim p$: $3 \not> 7$, ou $3 \leq 7$ (V)

iv) p: 3 é raiz da equação $x^2 + x + 1 = 0$ (F)
$\sim p$: 3 não é raiz da equação $x^2 + x + 1 = 0$ (V)

A seguinte propriedade, conhecida como **lei de dupla negação**, é válida:

Lei de dupla negação:
A proposição $\sim(\sim p)$ tem os mesmos valores que p.

Demonstração: Basta construir a tabela verdade de $\sim(\sim p)$ estendendo a de $\sim p$.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	V
F	V	F

■

Exemplos:

i) p: João é amigo.
$\sim(\sim p)$: Não é verdade que João não é amigo.

ii) p: $\sqrt{4} = 2$ (V)
$\sim(\sim p)$: Não é verdade que $\sqrt{4} \neq 2$. (V)

1.2.2 – Conectivos

São sinais usados para combinar proposições dando origem a proposições compostas. A **conexão** é uma operação que associa a cada par de proposições (p, q) uma nova proposição $p * q$, onde o sinal $*$ é o conectivo.

Essas operações são: **conjunção, disjunção, implicação** e **equivalência**. O estudo dessas operações é a parte principal da lógica e é chamado de **cálculo proposicional**.

OBSERVAÇÃO
Na linguagem usual, a conjunção é feita pelo uso da palavra "e".

1.2.2.1 – Conjunção

Antes de definir a conjunção, consideremos as seguintes proposições:

i) **Maria é bela e rica.**

Quando se usa a conjunção *e*, entende-se que Maria reúne as duas qualidades: é bela *e* é rica.

ii) **Chove e faz frio.**

Observe que o uso do conectivo *e* nos faz entender que as duas coisas acontecem: não somente chove como também faz frio.

iii) $\sqrt{4} \neq -2$ **e** $2^0 = 1$ (V)

DEFINIÇÃO
A conjunção $p \wedge q$ de duas proposições p e q.

Sendo p e q duas proposições, chamamos **conjunção de p e q** e representamos por $\wedge$ a operação que associa a cada par de proposições (p, q) uma nova proposição $p \wedge q$, que se lê "p e q", e tal que:

$p \wedge q$ é **verdadeira** exatamente quando p e q forem **ambas verdadeiras**.

Temos então a seguinte tabela verdade para a definição de $p \wedge q$:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

OBSERVAÇÃO
A proposição $p \wedge q$ será falsa quando pelo menos uma das proposições componentes for falsa.

Exemplos:

i) p: 2 é um número par (V)
q: 13 é um número ímpar (V)
$p \wedge q$: 2 é par e 13 é ímpar (V)

ii) p: 4 é um número primo (F)
q: 2 é um número primo (V)
$p \wedge q$: 4 é um número primo e 2 é um número primo (F) (porque p é falsa)

iii) p: $1 < 3$ (V)
q: $2^2 = 8$ (F)
$p \wedge q$: $(1 < 3) \wedge (2^2 = 8)$ (F) (porque q é falsa)

iv) p: O triângulo tem diagonal. (F)
q: O quadrado não é um retângulo. (F)
$p \wedge q$: O triângulo tem diagonal e o quadrado não é um retângulo. (F) (porque ambas são falsas)

Propriedades da conjunção

1) A conjunção é **comutativa**, isto é, $p \wedge q$ é equivalente a $q \wedge p$.

OBSERVAÇÃO
Vemos assim que: *a ordem das proposições não altera a proposição conjuntiva.*

Demonstração: Basta construir a tabela verdade para $p \wedge q$ e $q \wedge p$ e verificar que ambas têm os mesmos valores lógicos nas mesmas hipóteses.

Assim, temos:

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

,

o que confirma a propriedade. ■

OBSERVAÇÃO
Esta última conjunção é falsa porque $\sqrt{4} = +2$.

Exemplos:

i) $p \wedge q$: Maria é bela e João é inteligente.
$q \wedge p$: João é inteligente e Maria é bela.

ii) $p \wedge q$: 12 é um número composto e 7 é primo (V)
$q \wedge p$: 7 é primo e 12 é um número composto (V)

iii) $p \wedge q$: O quadrado de um número ímpar é ímpar e $\sqrt{4} = \pm 2$. (F)
$q \wedge p$: $\sqrt{4} = \pm 2$ e o quadrado de um número ímpar é impar (F)

2) A conjunção é **associativa**, isto é, $(p \wedge q) \wedge r$ é equivalente a $p \wedge (q \wedge r)$.

Demonstração: Basta construir a tabela verdade para as proposições $(p \wedge q) \wedge r$ e $p \wedge (q \wedge r)$.

Temos:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$(p \wedge r)$	$p \wedge (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

A 5ª e a 7ª colunas sendo iguais, o resultado fica demonstrado.

Como $(p \wedge q) \wedge r$ é equivalente a $p \wedge (q \wedge r)$, escreveremos sempre $p \wedge q \wedge r$.

Podemos então concluir que a conjunção de várias proposições será verdadeira somente quando **todas** as proposições componentes forem verdadeiras. ■

Exemplos:

i) $p \wedge q \wedge r$: Maria é bela, inteligente e rica.
Esta proposição só será verdadeira se Maria reunir as três qualidades.

ii) $p \wedge q \wedge r : \underbrace{\text{10 é par}}_{\text{V}},\ \underbrace{\text{múltiplo de 5}}_{\text{V}}$ e $\underbrace{\text{quadrado perfeito}}_{\text{F}}$ (F)

A conjunção é falsa porque 10 não é quadrado perfeito.

iii) $p \wedge q \wedge r : \underbrace{(3 > 5)}_{\text{F}} \wedge \underbrace{(2^2 = 4)}_{\text{V}} \wedge \underbrace{(0 \text{ é par})}_{\text{V}}$ (F)

Devemos notar que a veracidade de uma proposição composta não depende, em lógica, de qualquer correlação entre as proposições componentes. Elas devem ser examinadas independentemente.

Exemplos:

i) $\underbrace{\text{A capital de Minas Gerais é Belo Horizonte.}}_{V}$ e

$\underbrace{\sqrt{-10} \notin \mathbb{R}}_{V}$ e $\underbrace{\text{O símbolo da água é } H_2O.}_{V}$ $\Rightarrow$ A conjunção é verdadeira.

ii) $\underbrace{\text{Matemática é fácil.}}_{V}$ e $\underbrace{\text{225 é um quadrado.}}_{V}$ e $\underbrace{\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}}_{F}$ $\Rightarrow$ A conjunção é falsa.

1.2.2.2 – Disjunção

OBSERVAÇÃO
Em linguagem usual, a palavra "ou" é ambígua: pode representar uma disjunção ou não. Em Matemática, o "ou" tem um significado preciso, o descrito neste texto.

Consideremos, antes de definir, as seguintes proposições:

i) **Maria é bela ou rica.**

Quando usamos o conectivo *ou* entendemos que Maria:

a) pode ser bela sem ser rica;

b) pode não ser bela mas ser rica;

c) pode ser bela e rica.

Não se exclui a possibilidade de Maria reunir as duas qualidades. Esse é o sentido do conectivo *ou*.

ii) **Chove ou faz frio.**

Na proposição acima a verdade só não se dará quando não chover *e* não fizer frio, isto é, tal proposição será verdadeira desde que:

a) chova e não faça frio;

b) não chova e faça frio;

c) chova e faça frio.

iii) **O produto $a \cdot b$ de dois números é zero quando $a = 0$ ou $b = 0$.**

Se tal fato ocorre, significa que **pelo menos um dos fatores** é zero, não se excluindo a possibilidade de ambos serem iguais a zero.

DEFINIÇÃO

A disjunção $p \vee q$ de duas proposições p e q.

Sendo p e q duas proposições, chamamos **disjunção** de p e q e representamos por $\vee$ a operação que associa a cada par de proposições (p, q) uma nova proposição $p \vee q$, que se lê "p ou q", tal que:

$p \vee q$ é **verdadeira** quando **pelo menos uma** das proposições p ou q for verdadeira.

OBSERVAÇÃO

A proposição $p \vee q$ só será falsa quando ambas as proposições componentes forem falsas.

Tem-se a seguinte tabela verdade para a definição de $p \vee q$:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplos:

i) p: O quadrado tem 2 diagonais de mesma medida. (V)
q: O quadrado tem 4 ângulos retos. (V)
$p \vee q$: O quadrado tem 2 diagonais iguais ou 4 ângulos retos. (V)

ii) p: O círculo tem centro. (V)
q: 30 é primo. (F)
$p \vee q$: O círculo tem centro ou 30 é primo. (V)

iii) p: $2 + 3 = 7$ (F)
q: $3 \geq 5$ (F)
$p \vee q$: $(2 + 3 = 7) \vee (3 \geq 5)$ (F)

Propriedades da disjunção

As seguintes propriedades da disjunção podem ser demonstradas com tabelas verdade como a da página 16.

1) A disjunção é **comutativa**, isto é, $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$.

Exemplos:

i) $p \vee q$: $(3 > 2) \vee (3 = 2)$ (V)
$q \vee p$: $(3 = 2) \vee (3 > 2)$ (V)

ii) $p \vee q$: 35 é múltiplo de 7 $\vee$ 34 é múltiplo de 5 (V)
$q \vee p$: 34 é múltiplo de 5 $\vee$ 35 é múltiplo de 7 (V)

iii) $p \vee q$: $(\sqrt{9} = -2) \vee (\sqrt{16} = 3)$ (F)
$q \vee p$: $(\sqrt{16} = 3) \vee (\sqrt{9} = -2)$ (F)

OBSERVAÇÃO

Escrever $a \geq b$ significa dizer que $(a > b) \vee (a = b)$. Neste caso, a proposição $5 \geq 3$ é verdadeira embora $5 = 3$ seja falsa.

2) A disjunção é **associativa**, isto é, $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$.

Exemplos:

i) $p \vee q \vee r$: Maria é bela ou inteligente ou rica.
Tal proposição só será verdadeira se Maria tiver pelo menos um destes atributos.

ii) $p \vee q \vee r$: $\underbrace{\left(0{,}666\ldots = \frac{2}{3}\right)}_{V} \vee \underbrace{\left(0{,}999\ldots = 1\right)}_{V} \vee \underbrace{\left(1{,}5 = \frac{5}{2}\right)}_{F}$ (V)

iii) $p \vee q \vee r$: $\underbrace{(3 < 5)}_{V} \vee \underbrace{(3 = 5)}_{F} \vee \underbrace{(3 > 5)}_{F}$ (V) (tricotomia)

3) A disjunção é **distributiva** em relação à conjunção, isto é,
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Exemplo:

$p \vee (q \wedge r)$: vou à praia ou (vou ao cinema e vou ao restaurante)
$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$: (vou à praia ou vou ao cinema) e (vou à praia ou vou ao restaurante)

4) A conjunção é **distributiva** em relação à disjunção, isto é,
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Exemplo:

$(p \vee q) \wedge r$: (vou sem carro ou vou de carro) e chego lá
$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$: (vou sem carro e chego lá) ou (vou de carro e chego lá)

1.2.2.3 – Negação de conjunções e disjunções – leis de De Morgan

A negação de proposições compostas com os conectivos *e* e *ou* se obtém substituindo cada proposição pela sua negação, e também o conectivo *e* pelo *ou* e o *ou* pelo *e*.

De fato, temos a seguinte propriedade conhecida como **leis de De Morgan**:

i) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$
ii) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$

Demonstração: Basta construir a tabela verdade:

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim(p \vee q)$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	V

A igualdade das 6ª e 7ª colunas demonstram (i).
A demonstração de (ii) é análoga. ■

Exemplos:

i) $p \vee q$: Vou ao cinema ou ao teatro.
$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$: Não vou ao cinema e não vou ao teatro.

ii) $p \wedge q$: Chove e faz frio.
$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$: Não chove ou não faz frio.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das seguintes proposições compostas (o símbolo | significa "é divisor de" ou "divide").

a) $3 > 1$ e $4 > 2$

b) $3 > 1$ ou $3 = 1$

c) $2 \mid 4$ ou $2 \mid (4 + 1)$

d) $3(5 + 2) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2$ e $3 \mid 7$

e) $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$ ou $5 \mid 11$

f) $(-1)^6 = -1$ e $2^5 < (-2)^7$

g) $\sqrt{16} = 16$ ou mdc $(4, 7) = 2$

2 Qual a negação de $x \geq -2$?

3 Sejam p e q duas proposições, qual a negação da expressão p e q?

4 Sejam as proposições:
p: O empregado foi demitido.
q: O patrão indenizou o empregado.
Forme sentenças, na linguagem natural, que correspondam às proposições seguintes:

a) $\sim p$

b) $\sim q$

c) p e q

d) p ou q

e) $\sim p$ e q

f) p ou $\sim q$

g) $\sim(\sim p)$

5 Sejam as proposições:
p: Ronaldinho é gordo.
q: Ronaldinho é rico.
Escreva, na forma simbólica, cada uma das proposições seguintes:

a) Ronaldinho não é gordo.

b) Ronaldinho não é rico.

c) Não é verdade que Ronaldinho não é rico.

d) Ronaldinho é gordo ou rico.

e) Ronaldinho não é gordo e é rico.

6 Dê a negação da proposição $x \in (A \cap B)$.

7 Construa a tabela verdade de cada uma das seguintes proposições:

a) $\sim p$ e q

b) $\sim p$ ou $\sim q$

c) (p e $\sim q$) ou ($\sim p$ e q)

d) (p e q) ou ($\sim p$ ou r)

8 Sejam as proposições a seguir:

a) Os pombos têm pelos.

b) Maria é estudiosa.

c) O mdc (6, 8) é igual a 48.

Dê as suas respectivas negações.

1.3 – Operações lógicas – implicação e equivalência

1.3.1 – Implicação ou condicional

Consideremos a seguinte proposição:

Se chove, então João sai de casa.

Trata-se de uma proposição que condiciona o comportamento de João (em relação a sair de casa) ao fato de chover. Chamamos então de **proposição condicional**.

Consideremos diversas situações ou casos:

i) **Chove e João sai de casa.**

É evidente que a condição foi satisfeita, logo a proposição é verdadeira.

ii) **Chove e João não sai de casa.**

Nessa situação, a condição foi contrariada, pois assegurava que, em caso de chuva, João sairia de casa. Então, nessa hipótese, a proposição será falsa.

iii) **Não chove e João sai de casa.**

iv) **Não chove e João não sai de casa.**

Nas situações (iii) e (iv), a condição não foi contrariada porque só assegurava o comportamento de João em caso de chuva. Como não choveu, João pode fazer o que quiser, pois a proposição será verdadeira. Podemos concluir que a proposição "se chove, então João sai de casa" **só é falsa** se:

Chove e João não sai de casa.

Vejamos um outro exemplo de proposição condicional:

Se João tem defeito de visão, então João usa óculos.

Essa proposição condiciona o comportamento de João (com relação ao uso de óculos) ao fato de João ter defeito de visão.

Consideremos as suas diversas hipóteses:

i) João tem defeito de visão e usa óculos. É claro que a condição é satisfeita, uma vez que João usa óculos, logo, a proposição é verdadeira.

ii) Admitamos agora que João tenha defeito de visão e não use óculos. Então, João negou a condição imposta, uma vez que ela garantia que, em caso de defeito de visão, João usaria óculos. Aqui, a condicional será falsa.

Sejam agora os casos em que João não tenha defeito de visão. Então João pode usar ou não óculos, pois a condição só impõe o seu uso em caso de defeito de visão. Nessas hipóteses a condicional será sempre verdadeira.

OBSERVAÇÃO
Se João não tem defeito de visão, ele pode usar óculos escuros sem grau ou não usar óculos.

iii) João não tem defeito de visão e usa óculos.

iv) João não tem defeito de visão e não usa óculos.

Observa-se que a condicional só é falsa quando a proposição **antecedente** (precedida pela palavra *se*) for verdadeira e a proposição **consequente** (precedida pela palavra *então*) for falsa.

Sendo p e q duas proposições, chamamos **implicação** de p para q, e representamos por $\Rightarrow$, a operação que associa a cada par de proposições (p, q) uma nova proposição $p \Rightarrow q$ que só será falsa se p for verdadeira e q for falsa.

Usam-se também as expressões: "se p então q", "p implica q", "p acarreta q", "em caso de p, q". A tabela verdade é a seguinte:

DEFINIÇÃO
A implicação $p \Rightarrow q$ de p para q.

p	q	$p \Rightarrow q$	
V	V	V	(1)
V	F	F	(2)
F	V	V	(3)
F	F	V	(4)

OBSERVAÇÃO
Sempre que p for falsa, a implicação $p \Rightarrow q$ será verdadeira. Veja as linhas (3) e (4) da tabela.

A proposição $p \Rightarrow q$ será falsa exatamente quando p for verdadeira e q for falsa. Veja a linha (2) da tabela. Em outras palavras, $p \not\Rightarrow q$ é equivalente a $p \wedge (\sim q)$.

Exemplos:

i) $\left.\begin{array}{l} p: 2^2 = 4 \quad (V) \\ q: 2^3 = 8 \quad (V) \end{array}\right\}$ $\quad p \Rightarrow q: 2^2 = 4 \Rightarrow 2^3 = 8 \ (V)$

Basta multiplicar ambos os membros de p por 2 e obtém-se q. Temos que: **é verdade que uma premissa verdadeira leve a uma conclusão verdadeira.**

NOTA
Procure o significado de *premissa* no dicionário.

ii) $\left.\begin{array}{l} p: 3 = 8 \quad (F) \\ q: 10 = 10 \quad (V) \end{array}\right\}$ $\quad p \Rightarrow q: 3 = 8 \Rightarrow 10 = 10 \quad (V)$

Basta ver que: se 3 = 8 teríamos também que 8 = 3. Somando-se membro a membro essas duas igualdades, teríamos:

$$\boxed{\begin{array}{rcr} 3 & = & 8 \\ +\,8 & = & +\,3 \\ \hline 11 & = & 11 \end{array}}$$

Assim, subtraindo-se 1 de ambos os membros se obteria: 11 – 1 = 11 – 1 ou seja 10 = 10.
Temos então: **uma premissa falsa pode levar a uma conclusão verdadeira.**

iii) $\left.\begin{array}{l} p: 2 = 1 \text{ (F)} \\ q: \text{Rosa é a rainha da Inglaterra. (F)} \end{array}\right\} p \Rightarrow q: 2 = 1 \Rightarrow$ Rosa é a rainha da Inglaterra. (V)

Basta considerar o conjunto que contém os elementos Rosa e rainha da Inglaterra. Nesse conjunto existem dois elementos. Como 2 = 1 por hipótese, então aí haverá 1 elemento, o que nos leva a concluir que Rosa é a rainha da Inglaterra.

iv) $\left.\begin{array}{ll} p: 2^2 = 4 & \text{(V)} \\ q: 3 = 5 & \text{(F)} \end{array}\right\} p \Rightarrow q: 2^2 = 4 \Rightarrow 3 = 5 \text{ (F)}$

Para constatarmos a falsidade da implicação, basta notar que ela se encaixa na linha (2) da tabela que **define** $p \Rightarrow q$.

v) Se ele é italiano, então ele é europeu.

Note que essa implicação é sempre verdadeira. De fato, seja "ele" quem for, um dos seguintes casos ocorre:

– Linha 1 da tabela: ele pode ser italiano e europeu;

– Linha 3 da tabela: ele pode não ser italiano, mas ser europeu (por exemplo, francês);

– Linha 4 da tabela: ele pode não ser italiano nem europeu (por exemplo, um brasileiro).

Mas, se algum dia você encontrasse um italiano que não fosse europeu (linha 2 da tabela), a frase "se ele é italiano, então ele é europeu" seria falsa.

Note que $p \Rightarrow q$ é verdadeira exatamente nas linhas 1, 3 e 4, ou seja, nos casos em que p é falso ou q é verdadeiro. Em símbolos:

$$(p \Rightarrow q) \text{ é equivalente a } (\sim p) \vee q$$

Exemplos:

i) "Se João tem defeito de visão, então usa óculos" é equivalente a "João **não** tem defeito de visão ou usa óculos".

ii) "Se beber, não dirija" é equivalente a "não beba **ou** não dirija".

NOTA
Neste exemplo, p: beber e q: não dirija.

1.3.1.1 – Condições necessárias e condições suficientes

NOTA
Procure em um bom dicionário o significado das palavras "necessário" e "suficiente".

Dada uma implicação $p \Rightarrow q$, o **antecedente** p é dito uma **condição suficiente** para q e o **consequente** q **é dito** uma **condição necessária** para p. Então, uma implicação pode ser lida das seguintes maneiras:

i) $p \Rightarrow q$: p é condição suficiente para q (se p então q)

ii) $p \Rightarrow q$: q é condição necessária para p (p somente se q)

Resumindo:

suficiente $\Rightarrow$ necessária

Exemplos:

i) $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$ (V)
$x > 1$ é condição suficiente para $x^2 > 1$ é o mesmo que dizer que $x^2 > 1$ é condição necessária para $x > 1$

ii) $(3 = 8) \Rightarrow (10 = 10)$ (V)
$3 = 8$ é condição suficiente para $10 = 10$
$10 = 10$ é condição necessária para $3 = 8$, mas não é suficiente, pois $10 = 10 \not\Rightarrow 3 = 8$, ou seja, $10 = 10 \Rightarrow 3 = 8$ é falsa

Analogamente, para constatar se uma condição A é necessária para B, basta verificar se a implicação $B \Rightarrow A$ é verdadeira.

Exercícios resolvidos:

1) Verificar se $3 = 1$ é suficiente para $2 > 7$.

Solução: Basta ver se $3 = 1 \Rightarrow 2 > 7$ é verdadeira.

A implicação é o mesmo que: $\underbrace{3 \neq 1}_{V} \vee \underbrace{2 > 7}_{F}$, que é verdadeira. Logo $3 = 1$ é suficiente para $2 > 7$.

2) Verificar se $2^2 = 4$ é suficiente para $2 > 10$.

Solução: Devemos verificar se $2^2 = 4 \Rightarrow 2 > 10$ é verdadeira, isto é, se $2^2 \neq 4 \vee 2 > 10$ é (V) ou (F). Como $2^2 \neq 4$ é falsa e $2 > 10$ é também falsa, a disjunção é falsa. Então a condição $2^2 = 4$ não é suficiente para $2 > 10$, como era de se esperar.

3) Verificar se a condição "ABC é um triângulo isósceles" é necessária para "ABC é um triângulo equilátero".

Solução: Basta ver se a implicação:

ABC é um triângulo equilátero $\Rightarrow$ ABC é um triângulo isósceles é verdadeira. Ora, esta implicação é equivalente a:

(ABC não é equilátero) $\vee$ (ABC é isósceles)

que é verdadeira, pois todo triângulo é isósceles (inclusive o equilátero) ou não equilátero. A condição é, pois, necessária.

1.3.1.2 – Negação da implicação

Para negar a implicação $p \Rightarrow q$ basta escrevê-la na forma equivalente $(\sim p) \vee q$ e aplicar as leis de De Morgan. Como vimos:

$\sim(p \Rightarrow q)$ é equivalente $\sim[(\sim p) \vee q]$

$\sim(p \Rightarrow q)$ é equivalente $p \wedge (\sim q)$

A negação da implicação é a conjunção do antecedente com a negação do consequente.

Exemplos:

i) p: $(x = 2) \Rightarrow (x^2 = 4)$
$\sim p$: $(x = 2) \wedge (x^2 \neq 4)$

ii) p: $(ab > 0) \Rightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
$\sim p$: $(ab > 0) \wedge (a \leq 0 \vee b \leq 0) \wedge (a \geq 0 \vee b \geq 0)$

iii) p: $(x - a) > b \Rightarrow (y - c) < d$
$\sim p$: $(x - a) > b \wedge (y - c) \geq d$

1.3.1.3 – Propriedades da implicação

1) A implicação não é comutativa, isto é: $(p \Rightarrow q)$ não é equivalente a $(q \Rightarrow p)$.

Basta ver que: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee q$ e $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim q) \vee p$.

Essas duas proposições só serão iguais se p e q tiverem os mesmos valores, isto é, ambas verdadeiras ou ambas falsas. (Faça a tabela.)

A proposição $q \Rightarrow p$ é chamada **recíproca** de $p \Rightarrow q$.

Mesmo que uma implicação seja verdadeira, nada obriga que a recíproca dessa implicação seja verdadeira. A recíproca só é verdadeira quando a condição é necessária e suficiente.

Exemplos:

i) Se João é italiano, então é europeu. (V)
Se é europeu, então é italiano. (F)

ii) $p \Rightarrow q$: $(x^2 = 4) \Rightarrow (x = 2 \lor x = -2)$ (V)
$q \Rightarrow p$: $(x = 2 \lor x = -2) \Rightarrow (x^2 = 4)$ (V)
Neste caso, a recíproca é verdadeira.

iii) $p \Rightarrow q$: ABC equilátero $\Rightarrow$ ABC isósceles (V)
$q \Rightarrow p$: ABC isósceles $\Rightarrow$ ABC equilátero (F)

iv) $p \Rightarrow q$: $(a > 0 \land b > 0) \Rightarrow ab > 0$ (V)
$q \Rightarrow p$: $ab > 0 \Rightarrow (a > 0 \land b > 0)$ (F) (pois poderia ser $a < 0$ e $b < 0$)

2) Tem-se que: $(p \Rightarrow q)$ é equivalente a $\sim q \Rightarrow \sim p$

Dada uma implicação $p \Rightarrow q$, chama-se **contrapositiva** desta implicação à implicação $\sim q \Rightarrow \sim p$.

NOTA
Cuidado: a contrapositiva de uma implicação é **equivalente** à implicação original.

Muitas vezes prova-se uma implicação utilizando sua contrapositiva.

Exemplos:

i) $p \Rightarrow q$: Se chove, então vou ao cinema.
$\sim q \Rightarrow \sim p$: Se não vou ao cinema, então não chove.

ii) $p \Rightarrow q$: $(a \neq 0 \land b \neq 0) \Rightarrow ab \neq 0$ (V)
$\sim q \Rightarrow \sim p$: $ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \lor b = 0)$ (V)
Observe que a veracidade da primeira fica evidente escrevendo a sua contrapositiva.

iii) $p \Rightarrow q$: Se João é italiano, então é europeu.
$\sim q \Rightarrow \sim p$: Se João não é europeu, então não é italiano.

Exercício resolvido:

Chama-se implicação **contrária** de $p \Rightarrow q$ a implicação $\sim p \Rightarrow \sim q$. Mostre que elas são equivalentes somente quando p e q tiverem os mesmos valores.

Solução: Basta construir a tabela verdade:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V

As colunas 3 e 6 só são iguais nas situações VV e FF, o que completa a demonstração. Veja as linhas (1) e (4).

1.3.2 – Equivalência ou bicondicional

Sejam p e q duas proposições. Chamamos **equivalência de p e q** e representamos por $\Leftrightarrow$, a operação que associa a cada par de proposições (p, q) uma nova proposição $p \Leftrightarrow q$, tal que:

$p \Leftrightarrow q$ é verdadeira se, e somente se, p e q forem ambas verdadeiras ou ambas falsas

Lê-se:

i) p é equivalente a q

ii) p se e somente se q

iii) p implica q e, reciprocamente, q implica p

iv) p é condição necessária e suficiente para q

A tabela verdade é dada por:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

A proposição $p \Leftrightarrow q$ será falsa se, e somente se, uma das proposições for verdadeira e a outra falsa.

Exemplos:

i) $\begin{cases} p: 8 = 2^3 \ \ (V) \\ q: \ 7 > 5 \ \ \ (V) \end{cases}$ $p \Leftrightarrow q: 8 = 2^3 \Leftrightarrow 7 > 5 \quad (V)$

ii) $\begin{cases} p: 3 = 1 \ \ (F) \\ q: 2 = 1 \ \ (F) \end{cases}$ $p \Leftrightarrow q: (3 = 1) \Leftrightarrow (2 = 1) \quad (V)$

iii) $\begin{cases} p: 3 = 1 \ \ (F) \\ q: 7 > 5 \ \ (V) \end{cases}$ $p \Leftrightarrow q: (3 = 1) \Leftrightarrow (7 > 5) \quad (F)$

1.3.2.1 – Propriedades da equivalência

1) A equivalência é comutativa, isto é, $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$.

2) A equivalência é associativa, isto é $[(p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r]$.

3) A equivalência é a conjunção de uma implicação e sua recíproca, isto é, $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$.

NOTA
Esta última propriedade nos permite dizer que: "Se a recíproca de uma implicação verdadeira também é verdadeira temos uma equivalência".

Exemplo:

$$2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Com efeito, as proposições:

$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ e $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x + 1 = 0$ são verdadeiras

Como vimos na implicação:

$(\Rightarrow)$ $2x + 1 = 0$ é suficiente para $x = -\frac{1}{2}$

$(\Leftarrow)$ $2x + 1 = 0$ é necessária para $x = -\frac{1}{2}$

Temos, pois, que $2x + 1 = 0$ é uma condição necessária e suficiente para $x = -\frac{1}{2}$.

De um modo geral:

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \begin{cases} p \text{ é suficiente para } q \\ p \text{ é necessário para } q \end{cases}$$

Dizer "*p* é equivalente a *q*" é o mesmo que dizer "*p* é uma condição necessária e suficiente para *q*".

Exemplo:
"A condição necessária e suficiente para que o binômio $ax + b$ seja nulo para qualquer valor de x é que $a = b = 0$".

Simbolicamente teríamos:

$ax + b = 0$ (qualquer x) $\Leftrightarrow a = b = 0$

Demonstremos que $a = b = 0$ é suficiente para $ax + b = 0$. Com efeito, qualquer que seja x, se $a = b = 0$, então $ax + b = 0x + 0b = 0$.

Demonstremos a seguir que $a = b = 0$ é necessária para $ax + b = 0$. Com efeito, como x pode ser qualquer valor, atribuamos a x dois valores distintos, x_1 e x_2. Temos então que:

$$\begin{cases} ax_1 + b = 0 \\ ax_2 + b = 0 \end{cases}, \text{ que implica}$$

$a(x_1 - x_2) = 0$, de onde $a = 0$ e, portanto, $b = 0$ também, já que $x_1 - x_2 \neq 0$.

Conclusões:

1) Numa equivalência devem ser examinados os dois sentidos possíveis das implicações componentes, isto é, a "ida" ($\Rightarrow$) e a "volta" ($\Leftarrow$).

2) Enquanto as implicações são usadas em demonstrações (só valem em geral num sentido), as equivalências são usadas em definições porque valem nos dois sentidos.

3) Se duas proposições são equivalentes, elas podem ser substituídas uma pela outra, numa proposição composta, que o valor lógico desta não se altera. (Lei da substituição.)

1.3.2.2 – Negação da equivalência

Para negar a equivalência $p \Leftrightarrow q$, podemos escrever na forma equivalente $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ e negar esta conjunção.

Exemplos:

i) Negação como disjunção exclusiva.
p: $x > 0 \Leftrightarrow 5x > 0$
$\sim p$: $(x > 0 \wedge 5x \leq 0) \vee (x \leq 0 \wedge 5x > 0)$

ii) Negação como outra equivalência.
p: $x = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 3$
$\sim p$: $x = 2 \Leftrightarrow x + 1 \neq 3$ ou ainda $\sim p$: $x \neq 2 \Leftrightarrow x + 1 = 3$

1.3.3 – Quantificadores

As funções proposicionais podem ser de uma ou mais variáveis. Para representarmos uma função proposicional usaremos $f(x)$, onde x é a variável a ser considerada.

1.3.3.1 – Quantificador universal

Quando desejarmos nos referir a todos os valores do conjunto universo da variável x, usaremos o símbolo $\forall$, que significa: "qualquer que seja", "para todo x", "para cada x" etc.

O sinal anteposto à função proposicional $f(x)$ transforma a função proposicional numa proposição $\forall x, f(x)$, que se lê: "qualquer que seja x, $f(x)$".

A proposição "$\forall x, f(x)$" será verdadeira se, e somente se, o valor lógico de $f(x)$ for V para todo valor de x do universo $\mathbb{U}$.

A proposição "$\forall x, f(x)$" será falsa se existir pelo menos um valor para x que torna $f(x)$ uma proposição falsa.

O símbolo $\forall$ é chamado **quantificador universal** porque põe em jogo **todos os valores do universo** de x.

Exemplos:

i) $p: \forall x, (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ (V)

ii) $p: \forall x, 0x = 0$ (V)

iii) $p: \forall x, x + 1 = 5$ (F) porque existe ao menos um valor de x (por exemplo $x = 8$) que torna a proposição p falsa.

Observações:

1) Quando numa equação ou numa inequação somos levados a igualdades ou desigualdades que não dependem dos valores da variável, significa que:

   i) se a igualdade ou desigualdade for verdadeira, todos os valores do universo de x são soluções;

   ii) se a igualdade ou desigualdade for falsa, nenhum valor do universo de x é solução.

Exercícios resolvidos:

1) Mostre que a proposição $\frac{1}{x} = \frac{2x+1}{x} - 2$ é verdadeira para todo $x \neq 0$ real.

Solução: Eliminando os denominadores, temos que $1 = 2x + 1 - 2x \Leftrightarrow 1 = 1$.

2) Mostre que a proposição $\frac{5x}{6} + 5 > \frac{x-1}{3} + \frac{x}{2}$ é verdadeira para todo x real.

Solução: Temos que $5x + 30 > 2x - 2 + 3x \Leftrightarrow 30 > -2$ que é verdade.

3) Mostre que a proposição $x^2 + 1 < 2x$ para todo x é falsa.
Solução: A desigualdade acima implicaria que $x^2 - 2x + 1 < 0 \Rightarrow (x-1)^2 < 0$, o que é evidentemente falso. É suficiente exibir o contra exemplo $x = 2$.

2) Podemos ter o quantificador universal aplicado a funções proposicionais com duas ou mais variáveis. Nesse caso escreve-se $\forall x, \forall y, f(x, y)$ ou simplesmente $\forall (x, y), f(x, y)$.

Lê-se: "quaisquer que sejam x e y, tem-se $f(x, y)$"

Exemplos:

i) p: $\forall x, \forall y, (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (V)

ii) p: $\forall x, \forall y, x + y = 0$ (F) (Basta ver que existe um par de valores para x *e* y, por exemplo, $x = 1$ e $y = 1$ para o qual p é F.)

Conjunto verdade

É o conjunto de valores da variável livre para os quais a função proposicional é verdadeira. Este conjunto é uma parte do universo da variável livre. Representaremos por $V(x)$ o conjunto verdade da variável x.

Exemplos:

Achar nos reais o conjunto verdade da função proposicional:

i) $x + 1 \geq 2$. Temos que $x \geq 1$, logo o conjunto verdade $V(x)$ é o conjunto de todos os x maiores ou iguais a 1.

ii) $x^2 - 5x + 6 = 0$. Temos que $x = 2$ ou $x = 3$, $V(x) = \{2, 3\}$.

iii) $x^2 + 1 > 0$. Temos que $\forall x, x^2 + 1 > 0$, logo, $V(x)$ é todo o universo da variável x.

1.3.3.2 – Quantificador existencial

Quando desejamos nos referir a alguns elementos do universo da variável x, aqueles que gozam de uma determinada propriedade usaremos o símbolo $\exists$, que significa: existe algum, existe pelo menos um.

O sinal $\exists x$ anteposto à função proposicional $f(x)$ transforma a função proposicional numa proposição: $\exists x, f(x)$, que se lê: existe pelo menos um x, tal que $f(x)$.

A proposição "$\exists x, f(x)$" será verdadeira se o valor lógico de $f(x)$ for V para algum valor de x do universo $\mathbb{U}$.

A proposição "$\exists x, f(x)$" será falsa se para todos os valores de x a proposição $f(x)$ for falsa.

O símbolo $\exists$ é chamado **quantificador existencial** porque põe em jogo **pelo menos um elemento do universo de *x*** (não põe em jogo todos os valores de x).

Exemplos:

(considere x um elemento pertencente ao conjunto dos números reais)

i) p: $\exists x, x + 1 = 5$ (V)

ii) p: $\exists x, x + 1 > 5$ (V)

iii) p: $\exists x, x^2 < 0$ (F) porque o quadrado de qualquer número real é maior ou igual a zero.

Quando quisermos nos referir a apenas um valor do universo de x, usaremos os símbolos $\exists^*$, $\exists!$, ..., $\exists_1$, que se lê: "existe um único".

Exemplos:

(considere x um elemento pertencente ao conjunto dos números reais)

i) $\exists x, x^2 - 5x + 6 = 0$ (V) $(x = 2 \text{ e } x = 3)$

ii) $\exists^*(x, y) \mid x^2 + y^2 = 0$ (V) $(x = y = 0)$

Podemos combinar o quantificador universal com o existencial em proposições.

Exemplos:

(considere x um elemento pertencente ao conjunto dos números reais)

i) p: $\forall x \neq 0, \exists y, y = \dfrac{1}{x}$ (V)

ii) p: $\forall(x, y), \exists z, x + y = z$ (V)

1.3.3.3 – Negação de proposições quantificadas

Há uma certa relação entre os quantificadores $\forall$ e $\exists$ que podemos evidenciar com o seguinte exemplo:

Todos os dias são quentes.

Esta proposição deixará de ser verdadeira se algum dia for frio.

Essas duas proposições podem ser simbolicamente escritas, sendo x do conjunto dos dias:

p: Todos os dias são quentes $\Leftrightarrow \forall x$, x é quente.

$\sim p$: Algum dia é frio $\Leftrightarrow \exists x$, x não é quente.

Temos então as leis de De Morgan:

1) $p: \forall x, f(x)$
logo:
$\sim p: \exists x, \sim f(x)$

"Não é verdade que para todo x, $f(x)$ é verdadeira."
Equivale a:
"Existe pelo menos um x para o qual $f(x)$ não é verdadeira."

Analogamente,

2) $q: \exists x, f(x)$
logo:
$\sim q: \forall x, \sim f(x)$

"Não existe x tal que $f(x)$ seja verdadeira."
Equivale a:
"Para todo x, $f(x)$ não é verdadeira."

Exemplos:

i) $p: \forall x, (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ (V)
$\sim p: \exists x, (x + 1)^2 \neq x^2 + 2x + 1$ (F)

ii) $p: \forall x, \exists y, \quad x + y = 0$ (V)
$\sim p: \exists x, \forall y, \quad x + y \neq 0$ (F)

As proposições quantificadas universalmente são negadas com a existência de pelo menos um elemento que as contraria, chamado de **contraexemplo** para a proposição.

Exemplos:

i) $p: \forall x, x^2 > 0$ (F), porque existe $x = 0$ tal que $x^2 \leq 0$. Então $x = 0$ é um contraexemplo para a proposição.

ii) $p: \forall x < 1, x^2 < 1$ (F), porque existe ao menos um (por exemplo, $x = -2$) tal que $x < 1$ e $x^2 \geq 1$. Logo, $x = -2$ é um contraexemplo para p.

Os quantificadores são muito utilizados para simbolizar enunciados de uso corrente.

1.3.3.4 – Propriedades da quantificação

1) O quantificador existencial é muitas vezes definido como negação do universal, por meio da proposição:

$$\exists x,\ p(x) \Leftrightarrow \sim(\forall x,\ \sim p(x))$$

"Existe x tal que $p(x)$ é verdade se, e somente se, não é verdade que para todo x, $p(x)$ é falso."

Exemplo:

Existem alunos estudiosos se, e somente se, não for verdade que todos os alunos não são estudiosos.

2) Analogamente, o quantificador universal pode ser definido como negação do existencial, por meio da proposição:

$$\forall x,\ p(x) \Leftrightarrow \sim(\exists x,\ \sim p(x))$$

A qual se lê:

"Qualquer que seja x, $p(x)$ é verdade se, e somente se, não existe x para o qual $p(x)$ seja falso."

Exemplo:

Todos os alunos são estudiosos se, e somente se, não existem alunos vadios.

3) $\forall x,\ p(x) \Rightarrow \exists x,\ p(x)$ desde que o universo de x não seja vazio

"Se para todo x, $p(x)$ é verdade, então existe ao menos um x tal que $p(x)$ seja verdade."

Exemplo:

Se todos os alunos são estudiosos, então existem alunos estudiosos.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Diga qual é a negação de cada proposição abaixo.

a) mdc (2, 3) = 1 ou mmc (2, 3) ≠ 6

b) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ ou $3 \cdot 10 \neq 6 \cdot 5$

c) $\frac{3}{7} \geq$ e $-3 \geq -7$

d) $2^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{4} = 2$

e) $(-3)^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{9} \neq -3$

f) $2 \leq 5 \Rightarrow 3^2 \leq 5^2$

2 Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das proposições abaixo.

a) $2 - 1 = 1 \Rightarrow 5 + 7 = 3 \cdot 4$

b) $22 = 4 \Leftrightarrow (-2)^2 = 4$

c) $5 + 7 \cdot 1 = 10 \Rightarrow 3 \cdot 3 = 9$

d) mdc (3, 6) = 1 ⇔ 4 é número primo

e) 2 | 8 ⇒ mmc (2, 8) = 2

f) $6 \leq 2 \Leftrightarrow 6 - 2 \geq 0$

g) $\frac{3}{5} < \frac{2}{7} \Rightarrow 3 \cdot 7 = 2 \cdot 5$

3 Com relação às proposições abaixo, julgue as que são verdadeiras e falsas.

a) Brasília está no Brasil se, e somente se, 2 + 2 = 5.

b) Brasília está na Argentina se, e somente se, 2 + 2 = 4.

c) Brasília está no Brasil se, e somente se, 2 + 2 = 4.

d) Brasília está na Argentina se, e somente se, 2 + 2 = 5.

4 Determine o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

a) $3 < 4 \Rightarrow 6 < 5$

b) $\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 2 \Rightarrow \text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

c) $3 \leq 1 \Rightarrow 4 > 3$

d) 3 + 2 = 7, então 4 + 4 = 8

e) $1 < 5 \Rightarrow \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

5 Sejam p, q e r proposições verdadeiras e p_1, p_2 e p_3 proposições falsas, determine a veracidade das seguintes afirmações:

a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

b) $p_1 \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

c) $(p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow p_3$

d) $[(p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow q] \Rightarrow p_3$

6 Nos itens abaixo, julgue cada uma das proposições simples e, em seguida, julgue a proposição composta definida pelo sinal de operação ⇒.

a) p: Ronaldinho é jogador de futebol.
q: π é um número real

b) p: O mês de janeiro tem 30 dias.
q: Todo número primo é ímpar.

7 Seja p "Está frio" e seja q "Está chovendo". Diga uma sentença verbal simples que descreva cada uma das seguintes proposições:

a) $p \Rightarrow \sim q$

b) $(p \text{ e } q) \Rightarrow p$

8 Julgue as proposições.

a) x é ímpar ⇔ x^2 é ímpar

b) $7 > 4 \Leftrightarrow 2 < 9$

c) Brasília fica na França se, e somente se, 6 > 5.

d) Rio de Janeiro é a capital do Rio de Janeiro se, e somente se, $\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

9 Construa a tabela verdade de cada uma das seguintes proposições:

a) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \sim(p \text{ ou } q)$

b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p \Rightarrow q)$

10 Determine o valor lógico de p, isto é, V(p), em cada um dos seguintes casos, sabendo que:

a) V(q) = V e V($p \Leftrightarrow q$) = F

b) V(q) = V e V(p e q) = V

11 Com base na proposição: "Se Felipe é um professor, então, Felipe ensina bem a seus alunos", determine:

a) a proposição recíproca;

b) a proposição contrapositiva.

12 Julgue a sentença $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 Se a sentença "Todas as camisas desta loja estão em liquidação" é falsa, então, quais das sentenças abaixo devem ser verdadeiras?

(A) Todas as camisas desta loja não estão com preços de liquidação.

(B) Existe alguma camisa nesta loja que não está em liquidação.

(C) Nenhuma camisa desta loja está em liquidação.

(D) Nem todas as camisas desta loja estão em liquidação.

2 Se não é verdade que "Alguma professora universitária não dá aulas interessantes", então, é verdade que:

(A) todas as professoras universitárias dão aulas interessantes.

(B) nenhuma professora universitária dá aulas interessantes.

(C) nenhuma aula interessante é dada por alguma professora universitária.

(D) nem todas as professoras universitárias dão aulas interessantes.

(E) todas as aulas não interessantes são dadas por professoras universitárias.

3 Suponha que as três sentenças abaixo sejam verdadeiras:

I) Todos os calouros são humanos.

II) Todos os estudantes são humanos.

III) Alguns estudantes pensam.

Dadas as quatro sentenças abaixo:

1) Todos os calouros são estudantes.

2) Alguns humanos pensam.

3) Nenhum calouro pensa.

4) Alguns humanos que pensam não são estudantes.

Aqueles que são consequências lógicas de (I), (II), e (III) são:

(A) somente 2.

(B) somente 4.

(C) 2 e 3.

(D) 2 e 4.

(E) 1 e 2.

4 Das premissas:

A - Nenhum herói é covarde.

B - Alguns soldados são covardes.

pode-se corretamente concluir que:

(A) alguns heróis são soldados.

(B) alguns soldados são heróis.

(C) nenhum herói é soldado.

(D) alguns soldados não são heróis.

(E) nenhum soldado é herói.

5 Numa cidade, os seguintes fatos são verdadeiros:

I) Alguns canhotos não fumam cigarros.

II) Todos os homens fumam cigarros.

Uma conclusão que se pode tirar é que:

(A) alguns canhotos são homens.

(B) alguns canhotos não são homens.

(C) nenhum canhoto é homem.

(D) alguns homens não são canhotos.

(E) nenhum homem é canhoto.

6 (PUC-RJ) Dentre as opções abaixo, a sentença verdadeira é:

(A) Não existe um número real x tal que $x^2 < -x$.

(B) Existe um número real x tal que $(-x)$ é positivo.

(C) $\sqrt{4} = \pm 2$

(D) Se a e b são números reais e $ab = 1$, então $a = 1$ e $b = 1$ ou $a = -1$ e $b = -1$.

(E) Nenhuma das sentenças acima é verdadeira.

7 (UFF-RJ) Considere os seguintes enunciados:

16 é múltiplo de 2

15 é múltiplo de 7

8 é número primo

A proposição que apresenta valor lógico verdadeiro é:

(A) Se 15 é múltiplo de 7 ou 16 é múltiplo de 2, então 8 é número primo.

(B) Se 16 é múltiplo de 2 ou 8 é número primo, então 15 é múltiplo de 7.

(C) Se 16 é múltiplo de 2, então 15 é múltiplo de 7 e 8 é número primo.

(D) Se 15 é múltiplo de 7 e 8 é número primo, então 16 é múltiplo de 2.

(E) Se 16 é múltiplo de 2, então 15 é múltiplo de 7 ou 8 é número primo.

8 (UFF-RJ) Considere um quadrilátero Q e a seguinte proposição *p*:

"Se Q é um retângulo ou Q é um trapézio isósceles, então os comprimentos das diagonais de Q são iguais."

A proposição equivalente a *p* é:

(A) Se Q não é um retângulo ou Q não é um trapézio isósceles, então os comprimentos das diagonais de Q não são iguais.

(B) Se Q não tem as diagonais com o mesmo comprimento, então Q não é um retângulo e Q não é um trapézio isósceles.

(C) Se Q não tem as diagonais com o mesmo comprimento, então Q não é um retângulo ou Q não é um trapézio isósceles.

(D) Se Q não é um retângulo e Q não é um trapézio isósceles, então os comprimentos das diagonais Q não são iguais.

(E) Se os comprimentos das diagonais de Q são iguais, então Q é um retângulo ou Q é um trapézio isósceles.

9 (UFF-RJ) Em uma roda de amigos, Jorge, Edson e Geraldo contaram fatos sobre suas namoradas. Sabe-se que Jorge e Edson mentiram e que Geraldo falou a verdade. Assinale qual das proposições abaixo é verdadeira.

(A) Se Geraldo mentiu, então Jorge falou a verdade.

(B) Edson falou a verdade e Geraldo mentiu.

(C) Se Edson mentiu, então Jorge falou a verdade.

(D) Jorge falou a verdade ou Geraldo mentiu.

(E) Edson mentiu e Jorge falou a verdade.

10 (Unirio-RJ) Considere a afirmativa:

"Todo sistema linear de *n* equações com *n* incógnitas admite apenas uma solução porque todo sistema linear homogêneo admite solução."

Com relação ao exposto, pode-se afirmar que a asserção:

(A) é verdadeira, e a razão é falsa;

(B) é falsa, e a razão é verdadeira;

(C) e a razão são falsas;

(D) e a razão são verdadeiras, e a razão é uma justificativa correta da asserção;

(E) e a razão são verdadeiras, mas a razão não é uma justificativa correta da asserção.

11 (UFF-RJ) O seguinte enunciado é verdadeiro:

"Se uma mulher está grávida, então a substância gonadotrofina coriônica está presente na sua urina."

Duas amigas, Fátima e Mariana, fizeram exames e constatou-se que a substância gonadotrofina está presente na urina de Fátima, e não está presente na urina de Mariana. Utilizando a proposição enunciada, os resultados dos exames e o raciocínio lógico dedutivo:

(A) garante-se que Fátima está grávida e não se pode garantir que Mariana está grávida.

(B) garante-se que Mariana não está grávida e não se pode garantir que Fátima está grávida.

(C) garante-se que Mariana está grávida e que Fátima também está grávida.

(D) garante-se que Fátima está grávida e não se pode garantir que Mariana está grávida.

(E) garante-se que Mariana não está grávida e que Fátima está grávida.

12 (UFF-RJ) Na cidade litorânea de Loretin, é rigorosamente obedecida a seguinte ordem do prefeito:

"Se não chover, então todos os bares à beira-mar deverão ser abertos."

Pode-se afirmar que:

(A) se todos os bares à beira-mar estão abertos, então choveu.

(B) se todos os bares à beira-mar estão abertos, então não choveu.

(C) se choveu, então todos os bares à beira-mar não estão abertos.

(D) se choveu, então todos os bares à beira-mar estão abertos.

(E) se um bar à beira-mar não está aberto, então choveu.

13 (UFR-RJ) Os quatro cartões abaixo têm uma letra numa face e um número inteiro na outra.

I	II	III	IV
5	C	E	6

Considere a afirmação: "Se há uma vogal em uma face, então há um número par na outra face." Quais dos cartões acima devem ser, necessariamente, virados para que se determine se a afirmação acima é verdadeira ou falsa?

(A) I e II

(B) II e IV

(C) II, III e IV

(D) I e III

(E) I, II e III

14 (UFRJ) As figuras a seguir representam quatro cartões A, B, C e D, que foram colocados sobre a mesa.

A	B	C	D
0,666	$\triangle$	$\sqrt{5}$	$\bigcirc$

Quem os colocou assim afirmou: "Todo cartão que tiver um número racional em uma face terá um polígono na outra". Uma pessoa deseja verificar se essa afirmação é verdadeira. Para cada cartão, indique se a pessoa será obrigada a olhar a outra face desse mesmo cartão. Justifique.

15 Uma sentença logicamente equivalente a "Se Pedro é economista, então Luísa é solteira" é:

(A) Pedro é economista ou Luísa é solteira.

(B) Pedro é economista ou Luísa não é solteira.

(C) Se Luísa é solteira, então Pedro é economista.

(D) Se Pedro não é economista, então Luísa não é solteira.

(E) Se Luísa não é solteira, então Pedro não é economista.

16 Se Ana não é advogada, então Sandra é secretária. Se Ana é advogada, então Paula não é professora. Ora, Paula é professora, portanto:

(A) Ana é advogada.

(B) Sandra é secretária.

(C) Ana é advogada ou Paula não é professora.

(D) Ana é advogada e Paula é professora.

(E) Ana não é advogada e Sandra não é secretária.

17 Uma pessoa que gosta de todas e apenas das pessoas que não gostam de si mesmas:

(A) gosta de si mesma.

(B) não gosta de si mesma.

(C) não existe.

(D) gosta de alguém.

(E) não gosta de ninguém.

18 Um grupo de 4 pessoas será formado, escolhendo-se entre 3 homens (F, G, H) e 4 mulheres (W, X, Y, Z). O grupo deverá ter pelo menos 2 homens e as seguintes condições deverão ser respeitadas:

F se recusa a trabalhar com Y;

G se recusa a trabalhar com W;

Y se recusa a trabalhar com Z.

a) Se Y pertencer ao grupo, quais serão os outros membros?

b) Classifique em verdadeiro ou falso:

I) Se F não é escolhido, W também não é.

II) Se H não é escolhido, Z é.

III) Se G não é escolhido, W é.

19 Duas grandezas x e y são tais que: se $x = 3$, então $y = 7$. Pode-se concluir que:

(A) se $x \neq 3$, então $y \neq 7$;

(B) se $y = 7$, então $x = 3$;

(C) se $y \neq 7$, então $x \neq 3$;

(D) se $x = 5$, então $y = 5$;

(E) nenhuma das conclusões anteriores é válida.

20 Cada um dos cartões abaixo tem de um lado um número e do outro uma letra.

A	B	2	3

Alguém afirmou que todos os cartões que têm uma vogal numa face têm um número par na outra. Para verificar se tal afirmação é verdadeira:

(A) é necessário virar todos os cartões;

(B) é suficiente virar os dois primeiros cartões;

(C) é suficiente virar os dois últimos cartões;

(D) é suficiente virar os dois cartões do meio;

(E) é suficiente virar o primeiro e o último cartão.

21 (UFRJ) João não estudou para a prova de Matemática; por conta disso não entendeu o enunciado da primeira questão. A questão era de múltipla escolha e tinha as seguintes opções:

(A) O problema tem duas soluções, ambas positivas.

(B) O problema tem duas soluções, uma positiva e outra negativa.

(C) O problema tem mais de uma solução.

(D) O problema tem pelo menos uma solução.

(E) O problema tem exatamente uma solução positiva.

João sabia que só havia uma opção correta. Ele pensou um pouco e cravou a resposta certa. Determine a escolha feita por João. Justifique sua resposta.

22 Considere que, nos seguintes enunciados, a palavra **jovem** sempre esteja relacionada à mesma pessoa.

I) "Se, para ingressar no curso de Administração que pretendia, um jovem concorreu com 749 vestibulandos para 50 vagas, então, para ingressar no programa de *trainee* da empresa que ele quer, agora que está se formando, ele está concorrendo com 14 999 candidatos para apenas 30 vagas."

II) "A relação candidato/vaga no vestibular do curso de Administração que o jovem pretendia foi igual a 15."

III) "A relação candidato/vaga no processo de *trainee* que o jovem quer é igual a 500."

Para concluir que o condicional apresentado em (I) é falso:

(A) é necessário saber que a informação em (III) é falsa;

(B) é suficiente saber que a informação em (III) é falsa;

(C) é necessário saber que a informação em (II) é falsa e a informação em (III) é verdadeira;

(D) é suficiente saber que a informação em (II) é falsa e a informação em (III) é verdadeira;

(E) é necessário obter mais informações além da veracidade ou da falsidade das informações em (II) e (III).

23 Considere a declaração abaixo:

"Uma pessoa ingressa na comunidade virtual de relacionamento TUKRO somente se é convidada."

Supondo que a declaração acima seja verdadeira, é correto afirmar que:

(A) se uma pessoa quer ingressar na TUKRO, então ela é convidada;

(B) se uma pessoa é convidada para entrar na TUKRO, então ela quer ingressar nessa comunidade;

(C) se uma pessoa é convidada para entrar na TUKRO, então ela ingressa nessa comunidade;

(D) se uma pessoa ingressar na TUKRO, então ela foi convidada;

(E) se uma pessoa não ingressar na TUKRO, então ela não foi convidada.

24 (UFF-RJ) As três filhas de seu Anselmo — Ana, Regina e Helô — vão para o colégio usando, cada uma, seu meio de transporte preferido: bicicleta, ônibus ou moto. Uma delas estuda no Colégio Santo Antônio, outra no São João e outra no São Pedro. Seu Anselmo está confuso em relação ao meio de transporte usado e ao colégio em que cada filha estuda. Lembra-se, entretanto, de alguns detalhes:

— Helô é a filha que anda de bicicleta;
— a filha que anda de ônibus não estuda no Colégio Santo Antônio;
— Ana não estuda no Colégio São João e Regina estuda no Colégio São Pedro.

Pretendendo ajudar seu Anselmo, sua mulher junta essas informações e afirma:

I) Regina vai de ônibus para o Colégio São Pedro.

II) Ana vai de moto.

III) Helô estuda no Colégio Santo Antônio.

Com relação a essas afirmativas, conclui-se:

(A) Apenas a I é verdadeira.

(B) Apenas a I e a II são verdadeiras.

(C) Apenas a II é verdadeira.

(D) Apenas a III é verdadeira.

(E) Todas são verdadeiras.

25 (UFC-CE) Três bolas A, B e C foram pintadas: uma de verde, uma de amarelo e uma de azul, não necessariamente nessa ordem. Leia atentamente as declarações a seguir.

I) B não é azul.

II) A é azul.

III) C não é amarela.

Sabendo-se que apenas uma das declarações anteriores é verdadeira, podemos afirmar corretamente que:

(A) a bola A é verde, a bola B é amarela e a bola C é azul;

(B) a bola A é verde, a bola B é azul e a bola C é amarela;

(C) a bola A é amarela, a bola B é azul e a bola C é verde;

(D) a bola A é amarela, a bola B é verde e a bola C é azul;

(E) a bola A é azul, a bola B é verde e a bola C é amarela.

26 As quatro sentenças abaixo, e somente estas, foram encontradas em um cartão:

I) Neste cartão, exatamente uma sentença é falsa.

II) Neste cartão, exatamente duas sentenças são falsas.

III) Neste cartão, exatamente três sentenças são falsas.

IV) Neste cartão, exatamente quatro sentenças são falsas.

Suponha que cada sentença neste cartão seja Verdadeira ou Falsa. Entre aquelas o número de sentenças falsas é:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

27 A negação de "Hoje é segunda-feira e amanhã não choverá" é:

(A) hoje não é segunda-feira e amanhã choverá;

(B) hoje não é segunda-feira ou amanhã choverá;

(C) hoje não é segunda-feira, então amanhã choverá;

(D) hoje não é segunda-feira nem amanhã choverá;

(E) hoje é segunda-feira ou amanhã não choverá.

28 De quantos modos distintos podem ser mostradas quatro chaves do tipo "liga-desliga", que estão alinhadas de modo que duas chaves adjacentes não estejam desligadas?

(A) 8
(B) 10
(C) 12
(D) 14
(E) 16

29 (PUC-RJ) Qual é o menor número de pessoas num grupo para garantir que pelo menos quatro pessoas do grupo nasceram no mesmo mês?

30 (UFRJ) Um saco contém 13 bolinhas amarelas, 17 cor-de-rosa e 19 roxas. Uma pessoa de olhos vendados retirará do saco *n* bolinhas de uma só vez. Qual é o menor valor de *n* de forma que se possa garantir que será retirado pelo menos um par de bolinhas de cores diferentes? Justifique.

31 Considerando-se um texto que contém 100 palavras, é válido afirmar-se que:

(A) todas as letras do alfabeto foram utilizadas;

(B) há palavras repetidas;

(C) pelo menos uma letra foi utilizada mais do que 3 vezes;

(D) uma das letras do alfabeto não foi utilizada;

(E) não há palavras repetidas.

32 (UFRJ) Considerando que em uma festa existem 15 pessoas, não podemos afirmar que:

(A) pelo menos duas nasceram no mesmo mês do ano;

(B) pelo menos três nasceram no mesmo dia da semana;

(C) se uma pessoa conhece as demais, então existem pelo menos duas com o mesmo número de conhecidos (o conhecer alguém é recíproco);

(D) se uma pessoa não conhece ninguém, então podem não existir duas pessoas com o mesmo número de conhecidos;

(E) a diferença de idade, em anos, de duas delas, é um múltiplo de 14.

33 (Unesp) Um jantar reúne 13 pessoas de uma mesma família. Das afirmações a seguir, referentes às pessoas reunidas, a única necessariamente verdadeira é:

(A) Pelo menos uma delas tem altura superior a 1,90 m.

(B) Pelo menos duas delas são do sexo feminino.

(C) Pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês.

(D) Pelo menos uma delas nasceu num dia par.

(E) Pelo menos uma delas nasceu em janeiro ou fevereiro.

34 Um teste de literatura, com cinco alternativas, das quais apenas uma é verdadeira, referindo-se à data de nascimento de um famoso escritor, apresenta as seguintes alternativas:

(A) século XIX.

(B) século XX.

(C) século XXI.

(D) depois de 1820.

(E) antes de 1850.

Qual a resposta correta?

35 O menor número de crianças que pode haver em uma família, se cada criança tem pelo menos um irmão e pelo menos uma irmã, é igual a:

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Desafios

1 Verifique se as proposições abaixo são ou não teoremas.

a) Se um número natural é múltiplo de 3, então seu quadrado é múltiplo de 3.

b) Se o quadrado de um número natural é múltiplo de 3, então ele é múltiplo de 3.

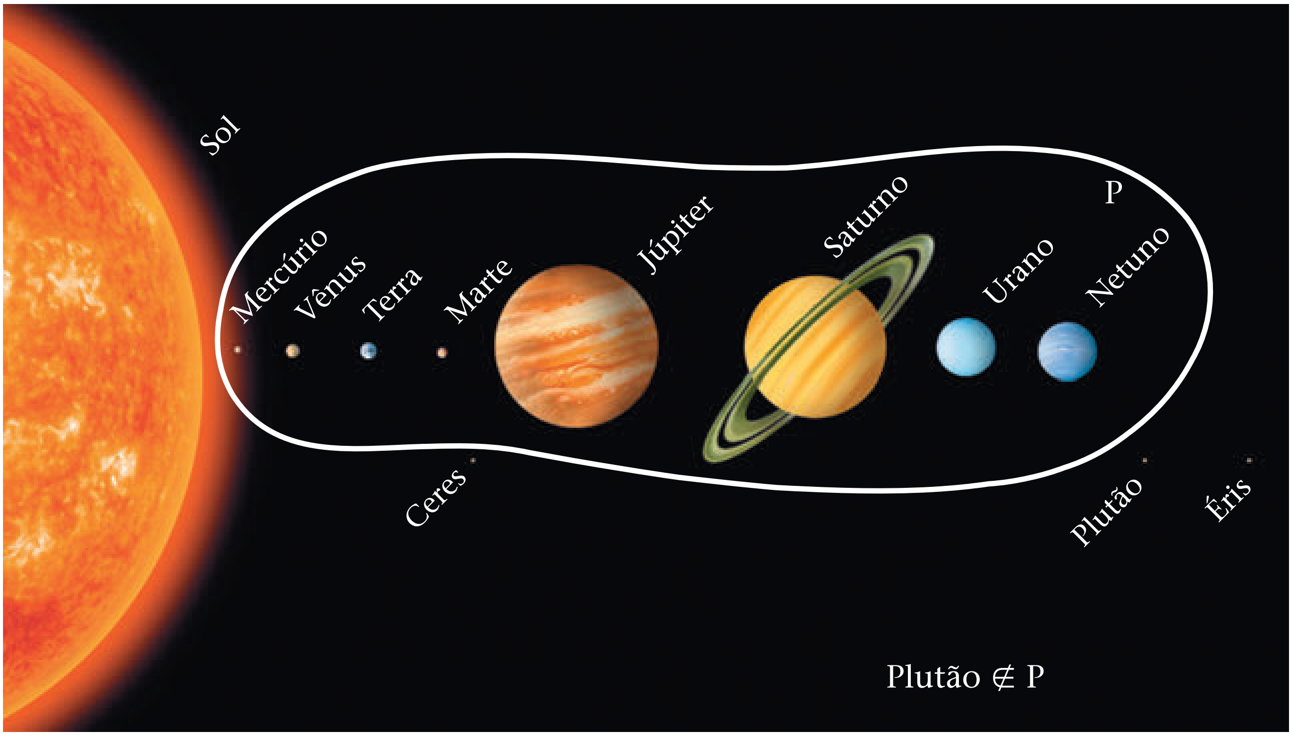
c) O cubo de um número natural que é múltiplo de 3 é múltiplo de 3.

d) Se o cubo de um número natural é múltiplo de 3, então o número é múltiplo de 3.

2 Demonstre que a soma de um número positivo ao seu inverso é sempre maior ou igual a dois.

CAPÍTULO II

CONJUNTOS



Paulo César Pereira

A noção de conjuntos e de pertencimento a conjuntos é essencial (exemplos usados com frequência são os conjuntos numéricos na Álgebra ou os conjuntos de pontos na Geometria). Por exemplo, decidir se Plutão é um planeta é o mesmo que decidir se Plutão pertence ao conjunto dos planetas. Em geral, discutir se um elemento possui ou não uma propriedade é o mesmo que discutir se ele pertence ao conjunto dos elementos que têm aquela propriedade. Na ilustração, os oito planetas do sistema solar como definidos pela União Internacional de Astronomia em 2006.

2 – CONJUNTOS

2.1 – Noções fundamentais

2.1.1 – Conceito

O conceito de conjunto é primitivo, uma noção primária não definida. Intuitivamente, conjunto é uma classe de "elementos bem definidos".

Esses "elementos bem definidos", concretos ou abstratos, são em geral agrupados segundo **critérios determinados** ou **propriedades exclusivas**, dando origem aos **conjuntos**.

Um conjunto está definido se for possível decidir, sem ambiguidade, se um dado elemento pertence ou não a ele.

Não são considerados conjuntos (no nosso contexto) as coleções em que, para decidir se um elemento é ou não membro do conjunto, tem-se que dar interpretações subjetivas.

Exemplos de conjuntos:

i) Conjunto dos alunos de uma turma.

ii) Conjunto das turmas do colégio.

iii) Conjunto dos colégios do estado do Rio de Janeiro.

iv) Conjunto dos estados do Brasil.

v) Conjunto dos países de um continente.

vi) Conjunto dos continentes da Terra.

vii) Conjunto dos planetas do Universo.

Contra exemplos, isto é, não são conjuntos no nosso contexto:

i) Conjunto dos problemas fáceis.

ii) Conjunto dos alunos inteligentes.

iii) Conjunto das flores bonitas.

iv) Conjunto das cidades próximas.

Observe que, em cada um desses enunciados, seria necessário dizer o que se entende por: fácil, inteligente, bonito e próximo, para que se pudesse decidir se um elemento faz ou não parte da coleção em questão.

Representam-se em geral os conjuntos por letras maiúsculas A, B, ..., X, Y e seus elementos pelas letras minúsculas correspondentes *a*, *b*, ..., *x*, *y*.

2.1.2 – Pertinência

É um conceito primitivo, não tem definição.

Para indicar que um elemento x pertence ao conjunto X usaremos a notação: $x \in X$, que se lê: "o elemento x pertence ao conjunto X".

A negação da propriedade de pertinência se representa por $y \notin X$, que se lê: "o elemento y não pertence ao conjunto X".

Exemplos:

i) Seja H o conjunto dos seres humanos. Seja o ser humano João e o planeta Marte. Temos João $\in$ H e Marte $\notin$ H.

ii) Seja C o conjunto dos números inteiros compreendidos entre 10 e 20. Temos então $17 \in C$ e $25 \notin C$.

2.1.3 – Apresentação de um conjunto

Podemos definir um conjunto de duas maneiras.

2.1.3.1 – Definição por extensão

Consiste em dar a lista completa dos elementos que pertencem ao conjunto. Esta forma de definir é também chamada de **listagem**, **nomeação**, **tabulação** etc.

A maneira de representar é escrevendo os nomes de todos os elementos entre duas chaves { }, separando-os por vírgulas.

Exemplos:

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ii) B = {janeiro, fevereiro, março, ...}

iii) C = {João, 3, pai de Maria, $-\pi$}

2.1.3.2 – Definição por compreensão

Consiste em indicar uma ou mais propriedades exclusivas a **todos** os elementos do conjunto.

Uma propriedade é exclusiva quando:

a) todo elemento do conjunto possui tal propriedade;

b) todo elemento que possui esta propriedade pertence ao conjunto.

Para representar um conjunto definido por compreensão, considera-se um elemento genérico x e atribui-se a esse elemento a propriedade definidora do conjunto.

$\{x \mid x \text{ tem a propriedade } p\} = \{x \mid p(x)\}$

Lê-se: "O conjunto dos elementos x tais que x tem a propriedade p".

A barra vertical "|" que separa o elemento genérico da propriedade pode ser substituída por dois pontos (":").

Exemplos:

Sendo $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, isto é, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ temos:

i) $C_1 = \{11, 12, 13, 14\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 15\}$

ii) $C_2 = \{0, 2, 4, 6, ...\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\} = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$

iii) C_3 é o conjunto das soluções da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$
$C_3 = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$

iv) C_4 é o conjunto das soluções naturais da inequação $x^2 - 12x + 20 > 0$
$C_4 = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 12x + 20 > 0\} = \{0, 1, 11, 12, 13, ...\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2 \vee x > 10\}$

Observações:

1) Em geral, cada propriedade p determina um conjunto, aquele cujos elementos tem a propriedade p. As **funções proposicionais de uma variável** representariam, então, o conjunto de elementos de um universo prefixado que satisfazem a função proposicional, isto é, a tornam uma proposição verdadeira.

$$\exists A, \forall x, \ (x \in A \Leftrightarrow p(x))$$

isto é: $A = \{x \mid p(x)\}$
Note então que um mesmo conjunto pode ser definido por propriedades diferentes. São propriedades denominadas **coletivizantes**.

Por exemplo:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par} \wedge x \geq 10\}$$

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ tem como último algarismo 0, 2, 4, 6 ou 8 e x tem mais de um algarismo$\}$
Neste caso, o conjunto A está definido de duas maneiras diferentes.

2) Muitas vezes é impossível passar da definição por compreensão para a definição por extensão. Tal fato ocorre com os conjuntos infinitos.

Por exemplo:

$$P = \{x \mid x \text{ é primo}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$$

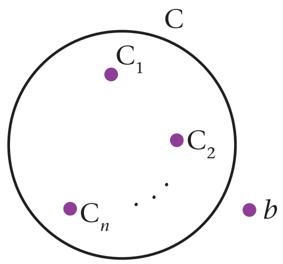
Observe que não seria possível escrever todos os números primos, embora haja meios de saber se um dado número é ou não primo, isto é, se um dado número pertence ou não a este conjunto.
No exemplo em pauta, ainda foi possível indicar alguns elementos do conjunto. Agora, no exemplo: R = {x | x é ponto da reta r}, não se poderia enumerar os elementos do conjunto.

2.1.4 – Diagramas de Euler-Venn

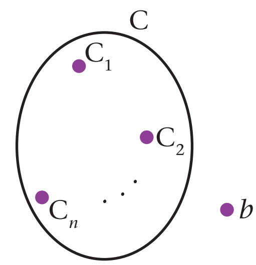
Consiste em considerar o conjunto uma **coleção de pontos internos** a um círculo ou contorno fechado (sem pontos duplos, isto é, sem que haja pontos do contorno coincidentes).

Os elementos pertencentes ao conjunto são indicados por pontos no interior do contorno e os não pertencentes ao conjunto são colocados na região exterior (não se colocam pontos sobre o contorno).

Seja o conjunto C = {C_1, C_2, ..., C_n}. Sua representação pelo diagrama de Euler-Venn será:



C_1, C_2, ..., C_n pertencem a C

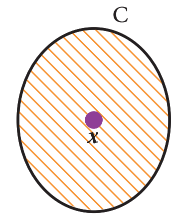


b não pertence a C

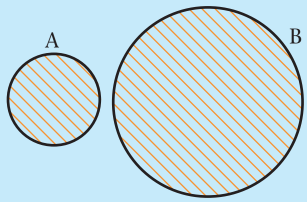
Observações:

1) Os diagramas de Euler-Venn são úteis para ilustrar e raciocinar, mas não devem ser usados para demonstrar propriedades.

2) Se o conjunto for infinito, usaremos todos os pontos do interior do contorno para representar o conjunto.
C = {x | $p(x)$}

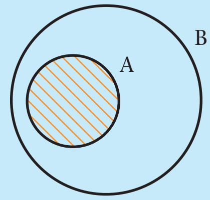


Exemplo:



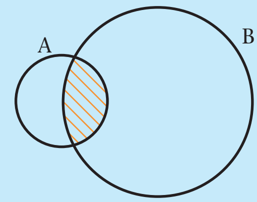
nenhum x de A é de B

$\forall x, (x \in A \Rightarrow x \notin B)$



todo x de A é de B

$\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)$



algum x de A é de B

$\exists x, (x \in A \wedge x \in B)$

2.1.5 – Conjunto vazio

Embora a ideia de conjunto traga inerente ao seu significado a noção de pluralidade, estenderemos o conceito definindo o **vazio** como o conjunto que **não possui elementos**.

Representa-se o vazio pelos símbolos { } ou $\varnothing$.

DEFINIÇÃO
Conjunto vazio.

Uma definição para o vazio é: $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$.

OBSERVAÇÕES
O conjunto vazio é definido por condições que não são satisfeitas por qualquer elemento.
É importante não confundir zero com conjunto vazio. O vazio desempenha na teoria dos conjuntos uma função *semelhante* à do zero na teoria dos números.

Exemplos:

i) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 2 < 0\} \Leftrightarrow A = \varnothing$

ii) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 2\} \Leftrightarrow B = \varnothing$

iii) $C = \{x \mid 1 < x < 1\} \Leftrightarrow C = \varnothing$

iv) $D = \{x \mid x$ é mês do ano que começa com a letra $z\} \Leftrightarrow D = \varnothing$

2.1.6 – Conjunto unitário

DEFINIÇÃO
Conjunto unitário.

É o conjunto constituído por um único elemento.

Para representar um conjunto unitário, basta colocar o seu componente entre chaves. Temos $\{a\} = \{x \mid x = a\}$, conjunto unitário cujo elemento é a.

Escrevemos então: $a \in \{a\}$

Não confunda o conjunto $\{x\}$ com o elemento x, isto é, $\{x\} \neq x$. Basta ver que "um livro" não é o mesmo que "uma estante onde há um livro". Note a diferença entre $\varnothing$ e $\{\varnothing\}$. O primeiro é o conjunto vazio e o segundo é um conjunto unitário cujo elemento é o conjunto vazio. Temos $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

2.1.7 – Conjuntos finitos e infinitos

DEFINIÇÃO
Conjunto finito.

Chama-se **conjunto finito** o conjunto cujo número de elementos é um número natural.

Exemplos:

i) O conjunto das vogais do alfabeto.

ii) O conjunto dos moradores de um prédio.

iii) O conjunto dos seres humanos.

iv) O conjunto de folhas da floresta Amazônica.

Quando o número de elementos for muito grande, procuramos definir o conjunto por meio de uma propriedade que lhes seja exclusiva.

Exemplos:

i) O conjunto dos eleitores que votaram na última eleição.

ii) O conjunto dos múltiplos de 4 compreendidos entre 10^5 e 10^{10}.

Chama-se **conjunto infinito** o conjunto que não é finito.

DEFINIÇÃO
Conjunto infinito.

Exemplos:

i) O conjunto dos números primos.

ii) O conjunto dos pontos de uma reta.

2.1.8 – Relações entre conjuntos

2.1.8.1 – Inclusão (subconjunto)

Diz-se que um conjunto A **está contido** no conjunto B ou que A é **subconjunto** de um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A é elemento de B. Usaremos a notação $A \subset B$, que se lê: "o conjunto A está contido no conjunto B" ou "A está incluído em B". Temos então:

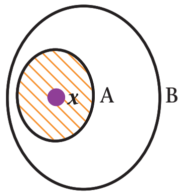
$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

DEFINIÇÃO
Inclusão.

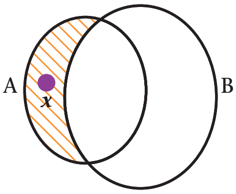
NOTA
Usa-se também o símbolo $\subseteq$ para representar a inclusão.

Analogamente usaremos a notação $B \supset A$, que se lê: o conjunto B contém o conjunto A, para representar a contenção. Dizemos então que: A é um subconjunto ou parte de B, ou B é um sobreconjunto de A. A negação da inclusão se escreve:

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x, (x \in A \wedge x \notin B)$$



$A \subset B$



$A \not\subset B$

Exemplos:

i) $\{a, b, c, d\} \subset \{a, b, c, d, e, f, g\}$

ii) $\{1\} \subset \{1, 3, 5, 7\}$

iii) Seja T o conjunto dos triângulos e P o conjunto dos polígonos planos. Temos $T \subset P$ ou $P \supset T$, porque todo triângulo é um polígono plano.

iv) $\{1, 2\} \not\subset \{1, 3, 5, 7\}$ pois $2 \notin \{1, 3, 5, 7\}$

v) Seja P o conjunto dos números pares e I o conjunto dos ímpares. Temos $P \not\subset I$, porque todos os números pares não são ímpares, logo, existem números pares que não são ímpares.

O vazio é subconjunto de qualquer conjunto, basta ver que:

$$\varnothing \not\subset A \Leftrightarrow \exists x, (x \in \varnothing \wedge x \notin A)$$

é absurda, pois o vazio não tem elementos. Como a negação da proposição em questão é falsa, resulta que a proposição $\varnothing \subset A$ é verdadeira.

NOTA

Não se escreve $A \in B$ a não ser que B seja um conjunto de conjuntos e A seja seu elemento.

Observações:

1) Convém notar a diferença entre pertinência e inclusão.

A pertinência é uma relação entre **elemento** e **conjunto**, isto é:

$$\boxed{\text{elemento} \in \text{conjunto}}$$

A inclusão é uma relação entre **conjunto** e **conjunto**, isto é:

$$\boxed{\text{conjunto} \subset \text{conjunto}}$$

2) Relação entre inclusão e implicação.
Consideremos dois conjuntos definidos por compreensão: $A = \{x \mid p(x)\}$ e $B = \{x \mid q(x)\}$.

i) $A \subset B$ significa que:
Se x é elemento de A, então x é elemento de B; logo, se x tem a propriedade p, então x tem a propriedade q, isto é: $(A \subset B) \Rightarrow (p(x) \Rightarrow q(x))$.

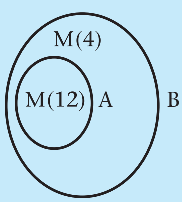
ii) $p(x) \Rightarrow q(x)$ significa que:
Se x tem a propriedade p, então x tem a propriedade q, logo, se x é elemento de A, então x é elemento de B, isto é: $(p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow (A \subset B)$.

Temos então:
$(A \subset B) \Leftrightarrow (p(x) \Rightarrow q(x))$

Exemplos:

i) $A = \{x \mid x \text{ é triângulo equilátero}\}$
$B = \{y \mid y \text{ é triângulo isósceles}\}$
$A \subset B$ porque todo triângulo equilátero é isósceles
$(A \subset B) \Rightarrow (x \text{ é triângulo equilátero} \Rightarrow x \text{ é isósceles})$

ii) Seja A o conjunto dos múltiplos de 12 e B o conjunto dos múltiplos de 4.
Temos:
$A = \{x \mid x = 12n,\ n \text{ inteiro}\}$
$B = \{y \mid y = 4m,\ m \text{ inteiro}\}$
Como $12n = 4 \cdot (3n) = 4m'$ (m' inteiro), concluímos:
$A \subset B \Leftrightarrow (x \text{ é múltiplo de } 12 \Rightarrow x \text{ é múltiplo de } 4)$



3) Para provar a negação da inclusão $A \subset B$, utiliza-se o método do contra exemplo, isto é, exibe-se um elemento do conjunto A que não seja de B.

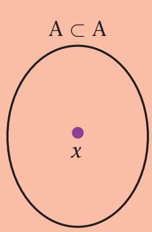
Exemplos:

i) $A = \{x \mid x \text{ é múltiplo de } 5\}$
$B = \{y \mid y \text{ é múltiplo de } 10\}$
$A \not\subset B$ porque $x = 15$ é múltiplo de 5 e não é de 10

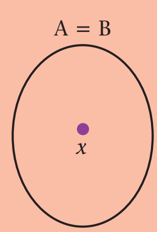
ii) A e B são conjuntos de figuras geométricas planas tais que:
$A = \{x \mid x \text{ é equilátero}\}$
$B = \{y \mid y \text{ é equiângulo}\}$
$A \not\subset B$ porque o losango é equilátero e não é, obrigatoriamente, equiângulo

Propriedades da inclusão

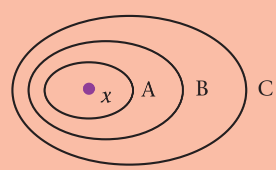
1) A inclusão é reflexiva, isto é:
$A \subset A$



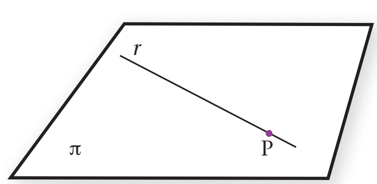
2) A inclusão é antissimétrica, isto é:
$(A \subset B \wedge B \subset A) \Leftrightarrow (A = B)$



3) A inclusão é transitiva, isto é:
$A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$



Um exemplo que ilustra esta propriedade é o seguinte:



Se o ponto P pertence à reta r e a reta r está contida no plano π, então o ponto P pertence ao plano. Se por outro lado o plano está contido no espaço, então o ponto P pertence ao espaço e a reta r está contida no espaço.

2.1.8.2 – Igualdade

DEFINIÇÃO
Conjuntos iguais.

Dois conjuntos A e B são iguais se, e somente se, têm os **mesmos elementos**. Temos:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Exemplos:

i) $\{a, b, c\} = \{b, c, a\} = \{c, c, a, a, b, b\}$

ii) $A = \{a, b, c\}$ $B = \{a, b, d\}$
$A \neq B$ porque $c \notin B$ ou $d \notin A$

iii) $\{a\} \neq \{\{a\}\}$ porque $a \neq \{a\}$

Observações:

1) A definição de igualdade nos diz apenas que dois conjuntos constituídos dos mesmos elementos são iguais, independentemente da ordem dos seus elementos ou da repetição de alguns deles.
Assim, o conjunto das letras da palavra arara é $\{a, r\} = \{r, a\}$.
Temos também: $\{a, a, a, r, r\} = \{a, r\}$

2) Quando se desejar demonstrar a igualdade, será necessário demonstrar a conjunção de inclusões:
$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

3) Relação entre igualdade e equivalência.
Consideremos dois conjuntos definidos por compreensão, digamos
$A = \{x \mid p(x)\}$ e $B = \{x \mid q(x)\}$.
Como vimos na implicação, temos: $A \subset B \Leftrightarrow (p(x) \Rightarrow q(x))$
Por outro lado, devemos ter: $B \subset A \Leftrightarrow (q(x) \Rightarrow p(x))$
Logo: $A = B \Leftrightarrow (p(x) \Leftrightarrow q(x))$, isto é, dois conjuntos são iguais se as propriedades definidoras dos conjuntos forem proposições equivalentes.

Exemplos:

i) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ é ímpar$\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ dividido por 2 dá resto 1$\}$
É fácil notar que $p(x)$: x é ímpar e $q(x)$: x dividido por 2 dá resto 1 são proposições equivalentes, $p(x) \Leftrightarrow q(x)$. Então A = B.

ii) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 100...0$ tem n zeros, $n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 10^n, n \in \mathbb{N}\}$
Temos A = B porque todo número constituído da unidade acompanhada de n zeros é a potência de 10 cujo expoente é o número de zeros.

DEFINIÇÃO
Subconjunto próprio.

Diz-se que A é um **subconjunto próprio** de B quando se tem $A \subset B$ com $A \neq \varnothing$ e $A \neq B$.

2.1.9 – Conjunto de conjuntos

A igualdade de conjuntos nos leva a concluir que conjuntos podem ser tratados como elementos e daí surge a noção de conjunto de conjuntos.

Em geral, quando um conjunto é constituído de conjuntos, utiliza-se a nomenclatura "família de conjuntos" ou "coleção de conjuntos".

Exemplos:

i) $A = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$ é família de conjuntos

ii) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ não é família de conjuntos

Observe que o conjunto A é a família dos conjuntos $\{1\}$, $\{2, 3\}$ e $\{4, 5, 6\}$, enquanto B é o conjunto cujos elementos são 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Tem-se $A \neq B$.

Observe que: $\{1\} \in A$, $\{1\} \subset B$ e $\{\{1\}\} \subset A$

$\{2, 3\} \notin B$ e $\{2, 3\} \not\subset A$

$\{2, 3\} \in A$ e $\{2, 3\} \subset B$

2.1.9.1 – Conjunto potência ou conjunto das partes de um conjunto

Chama-se **conjunto das partes de um conjunto** A o conjunto cujos elementos são **todos os subconjuntos de A**. É uma família de conjuntos que representaremos por P(A).

DEFINIÇÃO
Conjunto das partes de um conjunto.

$P(A) = \{X \mid X \subset A\}$

Para se obter os elementos do conjunto das partes de um conjunto dado, começamos com o subconjunto vazio, em seguida determinamos todos os subconjuntos unitários, todos os pares de elementos, ternos etc. até o subconjunto pleno de A, que é o próprio conjunto A.

Temos então: $X \subset A \Leftrightarrow X \in P(A)$

$x \in A \Leftrightarrow \{x\} \in P(A)$

$x, y \in A \Leftrightarrow \{x, y\} \in P(A)$

e, além disso, $\varnothing \in P(A)$, assim como $A \in P(A)$.

Exemplos:

i) Seja $A = \{a, b, c\}$.
$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

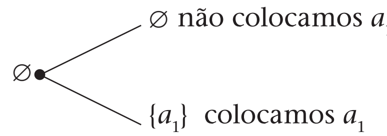
ii) Determinar $P(P(P(\varnothing)))$.
Seja $A = \varnothing \Rightarrow P(A) = \{\varnothing, A\} = \{\varnothing, \varnothing\} = \{\varnothing\} = P(\varnothing)$.
Seja $B = \{\varnothing\} \Rightarrow P(B) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = P(P(\varnothing))$.
Seja $C = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \Rightarrow P(C) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = P(P(P(\varnothing)))$.

2.1.9.2 – Teorema

Se o conjunto A é finito com n elementos, então **P(A) terá 2^n elementos**.

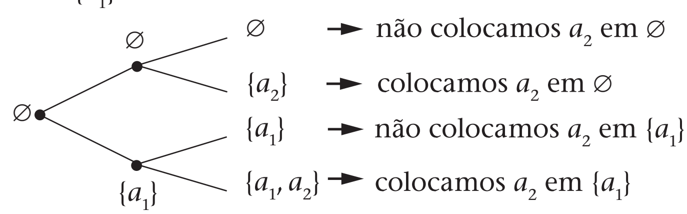
Representando o número de elementos ou cardinal do conjunto finito A por $n(A)$, temos $n(A) = n \Leftrightarrow n(P(A)) = 2^n$. Antes de demonstrar, mostremos um processo sistemático (**diagrama em árvore**) de obter-se os elementos do conjunto das partes de um conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Partamos do vazio e consideremos o elemento $a_1 \in A$.

Se colocarmos o elemento a_1 no vazio, ficamos com o unitário $\{a_1\}$, e se não colocarmos, continuamos com o vazio.

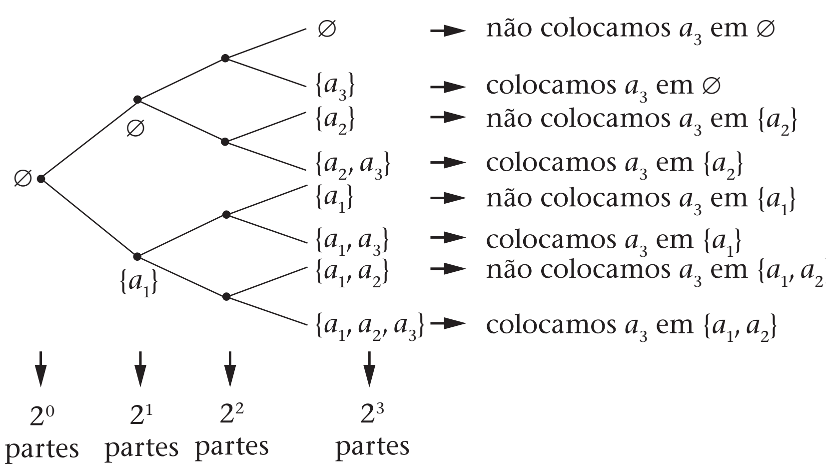


Seja agora o elemento a_2. Façamos o mesmo raciocínio com os conjuntos encontrados, ou seja, ∅ e $\{a_1\}$.

1) Se colocarmos a_2 no vazio, ficamos com o unitário $\{a_2\}$, e se não colocarmos, continuamos com o vazio.
2) Se colocarmos a_2 em $\{a_1\}$, ficamos com o par $\{a_1, a_2\}$, e se não colocarmos, continuamos com $\{a_1\}$. Temos então:



Consideremos agora o elemento a_3. Procedendo analogamente teremos:



Provemos agora, por indução, que o número de elementos de P(A) é 2^n.

Se A tem 0 elementos, isto é, A = ∅, então P(∅) = {∅} terá 1 elemento, ou seja, $2^0 = 1$ elemento. A propriedade é verdadeira para $n = 0$.

$$n(P(\varnothing)) = 1$$

Provemos agora que a propriedade se transmite de n a $n + 1$, isto é:

Se $P(A_n)$ tem 2^n elementos quando $A_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, então $P(A_{n+1})$ terá 2^{n+1} elementos quando $A_{n+1} = \{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}\}$.

Com efeito, suponhamos feita a árvore das partes até o conjunto A = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Consideremos o elemento a_{n+1}. Este elemento pode ser colocado em cada um dos 2^n subconjuntos de A_n dando origem a 2^n subconjuntos de A_{n+1} (os que possuem a_{n+1}). Por outro lado, se este elemento não for colocado naqueles subconjuntos, teríamos ainda 2^n subconjuntos de A_{n+1} (os que não possuem o elemento em questão). Temos então:

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_p\} \bullet \begin{cases} \{a_1, a_2, \ldots, a_p\} & \text{não colocamos } a_{n+1} \\ \{a_1, a_2, \ldots, a_p, a_{n+1}\} & \text{colocamos } a_{n+1} \end{cases}$$

Cada subconjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ de A_n dá origem a 2 novos subconjuntos, agora de A_{n+1}. Como, por hipótese, o número de partes de A_n é 2^n, o número de partes de A_{n+1} será: $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, o que completa a indução.

$$n(P(A_n)) = 2^n \Rightarrow n(P(A_{n+1})) = 2^{n+1}$$

Exercícios resolvidos:

1) Quantos elementos tem o conjunto potência do conjunto A = $\{a, e, i, o, u\}$?
Solução: Como $n(A) = 5$, então o conjunto potência P(A) terá $2^5 = 32$ elementos, ou seja, $n(P(A)) = 32$.

2) Se o conjunto das partes de certo conjunto A tem 1 024 elementos, quantos elementos terá o conjunto?
Solução: Devemos ter $2^n = 1\,024 = 2^{10}$, logo $n = 10$, ou seja, $n(A) = 10$.

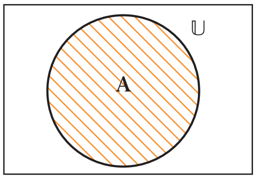
3) Se $n(A) = n$, quanto vale $n(P(P(A)))$?
Solução: Como $n(P(A)) = 2^n$, então $n((P(P(A))) = 2^{2^n}$.

2.1.10 – Universo ou conjunto de referência

Se todos os conjuntos considerados em certo estudo são subconjuntos de um determinado conjunto, este conjunto se denomina **conjunto universo** e representa-se pela letra $\mathbb{U}$.

DEFINIÇÃO
Conjunto universo.

O diagrama de Euler-Venn relativo ao universo de estudo é um retângulo. Todo conjunto desse estudo será um contorno no interior deste retângulo.



Exemplos:

i) No caso da geometria, o universo é o conjunto dos pontos do espaço.

ii) No caso da astronomia, o universo é o conjunto dos astros.

iii) No caso dos seres humanos, o universo é a humanidade.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Dado o conjunto $A = \{+, -, \times, \div\}$, determine o conjunto P(A).

2 Sendo A $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, quais as proposições verdadeiras?

(A) $\varnothing \in A$

(B) $\varnothing \subset A$

(C) $\{\varnothing\} \subset A$

(D) $\{\varnothing\} \in A$

(E) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \subset A$

3 Seja: $A = \{0, 1\}$. Classifique em V ou F as afirmativas a seguir:

a) $0 \in A$

b) $\varnothing \in A$

c) $\{0\} \subset A$

d) $\{0\} \not\subset P(A)$

e) $\{\varnothing\} \in P(A)$

f) $\{\varnothing\} \notin P(A)$

g) $\{\varnothing\} \subset P(A)$

h) $\{0, 1\} \in P(A)$

4 O número de conjuntos distintos X que satisfazem $\{0, 1, 2\} \subseteq X \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ é:

(A) 7

(B) $2^7 - 2^3$

(C) 7^2

(D) $2^7 + 2^3$

(E) 2^7

5 Dado o conjunto $F = \{x \mid x$ é letra da palavra Miguel$\}$, o número de subconjuntos não vazios de F é:

(A) 32

(B) 64

(C) 63

(D) 31

6 Quantos pagamentos podem ser efetuados, utilizando-se no máximo uma de cada das cédulas do sistema monetário brasileiro (as células são de R\$1,00, R\$2,00, R\$5,00, R\$10,00, R\$20,00, R\$50,00 e R\$100,00)?

7 Quantos aperitivos diferentes podem ser obtidos misturando-se em partes iguais, de todos os modos possíveis, dez bebidas de um bar?

8 Um conjunto x possui 4 095 subconjuntos não vazios. Quantos são seus elementos?

9 Seja A o conjunto de todos os cariocas e B o conjunto de todas as pessoas inteligentes. Admitindo que seja verdadeira a frase: "Todo carioca é inteligente.", como se representam num diagrama os conjuntos A e B?

2.2 – Conjuntos numéricos

2.2.1 – Números naturais

O conjunto dos **números naturais** é o conjunto:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

DEFINIÇÃO
Números naturais.

Quando quisermos nos referir ao conjunto dos números naturais sem o zero, usaremos a notação:

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ lê-se "$\mathbb{N}$ asterisco" ou "$\mathbb{N}$ estrela"

2.2.2 – Números inteiros

O problema de resolver a equação $x + a = b$ no conjunto dos números naturais leva a dificuldades que só são superadas com a criação dos **números negativos**.

O conjunto que se obtém prolongando-se o conjunto dos números naturais, com os novos números (números negativos), é conjunto dos **números inteiros** que indicaremos por:

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

DEFINIÇÃO
Números inteiros.

Os inteiros negativos são:

$$\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, -3, ...\}$$

Observe que se x é negativo, $-x$ será positivo.

Chamaremos $\mathbb{Z}_+$ ao conjunto:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\} = \mathbb{N}, \text{ logo } \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Quando quisermos retirar o zero, usaremos a notação:

$\mathbb{Z}^* = \{\pm1, \pm2, \pm3, ...\}$ lê-se: "$\mathbb{Z}$ asterisco" ou "$\mathbb{Z}$ estrela"

Os inteiros positivos serão então:

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}^*$$

Existem dois subconjuntos importantes dos inteiros, a saber:

$\text{P} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é par}\} = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\} = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$

$\text{I} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é ímpar}\} = \{..., -3, -1, 1, 3, 5, ...\} = \{x \mid x = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$

Exercícios resolvidos:

1) Mostrar que o quadrado de um número par é um número par.
Solução: Basta ver que: $x = 2n,\ n \in \mathbb{Z}$. Logo, $x^2 = 4n^2 = 2 \cdot (2n^2) = 2n'$, onde $n' = 2n^2$.

2) Mostrar que o quadrado de um número ímpar é um número ímpar.
Solução: Temos: $x = 2n + 1,\ n \in \mathbb{Z}$. Então:
$x^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1 = 2n' + 1$, onde $n' = 2n^2 + 2n$.

2.2.3 – Números racionais

O problema de resolver a equação $ax + b = 0$ no conjunto dos inteiros leva a dificuldades que só são superadas com a criação dos números fracionários, que, com os inteiros, formam os racionais.

DEFINIÇÃO
Números racionais.

O conjunto dos **números racionais** é o conjunto dos números que se escrevem da forma $\frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$, isto é, p e q são inteiros com $q \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

A condição $q \neq 0$ é fundamental. Não se definem frações do tipo $\frac{p}{0}$.

(Se $\frac{p}{0} = a \Rightarrow p = 0 \cdot a$ que, para $p \neq 0$, dará a contradição $p = 0 \wedge p \neq 0$.)

Observe que se $q = 1$, teríamos $\frac{p}{q} = \frac{p}{1} = p \in \mathbb{Z}$. Os inteiros seriam os racionais no caso de $q = 1$. Então $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2.2.3.1 – Representação decimal

Se a representação decimal de um número é **finita ou periódica**, este número é racional.

1) Se é finita, nada há a demonstrar, pois bastará escrever a fração decimal na forma $\frac{p}{q}$.

Exemplos:

i) $3{,}5 = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$

ii) $2{,}721 = \frac{2\,721}{1\,000}$

2) Se é infinita periódica, isto é, uma **dízima**, teremos:

$$x = 0{,}a_1 a_2 \ldots a_p a_1 a_2 \ldots a_p \ldots$$
$$10^p x = a_1 a_2 \ldots a_p, a_1 a_2 \ldots a_p \ldots$$

Tomando a diferença $10^p x - x$ temos:

$$x(10^p - 1) = a_1 a_2 \ldots a_p$$
$$x = \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_p}{10^p - 1}$$

Exemplos:

i) $x = 3{,}000... = 3 = \dfrac{3}{1}$

ii) $x = 2{,}999...$ então $10x = 29{,}999...$

Subtraindo: $10x - x = 27 \Rightarrow 9x = 27 \Rightarrow x = \dfrac{3}{1} = 3$

Observe que: $2{,}999... = 3{,}000... = 3$

iii) $x = 1{,}2545454...$
Multipliquemos por 10^2 (porque há 2 algarismos no período 54).
Temos: $100x = 125{,}45454...$ Subtraindo o valor de $x = 1{,}25454...$, vem:

$$99x = 124{,}20000 \Rightarrow x = \frac{124{,}2}{99} = \frac{1\,242}{990} = \frac{69}{55} \quad [...]$$

Observe que o procedimento será sempre o mesmo. Multiplicar por uma potência de 10 (o expoente é o número de algarismos por período) e subtrair.

iv) Dar a representação decimal de $\dfrac{5}{8}$.

Basta dividir e teremos: $\dfrac{5}{8} = 0{,}625$ que é um decimal exato.

v) Dar a representação decimal de $\dfrac{65}{35}$.

Dividindo vem: $\dfrac{65}{35} = 1{,}323232...$

Observe que os números racionais são **inteiros**, **decimais exatos** ou **dízimas periódicas**.

2.2.4 – Números irracionais

Como vimos, os números racionais tem sua representação decimal finita ou infinita periódica. Veremos também que o número $\sqrt{2}$ não é racional. Os números que não se escrevem da forma $\dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$ são chamados **números irracionais**. Tais números têm sua representação decimal **infinita** e **não-periódica**.

Por exemplo 0,12345678910111121314... tem sua representação decimal infinita e não periódica, não se escreve portanto na forma $\dfrac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$.

Outro exemplo seria o número 0,1011001110001111... em que depois de cada grupo de zeros escrevem-se grupos de algarismos 1 sempre colocando mais um algarismo em cada grupo, para garantir a não periodicidade. Tais números são irracionais. O número $\pi = 3{,}14159265358979323846264338832...$ também é irracional.

NOTA
Representaremos o conjuto dos números irracionais por $\mathbb{Q}'$.

Uma forma mais rigorosa de definir irracional é por meio de **aproximações sucessivas**.

Retornemos ao número $\sqrt{2}$, que seria a solução positiva da equação $x^2 = 2$. Se extrairmos a raiz quadrada de 2, verificamos que podemos prolongar o cálculo indefinidamente.

Encontraríamos: $\sqrt{2} = 1{,}4142...$

É claro que $1 < \sqrt{2} < 2$.

Por outro lado, temos:

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$

$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$

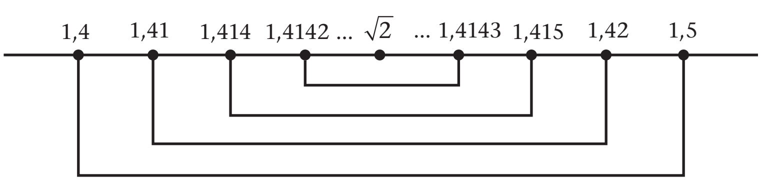
$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$$

$$\vdots$$

Observe que o conjunto de valores 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ... é de números menores que $\sqrt{2}$. Note também que o conjunto 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; ... é de números maiores que $\sqrt{2}$. Se prolongássemos o cálculo de $\sqrt{2}$ indefinidamente, encontraríamos dois conjuntos (sequências): um de valores sempre menores (porém crescentes) e outro de valores sempre maiores (porém decrescentes).

Estas duas sequências definiriam o número irracional $\sqrt{2}$. O número irracional seria, pois, o ponto de separação dessas duas sequências.

O número $\sqrt{2}$ é então o único elemento pertencente a todos os intervalos encaixantes [1,4; 1,5], [1,41; 1,42], [1,414; 1,415], ...



Observação:

Em geral, para provar que um número é irracional faz-se a redução ao absurdo: supõe-se que o número $\frac{p}{q}$ seja racional e chega-se a uma contradição.

Exemplos:

i) Admitindo que existe um número x tal que $2^x = 3$, provar que x é irracional.

Admitamos que $x = \frac{p}{q}$ seja racional.

Temos: $2^{\frac{p}{q}} = 3 \Rightarrow 2^p = 3^q$ (elevando ao expoente q).

Observando esta última igualdade temos:

$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{p \text{ fatores}} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{q \text{ fatores}}$ evidentemente absurda pois o 1º membro é um número par e o 2º membro é um número ímpar. Observe que $\frac{p}{q}$ não poderia ser negativo, pois se fosse, teríamos num dos membros um inteiro e no outro uma fração, logo $x \neq \frac{p}{q}$ e portanto irracional.

ii) Demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$:

Admitamos que $\sqrt{2}$ fosse racional, isto é, uma fração irredutível da forma $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros. Teríamos:

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

Como q é inteiro, q^2 é inteiro e $2q^2 = p^2$ é par, logo p^2 é par.
Como p^2 é par, então p é par (porque se p fosse ímpar, p^2 seria ímpar).
Se p é par, então $p = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, então $(2n)^2 = 2q^2$, logo $q^2 = 2n^2$. Como n é inteiro e $2n^2$ é par, logo q^2 é par e q é também par.

Estamos diante de uma contradição, pois $\frac{p}{q}$ é, por hipótese, irredutível e, ao mesmo tempo, p e q são pares, o que é absurdo.

Assim, somos forçados a concluir que $\sqrt{2}$ é irracional.

Exercícios resolvidos:

1) Mostrar que o número $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3} - 1)$ é racional.

<u>Solução</u>: Chamemos de x e elevemos ao quadrado:

$$x = \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right) \Rightarrow x^2 = 2\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)^2$$

$$x^2 = 2(2+\sqrt{3})(3-2\sqrt{3}+1) = 2(2+\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})$$

$$x^2 = 4(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4(4-3) = 4$$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ pois $x > 0$

2) Mostrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.

Solução: Seja $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$.

Elevando ao quadrado: $x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 = 3$

Temos então: $2x\sqrt{2} = x^2 - 1 \Rightarrow \sqrt{2} = \dfrac{x^2 - 1}{2x}$

Imaginemos que $x \in \mathbb{Q}$. Temos uma contradição, pois o 1º membro da igualdade é irracional e o 2º membro, racional. Logo, $x \notin \mathbb{Q}$, isto é, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.

3) Sejam a, b, c, d tais que $a \in \mathbb{Q}$, $c \in \mathbb{Q}_+$ (b e d não são quadrados perfeitos em $\mathbb{Q}_+$). Provar que $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d} \Rightarrow a = c$ e $b = d$.

Solução: Temos: $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d} \Rightarrow (a - c) + \sqrt{b} = \sqrt{d}$

Elevando ao quadrado: $(a - c)^2 + 2(a - c)\sqrt{b} + b = d$

Temos então: $(a - c)^2 + (b - d) + 2(a - c)\sqrt{b} = 0$

Como $\sqrt{b}$ é irracional, temos: (ver redução ao absurdo)

$$\begin{cases} (a - c)^2 + (b - d) = 0 & \text{(I)} \\ 2(a - c) = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II) tiramos $a = c$.
Em (I) vem $b = d$.

4) Transformar o radical $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ numa diferença de dois radicais simples $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ (com $a > b$).

Solução: Temos: $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$. Elevando ao quadrado:

$7 - 4\sqrt{3} = a + b - 2\sqrt{ab} \Rightarrow 7 - \sqrt{48} = a + b - \sqrt{4ab}$, logo:

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ 4ab = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ ab = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \quad \text{pois } a > b$$

Temos então: $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$

2.2.5 – Números reais

Consideremos o conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ e prolonguemos com o conjunto dos irracionais $\mathbb{Q}'$. Forma-se então o conjunto dos números reais, que representaremos por $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \vee x \in \mathbb{Q}'\}$

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

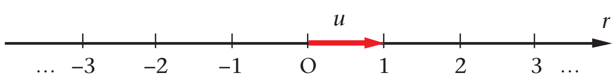
O conjunto dos reais possui então todos os racionais e irracionais ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$).

2.2.5.1 – Representação geométrica dos reais

Consideremos uma reta *r* e um ponto O sobre *r*, que chamaremos de **origem**.

Vamos escolher um **sentido**, por exemplo o da seta que chamaremos de positivo, e um segmento *u* que chamaremos de segmento unitário ou **unidade de medida**. À reta assim, definida, com sentido e unidade, chamaremos de **eixo**.

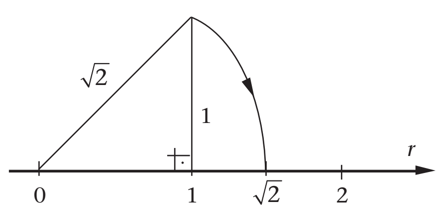
Vamos agora associar a cada ponto do eixo *r* um número real. Se marcarmos a unidade para a direita, obteremos as imagens dos números naturais 1, 2, 3, ... e se marcarmos a unidade para a esquerda, obteremos as imagens dos números inteiros negativos –1, –2, –3, ... As imagens dos números reais serão, então, os pontos do eixo *r*.



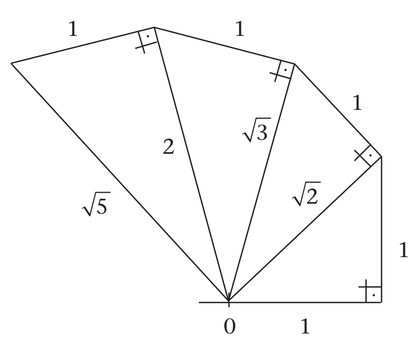
Com efeito, o problema da divisão de segmento em partes iguais nos permite associar um ponto ao número $\frac{1}{q}$ bastando para isso dividir a unidade em *q* partes iguais.

Tomando-se *p* dessas partes obtemos $p \cdot \frac{1}{q}$, ou seja, o número racional $\frac{p}{q}$. A existência de irracionais entre dois racionais, por mais próximos que sejam, nos permite garantir que a cada número real se possa associar um ponto da reta *r* e, reciprocamente, a cada ponto da reta associar um número real.

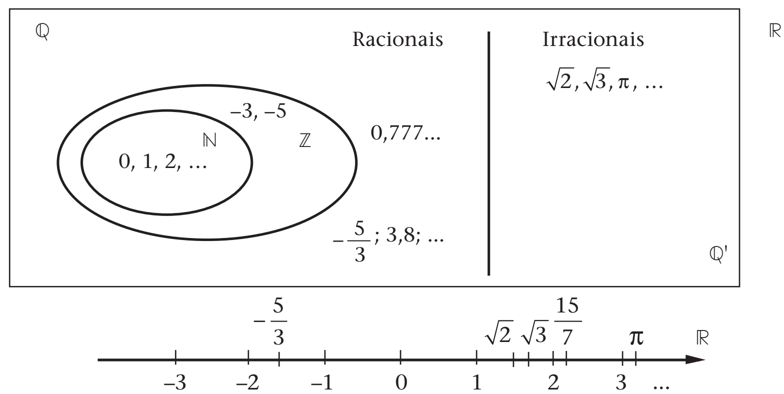
O irracional $\sqrt{2}$, por exemplo, poderia ser obtido com a construção do triângulo retângulo de catetos unitários. Constatamos, assim, a existência de um ponto da reta correspondente a ele.



A simples observação da figura seguinte mostra como obter segmentos cujos comprimentos são $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ etc., com a aplicação sucessiva do **teorema de Pitágoras**.



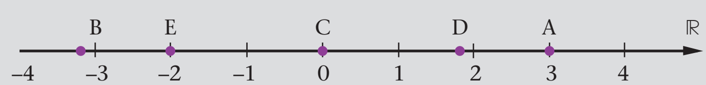
O ponto da reta correspondente a um número real chama-se **imagem** do número e, reciprocamente, o número real correspondente ao ponto da reta chama-se **abscissa** do ponto. Usaremos indistintamente a palavra "ponto" para indicar número ou ponto. Usaremos também a expressão "reta" real para indicar o conjunto de todos os reais.



Exercícios resolvidos:

1) Marcar no eixo real os pontos cujas abscissas estão indicadas.

A = (3) B = (–π) C = (0) D = ($\sqrt{3}$) E = (–2)



2) Qual o comprimento do segmento AE?

AE = AC + CE = 3 + 2 = 5

2.2.5.2 – Ordem nos reais

Chamaremos $\mathbb{R}_+^*$ o conjunto dos números reais estritamente positivos, sem o zero.

Exercícios resolvidos:

1) Sejam a, b, c e d números positivos tais que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Provar que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Solução: Tome $\frac{a}{b} = k$. Temos $\frac{c}{d} > k \Rightarrow c > kd$ $(d > 0)$.

Temos então: $a + c > a + kd$. Mas $a = kb$, logo:

$$a + c > kb + kd \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} > k = \frac{a}{b}$$

Por outro lado, seja $\frac{c}{d} = k'$. Temos $\frac{a}{b} < k' \Rightarrow a < k'b$.

Temos então: $a + c < k'b + c$. Mas $c = k'd$, logo:

$a + c < k'b + k'd \Rightarrow \dfrac{a+c}{b+d} < k' = \dfrac{c}{d}$

Finalmente: $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$

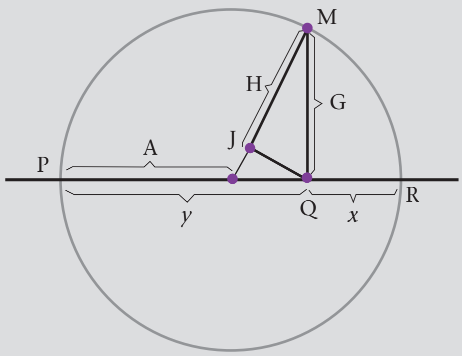
2) Sejam x e y dois números positivos e $x \leq y$. Consideremos:

$A = \dfrac{x+y}{2}$, $G = \sqrt{xy}$ e $H = \dfrac{2xy}{x+y}$ as médias aritmética, geométrica e harmônica, respectivamente, dos números x e y. Mostre que

$x \leq H \leq G \leq A \leq y$.

Solução:

i) Como $x \leq y$, temos $\dfrac{2xy}{x+y} \geq \dfrac{2xy}{y+y} = x$, então $H \geq x$.



ii) Sabemos que $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, então $x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0$. Logo,

$x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow \dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, ou seja, $G \leq A$.

iii) Desta última desigualdade vem:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \frac{xy}{\sqrt{xy}} \Rightarrow \frac{x+y}{2xy} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

Invertendo vem: $\dfrac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy}$, ou seja, $G \geq H$.

iv) Provemos que $A \leq y$.

Temos que: $\dfrac{x+y}{2} \leq \dfrac{y+y}{2} = y$, pois $x \leq y$. Logo, $A \leq y$.

Finalmente: $x \leq H \leq G \leq A \leq y$

DEFINIÇÃO
$x > y$

Dados dois números reais x e y, dizemos que x é maior que y (indicado por $x > y$) quando a diferença $x - y$ é um número positivo, isto é:

$$x > y \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{R}_+^*$$

Analogamente, dizemos que x é menor que y e indicamos por $x < y$ quando $x - y$ é um número negativo. Neste caso, temos $-(x - y) \in \mathbb{R}_+^*$, logo $(y - x) \in \mathbb{R}_+^*$. Então $x < y$ quando $y > x$.

Exemplos:

i) $5 > 3$ porque $5 - 3 = 2 \in \mathbb{R}_+^*$

ii) $-3 > -5$ porque $-3 -(-5) = 2 \in \mathbb{R}_+^*$

iii) $2 < 5$ porque $2 - 5 = -3 \notin \mathbb{R}_+^*$, ou seja, $5 - 2 = 3 \in \mathbb{R}_+^*$

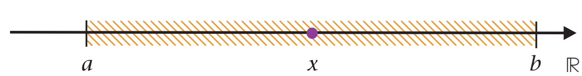
iv) $3 > 0$ porque $3 - 0 = 3 \in \mathbb{R}_+^*$

v) $-2 < 0$ porque $-2 - 0 = -2 \notin \mathbb{R}_+^*$

2.2.5.3 – Subconjuntos dos reais – intervalos

Consideremos o universo real $\mathbb{R}$ e dois reais a e b tais que $a < b$.

Chamamos de **intervalo real** a totalidade de números reais x, compreendidos entre a e b.



Ao elemento abstrato x que representa qualquer elemento ou ponto do intervalo, chamamos de **variável do intervalo**.

Quanto à pertinência dos **extremos *a*** e ***b*** ao intervalo, isto é, à possibilidade da variável x ser igual a ou b, classificam-se os intervalos em aberto, fechado e semiaberto.

Intervalo aberto

NOTA
$(a, a) = \varnothing$

Os extremos a e b não pertencem ao intervalo que será representado por (a, b) ou $]a, b[$. Temos: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. Esquematicamente:

É constituído pelos números superiores a a e inferiores a b.

Intervalo fechado

Os extremos a e b pertencem ao intervalo que será representado por $[a, b]$. Temos: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ ou esquematicamente:

NOTA
$[a, a] = \{a\}$

É constituído pelos números não inferiores a a e não superiores a b.

Intervalo aberto à direita e fechado à esquerda

É aquele em que somente o menor extremo pertence ao intervalo que será representado por $[a, b)$ ou $[a, b[$. Temos:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

ou esquematicamente:

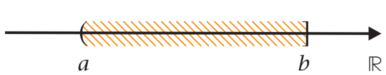
É constituído pelos números não inferiores a a e inferiores a b.

Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita

É aquele em que somente o maior extremo pertence ao intervalo que será representado por $(a, b]$ ou $]a, b]$. Temos:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

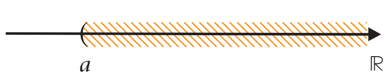
ou esquematicamente:



Extensão da noção de intervalo

Usaremos a expressão **intervalos infinitos** para indicar os seguintes intervalos:

a) $(a, +\infty) =]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ que graficamente seria:

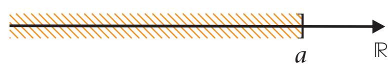


b) $(-\infty, a) =]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ que graficamente seria:

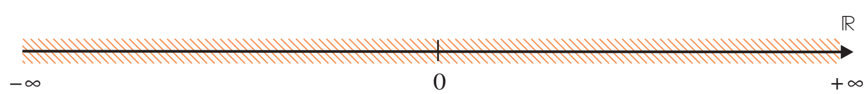
c) $[a, +\infty) = [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ que se representa:

OBSERVAÇÃO
A notação ∞ é usada como símbolo do infinito. +∞ e –∞ não são números reais. Portanto, não podem pertencer a um intervalo. Assim, em +∞ e –∞ os intervalos devem ser abertos. Usam-se as notações –∞ e +∞ para representar as "extremidades" da reta real.

d) $(-\infty, a] =]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ que se representa:



O intervalo $(-\infty, +\infty)$ será então constituído pela totalidade dos números reais:

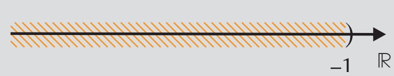


Exercícios resolvidos:

Escrever os conjuntos abaixo, utilizando as notações de intervalos.

1) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 4 > 4x + 5\}$

<u>Solução:</u> $3x + 4 > 4x + 5 \Leftrightarrow -x > 1 \Leftrightarrow x < -1$



$S = (-\infty, -1)$

2) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 < 3 \ \vee \ 2x + 3 \leq 3x + 1\}$

<u>Solução:</u> $2x + 1 < 3 \Leftrightarrow x < 1$

$2x + 3 \leq 3x + 1 \Leftrightarrow x \geq 2$

Como estas condições devem ser independentes (basta ver a disjunção ou $\vee$), temos:

A solução será o conjunto $S = \{x \mid x \in (-\infty, 1) \vee x \in [2, +\infty[\}$.

3) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 \leq 3x + 5 \wedge 2x + 1 \geq 4x - 7\}$

Solução: $2x - 1 \leq 3x + 5 \Leftrightarrow x \geq -6$

$2x + 1 \geq 4x - 7 \Leftrightarrow 2x \leq 8 \Leftrightarrow x \leq 4$

Como estas condições são simultâneas (ver a conjunção ∧ (e)), basta procurar a solução comum.

Temos então: $S = [-6, 4]$

4) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x+1}{2} > 1 + \frac{2x-3}{4}\right\}$

Solução: $2x + 2 > 4 + 2x - 3 \Leftrightarrow 5 > 4$

Como esta desigualdade independe de x e é verdadeira, ela será satisfeita para qualquer x, logo $S = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

5) Se nessa inequação o sinal fosse <, isto é, $\frac{x+1}{2} < 1 + \frac{2x-3}{4} \Rightarrow 5 < 4$ — que é absurdo, logo nenhum x a satisfaz. O conjunto das soluções seria o vazio.

2.2.5.4 – Módulo de um número real

Módulo ou **valor absoluto** do número real x, representado pelo símbolo $|x|$, é, por definição, o maior número do par $\{-x, x\}$.

DEFINIÇÃO
Módulo ou valor absoluto.

$$|x| = \text{máx}\{-x, x\} = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x > 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Exemplos:

i) $|3| = 3$

ii) $|-5| = 5 = -(-5)$

iii) $|0| = 0$

iv) $|2| = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$

v) $|-4| = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$

NOTA
O módulo nunca é negativo.

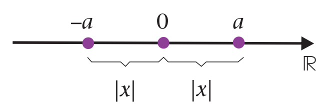
NOTA
$|-x| = |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$

NOTA
$\sqrt{x^2} = |x|$

Interpretação geométrica

a) Se $|x| = a$, $a > 0$ então: $\begin{cases} x = a, \text{ se } x > 0 \\ x = -a, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

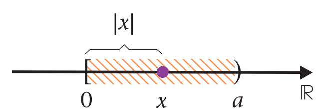
Temos sobre a reta real dois pontos simétricos em relação ao zero.



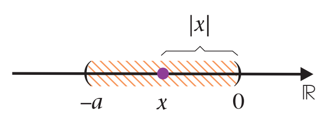
Interpretamos o $|x|$ como a "distância de x à origem".
Logo: $|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$

b) $|x| < a \ \ (a > 0)$

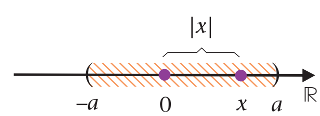
Temos: se $x \geqslant 0$, então $0 \leq x < a$



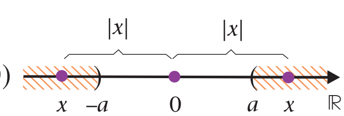
se $x < 0$, então $-a < x < 0$



Logo $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$



c) Se no caso contrário tivermos: $|x| > a \ (a > 0)$



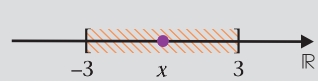
$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$$

Exercícios resolvidos:

Escrever os conjuntos abaixo, usando a notação de intervalo.

1) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$

<u>Solução:</u> $|x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$ ou



$S = [-3, 3]$

2) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| > 3\}$

<u>Solução:</u> $|2x - 1| > 3 \Leftrightarrow 2x - 1 > 3 \lor 2x - 1 < -3$

Temos:

$2x - 1 > 3$	$2x - 1 < -3$
$2x > 4$	$2x < -2$
$x > 2$	$x < -1$
$x \in (2, +\infty)$	$x \in (-\infty, -1)$

Como as condições são independentes, basta fazer a disjunção das duas hipóteses:
$S = (-\infty, -1) \lor (2, +\infty)$

3) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| + |7 - x| = 5\}$

<u>Solução:</u> Basta resolver a equação: $|x - 2| + |7 - x| = 5$

Façamos as hipóteses cabíveis:

$-\infty$	Caso (i) x	2	Caso (ii) x	7	Caso (iii) x	$+\infty$
$x - 2$	$-$	○	$+$		$+$	
$7 - x$	$+$		$+$	○	$-$	

NOTA
Observe que:
Caso i
$x < 2$, $x - 2 < 0$ e
$|x - 2| = -(x - 2)$
$7 - x > 0$ e
$|7 - x| = 7 - x$

Caso ii
$2 < x < 7$
$x - 2 > 0$ e $7 - x > 0$ e
$|x - 2| = x - 2$ e
$|7 - x| = 7 - x$

Caso iii
$x > 7$
$x - 2 > 0$ e $7 - x < 0$ e
$|x - 2| = x - 2$ e
$|7 - x| = -(7 - x)$

i) A equação fica:
$-(x - 2) + (7 - x) = 5$
$-x + 2 + 7 - x = 5$
$2x = 4$
$x = 2$
Impossível, pois $x < 2$.

ii) A equação fica:
$(x - 2) + (7 - x) = 5$
$x - 2 + 7 - x = 5$
$5 = 5$
Como a igualdade é verdadeira, independentemente dos valores de x, servem todos os valores do $[2, 7]$.

iii) A equação fica:
$x - 2 - (7 - x) = 5$
$x - 2 - 7 + x = 5$
$2x = 14$
$x = 7$
Impossível, pois $x > 7$, então nenhum valor do intervalo $(7, +\infty)$ é solução.
Temos então a solução: $x \in [2, 7]$

4) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 - x\}$

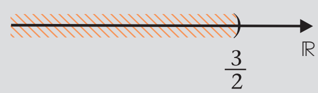
<u>Solução:</u> Temos:

$-\infty$	Caso (i)	1	Caso (ii)	$+\infty$
$x - 1$	$-$	○	$+$	

i) $x \leq 1$
$-(x-1) < 2-x$
$-x+1 < 2-x$
$1 < 2$

ii) $x > 1$
$x-1 < 2-x$
$2x < 3$
$x < \frac{3}{2}$

Fazendo a união destas duas hipóteses, temos a solução: $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

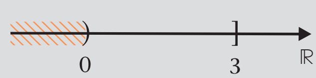


5) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| - |x-1| \leq 2-x\}$

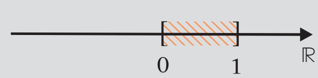
Solução: Basta resolver a desigualdade $|x| - |x-1| \leq 2-x$.

	Caso (i)	Caso (ii)	Caso (iii)
	$-\infty$ a 0	0 a 1	1 a $+\infty$
x	–	+	+
$x-1$	–	–	+

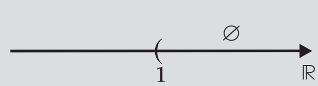
i) $x < 0$
$-x - [-(x-1)] \leq 2-x$
$-x + x - 1 \leq 2-x$
$x \leq 3$



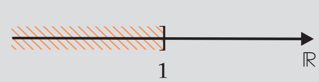
ii) $0 \leq x \leq 1$
$x - [-(x-1)] \leq 2-x$
$x + x - 1 \leq 2-x$
$3x \leq 3$
$x \leq 1$



iii) $x > 1$
$x - (x-1) \leq 2-x$
$1 \leq 2-x$
$x \leq 1$



Solução: $S = (-\infty, 1]$



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Complete com $\in$ ou $\notin$.

a) 2 ▨ $[1, 5)$

b) 3 ▨ $(-1, 3)$

c) $-\pi$ ▨ $(-\infty, 2]$

d) $-\sqrt{17}$ ▨ $\mathbb{R}_+$

e) $(0{,}421)^{12}$ ▨ $[-1, 1)$

2 A maior raiz da equação $x^2 - 4x + 1 = 0$ pertence ao intervalo:

(A) $(-\pi, \pi]$

(B) $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$

(C) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

(D) $(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$

3 A qual intervalo pertence a raiz da equação:

$0{,}6\% \cdot \frac{3}{4} = 3x - 1$?

(A) $[-1, 0)$

(B) $(-3, 2]$

(C) $[0{,}5; 1)$

(D) $(0{,}35; 0{,}4]$

4 A média aritmética entre os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 pertence ao intervalo:

(A) $[5, 6)$

(B) $[5{,}7; 5{,}8)$

(C) $(5{,}5; 6)$

(D) $[5{,}1; 5{,}5)$

5 Calcule.

a) $\left(2 + \sqrt{3}\right)^3$

b) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1\right)^2$

6 Determine o:

a) oposto de $\frac{7}{6}$;

b) inverso de $-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

7 Escreva explicitamente os seguintes conjuntos:

a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| > 0\}$

8 Calcule $\left|\frac{a - b}{a + b}\right|$, sendo $a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$ e $b = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$.

9 Dado $x + \frac{1}{x} = 3$, calcule.

a) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

b) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

10 (Uerj) No sistema abaixo, x e y são números reais.

$$\begin{cases} 2x(x-1) + (x-1)y = 4(x-1) \\ x^2 + y = 7 \end{cases}$$

A soma de todos os valores de x que satisfazem esse sistema pertence ao intervalo:

(A) $[1, 2)$

(B) $[2, 3)$

(C) $[3, 4)$

(D) $[4, 5)$

2.3 – Operações com conjuntos

2.3.1 – Complementação

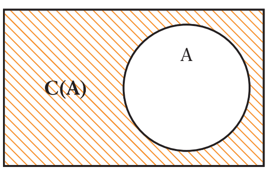
DEFINIÇÃO
Complemento de um conjunto.

É a operação que associa a cada subconjunto A de um universo $\mathbb{U}$ o conjunto dos elementos não pertencentes a A, representado por C(A).

$$C(A) = \{x \in \mathbb{U} \mid x \notin A\}$$

Utilizaremos para definir o conjunto C(A) a tabela de pertinência abaixo. Ela indica que todo elemento que pertence a A não pertence a C(A) e todo elemento que não pertence a A pertence a C(A).

	A	C(A)	C(C(A))
$x \in \mathbb{U}$	$\in$	$\notin$	$\in$
	$\notin$	$\in$	$\notin$



O conjunto C(A) é chamado complemento de A. Usam-se também as notações: A^C, A' ou $\bar{A}$ = C(A).

Exemplos:

i) Se o universo é o conjunto dos reais $\mathbb{R}$, temos:
$C(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}^*_-$; $C(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}'$; $C(\{0\}) = \mathbb{R}^*$; $C(\varnothing) = \mathbb{R}$

ii) Se o universo é o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$:
$C(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}_-$; $C(\{x \mid x \text{ é par}\}) = \{x \mid x \text{ é ímpar}\}$

2.3.1.1 – Propriedades

1) $C(C(A)) = A$

A tabela serve como demonstração, pois se baseia no axioma: "dois conjuntos são iguais se, e somente se, têm os mesmos elementos". O processo se apoia no fato de as colunas relativas aos conjuntos A e C(C(A)) serem iguais.

A complementação é a operação correspondente à negação de uma proposição.

2) $A = \{x \mid p(x)\} \Leftrightarrow C(A) = \{x \mid {\sim}p(x)\}$

Se A é o conjunto dos elementos do universo que satisfazem a proposição $p(x)$, então C(A) será o conjunto dos elementos deste mesmo universo que não satisfazem a proposição $p(x)$, isto é, ${\sim}p(x)$.

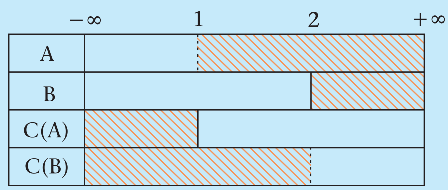
3) $C(\varnothing) = \mathbb{U}$ e $C(\mathbb{U}) = \varnothing$

Exemplos:

i) Sejam $\mathbb{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{U} \mid 0 \leq x \leq 5\}$.
Temos que: $A \subset B$, $C(A) = \{0, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $C(B) = \{6, 7, 8, 9\}$.
É fácil constatar que $C(B) \subset C(A)$.

ii) Sendo $\mathbb{U} = \mathbb{R}$, $A = (1, +\infty)$ e $B = [2, +\infty)$.

Temos:



OBSERVAÇÃO
A linha tracejada corresponde ao aberto e a linha cheia corresponde ao fechado.

Nota-se facilmente que $B \subset A$ e $C(A) \subset C(B)$.

Observação: todos os conjuntos que trataremos daqui em diante serão partes de um mesmo conjunto universo salvo afirmação em contrário.

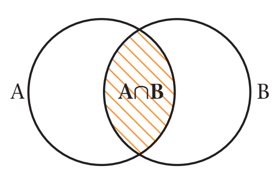
2.3.2 – Interseção

Chama-se **interseção** de A e B e representa-se por $\cap$ a operação que associa a cada par de conjuntos (A, B) o conjunto $A \cap B$ cujos elementos são comuns a A e B.

DEFINIÇÃO
Interseção de dois conjuntos.

Temos: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Usaremos a notação $A \cap B$ que se lê: "A interseção B".



A tabela de pertinência a seguir evidencia os elementos pertencentes ou não à interseção.

Chamando $C = A \cap B$, temos:

$$\forall x,\ x \in C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

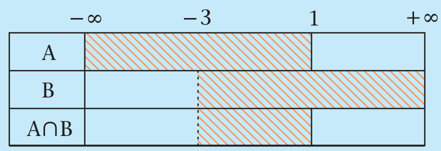
A	B	A ∩ B
$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

Exemplos:

i) A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
B = {3, 4, 5, 7, 9, 10}
Como a interseção A ∩ B é a coleção dos elementos comuns a A e B, temos:
A ∩ B = {3, 4, 5}

ii) Sejam $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$.

Então:



A ∩ B = (–3, 1]

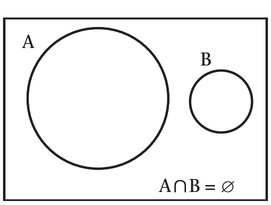
iii) Sejam $M(a) = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \text{ é múltiplo de } a\} = \{x \mid x = ka, k \in \mathbb{N}^*\}$.
Calcular M(9) ∩ M(12).
Temos: M(9) = {9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 8l, ...} e
M(12) = {12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, ...}
Logo, M(9) ∩ M(12) = {36, 72, ...}. Este conjunto é o conjunto dos múltiplos comuns de 9 e 12. Note que o MMC (9, 12) = mín [M (9) ∩ M (12)], isto é, o mínimo múltiplo comum de 9 e 12 é o menor elemento da interseção dos conjuntos M(9) e M(12), MMC(9, 12) = 36.

iv) Seja P o universo dos polígonos planos.
Chamemos $A = \{x \in P \mid x \text{ é equiângulo}\}$ e $B = \{x \in P \mid x \text{ é equilátero}\}$. Então A ∩ B é o conjunto dos polígonos regulares.

v) Seja $D(a) = \{x \mid x \text{ é divisor de } a\} = \{x \mid a = kx, k \in \mathbb{N}^*\}$. Um número x é divisor de a quando a é múltiplo de x.
Calcular D(36) ∩ D(60).
Temos: D(36) = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}
D(60) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}
Logo: D(36) ∩ D(60) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}
Este conjunto é o conjunto dos divisores comuns de 36 e 60. Note que o MDC (36, 60) = máx [D (36) ∩ D (60)], isto é, o máximo divisor comum de 36 e 60 é o maior elemento da interseção dos conjuntos D(36) e D(60), MDC (36, 60) = 12.

2.3.2.1 – Conjuntos disjuntos

DEFINIÇÃO
Conjuntos disjuntos.



Dois conjuntos são **disjuntos** quando não têm elemento comum. Neste caso, sua interseção é o conjunto vazio.

Exemplos:

i) {números pares} ∩ {números ímpares} = ∅

ii) {triângulos} ∩ {quadriláteros} = ∅

2.3.2.2 – Propriedades da interseção

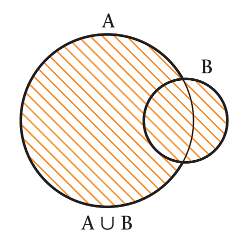
1) $A \cap \varnothing = \varnothing$
2) $A \cap A = A$
3) A interseção é comutativa, isto é, $A \cap B = B \cap A$.
4) A interseção é associativa, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$.
5) $A \cap C(A) = \varnothing$

NOTA
Conjuntos disjuntos são conjuntos separados.

2.3.3 – União ou reunião

Chama-se **união** de A e B e representa-se por $\cup$ a operação que associa a cada par de conjuntos (A, B) o conjunto $A \cup B$ cujos elementos pertencem a pelo menos um dos conjuntos A ou B.

DEFINIÇÃO
União de dois conjuntos.



Temos: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Usaremos a notação $A \cup B$, que se lê: A união B.

A tabela de pertinência indica que só não são da união de A e B os elementos que não pertencem nem a A nem a B.

Chamando $C = A \cup B$, temos: $\forall x,\ x \in C \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.

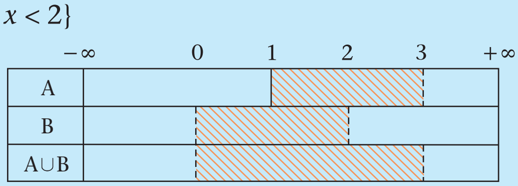
A	B	A ∪ B
$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

Exemplos:

i) $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{c, d, e, f\}$
$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$

NOTA
Os elementos comuns não devem ser repetidos.

ii) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

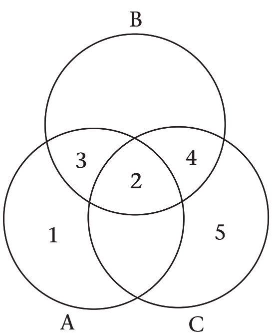


$A \cup B = (0, 3)$

iii) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = x\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = -x\}$
Temos que: $A = \mathbb{R}_+$ e $B = \mathbb{R}_-$
Logo: $A \cup B = \mathbb{R}$

2.3.3.1 – Propriedades da união

1) $A \cup \varnothing = A$
2) $A \cup A = A$
3) A união é comutativa, isto é, $A \cup B = B \cup A$.
4) A união é associativa, isto é, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$.
5) $A \cup C(A) = \mathbb{U}$



Exemplo:

Dados: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ e $C = \{2, 4, 5\}$ temos:
$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$A \cap B \cap C = \{2\}$

2.3.3.2 – Complemento da união e interseção

São as lei de De Morgan. Temos:

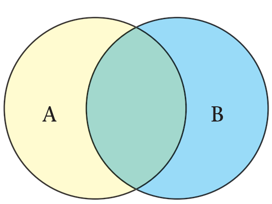
1) $C(A \cap B) = C(A) \cup C(B)$
2) $C(A \cup B) = C(A) \cap C(B)$

2.3.4 – Número de elementos da união (cardinal da união)

Sejam A e B conjuntos finitos. Sejam $n(A)$ e $n(B)$ o número de elementos de A e de B respectivamente. Queremos determinar $n(A \cup B)$.

Se A e B são disjuntos, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

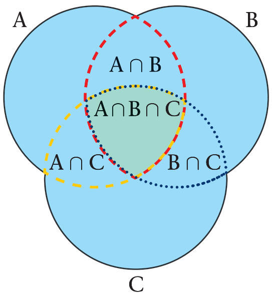
Por outro lado, se A e B não são disjuntos, se somarmos os números $n(A)$ e $n(B)$, os elementos da interseção estarão sendo contados duas vezes, logo:



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

já que os elementos de $A \cap B$ devem ser considerados uma só vez.

Se tivermos três conjuntos A, B e C e somarmos $n(A) + n(B) + n(C)$, os elementos de $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ estarão sendo contados duas vezes e os de $A \cap B \cap C$ três vezes.



Entretanto, na soma $n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$, os elementos de $A \cap B \cap C$ que tinham sido contados três vezes foram retirados três vezes, logo, ainda não estão contados. Contando estes elementos, temos finalmente a fórmula:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

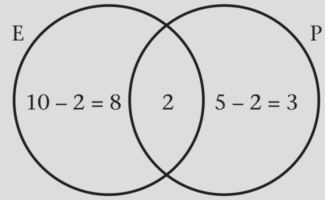
Exercícios resolvidos:

1) Numa certa comunidade existem 10 engenheiros e 5 professores, sendo 2 engenheiros também professores. Quantos são os engenheiros ou professores?

Solução: Temos: $n(E) = 10$, $n(P) = 5$ e $n(E \cap P) = 2$

Logo: $n(E \cup P) = 10 + 5 - 2 = 13$

Outra forma cômoda de resolver este tipo de exercício é fazer a distribuição dos elementos *começando pela interseção*. Observando o diagrama abaixo, vemos que: o número de engenheiros que não são professores é 10 – 2 = 8 e o número de professores que não são engenheiros é de 5 – 2 = 3. O total de elementos será 8 + 2 + 3 = 13.

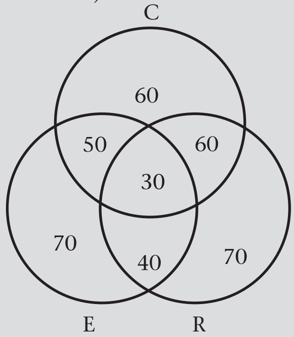


2) Num hospital existem três tipos de doentes: os que sofrem do coração, os que sofrem dos rins e os que sofrem do estômago. Sabe-se que: 200 sofrem do coração, 200 dos rins e 190 do estômago. Sabe-se ainda que 70 têm males de rins e estômago, 80, coração e estômago e 90, rins e coração. Os doentes mais graves, que sofrem dos rins, estômago e coração são 30. Quantos doentes há no hospital?

Solução: Usando a fórmula, temos:

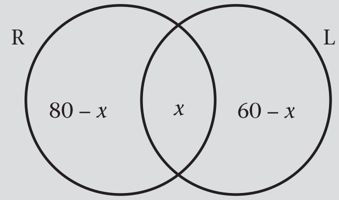
$n(A \cup B \cup C) = 200 + 200 + 190 - 70 - 80 - 90 + 30 = 380$ doentes

Utilizando o diagrama: Comecemos pela parte comum aos três conjuntos. São 30 elementos. Calculemos agora os que sofrem de dois males apenas:
Coração + rins: 90 – 30 = 60
Coração + estômago: 80 – 30 = 50
Rins + estômago: 70 – 30 = 40
Agora, vejamos quantos sofrem de apenas um mal:
Coração: 200 –(60 + 50 + 30) = 60
Rins: 200 – (60 + 30 + 40) = 70
Estômago: 190 – (50 + 30 + 40) = 70
Temos então o total: $n(R \cup E \cup C) = 30 + 50 + 60 + 40 + 60 + 70 + 70 = 380$



3) Calcule quantos são os quadrados de um conjunto de 100 quadriláteros em que 60 são losangos e 80 são retângulos.

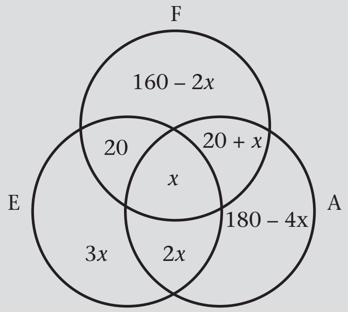
Solução: Temos que:
$n(R \cup L) = 100$
$n(R) = 80$
$n(L) = 60$
Como o conjunto dos quadrados é a interseção do conjunto dos losangos com o conjunto dos retângulos, temos: $Q = R \cap L$.
$n(R \cup L) = n(R) + n(L) - n(R \cap L) \Rightarrow$
$100 = 80 + 60 - n(Q) \Rightarrow n(Q) = 40$
Pelo diagrama, bastaria chamar de x o número de quadrados (interseção) e redistribuir:



Temos então:
$80 - x + x + 60 - x = 100$
$x = 40$ quadrados

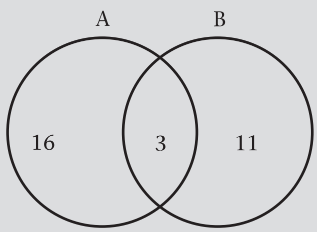
4) Numa escola de 390 estudantes, 200 estudantes estudam francês, 200 estudam alemão e um certo número estuda espanhol. Sabe-se que alguns estudam os três idiomas. Os que estudam espanhol somente são o triplo dos que estudam os três idiomas e $\frac{3}{2}$ daqueles que estudam somente alemão e espanhol. Sabe-se que 20 estudam somente francês e espanhol e os que estudam somente francês e alemão são 20 a mais do que aqueles que estudam os três idiomas. Sabe-se que todos os estudantes estudam algum idioma. Calcular quantos estudam alemão somente.

Solução: Chamando de x o número de estudantes que estudam os três idiomas e redistribuindo, vem:



$160 - 2x + 20 + x + 180 - 4x + 20 + x + 2x + 3x = 390$
$380 + x = 390$
$x = 10$
Estudam somente alemão:
$180 - 40 = 140$

5) Quantos são os múltiplos de 5 e 7 compreendidos entre 101 e 199?
Solução: Os múltiplos de 5 entre 101 e 199 formam o conjunto $A = \{105 = 5 \times 21, 5 \times 22, 5 \times 23, ..., 5 \times 39 = 195\}$. Como há 19 números naturais de 21 a 39, temos $n(A) = 19$.
Analogamente, os múltiplos de 7 entre 101 e 199 são $B = \{105 = 7 \times 15, 7 \times 16, 7 \times 17, ..., 7 \times 28 = 196\}$.
Assim, $n(B) = 28 - 14 = 14$.
Enfim, $A \cap B$ são os múltiplos de 35, a saber, $A \cap B = \{105 = 3 \times 35, 140, 175\}$. Assim, $n(A \cap B) = 3$.

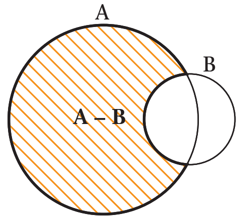


O número procurado é o cardinal da união:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 19 + 14 - 3 = 30$

2.3.5 – Diferença de conjuntos

Chama-se **diferença de dois conjuntos** A e B e representa-se pelo símbolo – a operação que associa a cada par de conjuntos (A, B) o conjunto A – B cujos elementos pertencem a A e não pertencem a B.
Temos: $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

DEFINIÇÃO
Diferença de conjuntos.



Lê-se: A menos B.
A tabela de pertinência abaixo indica quais os elementos que pertencem à diferença A – B.
Se chamarmos C = A – B temos:

$$\forall x,\ x \in C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

A	B	A – B
$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

Exemplos:

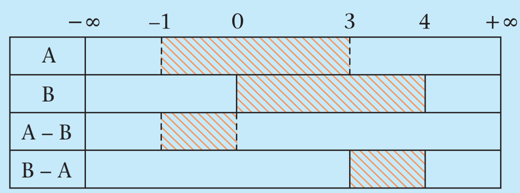
i) $A = \{a, b, c, d, e\}$ Temos: $A - B = \{a, c, e\}$
$B = \{b, d, f, g, h\}$
Observe que a diferença $A - B$ só possui elementos de A.

ii) $\mathbb{R} - \mathbb{R}_- = \mathbb{R}_+^*$

iii) $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ - \{0\}$

iv) $\{1, 2, 3, 4\} - \{1, 3, 4, 2\} = \varnothing$

v) Sendo $A = (-1, 3)$ e $B = [0, 4]$:



Temos: $A - B = (-1, 0)$ e $B - A = [3, 4]$
Observe que $0 \notin A - B$ porque $0 \in A$ e $0 \in B$, por outro lado, $3 \in B - A$ porque $3 \in B$ e $3 \notin A$.
Convém notar que $A - B \neq B - A$.

2.3.5.1 – Propriedades da diferença

1) $A - B = A \cap C(B)$

2) A diferença não é comutativa, isto é, $A - B \neq B - A$.

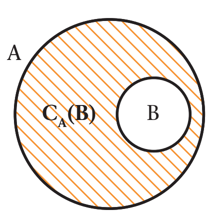
3) $A - \varnothing = A$

4) $A - A = \varnothing$

5) $A - \mathbb{U} = \varnothing$

6) $\mathbb{U} - A = C(A)$

2.3.5.2 – Complemento relativo



Dados dois conjuntos A e B, tais que $B \subset A$, chama-se **complemento** de B em relação a A ao conjunto de elementos de A, não pertencentes a B. É um caso particular da diferença, em que $B \subset A$.

Representaremos por: $C_A(B) = A - B$.

Simbolicamente, temos:

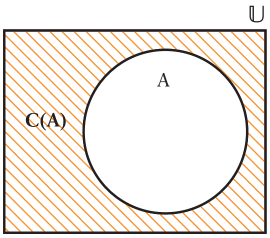
$$C_A(B) = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Observações:

1) $C_A(C_A(B)) = B$

2) $C_A(A) = \varnothing$

3) $C_A(\varnothing) = A$



Exemplos:

i) $C_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}^*_-$

ii) $C_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}'$

iii) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, $C_A(B) = \{4\}$

NOTA
Quando não for dito em relação a que conjunto se toma o complemento, admite-se em relação ao universo de estudo, isto é, $C(A) = C_{\mathbb{U}}(A)$.

APÊNDICE

Generalização das noções de união e interseção

As noções de união e interseção se generalizam com facilidade.

a) Denomina-se reunião dos conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ o conjunto S, cujos elementos pertencem a pelo menos um dos conjuntos dados.

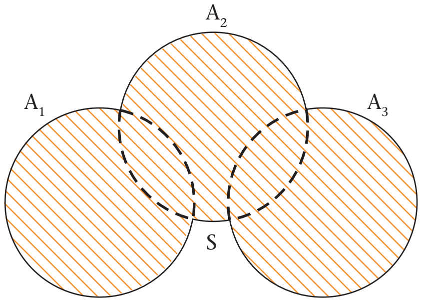
Representa-se: $S = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ ou

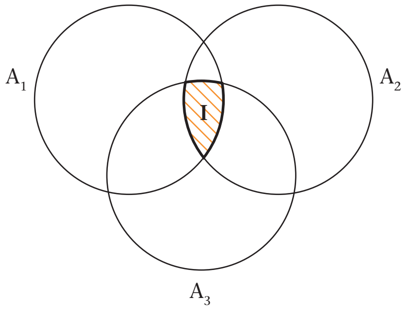
$$S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \exists i, x \in A_i\}$$

b) Denomina-se interseção dos conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ o conjunto I, cujos elementos pertencem a todos os conjuntos dados.

Representa-se: $I = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ ou

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \forall i, x \in A_i\}$$





Partição de um conjunto A é um conjunto de subconjuntos não vazios de A, disjuntos, cuja união é o conjunto A. Em símbolos:

$$A_i \subset A \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n$$

$$A_i \cap A_j = \varnothing \text{ sempre que } i \neq j$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$$

Exemplos:

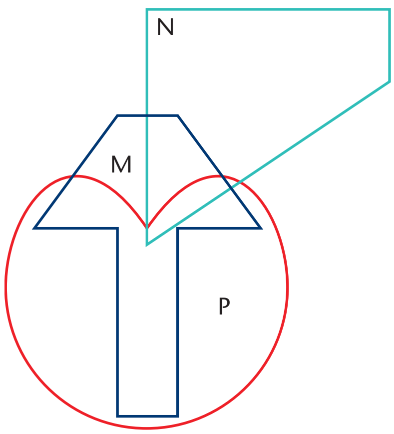
i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$A_1 = \{1, 2, 3\}$ $A_2 = \{4\}$ $A_3 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
$\{A_1, A_2, A_3\}$ é uma partição de A

ii) $\{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^*_-\}$ é uma partição de $\mathbb{R}$ pois $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ e
$\mathbb{R}^*_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

iii) $\{I, P\}$ é uma partição de $\mathbb{Z}$ sendo $I = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é ímpar}\}$ e
$P = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é par}\}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Considere a seguinte figura que estes conjuntos formam. Indique a região representada pela operação M – (N ∪ P) entre os conjuntos M, N e P.



2 Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x^2 - 12x + 9 = 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 = 0\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x^2 - 3x = 0\}$, obtenha o conjunto definido por $A \cup B \cup C$.

3 Sejam $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x^2 - x = 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{Q}^* \mid 2x^2 - 5x + 2 = 0\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R}_- \mid x^2 - 6 = 0\}$. Com essas condições, determine o conjunto definido por $A \cup (B \cap C)$.

4 São dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid -1 \leq x < 6\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 4\}$. Determine o conjunto X, tal que $X \subset B$ e $B - X = A \cap C$.

5 Na porta de um supermercado foi realizada uma enquete, com 100 pessoas, sobre três produtos. As respostas foram: 10 pessoas compram somente o produto A, 30 pessoas compram somente o produto B, 15 pessoas compram somente o produto C, 8 pessoas compram A e B, 5 pessoas comparam A e C, 6 pessoas compram B e C, e 4 compram os três produtos.

a) Quantas pessoas compram pelo menos um dos três produtos?

b) Quantas pessoas não compram nenhum desses produtos?

c) Quantas pessoas compram os produtos A e B e não compram C?

d) Quantas pessoas compram os produtos A ou B?

e) Quantas pessoas compram o produto A?

f) Quantas pessoas compram o produto B?

6 (FGV-SP) Uma pesquisa de mercado sobre o consumo de três marcas, A, B e C, de um determinado produto apresentou os seguintes resultados: A, 48%; B, 45%; C, 50%; A e B, 18%; B e C, 25%; A e C, 15%; nenhuma das três, 5%.

a) Qual a porcentagem dos entrevistados que consomem as três marcas?

b) Qual a porcentagem dos entrevistados que consomem uma e apenas uma das três marcas?

7 (Fuvest-SP) Durante uma viagem choveu cinco vezes. A chuva caía pela manhã ou à tarde, nunca o dia todo. Houve seis manhãs e três tardes sem chuva. Quantos dias durou a viagem?

8 (Uerj) Em um posto de saúde foram atendidas, em determinado dia, 160 pessoas com a mesma doença, apresentando os sintomas diarreia, febre ou dor no corpo, isoladamente ou não.
A partir dos dados registrados nas fichas de atendimento dessas pessoas, foi elaborada a tabela a seguir:

Sintomas	Frequência
Diarreia	62
Febre	62
Dor no corpo	72
Diarreia e febre	14
Diarreia e dor no corpo	8
Febre e dor no corpo	20
Diarreia, febre e dor no corpo	x

Na tabela, x corresponde ao número de pessoas que apresentaram, ao mesmo tempo, os três sintomas. Pode-se concluir que x é igual a:

(A) 6
(B) 8
(C) 10
(D) 12

9 (Unirio-RJ) Numa pesquisa para se avaliar a leitura de três revistas, A, B e C, descobriu-se que 81 pessoas leem, pelo menos, uma das revistas; 61 pessoas leem somente uma delas e 17 pessoas leem duas das três revistas. Assim sendo, o número de pessoas mais bem informadas dentre as 81 é:

(A) 3
(B) 5
(C) 12
(D) 29
(E) 37

10 Na cidade C, constatou-se que todas as pessoas que gostam de música clássica não gostam de música sertaneja. Verificou-se, ainda, que 5% da população gosta de música clássica e de *rock*, que 10% gostam de *rock* e de música sertaneja; que 25% gostam de *rock*; que 50% gostam de música sertaneja e que 30% gostam de música clássica. O percentual de habitantes da cidade C que não "curtem" nenhum dos gêneros musicais citados é de:

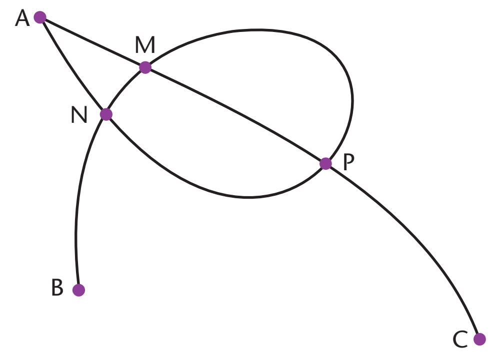
(A) 10%
(B) 8%
(C) 5%
(D) 2%
(E) 0%

11 (UFRJ) Considere os pacientes com Aids classificados em três grupos de risco: hemofílicos, homossexuais e toxicômanos. Num certo país, de 75 pacientes, verificou-se que:

- 41 são homossexuais;
- 9 são homossexuais e hemofílicos, e não são toxicômanos;
- 7 são homossexuais e toxicômanos, e não são hemofílicos;
- 2 são hemofílicos e toxicômanos, e não são homossexuais;
- 6 pertencem apenas ao grupo de risco dos toxicômanos;
- o número de pacientes que são apenas hemofílicos é igual ao número de pacientes que são apenas homossexuais;
- o número de pacientes que pertencem simultaneamente aos três grupos de risco é a metade do número de pacientes que não pertencem a nenhum dos grupos de risco.

Quantos pacientes pertecem simultaneamente aos três grupos de risco?

12 (ITA-SP) Um certo número de carros saem dos pontos A e B, conforme diagrama abaixo, e, sem passarem duas vezes por um mesmo ponto, chegam a C.



Sabemos que:

- 17 carros passaram por M, N, e P;
- 25 carros passaram por M e P;
- 28 carros passaram por N e P.

Pode-se afirmar que o número total de carros é:

(A) 70
(B) 45
(C) 42
(D) 36
(E) 53

13 Numa cidade, constatou-se que as famílias que consomem arroz não consomem macarrão. Sabe-se que 40% consomem arroz, 30% consomem macarrão; 15% consomem feijão e arroz; 20% consomem feijão e macarrão; 60% consomem feijão.
Determine a porcentagem correspondente às famílias que não consomem estes três produtos.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 Dados os conjuntos A = {3, 6, 9, 12, 15} e B = {5, 10, 15, 20, 25, 30}, podemos afirmar que:

(A) A é subconjunto de B;

(B) B é subconjunto de A;

(C) A e B são disjuntos;

(D) a interseção de A e B não é vazia;

(E) nenhuma das anteriores.

2 São subconjuntos do conjunto A = {{1}, 2, {1, 2}, ∅} os seguintes conjuntos:

(A) {{2}}, {1, 2}

(B) A, ∅, {{2}}

(C) A, ∅, {1, 2}

(D) A, ∅, {1}, {2}

(E) A, ∅, {2}, {{1}, 2}

3 Dados os conjuntos A = {1, 2, 5, 6, 9, 10} e B = {3, 4, 7, 8}, podemos afirmar que:

(A) o conjunto A é estritamente maior que o conjunto B;

(B) a reunião de A com B é vazia;

(C) os dois conjuntos são disjuntos;

(D) B é um subconjunto de A;

(E) A é um subconjunto de B.

4 Seja X um conjunto de onze elementos e seja Y o conjunto de todos os subconjuntos de X. O número de elementos de Y é:

(A) 2048

(B) 2047

(C) 2049

(D) 2046

(E) nenhuma das anteriores

5 Quais são os subconjuntos de A = {1, 2, 3}?

6 Considere as afirmações:

I) $0 \in \varnothing$

II) $\varnothing = \varnothing$

III) $\varnothing \neq 0$

IV) {∅} é o conjunto vazio.

Quais as verdadeiras?

7 Dados dois números naturais *a* e *b*, sejam D(*a*) e D(*b*), respectivamente, os conjuntos dos divisores positivos de *a* e de *b*. Sob que condições:

a) $D(a) = D(b)$?

b) $D(a) \neq D(b)$?

c) D(*a*) possui exatamente dois elementos?

d) $D(a) \cap D(b) = \{1\}$?

8 Dados dois números naturais *a* e *b*, sejam M(*a*) e M(*b*) os conjuntos dos naturais que são múltiplos de *a* e de *b*, respectivamente. Sob que condições tem-se:

a) $M(a) = M(b)$?

b) $M(a) \subset M(b)$?

c) $M(a) \cap M(b) = M(ab)$?

9 O conjunto A possui 5 elementos. Qual é o número de partes próprias de A?
(X é parte própria de A se $X \subset A$ e $X \neq A$)

10 Se A = {2, 3, 4, 5} e B = {1, 3, 5, 7}, das afirmativas:

I) A – B = {1, 2, 4, 7}

II) B – A = {2, 4}

III) A – B = {4, 2}

IV) B – A = {1, 2, 4, 7}

Tem-se que:

(A) somente a terceira é verdadeira;

(B) a segunda e a terceira são verdadeiras;

(C) somente a segunda é verdadeira;

(D) a quarta é verdadeira;

(E) nenhuma das respostas anteriores.

11 Considerando como conjunto universo $\mathbb{U} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, podemos afirmar que a interseção dos conjuntos verdade das inequações:

I) $x > 2$ e $x < 5$

II) $x > 2$ e $x > 5$

III) $x < 2$ e $x < 5$

é:

(A) ∅

(B) {0}

(C) {1}

(D) {0, 1}

(E) {3, 4}

12 Se A = {0, 1, 2, –1, –2} e B = {–1, 2, 3, 4, 5}, então determine A Δ B, sendo que:

A Δ B = (B – A) ∪ (A – B)

(A) {–1, 1, 5, 7, –7, –5}

(B) ∅

(C) {1, 0, 7, –7, 4, 2}

(D) {1, –1, 5, 7, –7, 3}

(E) {0, 1, –2, 3, 4, 5}

13 (UFF-RJ) Considere as proposições:

I) E ∩ E = E

II) ∅ ∩ E = ∅

III) E ∪ ∅ = E

IV) (E ∩ F) ∩ G = E ∩ (F ∩ G)

V) F ⊂ E ⇔ F ∩ E = F

Podemos afirmar que:

(A) V é a única falsa;

(B) nenhuma é falsa;

(C) existem pelo menos três falsas;

(D) três e somente três são corretas;

(E) nenhuma das respostas anteriores.

14 A, B e C são subconjuntos de N = {0, 1, 2, 3, ...} tais que:

I) A ⊂ B

II) B ⊂ A

III) A ∩ A = ∅

IV) A ∪ (B ∪ C) = N

Então, C é:

(A) ∅

(B) N

(C) A

(D) B

(E) nenhuma das anteriores

15 Se X = {*a*, *b*, *c*} e Y é um conjunto tal que X ∪ Y = {*a*, *b*, *c*, *e*, *f*} e X ∩ Y = {*a*, *b*}, então pode-se concluir que:

(A) há mais de um conjunto Y nas condições acima;

(B) Y = {*a*, *b*, *f*};

(C) Y = {*a*, *b*, *e*};

(D) Y = {*a*, *b*, *c*, *e*, *f*};

(E) Y = {*a*, *b*, *e*, *f*}.

16 (Cescea-SP) Dados os conjuntos A = {*a*, *b*, *c*}, B = {*b*, *c*, *d*} e C = {*a*, *c*, *d*, *e*}, o conjunto (A – C) ∪ (C – B) ∪ (A ∩ B ∩ C) é igual a:

(A) {*a*, *b*, *c*, *e*}

(B) {*a*, *c*, *e*}

(C) A

(D) {*b*, *d*, *e*}

(E) {*b*, *c*, *d*, *e*}

17 Considere os conjuntos:

U = {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*}

A = {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*}

B = {*a*, *c*, *e*, *i*}

C = {*a*, *c*, *e*, *f*, *h*, *i*}

D = {*a*, *e*, *f*, *i*}

Determine o único conjunto X ⊂ U que satisfaz a equação: (A ∪ B) ∩ X = C – D.

18 (IME-RJ) Considere os conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 3\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

$C = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$

Calcule:

a) A ∪ B

b) A ∩ B

c) A – B

d) A ∩ B ∩ C

19 (IME-RJ) Em uma pesquisa realizada entre 500 pessoas foram obtidos os seguintes resultados:

- 200 pessoas gostam de música clássica;
- 400 pessoas gostam de música popular;
- 75 pessoas gostam de música clássica e de música popular.

Verifique a consistência ou inconsistência dos resultados desta pesquisa.

20 Numa competição de natação, 10 nadadores nadam só de braço, 8 só de peito, 5 só de costas, 7 de braço e peito, 3 de braço e costas, 4 de peito e costas e 1 dos três tipos. Quantos nadam de braço? E de peito? E de costas?

21 Determine os elementos de A e B incluídos em E, sabendo que:

$C_E(A) = \{1, 4, 7\}$ $C_E(B) = \{2, 3, 5, 7\}$

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

22 Determine os elementos dos dois subconjuntos A e B contidos em E sabendo que:

$C_E(B) = \{f, g, h, i\}$ $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$ $A \cap B = \{d, e\}$

23 Sabendo que E não compreende necessariamente todos os números naturais de 1 a 20, enumerar os elementos de E e de seus subconjuntos A e B sabendo que:

$C_E(A) = \{2, 5, 9, 13, 18, 20\}$ $C_E(B) = \{2, 6, 18, 20\}$

$A \cup B = \{1, 5, 6, 9, 13, 14\}$

24 Sejam três conjuntos finitos A, B e C. Determine o número de elementos de $A \cap (B \cup C)$, sendo $n(A \cap B) = 20$, $n(A \cap C) = 10$ e $n(A \cap B \cap C) = 5$.

(A) 20
(B) 25
(C) 15
(D) 30
(E) 5

25 Seja X o conjunto {1}. Determine P(X) e P(P(X)).

26 Sejam: $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$ e $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$. Podemos afirmar que $X \cup Y$, $X \cap Y$ e $X - Y$ são respectivamente:

(A) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 3\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$

(B) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 3\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$

(C) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 3\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

(D) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 3\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$

(E) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$

27 Dos enunciados abaixo:

I) $A - B = \varnothing \Leftrightarrow A \cap B = A$

II) $(A \cap B) \cap C \neq A \cap (B \cap C)$

III) $A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$

IV) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = \varnothing$ e $B = \varnothing$

V) $A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

(A) apenas os três primeiros são verdadeiros;
(B) os três últimos são falsos;
(C) somente o primeiro e o terceiro são verdadeiros;
(D) somente o primeiro, o terceiro e o quinto são verdadeiros;
(E) nenhuma das anteriores.

28 (ITA-SP) Seja C_1 o conjunto das soluções do sistema:

$$\begin{cases} 4x + 12y = 4 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

e seja C_2 o conjunto das soluções do sistema:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$$

Temos então:

(A) $C_1 = C_2$
(B) $C_1 \subset C_2$
(C) $C_2 \subset C_1$
(D) $C_1 \cap C_2 = \varnothing$
(E) nenhuma das anteriores

29 Depois de n dias de férias, um estudante observa que:

I) Choveu 7 vezes, de manhã ou à tarde.

II) Quando choveu de manhã não choveu à tarde.

III) Houve 5 tardes sem chuva.

IV) Houve 6 manhãs sem chuva.

Então n é igual a:

(A) 7
(B) 9
(C) 10
(D) 11
(E) nenhuma das anteriores

30 Dentre 28 estudantes que cursam pelo menos uma matéria, entre Matemática, Português ou Química, o número dos que cursam somente Matemática e Língua Portuguesa é igual ao número dos que cursam somente Matemática. Nenhum estudante cursa só Língua Portuguesa ou só Química, e seis estudantes cursam somente Matemática e Química. O número dos que cursam somente Língua Portuguesa e Química é o quíntuplo do número dos que cursam as três matérias simultaneamente. Se o número dos que cursam as três matérias simultaneamente é par e diferente de zero, o número dos que cursam somente Língua Portuguesa e Matemática é:

(A) 6
(B) 5
(C) 9
(D) 8
(E) 7

31 Uma pesquisa entre telespectadores forneceu os seguintes dados concernentes a três programas, A, B e C, que vão ao ar em horários diferentes:

- 60% assistem ao programa A;
- 30% assistem aos programas A e B;
- 50% assistem ao programa B;
- 20% assistem aos programas B e C;
- 50% assistem ao programa C;
- 30% assistem aos programas A e C.

Se cada telespectador assiste a pelo menos um dos três programas, a porcentagem dos que assistem a todos os três programas é:

(A) 10% (D) 17,5%
(B) 20% (E) 4,5%
(C) 15%

32 Uma urna contém um certo número de blocos de madeira. Alguns são pretos e os restantes brancos, alguns são cubos e os outros tetraedros, alguns são lisos e os demais ásperos. Quantos blocos existem se são dadas as seguintes informações?

I) 16 são pretos
II) 16 são cubos
III) 17 são lisos
IV) 9 são cubos pretos
V) 6 são lisos e pretos
VI) 7 são cubos e lisos
VII) 3 são cubos lisos e pretos
VIII) 13 são tetraedros ásperos e brancos

(A) 42 (D) 45
(B) 43 (E) nenhuma das anteriores
(C) 44

33 Determinar A, B e C sabendo que:

I) $C \subset B$
II) $C \neq \varnothing$
III) $A \cap B = \{a, b, c, h\}$
IV) $A - B = \{e, g, i, j\}$
V) $B - C = \{a, c, d, f, h\}$
VI) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$

34 Num certo estado, as cidades α, β e γ são colineares, α está a 48 km de β e β a 75 km de γ.

a) É possível dizer qual das cidades está situada entre as duas?

b) Há a possibilidade de mais de um valor para a distância entre α e γ?

c) Se você tivesse ainda a informação de que a distância entre α e γ é 27 km, então qual das cidades estaria entre as outras duas?

d) Se a distância entre α e β fosse r km, a distância de α a γ, 5 km e a distância de β a γ, $r + 5$ km, qual das cidades estaria entre as outras duas?

35 Determine $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{Q}$ de modo que:

a) $(a + \sqrt{b})^2 = 28 + 10\sqrt{3}$

b) $(a - \sqrt{b})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$

36 Determine $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{Q}$ de modo que:

a) $\sqrt{33 + 8\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$

b) $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = a - b\sqrt{2}$

37 Se $abc = 0$, então:

(A) $a = b = 0$ (D) $a = b = c = 0$
(B) $a = 0$ (E) $a = 0$ ou $c = 0$
(C) $a = 0$ ou $b = 0$ ou $c = 0$

38 Considere o conjunto dos números reais e dois de seus elementos, x e y. Assinale quais das afirmações abaixo são corretas.

(A) $x + y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x \in \mathbb{R}_+$ e $y \in \mathbb{R}_+$
(B) $x \cdot y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x \in \mathbb{R}_+$ e $y \in \mathbb{R}_+$ ou $x \in \mathbb{R}_-$ e $y \in \mathbb{R}_-$
(C) $x - y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x \geq y$
(D) $x \cdot y \in \mathbb{R}_- \Rightarrow x \in \mathbb{R}_+$ e $y \in \mathbb{R}_+$ ou $x \in \mathbb{R}_+$ e $y \in \mathbb{R}_-$
(E) $x \cdot y^2 \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x \in \mathbb{R}_+$

39 Sejam a e $b \in \mathbb{R}$. Temos que:

I) $ax = bx \Rightarrow a = b \ (x \in \mathbb{R})$
II) $a - b = a - b \Rightarrow a + b = 1$
III) $a \neq b \Rightarrow \dfrac{a}{b} \neq 1$
IV) $ax^2 = bx \Rightarrow x = \dfrac{a}{b}$ se $a \neq 0$
V) $a = b \Rightarrow \dfrac{a}{b} = 1$

Estão certas:

(A) I
(B) II
(C) III
(D) IV
(E) nenhuma

40 Considere as afirmações:

I) se $a > b$ e $c > 0$ então $ac > bc$

II) se $a > b$ e $c < 0$ então $ac < bc$

III) se $a < b$ e $c > 0$ então $ac < bc$

IV) se $a < b$ e $c < 0$ então $ac > bc$

Temos que:

(A) I e II estão erradas;
(B) I e III estão erradas;
(C) II e III estão erradas;
(D) II e IV estão erradas;
(E) todas estão corretas.

41 Qual das afirmações abaixo é falsa?

(A) $a + c < b + c \Rightarrow a < b$
(B) $a > b \Rightarrow a^2 + b^2 > 0$
(C) $a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$
(D) $a + c < b + c \Leftrightarrow a < b$
(E) $ac < bc \Rightarrow a < b$

42 Considere as afirmações:

I) A condição necessária e suficiente para que seja $a > b$ é que exista um número $c > 0$ tal que $a = b + c$.

II) Só existe um par de valores reais que satisfaz $x^2 + y^2 = 0$ que é $x = y = 0$.

III) $(\sqrt[3]{x})^{\frac{2}{3}} = x$

IV) $x^{-\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}} = 1$

V) $x \geq 0 \Rightarrow (\sqrt[6]{x})^2 = \sqrt[3]{x}$

Estão erradas:

(A) I e II
(B) II e III
(C) III e IV
(D) IV e V
(E) nenhuma das anteriores

43 Considere as seguintes afirmações:

I) $\sqrt[3]{-x^2} = -\sqrt[3]{-x^2}$

II) $\sqrt{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

III) A diferença entre um número e sua metade é sempre igual à metade deste número.

IV) Dividindo-se um número irracional por um número racional, obtém-se necessariamente um número irracional.

V) Se $\dfrac{a}{b}$ é um racional irredutível, então o mdc entre a e b é igual a 1 (um).

Estão erradas:

(A) I
(B) II
(C) III
(D) IV
(E) nenhuma das anteriores

44 A geratriz da dízima 0,7272... é:

(A) $\dfrac{1}{11}$

(B) $\dfrac{9}{13}$

(C) $\dfrac{8}{11}$

(D) $\dfrac{5}{9}$

(E) nenhuma das anteriores

45 Calcule a geratriz da dízima 2,017017017...

46 Identifique, das implicações abaixo, as verdadeiras.

I) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 > x$

II) $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x^2 \geq x$

III) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \geq x$

IV) $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 > x$

(A) I e II
(B) I e III
(C) II e III
(D) II e IV
(E) III e IV

47 Considere as afirmações:

I) Se a é irracional então $a - 1$ é irracional.

II) α é irracional e y é racional $\Rightarrow \alpha + y$ é racional.

III) Existem α, β irracionais tais que $\alpha + \beta$ é racional.

IV) Se α, β são irracionais, $\alpha + \beta$ é racional somente quando $\alpha = -\beta$.

Sobre as afirmações acima temos:

(A) somente uma afirmação é verdadeira.

(B) as três últimas são verdadeiras.

(C) apenas II e IV são verdadeiras.

(D) todas as afirmações são falsas.

(E) somente duas afirmações são verdadeiras.

48 Dados os números α e β irracionais:

I) $\alpha \cdot \beta$ é racional se, e somente se, $\alpha = \dfrac{1}{\beta}$

II) A soma $(\alpha + \beta)$ é sempre um irracional.

III) Se $\alpha x = \alpha y$ com x e y reais, então $x = y$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

IV) Se x é racional, então $x + \alpha$ é irracional.

V) Se $\alpha \neq 0$, então α é irracional $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha}$ é irracional.

Então:

(A) há somente uma afirmação verdadeira;

(B) há somente duas afirmações verdadeiras;

(C) há somente três afirmações verdadeiras;

(D) há somente quatro afirmações verdadeiras;

(E) todas são verdadeiras.

49 Sejam $a > b > 0$ números reais. Temos:

(A) $a \geq \dfrac{1}{2}(a+b)$ e $\sqrt{ab} \leq \dfrac{2ab}{a+b}$

(B) $\dfrac{1}{2}(a+b) \leq \sqrt{ab}$ e $\dfrac{2ab}{a+b} \geq b$

(C) $\sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$ e $\dfrac{2ab}{a+b} < b$

(D) $\dfrac{1}{2}(a+b) \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$

(E) nenhuma das anteriores

50 Resolva as equações.

a) $|x| = 3$

b) $|x| + 8 = 6$

c) $|x| + 3 = 2x$

d) $|x| = -x$

e) $|x|^2 = 4$

f) $|x|^3 = 27$

51 Se a e b são números reais, identifique as afirmações corretas.

(A) $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$

(B) $|a| + |b| = |a + b|$

(C) $|a| = a$

(D) $|a|^2 = a^2$

(E) $|a|^3 = a^3$

52 A solução da equação $|x - 5| = |x - 3|$ é:

(A) $x > 3$

(B) $x < 5$

(C) $3 \leq x \leq 5$

(D) $x = 4$

(E) $x = 3$ ou $x = 5$

53 Resolva as equações.

a) $|x| = a$

b) $|x - a| = b$

c) $\dfrac{|x-1|}{2} + x = 7$

54 O conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+2| - |x+1| = 0\}$ é:

(A) $\varnothing$

(B) $A = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

(C) $A = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

(D) $A = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

(E) nenhuma das anteriores

55 O conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid |2x+1| > |x|\}$ é:

(A) $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right) \cup [1, +\infty)$

(B) $\varnothing$

(C) $\left[1, 0, \dfrac{1}{3}\right)$

(D) $\left[0, \dfrac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty)$

(E) nenhuma das anteriores

56 Seiscentos estudantes de uma escola foram entrevistados sobre suas preferências quanto aos esportes vôlei e futebol.
O resultado foi o seguinte: 204 estudantes gostam somente de futebol, 252 gostam somente de vôlei e 48 disseram que não gostam de nenhum dos esportes.
Determine o número de estudantes entrevistados que gostam dos dois esportes.

57 A e B são conjuntos. O número de elementos de A é 7 e de $A \cup B$ é 9. Determine os valores mínimo e máximo para o número de elementos de B.

58 De um total de 110 alunos do colégio da Fundação Getulio Vargas, sabe-se que:

- 50 tocam violino;
- 70 jogam futebol;
- 20 tocam violino e jogam futebol.

Pede-se:

a) Quantos alunos tocam violino se, e somente se, jogam futebol?

b) Quantos alunos não jogam futebol e não tocam violino?

59 Um clube oferece a seus associados aulas de três modalidades de esporte: natação, tênis e futebol. Nenhum associado pode se inscrever simultaneamente em tênis e futebol, pois, por problemas administrativos, as aulas destes dois esportes serão dadas no mesmo horário. Encerradas as inscrições, verificou-se que: dos 95 inscritos em natação, 55 só farão natação; o total de inscritos para as aulas de tênis foi de 20 e, para futebol, de 50; o número de inscritos só para as aulas de futebol excede em 10 o número de inscritos só para as de tênis. Quantos associados se inscreveram simultaneamente para aulas de tênis e natação?

60 Sendo $x = 7{,}333...$ e $y = 0{,}4090909...$, dê a representação decimal de $(x \cdot y)^{-1}$.

61 (FGV-RJ) Numa cidade do interior do Estado do Rio de Janeiro, uma prévia eleitoral entre 2 000 filiados revelou as seguintes informações a respeito de três candidatos A, B, e C, do Partido da Esperança (PE), que concorrem a três cargos diferentes:

I) todos os filiados votaram e não houve registro de voto em branco, tampouco de voto nulo;

II) 280 filiados votaram a favor de A e B;

III) 980 filiados votaram a favor de A ou de B, mas não de C;

IV) 420 filiados votaram a favor de B, mas não de A ou de C;

V) 1 200 filiados votaram a favor de B ou de C, mas não de A;

VI) 640 filiados votaram a favor de C, mas não de A ou de B;

VII) 140 filiados votaram a favor de A e de C, mas não de B.

Determine o número de filiados ao PE que:

a) votaram a favor dos três candidatos;

b) votaram a favor de apenas um dos candidatos.

62 Numa comunidade são consumidos três produtos, A, B e C. Feita uma pesquisa de mercado sobre o consumo desses produtos, foram colhidos os resultados da tabela abaixo:

Produto	A	B	C	A e B	B e C	A e C	A, B e C	Nenhum dos três
Número de consumidores	100	150	200	20	40	30	10	130

Pergunta-se:

a) Quantas pessoas foram consultadas?

b) Quantas pessoas consomem pelo menos duas das três marcas?

63 Objetivando conhecer a preferência musical dos alunos do colégio da FGV, o grêmio realizou uma pesquisa, dando como opção três compositores: M, B e S. Os resultados são:

Votos	Opções
27	Gostam de B
34	Gostam de M
40	Gostam de S
16	Gostam de B e M
12	Gostam de B e S
14	Gostam de M e S
6	Gostam de B, M e S
4	Não gostam de B, M e S

Considerando esses dados, determine:

a) Quantos alunos foram pesquisados?

b) Quantos gostam de M e não gostam de B?

64 Identifique as afirmações corretas.

I) Se $a \neq b$ e $b \neq c$ então $a \neq c$.

II) Se a e b são números primos diferentes entre si e diferentes de 2, então $a + b$ não pode ser primo.

III) $|a + b| \leq |a| + |b|$

IV) $|a^n| = |a|^n$

Temos que:

(A) todas estão certas.

(B) somente I, III e IV estão certas.

(C) somente I, II, e IV estão certas.

(D) somente II, III e IV estão certas.

(E) nenhuma está correta.

65 Considere as afirmações:

I) Entre dois inteiros pode não haver outro inteiro.

II) Entre dois racionais sempre há um racional.

III) Entre dois racionais pode não haver outro racional.

IV) Sempre existe um irracional entre dois racionais.

V) Entre dois inteiros nunca há um racional.

VI) Sempre existe um inteiro entre dois irracionais.

Estão erradas:

(A) I, III e V

(B) II, V e VI

(C) I, III e IV

(D) III, V e VI

(E) IV, V e VI

66 Se $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$, $a > 1$, $b > 1$ e $a < b$, compare os números racionais:

$$\frac{a}{b}, \frac{a+1}{b+1} \text{ e } \frac{a-1}{b-1}$$

67 A solução da inequação $\dfrac{|x-1|}{x-2} < 1$ é:

(A) não tem solução

(B) $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

(C) $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

(D) $(-\infty, 2)$

(E) $(2, +\infty)$

68 Sendo x e y números reais não nulos, tem-se:

(A) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} \Rightarrow x < y$

(B) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} \Rightarrow x < y$ e $xy > 0$

(C) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ e $xy < 0 \Rightarrow x > y$

(D) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ e $xy < 0 \Rightarrow x > y$

(E) nenhuma das anteriores

69 Resolva as equações.

a) $|x| \cdot |x^2 - 5x + 6| = |x - 2| \cdot |x - 3|$

b) $|x^2 - 5x + 6| = x^2 - 5x + 6$

70 A equação $|x + 1| - |x| = x + 2$:

(A) possui 2 soluções reais cuja soma é 2.

(B) possui somente uma solução real.

(C) possui 3 soluções reais cuja soma é -3.

(D) possui uma infinidade de soluções reais distintas.

(E) não possui solução real.

71 A equação $|x - 1| = |x| + 1$, x real:

(A) não tem solução.

(B) tem uma única solução.

(C) tem somente duas soluções.

(D) tem uma infinidade de soluções.

(E) nenhuma das anteriores.

72 Considere a resolução da inequação:

$x + 1 < 4x + 4 \Rightarrow x + 1 < 4(x + 1) \Rightarrow 1 < 4$

Logo, o conjunto solução da inequação é o conjunto dos reais.

Observe, entretanto, que para $x = -2$, temos:

$-2 + 1 < -8 + 4 \Rightarrow -1 < -4$, que é um absurdo.

Qual é o erro cometido?

73 Prove que se $\sqrt{c}$ é irracional e a e b são racionais, então $a + b\sqrt{c} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

74 Dados $S = \{(x, y) \mid x + y = 50\}$ e $T = \{(x, y) \mid 2x - 3y = 10\}$, determine $S \cap T$.

CAPÍTULO III

FUNÇÕES: PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Tuca Vieira/Folha Imagem

Nosso Universo é dinâmico – diversas grandezas mudam com o tempo. Para modelar a maneira em que uma grandeza muda de acordo com uma outra, usamos funções matemáticas. Por exemplo, a temperatura de uma sala é uma função do instante em que ela é medida; a nota de um aluno é função de quem é este aluno; o preço de uma determinada ação na bolsa de valores também é uma função do tempo (e da ação pesquisada). Na fotografia, a Bolsa de Valores de São Paulo (ao fundo, o gráfico da cotação do dólar como função do tempo).

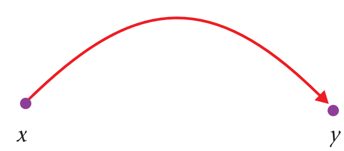
3 – FUNÇÕES: PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

3.1 – Produto cartesiano

3.1.1 – Par ordenado

DEFINIÇÃO
Par ordenado.

Chamamos **par ordenado** a um conjunto de dois elementos considerados numa determinada ordem e tratados como um único elemento, o par.



OBSERVAÇÃO
Não confundir $\{x, y\}$ com (x, y). Afinal, $\{x, y\} = \{y, x\}$ mas, em geral, $(x, y) \neq (y, x)$. O par (y, x) é chamado **transposto** do par (x, y).

Representaremos o par ordenado, cujos elementos são x e y, por (x, y).

Então $z = (x, y)$ é o par ordenado. O primeiro elemento x é chamado **primeira coordenada** de z e o segundo elemento y é chamado **segunda coordenada** do par.

Quando dizemos que z é um par ordenado, significa que a ordem das componentes x e y do par não pode ser modificada, de modo que $(x, y) \neq (y, x)$.

3.1.1.1 – Propriedade fundamental

$$(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a \wedge y = b$$

Exemplo:

$$(x + 1, y - 2) = (2x, 3y) \Leftrightarrow x + 1 = 2x \text{ e } y - 2 = 3y \Leftrightarrow x = 1 \text{ e } y = -1$$

3.1.2 – Sistemas de coordenadas cartesianas – referencial cartesiano

Uma das principais aplicações de par ordenado é a representação dos pontos de um plano.

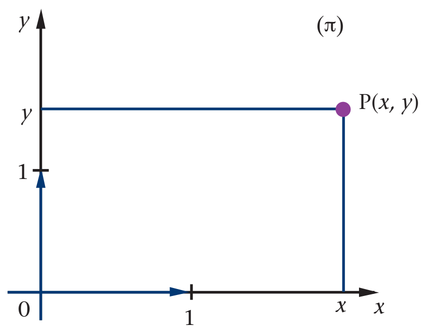
Consideremos um sistema ortonormal (eixos perpendiculares e unidades iguais) num plano π e um ponto P.

Tracemos por P, paralelas aos eixos O$\boldsymbol{x}$ e O$\boldsymbol{y}$ que os intersectam nos pontos x e y.

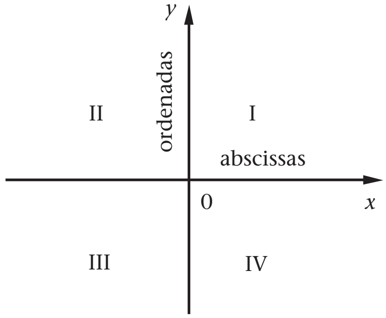
Os valores algébricos dos segmentos Ox e Oy são chamados **abscissa** e **ordenada** de P e são representados por x e y respectivamente. São as coordenadas de P.

Há uma correspondência **biunívoca** entre os pontos do plano e os pares ordenados (x, y) de coordenadas reais. A todo ponto do plano corresponde um par de números (x, y) e a todo par (x, y) corresponde um e somente um ponto do plano.

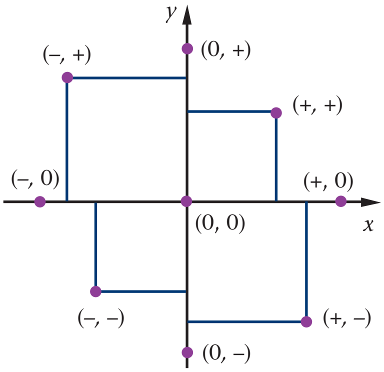
O plano π é chamado de **plano coordenado** ou **plano cartesiano**.



O plano cartesiano fica dividido em quatro regiões que chamaremos de **quadrantes**. Os números romanos indicam os 1º, 2º, 3º e 4º quadrantes.



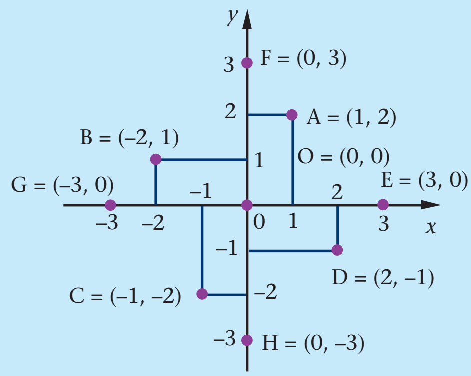
Os sinais das coordenadas nos quadrantes obedecem ao quadro abaixo.



Região	Abscissa	Ordenada
1º quadrante	+	+
2º quadrante	–	+
3º quadrante	–	–
4º quadrante	+	–
Eixo Ox	ξ	0
Eixo Oy	0	ψ
Origem	0	0

Exemplo:

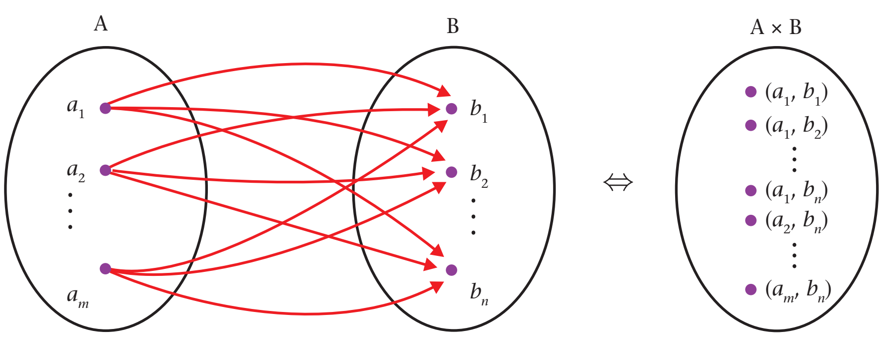
Marcar no plano cartesiano os pontos A = (1, 2), B = (–2, 1), C = (–1, –2), D = (2, –1), E = (3, 0), F = (0, 3), G = (–3, 0), H = (0, –3) e O = (0, 0).



3.1.3 – Produto cartesiano

DEFINIÇÃO
Produto cartesiano de dois conjuntos.

Chama-se **produto cartesiano de dois conjuntos** e representa-se por × a operação que associa a cada par de conjuntos (A, B) o conjunto A × B, cujos elementos são todos os pares ordenados possíveis tais que o primeiro elemento seja do conjunto A e o segundo elemento seja do conjunto B.



Temos: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$. Lê-se: A cartesiano B.

A determinação do produto cartesiano fica muito cômoda com o auxílio de uma tabela de dupla entrada, como a da página seguinte.

Sejam os conjuntos:

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$$

$$B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$$

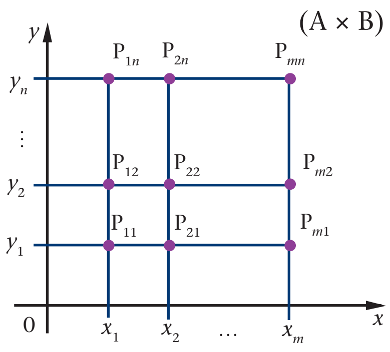
Basta fazer a composição de cada elemento das linhas com os elementos das colunas. É evidente que o total de pares ordenados será $m \cdot n$.

A \ B	b_1	b_2	...	b_n
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	...	(a_1, b_n)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	...	(a_2, b_n)
...	...	...	...	...
a_m	(a_m, b_1)	(a_m, b_2)	...	(a_m, b_n)

Temos então: $A \times B = \{(a_i, b_j) \mid i = 1, 2, \ldots m \wedge j = 1, 2, \ldots, n\}$
Portanto: $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

3.1.3.1 – Gráfico de um produto cartesiano

Chamamos de **gráfico do produto cartesiano** o conjunto G de todos os pontos do plano coordenado cujos pares são os elementos do produto cartesiano. Tais pontos têm suas abscissas em A e suas ordenadas em B.



O gráfico do produto cartesiano será o conjunto de pontos P_{ij}.
$G = \{P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{mn}\}$ ou $G = \{P_{ij} \mid i = 1, 2, \ldots, m \wedge j = 1, 2, \ldots, n\}$

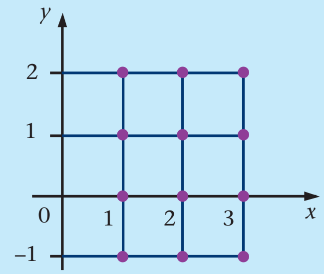
3.1.3.2 – Propriedades do produto cartesiano

1) $A \times \varnothing = \varnothing$
2) $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$
3) $A \times B \neq B \times A$ (em geral)
4) Se $(x, y) \in A \times B$, então $(y, x) \in B \times A$.

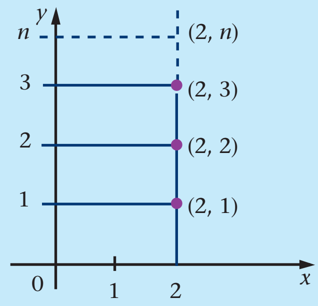
Exemplos:

i) Dados $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, temos:
$A \times B = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$

B \ A	–1	0	1	2
1	(1, –1)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)
2	(2, –1)	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)
3	(3, –1)	(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)



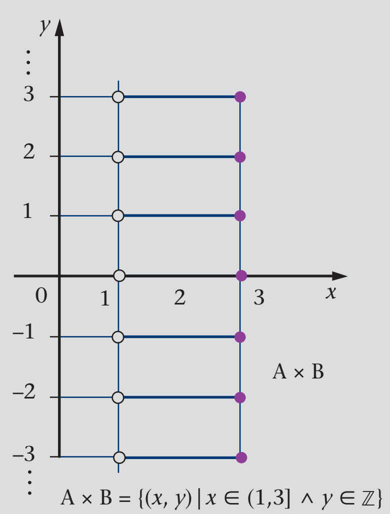
ii) Sendo A = {2} e B = $\mathbb{N}^*$, temos:
A × B = $\{(x, y) \mid x \in \{2\} \wedge y \in \mathbb{N}^*\} = \{(2, y) \mid y \in \mathbb{N}^*\} = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), \ldots\}$



Exercícios resolvidos:

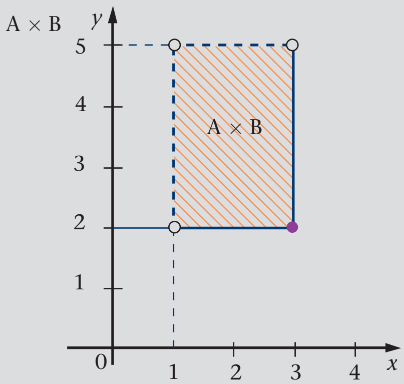
1) Seja A = (1, 3] e B = $\mathbb{Z}$. Calcular A × B.

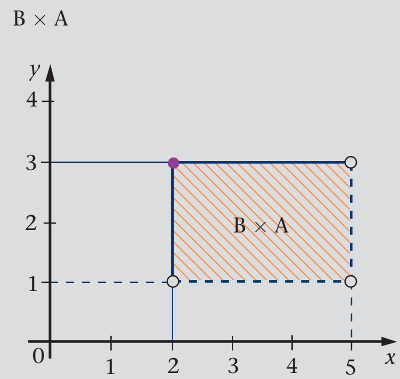
Solução:

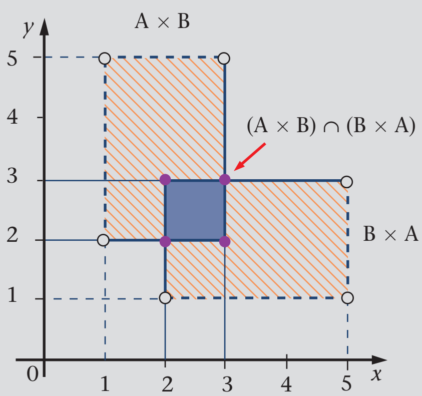


2) Sendo A = (1, 3] e B = [2, 5), esboçar os gráficos de: A × B, B × A e (A × B) ∩ (B × A).

Solução:







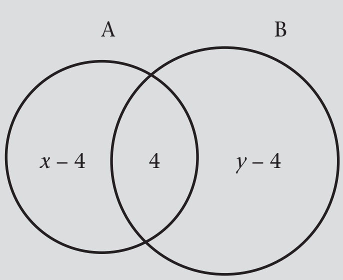
Aqui temos os pontos comuns aos dois produtos.

OBSERVAÇÃO
Note que os pontos sobre as retas tracejadas (onde o intervalo é aberto) não pertencem ao gráfico.

3) Sabendo-se que $n(A) > n(B)$, $n(A \times B) = 90$, $n(A \cup B) = 15$ e $n(A \cap B) = 4$, calcular $n(A)$ e $n(B)$.

Solução: Façamos o diagrama:

Sejam $n(A) = x$ e $n(B) = y$.



Temos: $\begin{cases} xy = 90 \\ x + y - 4 = 15 \end{cases}$ ou seja $\begin{cases} xy = 90 \\ x + y = 19 \end{cases}$

Como $x > y$, temos $x = 10$ e $y = 9$, isto é, $n(A) = 10$ e $n(B) = 9$.

4) De quantas maneiras distintas pode uma pessoa ir do Rio de Janeiro a Brasília, parando em Belo Horizonte, sabendo que existem 10 linhas de ônibus Rio-Belo Horizonte e 6 linhas Belo Horizonte-Brasília?

Solução: A ida Rio-Brasília será por meio do par ordenado de linhas de ônibus (Rio-Belo Horizonte, Belo Horizonte-Brasília). Basta então saber quantos são os pares ordenados possíveis. Sejam $A = \{x \mid x$ é linha Rio-Belo Horizonte$\}$ e $B = \{y \mid y$ é linha Belo Horizonte-Brasília$\}$.

Temos $n(A) = 10$ e $n(B) = 6$ logo, $n(A \times B) = 60$.
Pode-se ir do Rio de Janeiro a Brasília de 60 maneiras diferentes.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, sejam $(2m + n,\ m - 4)$ e $(m + 1,\ 2n)$ dois pares ordenados iguais. Então m^n é igual a:

(A) -2

(B) 0

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 1

(E) $\sqrt{2}$

2 Sejam P = (a, b) e Q = $(c, -2)$ dois pontos no plano cartesiano tais que $ac < 0$, $b < 0$ e $c > 0$. Pode-se afirmar que:

(A) P é um ponto do 1º quadrante.

(B) P é um ponto do 2º quadrante.

(C) P é um ponto do 3º quadrante.

(D) P é um ponto do 4º quadrante.

(E) P pode estar no 1º ou 4º quadrante.

3 Dados os conjuntos A = {0, –1, 1}, B = {1, 3, 4} e C = {0, 1}, temos (A – B) × (C – B) igual a:

(A) {(0, 0), (0, –1)}

(B) {(–1, 0), (0, 0)}

(C) {(0, 0), (0, 1)}

(D) {(0, 1), (0, –1)}

(E) ∅ (vazio)

4 Se $n(A) = 3$ e $n(B) = 2$, então $n(A \times B)$ é igual a:

(A) 1

(B) 6

(C) 12

(D) 18

(E) 36

5 Sejam os conjuntos A e B tais que A × B = [(–1, 0), (2, 0), (–1, 2), (2, 2), (–1, 3), (2, 3)]. O número de elementos do conjunto A ∩ B é:

(A) 0

(B) 1

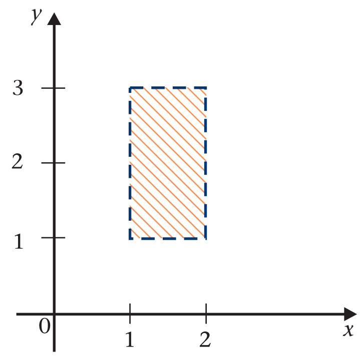
(C) 2

(D) 3

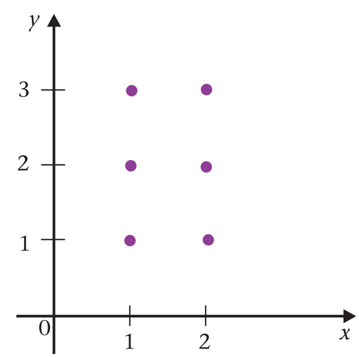
(E) 4

6 (UFPE) Identifique a única alternativa abaixo que representa o gráfico do conjunto B × A, onde A = {1, 2, 3} e B = $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$.

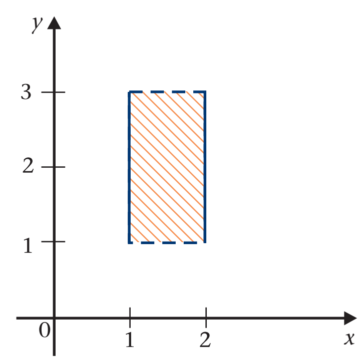
(A)



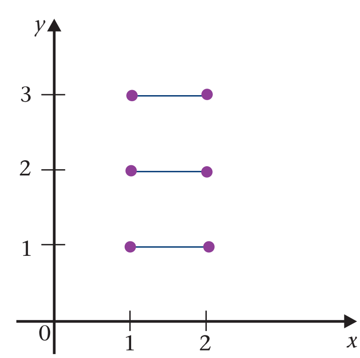
(B)

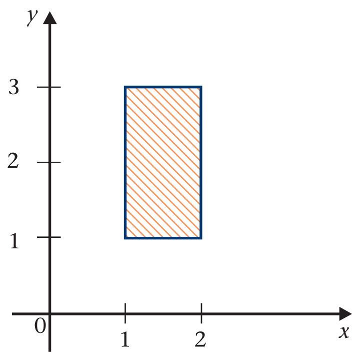


(C)

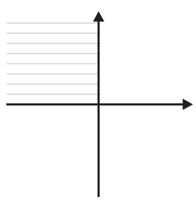


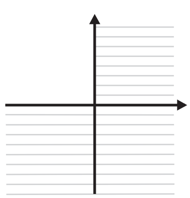
(D)

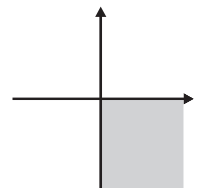


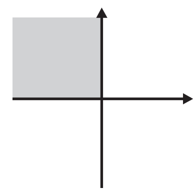
(E)


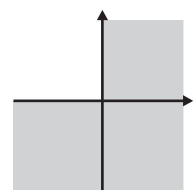
7 Sendo $F = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ e $G = \mathbb{R}^*_- \times \mathbb{N}^*$, a representação gráfica de F – G é:

(A)


(B)


(C)


(D)


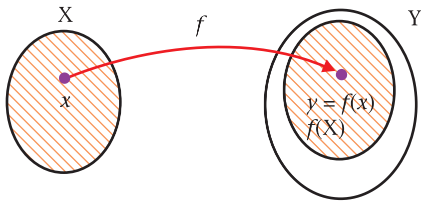
(E)


8 Sabendo que $\{(1, 2), (4, 2)\} \subset A^2$ e $n(A^2) = 9$, qual é o conjunto A?

9 Numa lanchonete há quatro tipos de sanduíches, três tipos de refrigerante e dois tipos de doce. De quantas maneiras podemos tomar um lanche constituído por um sanduíche, um refrigerante e um doce?

3.2 – Funções ou aplicações

Consideremos dois conjuntos X e Y. Uma correspondência que associa **cada** elemento x do conjunto X a um **único** elemento y do conjunto Y é chamada de "**função** ou **aplicação** do conjunto X no conjunto Y", ou ainda, "função definida em X e tomando valores em Y".



NOTA
Esta correspondência se chama **unívoca**. A **univocidade** consiste no fato de cada elemento do conjunto X ter apenas um correspondente no conjunto Y. O sinal utilizado entre os elementos correspondentes é $\mapsto$.

Representaremos a função pela letra f, e escreveremos:

$$f: X \rightarrow Y$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

que se lê: f é uma função de X em Y, que leva x em $y = f(x)$.

Chamaremos de **imagem** de x por f, o elemento y dado por $y = f(x)$.

O conjunto X será chamado: conjunto de partida, conjunto origem, campo de definição ou **domínio** da função f que denotamos **Dom *f***.

f é uma função $\Leftrightarrow \forall x \in X, \exists^* y \in Y \mid y = f(x)$

O conjunto das imagens $f(x)$ é representado por $f(X)$ ou **Im *f***, que é também chamado de **conjunto das imagens** da função f. Note que $f(X)$ é um subconjunto de Y ou $f(X) \subset Y$.

Simbolicamente, temos:

$$\text{Im } f = f(X) = \{y \in Y \mid y = f(x), \text{ para algum } x \in X\}$$

NOTA
Não confundir função f com $f(x)$. De fato, f é a correspondência (a regra de associação, a lei de formação), enquanto $f(x)$ é o elemento de Y associado ao elemento $x \in X$.

Exemplos:

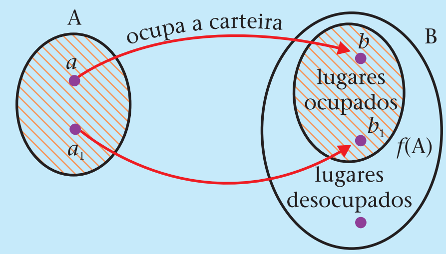
i) Seja o conjunto A dos alunos de uma turma e o conjunto B das carteiras de uma sala de aula. Seja a correspondência f: A → B em que o aluno a do conjunto A está situado na carteira b do conjunto B. Temos aí definida uma função.
Domínio: conjunto dos alunos $A = \{a \mid a \text{ é aluno}\}$.
Contradomínio: conjunto das carteiras $B = \{b \mid b \text{ é carteira}\}$.
Correspondência: a ocupa a carteira b ou b é lugar de a.
Convém observar que:

a) todos os alunos devem ocupar carteiras;

b) cada aluno ocupa uma única carteira;

c) o conjunto das carteiras pode ser maior que o das carteiras ocupadas, isto é, no caso mais geral, $f(A) \subset B$. É claro que pode ocorrer $f(A) = B$;

NOTA
Nada impede que haja dois ou mais alunos na mesma carteira – f continuaria sendo uma função.



d) a imagem de um aluno é uma carteira ocupada;

e) a lei "está situado em" transforma o elemento *a* no elemento *b*.

ii) Consideremos o conjunto T de todos os triângulos possíveis e o conjunto dos reais $\mathbb{R}$.
Façamos a correspondência f: T $\to \mathbb{R}$ em que o triângulo $t \in$ T se associa ao seu perímetro $p \in \mathbb{R}$.
Podemos observar que:

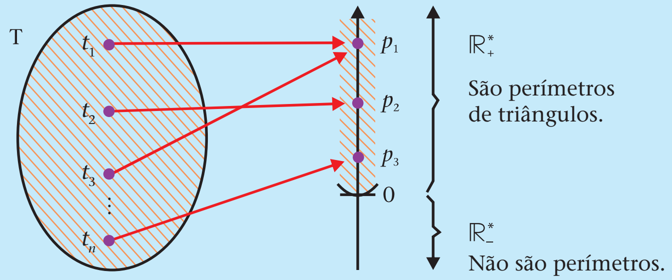
a) cada triângulo tem um só perímetro. A correspondência é unívoca, e, portanto, é uma função;

b) existem vários triângulos que têm o mesmo perímetro. Isso, entretanto, não afeta a definição de função. O que não pode acontecer é um triângulo ter várias imagens (perímetros);

c) cada real positivo é perímetro de um certo triângulo. Há, entretanto, os reais negativos e o zero, que não são perímetros de qualquer triângulo.

d) f: T $\to \mathbb{R} \mid f(t) = p$

e) Im $f = \mathbb{R}_+ - \{0\}$



Temos uma aplicação do conjunto dos triângulos no conjunto dos reais.

Exercícios resolvidos:

1) A correspondência $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ é uma função de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}_+^*$?

<u>Solução:</u> $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$

$$x \mapsto \frac{x}{x+1}$$

Sim, com efeito, a correspondência em questão tem como conjunto de partida os reais positivos, que tem imagem para qualquer x. Só não teria imagem o ponto $x = -1$, mas este não pertence ao domínio $\mathbb{R}_+^*$.

2) Se na correspondência do exemplo anterior o conjunto de partida fosse o dos inteiros $\mathbb{Z}$ e o de chegada o dos reais $\mathbb{R}$, a correspondência seria uma função?

Solução: Não, porque no conjunto dos inteiros haveria o ponto $x = -1$, que não teria imagem, uma vez que a imagem do ponto -1 mediante aquela lei seria:

$$\frac{(-1)}{-1+1} = \frac{-1}{0}$$

que não tem significado matemático.

NOTA
$\frac{1}{0}$ não tem significado matemático
A divisão por zero é impossível.

3) Consideremos a função f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto \frac{2x^2+2}{5}$, que tem como domínio o conjunto dos naturais e como imagens os racionais. Pesquisar a existência de elementos x que coincidam com sua imagem (chamados **pontos fixos**).

Solução: Para obter os pontos fixos, basta fazer $f(x) = x$.

Temos:

$$f(x) = \frac{2x^2+2}{5}, \text{ logo } x = \frac{2x^2+2}{5} \Rightarrow 5x = 2x^2 + 2 \Rightarrow$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \vee x = \frac{1}{2}$$

É interessante notar que o domínio é $\mathbb{N}$. Como $2 \in \mathbb{N}$ e $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, só há um x que coincide com a própria imagem.

O único ponto fixo é $x = 2$.

Observações:

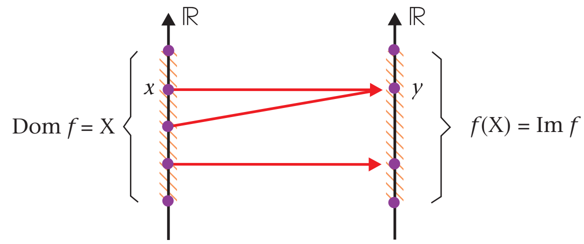
1) Muitas vezes se usa a igualdade $y = f(x)$ em vez de: f: $x \mapsto f(x)$.

2) A imagem de um elemento é um elemento, e a imagem de um conjunto, um conjunto.

3) O elemento genérico do domínio é chamado de variável livre, **variável independente** ou argumento.

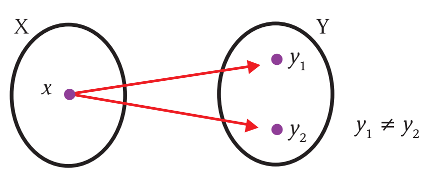
4) O elemento correspondente do contradomínio é chamado de **variável dependente**, imagem da variável livre ou valor da função.

5) Chamamos de **função real** toda função ou aplicação em que o conjunto de partida e o conjunto de chegada são partes dos reais.



6) Cada ponto do domínio tem apenas uma imagem, embora possa haver vários pontos do domínio com a mesma imagem.

Quando a um valor em X correspondem dois ou mais valores em Y, a correspondência NÃO É FUNÇÃO.



7) Para uma função ficar determinada, é preciso conhecer o conjunto de partida (domínio), o conjunto de chegada (contradomínio) e a lei de transformação.

Entretanto, para funções reais, se o domínio não for dado explicitamente, entenderemos que é o maior subconjunto dos reais tal que o conjunto das imagens seja também um subconjunto dos reais.

Pelo fato de, nas funções reais, o domínio e o conjunto das imagens serem subconjuntos dos reais, usaremos, muitas vezes, retas para representá-los, já que existe uma correspondência biunívoca entre os reais e os pontos de uma reta.

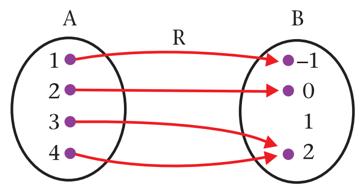
8) Duas funções f e g são iguais se, e somente se, Dom f = Dom g e, para todo $x \in$ Dom f, $f(x) = g(x)$. Simbolicamente:

$$f = g \Leftrightarrow ((\text{Dom } f = \text{Dom } g) \wedge (\forall x,\ f(x) = g(x)))$$

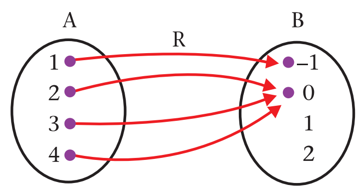
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Verifique se os esquemas das relações abaixo definem ou não uma função de A = {1, 2, 3, 4,} em B = {–1, 0, 1, 2}.

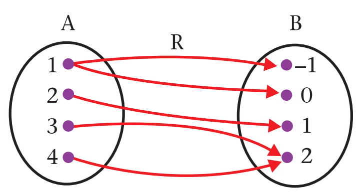
a)



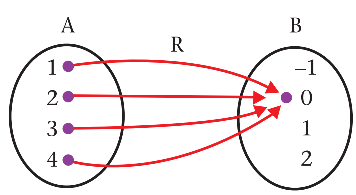
b)



c)



d)



2 A área A de um quadrado é uma função do lado ℓ ($\ell \in \mathbb{R}^*_+$) para cada ℓ. Qual é o valor de A quando $\ell = 3$ cm?

3 "Diagonal de um polígono é o segmento que une dois vértices não consecutivos". Assim, determine:

a) a lei que define quantas diagonais podemos traçar do vértice A de um polígono de n lados;

b) a lei que define quantas diagonais podemos traçar dos vértices A e B de um polígono de n lados;

c) a lei que define quantas diagonais podemos traçar dos vértices A, B e C de um polígono de n lados;

d) a lei que define quantas diagonais podemos traçar dos vértices A, B, C e D de um polígono de n lados;

e) a lei que define quantas diagonais podemos traçar de todos os vértices.

4 Um estacionamento cobra R$ 2,00 pela primeira hora e R$ 1,00 a mais para cada hora seguinte que um carro permanecer lá.

a) Determine a lei que expressa o fato de o preço ser uma função do número de horas que um carro fica nesse estacionamento.

b) Felipe deixou seu carro das 8h às 18h. Quanto ele pagou?

5 O preço que um pintor cobra para pintar uma casa varia com a área a ser pintada de acordo com a tabela abaixo.

Área (m²)	Preço (R$)
0 a 100	200,00
101 a 200	400,00
201 a 400	600,00
401 a 600	800,00
601 a 800	1 000,00
801 a 1 000	1 200,00

a) Qual o preço a ser pago se a área a ser pintada for de 430 m²?

b) Com R$ 800,00, qual a maior área que pode ser pintada?

c) A área a ser pintada é uma função do preço?

d) O preço a ser cobrado é uma função da área a ser pintada?

6 Determine a área de um quadrado cujo lado mede 2 cm. Agora expresse a "lei de formação" (lei de correspondência) que fornece a área do quadrado em função de sua diagonal.

7 Obtenha a "lei de formação" da função que fornece a medida y da diagonal de um quadrado em função da medida x de seu lado.

8 O consumo f de água, em litros, por uma comunidade é dado em função do tempo t, em segundos, pela lei $f(t) = 500\,000t$.

a) Qual o consumo dessa população em 1 minuto?

b) O que significa $f(20) = 10\,000\,000$ nessa função?

c) Em quanto tempo essa população consome 1 800 000 000 ℓ de água?

9 O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$ 3,44 e cada quilômetro rodado custa R$ 0,86, calcule:

a) o preço de uma corrida de 11 km;

b) a distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 21,50 pela corrida.

10 Dados os conjuntos $A = \{-3, -1, 0, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, determinar o conjunto imagem da função f: $A \longrightarrow B$ definida por $f(x) = x + 2$.

11 Seja a função f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 5x + 7$. Calcule os valores reais de x para que se tenha $f(x) = 1$, ou seja, imagem 1 pela função f dada.

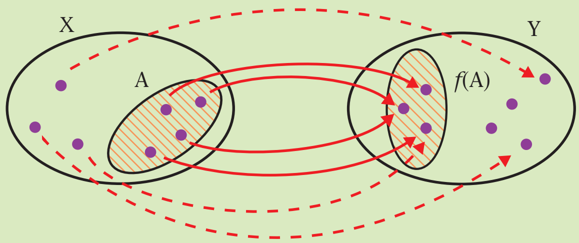
12 Se uma sala tem área igual a 48 m², exprimindo o comprimento e a largura, pede-se:

a) se o comprimento for 4 m, qual deverá ser a sua largura?

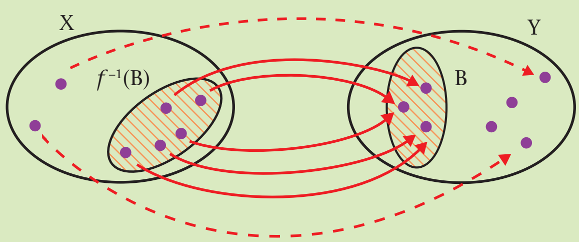
b) se a largura for 6 m, qual deverá ser o seu comprimento?

3.2.1 – Imagem direta e imagem inversa

Chama-se **imagem direta** de um conjunto $A \subset X$ ao conjunto de todas as imagens dos elementos de A. Representa-se por: $f(A) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ para algum } x \in A\}$.



Chama-se **imagem inversa** de um conjunto $B \subset Y$ ao conjunto de todos os pontos de X que tem imagem em B. Representa-se por: $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.



DEFINIÇÃO
Imagem direta e imagem inversa de um conjunto por uma função.

NOTA
Só têm imagem inversa os pontos do conjunto $B \cap \text{Im } f$. Qualquer outro conjunto de pontos tem imagem inversa vazia.

Note que $f^{-1}(Y) = X$ e $A \subset B \Leftrightarrow f(A) \subset f(B)$.
Para $f^{-1}(\{y\})$ usaremos a notação $f^{-1}(y)$.

Exemplos:

i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = x^2$

a) $A = \{0, \pm1, \pm2\} \Rightarrow f(A) = \{0, 1, 4\}$ visto que:
$f(0) = 0^2 = 0$, $f(1) = 1^2 = 1$, $f(-1) = (-1)^2 = 1$
$f(-2) = (-2)^2 = 4 = f(2)$

b) $B = [-2, 1]$. Queremos calcular $f^{-1}(B)$.
Se $x \in f^{-1}(B)$, então $f(x) = x^2 \in B = [-2, 1]$, isto é, $-2 \le x^2 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$
Portanto: $f^{-1}([-2, 1]) = f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1]$

ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = |x|$

a) $A = (-2, 1) \Rightarrow f(A) = [0, 2)$
Temos que:
$f((-2, 0)) = [0, 2)$ e $f((0, 1)) = (0, 1)$, logo:
$f((-2, 1)) = [0, 2) \cup (0, 1) = [0, 2)$

NOTA
Para se encontrar a imagem direta de um ponto, substitui-se o valor deste ponto na fórmula que define a função.

NOTA
Lembrar que $x^2 \ge 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Portanto, $f^{-1}([-2, 0)) = \varnothing$.

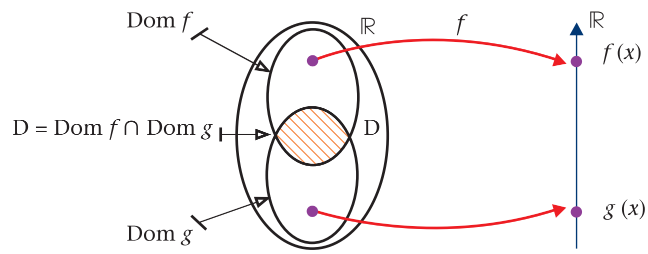
NOTA
Para se encontrar a imagem inversa de um ponto $a \in Y$, resolve-se a equação $f(x) = a$ calculando os valores de x que tem a como imagem.

b) $B = \{-1, 0, 1\} \Rightarrow f^{-1}(B) = B$
Basta ver que:
$f(x) = |x| = -1 \Rightarrow x$ não existe. Assim, $f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$.
$f(x) = |x| = 0 \Rightarrow x = 0$. Assim, $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.
$f(x) = |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Assim, $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$.
Juntando tudo, $f^{-1}(B) = f^{-1}(\{-1, 0, 1\}) = \{0, -1, 1\} = B$.

NOTA
Só existe o resultado numa operação quando existem os valores de ambas as funções.

3.2.2 – Operações com funções reais

Sejam f e g tais que seus domínios sejam subconjuntos dos reais, isto é: $\text{Dom } f \subset \mathbb{R}$ e $\text{Dom } g \subset \mathbb{R}$. Chamemos $D = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$. Definimos:



DEFINIÇÃO
Operações entre funções reais.

Duas funções f e g são iguais se, e somente se, $\text{Dom } f = \text{Dom } g$ e, para todo $x \in D$ tenha $f(x) = g(x)$.

$f = g \Leftrightarrow (\forall x, x \in \text{Dom } f = \text{Dom } g \Rightarrow f(x) = g(x))$

i) **Adição**
Define-se como soma das funções f e g à função:
$f + g: D \to \mathbb{R} \mid (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

ii) **Multiplicação**
Chama-se produto das funções f e g à função:
$f \cdot g: D \to \mathbb{R} \mid (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

iii) **Divisão**
Chama-se quociente das funções f e g à função:
$$\frac{f}{g}: D - \{x \mid g(x) = 0\} \to \mathbb{R} \mid \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

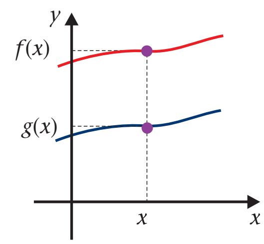
Observações:

1) Se $f(x) = 0$ para todo x, chamamos a função de **identicamente nula**.

2) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e f é uma função, define-se:

$$\lambda f: \text{Dom } f \to \mathbb{R} \mid (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

3) Quando Dom f = Dom g = D, diz-se que $f \geq g \Leftrightarrow (\forall x, x \in D \Rightarrow f(x) \geq g(x))$



Exercícios resolvidos:

Seja f uma função de variável real.

1) Calcule o domínio da função $f: x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

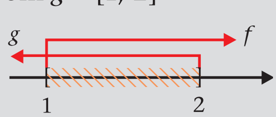
Solução: Devemos ter: $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2 \Rightarrow$ Dom $f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

2) Calcule o domínio da função $f: x \mapsto \sqrt{(x-1)(3-x)}$.
Solução: Devemos ter: $(x - 1)(3 - x) \geq 0$

	$-\infty$ … 1	1 … 3	3 … $+\infty$
$x - 1$	$-$	$+$	$+$
$3 - x$	$+$	$+$	$-$
$(x-1)(3-x)$	$-$	$+$	$-$

Então: $1 \leq x \leq 3 \Rightarrow$ Dom $f = [1, 3]$

3) Se $f: x \mapsto \sqrt{x-1}$ e $g: x \mapsto \sqrt{2-x}$, calcule Dom $(f + g)$.
Solução: Temos que Dom $f = [1, +\infty)$ e Dom $g = (-\infty, 2]$.
Dom $(f + g)$ = Dom $f \cap$ Dom $g = [1, 2]$



4) Sendo $f: x \mapsto \sqrt{5-x}$ e $g: x \mapsto x + 1$, calcule Dom $\left(\dfrac{f}{g}\right)$.

Solução: Temos que Dom $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ = (Dom $f \cap$ Dom g) $- g^{-1}(0)$.

Dom $f = (-\infty, 5]$ e Dom $g = \mathbb{R}$
Calculemos $g^{-1}(0)$: $g^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\} = \{-1\}$

Logo: Dom $\left(\dfrac{f}{g}\right) = (-\infty, 5] - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 5]$

5) Verificar se as funções definidas pelas fórmulas $y = x$ e $y = \sqrt{x^2}$ são iguais.
Solução: Não são, porque $\sqrt{x^2} = |x|$ que só assume valores do $\mathbb{R}_+$, enquanto $y = x$ pode assumir valores negativos. As funções só seriam iguais se fosse dado um domínio comum para as duas contido no $\mathbb{R}_+$.

NOTA
$\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{5-x}}{x+1}$

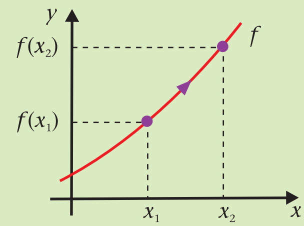
NOTA
$\sqrt{x}$ é, por definição, valor positivo ou nulo

3.2.3 – Funções crescentes e decrescentes

DEFINIÇÃO
Função crescente.

Dizemos que f é **crescente** em seu domínio se x e $f(x)$ variarem no mesmo sentido, isto é:

$$\forall x_1, x_2 \in \text{Dom } f, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

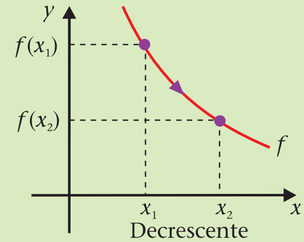


Crescente

DEFINIÇÃO
Função decrescente.

Dizemos que f é **decrescente** em seu domínio se x e $f(x)$ variarem em sentidos contrários, isto é:

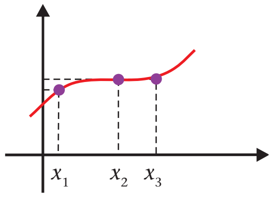
$$\forall x_1, x_2 \in \text{Dom } f, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$



Decrescente

Observação:

Note que a definição de função crescente permite a existência de platôs horizontais no gráfico, como por exemplo:



Crescente

NOTA
Procure a palavra "estritamente" no dicionário.

Caso tais platôs não existam, a função é dita **estritamente crescente**, isto é: f é estritamente crescente $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \text{Dom } f, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$. Analogamente: f é **estritamente decrescente** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \text{Dom } f, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Seja a função definida de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ pela lei $f(x) = 3x - 2$, calcule:

a) $f(2)$

b) $f(-1)$

c) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

d) $f(1 - \sqrt{2})$

e) $f(0)$

2 Dê o domínio das seguintes funções reais:

a) $f(x) = 3x$

b) $f(x) = \dfrac{3}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{-2}{x^2+1}$

e) $f(x) = \sqrt{x}$

f) $f(x) = \sqrt[4]{x-1}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

h) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - x}$

i) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x - 1}$

j) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt[4]{3-x}$

k) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

l) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{3-x}}$

m) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[2]{3-x}}$

n) $f(x) = \sqrt[4]{2x-6} + \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$

o) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x(x+1)}}$

3 Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = 4x - 5$

b) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

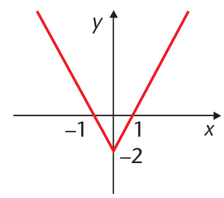
4 Ache o domínio das funções.

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x+3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4+x}} - \dfrac{7x}{x-2}$

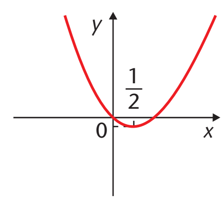
b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-6}} + \dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$

5 Em cada função real abaixo, destaque em que intervalo a função é crescente ou decrescente.

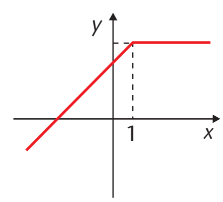
a)



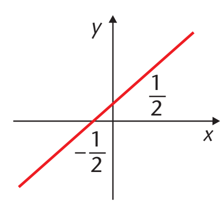
b)



c)



d)



6 Verifique se as funções definidas em $\mathbb{R}$ são crescentes, decrescentes ou constantes.

a) $f(x) = 3$

b) $f(x) = 3x$

c) $f(x) = -3x$

d) $f(x) = x + 1$

e) $f(x) = -x + 1$

f) $f(x) = x^2$

g) $f(x) = -x^2$

7 Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 1$. Determine todos os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais é válida a igualdade $f(k^2) - 2f(k) + f(2k) = \dfrac{k}{2}$.

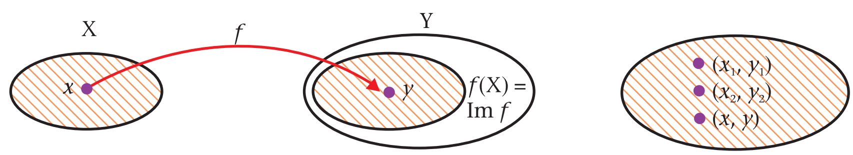
3.3 – Funções: outras representações e enfoques

NOTA
Uma função pode ser definida de maneiras diferentes, conforme a conveniência.

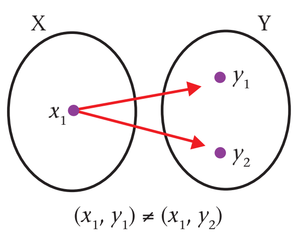
3.3.1 – Pares ordenados e tabelas

Consideremos uma função *f*, definida num conjunto X e tomando valores em um conjunto Y.

Como a cada *x* corresponde um e somente um *y*, podemos reunir os *x* com as suas imagens *y* num conjunto de pares ordenados $(x, y) = (x, f(x))$. Tal conjunto define também a função *f*. Esses pares formam um subconjunto do produto cartesiano X × Y.



O detalhe importante a destacar é que, no conjunto *f* de pares ordenados, não há dois pares com o mesmo *x*, já que a correspondência é **unívoca**. Se houvesse dois pares com a mesma "primeira componente *x*", e "segundas componentes diferentes", teríamos uma correspondência **plurívoca**.



A função *f* poderia ainda ser escrita por meio de uma tabela em que se indique os pares de pontos correspondentes. Assim:

x	y
x_1	$y_1 = f(x_1)$
x_2	$y_2 = f(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$y_n = f(x_n)$

NOTA
$f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ é função se, e somente se, $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f \Rightarrow y = z$

Sendo *f* função, na primeira coluna não há dois *x* iguais. Na primeira coluna está o domínio, e na segunda, o conjunto das imagens. Simbolicamente, podemos escrever:

$$\forall x \in X, \exists^* y \in Y \mid (x, y) \in f$$

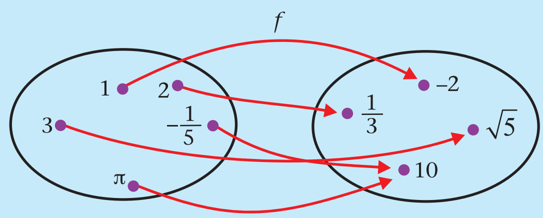
Exemplos:

i) $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$

$$\begin{cases} \text{Domínio} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leqslant 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

Neste caso, há uma fórmula que transforma cada x do domínio em sua imagem x^2.

ii) A função



se escreve: $f = \left\{(1, -2), \left(2, \frac{1}{3}\right), (3, \sqrt{5}), \left(-\frac{1}{5}, 10\right), (\pi, 10)\right\}$ ou conforme a tabela:

x	y
$-\frac{1}{5}$	10
1	– 2
2	$\frac{1}{3}$
3	$\sqrt{5}$
π	10

Neste caso, não há lei matemática que defina a função.
Isso não vai contra a definição de função, porque a condição básica é que cada valor de x do domínio corresponde a um, e somente um, do **contradomínio.**

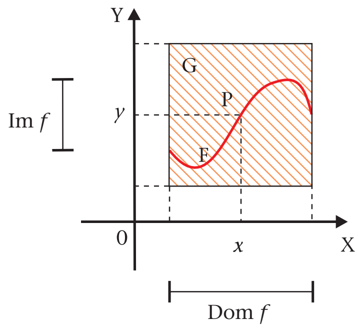
3.3.2 – Gráfico de uma função

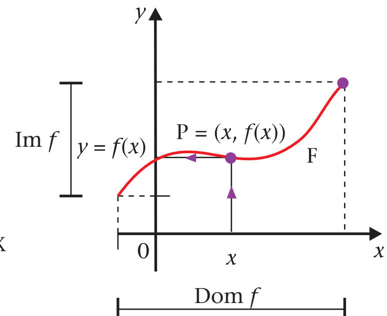
O gráfico F de uma função f, definida num subconjunto X dos reais é o **subconjunto** dos pontos do plano coordenado constituído pelos pontos de coordenadas (x, y) em que $x \in X$ e $y = f(x)$.

Como uma função é uma correspondência unívoca, a um valor $x \in X$ está associado um único valor $y = f(x)$.

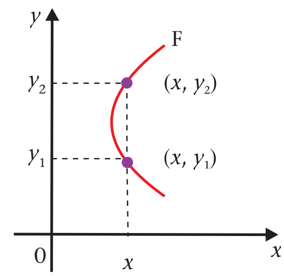
Qualquer paralela a Oy por um ponto x do domínio X intercepta o gráfico F da função num único ponto.

Sendo X o domínio da função, e Y = f(X), o conjunto imagem, os pontos do gráfico F serão pontos do gráfico do produto cartesiano X × Y tais que não haja dois pontos para a mesma abscissa.





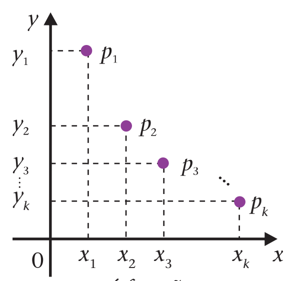
é função



não é função

Observações:

1) O gráfico da função terá um número de pontos igual ao número de pontos do domínio X se for finito.



é função
Dom f = {x_1, x_2, ..., x_k}
Im f = {y_1, y_2, ..., y_k}

2) Se houver algum valor de $x \in$ X que não tenha $y \in$ Y correspondente, então a correspondência não é função, por exemplo, na figura anterior, se o conjunto de partida fosse $\mathbb{R}$ não teríamos uma função.

3) Se a função é dada por uma relação funcional $y = f(x)$, os pontos do gráfico estarão sobre uma linha F contida no retângulo G, gráfico do produto X × Y.

Exemplos:

i) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid x + y = 10\}$

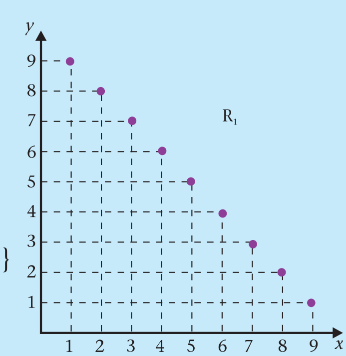
Temos:

x	y
1	9
2	8
⋮	⋮
9	1

X = {1, 2, ..., 9}

Y = {9, 8, ..., 1}

R_1 = {(1, 9), (2, 8), ..., (9, 1)}

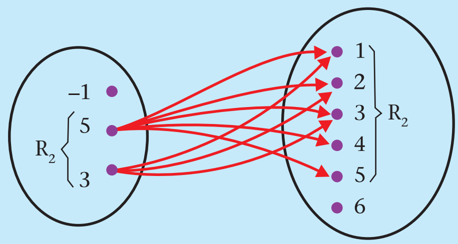


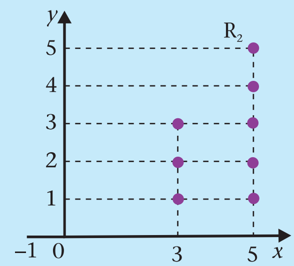
Neste caso, esta relação é uma função.

NOTA
Para indicar que um ponto (x, y) está na relação R se escreve x R y.

OBSERVAÇÃO
O gráfico da relação R_1 são pontos situados sobre uma reta decrescente.

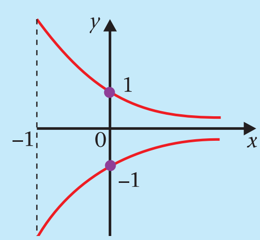
ii) $R_2 = \{(x, y),\ x \in \{-1, 5, 3\} \text{ e } y \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \mid x \geq y\}$
Temos:





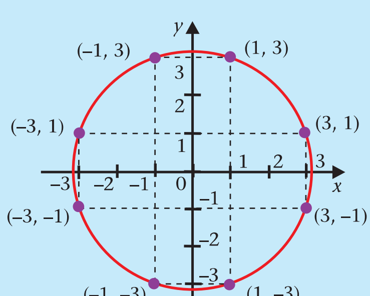
$R_2 = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$
Esta relação não é uma função. Há pares com a mesma primeira componente.

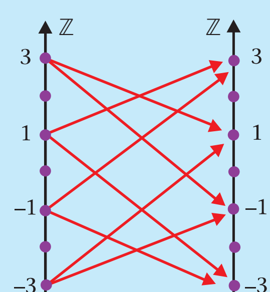
iii) $R_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = \dfrac{1}{x+1}\right\}$
O domínio será: $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$
Convém observar neste exemplo que a cada $x > -1$ correspondem dois valores de y. Esta relação não é uma função.
A saber: $y = \pm\sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$



NOTA
$R_3 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$

iv) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + y^2 = 10\}$
$R_4 = \{(1, -3), (1, 3), (-1, -3), (-1, 3), (3, 1), (3, -1), (-3, 1), (-3, -1)\}$
Esta relação não é uma função.



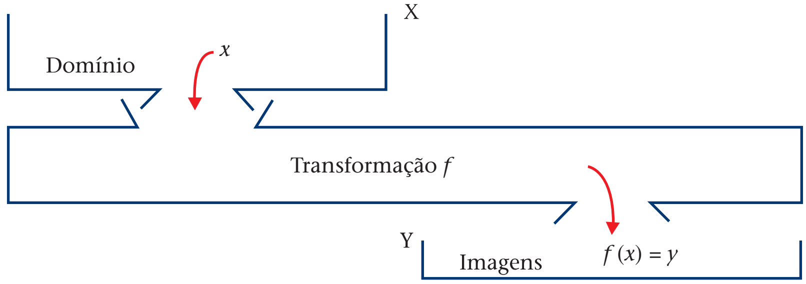


Observe que todos os pontos do gráfico estão sobre um círculo de centro na origem e raio $\sqrt{10}$.

3.3.3 – Função como transformação

Uma forma interessante de encarar a função é considerá-la uma **máquina que transforma**, mediante a lei *f*, os elementos do domínio nas suas imagens.

A máquina executa a transformação *f*. Se for colocado um elemento *x* do domínio na entrada, ao sair, ele sai transformado em *f*(*x*). Se, entretanto, for colocado na máquina um elemento que não pertença ao domínio, ela não funciona.

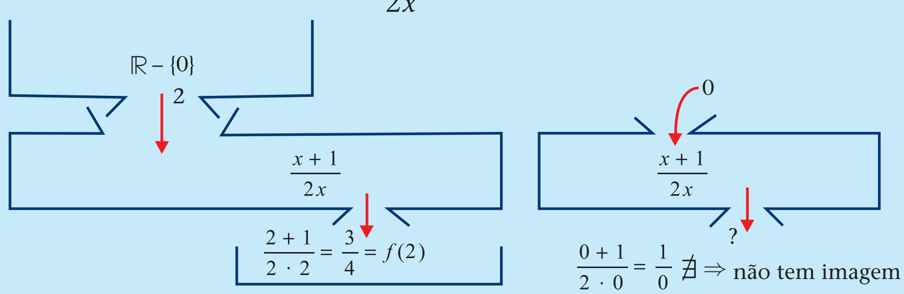


NOTA
Para se obter *f*(2) substitui-se *x* por 2 na fórmula de transformação $f(x) = \frac{x+1}{2x}$.

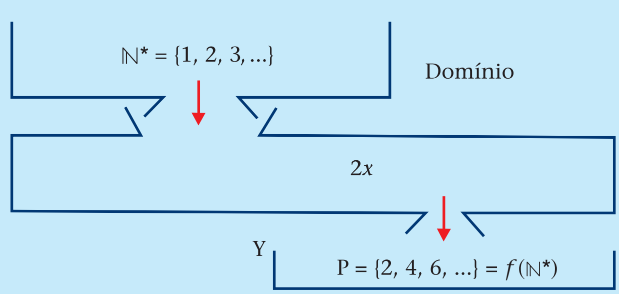
NOTA
A imagem de um conjunto é um conjunto.

Exemplos:

i) Seja a função: $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \mid y = \dfrac{x+1}{2x}$



ii) Seja a função *f*, tal que *f*(*x*) = 2*x*, definida sobre os naturais $\mathbb{N}^*$.
Domínio: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$
Temos:



A imagem dos naturais não nulos é o conjunto dos números pares positivos.

3.4 – Função definida por várias fórmulas

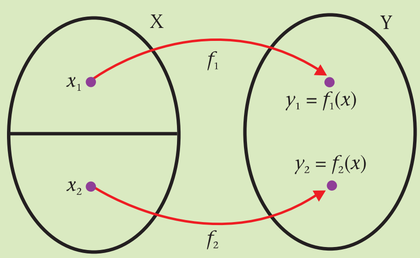
Suponhamos que o domínio de X de uma função f: X $\rightarrow$ Y seja decomposto em duas partes X_1 e X_2 tal que $X_1 \cup X_2 = X$ e $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Muitas vezes é conveniente estudar a função f por meio de duas restrições f_1: $X_1 \rightarrow Y$ e f_2: $X_2 \rightarrow Y$, isto é:

$$f: X_1 \cup X_2 \rightarrow Y$$

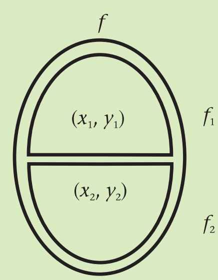
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), \text{ se } x \in X_1 \\ f_2(x), \text{ se } x \in X_2 \end{cases}$$

Neste caso, diz-se que f é, então, a união das funções f_1 e f_2 e escreve-se: $f = f_1 \cup f_2$.

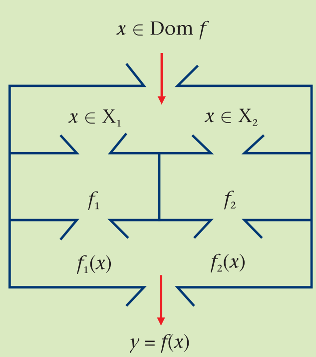
DEFINIÇÃO
União de funções.



Como correspondência



Como conjunto de pares ordenados



Como transformação

Exemplos:

i) Seja a função f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \mid f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, \text{ se } x \text{ é par} \\ -\dfrac{x+1}{2}, \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$

Nesta função, Dom $f = \mathbb{N}$. Façamos uma partição do domínio $\mathbb{N}$ nos conjuntos: $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\}$ e $I = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar}\}$.

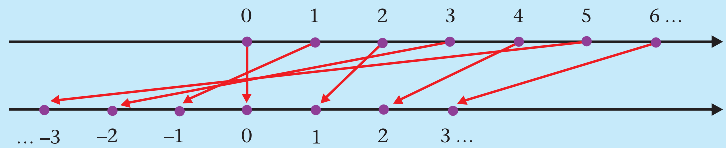
$$x \in \{0, 2, 4, ...\} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{2} \in \{0, 1, 2, ...\} = f(P) \subset \mathbb{Z}_+$$

NOTA
Dizemos que {I, P} é uma partição de $\mathbb{N}$, pois $I \cap P = \varnothing$ e $I \cup P = \mathbb{N}$.

NOTA
Este exemplo prova que o conjunto dos números naturais é equipotente ao conjunto dos inteiros, isto é, seus elementos se correspondem um a um.

$$x \in \{1, 3, 5, \ldots\} \Rightarrow f(x) = -\frac{x+1}{2} \in \{-1, -2, -3, \ldots\} = f(\mathrm{I}) \subset \mathbb{Z}_-$$

Temos então: $f(\mathbb{N}) = f(\mathrm{I}) \cup f(\mathrm{P}) = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}$



$f(0) = \frac{0}{2} = 0$

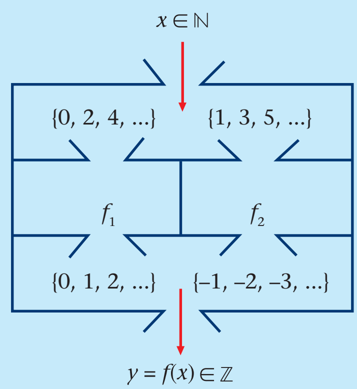
$f(1) = -\frac{1+1}{2} = -1$

$f(2) = \frac{2}{2} = 1$

$f(3) = -\frac{3+1}{2} = -2$

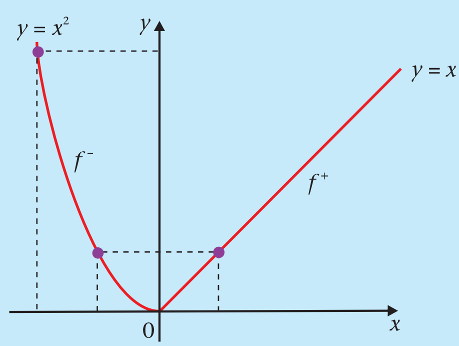
$f(4) = \frac{4}{2} = 2$

$f(5) = -\frac{5+1}{2} = -3$



ii) Seja a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

O gráfico desta função será:

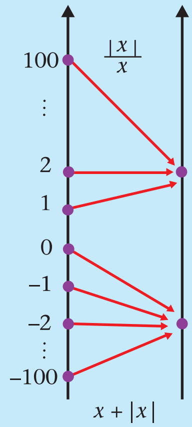


O gráfico é constituído de dois ramos, um relativo à função $f^-\colon \mathbb{R}^*_- \to \mathbb{R} \mid y = x^2$ e outro à função $f^+\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \mid y = x$.
O gráfico de f é a união de f^+ com f^-.

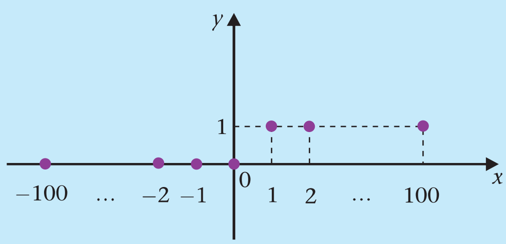
$$f = f^+ \cup f^-$$

iii) Seja a função:

$$f\colon [-100, 100] \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \mid f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{se } x > 0 \\ x + |x|, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



x	y
100	1
⋮	⋮
2	1
1	1
0	0
–1	0
–2	0
⋮	⋮
–100	0

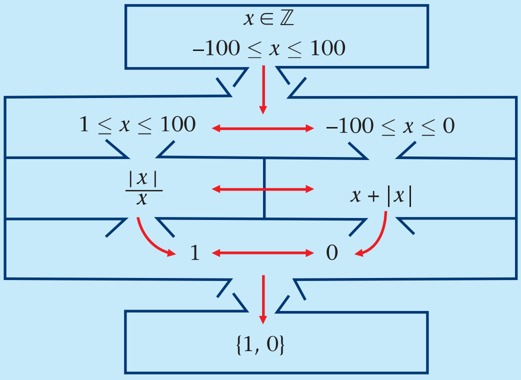


Escreve-se:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 1 \le x \le 100 \\ 0, & \text{se } -100 \le x \le 0 \end{cases}$$

Neste caso, temos duas leis na transformação:

$$f_1(x) = \frac{|x|}{x}, \quad \text{se } x \in \mathbb{Z} \wedge (1 \le x \le 100)$$
$$f_2(x) = x + |x|, \quad \text{se } x \in \mathbb{Z} \wedge (-100 \le x \le 0)$$



NOTA
É comum uma função ser definida por intervalos nos quais as fórmulas que as definem são diferentes.

NOTA
As funções servem para modelagem de situações concretas em que se deseja relacionar duas grandezas dependentes.

Exercícios resolvidos:

1) A produção mensal de uma indústria é dada pela fórmula $p(x) = 10x^2 + 50x + 100$ unidades, onde x é o número de operários dessa fábrica.

i) Qual era a produção quando a indústria tinha 20 operários?

ii) Qual foi o aumento da produção quando a fábrica contratou mais 5 operários?

Solução:

i) Para um contingente de 20 operários a produção será:
$p(20) = 10 \cdot 20^2 + 50 \cdot 20 + 100$
$p(20) = 10 \cdot 400 + 1\,000 + 100$
$p(20) = 5\,100$ unidades mensais

ii) Quando se passa de 20 para 25 operários a produção de $p(20)$ passa para $p(25)$, logo o aumento da produção será $p(25) - p(20)$.
$p(25) = 10 \cdot 25^2 + 50 \cdot 25 + 100$
$p(25) = 10 \cdot 625 + 1\,250 + 100 = 6\,250 + 1\,350 = 7\,600$
O aumento da produção será de $7\,600 - 5\,100 = 2\,500$ unidades.

2) O preço dos telefones celulares vem sendo reduzido e estima-se que o preço de um dado modelo será ao fim de x meses dado por $p(x) = 200 + \dfrac{220}{x+2}$ reais.

i) Qual será o preço daqui a 8 meses?

ii) Quanto barateará no nono mês?

iii) No fim de quantos meses o preço será 210 reais?

Solução:

i) $p(8) = 200 + \dfrac{220}{8+2} = 200 + \dfrac{220}{10} = 200 + 22 = 222$ reais

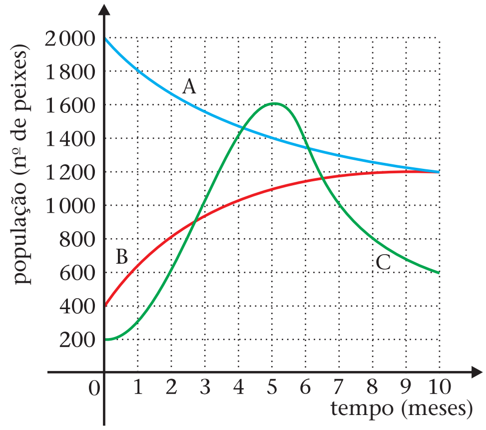
ii) O preço no final do nono mês será $p(9)$ e no final do oitavo mês será $p(8)$, logo a variação de preço será $p(9) - p(8) = \left(200 + \dfrac{220}{11}\right) - \left(200 + \dfrac{220}{10}\right) = 220 - 222 = -2$

O preço barateará 2 reais.

iii) $200 + \dfrac{220}{x+2} = 210 \Rightarrow \dfrac{220}{x+2} = 10 \Rightarrow x + 2 = 22 \Rightarrow x = 20$ meses

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Num tanque, as variações na população de espécies de peixes A, B, e C são descritas, no período de 10 meses, pelo gráfico:



Quais afirmações a seguir são verdadeiras?

(A) No período de 0 a 2 meses, a população B manteve-se menor que a C.

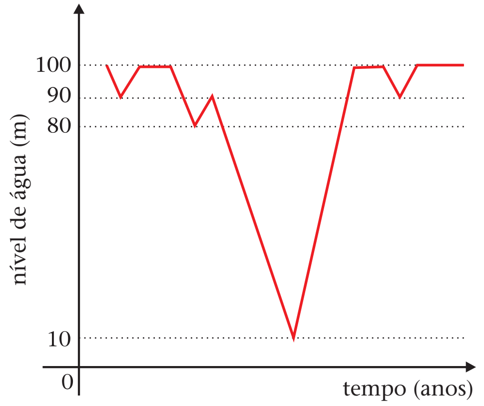
(B) No quinto mês, havia menos de 3 500 peixes nesse tanque.

(C) No período de 0 a 5 meses, as populações B e C mantiveram-se crescentes.

(D) A população C atingiu o seu máximo no terceiro mês.

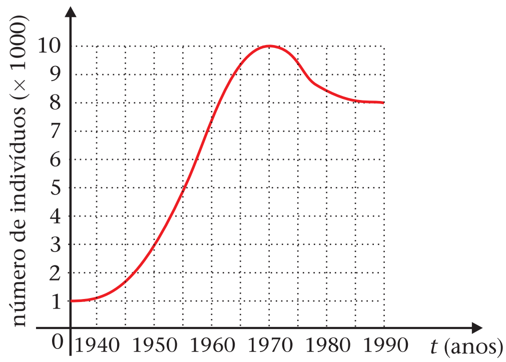
(E) No período de 3 a 7 meses, a população B manteve-se maior que a A.

2 (UFPE) No gráfico abaixo, temos o nível de água armazenada em uma barragem, ao longo de três anos.



O nível de 40 m foi atingido quantas vezes nesse período?

3 (Enem) O número de indivíduos de certa população é representado pelo gráfico abaixo.



Em 1975, a população tinha um tamanho aproximadamente igual ao de:

(A) 1960

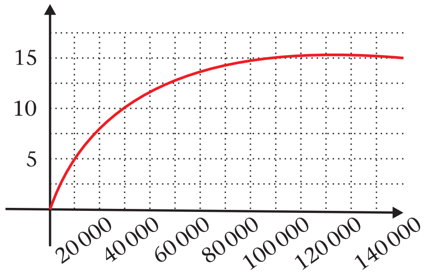
(B) 1963

(C) 1967

(D) 1970

(E) 1980

4 A obsidiana é uma pedra de origem vulcânica que, em contato com a umidade do ar, fixa água em sua superfície formando uma camada hidratada. A espessura da camada hidratada aumenta de acordo com o tempo de permanência no ar, propriedade que pode ser utilizada para medir sua idade. O gráfico abaixo mostra como varia a espessura da camada hidratada, em mícrons (1 mícron = 1 milésimo de milímetro), em função da idade da obsidiana.



Com base no gráfico, pode-se concluir que a espessura da camada hidratada de uma obsidiana:

(A) é diretamente proporcional à sua idade.

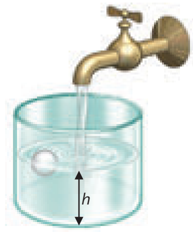
(B) dobra a cada 10 000 anos.

(C) aumenta mais rapidamente quando a pedra é mais jovem.

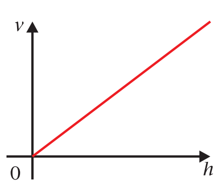
(D) aumenta mais rapidamente quando a pedra é mais velha.

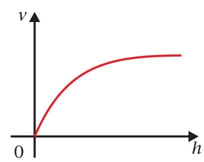
(E) a partir de 100 000 anos não aumenta mais.

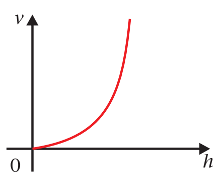
5 (Fuvest-SP) Uma bolinha de isopor encontra-se no fundo de um recipiente. Abre-se uma torneira para encher o recipiente, conforme ilustra a figura.

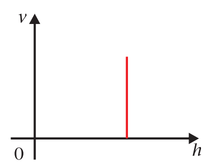


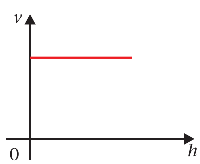
Qual o gráfico que melhor representa o valor da velocidade vertical *v* da bolinha em função da altura *h*?

(A)


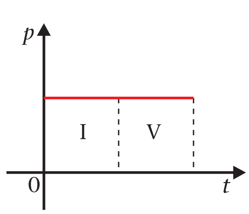
(D)


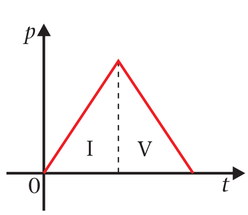
(B)


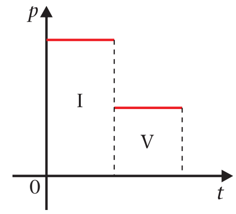
(E)


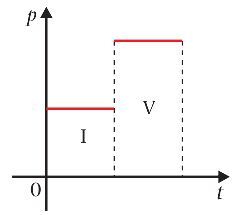
(C)


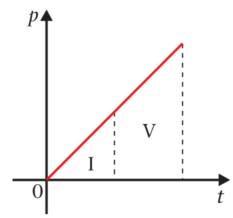
6 (Fuvest-SP) Um chuveiro elétrico funciona durante certo tempo com a chave na posição *inverno* (I), a seguir a chave é ligada na posição *verão* (V). Qual dos gráficos abaixo melhor representa a potência *p* do chuveiro em função do tempo *t*?

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


7 A tabela abaixo mostra como deveria ser calculado o imposto de renda (pessoa física) na declaração de ajuste anual do exercício de 2006 ano-calendário de 2005.

Base de cálculo	Alíquota	Parcela a deduzir
Até R$ 13.968,00	Isento	—
De R$ 13.968,00 a R$ 27.912,00	15%	R$ 2.095,20
Acima de R$ 27.912,00	27,5%	R$ 5.584,20

Para calcular o imposto devido, basta aplicar a alíquota sobre o total de rendimentos e subtrair o valor da dedução correspondente.

a) Qual seria o imposto devido de uma pessoa que teve, durante o ano, um rendimento de R$ 26.500,00?

b) E de quem teve um rendimento de R$ 13.000,00?

c) Se um cidadão, que só deduz o que está indicado na tabela, faz os cálculos e conclui que seu imposto devido é de R$ 6.200,00, qual foi o rendimento dele nesse ano?

8 Um fabricante vende um certo produto por R$ 12,00 cada unidade. O custo total é de um valor fixo de R$ 36,00, somado ao custo de produção de R$ 6,00 por unidade. Quantas unidades, no mínimo, o fabricante necessita vender para obter lucro?

9 Felipe possui R$ 23,00. Comprou um bolo por R$ 14,60 e ainda deseja comprar brigadeiros caseiros que custam R$ 0,75 cada um. Quantos brigadeiros, no máximo, ele pode comprar?

3.5 – Função composta

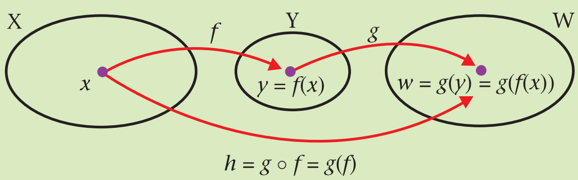
Consideremos três conjuntos, X, Y e W e duas funções: f definida em X e tomando valores em Y, e g definida em Y e tomando valores em W.

A todo elemento $x \in X$, f associa um e somente um $y \in Y$ tal que: $y = f(x)$.

A todo elemento $y \in Y$, g associa um e somente um $w \in W$ tal que: $w = g(y)$.

Assim, para qualquer $x \in X$, pode-se associar um e somente um $w \in W$ tal que $w = g(f(x))$. Fica então definida uma função de X em W, que chamamos de **composta de g com f.**

$$h: X \to W \mid w = h(x) = g(f(x))$$

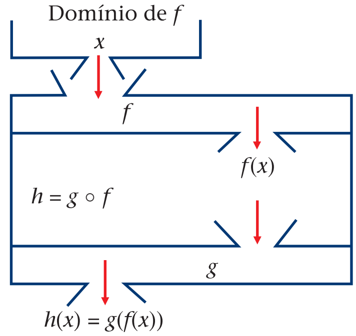


DEFINIÇÃO
Composição de função.

Representa-se a função composta h por: $h = g \circ f$, que se lê "g bola f".
Simbolicamente, temos:

$$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$$

A máquina h é única, constituída pela associação de duas outras f e g.
Esquematicamente, temos:



NOTA
A função composta é obtida com a aplicação sucessiva das funções f e g.

OBSERVAÇÃO
Pensando como pares ordenados, temos que $(x, w) \in g \circ f \Leftrightarrow [(x, y) \in f \wedge (y, w) \in g]$. Essa definição se presta para a composição de relações que não sejam funções.

A variável dependente de uma função serve como variável livre para a seguinte.

NOTA
A ordem de notação deve ser obedecida. A primeira função deve sempre ser escrita à direita.

Propriedades

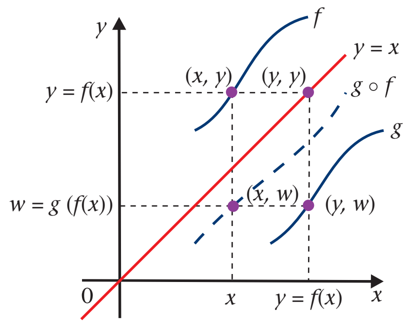
1) O conjunto das imagens de $f(x)$ deve estar contido no domínio de g.

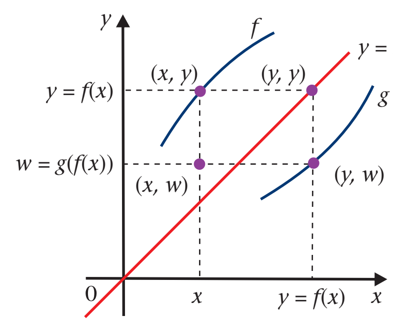
2) $\text{Dom } g \circ f = \text{Dom } f$

3) $\text{Im } g \circ f \subset \text{Im } g$

3.5.1 – Gráfico de $g \circ f$

Pelo ponto x genérico de f, determinamos $(x, f(x))$. Por uma paralela a Ox até a bissetriz $y = x$, transformamos a ordenada $f(x)$ em abscissa. Uma paralela a Oy por $f(x)$ permite determinar em g, $g(f(x))$. Trazendo $g(f(x))$ para a abscissa x, temos o ponto $(x, g \circ f(x))$ pertencente à função composta $g \circ f$. Repete-se a operação um número suficiente de vezes.



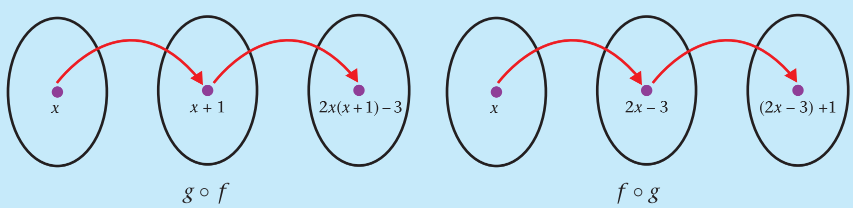


NOTA
Para se obter $g \circ f(x)$, basta substituir x de $g(x)$ por $f(x)$ e para se obter $f \circ g(x)$, basta substituir x de $f(x)$ por $g(x)$.

Exemplos:

i) Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x + 1 = f(x)$ $\qquad$ $x \mapsto 2x - 3 = g(x)$



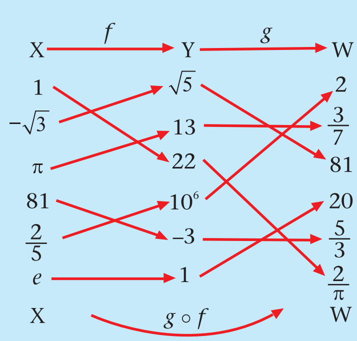
Então:

a) $g \circ f(x) = g(f(x)) = 2f(x) - 3 = 2(x + 1) - 3 = 2x - 1$

b) $f \circ g(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = 2x - 3 + 1 = 2x - 2$

ii) $f = \left\{(1, 22), \left(-\sqrt{3}, \sqrt{5}\right), (\pi, 13), (81, -3), \left(\frac{2}{5}, 10^6\right), (e, 1)\right\}$

$g = \left\{\left(13, \frac{3}{7}\right), (10^6, 2), \left(22, \frac{2}{\pi}\right), \left(\sqrt{5}, 81\right), \left(-3, \frac{5}{3}\right), (1, 20)\right\}$



Observe que o conjunto Y é domínio de g é o contradomínio de f.
Cada elemento do conjunto X se corresponde com sua imagem no conjunto W por intermédio de um elemento do conjunto Y.

$$(x, y) \in f \text{ e } (y, w) \in g \Rightarrow (x, w) \in g \circ f$$

$$g \circ f = \left\{\left(1, \frac{2}{\pi}\right), (-\sqrt{3}, 81), \left(\pi, \frac{3}{7}\right), \left(81, \frac{5}{3}\right), \left(\frac{2}{5}, 2\right), (e, 20)\right\}$$

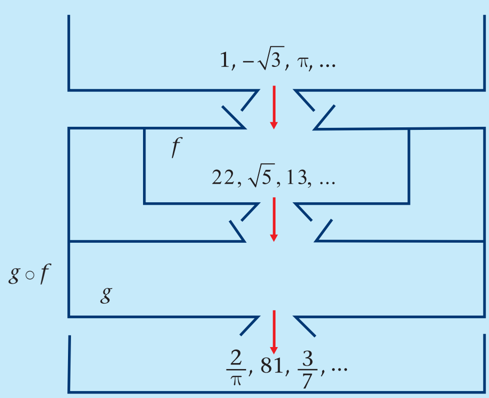
Usando tabelas, teríamos:

f	
x	y
1	22
$-\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$
π	13
81	-3
$\frac{2}{5}$	10^6
e	1

g	
y	w
13	$\frac{3}{7}$
10^6	2
22	$\frac{2}{\pi}$
$\sqrt{5}$	81
-3	$\frac{5}{3}$
1	20

$h = g \circ f$	
x	w
1	$\frac{2}{\pi}$
$-\sqrt{3}$	81
π	$\frac{3}{7}$
81	$\frac{5}{3}$
$\frac{2}{5}$	2
e	20

A lei que permite passar do conjunto X ao conjunto W é: $h(x) = g(f(x))$.



Exercícios resolvidos:

1) Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g(x) = 2x + 1$. Calcule a e b sabendo que para todo x tem-se $f(g(x)) = 4x + 5$.

Solução: Temos que $f(g(x)) = ag(x) + b = a(2x + 1) + b = 2ax + a + b$.

Devemos então ter: $2a = 4 \Rightarrow a = 2$ e

$$a + b = 5 \text{ que nos dá } 2 + b = 5 \Rightarrow b = 3.$$

2) Dados $f(g(x)) = \dfrac{x+1}{2x}$ e $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, calcular $g(x)$ e dar o domínio de $f \circ g$.

Solução: Calculemos $f(g(x))$ fazendo em $f(x)$ a substituição de x por $g(x)$.

$$f(g(x)) = \frac{g(x)-1}{g(x)+1} = \frac{x+1}{2x}$$

$$2xg(x) - 2x = xg(x) + x + g(x) + 1$$

$$(x-1)g(x) = 3x + 1$$

$$g(x) = \frac{3x+1}{x-1}$$

Esta relação nos mostra que $x \neq 1$; por outro lado, $g(x)$ deve ser diferente de -1 para que a componente f funcione.

$$\frac{3x+1}{x-1} \neq -1$$

$$3x + 1 \neq -x + 1 \Leftrightarrow 4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Isto já era conhecido, pois:

$$f(g(x)) = \frac{x+1}{2x}$$

que não existe para $x = 0$. O domínio de $f \circ g$ será o conjunto:

$$\mathbb{R} - \{0, 1\} = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

3) Dados $f(g(x)) = \dfrac{x+1}{2x}$ e $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, calcular $f(x)$ e o domínio de $f \circ g$.

Solução: Por comodidade, chamemos $g(x) = t$. Temos então:

$$f(t) = \frac{x+1}{2x} \text{ e } t = \frac{x-1}{x+1}$$

Basta agora escrever f em função de t. Tiremos x em função de t:

$$tx + t = x - 1 \Rightarrow t + 1 = x(1-t) \Rightarrow x = \frac{1+t}{1-t}$$

A função f será tal que:

$$f(t) = \frac{\dfrac{1+t}{1-t} + 1}{2 \cdot \dfrac{1+t}{1-t}} = \frac{1+t+1-t}{2(1+t)} = \frac{1}{1+t} \quad (t \neq -1)$$

Como o nome da variável não influi, temos:

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

O domínio de $f \circ g$ será tal que:

$$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \text{ para existir } g$$

e

$$\frac{x-1}{x+1} \neq -1 \Rightarrow x - 1 \neq -x - 1 \Rightarrow x \neq 0 \text{ para existir } f$$

O domínio de $f \circ g$ será então: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

4) A quantidade de ração em kg para alimentar os peixes de um cativeiro é $R(p) = 2p^2 + p$, sendo p o número de peixes em milhares desse cativeiro. A população de peixes é, no final de t meses, $p(t) = 2t + 3$.

i) Qual a quantidade de ração necessária para alimentar os peixes desse cativeiro daqui a 3 meses?

ii) Idem daqui a t meses?

iii) Daqui a quantos meses a quantidade de ração necessária será 1081 kg?

iv) Idem para R kg?

<u>Solução:</u>

i) No final de 3 meses a população será $p(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$ milhares de peixes. A quantidade de ração para eles será $R(9) = 2 \cdot 9^2 + 9 =$ $= 2 \cdot 81 + 9 = 162 + 9 = 171$ kg.

ii) No final de t meses, temos a função composta $R \circ p$, em que:

$R(p(t)) = 2\,[p(t)]^2 + p(t) =$

$= 2(2t + 3)^2 + (2t + 3) =$

$= 2(4t^2 + 12t + 9) + 2t + 3 =$

$= 8t^2 + 24t + 18 + 2t + 3$

$R \circ p(t) = 8t^2 + 26t + 21$ kg

iii) $8t^2 + 26t + 21 = 1081$

$8t^2 + 26t - 1060 = 0$

$4t^2 + 13t - 530 = 0$

$$t = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 16(-530)}}{8}$$

Como a solução negativa não serve, logo:

$$t = \frac{-13 + 93}{8} = \frac{80}{8} = 10 \text{ meses.}$$

Poderíamos, ao invés, calcular t por etapas.

Número de peixes para consumir 1 081 kg de ração:

$2p^2 + p = 1\,081$

$2p^2 + p - 1\,081 = 0$

$$p = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8 \cdot 1081}}{4} = \frac{-1 \pm 93}{4} = 23 \text{ milhares}$$

Tempo necessário para atingir 23 milhares de peixes:

$2t + 3 = 23$

$2t = 20$

$t = 10$ meses

iv) $8t^2 + 26t + 21 = \mathrm{R}$

$8t^2 + 26t + (21 - \mathrm{R}) = 0$

$$t = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 8 \cdot (21 - \mathrm{R})}}{16}$$

$$t = \frac{-26 \pm \sqrt{676 - 672 + 32\mathrm{R}}}{16}$$

$$t = \frac{-26 \pm \sqrt{4 + 32\mathrm{R}}}{16} = \frac{-26 \pm 2\sqrt{1 + 8\mathrm{R}}}{16}$$

$$t = \frac{-13 \pm \sqrt{1 + 8\mathrm{R}}}{8}$$

A solução negativa não serve, logo:

$$t = \frac{-13 + \sqrt{1 + 8\mathrm{R}}}{8} \text{ meses}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Dadas as funções:

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$; $g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x$ $\quad x \mapsto x^2$ $\quad x \mapsto 3^x$

determine:

a) a função $h \circ g \circ f(x)$;

b) a função $h \circ f \circ g(x)$.

2 Sejam $a, b \in \mathbb{Z}^+$ e $f(x) = ax + b$. Calcule os valores de a e b para os quais $f \circ f(x) = 4x + 9$.

3 Seja A = {1, 2, 3} e f: A → A definida por $f(1) = 3$; $f(2) = 1$ e $f(3) = 2$. Determine o conjunto solução de $f(f(x)) = 3$.

4 Considere as funções:
$f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $\qquad x \mapsto g(x) = \dfrac{3x + x^3}{1 + 3x^2}$

Logo, a função composta de f com g, $f \circ g$, tem para a expressão mais simplificada:

(A) f
(B) f^2
(C) $3f$
(D) f^3
(E) $2f$

5 Sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 2x + 1$. Então, a função composta $f \circ g$ assume o menor valor em um ponto do intervalo.

(A) $(-1, 0)$
(B) $(0, 1)$
(C) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$
(D) $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

6 Se $f(x) = 2x - 5$ e $g(x) = 3x + k$, determinar k de modo que $f(g(x)) = g(f(x))$.

7 Se $f(x) = 4x + 1$ e $f(g(x)) = x^2 + 1$, determinar a função $g(x)$ e $g(-1)$.

8 Se f e g são funções tais que $f(x) = 2x - 3$ e $f(g(x)) = x$, calcule a função $g(x)$.

9 Se $f(2x + 1) = x$, $(\forall x)$, calcule a função $f(x)$.

10 Um estudo das condições ambientais de uma comunidade urbana indica que a taxa média diária de monóxido de carbono no ar será de $c(p) = 0{,}5p + 1$ partes por milhão, quando a população for de p milhares. Estima-se que, daqui a t anos, a população da comunidade será de $p(t) = 10 + 0{,}1t^2$ milhares. Determine a taxa de monóxido de carbono no ar como uma função do tempo.

11 Se $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, qual o valor de x para que $f(f(x)) = 1$?

12 Sendo $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x \neq 1$ e $g(x) = 2x - 4$, ache o valor de $f(g(x)) + g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

13 (UFC-CE) Sejam f e g funções reais de variáveis reais, tais que $g(x) = x - \dfrac{1}{x}$ e $(f \circ g)(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ se $x \neq 0$. Encontre o valor de $f(4)$.

14 (UFSC) Considere as funções $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $g(x) = 2x + 1$ e $g(f(x)) = 2x^2 + 2x + 1$. Calcule $f(7)$.

15 (Fuvest-SP) As funções f e g são dadas por $f(x) = \dfrac{3}{5}x - 1$ e $g(x) = \dfrac{4}{3}x + a$. Sabe-se que $f(0) - g(0) = \dfrac{1}{3}$. O valor de $f(3) - 3g\left(\frac{1}{5}\right)$ é:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (UFF-RJ) Em um certo dia, três mães deram à luz em uma maternidade. A primeira teve gêmeos, a segunda, trigêmeos, e a terceira, um único filho. Considere, para aquele dia, o conjunto das 3 mães, o conjunto das 6 crianças e as seguintes relações:

I) A que associa cada mãe ao seu fIlho.

II) A que associa cada filho à sua mãe.

III) A que associa cada criança ao seu irmão.

São funções:

(A) somente a I.

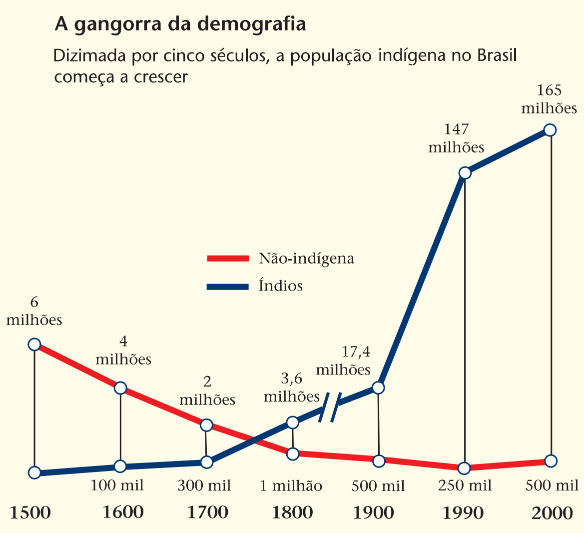
(B) somente a II.

(C) somente a III.

(D) todas.

(E) nenhuma.

2 (Uerj) O recente incidente ocorrido na reserva indígena dos ianomâmis reabriu o debate em torno de uma questão muito antiga, que é a do desaparecimento dos povos indígenas, vítimas da violência do "homem branco".
Em relação a esse fato, a revista *Veja* (25/8/93) publicou uma reportagem com o gráfico abaixo, que demonstra como a relação entre esses povos, no Brasil, desenvolveu-se desde a descoberta.



Após analisar o gráfico, conclui-se que:

(A) de 1500 a 1700, as duas populações cresceram na mesma proporção.

(B) entre 1700 e 1800, a população indígena foi superada pela "não indígena".

(C) em 1900, a diferença entre as duas populações era de cerca de 12 milhões de habitantes.

(D) no ano de 1990, a população indígena era igual à "não indígena".

(E) após 2000, a população indígena terá sua taxa de crescimento diminuída.

3 (UFR-RJ) Foram utilizados e numerados 50 cavalos para testar um novo remédio. Injetou-se o remédio em cada um dos cavalos. Se o cavalo reagisse positivamente, era marcado com 1 e, negativamente, com 0. O domínio desta função é o conjunto:

(A) [0, 50]

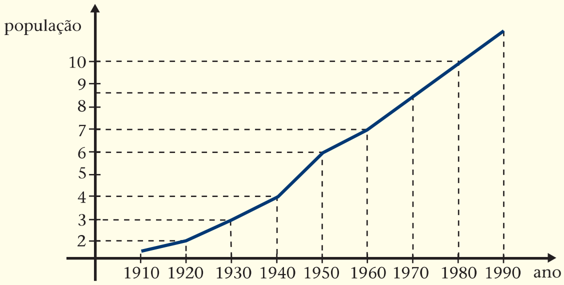
(B) [1, 50]

(C) {1, 2, 3, 4, ..., 50}

(D) {0, 1}

(E) [0, 1]

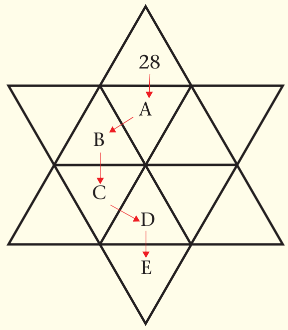
4 (UFRJ) O gráfico a seguir descreve o crescimento populacional de certo vilarejo desde 1910 até 1990. No eixo das ordenadas, a população é dada em milhares de habitantes.



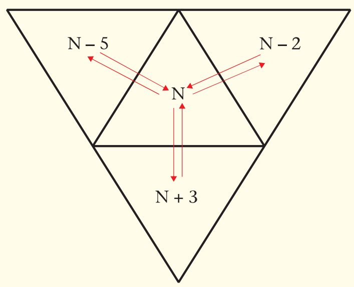
a) Determine em que década a população atingiu a marca de 5 000 habitantes.

b) Observe que, a partir de 1960, o crescimento da população em cada década tem se mantido constante. Suponha que esta taxa se mantenha inalterada no futuro. Determine em que década o vilarejo terá 20 000 habitantes.

5 (UFRJ) A figura abaixo representa uma estrela formada por doze triângulos elementares:

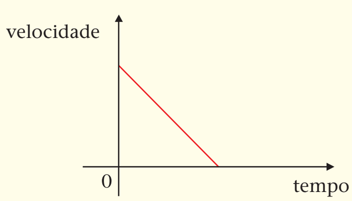


A cada triângulo elementar está associado um número de acordo com as regras indicadas no diagrama seguinte:



Dado que o número 28 está associado ao triângulo superior da estrela (ver a primeira figura), determine A, B, C, D e E.

6 (Vunesp) O gráfico mostra como varia a velocidade de um móvel, em função do tempo, durante parte de seu movimento.



O movimento representado pelo gráfico pode ser uma:

(A) esfera que desce por um plano inclinado e continua rolando por um plano horizontal.

(B) criança deslizando num escorregador de um parque infantil.

(C) fruta que cai de uma árvore.

(D) composição de metrô, que se aproxima de uma estação e para.

(E) bala no interior do cano de uma arma, logo após o disparo.

7 (UFPA) Dada a função de A = {0, 1, 2} em B = {–2, –1, 0, 1, 2}, definida por $f(x) = x - 1$, qual o conjunto imagem de f?

(A) {–1, 0, 1}

(B) {–2, –1, 0, 1, 2}

(C) {0, 1, 2}

(D) {2, –1, 0}

(E) {0, –1, 2}

8 (Unicamp-SP) A companhia de abastecimento de água de uma cidade cobra mensalmente pela água fornecida a uma residência, de acordo com a seguinte tabela:

Pelos primeiros 12 m³ fornecidos	R$ 15,00 por m³
pelos 8 m³ seguintes	R$ 50,00 por m³
pelos 10 m³ seguintes	R$ 90,00 por m³
pelo consumo que ultrapassar 30 m³	R$ 100,00 o m³.

Calcule o montante a ser pago por um consumo de 32 m³.

9 (PUC-SP) A função de Euler ∅ é definida para todo natural $n > 1$ da seguinte maneira: ∅(n) é o número de números naturais primos com n e menores que n. Quanto vale ∅(12)?

(A) 4

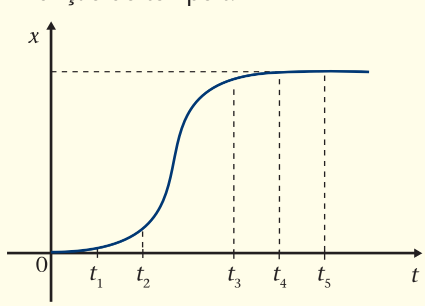
(B) 5

(C) 3

(D) 6

(E) 0

10 (Vunesp) O gráfico na figura representa a posição x de um móvel, que se deslocou ao longo de uma linha reta, em função do tempo t.



A velocidade do móvel foi constante e diferente de zero durante o intervalo de tempo que vai dos instantes:

(A) 0 a t_1

(B) t_1 a t_2

(C) t_2 a t_3

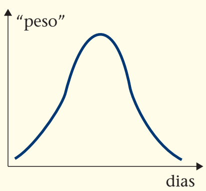
(D) t_3 a t_4

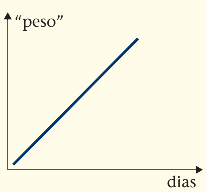
(E) t_4 a t_5

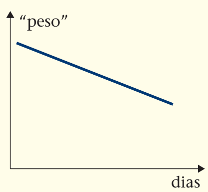
11 (UFMG) Um professor apresentou à classe o seguinte problema:

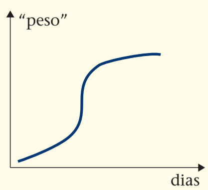
"Qual deverá ser a variação do 'peso' de um ovo de galinha, durante o processo de desenvolvimento embrionário do pintinho, até um dia antes de seu nascimento?"

Os alunos apresentaram diferentes respostas expressas pelas curvas abaixo. Assinale a alternativa que mais se aproxima da resposta correta.

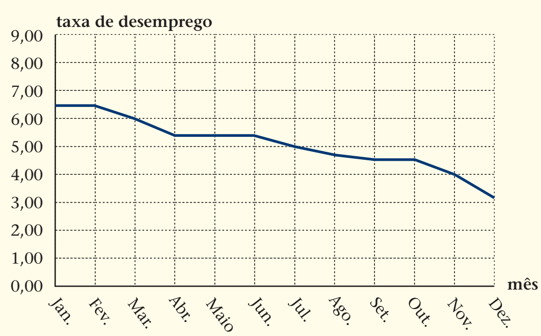
(A)


(B)


(C)


(D)


12 (UFPE) Analisando o gráfico abaixo, que representa a taxa média mensal de desemprego na região metropolitana do Recife, em 1996 (dados do IBGE), é incorreto afirmar que:



(A) a taxa de desemprego não cresceu entre janeiro e abril.

(B) a menor taxa de desemprego ocorreu em dezembro.

(C) durante o ano de 1996, a taxa de desemprego não excedeu 5%.

(D) a média anual de desemprego em 1996 foi superior a 3%.

(E) a média anual de desemprego em 1996 foi inferior a 7%.

13 Se x e y são elementos do conjunto $\mathbb{R}$, em qual das relações abaixo y é função de x?

(A) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2 - 1\}$

(B) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = |y|\}$

(C) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x - 2\}$

(D) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 1\}$

(E) n.d.a.

14 Sendo A = {1, 3} e B = {2, 4}, o produto A × B é dado por:

(A) {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)}

(B) {(1, 2), (3, 2), (1, 4), (3, 4)}

(C) {(1, 3), (1, 2), (1, 4), (3, 4)}

(D) {(1, 2), (3, 4)}

(E) n.d.a.

15 Sabendo que A e B são dois conjuntos tais que:

I) (1, 7), (5, 3) são elementos de A × B

II) A ∩ B = {1, 3}

podemos afirmar com toda segurança que:

(A) A × B tem 8 elementos.

(B) A × B tem mais de 8 elementos.

(C) A × B tem menos de 8 elementos.

(D) A × B não pode ter 9 elementos.

(E) nada se pode afirmar sobre o número de elementos de A × B.

16 O produto cartesiano A × B dos conjuntos A = {3, 4, 5} e B = {4} é:

(A) {(4, 3), (4, 4), (4, 5)}

(B) A

(C) {(3, 4), (4, 4), (5, 4)}

(D) B

(E) {12, 16, 20}

17 (PUC-RJ) Indique qual das relações abaixo não constitui função real.

(A) $S = \{(x, y) \mid 2y - x = 3\}$

(B) $S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ e } x + y = 7\}$

(C) $S = \{(x, y) \mid x < y\}$

(D) $S = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3)\}$

(E) n.d.a.

18 Dada a função $f(n)$ definida para todo n inteiro e sabendo-se que:

$f(0) = 1$ e $f(n + 1) = f(n) + 2$, o valor de $f(200)$ é:

(A) 201

(B) 401

(C) $(200)^2 + 1$

(D) 512 000

(E) não há dados suficientes para o cálculo

19 Se $f(x) = 2x^3$, então os valores $f(0)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(-2)$; $-f\left(-\frac{1}{2}\right)$ são, respectivamente:

(A) $2; 2; 4; -4; -\frac{1}{4}$

(B) $0; -6; 16; -16; \frac{1}{3}$

(C) $0; -2; 16; -16; \frac{1}{4}$

(D) $2; -2; 2; -2; -\frac{1}{3}$

(E) $0; 2; 16; 16; \frac{1}{4}$

20 Se $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$, ache $f\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

(A) $-\frac{2n}{n^2 + 1}$

(B) $2n$

(C) $\frac{1}{n^2 + 1}$

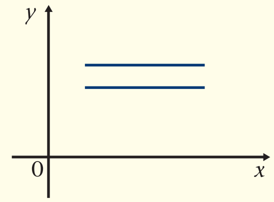
(D) n

(E) n.d.a.

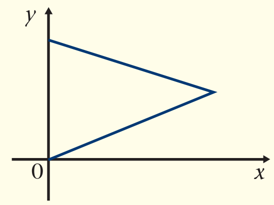
21 Dada a função $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ e $h \neq 0$, calcule $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$. O que ocorre com essa expressão à medida que h se aproxima de 0?

22 (PUC-RJ) Qual dos seguintes gráficos define uma função?

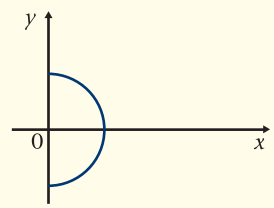
(A)



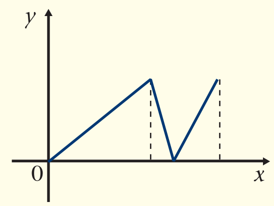
(B)



(C)



(D)



23 Seja $f(n)$ uma função definida, para todo n inteiro relativo, pelas relações:

$$\begin{cases} f(2) = 2 \\ f(p + q) = f(p) \cdot f(q) \end{cases}$$

I - O valor de $f(0)$ é:

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) $\sqrt{2}$

(E) n.d.a.

II - O valor de $f(-2)$ é:

(A) $-\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) zero porque -2 é negativo

(D) -2 porque a função é ímpar

(E) a função não está definida para $n = -2$

24 Dada a função f: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 4x + 2\}$, determine os pares de componentes simétricos a ela pertencentes, isto é, os pares do tipo $(x, -x)$.

(A) (0, 0) ou (1, –1)
(B) (1, –1) ou (2, –2)
(C) (1, –1) ou (–1, 1)
(D) (1, –1)
(E) n.d.a.

25 Resolva, com o auxílio do produto cartesiano, o seguinte problema:
Três homens, Alberto, Bernardo e Carlos, têm, cada um, duas ocupações. São elas: alpinista, livreiro, mecânico, dentista, marceneiro, flautista. Determine as ocupações de cada um, a partir das seguintes informações:

a) O alpinista é vizinho do mecânico.
b) O marceneiro e o mecânico são contemporâneos de Alberto.
c) Bernardo deve 100 reais ao marceneiro.
d) Carlos é menos afortunado que Bernardo e o dentista.
e) O alpinista está apaixonado pela irmã do dentista.
f) O dentista comprou vários livros do livreiro.

26 Seja f: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = ax + by$.
Sabe-se que $f(1, 2) = 5$ e $f(-1, 0) = 3$.
Temos que $f(1, 0)$, $f(-1, 1)$ e $f(0, 1)$ valem respectivamente:

(A) 1, 7, 1
(B) –3, 7, 4
(C) –1, 7, 4
(D) 1, –7, 4
(E) n. d. a.

27 Seja a função em que $f(\text{P}, \text{Q}) = \dfrac{\text{P}+\text{Q}}{\text{P}-\text{Q}} - \dfrac{\text{P}-\text{Q}}{\text{P}+\text{Q}}$.
O valor de $f(x + y, x - y)$ é:

(A) $\dfrac{x^2 - y^2}{xy}$
(B) $\dfrac{x^2 - y^2}{2xy}$
(C) 1
(D) $\dfrac{x^2 + y^2}{xy}$
(E) $\dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$

28 (Mack-SP) O gráfico da aplicação definida por $f = \{(x, y) \in [2, 5] \times [2, 5] \mid y = x\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais e $[2, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$ é:

(A) um conjunto finito de pontos.
(B) uma reta.
(C) uma semirreta.
(D) um segmento.
(E) nenhuma das respostas acima é correta.

29 Se $f(x) = ax + b$ é uma função afim, então, considerados quatro números reais p, q, r, s, $(p \neq q;\ r \neq s)$ temos que a igualdade:

$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} = \frac{f(s) - f(r)}{s - r}$$

(A) nunca se verifica.
(B) só é verdadeira se $q > p$ ou $s > r$.
(C) só é verdadeira se $q > p$ e $s > r$.
(D) só vale se $a = 0$.
(E) é sempre verdadeira.

30 Seja a função:

$$abs(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Então, $abs(x + y) = abs(x) + abs(y)$ se, e somente se:

(A) $x \geq 0$ e $y \geq 0$
(B) $xy \geq 0$
(C) $abs(x) \geq 0$ e $y \geq 0$
(D) $abs(x) \geq 0$ e $abs(y) \geq 0$
(E) $x \geq 0$ e $abs(y) \geq 0$

31 Calcule os domínios das funções.

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

b) $y = \sqrt[4]{2x^2 - 5x + 2}$

c) $y = (1 - x^2)$

32 Considere a expressão $y = \dfrac{\sqrt{-x}}{x - 2}$. Determine o conjunto A dos números reais x para os quais y é real.

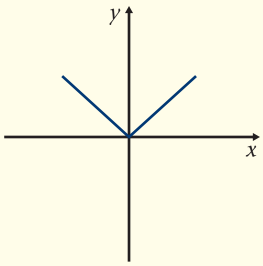
(A) $\text{A} = \varnothing$ (conjunto vazio)
(B) $\text{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
(C) $\text{A} = \{0\}$
(D) $\text{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
(E) $\text{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

33 O domínio da função definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$ é:

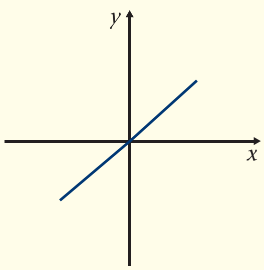
(A) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$
(B) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3 \text{ e } x \neq 0\}$
(C) $\mathbb{R}$
(D) o conjunto dos números reais estritamente negativos
(E) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < -3,\ x \neq 0\}$

34 Qual é o gráfico que representa a função $y = |\,x\,|$?

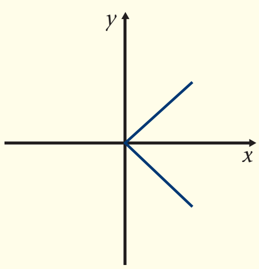
(A)



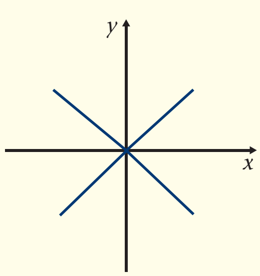
(B)



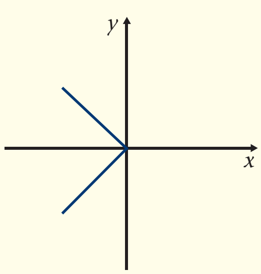
(C)



(D)



(E)



35 Seja a função $y = 3x^2 - 12$ definida no intervalo $-4 < x \leq 3$. O contradomínio de tal função é:

(A) $-2 \leq y \leq 2$

(B) $15 \leq y < 36$

(C) $15 \leq y \leq 36$

(D) $-12 \leq y < 36$

(E) $-12 \leq y \leq 36$

36 Mostre que a aplicação $x \mapsto ax = f(x)$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ satisfaz $f(px + qy) = pf(x) + qf(y)$ (aplicação linear).

Ocorre o mesmo com a aplicação $x \rightarrow ax + b$?

37 Se $f(x) = ax + b$ e $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$ para todo x_1 e x_2, então:

(A) $b = 0$ e a é qualquer

(B) o problema é impossível

(C) $a = 1$ e $b = 1$

(D) $a = 1$ e $b = 0$

(E) n.d.a.

38 Seja $a > 0$. Se $f(x) = a^x$, prove que $f(x)f(y) = f(x + y)$.

39 Se $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$, calcule $f\,[f\,[f(x)]]$.

40 Se $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, calcule $f\,[f(x)]$.

41 A função f é tal que $f(\alpha) = \dfrac{1-\alpha}{2+\alpha}$. Determine o subconjunto de seu domínio para o qual $f(\alpha) = \dfrac{1}{f(-\alpha)}$.

(A) $\{1, 2\}$

(B) $[0, \infty)$

(C) $\varnothing$

(D) $[0, 2]$

(E) n. d. a

42 Sejam as funções seguintes:

$$f\colon x \mapsto x^2$$

$$g\colon x \mapsto \frac{1}{x}$$

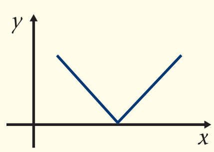
Defina o domínio em $\mathbb{Q}$. Existem elementos que coincidem com sua imagem como pontos fixos ou invariantes?

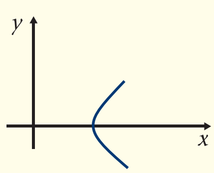
43 Dadas as funções abaixo:

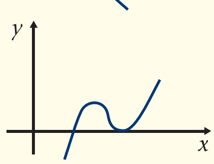
I)	$f(x) = x + 1$	$A = \mathbb{R}$
II)	$f(x) = x^2$	$A = \mathbb{R}_-$
III)	$f(x) = 2x + 1$	$A = [-3, 3]$
IV)	$f(x) = -2x + 3$	$A = [0, 2]$
V)	$f(x) = \| x \|$	$A = [-2, 2]$
VI)	$f(x) = \sqrt{1 + x}$	$A = [0, 8]$
VII)	$f(x) = -\sqrt{x + 2}$	$A = [2, 14]$
VIII)	$f(x) = x^2 - 4$	$A = [0, 5]$
IX)	$f(x) = x^2 - 4$	$A = [-1, 5]$
X)	$f(x) = x^2 - 4$	$A = [-7, 5]$

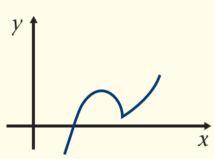
determine o conjunto das imagens para os conjuntos A indicados.

44 (PUC-RJ) Dentre os quatro desenhos abaixo:

I


II


III


IV


(A) somente I pode ser gráfico de função da forma $y = f(x)$.

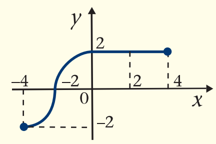
(B) I, III e IV podem ser gráficos de funções da forma $y = f(x)$.

(C) nenhum deles pode ser gráfico de funções da forma $y = f(x)$.

(D) II e IV não podem ser gráficos de funções da forma $y = f(x)$.

(E) nenhuma das respostas acima.

45 (UFR-RJ) Seja a função $g(x)$ definida no intervalo fechado $[-4, 4]$, cujo gráfico está representado na figura abaixo:



O valor de $g[g(4)] - g[g(-4)]$ é:

(A) 8
(B) 6
(C) 4
(D) 2
(E) 0

46 (PUC-RJ) Considere as sentenças:

I) Se $x < 1$, então $x^2 < 1$.

II) Se $|x| > 1$, então $x > 1$.

III) Se $x^2 = 2$, então $x = \sqrt{2}$.

IV) Se $x = -\sqrt{2}$, então $x^2 = 2$.

V) As expressões $f(x) = \sqrt{(x + 4)^2}$ e $g(t) = | 4 + t |$ definem a mesma função.

Decida qual das opções abaixo é correta.

(A) I e II são verdadeiras, mas III é falsa.

(B) I, II e IV são verdadeiras.

(C) I e II são verdadeiras, mas V é falsa.

(D) I e III são falsas, mas IV e V são verdadeiras.

(E) Nenhuma das opções acima é correta.

47 Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos inteiros. Sejam ainda os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x \leq 2\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Então, se $D = \{(x, y) \text{ e } A \times B \mid y \geq x + 4\}$, tem-se que:

(A) $D = A \times B$.

(B) D tem dois elementos.

(C) D tem um elemento.

(D) D tem três elementos.

(E) as quatro afirmativas anteriores são falsas.

48 (PUC-RJ) Para $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = 1 - x$, temos que $g \circ f \circ g \circ f(x)$ é:

(A) $g \circ f(x)$

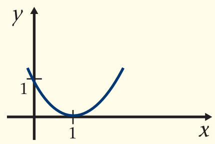
(B) $f \circ g(x)$

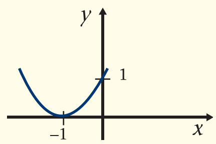
(C) $f(x)$

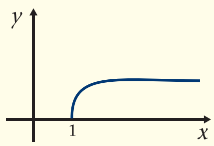
(D) $g(x)$

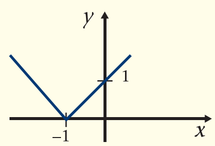
(E) $f \circ f(x)$

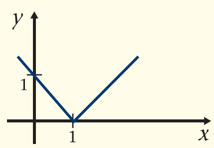
49 (Unificado-RJ) O gráfico que melhor representa a função real definida $f(x) = \sqrt{(x^2 - 2x + 1)}$ é:

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

50 (PUC-RJ) Considere a função $f(x) = e^{\text{sen}^2(x)}$. Entre os pares de funções h e g abaixo, aquele que satisfaz $f = h \circ g$ é:

(A) $h(x) = e^{x^2}$ $g(x) = \text{sen } x$

(B) $h(x) = e^{\text{sen } x}$ $g(x) = x^2$

(C) $h(x) = e^{\text{sen } x}$ $g(x) = \text{sen } x$

(D) $h(x) = \text{sen}^2 x$ $g(x) = e^x$

(E) nenhuma das respostas acima

51 $f(x)$ é uma função que atribui a cada número real $x > 0$ o valor $+\sqrt{x}$. Então, $f(x)$ é no seu campo de definição:

(A) crescente.

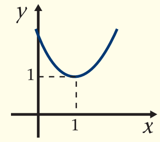
(B) decrescente.

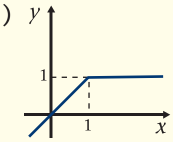
(C) não crescente.

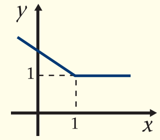
(D) não decrescente.

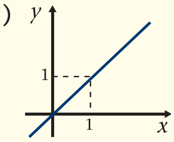
(E) decrescente para $0 < x \leq 1$ e crescente para $x > 1$.

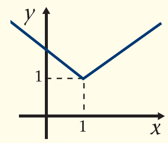
52 (Unificado-RJ) O gráfico que melhor representa a função real definida por $f(x) = \sqrt{(x - 1)^2} + 1$ é:

(A) 

(D) 

(B) 

(E) 

(C) 

53 Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$, então $f(g(2))$ é:

(A) 16 (C) 12 (E) 32

(B) 128 (D) 64

54 (PUC-RJ) Sendo $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$ $(x \neq -1)$, então $f(f(f(2)))$ é:

(A) 2 (C) $\dfrac{1}{2}$ (E) 0

(B) –3 (D) $-\dfrac{1}{3}$

55 Se $f(x) = 7x$ e $g(x) = 8x^2$, então $f(g(x))$ é:

(A) $7x + 8x^2$ (C) $56x^2$ (E) $15x^3$

(B) $56x$ (D) $56x^3$

56 (PUC-RJ) Sendo $F(x) = x^2 + 4x - 21$ e $G(x) = x + 9$, então o quociente $\dfrac{F(x + 1)}{G(x - 1)}$ vale, nos pontos em que é definido:

(A) $2x + 4$ (D) $x + 2$

(B) $x - 2$ (E) $x + 3$

(C) $x - 3$

57 Se $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = 2x + 1$, então $f(g(x))$ é:

(A) $x^2 + 2x + 1$ (D) $2x^2 - 3$

(B) x^2 (E) n.d.a.

(C) $4x^2 + 4x - 1$

58 Dada a função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, para qualquer número real x tal que $|x| \leq 2$ tem-se:

(A) $f(2x) = 2f(x)$

(B) $f(x - 2) = f(x) - f(2)$

(C) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{f(x)}{x}$

(D) $f(-x) = f(x)$

(E) n.d.a.

59 (ITA-SP) Sejam $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x - 1$, duas funções reais. Definimos a função composta de f e g como sendo $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Então $(g \circ f)(y - 1)$ é igual a:

(A) $y^2 - 2y + 1$

(B) $(y - 1)^2 + 1$

(C) $y^2 + 2y - 2$

(D) $y^2 - 2y + 3$

(E) $y^2 - 1$

60 (PUC-RJ) Sendo $F(y) = 3y + 1$ e $G(x) = x^2$, então $F \circ G(x)$ é:

(A) $9x^2 + 6x$

(B) $3x^2 + x$

(C) x^4

(D) $3x^2 + 1$

(E) n.d.a.

61 Sejam $f(x) = \sqrt{x - 4}$, $g(z) = [f(z)]^2$ e $h(z) = z - 4$, então:

(A) os domínios de $g(z)$ e $h(z)$ coincidem.

(B) o domínio de $g(z)$ contém estritamente o domínio de $h(z)$.

(C) o domínio de $f(x)$ não tem pontos em comum com o domínio de $g(z)$.

(D) qualquer que seja z real, $g(z) = f(z)$.

(E) n.d.a.

62 As funções reais f e g são definidas por $f(x) = 2x + 5$ e $g(x) = x^2 + 1$. O valor de $g(f(2))$ é:

(A) 80

(B) 15

(C) 9

(D) 5

(E) 82

63 Sejam as funções $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ e $g\colon [3, +\infty)\ \mathbb{R}_+$ definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x - 3$.
Nessas condições, $(f \circ g)(x) = 9$ se, e somente se, x for igual a:

(A) 87

(B) 84

(C) 81

(D) 9

(E) 3

64 Se $f(x) = 3x - 2$ e $g(f(x)) = f\left(\dfrac{x}{3} + 2\right)$ são funções reais, então $g(7)$ vale:

(A) 1

(B) 3

(C) 5

(D) 7

(E) 9

65 Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Se $f(x) = 2x - 3$ e $g(f(x)) = 1 - 4x$, então $g(-2)$ é igual a:

(A) -1

(B) $-\dfrac{1}{2}$

(C) 0

(D) $\dfrac{1}{2}$

(E) 1

66 (PUC-SP) Considere as funções reais f, g e h dadas por $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2 + 2$ e $h(x) = f(g(x))$. O conjunto imagem da função h é:

(A) $[5, +\infty)$

(B) $[3, +\infty)$

(C) $[2, +\infty]$

(D) $[0, +\infty)$

(E) $\mathbb{R}$

67 (PUC-MG) Considere as funções $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = f[f(x)]$. O ponto do gráfico de $y = g(x)$ que tem ordenada 5 é:

(A) (2, 5)

(B) (17, 5)

(C) (9, 5)

(D) (5, 9)

(E) (5, 17)

68 Dadas as funções $f(x) = -x^2$ e $g(x) = x$, podemos afirmar que:

(A) o domínio de g é igual à imagem de f.

(B) $(f \circ g)(x) = g(x)$.

(C) $(g \circ f)(x) = g(x)$.

(D) o gráfico de g é uma reta passando pela origem.

(E) o gráfico de f é uma parábola com concavidade voltada para cima.

69 Dadas as funções reais $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = ax + b$, se $f(g(x)) = 8x + 7$, o valor de $a + b$ é:

(A) 13

(B) 12

(C) 15

(D) 6

(E) 5

70 Considere a função composta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ em que $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = ax + b$. Se $(g \circ f)(x - 1) = (x - 1)^2$, em que x pertence a $\mathbb{R}$, pode-se afirmar que $a + b$ vale:

(A) 2

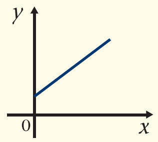
(B) 0

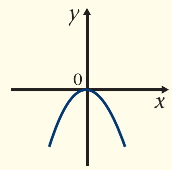
(C) 1

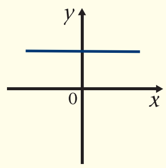
(D) -1

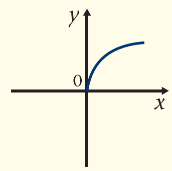
(E) -2

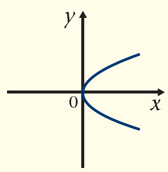
71 (PUC-SP) Qual dos gráficos abaixo não representa função?

(A)


(D)


(B)


(E)


(C)


72 Determine domínio da função real, sendo:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x+4}}{3} + \frac{x+1}{\sqrt{-3x+18}} - \frac{4}{x+3}$$

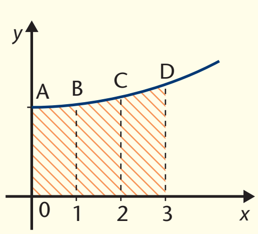
73 Considere as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 2x + b$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g(x) = x^2$, onde b é uma constante, conhecendo-se a composta $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g(f(x)) = 4x^2 - 12x + 9$. Calcule os possíveis valores de b.

74 Seja f uma função real, tal que $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, para $x \neq 1$.

Determine a lei de $f(f(x))$.

75 (FEI-SP) Considere o gráfico da função $y = 1 + \dfrac{x^3}{10}$.

Deseja-se calcular a área hachurada da figura abaixo. Calcule um valor aproximado dessa área, substituindo os arcos AB, BC e CD por segmentos de reta.



(A) 2,95

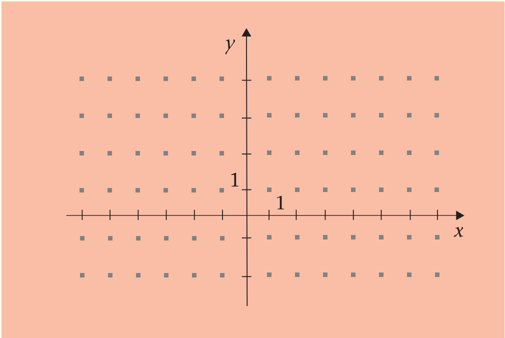
(B) 4,95

(C) 3,95

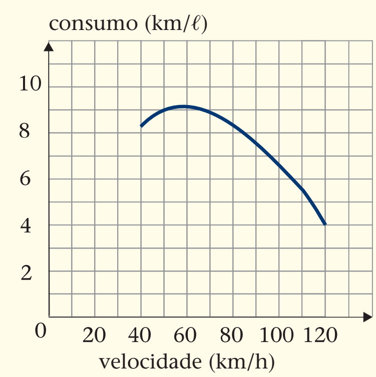
(D) 1,95

(E) nenhuma das respostas anteriores

76 Represente graficamente no mesmo sistema de eixos coordenados as seguintes funções reais: $f(x) = |x + 2|$ e $g(x) = x^2$. A seguir, determine a distância entre os pontos de interseção de f e g.



77 O consumo de combustível de um automóvel é fornecido, geralmente, pelo número de quilômetros que ele percorre gastando um litro de gasolina. O consumo de combustível depende, entre outros fatores, da velocidade em que ele anda. A seguir, você encontra o gráfico na dependência da velocidade de certo automóvel.



Analisando o gráfico, responda às seguintes perguntas:

a) Quantos quilômetros por litro faz tal automóvel à velocidade constante de 80 km/h? E a 120 km/h?

b) Na faixa apresentada no gráfico, qual é a velocidade mais econômica?

78 (Epusp) Sendo A a área limitada pela curva $y = \dfrac{1}{x}$ e pelas retas $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$, tem-se:

(A) $A < 0,3$

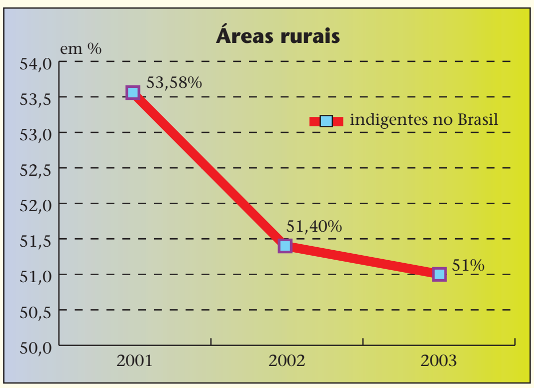
(B) $0,3 < A < 0,8$

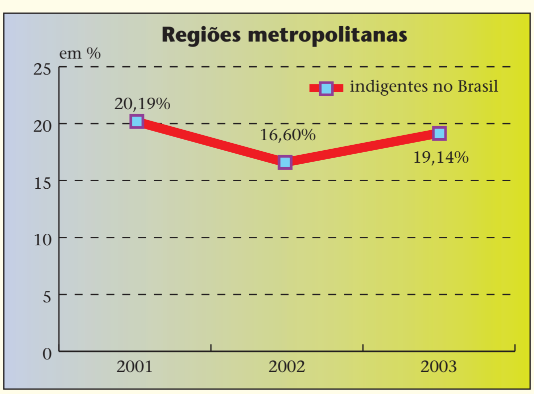
(C) $0,8 < A < 1,5$

(D) $1,5 < A < 10$

(E) n. d. a.

79 (Cefet-BA) Os gráficos a seguir mostram a taxa de variação de indigência no Brasil, no campo (áreas rurais) e nas regiões metropolitanas. A pesquisa feita pela Fundação Getulio Vargas considera indigente aquele que não ganha o necessário para a aquisição de uma cesta de alimentos que garanta um consumo diário de 2 888 calorias, nível recomendado pela Organização Mundial da Saúde.





Observando-se os gráficos, podemos afirmar que a miséria:

(A) nas regiões metropolitanas, em 2003, atingiu uma taxa de 51%.

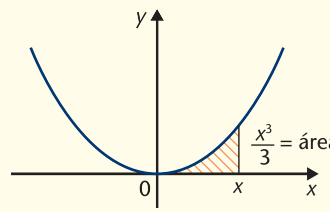
(B) em 2003, cresceu nas regiões metropolitanas, mas caiu no campo, em relação a 2002.

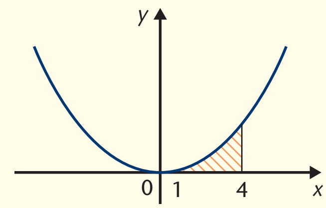
(C) nas regiões rurais, cresceu a partir de 2002.

(D) nas regiões metropolitanas, cresceu entre 2001 e 2002.

(E) nas regiões rurais, teve taxa menor que 50%, em 2003.

80 (Cescem-SP) A função $y = \frac{x^3}{3}$ dá o valor da área da região compreendida entre a curva $y = x^2$ do ponto de abscissa O ao ponto de abscissa x e o eixo das abscissas, conforme indica a figura abaixo:



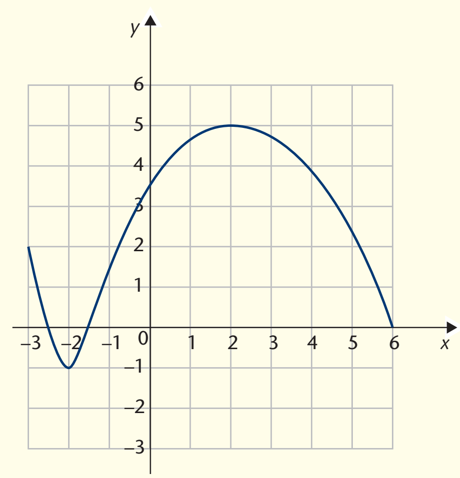


Nestas condições, a área acima indicada vale:

(A) $\frac{64}{3}$ (C) $\frac{21}{3}$ (E) $\frac{1}{3}$

(B) 21 (D) 64

81 (UFMG) Observe a figura.



Ela representa o gráfico da função $y = f(x)$, que está definida no intervalo [–3, 6]. A respeito dessa função, é *incorreto* afirmar que:

(A) $f(3) > f(4)$

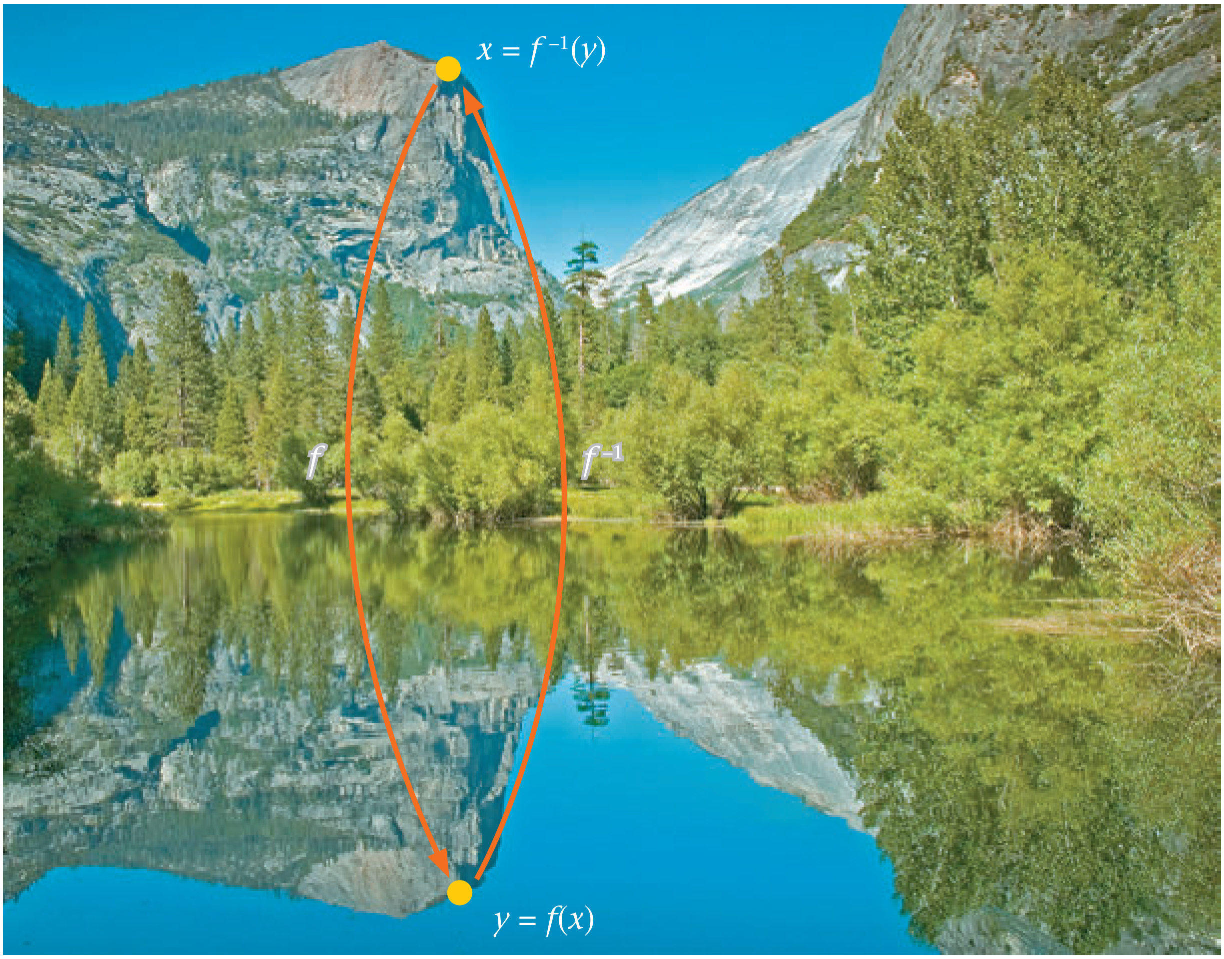
(B) $f(f(2)) > 1{,}5$

(C) $f(x) < 5{,}5$ para todo x no intervalo [–3, 6]

(D) o conjunto $\{-3 \le x \le 6 \mid f(x) = 1{,}6\}$ contém exatamente dois elementos.

CAPÍTULO IV

TIPOLOGIA DE FUNÇÕES



Timothy Stirling/Dreamstime.com

Neste capítulo, aprofundamos o estudo das funções, classificando-as em injetivas, sobrejetivas, bijetivas; e pares ou ímpares (ou nenhuma delas!). Veremos que apenas as funções bijetivas têm inversas (que "desfazem" o que a função "faz"). Por exemplo, se nos limitarmos aos números positivos, a função "quadrado" e a função "raiz quadrada" são inversas uma da outra. Na fotografia, Mirror Lake ("Lago Espelho"), Parque Yosemite, Califórnia, Estados Unidos da América. Se *f*(*x*) é a função que associa a cada ponto da paisagem o seu reflexo no lago, sua função inversa associará a cada ponto do reflexo um ponto da paisagem.

4 – TIPOLOGIA DE FUNÇÕES

4.1 – Tipos de funções

As diferentes formas de se apresentar o conjunto das imagens em relação ao contradomínio Y nos leva a classificar os vários **tipos de funções**.

$$\text{Funções} \begin{cases} \text{sobrejetoras ou sobrejetivas} \\ \text{injetoras ou injetivas} \\ \text{bijetoras ou bijetivas} \end{cases}$$

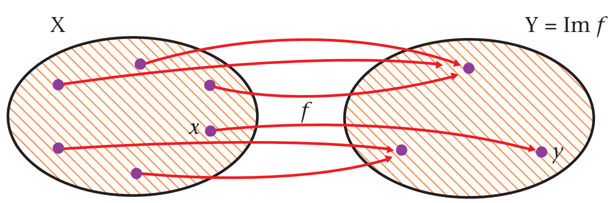
4.1.1 – Sobrejeção, função sobrejetora ou sobrejetiva

DEFINIÇÃO
Função sobrejetora.

Chamamos **sobrejeção** ou aplicação sobrejetora toda função definida num conjunto X e tomando valores num conjunto Y, tal que todo elemento *y* de Y seja imagem de, pelo menos, um elemento *x* de X.

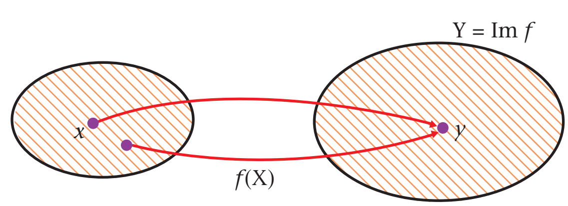
NOTA
Em uma função sobrejetora são usados todos os elementos do contradomínio.

É importante notar que na sobrejeção não há elementos *y* que não sejam imagens de algum *x*. O conjunto das imagens $f(X)$ coincide com o contradomínio Y.



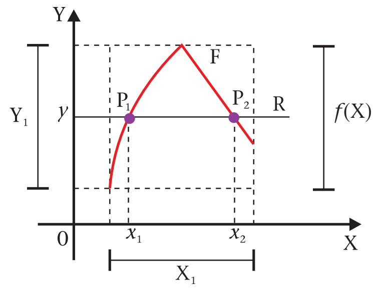
$f(X) = Y$

Todo $y \in Y$ é imagem de, **no mínimo** um *x*.
Simbolicamente, podemos escrever:
$f\colon X \to Y$ é sobrejetora $\Leftrightarrow \forall y \in Y,\ \exists\, x \in X \mid y = f(x)$
Se uma função é sobrejetora, poderá haver pontos com a mesma ordenada.

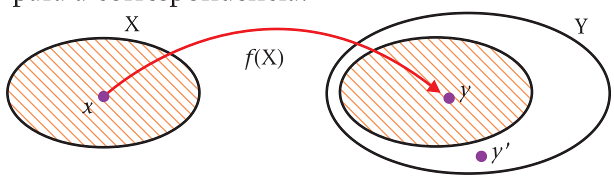


Uma paralela R a OX deverá intersectar o gráfico, **no mínimo**, em um ponto.

$$R \cap F \neq \varnothing$$



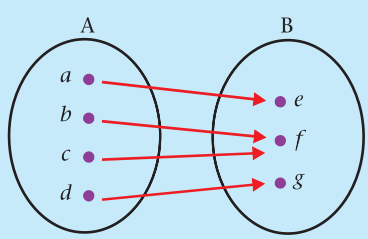
Observação: uma função não é sobrejetora quando o contradomínio é maior que o necessário para a correspondência.



$$\exists\, y' \in Y \mid y' \notin \text{Im } f$$

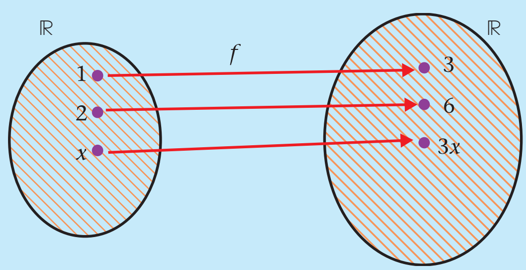
Exemplos:

i) Seja uma função f: A $\rightarrow$ B, onde A = $\{a, b, c, d\}$ e B = $\{e, f, g\}$, tal que $f(a) = e$; $f(b) = f$; $f(c) = f$; $f(d) = g$, representada pelo seguinte diagrama:



Essa função é sobrejetora, pois todo elemento de B é imagem de algum elemento de A.

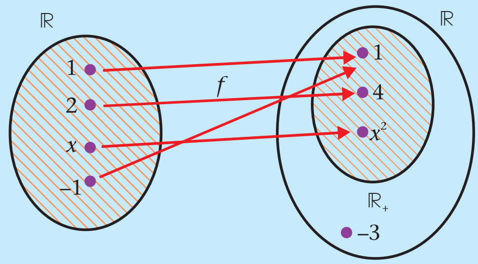
ii) Seja uma função f: $x \mapsto y$ em que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$:
$f(x) = 3x$



Essa função é sobrejetora porque qualquer real é triplo de outro real.

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x,\ x = \frac{y}{3} \in \mathbb{R} \mid f\left(\frac{y}{3}\right) = y$$

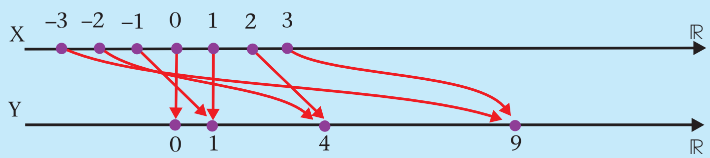
iii) $f(x) = x^2$



NOTA
–3 não é quadrado de nenhum real

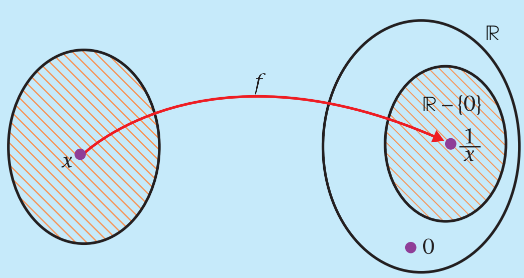
A função não é sobrejetora porque os reais negativos não são imagens de nenhum real.
Seja a equação $x^2 = k$ para $k \in \mathbb{R}$. Então $x = \pm\sqrt{k}$.
Essa equação só terá solução se $k \in \mathbb{R}_+$. Como o contradomínio é $\mathbb{R}$, isto é, tem valores negativos, então há pontos que não são imagens de qualquer x do domínio.
Temos:

$$f(x) = x^2$$
$$3 = (\sqrt{3})^2 = f(\sqrt{3})$$
$$4 = 2^2 = f(2)$$



O contradomínio é maior que o necessário.

iv) $f(x) = \dfrac{1}{x}$



NOTA
$\frac{1}{x} = 0$ não tem solução
O inverso de zero não existe.

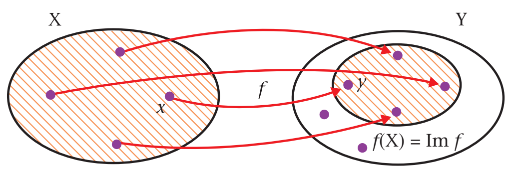
Essa função não é sobrejetora porque o número zero do contradomínio não é inverso de nenhum real, isto é, há valores que não são imagens de nenhum x do domínio.

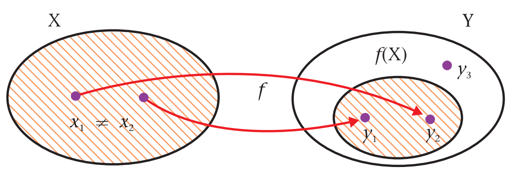
4.1.2 – Injeção, função injetora ou injetiva

Chamamos de injeção ou **função injetora** a toda função de X em Y, tal que cada elemento y de f(X) seja imagem de somente um x de X.

$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

DEFINIÇÃO
Função injetora.

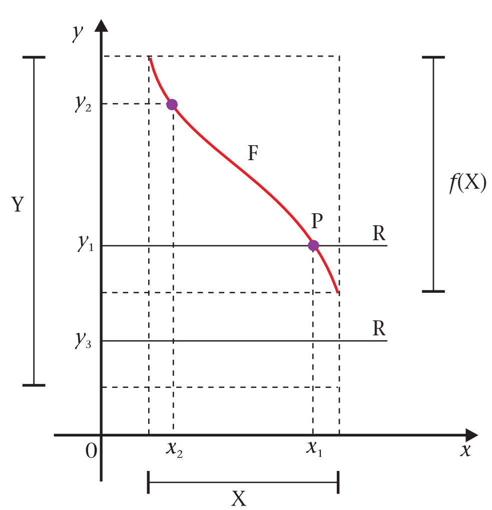




Todo $y \in$ Y é imagem de, **no máximo**, um x.
Simbolicamente, podemos escrever:

$$f\text{: X} \rightarrow \text{Y} \Leftrightarrow \forall y \in f(\text{X}),\ \exists^* x \in \text{X} \mid f(x) = y$$

Se uma função é injetora, f(X) poderá não ser igual a Y. Uma paralela R a OX deverá intersectar o gráfico F no máximo em um ponto.



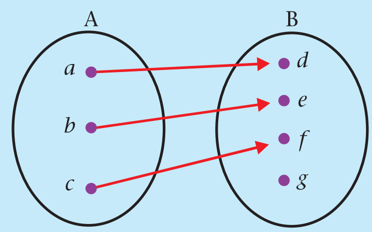
$$\text{R} \cap \text{F} \neq \varnothing \quad \text{ou} \quad \text{R} \cap \text{F} = \{\text{P}\}$$

NOTA
Para verificar se uma função é injetora, resolve-se a equação $f(x) = k$, sendo k um valor qualquer do contradomínio Y. Se essa equação tiver uma única solução ou nenhuma, isso significará que todo $y = k$ é imagem de somente um x, quando $k \in$ Im f ou nenhum, caso em que $k \in$ Y – f(X).

NOTA
Funções estritamente crescentes (ou estritamente decrescentes) são sempre injetoras.

Exemplos:

i) Seja a função f: A $\rightarrow$ B onde A = $\{a, b, c\}$ e B = $\{d, e, f, g\}$ tal que $f(a) = d$; $f(b) = e$; $f(c) = f$.



Esta função é injetora, pois todo elemento de B é imagem de no máximo um elemento de A.

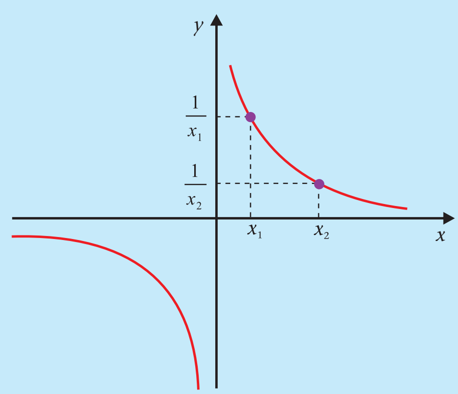
ii) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ é injetora, pois:

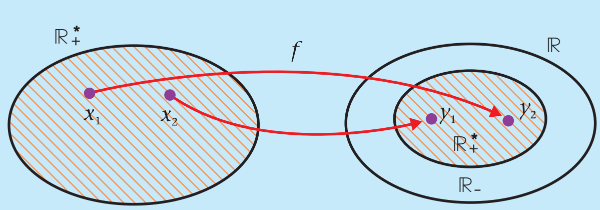
$x_1 \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x_1}$ $\qquad$ $x_2 \mapsto f(x_2) = \dfrac{1}{x_2}$

e $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1} \neq \dfrac{1}{x_2}$ ou ainda $\dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

Observe que $0 \in$ Y não é imagem de nenhum x. Esta função é injetiva sem ser sobrejetiva.

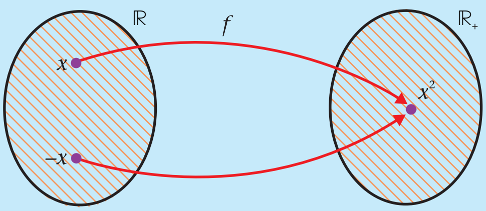


iii) $f: \mathbb{R}^*_+ \rightarrow \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$



Façamos $x^2 = k$. Se $k > 0$, então $x = \pm\sqrt{k}$. Como o domínio é $\mathbb{R}_+$, a solução será $x = +\sqrt{k}$, mostrando que para cada $k \in \mathbb{R}$ haverá apenas um x ou nenhum. Esta função é injetora, pois o domínio é o conjunto dos reais positivos. Dois reais positivos distintos têm quadrados distintos. Observe que essa função não é sobrejetora, pois o contradomínio não coincide com o conjunto das imagens. Se o domínio fosse $\mathbb{R}$, essa função não seria injetora.

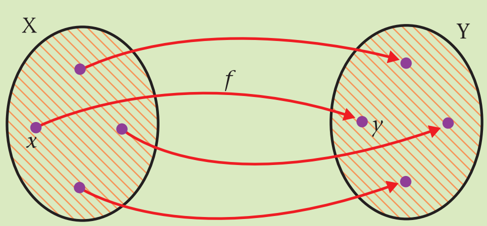
iv) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$
$f(x) = x^2$
A função não é injetora, mas sim sobrejetora.
Basta ver que o domínio sendo, agora, o conjunto dos números reais simétricos, seus elementos terão a mesma imagem.



Por outro lado, a função é sobrejetora porque qualquer real positivo é imagem de um real. Essa função é sobrejetora, mas não injetora.

4.1.3 – Bijeção, função bijetora ou bijetiva

Chamamos de bijeção ou função bijetora toda função que seja sobrejetora e injetora **simultaneamente**.



É importante notar que se f é uma bijeção de X em Y, todo y de Y é imagem de um e somente um x de X.

Neste caso, temos:

$$f(X) = Y \text{ e } x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow y_1 \neq y_2$$

DEFINIÇÃO
Função bijetora.

NOTA
Para uma função ser uma aplicação bijetora, é preciso que:
a) todo $y \in Y$ seja imagem de um $x \in X$; (sobrejetora)
b) só haja um x com a imagem y. (injetora)

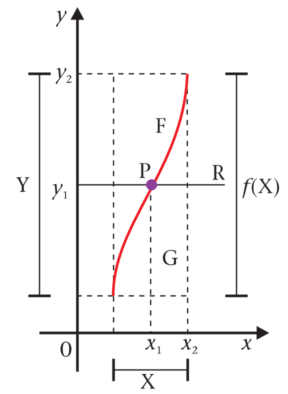
Todo $y \in Y$ é imagem de **exatamente** um x.
Simbolicamente, podemos escrever:

$$f: X \to Y \Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists^* x \in X \mid y = f(x)$$

Se uma função é bijetora, não haverá pontos com a mesma ordenada.

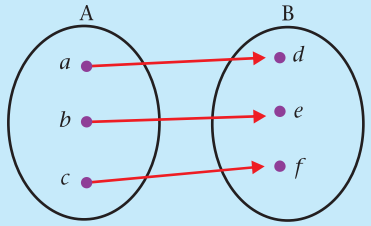
NOTA
Para verificar se uma função é bijetora, resolve-se a equação $f(x) = k$, sendo k um valor qualquer do contradomínio Y. Se esta equação tiver uma única solução para todo k, a função será bijetora.

Uma paralela R a OX intersecta o gráfico F num único ponto.
$R \cap F = \{P\}$ (conjunto unitário).



Exemplos:

i) Seja a função f: A → B tal que A = $\{a, b, c\}$ e B = $\{d, e, f\}$
$f(a) = d$; $f(b) = e$; $f(c) = f$.



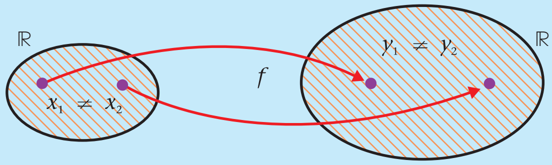
Essa função é bijetora, pois todo elemento de B é imagem de exatamente um único elemento de A.

ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$

Essa função é bijetora, pois:

a) todo real positivo tem cubo real;

b) dois reais distintos tem cubos distintos.



iii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = 3x$
É bijetora, porque cada real é triplo de um real que é o seu terço. Dois reais distintos têm triplos distintos.

iv) Seja a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = 2x - 1$
Tomando $2x + 1 = k$:

$$x = \frac{k-1}{2}$$

Para cada k pertecente ao contradomínio $\mathbb{R}$, existe apenas um x do domínio, logo essa função é bijetiva.

v) Calcular os conjuntos A e B de modo que a função f: A $\to$ B tal que $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$ seja bijetiva.

De início, devemos ter $x \neq 3$, logo o maior conjunto A será $\mathbb{R} - \{3\}$.

Façamos $\dfrac{2x+1}{x-3} = k$ e calculemos a solução x:

$2x + 1 = kx - 3k$
$2x - kx = -1 - 3k$

$$x = \frac{3k+1}{k-2}$$

Para existir x devemos ter $k \neq 2$. Por outro lado, para cada $k \neq 2$ existirá apenas um x, logo B = $\mathbb{R} - \{2\}$.

Observações:

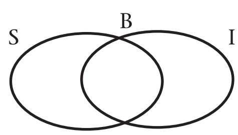
1) Se considerarmos uma função definida por equações do tipo $y = f(x)$, se x:

a) for único para qualquer $y \in f(X)$ a função será injetora;

b) existir para qualquer y a função será sobrejetora;

c) existir e for único para qualquer y, então f será bijetora.

2) Se S é o conjunto das sobrejeções e I é o conjunto das injeções, B = I ∩ S é o conjunto das bijeções.



3) Sejam X e Y conjuntos finitos:

a) se f é bijetiva, então $n(X) = n(f(X)) = n(Y)$;

b) se f é injetiva, então $n(X) \leq n(f(X)) = n(Y)$;

c) se f é sobrejetiva, então $n(X) \geq n(f(X)) = n(Y)$.

4.2 – Paridade de uma função

4.2.1 – Domínio simétrico

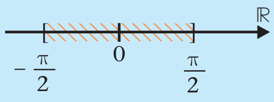
DEFINIÇÃO
Domínio simétrico.

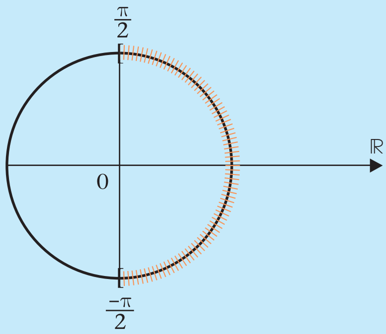
Dizemos que uma função tem o **domínio simétrico** se os seus pontos forem, dois a dois, simétricos, exceto zero.

Exemplos:

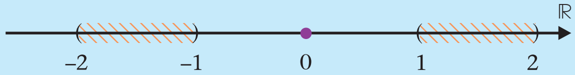
i) O conjunto dos inteiros é simétrico.
$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

ii) O intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ é simétrico.





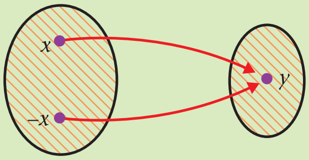
iii) O conjunto $(-2, -1) \cup (1, 2)$ é simétrico.



4.2.2 – Função par

DEFINIÇÃO
Função par.

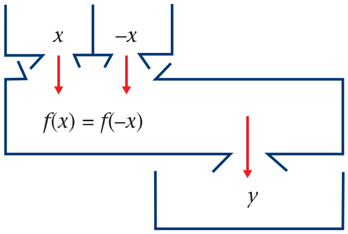
Uma função f de domínio simétrico se diz **par** se as imagens de pontos simétricos forem iguais.



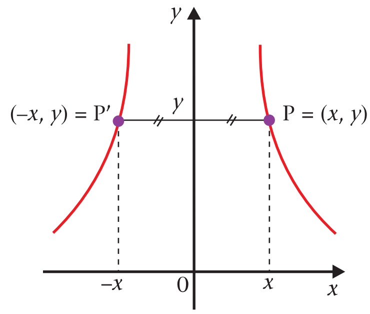
Temos: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = f(-x) \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{f(-x) = f(x)}$

A condição para que uma função seja par é:

$$\forall x \in X, \exists (-x) \in X \mid f(-x) = f(x)$$

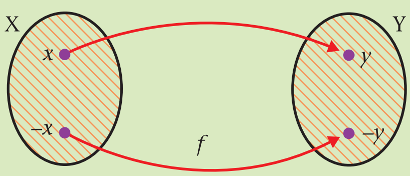


Na função par o gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy.



4.2.3 Função ímpar

Uma função f de domínio simétrico é dita **ímpar** se as imagens de pontos simétricos forem simétricas.

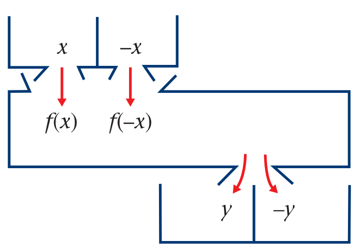


Temos: $\begin{cases} y = f(x) \\ -y = f(-x) \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$

DEFINIÇÃO
Função ímpar.

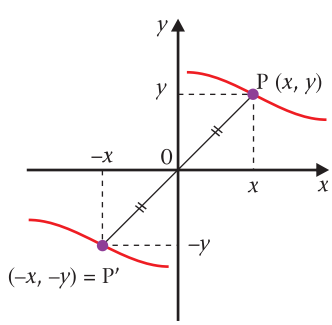
A condição para que uma função seja ímpar é que:

$$\forall x \in X, \exists\, (-x) \in X \mid f(-x) = -f(x)$$



NOTA
É fácil entender que o conjunto das imagens de uma função ímpar é um conjunto simétrico.

Na função ímpar o gráfico é simétrico em relação à origem.



NOTA
Se o domínio de uma função não for simétrico, ela não será par nem ímpar.

Exemplos:

i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = 2x^4 + x^2 - 2$
$f(-x) = 2(-x)^4 + (-x)^2 - 2$
$f(-x) = 2x^4 + x^2 - 2$
$f(-x) = f(x)$ é par

ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = 5x^3 - 2x$
$f(-x) = 5(-x)^3 - 2(-x)$
$f(-x) = -\ 5x^3 + 2x = -\ (5x^3 - 2x)$
$f(-x) = -\ f(x)$ é ímpar

iii) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid y = \sqrt{1 - x^2}$
$f: (-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2}$
$f: (-x) = f(x)$ é par

iv) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$
$f(-x) = \dfrac{|-x|}{x} = -\dfrac{|-x|}{x} = -\ f(x)$ é ímpar

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 (UFF-RJ) Sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e a aplicação f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, podemos afirmar que f:

(A) é sobrejetora e não injetora.

(B) é bijetora.

(C) é sobrejetora.

(D) é injetora.

(E) não é injetora nem sobrejetora.

2 (Cefet-BA) Considerando A um conjunto com n elementos, B um conjunto com m elementos, e f: A $\to$ B uma função, a afirmação correta é:

(A) se $n > m$, f é injetora.

(B) se $n > m$, f não é injetora.

(C) se $n = m$, f é bijetora.

(D) se $n = m$, f não é sobrejetora.

(E) se $n = m$, f não é injetora.

3 Sejam f e g duas funções, que se pode dizer de:

a) $f + g$, se f e g são pares?

b) fg, se f e g são pares?

c) $f + g$ e fg, se f é par e g ímpar?

d) $f + g$ e fg, se f e g são ímpares?

4 Dadas as funções, diga se elas são injeções e veja também se elas são sobrejeções.

a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 2x + 1$

b) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^3$

c) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$

d) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$

e) f: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{1}{x}$

f) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = |\, x + 1 \,|$

g) f: $\mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

h) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = |\, x \,|$

5 O diagrama abaixo representa:

(A) uma correspondência plurívoca.

(B) uma função injetora.

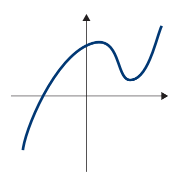
(C) uma função sobrejetora.

(D) uma função bijetora.

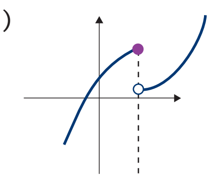
(E) nenhuma das anteriores.

6 Dados os gráficos definidos de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, indique aqueles que representam funções injetoras.

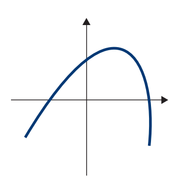
(A)



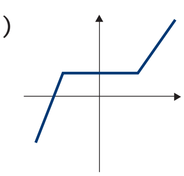
(D)



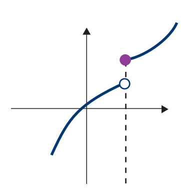
(B)



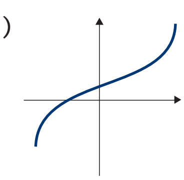
(E)



(C)



(F)



7 Sobre os gráficos do exercício anterior, primeiramente escolha aqueles que representam funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sobrejetoras; depois, determine quais são bijetoras.

4.3 – Função inversa

4.3.1 – Introdução

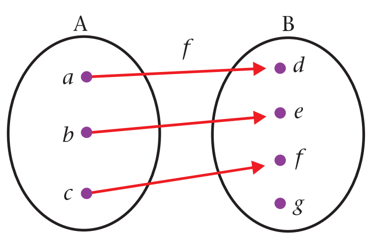
DEFINIÇÃO
Função inversa.

Consideremos uma função f, **bijetora**, definida em X e tomando valores em Y. Como a cada elemento $x \in$ X se associa um, e somente um, elemento $y \in$ Y, associa-se também a cada elemento y e Y um, e somente um, elemento $x \in$ X.

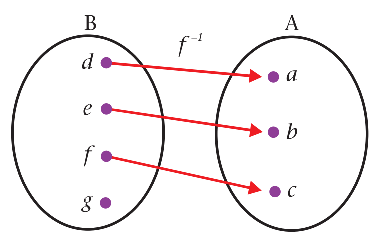
Esse fato nos leva, então, a definir uma nova função definida em Y e tomando valores em X. Esta função é denominada **função inversa** de f e se representa por f^{-1}.

Sejam as relações de A em B representadas pelos diagramas a seguir, observe as inversas de cada relação. Assim podemos verificar que:

i)

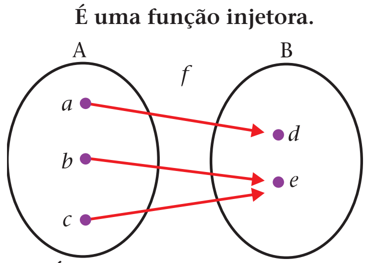


É uma função injetora.

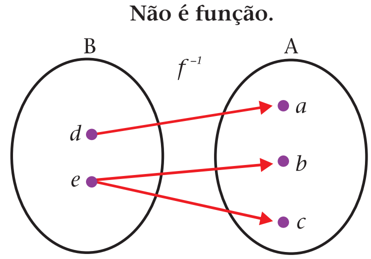


Não é função.

ii)

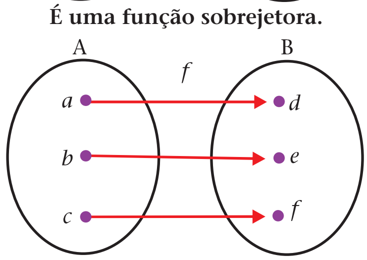


É uma função sobrejetora.

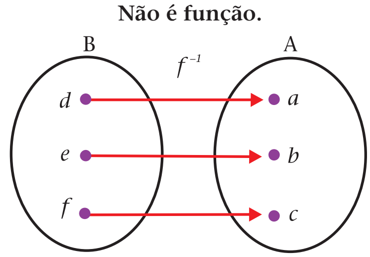


Não é função.

iii)



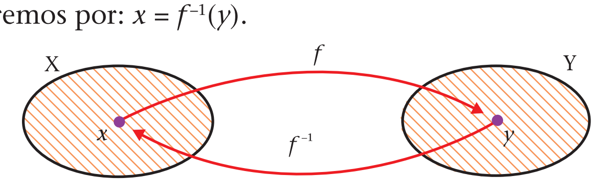
É uma função bijetora.



É uma função bijetora.

Conclusão: para existir uma função inversa de uma função f: A $\to$ B, f tem de ser bijetora.

Representaremos por: $x = f^{-1}(y)$.



O elemento x é imagem de y por f^{-1}. Podemos então escrever:

$$\forall y \in \text{Y},\ \exists^* x \in \text{X} \mid x = f^{-1}(y)$$

ou ainda:

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid x = f^{-1}(y)\} \Leftrightarrow f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$$

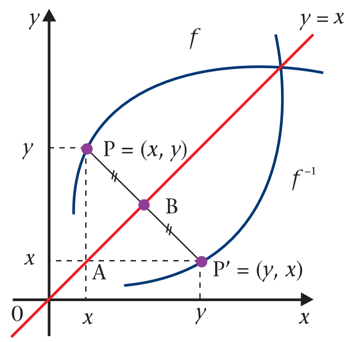
Essas definições mostram que o domínio de f é o contradomínio de f^{-1} e assim reciprocamente; e que a inversa de f^{-1} é f, ou $(f^{-1})^{-1} = f$.

Podemos escrever que $(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$ ou ainda $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$.

Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à reta $y = x$.

Os triângulos ABP e ABP' são congruentes, logo BP = BP'.

NOTA
A função f^{-1} é a que desfaz os efeitos da função f. A imagem de cada y é o seu x original.



NOTA
Se o gráfico de f intersectar o gráfico de f^{-1}, os produtos de interseção estarão sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares, pois $(x, y) = (y, x) \Leftrightarrow y = x$.

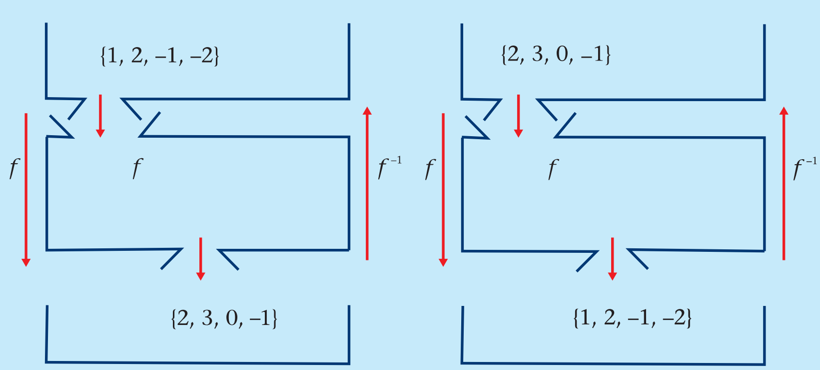
Exemplo:

Se $f = \{(1, 2), (2, 3), (-1, 0), (-2, -1)\}$, então, $f^{-1} = g = \{(2, 1), (3, 2), (0, -1), (-1, -2)\}$ ou seja:

f	
x	y
1	2
2	3
–1	0
–2	–1

f^{-1}	
x	y
2	1
3	2
0	–1
–1	–2

Utilizando a "máquina":



NOTA
Para se obter os pontos de f^{-1}, basta permutar as coordenadas de cada ponto.

NOTA
Para se obter a lei de formação da função inversa, usamos a seguinte regra prática:
a) trocamos x por y;
b) isolamos o novo y.

NOTA
O nome das variáveis que aparecem na relação funcional não influi na diferenciação das funções. O que interessa é a lei da passagem de uma variável para a outra.

Exercícios resolvidos:

1) Calcular a inversa de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 3x - 2$.

Solução: Temos que $y = 3x - 2$.

$$3x = y + 2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{3}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\Big|\, f^{-1}(y) = \frac{y+2}{3} \text{ ou } f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\Big|\, f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$

2) Determinar os maiores conjuntos A e B de modo que a função $f\colon A \to B \,\Big|\, f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ admita inversa e determinar a inversa.

Solução: Como a função tem de ser bijetiva, $A = \mathbb{R} - \{3\}$, tirando o valor de x em:

$y = \dfrac{2x+1}{x-3}$ vem: $xy - 3y = 2x + 1$

$$xy - 2x = 3y + 1 \Rightarrow (y-2)x = 3y + 1 \Rightarrow x = \frac{3y+1}{y-2}$$

Então: $B = \mathbb{R} - \{2\}$ e $f^{-1}: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{3\} \,\Big|\, f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

3) Determinar a inversa da função f, tal que:

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-1} \text{ sendo } x \neq \frac{1}{2}$$

Solução: Consideremos: como $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, basta tirar x da equação acima. Temos então:

$$2xy - y = x + 1$$
$$2xy - x = y + 1$$
$$x = \frac{y+1}{2y-1}$$

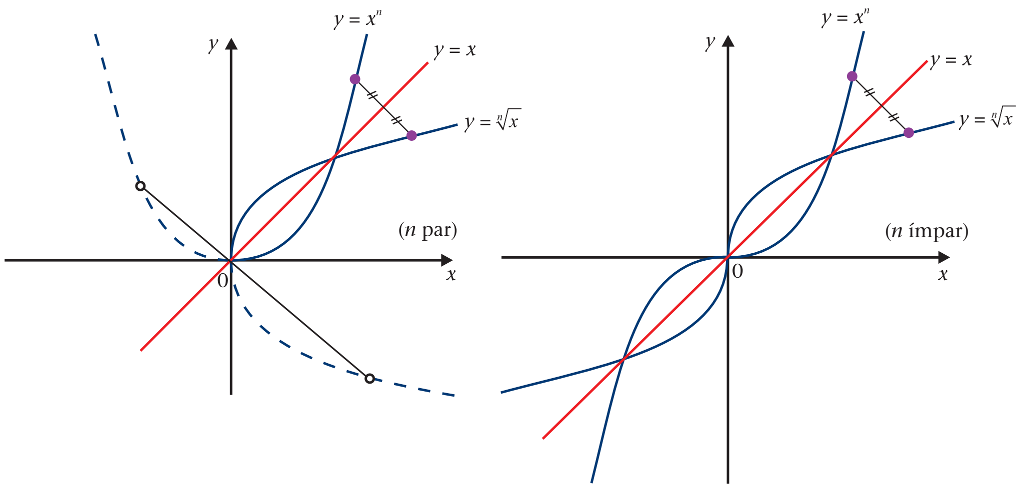
Observe o fato interessante que ocorreu: a lei de passagem de X para Y é igual à de Y para X. Os gráficos de f e f^{-1} são coincidentes, logo: $f^{-1} = f$
Assim, se:

$$y = f(x) = \frac{x+1}{2x-1};\ b = g(a) = \frac{a+1}{2a-1} \text{ ou } x = h(y) = \frac{y+1}{2y-1}$$

podemos escrever: $f = g = h$

Observações:

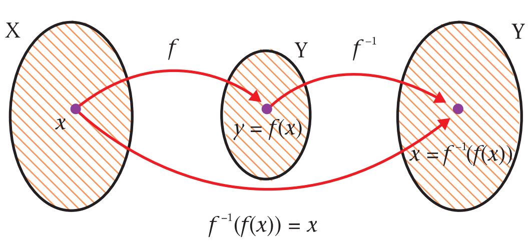
1) Uma função raiz $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto y = \sqrt[n]{x}$ é a função inversa da **função potência**. Podemos ter o n como par ou ímpar.



2) Para composição de função inversa, consideremos uma função f e sua inversa f^{-1}.
Como sabemos: $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y)$; substituindo y em f^{-1} temos:

$$x = f^{-1}\big(f(x)\big) \text{ ou } y = f\big(f^{-1}(y)\big) \qquad \begin{array}{l} f^{-1} \circ f = \mathrm{I}_x \\ f \circ f^{-1} = \mathrm{I}_y \end{array}$$

NOTA
I_x é a identidade.



Podemos, observando esse resultado, concluir que f^{-1} se comporta como que anulando o papel da função f. Nesse caso, a variável livre não sofre transformação. Podemos, então, escrever:

$$g(f(x)) = x \Leftrightarrow g = f^{-1} \quad \text{ou} \quad g^{-1} = f$$
$$f(g(x)) = x \Leftrightarrow f = g^{-1} \quad \text{ou} \quad f^{-1} = g$$

Esse aspecto nos leva a outro modo de calcular a função inversa de uma função. A composta de uma função com sua inversa é a **função identidade**.

Exercícios resolvidos:

1) Calcular a inversa da função *f*, tal que $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x}$.

Solução: Façamos $f(g(x)) = x$ e calculemos $g(x)$.

$$f(g(x)) = \frac{2g(x) - 1}{3g(x)} = x$$

$$2g(x) - 3xg(x) = 1$$

$$(2 - 3x)g(x) = 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2 - 3x}$$

Como $g = f^{-1}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2 - 3x}$.

2) Sendo $f\left(\dfrac{x-2}{3x}\right) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3}$, calcular $f^{-1}(x)$ e $f(x)$.

Solução: Como $f(f^{-1}(x)) = x$, basta obrigar $\dfrac{x^3 - 1}{x^3} = y$ e calcular x.

$$x^3 - 1 = yx^3 \Rightarrow x^3(1 - y) = 1$$

$$x^3 = \frac{1}{1 - y} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - y}}$$

Substituindo x em f temos:

$$f\left(\frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-y}} - 2}{\dfrac{3}{\sqrt[3]{1-y}}}\right) = y$$

Logo:

$$f^{-1}(y) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-y}} - 2}{\dfrac{3}{\sqrt[3]{1-y}}} = \frac{1 - 2\sqrt[3]{1-y}}{3}$$

Para se obter $f(z)$, basta fazer $\dfrac{x-2}{3x} = z$, isto é:

$$x - 2 = 3xz \Rightarrow x - 3xz = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{1 - 3z}$$

$$f(z) = \frac{x^3 - 1}{x^3} = \frac{\left(\dfrac{2}{1-3z}\right)^3 - 1}{\left(\dfrac{2}{1-3z}\right)^3} = 1 - \frac{(1-3z)^3}{8}$$

Ou seja, se utilizarmos apenas a letra x, as funções f e f^{-1} são definidas respectivamente por:

$$f(x) = 1 - \frac{(1-3x)^3}{8} \quad \text{e} \quad f^{-1}(x) = \frac{1 - 2\sqrt[3]{1-x}}{3}$$

3) Mostre que a função f, tal que $y = \dfrac{x+1}{2x-3}$ é inversa de g, cuja relação funcional é $x = \dfrac{3y+1}{2y-3}$.

Solução: Basta compor $g \circ f$,

$$g \circ f = \frac{3\dfrac{x+1}{2x-3}+1}{2\dfrac{x+1}{2x-3}-3} = \frac{3x+3+2x-3}{2x+2-2x+3} = \frac{5x}{5} = x$$

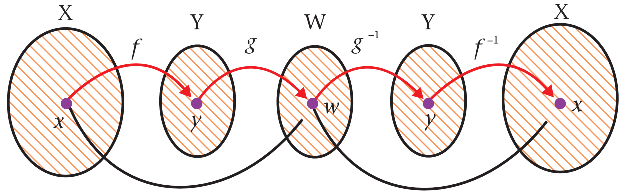
o que demonstra a hipótese.

4.3.2 – Função inversa de uma função composta

A inversa da função composta é a composta das inversas, na ordem inversa.

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ w = g(y) \end{array}\right\} w = g\big(f(g)\big) \qquad \left.\begin{array}{l} y = g^{-1}(w) \\ x = f^{-1}(y) \end{array}\right\} x = f^{-1}\big(g^{-1}(w)\big)$$

$$w = h(x) \quad \Rightarrow h = g(f) \qquad x = h^{-1}(x) \Rightarrow h^{-1} = f^{-1}\big(g^{-1}\big)$$



$$h = g(f) = g \circ f \qquad h^{-1} = f^{-1}(g^{-1}) = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Exemplo:

Sendo $f(x-3) = \dfrac{x+2}{x-3}$, calcular f^{-1}.

Só podemos calcular f^{-1} quando temos $f(x)$ (note que o problema dá $f(x-3)$), logo, temos que transformá-lo em $f(x)$).

i) Façamos: $x - 3 = t \Rightarrow x = t + 3$

$$f(t) = \frac{t+3+2}{t+3-3} = \frac{t+5}{t}$$

Calculemos agora f^{-1}: se $y = f(t) \Rightarrow t = f^{-1}(y)$

$$y = \frac{t+5}{t} \Rightarrow ty = t + 5 \Rightarrow t = \frac{5}{y-1}$$

Logo:

$$f^{-1}(y) = \frac{5}{y-1} \text{ ou } f^{-1}(x) = \frac{5}{x-1}$$

ii) Outra maneira de encontrar $f(x)$ conhecendo $f(x-3)$ é dar a x o valor $x + 3$, porque $x + 3 - 3 = x$.

$$f(x-3) = \frac{x+2}{x-3} \Rightarrow f\big[(x+3)-3\big] = \frac{(x+3)+2}{(x+3)-3}$$

$$f(x) = \frac{x+5}{x}$$

iii) Podemos ainda encontrar f^{-1} diretamente, lembrando que $f(f^{-1}(y)) = y$. Façamos então:

$$\frac{x+2}{x-3} = y$$

$$x + 2 = yx - 3y$$

$$x = \frac{3y+2}{y-1}$$

Temos então:

$$f(x-3) = y \qquad \text{ou}$$

$$f\left(\frac{3y+2}{y-1} - 3\right) = y$$

$$f\left(\frac{3y+2-3y+3}{y-1}\right) = y$$

$$f\left(\frac{5}{y-1}\right) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{5}{y-1}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Achar a imagem inversa de A = {0, 2, 4} e B (–1, 6) na função quadrática $y = -x^2$.

2 Seja f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax - 2$ e g a função inversa de f. Sendo $f(-2) = 10$, determine g.

3 Determine as inversas das seguintes funções:

a) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + a$

b) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ (onde $a \neq 0$)

c) f: $[-a, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = \sqrt{x + a}$

d) f: $(-\infty, 1] \cup [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

e) f: $[4, +\infty) \rightarrow [2, +\infty)$ tal que $f(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{x}$

4 A relação inversa da relação abaixo:

(A) é uma função injetora.

(B) é uma função sobrejetora.

(C) é uma função bijetora.

(D) não é uma função.

(E) n. d. a.

5 A relação inversa da relação abaixo:

(A) é uma função injetora.

(B) é uma função sobrejetora.

(C) é uma função bijetora.

(D) não é uma função.

(E) n. d. a.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 Cada número natural $n \in \mathbb{N}$ $(n \neq 1)$ se faz corresponder ao conjunto dos seus fatores primos:
Exemplo: $12 \to \{2, 3\}$
$75 \to \{3, 5\}$
Dizer se essa aplicação de $\mathbb{N}$ em P(A), em que A designa Q conjunto dos números primos, é bijeção.

2 A função f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que:

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}; \ x \text{ é par} \\ \dfrac{x+1}{2}; \ x \text{ é ímpar} \end{cases} \quad \text{é:}$$

(A) injetora, mas não sobrejetora.
(B) sobrejetora, mas não injetora.
(C) não sobrejetora e não injetora.
(D) bijetora.
(E) n. d. a.

3 Na função f: A $\to$ B que associa $x \in$ A a $f(x) = \dfrac{x+2}{x} \in$ B, os conjuntos A e B que a tornam bijetiva são, respectivamente:

(A) $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}_+$
(B) $\mathbb{R} - \{0\}$ e $\mathbb{R} - \{0\}$
(C) $\mathbb{R} - \{0\}$ e $\mathbb{R} - \{1\}$
(D) $\mathbb{R}_+ - \{0\}$ e $\mathbb{R} - \{0\}$
(E) n. d. a.

4 Considere as aplicações f: $x \to \dfrac{1}{x-1}$ e g: $x \to \dfrac{1}{x}$.
Calcule: $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ e $g \circ g$.

5 Sendo $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ e $h(x) = x^5$, $\phi(x) = f[g(h(x))]$ é:

(A) $\phi(x) = x^{10}$
(B) $\phi(x) = x^{5^9}$
(C) $\phi(x) = x^{30}$
(D) $\phi(x) = x^{15}$
(E) n. d. a.

6 Os valores de a e b nas funções f e g, $f(x) = ax + 2$ e $g(x) = 3x + b$, tais que $f \circ g = g \circ f$, que satisfazem a condição $ab = 8$, tem soma:

(A) 9
(B) 12
(C) 6
(D) $\dfrac{33}{2}$
(E) n. d. a.

7 Dada a função $f(x+1) = \dfrac{2x+1}{3x}$, calcule $f^{-1}(x)$.

(A) $\dfrac{3x-1}{x-2}$
(B) $\dfrac{3-3x}{3x-2}$
(C) $\dfrac{1}{3x-2}$
(D) $\dfrac{3x-1}{3x-2}$
(E) n. d. a.

8 Uma função $f(x)$, definida no conjunto dos números reais, sendo a um número real determinado, verifica as propriedades: $f(x) = -f(-x)$ e $f(x+a) = f(x)$. Então:

(A) $f(a+x) = f(-x)$
(B) $f(x) = f(a)$
(C) $f(2a - x) = -f(-x)$
(D) $f(2a) = f(a)$
(E) n. d. a.

9 Consideremos a função $f(x) = x^3 - 1 + (1-x)(x^2 + x + 1)$. O conjunto de todas as soluções da equação $f(x) = 0$ é:

(A) $\{-1, 0, 1\}$
(B) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$
(C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
(D) $\varnothing$
(E) $\mathbb{R}$

10 Seja f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(2) = 7$, $f(9) = 3$, $f(0) = 0$, $f(5) = 16$ e $f(7) = 4$; seja g uma outra função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que a imagem de cada ponto x do seu domínio seja $2x + 3$. Então, chamando-se h a função composta $g \circ f$, tem-se que:

(A) $h(1) = 16$
(B) $h(9) = 9$
(C) $h(2) = 49$
(D) não existe essa função h.
(E) nada se pode afirmar, pois a lei de formação de f não é conhecida.

11 O maior valor de $x^2 - |x| + 1$ no intervalo $[-3, 3]$ é:

(A) 2 (D) 6

(B) –3 (E) 7

(C) 0

12 Sendo $x \le 4$, o contradomínio da função $y = \sqrt{x} + \sqrt{x - 4}$ é dado por:

(A) $\{y \mid y \ge 0\}$

(B) $\{y \mid 0 \le y \le 2\}$

(C) $\{y \mid y \ge 2\}$

(D) $\{y \mid y \ge 4\}$

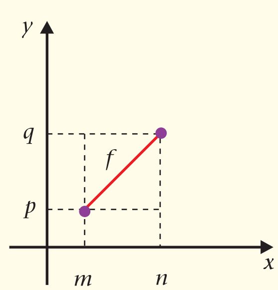
(E) n. d. a.

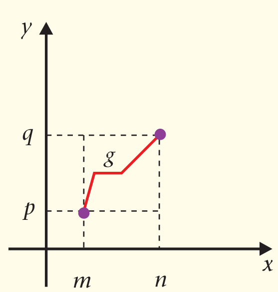
13 Considere a função f de domínio $[a, +\infty[$ e contradomínio $\mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

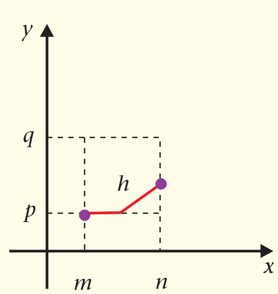
a) Qual o menor valor de a de modo que f seja injetora?

b) Determine a sentença que define $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to [a, +\infty[$.

14 Considere as funções f, g e h, todas definidas em $[m, n]$ com imagens em $[p, q]$ representadas nos gráficos abaixo:







Pode-se afirmar que:

(A) f é bijetiva, g é sobrejetiva e h não é injetiva.

(B) f é sobrejetiva, g é injetiva e h não é sobrejetiva.

(C) f não é injetiva, g é bijetiva e h é injetiva.

(D) f é injetiva, g não é sobrejetiva e h é bijetiva.

(E) f é sobrejetiva, g não é injetiva e h é sobrejetiva.

15 (Unirio-RJ) A função inversa da função bijetora $f: \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 4}$ é:

(A) $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 4}{2x + 3}$

(B) $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 4}{2x - 3}$

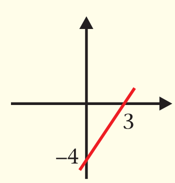
(C) $f^{-1}(x) = \dfrac{4x + 3}{2 - x}$

(D) $f^{-1}(x) = \dfrac{4x + 3}{x - 2}$

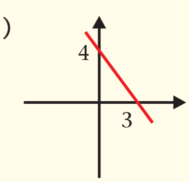
(E) $f^{-1}(x) = \dfrac{4x + 3}{x + 2}$

16 (Unificado-RJ) O gráfico que representa a inversa da função $f(x) = 3 - \dfrac{3}{4}x$ é:

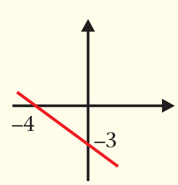
(A)



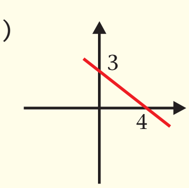
(D)



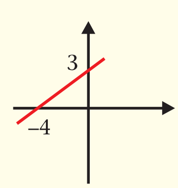
(B)



(E)



(C)



17 A função inversa da função $y = x^3$ é:

(A) $y = \dfrac{1}{x^3}$

(B) $y = 3x$

(C) $x = \sqrt[3]{y}$

(D) $y = 3x$

(E) $x = y^3$

18 Sejam $y = f(x)$ e $x = g(y)$ funções inversas. Então:

(A) $f(g(y)) = y$

(B) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

(C) $f(x) = \dfrac{1}{g(y)}$

(D) $g(y) = f(x)$

(E) $x = \dfrac{1}{y}$

19 (Uece) A lei que define a inversa da função $f(x) = \dfrac{2}{3}x - 1$ é:

(A) $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2}$

(B) $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{2}x + 1$

(C) $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{2}x - 1$

(D) $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}$

(E) n. d. a.

20 (UFRS) A função inversa da função definida por $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ é:

(A) $x + 1$

(B) $x - 1$

(C) $\dfrac{x+1}{x-1}$

(D) $\dfrac{1-x}{x}$

(E) $\dfrac{1+x}{x}$

21 (UFPA) O gráfico de uma função $f(x) = ax + b$ é uma reta que corta os eixos coordenados nos pontos (2, 0) e (0, –3). O valor de $f(f-1(0))$ é:

(A) $\dfrac{15}{2}$

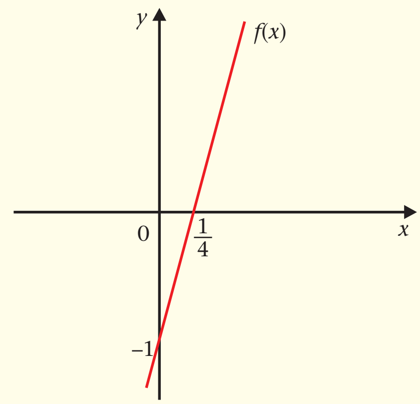
(B) 0

(C) $-\dfrac{10}{3}$

(D) $\dfrac{10}{3}$

(E) $-\dfrac{5}{2}$

22 (Unirio-RJ)



Com a função $f(x)$, representada no gráfico acima, e com a função $g(x)$, obtém-se a composta $g(f(x)) = x$. A expressão algébrica que define $g(x)$ é:

(A) $-\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{4}$

(B) $-\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}$

(C) $\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}$

(D) $\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{4}$

(E) $\dfrac{x}{4} + 1$

23 Sejam a, b, c reais não nulos e distintos, $c > 0$. Sendo par a função dada por:

$$f(x) = \frac{ax+b}{x+c}, -c < x < c,$$

então, $f(x)$, para $-c < x < c$, é constante e igual a:

(A) $a + b$

(B) $a + c$

(C) c

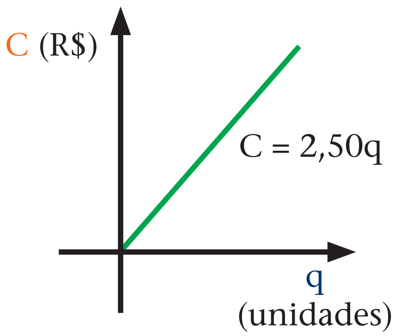
(D) b

(E) a

CAPÍTULO V

FUNÇÃO LINEAR E FUNÇÃO AFIM

Misto Quente



Frequentemente, o custo de uma compra é proporcional à quantidade comprada. A proporcionalidade entre duas grandezas é modelada por funções lineares (então o custo seria uma função linear da quantidade comprada). Por outro lado, se há proporcionalidade entre as variações de duas grandezas, a função que as relaciona é afim. Por exemplo, o preço de uma corrida de táxi é uma função afim da distância percorrida; uma conta telefônica é uma função afim do número de minutos utilizados; o valor de uma temperatura em Celsius é uma função afim do valor da mesma temperatura em Fahrenheit. Neste capítulo, estudaremos as funções lineares e afins.

5 – FUNÇÃO LINEAR E FUNÇÃO AFIM

5.1 – Função linear

DEFINIÇÃO
Função linear.

Seja a um número real. Chama-se **função linear** a função f definida nos reais e tomando valores nos reais tal que $f(x) = ax$.

NOTA
O domínio de uma função linear é o intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Temos então: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = ax$

NOTA
Para calcular o valor numérico da variável y, basta multiplicar o valor de x pelo número a.

Exemplos:

i) $y = 2x$

ii) $y = \dfrac{1}{2}x$

iii) $y = -3x$

iv) $y = \dfrac{1}{3}x$

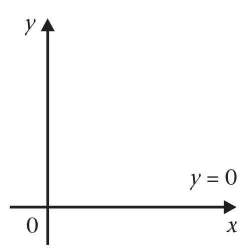
5.1.1 – Casos particulares

A) Se o coeficiente a for nulo, isto é, $a = 0$, então, a função linear será constante e igual a zero para qualquer valor de x. Em outras palavras:

$$a = 0 \Rightarrow y = 0x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

NOTA
Quando $y = 0$ para todo valor de x, a função é dita identicamente nula. Todos os pontos do gráfico da função são do tipo $(x, 0)$.

Neste caso, o gráfico da função linear $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid x \mapsto y = 0$ é a reta que coincide com o eixo Ox. Dizemos então que $y = 0$ é a equação do eixo Ox.



NOTA
Para $a \neq 0$, a função linear é também sobrejetiva, pois para qualquer $y \in \mathbb{R}$ existe $x = \dfrac{1}{a}$.

B) Se $a \neq 0$, consideremos dois números reais distintos x_1 e x_2 e suas imagens correspondentes y_1 e y_2. Temos que: $y_1 = ax_1$ e $y_2 = ax_2$.
Subtraindo membro a membro, temos $y_1 - y_2 = a\,(x_1 - x_2)$.
Como $x_1 \neq x_2$ e $a \neq 0$, a diferença $y_1 - y_2$ será diferente de zero, logo $y_1 \neq y_2$.
Concluímos então que a **função linear é injetiva**.

Observações:

1) Se $a > 0$ e $x_1 > x_2$, a diferença $y_1 - y_2$ será o produto de dois números positivos, sendo portanto positiva, logo $y_1 - y_2 > 0$ e $y_1 > y_2$.

Quando $a > 0$, a função linear será **estritamente crescente**.

2) Se $a < 0$ e $x_1 > x_2$, teremos $y_1 - y_2 < 0$, que mostra que $y_1 < y_2$.

Quando $a < 0$, a função linear será **estritamente decrescente**.

Exemplos:

i) $y = \frac{1}{2}x$ é crescente, pois $a = \frac{1}{2} > 0$

ii) $y = -2x$ é decrescente, pois $a = -2 < 0$

iii) A função linear $y = (2m - 6)x$ será estritamente crescente se, e somente se, $2m - 6 > 0 \Rightarrow m > 3$.

5.1.2 – Gráfico da função linear

1) O gráfico de toda função linear passa pela origem.

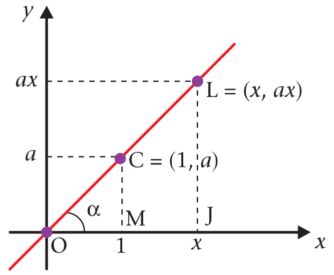
Basta ver que para $x = 0$ tem-se $y = a \cdot 0 = 0$, logo, o ponto $O = (0, 0)$ pertence ao gráfico de todas as funções lineares.

NOTA
Se $f(x) = ax$, então $f(0) = 0$.

2) O gráfico de toda função linear é simétrico em relação à origem.

Basta ver que a função $f(x) = ax$ é uma função ímpar. De fato, temos que $f(-x) = a(-x) = -ax = -f(x)$.

3) Se $f(x) = ax$, o coeficiente a será o valor $f(1)$, uma vez que $f(1) = a \cdot 1 = a$. O ponto $C = (1, a)$ é, portanto, um ponto do gráfico da função.



NOTA
Paralelas cortadas por transversais determinam segmentos proporcionais.

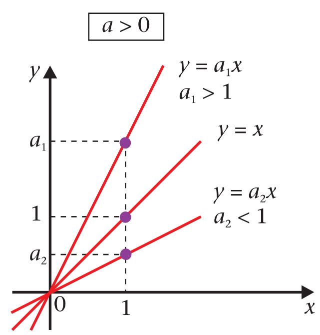
Seja L um ponto qualquer da forma L = (x, ax). Suponha $x > 0$. Temos que:

$$OM = 1 \qquad OJ = x$$
$$MC = a \qquad JL = ax$$

NOTA
Note que $a = \text{tg}\,\alpha$, pois o triângulo OMC tem catetos iguais a 1 e a. O coeficiente a é também chamado **coeficiente angular da reta.**

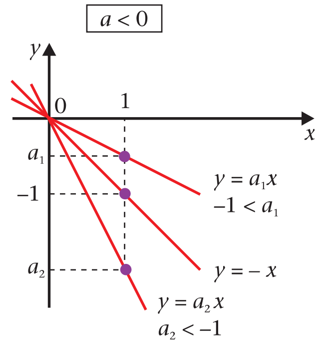
Como: $\frac{MC}{OM} = \frac{a}{1} = a$ e $\frac{JL}{OJ} = \frac{ax}{x} = a$, concluímos que $\frac{MC}{OM} = \frac{JL}{OJ}$ e os triângulos OMC e OJL são semelhantes. Assim, $M\hat{O}C = J\hat{O}L = \alpha$, o que nos leva à conclusão de que os pontos O, C e L estão em linha reta, qualquer que seja L.

O gráfico de uma função linear é uma reta que passa pela origem (0, 0) e pelo ponto de coordenadas (1, a).



NOTA
A única reta que passa pela origem e não é uma função é o eixo y. Todos os pontos desse eixo têm abscissa nula. Dizemos então que $x = 0$ é a equação do eixo Oy.

Sendo $a > 0$, quanto maior for o valor de a, mais inclinada estará a reta. Quando $a = 1$, temos a bissetriz dos quadrantes ímpares.



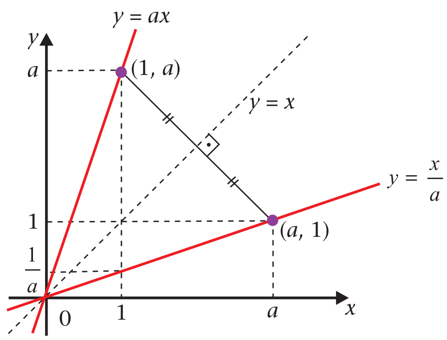
NOTA
A equação $y = ax$ é chamada **a equação da reta**.

Sendo $a < 0$, quanto menor for o valor de a, mais inclinada estará a reta. Quando $a = -1$, temos a bissetriz dos quadrantes pares.

Observação:

Quando $a \neq 0$, a função linear é bijetiva, então existirá a sua função inversa que será também linear.

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax = y \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \dfrac{y}{a} = x \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{a} = y \end{array}$$



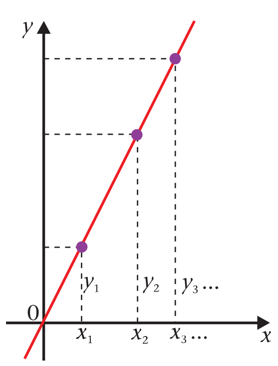
NOTA
Quando $a = 1$, a reta será de equação $y = x$. Esta função é chamada **função identidade**.

5.1.3 – Propriedade característica da função linear – proporcionalidade

Seja uma função linear f, tal que $f(x) = ax$. Consideremos a sucessão de números reais não nulos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ e suas imagens pela função f, a saber, $y_1 = f(x_1) = ax_1$, $y_2 = f(x_2) = ax_2$, $y_3 = f(x_3) = ax_3, \ldots$

Temos então:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots = a$$



A sequência de números obtidos é de números proporcionais à sequência de valores de x, cuja razão de proporcionalidade é a.

NOTA
Se uma função é linear, as imagens são proporcionais aos valores x. O coeficiente angular do gráfico é a razão de proporcionalidade.

NOTA
Ser linear é suficiente para que as imagens sejam proporcionais aos valores correspondentes.

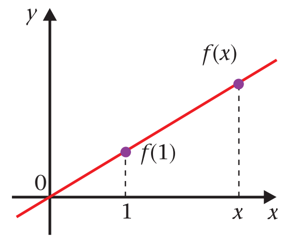
NOTA
Ser proporcional é suficiente para que a função seja linear, logo, ser linear é necessário para que os valores assumidos por y sejam proporcionais aos correspondentes valores de x.

Reciprocamente, se uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é tal que quaisquer que sejam x_1 e x_2 não nulos se tenha $\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2}$, então f é linear.

Com efeito, fazendo $x_1 = 1$ e $x_2 = x$, temos:

$$\frac{f(1)}{1} = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = f(1) \cdot x$$

Chamando-se $f(1) = a$, vem $f(x) = ax$.



NOTA
Supõe-se que o preço de uma unidade não se altere com as quantidades correspondentes.

NOTA
Variações iguais de temperatura acarretam deslocamentos iguais nos termômetros.

Exercícios resolvidos:

1) Se o preço de um quilo de arroz é R$ 2,00, qual o preço y a pagar por x kg de arroz?

<u>Solução:</u> Temos que:

$p(1) = 2$, $p(2) = 4$, $p(3) = 6$, ...
então, temos as sucessões:
$(1, 2, 3, ..., x)$
$(2, 4, 6, ..., y)$

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = ... = \frac{y}{x} \Rightarrow y = 2x$$

2) As escalas termométricas Celsius e Reamur são tais que na fusão do gelo elas marcam 0°. Na ebulição da água, a Celsius marca 100 °C e a Reamur, 80 °R. Qual a função linear que relaciona as duas escalas? Qual a temperatura em °R quando a água estiver a 65 °C?

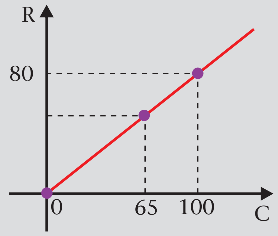
<u>Solução:</u> Temos que $R = aC$.

Para $C = 100$, $R = 80$, logo:

$$80 = a \cdot 100 \Rightarrow a = \frac{4}{5}$$

Assim: $R = \frac{4}{5}C$

Quando C = 65 °C, então, $R = \frac{4}{5} \cdot 65 = 52$ °R.



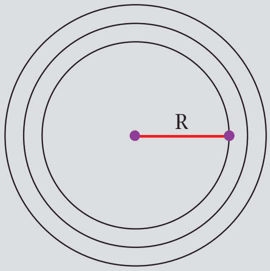
3) O gráfico de uma função é uma reta que passa pelos pontos A = (4, 10) e B = (80, 200). Esta função é linear? Em caso afirmativo, qual a relação entre x e y?

Solução: Como $\frac{10}{4} = \frac{200}{80}$ existe a proporcionalidade, logo, a função é linear.

Por outro lado, $\frac{y}{x} = \frac{10}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{2}x$.

4) Estima-se que num evento, quatro pessoas ocupam 1 m^2. Qual a quantidade de pessoas que caberão numa praça circular de raio R metros?

Solução: Temos as sucessões proporcionais:



A quantidade de pessoas Q é proporcional à área ocupada. Então:

$$\frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \ldots \frac{Q}{S} \Rightarrow Q = 4S$$

Observe que a função linear é a que relaciona a área do círculo à quantidade de pessoas $Q = f(S) = 4S$. A área é proporcional ao quadrado do raio do círculo: $S = g(R) = \pi R^2$. Então, a quantidade de pessoas em função do raio será:

$$Q = f(g(R)) = 4g(R) = 4\pi R^2$$

NOTA
Os pontos devem estar sobre uma reta que passa pela origem. Suas coordenadas devem ser proporcionais.

NOTA
Trata-se de uma composição de funções.

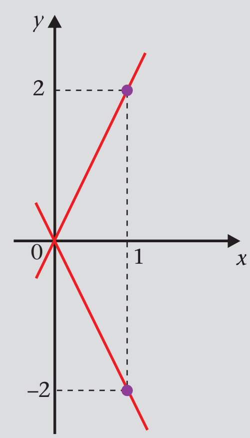
5) Qual o gráfico da equação $4x^2 - y^2 = 0$?

Solução: Fatorando o produto notável temos:

$(2x + y)(2x - y) = 0$

$2x + y = 0$ ou $2x - y = 0$

$y = -2x$ ou $y = 2x$



Trata-se, portanto, de duas retas que passam pela origem.

A condição necessária e suficiente para que uma função seja linear é que os valores assumidos por $y = f(x)$ sejam proporcionais aos correspondentes valores de $x \neq 0$.

É essa condição que permite a modelagem matemática de fenômenos em que a relação de dependência é a proporcionalidade.

5.1.3.1 – Propriedades

1) Se f é uma função linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, então:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$
$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Justificando:

NOTA
A função linear conserva a adição e a multiplicação por um número.

A imagem de uma soma é igual à soma das imagens das parcelas.
Temos que $y = f(x) = ax$.

$$y_1 = f(x_1) = ax_1 \quad \text{e} \quad y_2 = f(x_2) = ax_2$$

$$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = ax_1 + ax_2 = a(x_1 + x_2) = f(x_1 + x_2)$$

A imagem do produto de uma constante por x é o produto da mesma constante pela imagem do x.

$$f(\lambda x) = a\lambda x = \lambda ax = \lambda(ax) = \lambda f(x)$$

Essas duas propriedades podem ser resumidas numa só:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

2) Se $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2} = a$, então:

i) $\dfrac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = a$ (desde que $x_1 \neq -x_2$).

ii) $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = a$ (desde que $x_1 \neq x_2$).

iii) Se $x_1 + x_2 = 0$, então $y_1 + y_2 = 0$.

iv) Se $x_1 - x_2 = 0$, então $y_1 - y_2 = 0$.

v) Em geral, se $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2} = \dots = \dfrac{y_n}{x_n} = a$, temos:

$\dfrac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n} = a$, desde que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \neq 0$.

Exercício resolvido:

Uma herança de R$ 1.200,00 deverá ser dividida entre três irmãos em partes proporcionais a 2, 3 e 5. Que parte caberá a cada um?

Solução: Sejam y_1, y_2 e y_3 as três partes. Sabemos que:

$$\frac{y_1}{2} = \frac{y_2}{3} = \frac{y_3}{5} = a$$

Portanto: $\dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{2 + 3 + 5} = a \Rightarrow \dfrac{1\,200}{10} = a \Rightarrow a = 120$

Assim: $y_1 = 2a = 240$; $y_2 = 3a = 360$ e $y_3 = 5a = 600$

As partes serão de R$ 240,00; R$ 360,00 e R$ 600,00.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Determine se cada função definida por $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é crescente ou decrescente.

a) $f(x) = 3x$

b) $g(x) = -\frac{1}{2}x$

c) $h(x) = -\frac{1}{3}x$

d) $i(x) = \frac{4}{3}x$

2 Construa, num sistema de coordenadas cartesianas, os gráficos das função reais definidas por:

a) $f(x) = 3x$

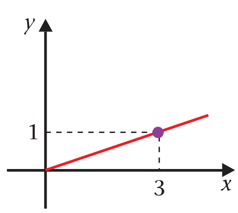
b) $g(x) = -\frac{1}{2}x$

c) $h(x) = -\frac{1}{3}x$

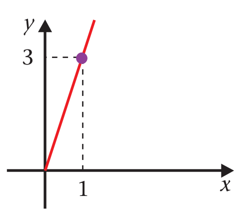
d) $i(x) = \frac{4}{3}x$

3 Com base nos gráficos, descubra a lei de formação.

a)



b)



4 Seja a função $g(x)$ real, definida por $g(1) = 43$ e $g(x + 1) = 2g(x) - 15$. Determine o valor de $g(0)$.

5 Para uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que satisfaz as condições:

I) $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

II) $f(1) = 3$,

determine o valor de $f(3)$.

6 Percorrido 85% de um certo percurso, ficam faltando 180 km para completá-lo. O percurso total é:

(A) 1 020 km

(B) 1 200 km

(C) 1 120 km

(D) 1 210 km

(E) 2 100 km

7 São conhecidos os valores calóricos dos seguintes alimentos: uma fatia de pão integral, 55 kcal; um litro de leite, 550 kcal; 200 g de manteiga, 1 400 kcal; 1 kg de queijo, 3 200 kcal; uma banana, 80 kcal.

a) Qual o valor calórico de uma refeição composta por 2 fatias de pão integral, 1 copo de 200 mL de leite, 10 g de manteiga, 4 fatias de queijo, de 10 g cada uma, e 2 bananas?

b) Um copo de leite integral contém 248 mg de cálcio, o que representa 31% do valor diário recomendado de cálcio. Qual é esse valor recomendado?

8 Um taxista inicia o dia de trabalho com o tanque de combustível de seu carro inteiramente cheio. Percorre 325 km e reabastece, sendo necessários 25 litros para completar o tanque. Em seguida, percorre 520 km até esvaziar completamente o tanque. Assim, nestas condições, determine a capacidade do tanque do carro, em litros.

9 Três restaurantes "por quilo", A, B e C, apresentam seus preços de acordo com a tabela:

Restaurante	Quantidade/Preço
A	250 g por R$ 4,00
B	350 g por R$ 5,00
C	600 g por R$ 7,00

Se uma pessoa consumir 400 g de alimentos, então ela pagará:

(A) mais em B do que em A.

(B) mais em C do que em B.

(C) mais em A do que em C.

(D) valores iguais em A e em C.

(E) valores iguais em B e em C.

10 O país A possui renda *per capita* anual de R dólares e população de P habitantes. Sabendo-se que o país B possui renda *per capita* anual igual a 60% da do país A e o dobro da população deste, é correto dizer que a renda total anual do país B é:

(A) 20% inferior à de A.

(B) 30% inferior à de A.

(C) igual à de A.

(D) 30% superior à de A.

(E) 20% superior à de A.

5.2 – Função afim

Sejam a e b dois números reais, chama-se **função afim** a função f definida nos reais tomando valores nos reais tal que $f(x) = ax + b$. O número a é chamado **coeficiente angular** e o b **coeficiente linear** da função.

DEFINIÇÃO
Função afim.

Temos então: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b$

NOTA
Para se obter a imagem de x, multiplica-se x por a e soma-se o produto ax ao número b.

Exemplos:

São funções afins as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que:

i) $y = 2x + 1$

ii) $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$

iii) $y = 3$

iv) $y = x$

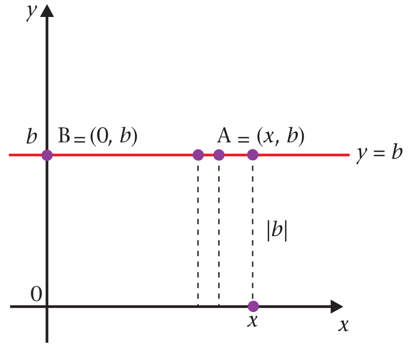
5.2.1 – Casos particulares

A) Quando $b = 0$, a função afim se reduz à **função linear** $y = ax$.

B) Quando $a = 0$, a função afim se reduz à **função constante** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = b$.

Caso $y = b$, qualquer que seja x, todos os pontos da função terão a mesma ordenada, estando situados, portanto, sobre uma reta paralela ao eixo Ox, passando pelo ponto B = $(0, b)$.

NOTA
As retas cujas equações são do tipo $y = b$ são sempre paralelas ao eixo 0x e distantes $|b|$ unidades deste eixo.



C) Quando $a \neq 0$, tomemos dois números reais distintos, x_1 e x_2, e suas respectivas imagens $y_1 = ax_1 + b$ e $y_2 = ax_2 + b$. Subtraindo membro a membro, teremos:

$$y_1 - y_2 = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = a(x_1 - x_2)$$

Como $x_1 \neq x_2$ e $a \neq 0$, temos $y_1 - y_2 \neq 0$, logo, $y_1 \neq y_2$. Assim, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$ e, portanto, a função afim será injetiva.

Por outro lado, para cada $y \in \mathbb{R}$, existirá um único x tal que $x = \dfrac{y - b}{a}$. Assim, a função é também sobrejetiva.

NOTA
Quando $a \neq 0$, a função afim recebe o nome **polinomial do 1º grau.**

Conclusão:

A função afim com $a \neq 0$ é bijetiva.

Observações:

1) Se $a > 0$ e $x_1 > x_2$, a diferença $y_1 - y_2$ será o produto de dois números positivos, logo, $y_1 - y_2 > 0$, então, $y_1 > y_2$.

Quando $a > 0$, a função afim será **estritamente crescente**.

2) Se $a < 0$ e $x_1 > x_2$, teremos $y_1 - y_2 < 0$, o que implica ser $y_1 < y_2$.

Quando $a < 0$, a função afim será **estritamente decrescente**.

Exemplos:

i) As funções em que $y = 2x + 1$, $y = \frac{1}{3}x - 2$, $y = x$ são estritamente crescentes.

ii) As funções em que $y = -3x + 2$, $y = -\frac{1}{2}x - 1$, $y = -x$ são estritamente decrescentes.

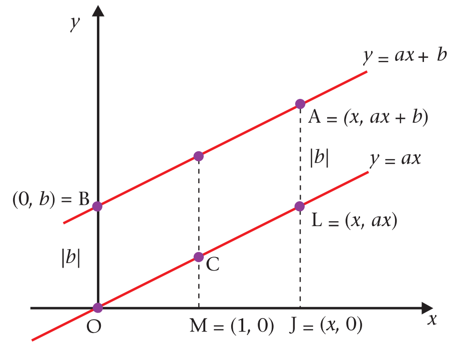
5.2.2 – Gráfico da função afim

Consideremos $a \neq 0$.

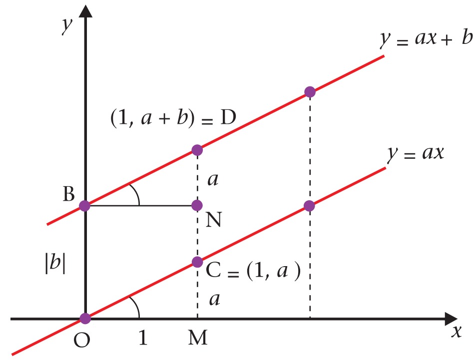
Seja $f(x) = ax + b$. Para $x = 0$, $f(0) = a \cdot 0 + b = 0 + b = b$, logo, o gráfico da função afim corta o eixo Oy no ponto $(0, b)$.

Se $b = 0$, a função afim será a função linear $y = ax$, que é uma reta que passa pela origem e pelo ponto C = $(1, a)$. Para uma abscissa x qualquer, o ponto correspondente à função linear será o ponto L = (x, ax), enquanto o ponto da função afim será o ponto A = $(x, ax + b)$. O ponto A tem a mesma abscissa que o ponto L, mas está a $|b|$ unidades acima de L (se $b > 0$) ou b unidades abaixo de L (se $b < 0$). A figura OLAB é então um paralelogramo, qualquer que seja o valor de x.

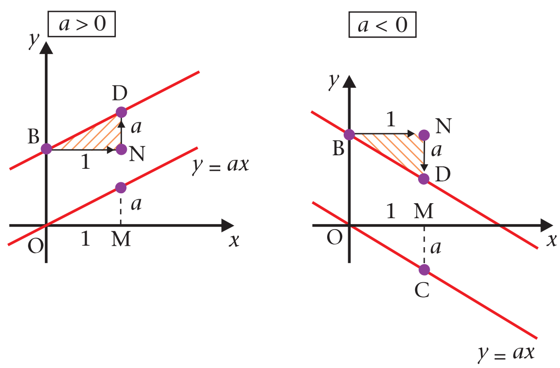
Como AB é paralela à reta OL, o gráfico da função afim $y = ax + b$ será uma reta paralela ao gráfico da função linear $y = ax$, passando pelo ponto B = $(0, b)$.



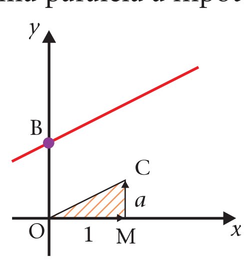
Observe que o triângulo OMC é congruente ao triângulo BND. Assim, para construir o gráfico da função afim temos três alternativas.



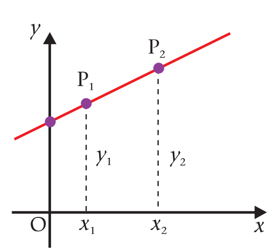
1) Constrói-se com vértice em B = (0, b) o triângulo retângulo BND de catetos BN = 1 e ND = a.



2) Constrói-se o triângulo retângulo OMC de catetos OM = 1 e MC = a e pelo ponto B = (0, b) traça-se uma paralela à hipotenusa OC.



3) Dá-se a x dois valores distintos, $x_1 \neq x_2$. Calculam-se suas imagens respectivas $y_1 = ax_1 + b$ e $y_2 = ax_2 + b$ e traça-se a reta que passa pelos pontos de coordenadas $(x_1, y_1) = P_1$ e $(x_2, y_2) = P_2$.

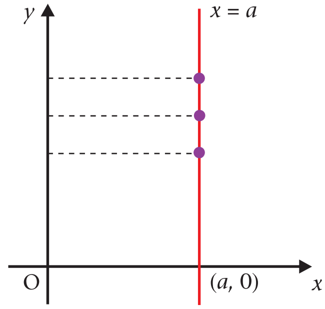


O gráfico da função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = ax + b$ é a reta que passa pelo ponto B = (0, b) e é paralela à reta que é gráfico da função linear em que $y = ax$.

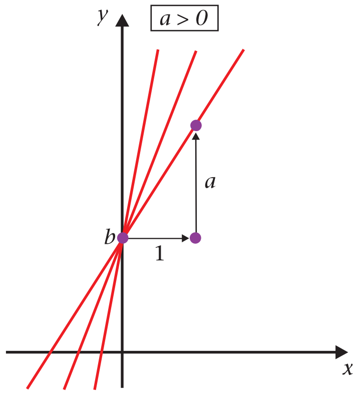
NOTA
Se uma reta é paralela ao eixo Oy, ela não representa uma função. Lembre-se, numa função, para cada x só pode haver um valor de y.

Observações:

1) Dizemos que a equação da reta paralela ao eixo Oy que passa pelo ponto (a, 0) é $x = a$.

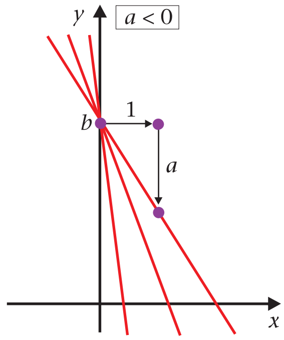


2) Se $a > 0$, a função será crescente. Quanto maior o valor de a, mais próxima do eixo Oy estará a reta.

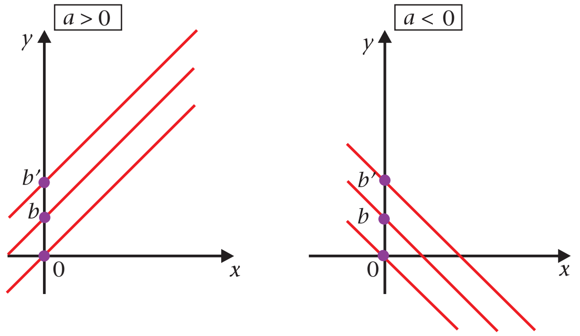


Se uma reta é paralela ao eixo Oy, ela não representa uma função. Todos os pontos desta reta têm coordenadas (a, y) para $y \in \mathbb{R}$.

3) Se $a < 0$, a função será decrescente. Quanto menor o valor de a, mais próximo do eixo Oy estará a reta.



4) Se b variar, a reta se deslocará verticalmente. Sofrerá uma **translação vertical**.

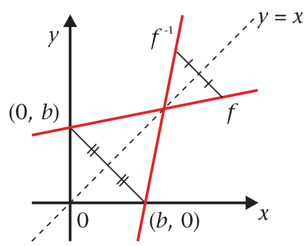


5) Quando $a \neq 0$, a função é bijetiva, logo, ela admitirá a função inversa, que também será afim.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = ax + b$$
$$y - b = ax$$
$$x = \frac{y - b}{a}$$

A função inversa será:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\Big|\; y = \frac{x - b}{a}$$
$$\text{ou } y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$



Exercícios resolvidos:

1) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = 2x - 1$. Determine sua função inversa.

Solução: Para determinar sua inversa basta tirar o valor de x em função de y:

$$y + 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{y + 1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

A inversa será $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

2) Determinar a função afim cujo gráfico passa pelos pontos A = (1, 3) e B = (–2, 1).

Solução: Seja a função em que $y = ax + b$. Para $x = 1$ temos $y = 3$, logo $3 = a + b$, para $x = -2$, temos $y = 1$; logo, $1 = -2a + b$.

NOTA

O fato de $f(f^{-1}(x)) = x$ nos leva a $2f^{-1}(x) = x + 1$ e $f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{2}$ ou $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

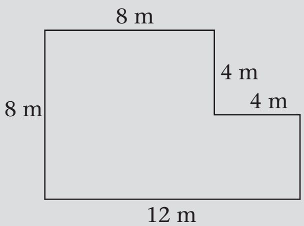
Subtraindo membro a membro, $2 = 3a \Rightarrow a = \frac{2}{3}$, então, $b = \frac{7}{3}$ e a função fica:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

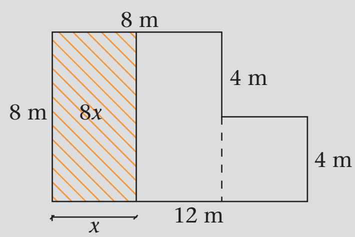
3) Determinar a função afim que é paralela à reta $y = 3x$ e que passa pelo ponto A = (2, 7).

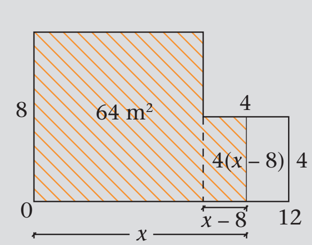
Solução: Como o gráfico é paralelo à reta $y = 3x$, temos $y = 3x + b$. Se $x = 2$, então, $y = 7$, logo, $7 = 3 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 1$ e $y = 3x + 1$. A função será $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = 3x + 1$.

4) Uma janela tem o formato de dois quadrados adjacentes, como mostra a figura ao lado. Esta janela deve ser protegida do sol por uma cortina vertical que fecha continuamente da esquerda para a direita. Expressar a área coberta da janela em função da distância x e ao ponto de partida da cortina. $(0 \leq x \leq 12)$



Solução:





Quando a cortina percorrer a distância de 0 a 8, a área será $8x$.

A partir de 8 m a área varrida será 64 m² (pois o primeiro quadrado já foi coberto) mais a área varrida no quadrado menor, que será $4(x - 8)$.

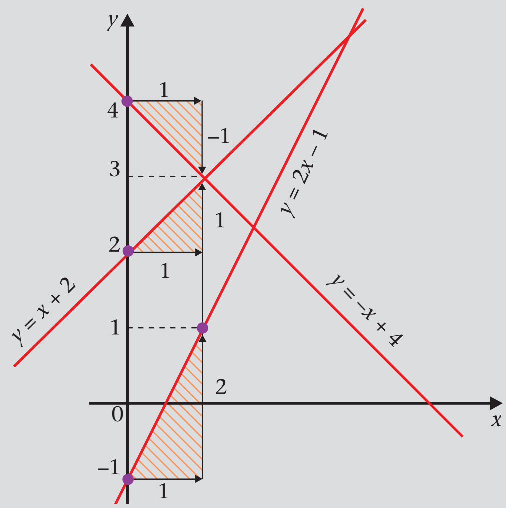
A função área será: $A: [0,12] \to R \mid A(x) = \begin{cases} 8x & 0 \leq x \leq 8 \\ 64 + 4(x-8) & 8 \leq x \leq 12 \end{cases}$

5) Representar graficamente o produto $(x - y + 2)(2x - y - 1)(x + y - 4) = 0$

Solução: Temos:

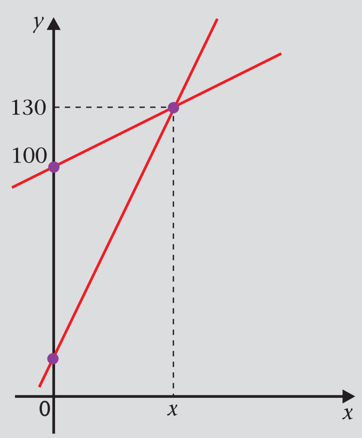
$$\begin{aligned} x - y + 2 = 0 &\Rightarrow y = x + 2 \\ 2x - y - 1 = 0 &\Rightarrow y = 2x - 1 \\ x + y - 4 = 0 &\Rightarrow y = -x + 4 \end{aligned}$$

Logo, o gráfico será a união de três retas.



6) Um helicóptero desloca-se numa trajetória cuja equação é $y = \frac{1}{2}x + 100$. Um míssil é disparado e segue numa trajetória cuja equação é $y = 2(x - 10) + a$. O míssil atinge o helicóptero quando ele está a 130 m de altura. Se x e y estão em metros, calcular o valor de a.

Solução: Como as funções são afins, as trajetórias são retilíneas.



O ponto de encontro estará na altura $y = 130$, logo:

$$\frac{1}{2}x + 100 = 130$$
$$x + 200 = 260$$
$$x = 60$$

Por outro lado:

$$y = 2x - 20 + a$$
$$130 = 2 \cdot 60 - 20 + a$$
$$130 = 120 - 20 + a$$
$$a = 30$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Sabemos que equações do tipo $x = k$ e $y = k$ ($k \in \mathbb{R}$) representam geometricamente retas verticais e retas horizontais, respectivamente.
Assim, represente, num sistema de coordenadas, os gráficos das funções reais definidas por:

a) $f(x) = 12$

b) $g(x) = -3$

c) $h(x) = 1$

2 Construa, usando o sistema cartesiano ortogonal, o gráfico das funções reais definidas por:

a) $f(x) = x + 2$

b) $f(x) = x - 3$

c) $f(x) = -x + 2$

d) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$

e) $f(x) = -3$

f) $f(x) = \frac{4}{3}x + 3$

3 Em um mesmo plano cartesiano construa os gráficos das seguintes funções: $f(x) = x$; $g(x) = x + 1$; $h(x) = x + 3$ e $i(x) = x - 3$.

4 Uma função g é definida por $g(x) = ax + 3$. Sabendo que $g(-2) + g(1) = 8$, calcule o valor de $g(-1)$.

5 (Fatec-SP) Os gráficos cartesianos das funções f e g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, interceptam-se num ponto do 1º quadrante. Se $f(x) = x + 7$ e $g(x) = -2x + k$, onde k é constante, então, k satisfaz à condição:

(A) $k > 7$

(B) $1 < k \leq 7$

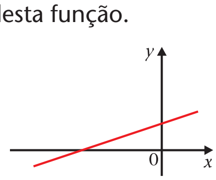
(C) $0 < k \leq 1$

(D) $-1 < k \leq 0$

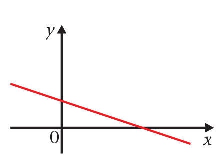
(E) $-7 < k \leq -1$

6 (UFPE) Seja $y = ax + b$, onde a e b são números reais, tais que $a < 0$ e $b > 0$.
Assinale a alternativa que indica a representação gráfica desta função.

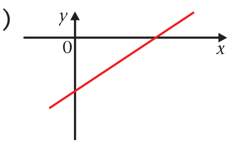
(A)



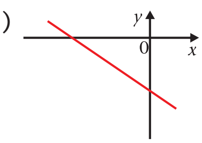
(B)



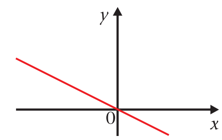
(C)



(D)



(E)



7 (FMIt-MG) O gráfico abaixo pode representar qual das expressões?

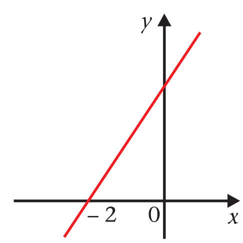
(A) $y = 2x - 3$

(B) $y = -2x + 3$

(C) $y = 1{,}5x + 3$

(D) $y = -1{,}5x + 3$

(E) $3y = -2x$



8 Classifique as funções abaixo em crescente, decrescente e constante.

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

c) $f(x) = -3x + 4$

d) $f(x) = -\frac{1}{3}x - 2$

e) $f(x) = 3$

f) $f(x) = -\frac{1}{2}$

g) $f(x) = -\frac{1}{5}x + 1$

h) $f(x) = 0$

9 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 3x + 1$, determine a lei que define a sua inversa.

10 Seja M (0, 1) e N (1, 4) pontos que definem a função real $f(x)$. Calcule $f^{-1}(0)$.

5.2.3 – Sinal da função afim – raiz da função

Chama-se **raiz da função** ao valor de x que torna $f(x) = 0$.

DEFINIÇÃO
Raiz da função.

Consideremos a função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = ax + b$, onde $a \neq 0$.

Temos: $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$ e o ponto correspondente no gráfico será o ponto $\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$.

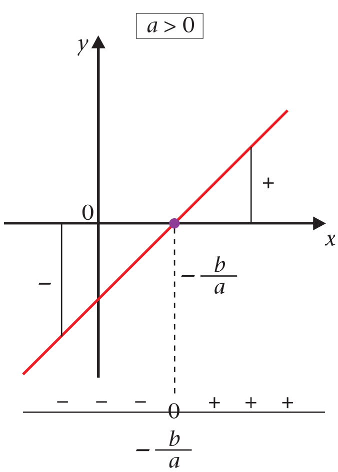
Estudar o sinal da função afim é determinar os intervalos onde $ax + b$ se torna positivo ou negativo.

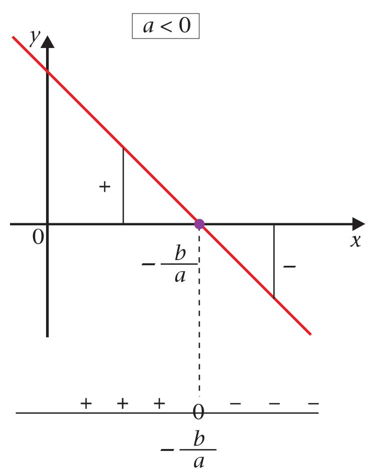
Temos:

$$y = ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

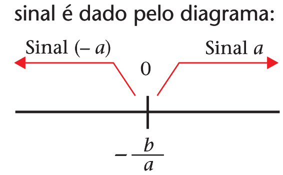
Se $x > -\dfrac{b}{a} \Rightarrow x + \dfrac{b}{a} > 0$ e $y = a\,(+)$ será o produto de a por um número positivo, logo, y terá o sinal de a se $a > 0$ e contrário ao sinal de a se $a < 0$.

As figuras abaixo ilustram esses casos.





NOTA
Se $a \neq 0$, para obter o sinal de $y = ax + b$, determina-se a raiz $-\dfrac{b}{a}$ da função e o sinal é dado pelo diagrama:

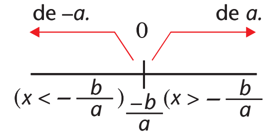


Se $a = 0$, o sinal da função será o sinal de b, pois $y = b$.

NOTA

O sinal de y é o sinal de $-a$.

O sinal de y é o sinal de a.

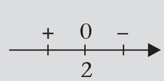


Exercícios resolvidos:

1) Estudar o sinal da função em que $y = 2x - 4$.

<u>Solução:</u> Temos: $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

O diagrama nos dá o sinal de y:



Então:

$y < 0 \Leftrightarrow x < 2$

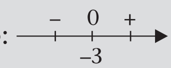
$y = 0 \Leftrightarrow x = 2$

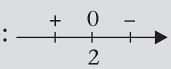
$y > 0 \Leftrightarrow x > 2$

NOTA
O zero é importante porque é o número que separa os positivos dos negativos.

2) Estudar o sinal da função $y = (2x + 6)\ (2 - x)$.

<u>Solução:</u> Estudamos o sinal de cada fator separadamente:

$y_1 = 2x + 6$: $2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3$. Então: 

$y_2 = -x + 2$: $-x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$. Então: 

Para estudar o sinal de y, façamos uma única tabela transportando para a mesma os sinais de y_1 e y_2 e em seguida façamos o produto.

x	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
$y_1 = 2x + 6$	$-$	o	$+$		$+$
$y_1 = -x + 2$	$+$		$+$	o	$-$
$y = y_1 \cdot y_2$	$-$	o	$+$	o	$-$

Resposta:

i) $y > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2$

ii) $y = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 2$

iii) $y < 0 \Leftrightarrow x < -3$ ou $x > 2$

NOTA
Para marcar os sinais nos intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ e $(2, +\infty)$, podemos escolher pontos desses intervalos, substituir nas funções $y_1 = 2x + 4$ e $y_2 = -x + 2$ e marcar os sinais encontrados, uma vez que os pontos onde tais funções se anulam já foram determinados previamente.

3) Resolver a inequação $\dfrac{2x + 4}{2 - x} \geq 0$.

<u>Solução:</u> Basta estudar o sinal do quociente $y = \dfrac{2x + 4}{2 - x}$ e escolher os intervalos nos quais o quociente das funções $y_1 = 2x + 4$ e $y_2 = -x + 2$ é positivo ou nulo. Como o sinal do quociente é igual ao sinal do produto, então, procederemos analogamente ao caso anterior eliminando apenas os valores que anulam o denominador.
Assim:

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
y_1	$-$	o	$+$		$+$
y_2	$+$		$+$	o	$-$
$\dfrac{y_1}{y_2}$	$-$	o	$+$	$\nexists$	$-$

O intervalo no qual o quociente é positivo ou nulo é o intervalo $[-2, 2)$.

4) Determinar o domínio da função em que $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}} + \dfrac{x}{x-1}$.

<u>Solução:</u> Devemos ter:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+1} \geq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases}$$

Para a primeira inequação temos:

	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
x	$-$		$-$	○	$+$
$x+1$	$-$	○	$+$		$+$
$\frac{x}{x+1}$	$+$	$\nexists$	$-$	○	$+$

Como também devemos ter $x \neq 1$ vem:
Dom $f = (-\infty, -1) \cup [0, 1) \cup (1, +\infty)$

NOTA
Domínio da função: Df ou Dom f.

5) Resolver a inequação $\dfrac{3x+1}{3-x} \leq 2$.

<u>Solução:</u> Observe que aprendemos a estudar os sinais de expressões, logo, convém transpor o número 2 para o primeiro membro, pois assim estaremos comparando a expressão com o zero, o que equivale a estudar o sinal do primeiro membro. Assim, temos:

$$\frac{3x+1}{3-x} - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{3x+1-2(3-x)}{3-x} \leq 0 \Rightarrow \frac{5x-5}{3-x} \leq 0$$

NOTA
Para eliminar o denominador, teríamos de fazer duas hipóteses:
i) $3 - x > 0$
ii) $3 - x < 0$
No segundo caso, ao passar o $3 - x$ para o segundo membro, devemos inverter o sentido da desigualdade.

Observe que não eliminamos o denominador, pois não sabemos o sinal da diferença $3 - x$. Como o segundo membro agora é zero, basta estudar o sinal do quociente e escolher os intervalos nos quais o quociente é negativo ou nulo.
Sejam $y_1 = 5x - 5$ e $y_2 = -x + 3$. Temos:

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$y_1 = 5x - 5$	$-$	○	$+$		$+$
$y_2 = -x + 3$	$+$		$+$	○	$-$
$\frac{y_1}{y_2}$	$-$	○	$+$	$\nexists$	$-$

Os intervalos em que o quociente é negativo ou nulo são $(-\infty, 1]$ ou $(3, +\infty)$. A solução da desigualdade será, então, a união destes dois intervalos $(-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 (FGV-SP) O conjunto solução da inequação $\frac{4-x}{x-2} > 0$ é:

(A) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

(B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

(C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 4\}$

(D) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$

(E) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

2 (PUC-SP) Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Se os pontos $(-1, 3)$ e $(2, -1)$ pertencem ao gráfico de f, então $f(x) \geq 0$ se, e somente se:

(A) $x \leq 0$

(B) $x \leq \frac{5}{4}$

(C) $x \geq 0$

(D) $x \geq \frac{5}{4}$

(E) $x \geq 5$

3 Estude os sinais das seguintes funções reais:

a) $f(x) = 2x - 3$ b) $g(x) = 5x + 2$

4 Resolva as seguintes inequações:

a) $(t-4)(t+2) > 0$

b) $\frac{2x+1}{x-2} \geq 1$

c) $\frac{2t+3}{t+2} \geq 2$

d) $(x-2)(x-1)(x+4) \geq 0$

5 (FGV-SP) Os gastos de consumo (C) de uma família e sua renda (x) são tais que $C = 2\,000 + 0{,}8x$. Podemos, então, afirmar que:

(A) se a renda aumenta em 500, o consumo aumenta em 500.

(B) se a renda diminui em 500, o consumo diminui em 500.

(C) se a renda aumenta em 1 000, o consumo aumenta em 800.

(D) se a renda diminui em 1 000, o consumo diminui em 2 800.

(E) se a renda dobra, o consumo dobra.

6 (Vunesp) Os reais x que satisfazem à desigualdade $(x+1)(x-2)(x-3) > 0$ são os descritos por:

(A) $x > 3$

(B) $x < -1$

(C) $-1 < x < 2$ e $x > 3$

(D) $-1 < x < 2$ ou $x > 3$

(E) $x > 2$

7 (Cesgranrio-RJ) Para ser aprovado, um aluno precisa ter média maior ou igual a 5. Se ele obteve notas 3 e 6 nas provas parciais (que têm peso 1, cada uma), quanto precisa tirar na prova final (que tem peso 2) para ser aprovado?

8 (FGV-SP) As tarifas praticadas por duas agências de locação de automóveis, para veículos idênticos, são:

Agência A	Agência B
144 reais por dia (seguros incluídos) mais 1,675 real por km rodado	141 reais por dia (seguros incluídos) mais 1,70 real por km rodado

a) Para um percurso diário de 110 km, qual agência oferece o menor preço?

b) Seja x o número de quilômetros percorridos durante um dia. Determine o intervalo de variação de x de modo que seja mais vantajosa a locação de um automóvel na agência A do que na B.

9 (FGV-SP)

a) O saldo devedor de um empréstimo de uma empresa A em um banco é hoje de R\$ 200.000,00. Este saldo diminui R\$ 2.500,00 por mês. Qual o saldo devedor daqui a t meses?

b) Uma empresa B tem hoje um saldo devedor de R\$ 300.000,00 e uma outra empresa C tem hoje um saldo devedor de R\$ 250.000,00. O saldo devedor de B diminui R\$ 6.000,00 por mês e o de C diminui R\$ 2.500,00 por mês. A partir de quantos meses (contados de hoje) o saldo devedor de B ficará menor que o de C?

10 (UFF-RJ) Determine o domínio da função real f de variável real definida por $f(x) = \sqrt{x - \frac{900}{x}}$.

11 (PUC-RJ) Resolva a inequação $\frac{2x+3}{x-1} \geq 1$.

12 (Uerj) Ao resolver a inequação $\frac{2x+3}{x-1} > 5$, um aluno apresentou a seguinte solução:

$$2x + 3 > 5(x-1) \Rightarrow 2x + 3 > 5x - 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x - 5x > -5 - 3 \Rightarrow -3x > -8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x < 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

Conjunto-solução: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x < \frac{8}{3}\right\}$

A solução do aluno está ERRADA.

a) Explique por que a solução está errada.

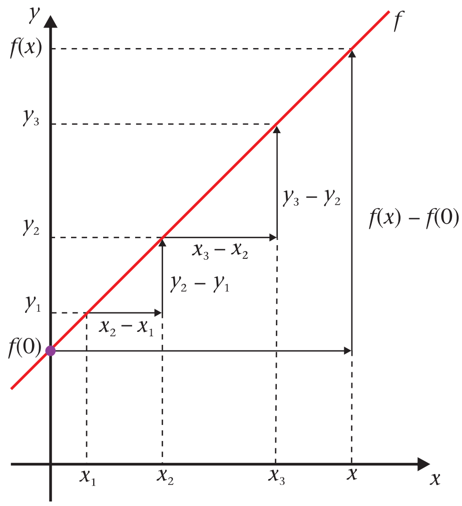
b) Apresente a solução correta.

13 (UFMG) Para alimentar seus pássaros, um criador compra, mensalmente, ração e milho num total de 1 000 kg. A ração custa R\$ 40,00 o quilograma, e o milho, R\$ 25,00. Se x $(0 < x < 1\,000)$ representa a quantidade, em quilogramas, de ração comprada, determine a expressão da função-gasto ($g(x)$) em reais.

5.2.4 – Propriedade característica da função afim

Proporcionalidade das variações (acréscimos ou decréscimos):

Em uma função afim as variações sofridas pelas imagens são proporcionais às variações em x.



Seja a função afim f que associa a x o valor $f(x) = ax + b$.

Consideremos quaisquer x_1, x_2, x_3 distintos e suas respectivas imagens por f:

$$y_1 = ax_1 + b, \quad y_2 = ax_2 + b, \quad y_3 = ax_3 + b.$$

Calculemos as variações $y_2 - y_1$ e $y_3 - y_2$. Temos:

$$\begin{array}{l} y_2 - y_1 = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1) \\ y_3 - y_2 = (ax_3 + b) - (ax_2 + b) = a(x_3 - x_2) \end{array} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = a$$

A sequência de variações de y é de valores proporcionais à sequência de variações de x e a razão de proporcionalidade é a.

Se as variações de x forem iguais a 1, as variações de y serão iguais a a.

Reciprocamente, se uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é tal que, quaisquer que sejam x_1 e x_2 distintos, ocorre $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$, então, a função f é afim.

Com efeito, fazendo $x_1 = 0$ e $x_2 = x \neq 0$ teremos:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = a \Rightarrow f(x) - f(0) = ax \Rightarrow f(x) = ax + f(0)$$

Chamando $f(0) = b$ vem $f(x) = ax + b$.

É esta propriedade que permite a modelagem matemática de fenômenos em que as variações da variável dependente são proporcionais às variações da variável livre.

NOTA

Esta equação também se escreve $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a$, ou seja, $\Delta y = a\Delta x$.

Uma função será afim se for linear a função que associa as variações (acréscimos ou decréscimos) de x às variações de y.

NOTA

Observe que se dermos a x os valores da sucessão (0, 1, 2, 3, ...), os valores obtidos para y formarão uma sucessão cujas diferenças entre cada termo e o precedente serão constantes. Estas sucessões são chamadas **progressões aritméticas**.

NOTA
Assinatura é uma taxa a pagar mesmo que o telefone não seja usado.

NOTA
Como acréscimos iguais de x correspondem a acréscimos iguais de y, a função que relaciona x a y é uma função afim $y = ax + b$.

Exercícios resolvidos:

1) Uma assinatura mensal de telefone é R\$ 35,00 e a tarifa é R\$ 0,05 por minuto de conversação. Qual o valor da conta para um usuário que utilizou o telefone por x minutos num mês?

Solução:

0	1	2	3	...	x
$f(0) = 35$	35,05	35,10	35,15	...	$y = f(x)$

Sem utilizar o telefone o usuário pagará R\$ 35,00. Usando-o 1 minuto pagará R\$ 35,05; 2 minutos pagará R\$ 35,10; 3 minutos pagará R\$ 35,15 e assim sucessivamente.
Como a variação de 1 minuto na utilização custa R\$ 0,05, temos uma função afim em que:

$$a = \frac{35{,}05 - 35}{1 - 0} = \text{R\$ } 0{,}05/\text{min e } b = f(0) = \text{R\$ } 35{,}00$$

Então, $f(x) = 0{,}05x + 35$.

2) Uma torneira despeja num tanque 100 litros de água por hora. Sabendo que no tanque já existiam 500 litros de água quando foi aberta a torneira, quanto de água haverá no tanque t horas depois da abertura da torneira?

Solução: Temos:

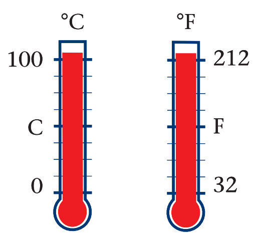
0	1	2	t
500	600	700	Q

Comparando as variações,

$$a = \frac{600 - 500}{1 - 0} = \frac{700 - 600}{2 - 1} = \ldots \Rightarrow a = 100 \text{ litros/hora}$$

Como $Q(0) = 500$, temos $Q(t) = at + Q(0)$, ou seja, $Q(t) = 100t + 500$.

3) As escalas termométricas Celsius e Fahrenheit são tais que 0 °C correspondem a 32 °F e 100 °C correspondem a 212 °F. Qual é a fórmula que relaciona as duas escalas? Qual é a temperatura em que as duas escalas marcarão o mesmo valor?



Solução: Chamamos de C a temperatura na escala Celsius e F a temperatura correspondente na escala Fahrenheit.

0	...	100	...	°C
32	...	212	...	°F

Como os acréscimos sofridos por F são proporcionais aos de C, vem:

$$\frac{212-32}{100-0} = \frac{F-32}{C-0} \Rightarrow \frac{180}{100} = \frac{F-32}{C}$$

Logo: $\frac{9C}{5} = F - 32 \Rightarrow F = \frac{9C}{5} + 32$

As duas escalas marcarão o mesmo valor quando F = C, logo:

$$\frac{9C}{5} + 32 = C \Rightarrow 9C + 160 = 5C \Rightarrow 4C = -160$$

$$C = -40\ °C$$

4) Num clube a taxa de inscrição é R$ 500,00 e o preço do aluguel de uma quadra de tênis é R$ 5,00 por hora. Um outro clube cobra R$ 450,00 de taxa de inscrição e R$ 5,50 por hora de utilização da quadra. A partir de quantas horas de utilização o primeiro clube é mais vantajoso para o tenista?

Solução: Devemos ter para x horas de utilização:

custo do primeiro clube: $C_1 = 500 + 5x$
custo do segundo clube: $C_2 = 450 + 5{,}5x$

O custo do primeiro deverá ser menor que o do segundo, logo:

$$C_1 < C_2 \Leftrightarrow 500 + 5x < 450 + 5{,}5x \Leftrightarrow 50 < 0{,}5x \Leftrightarrow x > 100$$

Resposta:
O primeiro clube é mais vantajoso com uma utilização maior que 100 horas.

5) Uma fábrica de doces tem despesa fixa de R$ 2.000,00 (salários, impostos, máquinas etc.) e de R$ 2,00 por doce fabricado. O preço de venda de cada doce será de R$ 4,00. Quantos doces deverão ser fabricados para:

i) não haver prejuízo?

ii) o lucro ser de R$ 5.000,00?

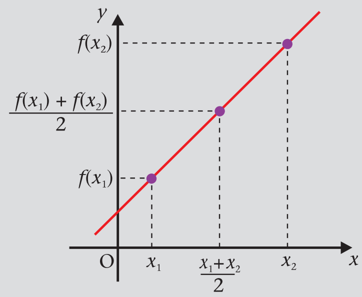
Solução:

i) Para não haver prejuízo, a receita de vendas deve ser igual ao custo de fabricação.
Doces vendidos: x

$$\left.\begin{array}{l} \text{Receita} = 4x \\ \text{Custo} = 2000 + 2x \end{array}\right\} \Rightarrow 2000 + 2x = 4x \Rightarrow x = 1000 \text{ doces}$$

ii) Para o lucro ser de 5 000, devemos ter:
lucro = receita – custo = 5 000
Então:
$4x - (2000 + 2x) = 5000 \Rightarrow 2x = 7000 \Rightarrow x = 3500$ doces

6) Mostrar que em toda função afim f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em que $f(x) = ax + b$, tem-se:
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$



NOTA
Esta propriedade diz que em qualquer reta, não paralela a O*y*, a imagem do ponto médio de um intervalo é a média aritmética das imagens das extremidades do intervalo. A base média de um trapézio é a média aritmética das bases.

Solução: Temos:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = a\frac{x_1 + x_2}{2} + b = \frac{ax_1 + ax_2 + 2b}{2} = \frac{(ax_1 + b) + (ax_2 + b)}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

7) No oceano Atlântico, perto da linha do Equador, foram feitas medidas da temperatura da água em diversas profundidades. A 100 metros de profundidade a temperatura era de 21 °C e a 500 m de profundidade, 7 °C. Outras medidas indicaram que, entre essas profundidades, a temperatura caía linearmente. Determine a temperatura da água a 400 m de profundidade.

NOTA
Dizemos que uma função **varia linearmente** quando suas **variações** são proporcionais às variações da sua variável livre. Portanto, a função será **afim** (não necessariamente linear).

Solução: Sejam y a profundidade em metros e t a temperatura correspondente em °C. Como a temperatura cai linearmente, isto significa que as variações sofridas por y são proporcionais às variações sofridas por t, logo, a função que relaciona y a t é uma função afim: $y = at + b$.

$$\begin{matrix} t = 21 \Rightarrow y = 100 \Rightarrow \\ t = 7 \Rightarrow y = 500 \Rightarrow \end{matrix}\begin{cases} 21a + b = 100 \\ 7a + b = 500 \end{cases} \Rightarrow 14a = -400 \Rightarrow a = -\frac{200}{7} \text{ e } b = 700$$

A função será então $y = -\dfrac{200}{7}t + 700$.

Fazendo agora $y = 400$ vem: $400 = -\dfrac{200}{7}t + 700 \ (\div 100)$

$$\frac{2t}{7} = 3 \Rightarrow t = \frac{21}{2} \Rightarrow t = 10{,}5 \text{ °C}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 (IBMEC-RJ) Uma empresa fabrica determinada mercadoria cujo preço de custo é de R$ 1,35, por unidade. Na produção dessa mercadoria, há um custo mensal fixo de R$ 22.500,00, referente a despesas com salários, encargos sociais, manutenção das máquinas etc. Seja x o número de unidades fabricadas por mês e y o lucro total devido à venda de toda a produção.
Sabendo que cada unidade será vendida por R$ 2,60, determine:

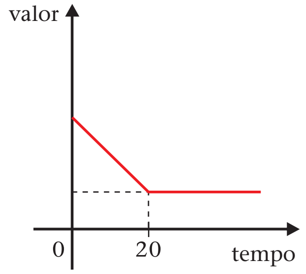
a) uma expressão que forneça o valor de y em função do valor de x;

b) o menor valor de x para o qual a empresa não terá prejuízo com essa mercadoria.

2 (Vunesp) Por uma mensagem dos Estados Unidos para o Brasil, via fax, a Empresa de Correios e Telégrafos (ECT) cobra R$ 1,37 pela primeira página e R$ 0,67 por página que se segue, completa ou não. Qual o número mínimo de páginas de uma dessas mensagens para que seu preço ultrapasse o valor de R$ 10,00?

(A) 8
(B) 10
(C) 12
(D) 14
(E) 16

3 (PUC-SP) Um veículo de transporte de passageiros tem seu valor comercial depreciado linearmente, isto é, seu valor comercial sofre desvalorização constante por ano. Veja a figura seguinte:



Esse veículo foi vendido pelo seu primeiro dono, após 5 anos de uso, por R$ 24.000,00. Sabendo-se que o valor comercial do veículo atinge seu mínimo após 20 anos de uso, e que esse valor mínimo corresponde a 20% do valor que tinha quando era novo, então, qual é esse valor mínimo?

(A) R$ 3.000,00
(B) R$ 12.000,00
(C) R$ 7.500,00
(D) R$ 6.000,00
(E) R$ 4.500,00

4 (Vunesp) Segundo matéria publicada em *O Estado de São Paulo*, 9/6/96, o Instituto Nacional de Seguridade Social (INSS) gasta atualmente 40 bilhões de reais por ano com o pagamento de aposentadorias e pensões de 16 milhões de pessoas. A mesma matéria informa que o Governo Federal gasta atualmente 20 bilhões de reais por ano com o pagamento de um milhão de servidores públicos federais aposentados. Indicando por x a remuneração anual média dos beneficiários do INSS e por y a remuneração anual média dos servidores federais aposentados, então y é igual a:

(A) $2x$
(B) $6x$
(C) $8x$
(D) $10x$
(E) $16x$

5 (FGV-SP) Os gastos de consumo (c) de uma família e sua renda (x) são tais que $C = 2000 + 0{,}8x$. Podemos, então, afirmar que:

(A) se a renda aumenta em 500, o consumo aumenta em 500.

(B) se a renda diminui em 500, o consumo diminui em 500.

(C) se a renda aumenta em 1 000, o consumo aumenta em 800.

(D) se a renda diminui em 1 000, o consumo diminui em 2 800.

(E) se a renda dobra, o consumo dobra.

6 (Fuvest-SP) A moeda de um país é o "liberal", indicado por £. O imposto de renda I é uma função contínua da renda R, calculada da seguinte maneira:

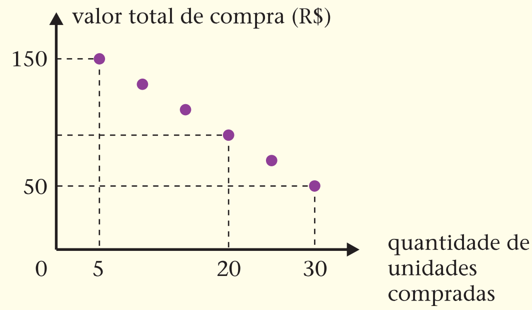
I) Se R ≤ 24.000£, o contribuinte está isento do imposto.

II) Se R ≥ 24.000£, calcula-se 15% de R, e do valor obtido subtrai-se um valor fixo P, obtendo-se o imposto a pagar I.

Determine o valor fixo P.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (Uerj) A promoção de uma mercadoria em um supermercado está representada, no gráfico abaixo, por 6 pontos de uma mesma reta.



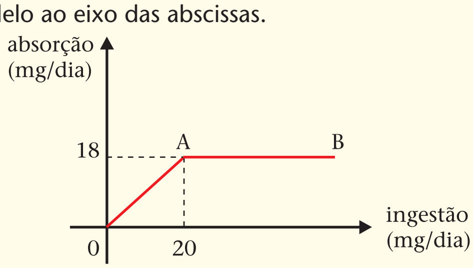
Quem comprar 20 unidades dessa mercadoria, na promoção, pagará por unidade, em reais, o equivalente a:

(A) 4,50
(B) 5,00
(C) 5,50
(D) 6,00

2 (Unirio-RJ) O gráfico da função $y = mx + n$, onde m e n são constantes, passa pelos pontos A (1, 6) e B (3, 2). A taxa de variação média da função é:

(A) –2
(B) $-\frac{1}{2}$
(C) $\frac{1}{2}$
(D) 2
(E) 4

3 (UFMG) Observe o gráfico, em que o segmento AB é paralelo ao eixo das abscissas.



Esse gráfico representa a relação entre a ingestão de certo composto, em mg/dia, e sua absorção pelo organismo, também em mg/dia.
A única afirmativa **falsa** relativa ao gráfico é:

(A) para ingestões de até 20 mg/dia, a absorção é proporcional à quantidade ingerida.
(B) a razão entre a quantidade absorvida e a quantidade ingerida é constante.
(C) para ingestões acima de 20 mg/dia, quanto maior a ingestão, menor a porcentagem absorvida do composto ingerido.
(D) a absorção resultante da ingestão de mais de 20 mg/dia é igual à absorção resultante da ingestão de 20 mg/dia.

4 (Unificado-RJ) O valor de um carro novo é R$ 900.000,00 e, com 4 anos de uso, é de R$ 400.000,00. Supondo-se que o preço caia com o tempo, segundo uma linha reta, o valor desse carro com 1 ano de uso é:

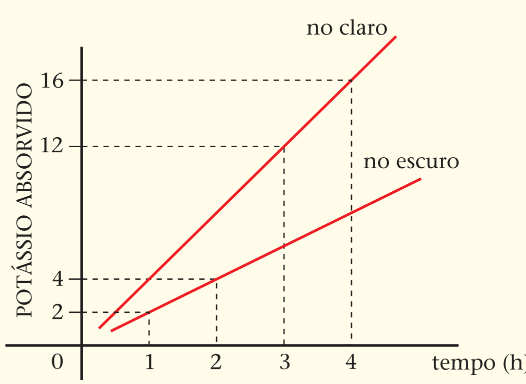
(A) R$ 825.000,00
(B) R$ 800.000,00
(C) R$ 775.000,00
(D) R$ 750.000,00
(E) R$ 700.000,00

5 (UFF-RJ) Um mercador vendeu parte da mercadoria que carregava em três lugares distintos, vendendo cada unidade ao preço de R$ 9,00.
No primeiro lugar, vendeu 10% da quantidade inicial que carregava; no segundo, 20% do restante das mercadorias; e no terceiro, 50% do que sobrou.

a) Determine a porcentagem da quantidade inicial de mercadoria correspondente ao total que foi vendido pelo mercador.

b) Considerando que o mercador recebeu o total de R$ 57.600,00 com a venda da parte da mercadoria nos três locais citados, por quanto deverá vender cada unidade da parte restante de modo a receber os mesmos R$ 57.600,00?

6 (Unesp) O gráfico mostra o resultado de uma experiência relativa à absorção de potássio pelo tecido da folha de um certo vegetal, em função do tempo e em condições diferentes de luminosidade.



Nos dois casos, a função linear $y = mx$ ajustou-se razoavelmente bem aos dados, daí a referência a m como taxa de absorção (geralmente medida em μ moles por unidade de peso por hora). Com base no gráfico, se m_1

é a taxa de absorção no claro e m_2 a taxa de absorção no escuro, a relação entre essas duas taxas é:

(A) $m_1 = m_2$

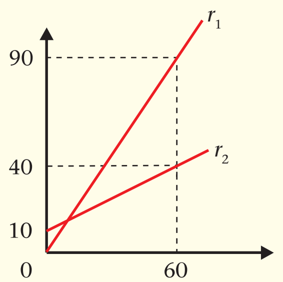
(B) $m_2 = 2m_1$

(C) $m_1 \cdot m_2 = 1$

(D) $m_1 \cdot m_2 = -1$

(E) $m_1 = 2m_2$

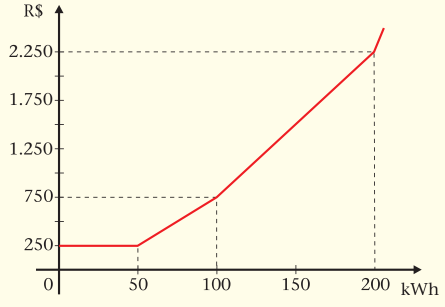
7 (UFRJ) Uma fábrica produz óleo de soja sob encomenda, de modo que toda produção é comercializada.
O custo de produção é composto de duas parcelas. Uma parcela fixa, independente do volume produzido, corresponde a gastos com aluguel, manutenção de equipamentos, salários etc.; a outra parcela é variável, dependente da quantidade de óleo fabricado.
No gráfico abaixo, a reta r_1 representa o custo de produção e a reta r_2 descreve o faturamento da empresa, ambos em função do número de litros comercializados. A escala é tal que uma unidade representa R$ 1.000,00 (mil reais) no eixo das ordenadas e 1 000 L (mil litros) no eixo das abscissas.



a) Determine, em reais, o custo correspondente à parcela fixa.

b) Determine o volume mínimo de óleo a ser produzido para que a empresa não tenha prejuízo.

8 (UFRJ) A cada usuário de energia elétrica é cobrada uma taxa mensal de acordo com o seu consumo no período, desde que esse consumo ultrapasse um determinado nível. Caso contrário, o consumidor deve pagar uma taxa mínima referente a custos de manutenção. Em certo mês, o gráfico consumo (em kWh) x preço (em R$) foi o apresentado abaixo:



a) Determine entre que valores de consumo em kWh é cobrada a taxa mínima.

b) Determine o consumo correspondente à taxa de R$ 1.950,00.

9 (Unicamp-SP) O imposto de renda é calculado pela fórmula: $i = r \cdot a - p$, onde i = imposto; r = renda líquida; a = alíquota; e p = parcela a deduzir.
O contribuinte, para calcular o imposto i, deve fazer uso da seguinte tabela (adaptada do Manual do Contribuinte do IRPF de 1996):

r	***a* (%)**	***p***
Até R$ 8.800,00	Isento	—
De R$ 8.801,00 a R$ 17.170,00	15	R$ 1.320,00
De R$ 17.171,00 a R$ 158.450,00	25	R$ 3.037,00
Acima de R$ 158.450,00	35	R$ 18.872,00

a) Se um contribuinte teve uma renda líquida de R$ 17.200,00, qual é o valor do seu imposto?

b) Se o mesmo contribuinte tivesse ganhado R$ 200,00 a menos, qual teria sido seu imposto?

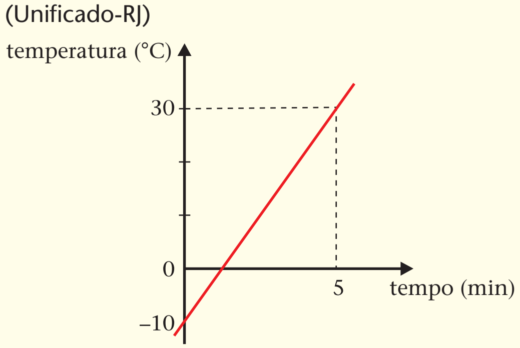
10 (Vunesp) Uma pessoa obesa, pesando num certo momento 156 kg, recolhe-se a um *spa* onde anunciam perdas de “peso” de até 2,5 kg por semana. Suponhamos que isso realmente ocorra. Nessas condições:

a) encontre uma fórmula que expresse o “peso” mínimo, P, que essa pessoa poderá atingir após n semanas;

b) calcule o número mínimo de semanas completas que a pessoa deverá permanecer no *spa* para sair de lá com menos de 120 kg de “peso”.

11 (Vunesp) Um operário ganha R$ 3,00 por hora de trabalho de sua jornada semanal regular de trabalho, que é de 40 horas. Eventuais horas extras são pagas com um acréscimo de 50%.
Encontre uma fórmula algébrica para expressar seu salário bruto semanal, S, para as semanas em que trabalhar h horas, com $h \geq 40$.

12 (Unificado-RJ)



Uma barra de ferro com temperatura inicial de –10 °C foi aquecida até 30 °C. O gráfico da página anterior representa a variação da temperatura da barra em função do tempo gasto nessa experiência. Calcule em quanto tempo, após o início da experiência, a temperatura da barra atingiu 0 °C.

(A) 1 min

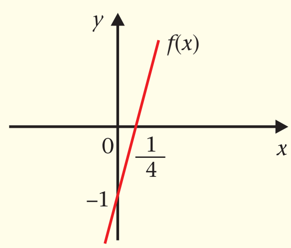
(B) 1 min 5 s

(C) 1 min 10 s

(D) 1 min 15 s

(E) 1 min 20 s

13 (Unificado-RJ)



Com a função $f(x)$, representada no gráfico acima, e com a função $g(x)$ obtêm-se a composta $g(f(x)) = x$. A expressão algébrica que define $g(x)$ é:

(A) $-\frac{x}{4} - \frac{1}{4}$

(B) $-\frac{x}{4} + \frac{1}{4}$

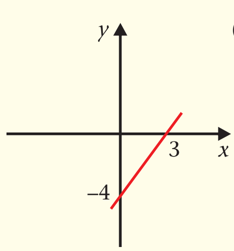
(C) $\frac{x}{4} + \frac{1}{4}$

(D) $\frac{x}{4} - \frac{1}{4}$

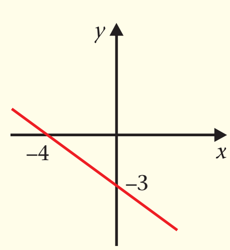
(E) $\frac{x}{4} + 1$

14 (Unificado-RJ) O gráfico que representa a inversa da função $f(x) = 3 - \frac{3}{4}x$ é:

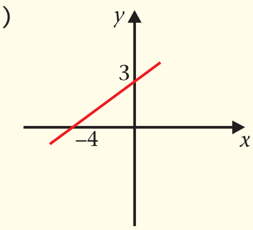
(A)



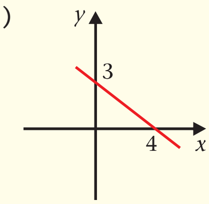
(B)



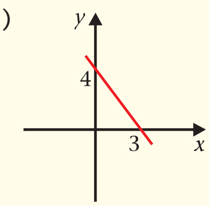
(C)



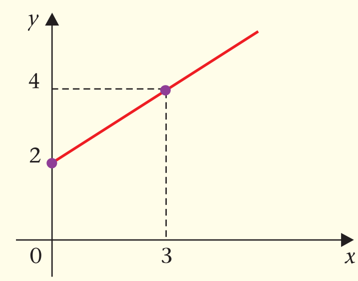
(E)



(D)



15 (Unirio-RJ)



Consideremos a função inversível f cujo gráfico é visto acima. A lei que define f^{-1} é:

(A) $y = 3x + \frac{3}{2}$

(B) $y = 2x - \frac{3}{2}$

(C) $y = \frac{3}{2}x - 3$

(D) $y = \frac{3}{2}x + 2$

(E) $y = -2x - \frac{3}{2}$

16 (Unesp) Examinando-se o gráfico da função f abaixo, que é uma reta, podemos concluir:

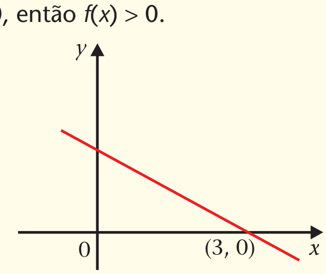
(A) se $f(x) < 0$, então $x > 3$.

(B) se $x > 2$, então $f(x) > f(2)$.

(C) se $x < 0$, então $f(x) < 0$.

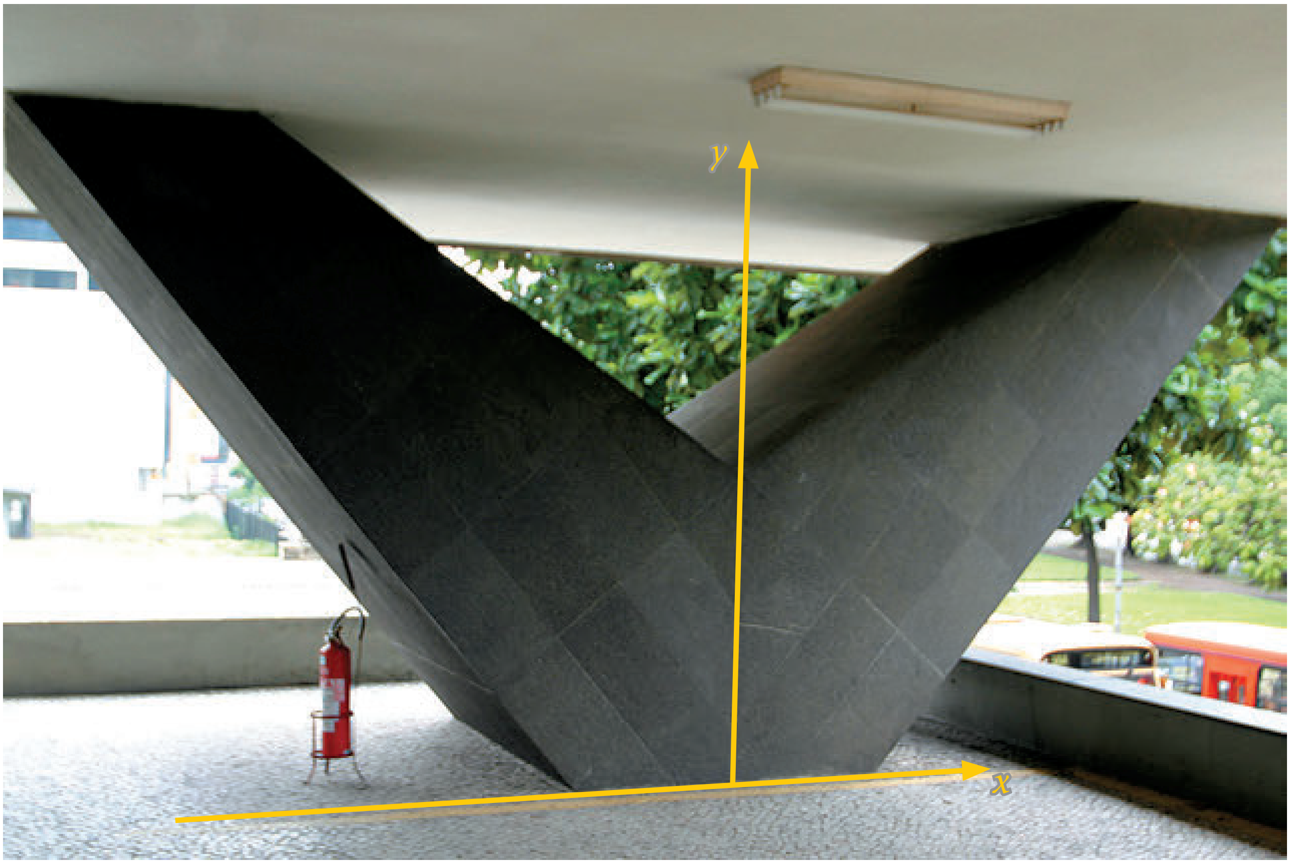
(D) se $f(x) < 0$, então $x < 0$.

(E) se $x > 0$, então $f(x) > 0$.



CAPÍTULO VI

FUNÇÃO MODULAR E ANÁLISE DE GRÁFICOS



Henrique Esteves/Futura Press

A função modular é usada para extrair o "tamanho" de um número, independentemente de seu sinal. Neste capítulo, estudamos a função modular e gráficos de funções compostas usando a função modular e algumas outras transformações.

6 – Função modular e análise de gráficos

6.1 – Módulo ou valor absoluto

6.1.1 – Módulo de um número real

DEFINIÇÃO
Módulo ou valor absoluto.

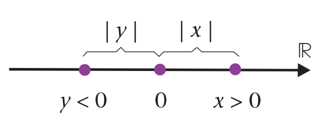
Módulo ou **valor absoluto** de um número real x representado pelo símbolo $|\, x \,|$ é, por definição, o maior número do par $\{-x, x\}$.

$$|x| = \text{máx}\,\{-x, x\} = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x > 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Muitas vezes, é conveniente definir $|\, x \,|$ como $\sqrt{x^2}$. Basta ver que $|\, x \,|^2 = x^2$. Temos então:

$$|x| = \text{máx}\,\{x, -x\} = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, \; x \geq 0 \\ -x, \; x < 0 \end{cases}$$

Interpretamos o $|\, x \,|$ como **distância de x à origem**.



Exemplos:

i) $|\, 3 \,| = 3$

ii) $|\, -5 \,| = 5 = -(-5)$

iii) $|\, 0 \,| = 0$

iv) $|\, 2 \,| = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$

v) $|-4| = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$

6.1.1.1 – Propriedades do módulo de um número real

NOTA
$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ sempre que $a \geq 0$ e $b \geq 0$

1) $|\, x \,| \geq 0$

2) $|\, x \,| = |\, -x \,|$

3) $|xy| = |x| \cdot |y|$

Pois temos que:

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = |x| \cdot |y|$$

4) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$

Pois temos que:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x|}{|y|}$$

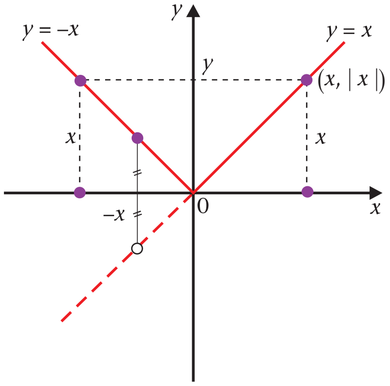
NOTA
$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ sempre que $a \geq 0$ e $b > 0$.

6.1.2 – Função modular

É a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$.

DEFINIÇÃO
Função modular.

O gráfico dessa função será constituído por duas semirretas $y = x$ no primeiro quadrante e $y = -x$ no segundo quadrante.



O módulo reflete a parte da reta $y = x$ que tem ordenadas negativas em torno do eixo Ox.

É uma função par, pois $|-x| = |x| = \sqrt{x^2}$. A função não é injetiva nem sobrejetiva. (Im $f = \mathbb{R}_+$)

Exercícios resolvidos:

1) Esboçar o gráfico da função sinal $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

Solução:

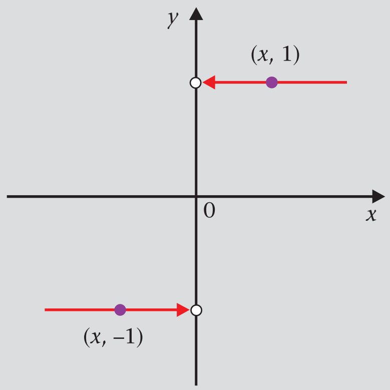
Para qualquer $x > 0$, temos que $y = 1$ e para $x < 0$, $y = -1$. A função não é definida no ponto $x = 0$. Temos o gráfico:

NOTA
A função sinal é ímpar e sua imagem é $\{-1, 1\}$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto y = \dfrac{|x|}{x} \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

É impar. $\text{Im}\, f = \{-1, 1\}$



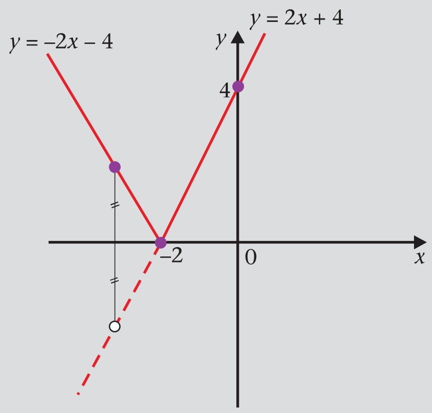
NOTA
Basta fazer uma reflexão dos y negativos em relação ao eixo Ox.

2) Esboce o gráfico da função $f(x) = |\, 2x + 4 \,|$.

Solução:

$$f(x) = |2x + 4| = \begin{cases} 2x + 4, & 2x + 4 \geq 0 \\ -2x - 4, & 2x + 4 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \geq -2 \\ -2x - 4, & x < -2 \end{cases}$$



3) Esboce o gráfico da função real definida por: $y = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2}$

Solução:

Note que $y = |\, x + 1 \,| - |\, x - 1 \,|$.

Separando a função de acordo com os pontos onde cada módulo se anula, temos:

Se $x < -1 \Rightarrow |\, x + 1 \,| = -(x + 1)$ e $|\, x - 1 \,| = -x + 1 \Rightarrow y = -(x + 1) + (x - 1) = -2$

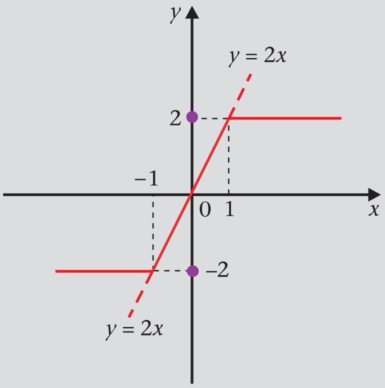
Se $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow |\, x + 1 \,| = x + 1$ e $|\, x - 1 \,| = -x + 1 \Rightarrow y = x + 1 + x - 1 = 2x$

Se $x > 1 \Rightarrow |\, x + 1 \,| = x + 1$ e $|\, x - 1 \,| = x - 1 \Rightarrow y = x + 1 - (x - 1) = 2$

A função fica:

$$y = \begin{cases} -2, & x \leq -1 \\ 2x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

O gráfico será constituído de três trechos de retas.



6.1.2.1 – Regra prática para gráficos poligonais

Quando as expressões sob módulos são do primeiro grau, o gráfico é uma poligonal cujos vértices se dão nos pontos que anulam cada módulo. Assim, basta substituir esses valores na função, determinando seus vértices. Em seguida, atribuir a x um valor qualquer menor que o menor desses valores e um valor maior que o maior dos valores que anulam os módulos presentes.

Exemplo:

No caso do exercício anterior, teríamos:

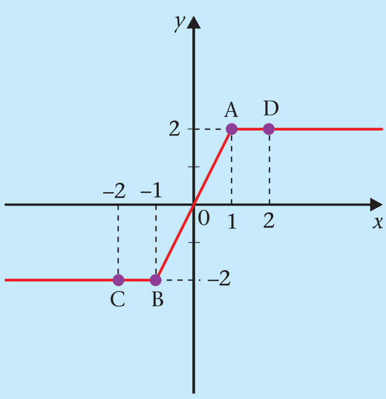
Valores que anulam os módulos:

$x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad y = |1 + 1| - |1 - 1| = 2$

$x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = |-1 + 1| - |-1 - 1| = -2$

Os vértices da poligonal serão: (1, 2) e (–1, –2)

O segmento que une esses pontos A = (1, 2) e B = (–1, –2) determina o trecho central.



Para ver como é a poligonal à esquerda do ponto B, basta atribuir a x um valor anterior a –1, por exemplo, $x = -2$.
A ordenada neste ponto será $y = |-2 + 1| - |-2 - 1| = -2$.
O ponto C = (–2, –2) determina como a poligonal se comporta à esquerda de B.
Atribuindo agora um valor posterior a 1, por exemplo, $x = 2$, temos $y = |2 + 1| - |2 - 1| = 2$. O ponto D = (2, 2) determina como a poligonal se comporta à direita de A.

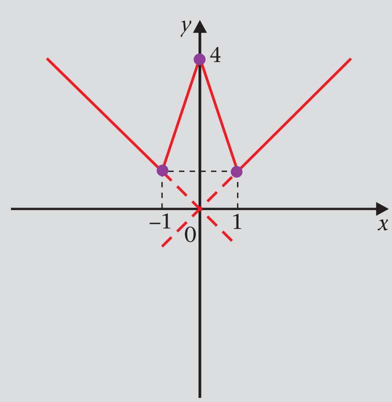
Por outro lado, é possível demonstrar que, se o gráfico da função $f(x)$ é uma linha poligonal com vértices em $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, então $f(x)$ admite uma fórmula do tipo:

$$f(x) = (ax + b) + c_1\,|x - x_1| + c_2\,|x - x_2| + \ldots + c_n\,|x - x_n|$$

onde $a, b, c_1, c_2, \ldots, c_n$ são constantes a serem determinadas.

Exercício resolvido:

Determinar uma função cujo gráfico seja a figura:



Solução:

Como se trata de uma poligonal com três vértices nos pontos de abscissas –1, 0 e 1, a função será do tipo: $f(x) = ax + b + \alpha\,|x + 1| + \beta\,|x - 0| + \gamma\,|x - 1|$

Temos que:

$f(-2) = 2 \Rightarrow -2a + b + \alpha + 2\beta + 3\gamma = 2$ (I)

$f(-1) = 1 \Rightarrow -a + b + \beta + 2\gamma = 1$ (II)

$f(0) = 4 \Rightarrow b + \alpha + \gamma = 4$ (III)

$f(1) = 1 \Rightarrow a + b + 2\alpha + \beta = 1$ (IV)

$f(2) = 2 \Rightarrow 2a + b + 3a + 2\beta + \gamma = 2$ (V)

Agora, o trabalho é resolver este sistema com 5 equações e 5 incógnitas. Fazendo (I) + (V), e (II) + (IV), vem:

$$\begin{cases} 2b + 4a + 4\beta + 4\gamma = 4 \\ 2b + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2 \end{cases}$$

Subtraindo estas duas, vem $\alpha + \beta + \gamma = 1$, e portanto $b = 0$.
Substituindo $b = 0$ em (III) vem $\alpha + \beta = 4$. Como já sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = 1$, vem $\beta = -3$.
Outra boa ideia é fazer (V) – (IV) + (II) – (I), donde vem

$$2a = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Enfim, substituindo $a = 0$, $b = 0$ e $\beta = -3$ em (I) e (IV), vem

$$\begin{aligned} -3 + 2\gamma &= 1 \Rightarrow \gamma = 2 \\ 2\alpha - 3 &= 1 \Rightarrow \alpha = 2 \end{aligned}$$

A função será então:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 2\,|\,x + 1\,| - 3\,|\,x\,| + 2\,|\,x - 1|$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Construa os gráficos das seguintes funções reais:

a) $y = | x + 1 |$

b) $y = | 2x - 4 |$

c) $y = - | x |$

d) $y = - | x | + x$

e) $y = | x | + | x + 1|$

f) $y = | 2x - 4 | + 1$

g) $y = | x - 1 | + | x + 1 |$

h) $y = - | x | + | x - 1 | + | x - 2 |$

2 Sabendo que $|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$, calcule:

a) $| 1 - 5 |$

b) $| -8 | + | 3 - 1 |$

c) $| +5 | + | -3 - 5 |$

d) $| - | -3 ||$

e) $\left| -\sqrt{3} \right|$

f) $\left| 1 - \sqrt{2} \right|$

3 Encontre o valor numérico de:

a) $| a^3 + a | - | a^3 - 3a + 1 |$, para $a = -2$

b) $2k - | k | + 3$, para $k = -4$

4 Como podemos representar a expressão $| x + 2 | + | x - 1 |$ sem os módulos?

a) para $x \leq -2$

b) para $-2 \leq x < 1$

c) para $x \geq 1$

6.2 – Igualdades e desigualdades

6.2.1 – Igualdades do tipo $|x| = a$

Se $a > 0$, a equação $|x| = a$ tem duas soluções: $x = a$ ou $x = -a$.
Se $a = 0$, a equação $|x| = 0$ admite apenas a solução $x = 0$.
Enfim, se $a < 0$, $|x| = a$ não tem solução.

Exemplos:

i) $|x| = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4$

ii) $|x + 1| = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

iii) $|-x + 7| = -7 \Leftrightarrow \nexists x$

Exercícios resolvidos:

1) Resolver a equação $|2x + 1| = 5$.

Solução:

Temos: $2x + 1 = \pm 5 \Rightarrow 2x = -1 \pm 5$

Logo, $x = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow x = 2$ ou $x = -3$

$S = \{-3, 2\}$

2) Resolver a equação $|2x + 1| = |x - 2|$.

Solução:

Temos: $2x + 1 = \pm (x - 2)$
Separando em duas equações:

$2x + 1 = x - 2$ ou $2x + 1 = -(x - 2)$

$x = -3$ $\qquad$ $2x + 1 = -x + 2$

$3x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{3}$

$$S = \left\{-3, \frac{1}{3}\right\}$$

3) Resolver a equação $x^2 - 5|x| + 6 = 0$.

Solução:

Como $x^2 = |x|^2$, temos:

$|x|^2 - 5|x| + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = 2$ ou $|x| = 3$

Logo: $x = \pm 2$ ou $x = \pm 3$

$S = \{\pm 2, \pm 3\}$

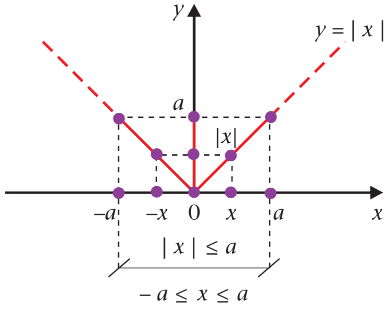
4) Resolver a equação $|2x + 3| = x + 1$.
Para que haja solução devemos ter: $x + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -1$
Valendo a restrição acima, tem-se:

$|2x + 3| = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 3 = \pm(x + 1)$
$2x + 3 = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$
ou
$2x + 3 = -x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{4}{3}$

Como as raízes não atendem à restrição: $S = \varnothing$

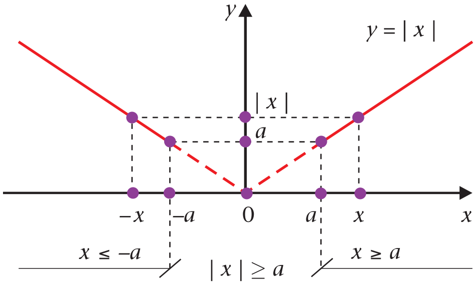
6.2.2 – Desigualdades do tipo $|x| \leq a$

Se $a > 0$, a inequação $|x| \leq a$ tem solução $-a \leq x \leq a$.
Se $a = 0$, a inequação $|x| \leq 0$ admite apenas a solução $x = 0$.
Enfim, se $a < 0$, a inequação $|x| \leq a$ é impossível.



6.2.3 – Desigualdades do tipo $|x| \geq a$

Se $a > 0$, a inequação $|x| \geq a$ tem solução $x \geq a$ ou $x \leq -a$, isto é, $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$.
Se $a \leq 0$, a inequação admite por solução toda a reta real.



Exemplos:

i) $|x| \leq 3 \iff -3 \leq x \leq 3$

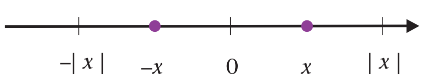
ii) $|x| > 5 \iff x < -5$ ou $x > 5$

iii) $|x| \geq -3 \iff x \in \mathbb{R}$

6.2.3.1 – Propriedades das desigualdades

1) $-|x| \leq x \leq |x|$

Basta ver que $|x|$ é o maior valor que x pode assumir, logo $x \leq |x|$. Por outro lado $-|x|$ é o seu menor valor, logo $-|x| \leq x$.



2) Desigualdade triangular: $|x + y| \leq |x| + |y|$

Temos que: $-|x| \leq x \leq |x|$

$-|y| \leq y \leq |y|$

Somando membro a membro, temos:

$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| \Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$

3) $|x - y| \geq |x| - |y|$

Usando a desigualdade triangular em $(x - y) + y$:

$|x - y + y| \leq |x - y| + |y|$, logo:

$|x| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x - y| \geq |x| - |y|$

4) $|x + y| \geq |x| - |y|$

Basta ver que: $|x - (-y)| \geq |x| - |-y|$, logo $|x + y| \geq |x| - |y|$

NOTA
Lembre-se que $|x| < a$ ($a > 0$) implica $-a < x < a$ e reciprocamente.

Exercícios resolvidos:

Em cada caso, estabeleça o conjunto solução.

1) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| > 3\}$

<u>Solução:</u>

$$|2x - 1| > 3 \iff 2x - 1 > 3 \vee 2x - 1 < -3$$

Temos:

$2x - 1 > 3$	$2x - 1 < -3$
$2x > 4$	$2x < -2$
$x > 2$	$x < -1$
$x \in (2, +\infty)$	$x \in (-\infty, -1)$

Como as condições são independentes, basta fazer a disjunção das duas hipóteses.

$$S = (-\infty, -1) \vee (2, +\infty)$$

2) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| + |7 - x| = 5\}$

Solução:

Basta resolver a equação: $|x - 2| + |7 - x| = 5$

Façamos as hipóteses cabíveis:

	$-\infty$	Caso (i) x	2	Caso (ii) x	7	Caso (iii) x	$+\infty$
$x - 2$		$-$		$+$		$+$	
$7 - x$		$+$		$+$		$-$	

i) A inequação fica:

$-(x - 2) + (7 - x) = 5$
$-x + 2 + 7 - x = 5$
$2x = 4$
$x = 2$
Impossível, pois $x < 2$.

ii) A inequação fica:

$(x - 2) + (7 - x) = 5$
$x - 2 + 7 - x = 5$
$5 = 5$
Como a igualdade é verdadeira, independentemente dos valores de x, servem todos os valores do $[2, 7]$.

iii) A inequação fica:

$(x - 2) - (7 - x) = 5$
$x - 2 - 7 + x = 5$
$2x = 14$
$x = 7$
Impossível, pois $x > 7$ e nenhum valor do intervalo $(7, +\infty)$ é solução.
Temos então a solução: $x \in [2, 7]$.

NOTA
Observe que:
Caso I
$x < 2$, $x - 2 < 0$ e
$|x - 2| = -(x - 2)$
$7 - x > 0$ e
$|7 - x| = 7 - x$

Caso II
$2 < x < 7$
$x - 2 > 0$ e $7 - x > 0$ e
$|x - 2| = x - 2$ e
$|7 - x| = 7 - x$

Caso III
$x > 7$
$x - 2 > 0$ e $7 - x < 0$ e
$|x - 2| = x - 2$ e
$|7 - x| = -(7 - x)$

3) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 - x\}$

<u>Solução:</u>

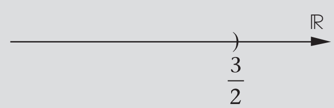
Temos:

	$-\infty$	Caso (i)	1	Caso (ii)	$+\infty$
$x - 1$		$-$		$+$	

i) $x \leq 1$
$-(x - 1) < 2 - x$
$-x + 1 < 2 - x$
$1 < 2$

ii) $x - 1 < 2 - x$
$2x < 3$
$x < \dfrac{3}{2}$

Fazendo a união dessas duas hipóteses, temos a solução $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$:



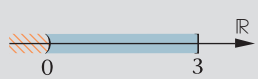
4) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| - |x - 1| \leq 2 - x\}$

<u>Solução:</u>

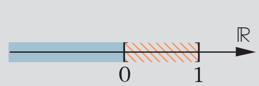
Basta resolver a desigualdade: $|x| - |x - 1| \leq 2 - x$

	$-\infty$	Caso (i)	0	Caso (ii)	1	Caso (iii)	$+\infty$
x		$-$		$+$		$+$	
$x - 1$		$-$		$-$		$+$	

i) $x < 0$
$-x - [-(x - 1)] \leq 2 - x$
$-x + x - 1 \leq 2 - x$
$x \leq 3$



ii) $0 \leq x \leq 1$
$x - [-(x - 1)] \leq 2 - x$
$x + x - 1 \leq 2 - x$
$3x \leq 3$
$x \leq 1$

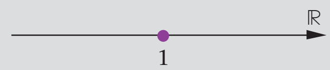


iii) $x > 1$

$x - (x - 1) \leq 2 - x$

$1 \leq 2 - x$

$x \leq 1$



Temos a solução: S = $(-\infty, 1]$

5) Resolver a inequação $|x + 1| + 2|x| \leq x + 2$.

Solução:

Passemos o segundo membro para o primeiro membro e façamos o gráfico de $y = |x + 1| + 2|x| - x - 2$ e, em seguida, determinemos os pontos para os quais $y \leq 0$.

Como os módulos se anulam em $x = -1$ e $x = 0$, os vértices da poligonal serão:

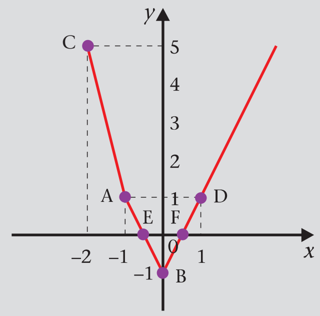
$$x = -1 \Rightarrow y = |-1 + 1| + 2|-1| - (-1) - 2 = 1 \Rightarrow A = (-1, 1)$$

$$x = 0 \Rightarrow y = |0 + 1| + 2|0| - 0 - 2 = -1 \Rightarrow B = (0, -1)$$

O segmento AB é o trecho central do gráfico.
Vamos atribuir, agora, um valor anterior a -1 e um valor posterior a 0 para x. Por exemplo:

$$x = -2 \Rightarrow y = |-2 + 1| + 2|-2| - (-2) - 2 = 5 \Rightarrow C = (-2, 5)$$

$$x = 1 \Rightarrow y = |1 + 1| + 2|1| - 1 - 2 = 1 \Rightarrow D = (1, 1)$$



A solução será o conjunto de valores de x compreendidos entre as abscissas de E e F.
O segmento AB é tal que $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow |x+1| = x+1$ e $|x| = -x$. Logo, $y = x + 1 - 2x - x - 2 = -2x - 1$.

Fazendo $y = 0$, temos: $2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

O segmento BD é tal que $x \geq 0 \Rightarrow |x+1| = x+1$ e $|x| = x$. Logo, $y = x + 1 + 2x - x - 2 = 2x - 1$.

Fazendo $y = 0$, temos: $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Os pontos $E = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e $F = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ determinam a solução que é $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

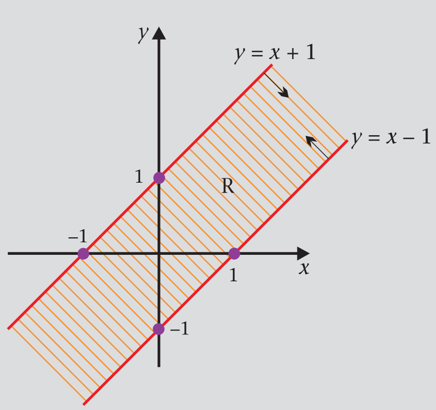
6) Construa o gráfico da relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| \leq 1\}$.

Solução:

Devemos ter: $-1 \leq x - y \leq 1$

ou $\begin{cases} x - y \geq -1 \\ x - y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq x + 1 \\ y \geq x - 1 \end{cases}$

A relação $y \leq x + 1$ representa os pontos com ordenadas menores ou iguais que as da reta $y = x + 1$. Por outro lado, $y \geq x - 1$ representa os pontos com ordenadas maiores ou iguais que as da reta $y = x - 1$. A região R é a intersecção dessas duas regiões do plano.



7) Construa o gráfico da relação $|x| + |y| < 1$.

Solução:

Temos as seguintes hipóteses:

$$\begin{aligned} x > 0,\ y > 0 &\Rightarrow x + y < 1 \\ x < 0,\ y > 0 &\Rightarrow -x + y < 1 \\ x < 0,\ y < 0 &\Rightarrow -x - y < 1 \\ x > 0,\ y < 0 &\Rightarrow x - y < 1 \end{aligned}$$

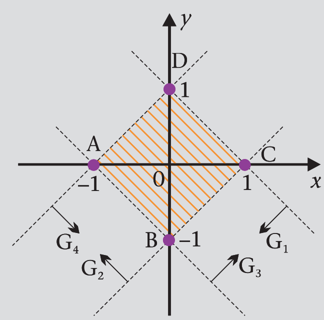
Devemos ter a intersecção destes quatro semiplanos abertos, ou seja:

G_1: $y < 1 - x$

G_2: $y < 1 + x$

G_3: $y > -1 - x$

G_4: $y > -1 + x$



O gráfico é o quadrado aberto ABCD acima. Os lados não pertencem ao gráfico.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Resolva as seguintes inequações no campo dos números reais.

a) $|3x - 1| \geq 8$

b) $|x^2 - 5x| \geq 6$

c) $|3x + 5| \leq 11$

d) $\left|\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3}\right| \geq 4$

2 (Cesgranrio-RJ) A intersecção dos conjuntos $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 4\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 7| < 2\}$ é um intervalo de comprimento:

(A) 2 (C) 1 (E) 4

(B) 5 (D) 3

3 (Mack-SP) O conjunto solução de $1 < |x - 3| < 4$ é o conjunto dos números x tais que:

(A) $4 < x < 7$ ou $-1 < x < 2$

(B) $-1 < x < 7$ ou $-3 < x < -1$

(C) $-1 < x < 7$ ou $2 < x < 4$

(D) $0 < x < 4$

(E) $-1 < x < 4$ ou $2 < x < 7$

4 (Cesgranrio-RJ) O conjunto solução da desigualdade $|\,|x + 1| - |x|\,| \leq x + 2$ é:

(A) $[-3, 0] \cup [1, 73]$

(B) $\{x \mid x \leq 0\} \cup [3, 15]$

(C) $[-3, 0] \cup \{x \mid x \geq 0\}$

(D) $\{x \mid -5 < x < -1\} \cup \{x \mid 1 < x < 17\}$

(E) $[-4, 2] \cup [-2, 1]$

5 Dê o conjunto de valores reais que atenda a desigualdade $|\,x + |x + 1|\,| \leq 5$.

6 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de:

a) $\left|\dfrac{3x}{2} - 1\right| \leq x + 1$

b) $|x^2 - 3x + 2| \leq x^2$

c) $|x^2 - 3x| + |3x - 6| < x$

d) $|3x - 3| + |x - 2| \geq x$

7 (Mapofei-SP) Resolva a inequação $|x - 2| + |x - 4| \geq 6$.

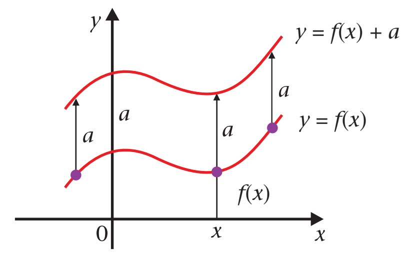
8 (Mapofei-SP) Resolva a inequação $|x^2 - 4| < 3x$.

6.3 – Análise de gráficos

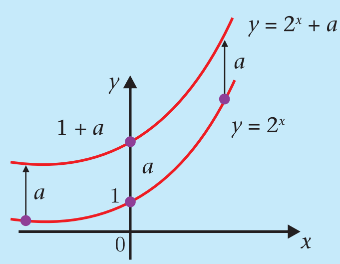
Seja a função f de gráfico abaixo:

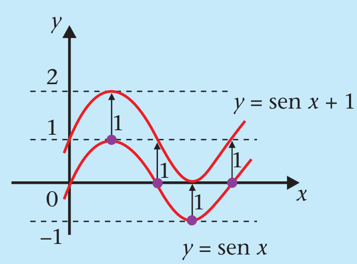
A) Para se obter o gráfico $y = f(x) + a$, basta efetuar uma translação de $y = f(x)$ no sentido positivo se $a > 0$ e negativo se $a < 0$, ambas na direção Oy.

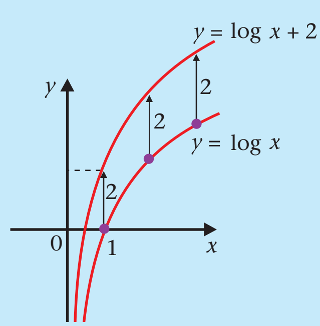
Os pontos $(x, f(x) + a)$ estarão acima dos pontos $(x, f(x))$ se $a > 0$ e abaixo se $a < 0$.

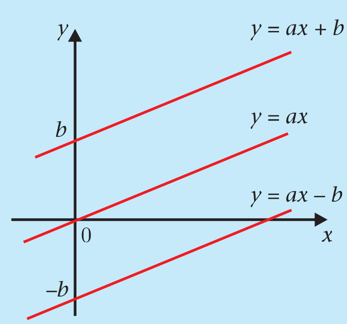


Exemplos:



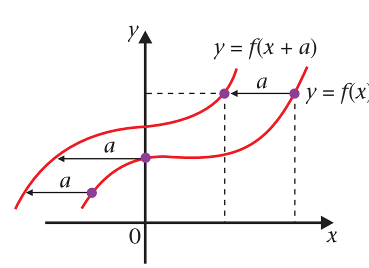




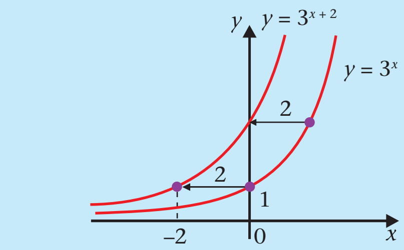


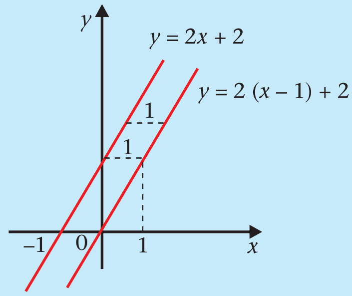
B) Para se obter o gráfico de $y = f(x + a)$, basta efetuar uma translação de $y = f(x)$ na direção Ox, no sentido negativo se $a > 0$ e no sentido positivo se $a < 0$.

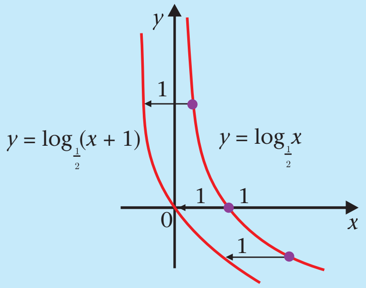
Como $f((x - a) + a) = f(x)$, os pontos $(x - a, f(x))$ estarão à esquerda dos pontos $(x, f(x))$ se $a > 0$ e à direita se $a < 0$.

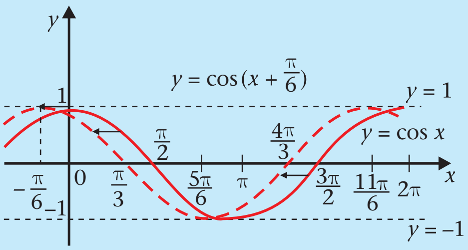


Exemplos:



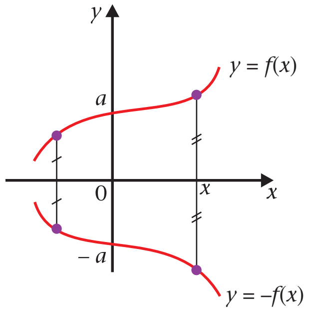




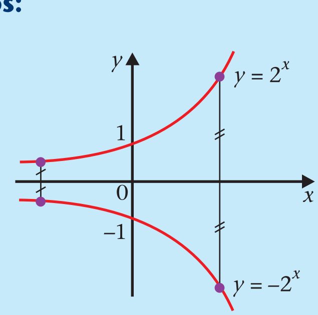


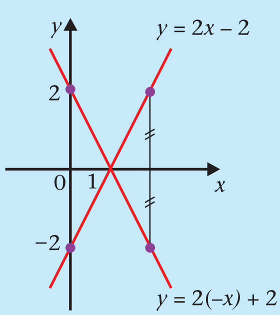
C) Para se obter o gráfico de $y = -f(x)$, basta efetuar uma simetria (reflexão) de $y = f(x)$ em relação ao eixo Ox.

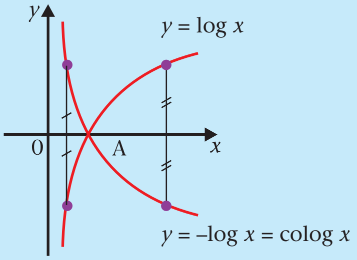
Os pontos $(x, -f(x))$ serão simétricos dos pontos $(x, f(x))$ em relação ao eixo Ox.

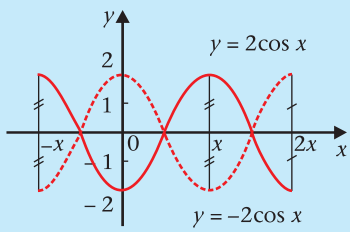


Exemplos:



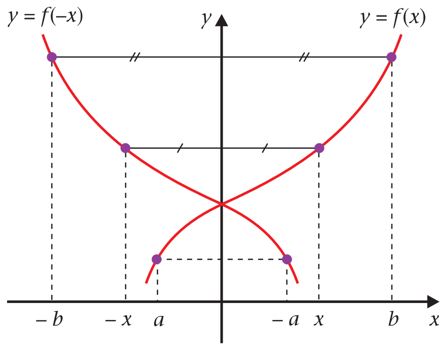




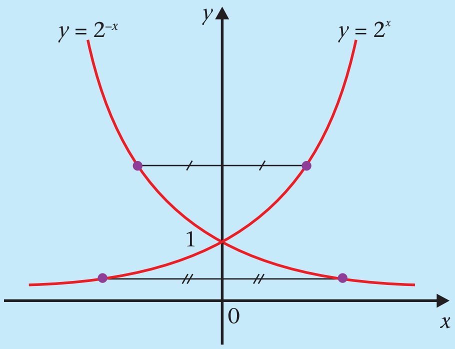


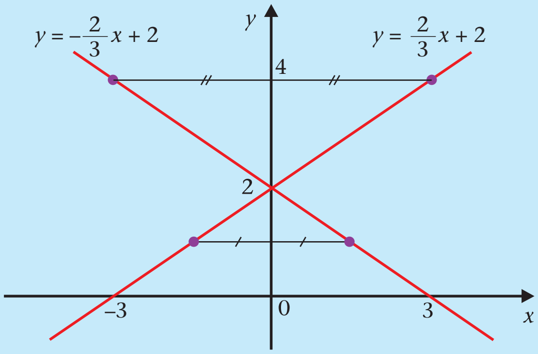
D) Para se obter o gráfico de $y = f(-x)$, basta efetuar uma simetria (reflexão) de $y = f(x)$ em relação ao eixo Oy.

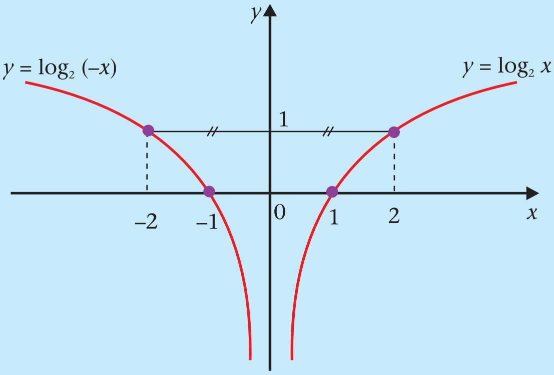
Como $f(-(-x)) = f(x)$, os pontos $(-x, f(x))$ serão simétricos dos pontos $(x, f(x))$ em relação ao eixo Oy.

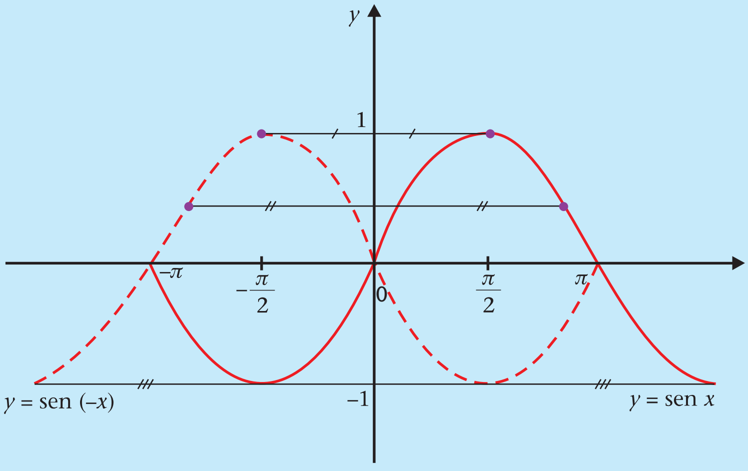


Exemplos:





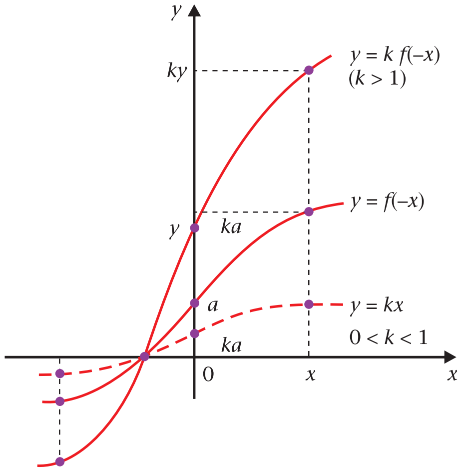




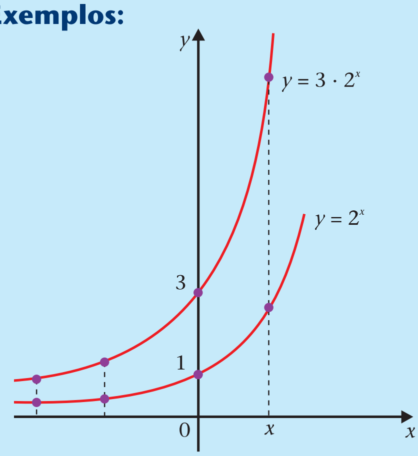
E) Para se obter o gráfico de $y = k\,f(x)$, basta "dilatar" as ordenadas multiplicando-as por k. Observe que o ponto de intersecção do gráfico com o eixo Ox fica fixo (ordenada nula).

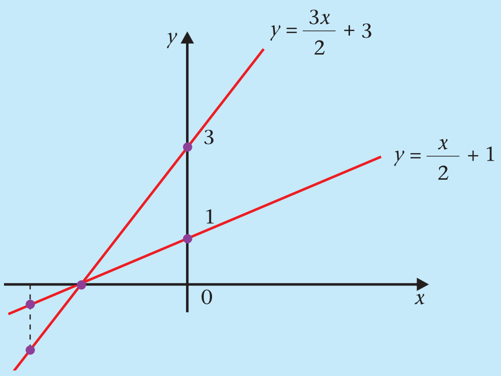
Os pontos $(x, k\,f(x))$ terão suas ordenadas "dilatadas" se $k > 1$ e "contraídas" se $0 < k < 1$.

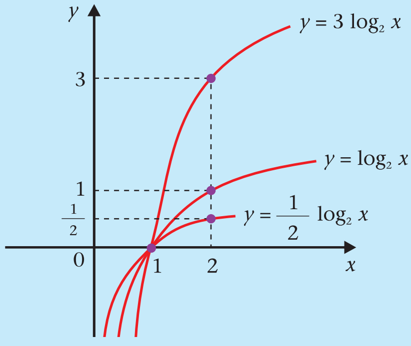
Se $f(x) = 0$, os pontos situados no eixo Ox permanecem fixos.

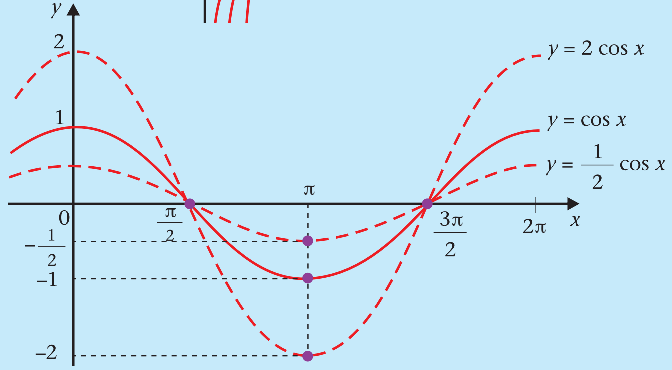


Exemplos:

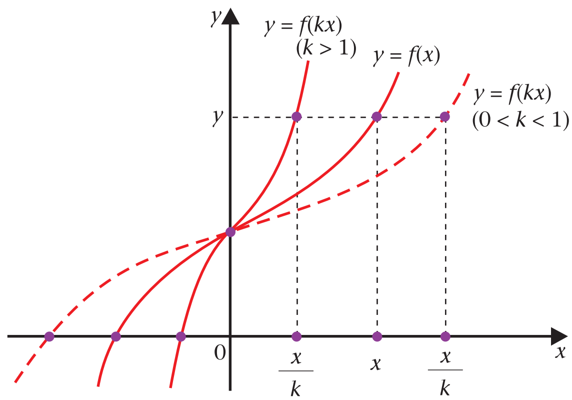




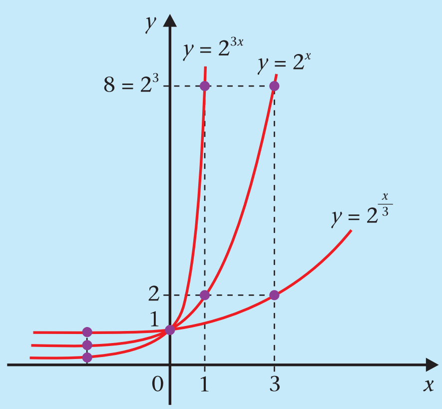


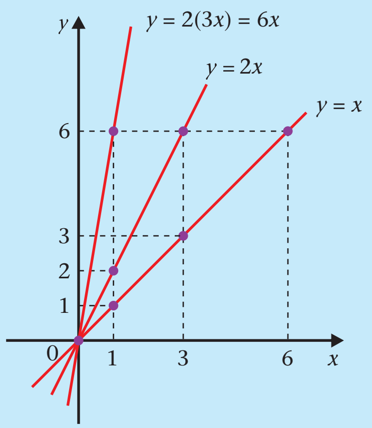


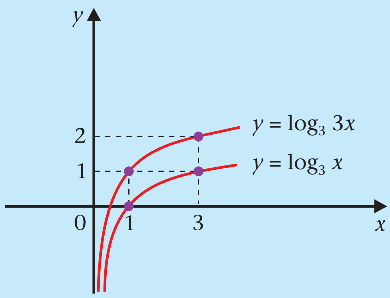
F) Para se obter o gráfico de $y = f(kx)$, basta "contrair" as abscissas ao longo do eixo Ox dividindo-as por k ($k > 1$). Se $0 < k < 1$, basta multiplicá-las por k. Observe que os pontos sobre o eixo Oy ficam fixos.

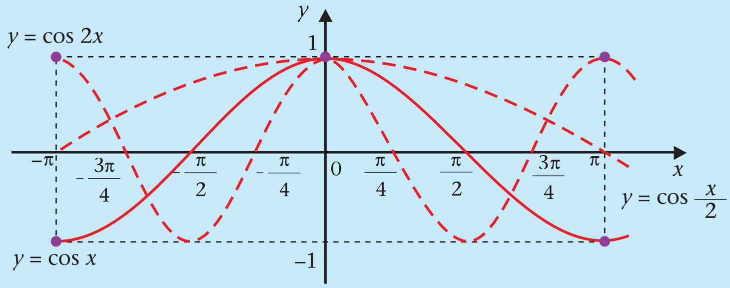


Exemplos:





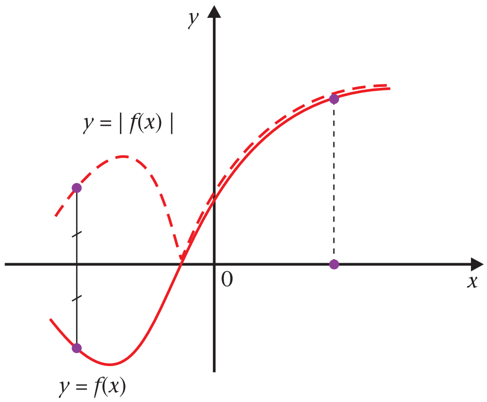




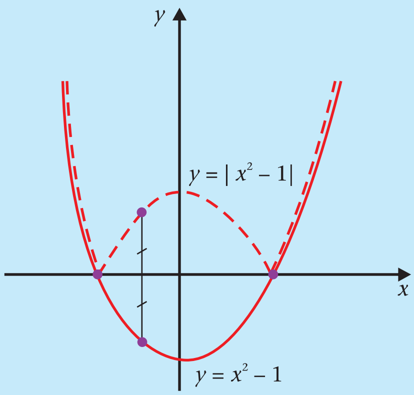
Como $f\left(k \cdot \frac{x}{k}\right) = f(x)$, os pontos $\left(\frac{x}{k}; f(x)\right)$ terão suas abscissas "contraídas" se $k > 1$ e "dilatadas" se $0 < k < 1$. Se $x = 0$, os pontos no eixo Oy ficam fixos.

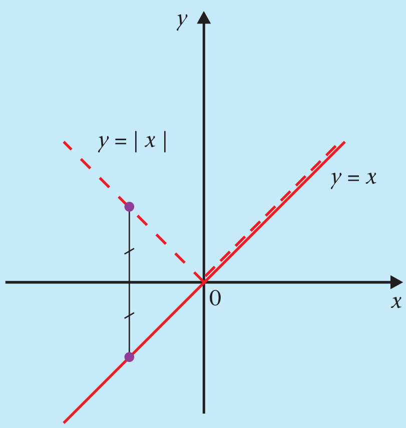
G) Para se obter o gráfico de $y = | f(x) |$, basta fazer uma simetria do trecho de ordenadas negativas em relação ao eixo Ox, mantendo-se o trecho de ordenadas positivas.

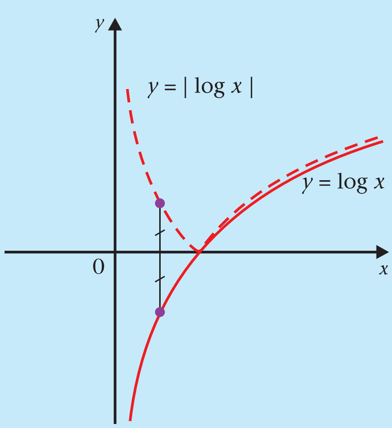
Se $f(x) > 0$, os pontos $(x, | f(x) |) = (x, f(x))$ não se alteram, mas se $f(x) < 0$, os pontos $(x, | f(x) |) = (x, -f(x))$ trocam os sinais das ordenadas, ficando simétricos em relação ao eixo Ox.

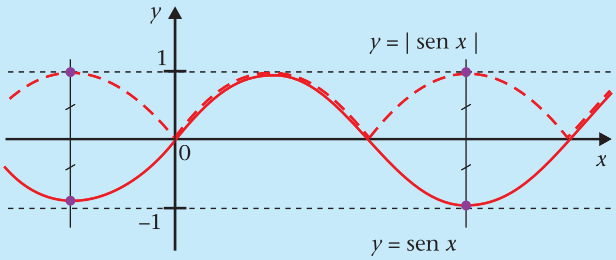


Exemplos:



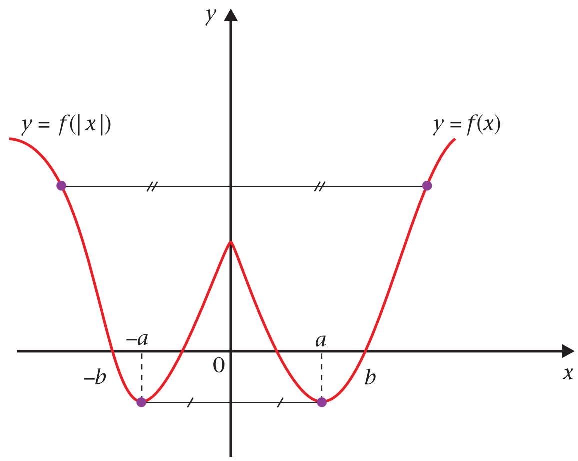




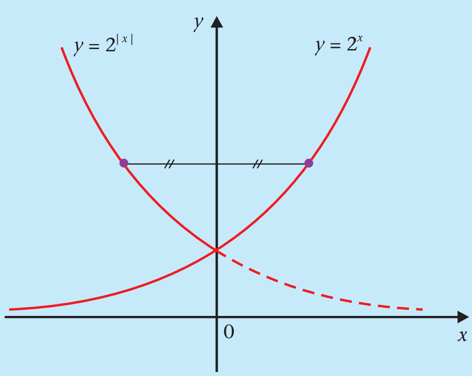


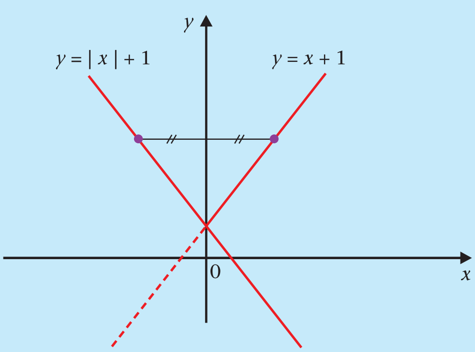
H) Para se obter o gráfico de $y = f(|x|)$, basta fazer uma simetria do trecho de abscissas positivas em relação ao eixo O*y*.

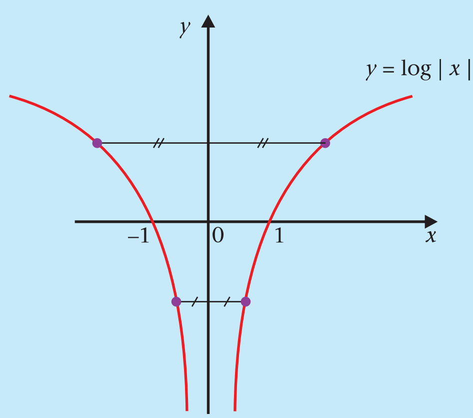
Se $x \geq 0$, os pontos $(x, f(|x|)) = (x, f(x))$ não se alteram, mas se $x < 0$, os pontos $(x, f(|x|)) = (x, f(-x))$, ficando simétricos em relação ao eixo O*y*.

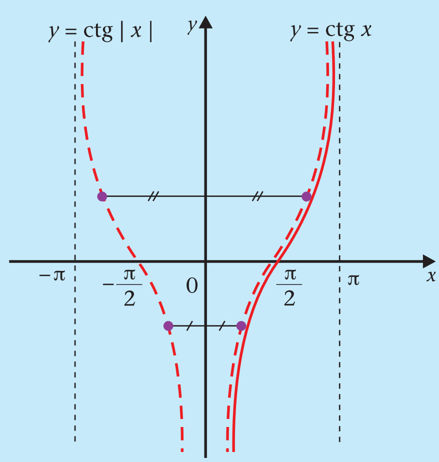


Exemplos:



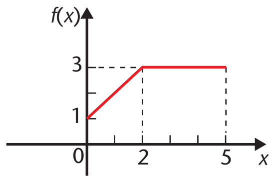






EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Conhecendo-se o gráfico de $f(x)$, determine os gráficos que indicam $g(x)$ em cada caso.

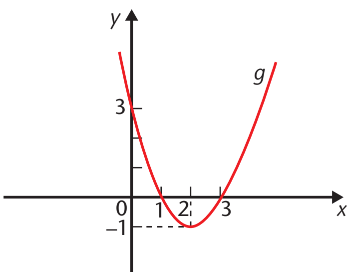


a) $g(x) = f(x) - 1$

b) $g(x) = -f(x)$

c) $g(x) = f(x) + 1$

2 Observe o gráfico de $g(x) = x^2 - 4x + 3$.



Obtenha os gráficos de $|g(x)|$ e $|g(x)| - 2$.

3 A partir do gráfico de $f(x) = 2x - 4$, definido no campo dos números reais, obtenha os gráficos de $g(x) = |f(x)|$ e $g(x) = |f(x)| + 3$.

4 Sendo $f(x) = x$, obtenha o gráfico de $g(x)$ em cada caso.

a) $g(x) = |f(x)|$

b) $g(x) = |f(x)| + 1$

c) $g(x) = |f(x)| - 1$

d) $g(x) = ||f(x)| - 1|$

e) $g(x) = -|f(x)|$

5 Sendo $f(x) = x^2 - 4$, obtenha o gráfico de $g(x)$ em cada situação a seguir:

a) $g(x) = f(x) - 1$

b) $g(x) = f(x) + 1$

c) $g(x) = |f(x) + 1|$

d) $g(x) = -|f(x)| + 1$

e) $g(x) = -f(x) + 1$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (UFCE) Sejam f e g funções reais de variável real definidas por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 - 6x$. Considerando $A = \{x \in \mathbb{Z}, |x| < 3\}$, determine o número de elementos da imagem do conjunto A pela função composta $(g \circ f)$.

2 (Unitau-SP) Esboce o gráfico da função:
$y = |x - 2|$, para o domínio real $0 \leq x \leq 4$.

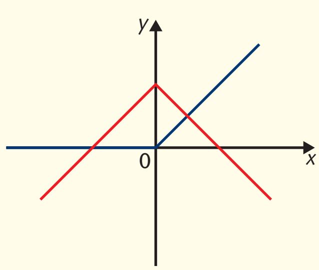
3 Represente o gráfico de $f(x) = x + \dfrac{|x|}{x}$ no intervalo $[-1, 1]$.

4 Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + |x|$ e faça o que se pede.

a) Mostre que: $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ 2x, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

b) Resolva a equação: $f(x + 2) - x = 3$.

5 (Mack-SP) Observando, na figura, os esboços dos gráficos das funções $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$ e $g(x) = -|x| + 1$, considere as afirmações:



I) Não existe $x < 0$, tal que $g(x) > f(x)$.

II) As soluções de $f(x) \geq g(x)$ são todas positivas.

III) A soma das raízes da equação $f(x) = g(x)$ é $\dfrac{1}{2}$.

Então:

(A) Todas são falsas.

(B) Todas são verdadeiras.

(C) Somente I e II são verdadeiras.

(D) Somente I e III são verdadeiras.

(E) Somente II e III são verdadeiras.

6 Construa o gráfico de:

a) $f(x) = |x - 1| - 1$

b) $f(x) = |x - 2| + |x|$

c) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{|x| + x}{|x|}$

e) $f(x) = |x - 2| + |2x + 1| - x - 6$

f) $f(x) = |x + 2|$

7 Represente o gráfico da função $f(x) = |x + 1| + |x|$, destacando seu domínio e sua imagem.

8 Represente o gráfico de $f(x) = |x - 1| + |x + 3|$, a seguir determine sua imagem.

9 (PUC-RJ) Para definir módulo de um número real x posso dizer que:

(A) é igual ao valor de x se x é real.

(B) é o maior valor do conjunto formado por x e o oposto de x.

(C) é o valor de x tal que $x \in \mathbb{N}$.

(D) é oposto do valor de x.

(E) é o maior inteiro contido em x.

10 (PUC-MG) O conjunto S das soluções da equação $|2x - 1| = x - 1$ é:

(A) $S = \left\{0, \dfrac{2}{3}\right\}$

(B) $S = \left\{0, \dfrac{1}{3}\right\}$

(C) $S = \varnothing$

(D) $S = \{0, -1\}$

(E) $S = \left\{0, \dfrac{4}{5}\right\}$

11 (ITA-SP) Considere a equação $|x| = x - 6$. Com respeito à solução real dessa equação, podemos afirmar que:

(A) a solução pertence ao intervalo fechado $[1, 2]$.

(B) a solução pertence ao intervalo fechado $[-2, -1]$.

(C) a solução pertence ao intervalo aberto $]-1, 1[$.

(D) a solução pertence ao complementar da união dos intervalos anteriores.

(E) a equação não tem solução.

12 (Uneb-BA) O domínio da função $f(x) = \sqrt{2 - |x-1|}$ é o conjunto:

(A) $]1, 3[$
(B) $]1, 3]$
(C) $[-1, 3]$
(D) $]-\infty, -1[\cup [3, +\infty[$
(E) $]-\infty, -3[\cup [1, +\infty[$

13 (Fuvest-SP) Qual o conjunto dos valores assumidos pela expressão $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$, quando a, b e c variam no conjunto dos números reais não nulos?

(A) $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
(B) $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$
(C) $\{-4, 0, 4\}$
(D) $\{4\}$
(E) $\mathbb{R}$

14 (UFCE) A soma dos valores reais de x que satisfazem a igualdade $\frac{3|x+1|}{|x+1|} = 1$

(A) $-\frac{5}{2}$
(B) $-\frac{3}{2}$
(C) -5
(D) -3
(E) n.d.a.

15 (PUC-RJ) Dado $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 2\}$, tem-se:

(A) $A \subset \mathbb{N}$
(B) $A \subset \mathbb{R}_+$
(C) $A \cup \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}_+$
(D) $A \cap \mathbb{Z}_- = A$
(E) $A \cap \mathbb{N} = \{2\}$

16 (PUC-MG) A solução da equação $|3x - 5| = 5x - 1$ é:

(A) $\{-2\}$
(B) $\left\{\frac{3}{4}\right\}$
(C) $\left\{\frac{1}{5}\right\}$
(D) $\{2\}$
(E) $\left\{\frac{3}{4}, -2\right\}$

17 (UEL-PR) Seja p o produto das soluções reais da equação $||x + 1| - 2| = 2$.
Então p é tal que:

(A) $p < -4$
(B) $-2 < p < 0$
(C) $4 < p < 16$
(D) $0 < p < 4$
(E) $p > 16$

18 (FGV-RJ) Seja V o conjunto de todas as soluções reais da equação $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 1 + x$. Então:

(A) $V = \varnothing$
(B) $V = \mathbb{R}$
(C) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$
(D) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$
(E) $V = \{0\}$

19 (Fatec-SP) A igualdade $-|-x| = -(-x)$ é verdadeira para todos os elementos do conjunto:

(A) $\mathbb{R}$
(B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
(C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
(D) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 10\}$
(E) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$

20 (UFMG) Considere a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 - x, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

O valor de $f(2) + 2f(\sqrt{2}) - 4 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right)$ é:

(A) $4 - 2(\sqrt{2})$
(B) $5 - 2(\sqrt{2})$
(C) $2(\sqrt{2})$
(D) $3(\sqrt{2})$
(E) 7

21 (FCESP) Se $x \in]-\infty, 0]$, então a expressão

$\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{x^2} - \sqrt{(4-3x)^2}$ vale:

(A) $5x - 1$
(B) $3x - 1$
(C) $x - 1$
(D) $7 - x$
(E) $x - 7$

22 (UC-MG) A soma das raízes da equação $|2x - 1| = 3$ é igual a:

(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) 1
(E) 2

23 (ESCCAI-MG) O conjunto solução da equação $|-2x + 3| = 2x - 3$ é:

(A) $\varnothing$

(B) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leq \frac{3}{2}\right\}$

(C) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geq \frac{3}{2}\right\}$

(D) $\mathbb{R}$

(E) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

24 (Cesgranrio-RJ) Resolva a equação $|x - 1| + |x - 2| = 1$.

25 (Cesgranrio-RJ) Seja f a função definida no intervalo aberto $(-1, +1)$ por $f(x) = \frac{x}{1 - |x|}$.

Então $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ é:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $-\frac{1}{2}$

(D) -1

(E) -2

26 (Unifor-CE) Relativamente à função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3 \cdot |x| + 1$, é correto afirmar que:

(A) f é crescente para todo $x \leq 1$.

(B) f é crescente para todo $x \neq 0$.

(C) $f(x) = -2$ para algum $x \in \mathbb{R}$.

(D) $f(x) = f(-x)$.

(E) $f(x) = -f(x)$.

27 (PUC-RJ) O conjunto solução da equação $|x - 1| = |x - 1|^2$ em $\mathbb{R}$:

(A) possui apenas um elemento.

(B) possui exatamente dois elementos.

(C) é vazio.

(D) possui exatamente três elementos.

(E) possui exatamente quatro elementos.

28 (Mack-SP) O conjunto solução de $|x - 3| < x + 3$ é:

(A) $\varnothing$

(B) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$

(C) $\mathbb{R}$

(D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

(E) Não sei.

29 (Fuvest-SP) A moeda de um país é o "liberal", indicado por £. O imposto de renda I é uma função contínua da renda R, calculada da seguinte maneira:

I) se R ≤ 24 000 £, o contribuinte está isento do imposto;

II) se R > 24 000 £, calcula-se 15% de R e, do valor obtido, subtrai-se um valor fixo P, obtendo-se o imposto a pagar I. Determine o valor fixo P.

(A) 1 200 £

(B) 2 400 £

(C) 3 600 £

(D) 6 000 £

(E) 24 000 £

30 (Uece) Dados os conjuntos

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 5| < 3\}$ e

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 4| \geq 1\}$,

a soma dos elementos de $A \cap B$ é igual a:

(A) 19

(B) 20

(C) 21

(D) 22

(E) n. d. a.

31 (UFU-MG) O conjunto solução da inequação $|3x - 5| < 3$ é:

(A) $\left\{x \in \mathbb{R} : x < \frac{8}{3}\right\}$

(B) $\left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{2}{3}\right\}$

(C) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2}{3} < x < \frac{8}{3}\right\}$

(D) $\left\{x \in \mathbb{R} : x < \frac{2}{3} \text{ ou } x > \frac{8}{3}\right\}$

(E) $\varnothing$

32 (GV) Sejam x e y números reais quaisquer. Assinale a afirmação correta:

(A) $|x + y| \leq \frac{|x| + |y|}{2}$

(B) $|x + y| \geq \frac{1}{2}\big||x| - |y|\big|$

(C) $|x| + |y| > \sqrt{x^2 + y^2}$

(D) $|xy| > |x| \cdot |y|$

(E) $|x| + |y| = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

33 (Cescea) Se a e b são dois números reais quaisquer, assinale dentre as afirmações abaixo a que é sempre verdadeira.

(A) $|a + b| \geq |a| + |b|$

(B) $|a + b| = |a| + |b|$

(C) $|a + b| \leq |a| + |b|$

(D) $|a| - |b| \geq |a + b|$

(E) $|a| + |b| \neq |a + b|$

34 (Unifor-CE) O conjunto solução da inequação $\left|\dfrac{3x}{3-x}\right| \leq 1$ no universo U = $\mathbb{R}$, é:

(A) $\left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{4}\right]$

(B) $\left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{3}\right]$

(C) $\left]-\infty, \dfrac{3}{4}\right]$

(D) $\left[-\dfrac{3}{2}, 3\right]$

(E) $\varnothing$

35 (UFMT) O sistema $\begin{cases} |2x-5| < 3 \\ |-3x+1| > 0 \end{cases}$ tem como solução o intervalo:

(A) $\left]-\infty, -\dfrac{4}{3}\right[$

(B) $]2, +\infty[$

(C) $\left]-\dfrac{4}{3}, 2\right[$

(D) $]1, 4[$

(E) $]2, 4[$

36 (PUC-RJ) Qualquer que seja o número real não nulo x, tem-se sempre:

(A) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right| \geq 2$

(B) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right| \leq 10$

(C) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right| \leq x$

(D) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right| < \dfrac{1}{x}$

(E) nenhuma das anteriores

37 (Unip-SP) O conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da inequação $\dfrac{3}{|5-2x|} < 2$ é:

(A) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \dfrac{7}{4} < x < \dfrac{13}{4}\right\}$

(B) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < \dfrac{13}{4}\right\}$

(C) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > \dfrac{1}{3}\right\}$

(D) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < \dfrac{7}{4} \text{ ou } x > \dfrac{13}{4}\right\}$

(E) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \dfrac{1}{3} < x < 1\right\}$

38 (Cescea-SP) O conjunto de todos os x para os quais $|2x - 3| > x$ é:

(A) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

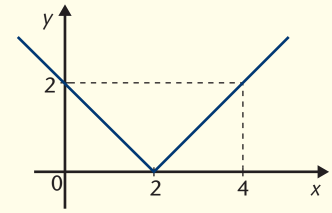
(B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x < 4\}$

(C) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$

(D) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$

(E) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

39 (Ucsal-BA) A figura ao lado pode representar o gráfico da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:



(A) $f(x) = |x| + 2$

(B) $f(x) = |x - 2|$

(C) $f(x) = |x + 2|$

(D) $f(x) = |x| - 2$

(E) $f(x) = ||x| + 2|$

40 (UFMG) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} x-3, \text{ se } x \leq -2 \\ 2x^2+1, \text{ se } -2 < x < 3 \\ 5, \text{ se } x \geq 3 \end{cases}$.

Pode-se afirmar que o valor de $f(\pi) + 2f(\sqrt{5}) + f(-2)$ é:

(A) 10

(B) 13

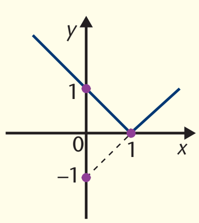
(C) 22

(D) 25

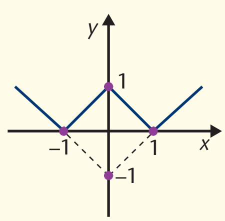
(E) $2\pi^2 + 1$

41 (Cescem-SP) Dados dois números reais distintos a e b, podemos definir uma função $f(x)$ que chamaremos "distância ao conjunto $\{a, b\}$" da seguinte forma: Distância de x ao conjunto $\{a, b\}$ é o menor dos números $|x - a|$, $|x - b|$. Se $a = -b = 1$, o gráfico de $f(x)$ é:

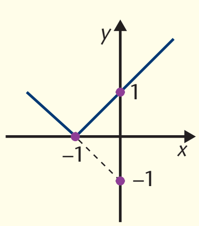
(A)



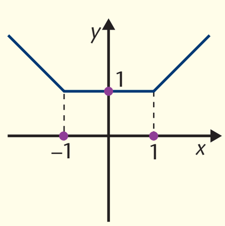
(C)



(B)

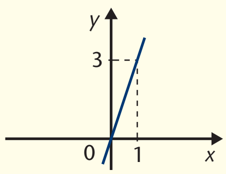


(D)

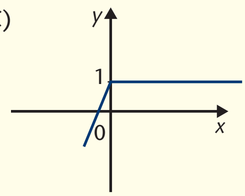


42 (FGV-RJ) O gráfico da equação: $y = 2\sqrt{x^2} + x$ é:

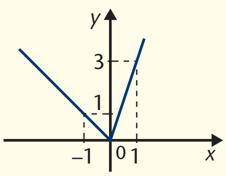
(A)



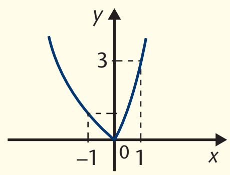
(C)



(B)

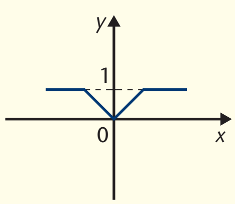


(D)

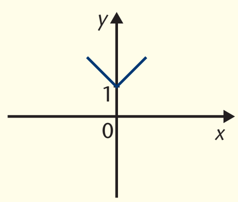


43 (Unisinos-RS) Dentre os gráficos seguintes, o que representa a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - |x| + 1$ é:

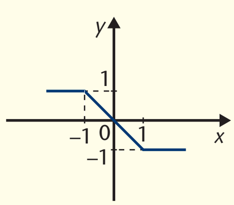
(A)



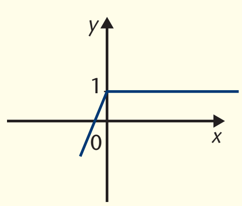
(D)



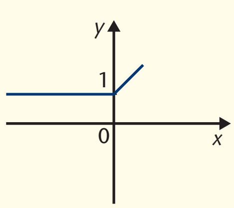
(B)



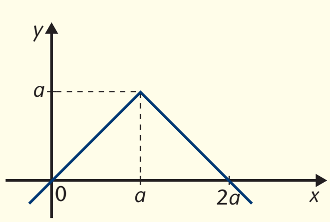
(E)



(C)



44 (Mack–SP) O gráfico abaixo representa a função:



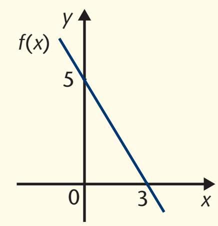
(A) $y = -|x - a| + a$

(C) $y = -|x - a| - a$

(B) $y = |x - a| - a$

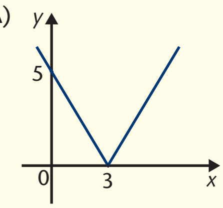
(D) $\begin{cases} |x| - a, \text{ se } x \geq a \\ |x| + a, \text{ se } x < a \end{cases}$

45 (Unificado-RJ)

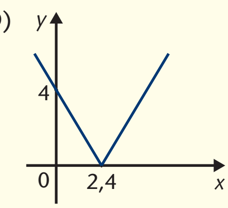


No gráfico acima está representada a função do 1º grau $f(x)$. O gráfico que melhor representa $g(x) = |f(x)| - 1$ é:

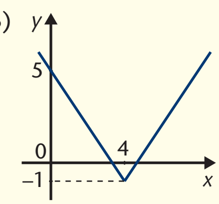
(A)



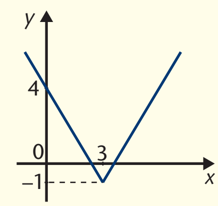
(D)



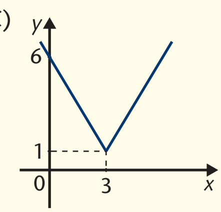
(B)



(E)

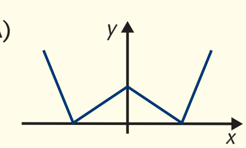


(C)

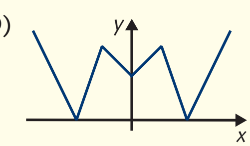


46 (Cescem-SP) O gráfico de $y = |x| - 2$ é:

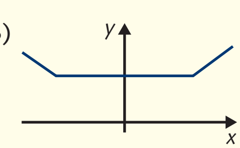
(A)



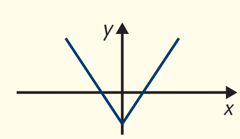
(D)



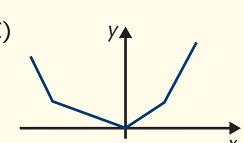
(B)



(E)

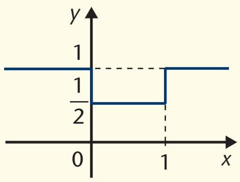


(C)

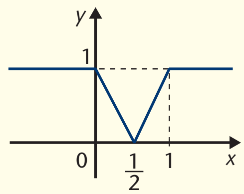


47 (Cescem-SP) O gráfico da função $y = || x - 1 | - | x ||$ é:

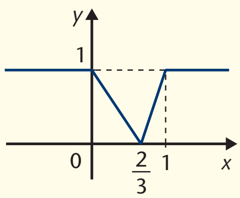
(A)



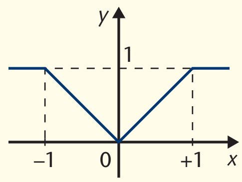
(D)



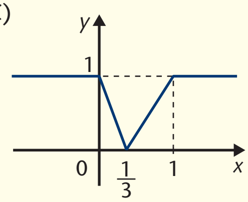
(B)



(E)



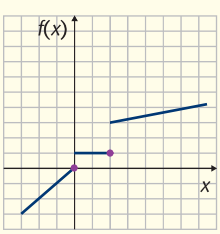
(C)



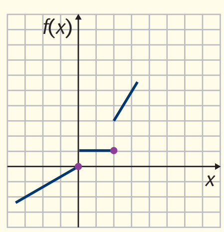
48 (Unifor-CE) Em qual dos gráficos seguintes está *melhor* representada a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ se } x \leq 0 \\ 1, \text{ se } 0 < x < 2 \\ 2x, \text{ se } x > 2 \end{cases}.$$

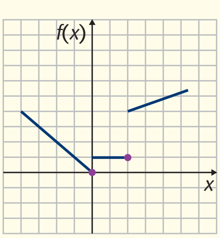
(A)



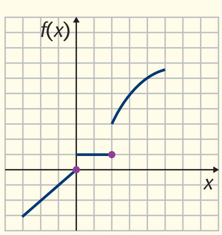
(D)



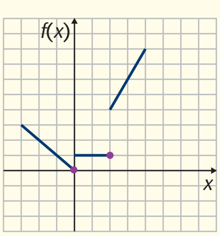
(B)



(E)



(C)



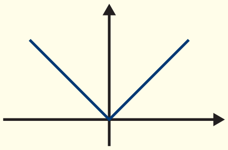
49 (Cesgranrio-RJ) Nos gráficos abaixo os pontos do domínio são marcados no eixo horizontal e os da imagem no eixo vertical. O gráfico que melhor pode representar a função

$f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

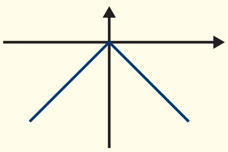
$x \mapsto f(x) = -|x|$

onde $\mathbb{R}_+$ é o conjunto dos reais não negativos, é:

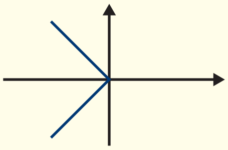
(A)



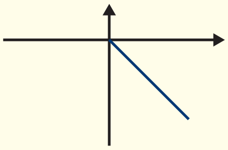
(D)



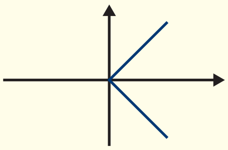
(B)



(E)



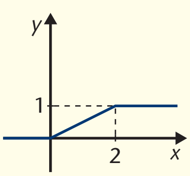
(C)



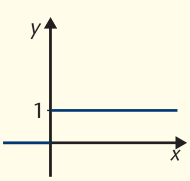
50 (GV) O gráfico da função f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{2}, \text{ se } 0 < x \leq 2 \\ 1, \text{ se } x > 2 \end{cases} \text{ é:}$$

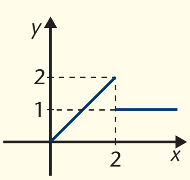
(A)



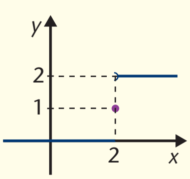
(D)



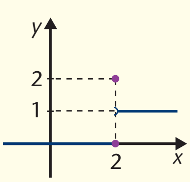
(B)



(E)

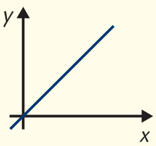


(C)

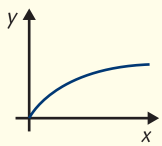


51 (UFMG) O gráfico da função dada por $f(x) = \sqrt{x^2}$ é:

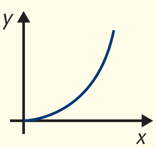
(A)



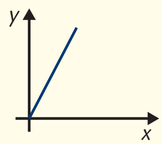
(D)



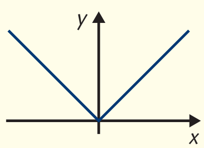
(B)



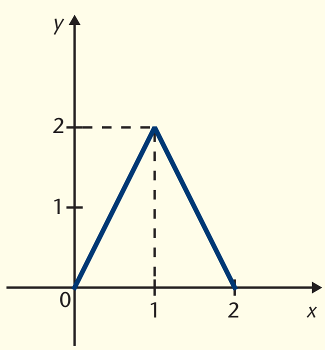
(E)



(C)



52 (UC-MG) A figura mostra o gráfico da função f de [0, 2], em $\mathbb{R}$. A lei que define f é:



(A) $f(x) = \begin{cases} x_2, \text{ se } 0 \leq x < 0 \\ -x, \text{ se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

(B) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ -\dfrac{1}{2}x, \text{ se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

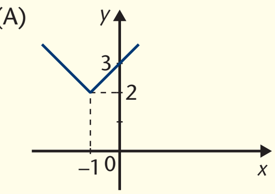
(C) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ -x + 2, \text{ se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

(D) $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ -2x + 4, \text{ se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

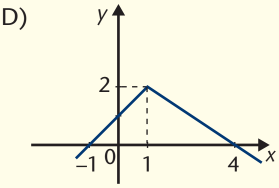
(E) $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ -\dfrac{1}{2}x + 6, \text{ se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

53 (Mack-SP) O gráfico da relação $y = |x - 1| + 2$ é:

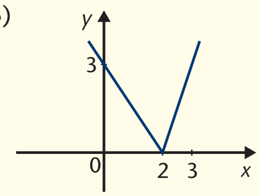
(A)



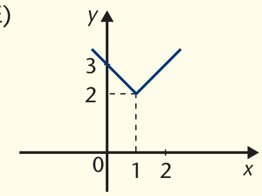
(D)



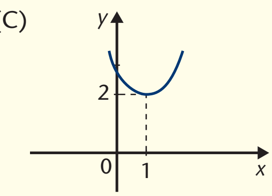
(B)



(E)

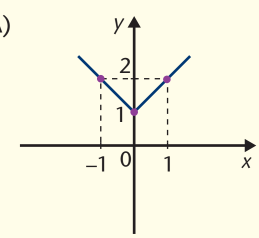


(C)

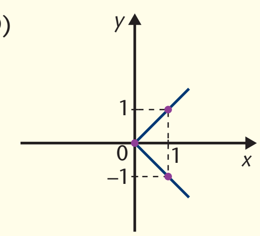


54 (UFSE) Das figuras seguintes, a que melhor representa a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x| + 1$, é:

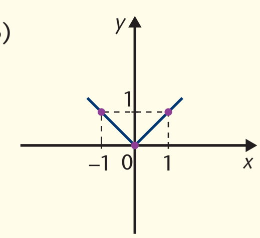
(A)



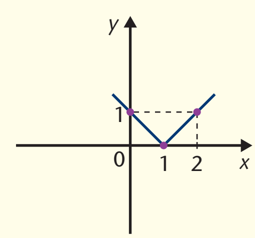
(D)



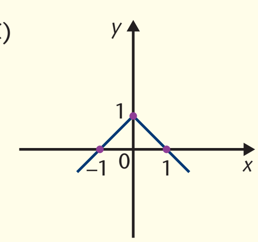
(B)



(E)

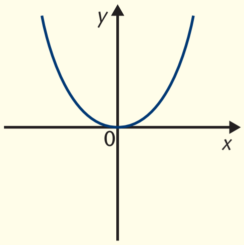


(C)

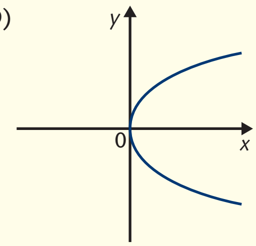


55 (Mack-SP) O gráfico cartesiano da função definida por $y = -x\,|\,x\,|$ pode ser:

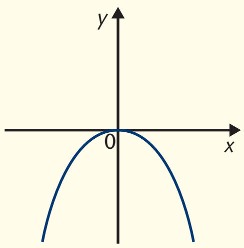
(A)



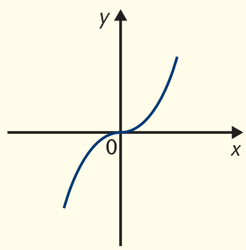
(D)



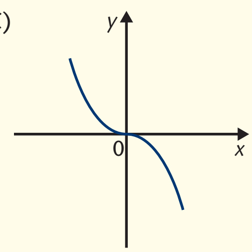
(B)



(E)

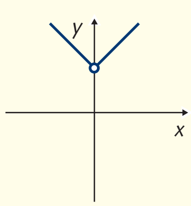


(C)

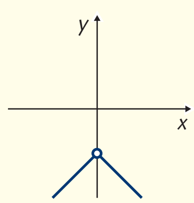


56 (EAESP) Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x + \dfrac{x}{|\,x\,|}$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. O seu gráfico é:

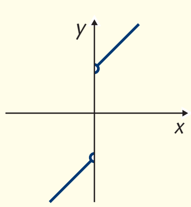
(A)



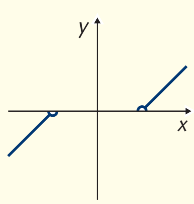
(D)



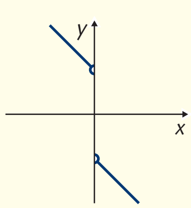
(B)



(E)

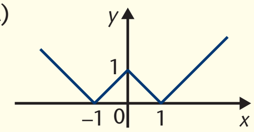


(C)

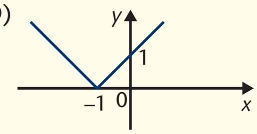


57 (PUC-RJ) O esboço do gráfico de $y = |\,x\,| - 1$ é:

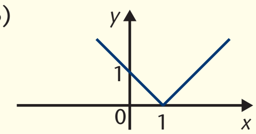
(A)



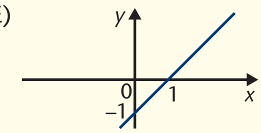
(D)



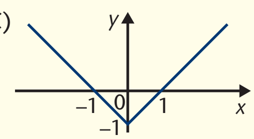
(B)



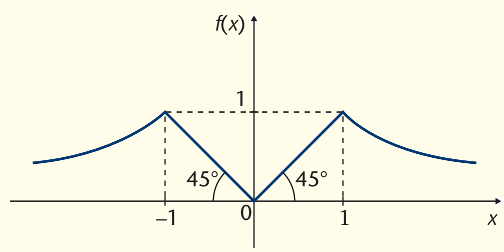
(E)



(C)



58 (Cescem-SP) A função cujo gráfico melhor se adapta ao da figura é:



(A) $f(x) = |\,x\,|$

(B) $f(x) = \left|\dfrac{1}{x}\right|$

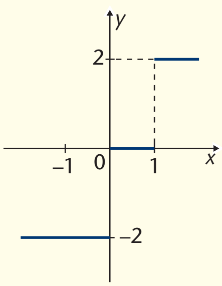
(C) $f(x) = \left|\min\left(x; \dfrac{1}{x}\right)\right|$

(D) $f(x) = \min\left(|x|; \left|\dfrac{1}{x}\right|\right)$

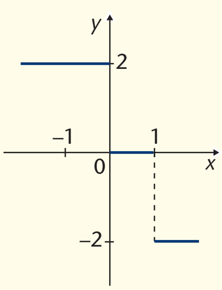
(E) $f(x) = \min\left(|x^2|; \dfrac{1}{x^2}\right)$

59 (Mack-SP) O gráfico de $g(x)=\frac{|x|}{x}+\frac{|x-1|}{x-1}$ é:

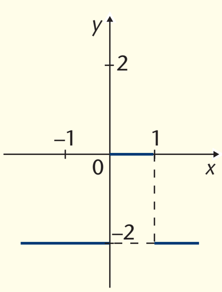
(A)



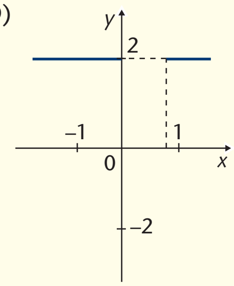
(B)



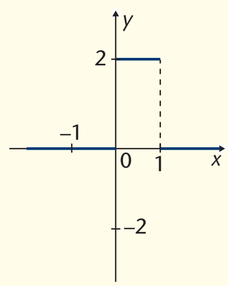
(C)



(D)



(E)



60 (FEI-SP) O conjunto imagem da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 - |x - 2|$ é:

(A) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1\}$
(B) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$
(C) $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$
(D) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 2\}$
(E) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$

61 (UFRN) A função $f(x)=\frac{x+|x|}{|x|}$, definida para todo número real $x \neq 0$:

(A) é uma função ímpar.
(B) é decrescente quando $x < 0$.
(C) é sempre crescente conforme x cresce.
(D) atinge um máximo para um único valor de x.
(E) admite um conjunto imagem de apenas dois elementos.

62 (Mack-SP) Seja f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2|x - 3| + x - 1$.

O conjunto imagem da função f é:

(A) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$
(B) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 3\}$
(C) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\}$
(D) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 2\}$
(E) $\mathbb{R}$

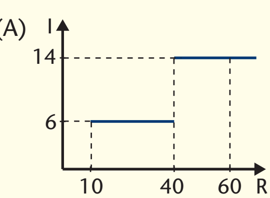
63 (Covest-PE) Em um certo país, o imposto (I) é calculado em termos da renda (R) do cidadão, utilizando a equação $I = t \cdot R - D$, em que a taxa (t) e a dedução (D) dependem da renda de acordo com a tabela abaixo:

Renda (R)	Taxa (t)	Dedução (D)
até 10 000	0	0
entre 10 000 e 40 000	0,2	2 000
a partir de 40 000	0,4	10 000

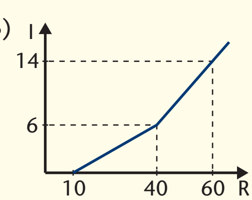
Obs.: Os valores da renda e imposto nos gráficos foram divididos por 1000.

Qual dos gráficos a seguir melhor expressa o imposto como função de renda?

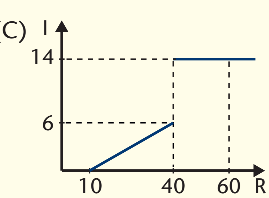
(A)



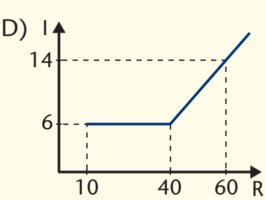
(B)



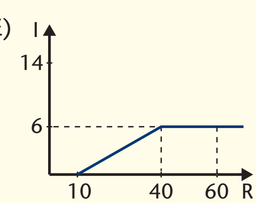
(C)



(D)

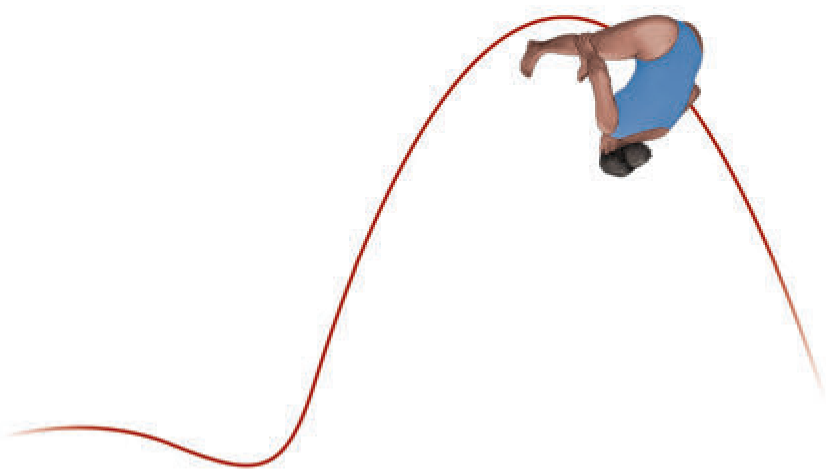


(E)



CAPÍTULO VII

FUNÇÃO QUADRÁTICA OU TRINÔMIO DO 2º GRAU



A função quadrática é usada para modelar a trajetória de objetos sob a ação da gravidade; seu gráfico é uma parábola, o formato ideal de antenas que tenham de focar raios vindo de fontes distantes num único ponto (daí as "antenas parabólicas"). Na fotografia, a trajetória do centro de gravidade de uma ginasta durante o seu duplo *twist* carpado.

7 – FUNÇÃO QUADRÁTICA OU TRINÔMIO DO 2º GRAU

7.1 – Trinômio do 2º grau

DEFINIÇÃO
Trinômio do 2º grau.

Chama-se **trinômio do 2º grau** a toda função do tipo t: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $y = t(x) = ax^2 + bx + c$ (com $a \neq 0$).

7.1.1 – Raízes ou zeros do trinômio

São os valores de x que anulam o trinômio, isto é, são valores que satisfazem à equação:

$$t(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

O conjunto verdade dessa equação se escreve: $V = \{x \mid t(x) = 0\}$.

Tais valores são dados pela fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante do trinômio.

NOTA
Discriminante porque determina a natureza das raízes.

Sabemos que:

Se $\Delta > 0$, o trinômio terá duas raízes reais e distintas, $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Se $\Delta = 0$, o trinômio terá duas raízes reais e iguais ou uma raiz dupla: $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Se $\Delta < 0$, o trinômio não terá raízes reais, pois teremos um número negativo sob o radical.

NOTA
Futuramente chamaremos $i = \sqrt{-1}$.
Então, diremos que a função quadrática tem raízes complexas quando o discriminante é negativo.

7.1.2 – Valor numérico do trinômio

O trinômio $y = t(x) = ax^2 + bx + c$ assume valores numéricos determinados quando se atribui valores a x. Por exemplo, quando $x = p$, temos $t(p) = ap^2 + bp + c$.

Exercícios resolvidos:

1) Determinar os zeros do trinômio $y = 2x^2 - 5x + 2$ e calcular seus valores numéricos para $x = 1$, $x = 0$ e $x = -1$.

Solução:

Raízes: $y = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{1}{2}$ ou $x_2 = 2$

Valores numéricos: $t(x) = 2x^2 - 5x + 2$

$t(1) = 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 \quad \Rightarrow \quad t(1) = -1$

$t(0) = 2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 2 \quad \Rightarrow \quad t(0) = 2$
$t(-1) = 2(-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 2 \quad \Rightarrow \quad t(-1) = 9$

2) A temperatura T, na qual a água entra em ebulição, varia com a elevação E acima do nível do mar. Medindo a elevação em metros e a temperatura em graus Celsius, temos:

$$E = 1\,000\,(100 - T) + 580\,(100 - T)^2$$

i) Em que elevação a temperatura de ebulição será de 99,5 °C?

ii) Discuta o caso T = 100.

iii) Escreva a equação de E em função de T na forma geral da função quadrática ($E = aT^2 + bT + c$).

Solução:

i) $T = 99{,}5$
$E(99{,}5) = 1\,000\,(100 - 99{,}5) + 580\,(100 - 99{,}5)^2$
$E(99{,}5) = 1\,000 \cdot 0{,}5 + 580 \cdot 0{,}5^2 = 500 + 145 = 645$ m

ii) $T = 100$
$E(100) = 1\,000\,(100 - 100) + 580\,(100 - 100)^2 = 0$ (nível do mar)

iii) $E = 100\,000 - 1\,000T + 580\,(10\,000 - 200T + T^2)$
$E = 100\,000 - 1\,000T + 5800\,000 - 116\,000T + 580T^2$
$E(T) = 580T^2 - 117\,000T + 5\,900\,000$

3) Uma espécie animal, cuja família inicial era de 200 indivíduos, foi testada num laboratório sob a ação de uma certa droga e constatou-se que a lei de sobrevivência de tal família obedecia à relação: $n(t) = at^2 + b$, onde $n(t)$ é igual ao número de indivíduos vivos no tempo t (dado em horas desde o início da experiência) e a e b parâmetros que dependiam da droga ministrada.
Sabe-se que a família desapareceu (morreu seu último indivíduo) em t igual a 10 h.

Calcule:

i) o número de indivíduos dessa família 8 h após o início da experiência.

ii) quantos morreram entre $t = 5$ e $t = 6$.

Solução:

No instante inicial, isto é, quando $t = 0$, $n(0) = 200$ e quando $t = 10$, $n(10) = 0$.
Temos então:

$$n(0) = a \cdot 0^2 + b = 200 \Rightarrow b = 200$$

$$n(10) = a \cdot 10^2 + b = 0 \Rightarrow 100a + 200 = 0 \Rightarrow a = -2$$

Portanto, a função que determina a população depois de t horas será $n(t) = -2t^2 + 200$.

i) $n(8) = -2 \cdot 8^2 + 200 = -2 \cdot 64 + 200 = 72$ indivíduos

ii) O número de mortes entre $t = 5$ e $t = 6$ será a diferença entre $n(5)$ e $n(6)$:
$n(5) - n(6) = (-2 \cdot 5^2 + 200) - (-2 \cdot 6^2 + 200) = 72 - 50 = 22$

7.1.3 – Relações entre coeficientes e raízes do trinômio

Seja $t(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, temos:

$t(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, logo:

Soma: $x_1 + x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$

Soma das raízes

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Produto: $x_1 \cdot x_2 = \left(\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \dfrac{b^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \dfrac{b^2 - \Delta}{4a^2} =$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4 \cdot a \cdot c)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Produto das raízes

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

7.1.4 – Decomposição do trinômio num produto de dois fatores do 1º grau

Seja o trinômio $y = ax^2 + bx + c$. Colocando em evidência o coeficiente a, temos:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Como $\dfrac{b}{a} = -S = -(x_1 + x_2)$ e $\dfrac{c}{a} = P = x_1 x_2$, substituindo vem:

$$y = a\,[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2]$$
$$y = a\,[x^2 - x_1\,x - x_2\,x + x_1 x_2]$$
$$y = a\,[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)]$$

$$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Esta última expressão é a forma fatorada do trinômio em função de a e de suas raízes x_1 e x_2.

Exemplos:

i) $y = 4x^2 - 19x - 5$
Calculemos as raízes do trinômio: $4x^2 - 19x - 5 = 0$

$$x = \frac{19 \pm 21}{8} \qquad x_1 = -\frac{1}{4},\ x_2 = 5$$

Logo: $y = 4\left(x + \frac{1}{4}\right)(x - 5)$

ii) $y = 4x^2 - 4x + 1$

Raízes: $x = \frac{4 \pm 0}{8} \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

iii) Para simplificar a fração $y = \frac{x^2 - 8x - 33}{2x^2 + 5x - 3}$, decompomos o numerador e o denominador:

$x^2 - 8x - 33 = 0$	$2x^2 + 5x - 3 = 0$
$x = \frac{8 \pm 14}{2}$	$x = \frac{-5 \pm 7}{4}$
$x_1 = -3,\ x_2 = 11$	$x_1 = -3,\ x_2 = \frac{1}{2}$

Temos: $y = \frac{(x+3)(x-11)}{2(x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right)} \Rightarrow y = \frac{x - 11}{2x - 1}$ desde que $x \neq -3$ e $x \neq \frac{1}{2}$.

7.1.5 – Forma canônica do trinômio

Consideremos o trinômio fatorado: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Substituamos x_1 e x_2 pelos seus valores dados pela fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{S}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y = a\left[x - \left(\frac{S}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]\left[x - \left(\frac{S}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

$$y = a\left[\left(x - \frac{S}{2}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[\left(x - \frac{S}{2}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]$$

$$y = a\left[\left(x - \frac{S}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad \text{ou} \quad y = a(x - h)^2 + k$$

em que $S = -\frac{b}{a}$ e $\Delta = b^2 - 4ac$, ou $h = \frac{S}{2}$ e $k = -\frac{\Delta}{4a}$.

NOTA
A forma canônica é importante porque é a maneira de escrever a função como soma ou diferença de dois quadrados.

Exemplos:

Escrever sob a forma canônica os trinômios:

i) $y = 2x^2 + 3x + 9$

$S = -\dfrac{3}{2}$ e $\Delta = 9 - 72 = -63$, portanto:

$$y = 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{63}{16}\right] \Rightarrow y = 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{63}}{4}\right)^2\right]$$

ii) $y = 2x^2 - 6x + \dfrac{9}{2}$

$S = 3$ e $\Delta = 36 - 36 = 0$, portanto:

$$y = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{0}{16}\right],\text{ então } y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

iii) $y = 2x^2 + x - 1$

$S = \dfrac{1}{2}$ e $\Delta = 1 + 8 = 9$, portanto:

$$y = 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right] \Leftrightarrow y = 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right]$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Assinale as funções definidas em $\mathbb{R}$ que representam funções quadráticas.

(A) $f(x) = 3x^2$

(B) $f(x) = -x^2 + 3x - 1$

(C) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$

(D) $f(x) = x - 4$

(E) $f(x) = \sqrt{x} - 3x$

(F) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 4x + 3$

2 Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - 5x + 4$, determine:

a) $f(3)$;

b) $f(0)$;

c) x tal que $f(x) = 0$;

d) o elemento x do domínio que tem imagem y igual a -2;

e) a imagem de -1.

3 Calcule as raízes de cada função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ abaixo.

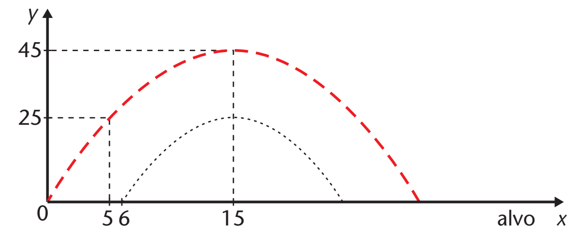
a) $f(x) = -6x^2 + 5x - 1$

b) $g(x) = 4x^2 - 3x$

c) $h(x) = 9x^2 - 6x + 1$

d) $i(x) = 2x^2 - x + 4$

4 Suponha que um projétil de ataque partiu da origem do sistema de coordenadas cartesianas descrevendo uma parábola, conforme a figura:



a) Sabendo-se que o vértice da parábola do projétil de ataque é dado pelas coordenadas (15, 45) e baseado nos dados da figura, calcule a equação da parábola do projétil de ataque.

b) Um projétil de defesa é lançado a partir das coordenadas (6, 0) e sua trajetória também descreve uma parábola segundo a equação $y = -0{,}25x^2 + 9x - 45$. Considerando-se que o projétil de defesa atingirá o projétil de ataque, calcule as coordenadas do ponto onde isso ocorrerá e diga se o alvo estará a salvo do ataque.

5 A diferença entre dois números inteiros positivos é 10. Ao multiplicar um pelo outro, um estudante cometeu um engano, tendo diminuído em 4 o algarismo das dezenas do produto. Para conferir seus cálculos, dividiu o resultado obtido pelo menor dos fatores, obtendo 39 como quociente e 22 como resto. Determine os dois números.

7.1.6 – Sinal do trinômio

Muitas vezes, em particular no caso das desigualdades, não há necessidade de se conhecer os valores assumidos pelo trinômio y e sim o sinal de y, ou seja, se o valor de y é positivo ou negativo quando se atribui a x valores que variam no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

NOTA
Observe que o sinal da função depende do sinal de a e de Δ.

Consideremos as três hipóteses clássicas:

$\Delta < 0$

Seja o trinômio escrito sob sua forma canônica:

$$y = a\left[\left(x - \frac{S}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Como Δ é negativo, podemos escrever:

$$y = a\left[\left(x - \frac{S}{2}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2}\right]$$

Observemos que a expressão entre colchetes é uma soma de duas quantidades positivas, logo, não se anula para valores reais de x.

Temos duas hipóteses a fazer:

1) Se $a > 0 \Rightarrow y > 0$.

2) Se $a < 0 \Rightarrow y < 0$.

Se $\Delta < 0$, o trinômio tem sempre o sinal de a.

$\Delta = 0$

Seja ainda o trinômio escrito sob a forma canônica:

$$y = a\left[\left(x - \frac{S}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Como Δ é nulo, temos:

$$y = a\left(x - \frac{S}{2}\right)^2$$

Observemos que a expressão entre parênteses se anula para $x = \frac{S}{2}$ e é positiva para $x \neq \frac{S}{2}$.

Teremos então:

1) se $x = \frac{S}{2} \Rightarrow y = 0$.

2) se $x \neq \frac{S}{2} \Rightarrow y$ tem o sinal de a.

Se $\Delta = 0$, o trinômio se anula para $x = \frac{S}{2}$ e tem o sinal de a para qualquer outro valor de x.

$\Delta > 0$

Consideremos o trinômio fatorado e admitamos que $x_1 < x_2$.
Temos:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

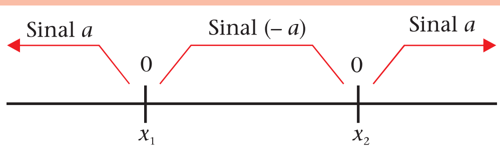
Seja o quadro:

		$-\infty$ $(x < x_1)$	x_1	$(x_1 < x < x_2)$	x_2	$(x > x_2)$ $+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$
y	se $a > 0$	$+$	0	$-$	0	$+$
	se $a < 0$	$-$	0	$+$	0	$-$

Podemos concluir que:

O trinômio terá o sinal de a para valores exteriores ao intervalo das raízes (isto é, para $x < x_1$ ou $x > x_2$) e o sinal contrário ao sinal de a para valores interiores ao intervalo das raízes (isto é, para $x_1 < x < x_2$).

Esquematicamente:



NOTA

Estamos considerando

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ e

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, isto é,

$x_1 < x_2$ quando $\Delta > 0$.

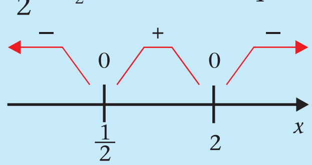
Exemplos:

Estudar os sinais dos trinômios:

i) $y = -2x^2 + x - 1$
$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$
Como $a = -2 < 0$, o trinômio será negativo para qualquer valor de x, pois terá sempre o sinal de a.

ii) $y = 3x^2 - 12x + 12$
$\Delta = 144 - 144 = 0$
Como $a = 3 > 0$ e $x_1 = x_2 = \dfrac{S}{2} = \dfrac{12}{6} = 2$, o trinômio é anulado para $x = 2$ e será positivo para qualquer $x \neq 2$.

iii) $y = -2x^2 + 5x - 2$
$\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$
Como $a = -2 < 0$, $x_1 = \dfrac{1}{2}$ e $x_2 = 2$, temos esquematicamente:



Ou seja, o trinômio será negativo para valores de $x < \dfrac{1}{2}$ ou $x > 2$ e positivo para $\dfrac{1}{2} < x < 2$.

7.2 – Desigualdades do 2º grau

A principal aplicação do estudo do sinal do trinômio do 2º grau é a resolução das desigualdades do 2º grau e daquelas de grau superior.

Observações importantes:

i) Quando se multiplicam ambos os membros de uma desigualdade por um fator positivo, a desigualdade não muda de sentido. Se o fator for negativo, ela muda de sentido.

ii) O quociente $\frac{P}{Q}$ tem o mesmo sinal que o produto PQ desde que $Q \neq 0$.

iii) Se uma desigualdade apresentar um fator que seja um trinômio do 2º grau com $\Delta < 0$, este fator pode ser suprimido. Com efeito:

A. Se o coeficiente do 1º termo for positivo, o trinômio não se anulará e terá o sinal desse coeficiente. Poderemos, então, dividir ambos os membros da desigualdade por esse trinômio que será positivo. O sentido da desigualdade não mudará.

B. Se o coeficiente do 1º termo for negativo, o trinômio será negativo. Poderemos dividir ambos os membros da desigualdade por esse trinômio, mudando o sentido da desigualdade.

NOTA
Lembre-se de trocar o sinal da desigualdade ao suprimir o trinômio onde $a < 0$ e $\Delta < 0$.

7.2.1 – Tipos de desigualdades do 2º grau

As desigualdades do 2º grau se reduzem a um dos tipos:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \textbf{ou} \quad ax^2 + bx + c < 0$$

Suporemos $a > 0$.

NOTA
Quando $a < 0$, multiplica-se a desigualdade por (-1), mudando o seu sentido.

Se $\Delta < 0$, qualquer valor de x satisfará a desigualdade $ax^2 + bx + c > 0$, não havendo valor de x que satisfaça a desigualdade $ax^2 + bx + c < 0$. Basta lembrar que o trinômio será sempre positivo.

Se $\Delta = 0$, qualquer valor de $x \neq \frac{S}{2}$ satisfará a desigualdade $ax^2 + bx + c > 0$, não havendo x que satisfaça a desigualdade $ax^2 + bx + c < 0$.

Se $\Delta > 0$, os valores exteriores ao intervalo das raízes satisfarão a desigualdade $ax^2 + bx + c > 0$, ou seja, $x < x_1$ ou $x > x_2$ (admitindo $x_1 < x_2$). A desigualdade $ax^2 + bx + c < 0$ será satisfeita para valores de x interiores ao intervalo das raízes, ou seja, $x_1 < x < x_2$.

Exemplos:

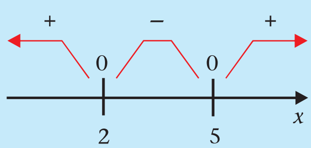
Resolver as desigualdades:

i) $x^2 + x + 1 > 0$
Calculemos $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. O trinômio do 1º membro terá sempre o sinal do coeficiente de x^2; logo, a inequação será satisfeita para todos os valores reais de x. Então $S = (-\infty, +\infty)$.

ii) $-2x^2 - x - 1 > 0$
Multipliquemos a desigualdade por (-1), temos: $2x^2 + x + 1 < 0$
Calculemos $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$.
Como o 1º membro será sempre positivo, a desigualdade não terá solução. Então: $S = \varnothing$

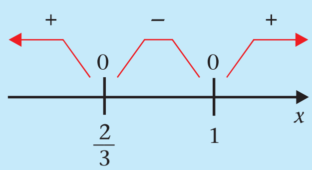
iii) $-9x^2 + 12x - 4 < 0$
Multiplicando a desigualdade por (-1), temos: $9x^2 - 12x + 4 > 0$
Calculemos $\Delta = 144 - 144 = 0$.
O 1º membro será positivo para qualquer $x \neq \frac{2}{3}$. Então: $S = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

iv) $7x - 10 > x^2$
$x^2 - 7x + 10 < 0$
$\Delta = 49 - 40 = 9 > 0$ Raízes: $x_1 = 2$; $x_2 = 5$



O 1º membro será negativo para valores interiores ao intervalo das raízes. A solução da desigualdade será, então, $2 < x < 5$, ou seja, $S = (2, 5)$.

v) $(x - 2)(3 - x) > 2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$
Efetuando e transpondo:
$3x - 6 - x^2 + 2x > 2(x^2 - 2)$
$3x^2 - 5x + 2 < 0$
$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$ Raízes: $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = 1$



O 1º membro da desigualdade será negativo para valores interiores às raízes, logo $\frac{2}{3} < x < 1$. Então: $S = \left(\frac{2}{3}, 1\right)$

Exercícios resolvidos:

1) Resolver a desigualdade:

$$(2x^2 + x + 6)(-3x^2 - 10x - 7)(x^2 - 2x + 1) > 0$$

Solução:

Chamemos:

$$y_1 = 2x^2 + x + 6 \qquad \Delta_1 = 1 - 48 = -47 < 0$$
$$y_2 = -3x^2 - 10x - 7 \qquad \Delta_2 = 100 - 84 = 16 > 0$$
$$y_3 = x^2 - 2x + 1 \qquad \Delta_3 = 4 - 4 = 0$$

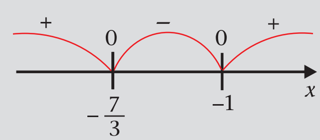
Podemos suprimir o trinômio y_1, pois ele é sempre positivo. Podemos também suprimir y_3, desde que $x \neq 1$. Assim, ficamos apenas com $y_2 < 0$, isto é:

$$-3x^2 - 10x - 7 < 0$$

Multiplicando a desigualdade por (–1), temos:

$$3x^2 + 10x + 7 > 0$$

As raízes de y_2 são $-\dfrac{7}{3}$ e -1.



Logo, a solução será: $S = \left(-\infty, -\dfrac{5}{2}\right) \cup (-1, +\infty) - \{1\}$

NOTA
Lembrar que só sabemos estudar o sinal da função, por isso o segundo membro das desigualdades deve ser zero. Comparar com o zero é estudar o sinal da função.

2) Resolver a desigualdade:

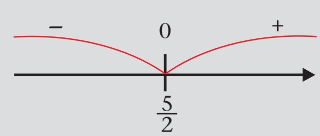
$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \geq 1$$

Solução:

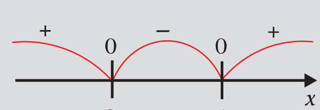
Temos $x \neq 3$ e $x \neq 4$. Efetuando e transpondo a unidade para o 1º membro:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2 - x^2 + 7x - 12}{x^2 - 7x + 12} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x - 10}{x^2 - 7x + 12} \geq 0$$

Chamemos $y_1 = 4x - 10 \Rightarrow$ raiz: $x = \dfrac{5}{2}$



e $y_2 = x^2 - 7x + 12 \Rightarrow$ raízes: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$



Formemos o quadro:

	$-\infty$	$\frac{5}{2}$		3		4	$+\infty$
y_1	$-$	0	$+$		$+$		$+$
y_2	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{y_1}{y_2}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

Como o quociente deve ser positivo ou nulo, temos:

$$\frac{5}{2} \leq x < 3 \text{ ou } x > 4 \qquad S = \left[\frac{5}{2}, 3\right[\cup \left]4, +\infty\right[$$

3) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ -x^2 + 10x > 0 \end{cases}$$

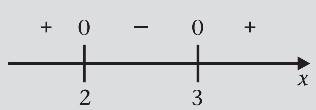
Solução:

Multiplicando a segunda desigualdade por (–1), vem:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 & \text{(I)} \\ x^2 - 10x < 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

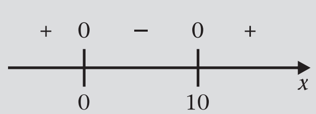
Calculemos separadamente as soluções das duas desigualdades:

(I) $x^2 - 5x + 6 > 0$



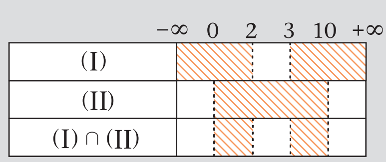
$x < 2$ ou $x > 3$

(II) $x^2 - 10x < 0$



$0 < x < 10$

Procuremos a solução comum às duas desigualdades. Formemos o quadro que apresente as duas soluções:



Solução do sistema: $0 < x < 2$ ou $3 < x < 10$ $\qquad S = (0, 2) \cup (3, 10)$

NOTA
Observe que isto não é um quadro de sinais, e sim um cálculo de intersecção de conjuntos.

4) Determine m no trinômio $(m-4)x^2+2(m+1)x+(m+3)$ de modo que:

i) tenha raízes positivas.

ii) tenha raízes de sinais contrários sendo a positiva de maior valor absoluto.

<u>Solução:</u>

i) Temos o sistema:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 & \text{raízes reais} & \text{(I)} \\ P > 0 & \text{raízes de mesmo sinal} & \text{(II)} \\ S > 0 & \text{raízes positivas} & \text{(III)} \end{cases}$$

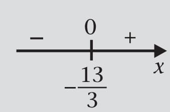
Procuremos a solução comum às três desigualdades. Formemos o quadro que reúne as três soluções:

(I) $\Delta \geq 0$

$$4(m+1)^2 - 4(m-4)(m+3) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$4m^2 + 8m + 4 - 4m^2 + 4m + 48 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$12m + 52 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{13}{3}$$



(II) P > 0

$$\frac{m+3}{m-4} > 0$$

	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$m+3$		−	0	+		+	
$m-4$		−		−	0	+	
$\frac{m+3}{m-4}$		+	0	−	∄	+	

$$m < -3 \quad \text{ou} \quad m > 4$$

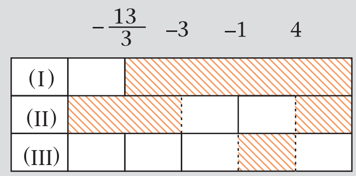
(III) S > 0

$$\frac{-2(m+1)}{m-4} > 0, \text{ dividindo por } (-2), \text{ temos: } \frac{m+1}{m-4} < 0$$

	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$m+1$		−	0	+		+	
$m-4$		−		−	0	+	
$\frac{m+1}{m-4}$		+	0	−	∄	+	

$$-1 < m < 4$$

Solução comum:



Não há valor de m que satisfaça as três condições.

ii) Devemos ter:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 & \text{raízes reais} & \text{(I)} \\ P < 0 & \text{raízes de sinais contrários} & \text{(II)} \\ S > 0 & \text{a de maior módulo positiva} & \text{(III)} \end{cases}$$

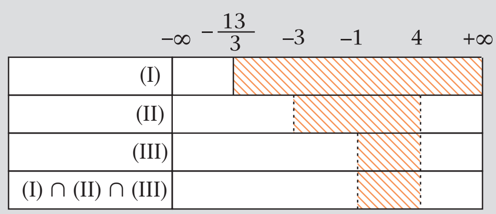
Calculemos cada desigualdade separadamente:

(I) $\Delta \geq 0$ $\quad$ $m \geq \dfrac{-13}{3}$ (ver item anterior)

(II) $P < 0$ $\quad$ $-3 < m < 4$ (ver item anterior)

(III) $S > 0$ $\quad$ $-1 < m < 4$ (ver item anterior)

Solução comum:



Resposta: $-1 < m < 4$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Resolva cada uma das desigualdades abaixo, considerando como conjunto universo o conjunto dos números reais.

a) $x^2 - 4x + 3 > 0$

b) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

c) $-x^2 - 3x \geq 0$

d) $x^2 + x + 10 > 0$

e) $-x^2 - x - 3 > 0$

f) $9x^2 + 6x + 1 > 0$

2 Escreva as inequações na forma $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$, conforme o caso, e resolva-as em $U = \mathbb{R}$.

a) $(x - 2)(x + 2) > 2(x - 1)^2 - 3$

b) $\dfrac{x-1}{3} < x^2 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{6}$

c) $\dfrac{-3x}{4} \geq -1 - \dfrac{x^2-1}{6}$

d) $(x + 2)^2 \geq 4(x^2 + 2)$

e) $x < \dfrac{x^2}{2} + 2$

f) $(x - 1)(x^2 + x + 1) < (x - 1)(x^2 + 4)$

3 Dê os valores de x tais que $3x - 2 \leq -3x$ e $x^2 - 1 \leq 1 - x^2$.

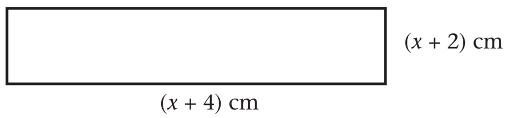
4 Dê o conjunto de valores que satisfaçam aos seguintes sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} 3(x-1) - 1 < 5(x+1) - 1 \\ x(x-6) + 6 > x^2 + x - 1 \end{cases}$

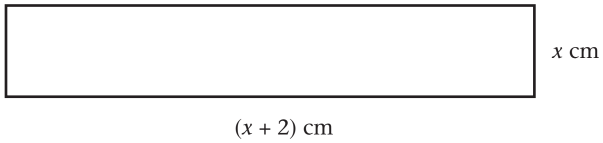
b) $\begin{cases} 2x^2 \geq x \\ x^2 - 2 \leq 0 \end{cases}$

5 Determine todos os números inteiros cujo quadrado diminuído do seu triplo seja menor ou igual a 4.

6 Sabendo-se que a área do retângulo abaixo é maior do que 15 cm², quais são os valores reais de x que atendem a esta condição?



7 Considere o retângulo abaixo. Determine os possíveis valores de x para os quais sua área varia entre 8 cm² e 24 cm².



8 Considere as seguintes afirmações sobre números reais positivos:

I. Se $x > 4$ e $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$.

II. Se $x > 4$ ou $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$.

III. Se $x^2 < 1$ e $y^2 > 2$, então $x^2 - 2y < 0$.

Então, destas é(são) verdadeira(s):

(A) apenas I.

(B) apenas I e II.

(C) apenas II e III.

(D) apenas I e III.

(E) todas.

7.3 – Máximos e mínimos do trinômio

Consideremos a função t: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pelo trinômio $t(x) = ax^2 + bx + c$. Procuremos as condições para que y esteja no conjunto das imagens da função t (Imt). Então:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx + (c - y) = 0$$

Essa equação do 2º grau tem raízes reais, logo, o seu discriminante Δ será maior ou igual a zero:

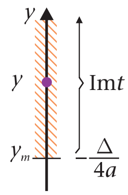
$$\begin{gathered} \Delta \geq 0 \\ b^2 - 4a(c - y) \geq 0 \\ b^2 - 4ac + 4ay \geq 0 \\ 4ay \geq -(b^2 - 4ac) \\ 4ay \geq -\Delta \end{gathered}$$

Façamos as duas hipóteses possíveis:

Se $\boxed{a > 0}$, então, $y \geq -\dfrac{\Delta}{4a}$. Portanto, $y_m = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é o menor valor possível para y.

Temos, então, o valor mínimo do trinômio:

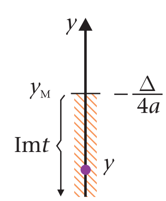
$$y_m = -\frac{\Delta}{4a}$$



Se $\boxed{a < 0}$, então, $y \leq \dfrac{\Delta}{4a}$. Neste caso, quando y assumir o valor $y_M = -\dfrac{\Delta}{4a}$, estará assumindo o seu maior valor.

Temos então o valor máximo do trinômio:

$$y_M = -\frac{\Delta}{4a}$$



Observemos que o máximo e o mínimo do trinômio ficam caracterizados pelo sinal de a.

> Se $a > 0$, o trinômio possui um mínimo.
> Se $a < 0$, o trinômio possui um máximo.

O valor de x, que leva ao máximo ou ao mínimo, é obtido com facilidade quando se faz no trinômio $y = -\dfrac{\Delta}{4a}$. Este valor de x chamaremos de **extremante** (maximante ou minimante, conforme o valor de a seja negativo ou positivo).

Para calcular a expressão do extremante, consideremos o caso em que $y = -\dfrac{\Delta}{4a}$. Então, $\Delta = 0$ e a equação $ax^2 + bx + (c - y) = 0$ terá raiz dupla, a saber, $x = -\dfrac{b}{2a}$.

NOTA
Como $y \in$ Imt existe x real tal que $t(x) = y$.

NOTA
$b^2 - 4ac = \Delta$ do trinômio

NOTA
Com a divisão por $a < 0$, a desigualdade $4ay \geq \Delta$ muda de sentido.

NOTA
Observe que as coordenadas do ponto extremo $h = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = -\dfrac{\Delta}{4a}$ são as mesmas que aparecem na forma canônica do trinômio: $y = a(x - h)^2 + k$.

NOTA
Observe que o valor extremante também poderia ser obtido resolvendo:
$ax^2 + bx + c = -\dfrac{\Delta}{4a}$

Assim, temos:

Se: $\boxed{a > 0}$ $\begin{cases} y_m = -\dfrac{\Delta}{4a} \\ x_m = -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$ ou Se: $\boxed{a < 0}$ $\begin{cases} y_M = -\dfrac{\Delta}{4a} \\ x_M = -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$

As coordenadas dos pontos extremos são: $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

Exemplos:

Calcular os valores máximos e mínimos dos trinômios:

i) $y = 2x^2 - 5x + 2$
Como $a = 2 > 0$, o trinômio tem um mínimo:

$$\left.\begin{array}{ll} y_m = -\dfrac{\Delta}{4a};\ y_m = -\dfrac{9}{8} & \text{(mínimo)} \\ x_m = -\dfrac{b}{2a};\ x_m = \dfrac{5}{4} & \text{(minimante)} \end{array}\right\} \rightarrow m = \left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{9}{8}\right)$$

ii) $y = -3x^2 + 5x + 2$
Como $a = -3 < 0$, o trinômio tem um máximo:

$$\left.\begin{array}{ll} y_M = -\dfrac{\Delta}{4a};\ y_M = \dfrac{49}{12} & \text{(máximo)} \\ x_M = -\dfrac{b}{2a};\ x_M = \dfrac{5}{6} & \text{(maximante)} \end{array}\right\} \rightarrow M = \left(\dfrac{5}{6}, \dfrac{49}{12}\right)$$

Exercícios resolvidos:

1) Determinar os coeficientes a, b e c no trinômio $y = ax^2 + bx + c$ para que ele se anule em $x = 8$ e passe por um mínimo igual a -12 para $x = 6$.

Solução:

Temos o sistema:

$$\begin{cases} 0 = 64a + 8b + c \\ -12 = -\dfrac{\Delta}{4a} \\ 6 = \dfrac{-b}{2a} \\ a > 0 \text{ (para que haja mínimo)} \end{cases}$$

NOTA
Observe que a forma $y = a(x - h)^2 + k$ é útil em muitos casos:
$y = a(x - h)^2 + k$
$y = a(x - 6)^2 - 12$
Como $t(8) = 0$,
$a(8 - 6)^2 - 12 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = 3$.
Logo: $y = 3(x - 6)^2 - 12$
ou $y = 3x^2 - 36x + 96$.

$$\begin{cases} 64a + 8b + c = 0 & \text{(I)} \\ b^2 - 4ac = 48a & \text{(II)} \\ b = -12a & \text{(III)} \\ a > 0 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Substituindo (III) em (II):

$144a^2 - 4ac = 48a \qquad (\div\ 4a \neq 0)$

$36a - c = 12 \Leftrightarrow c = 36a - 12$

Substituindo b e c em (I):

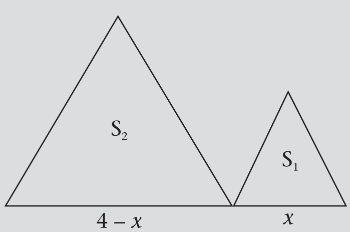
$64a - 96a + 36a - 12 = 0 \Leftrightarrow 4a = 12 \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow b = -36$ e $c = 96$

O trinômio será:

$y = 3x^2 - 36x + 96$

2) Dado um segmento de comprimento 4, dividi-lo em dois segmentos tais que, construindo-se sobre cada um deles um triângulo equilátero, a soma das áreas dos triângulos seja mínima.

Solução:



$$S = S_1 + S_2$$

$$S_1 = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{e} \quad S_2 = \frac{(4-x)^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{(4-x)^2\sqrt{3}}{4}$$

A função da qual se deseja o mínimo será:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + 16 - 8x + x^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - 4x + 8)$$

A função S tem a mesma variação que a função quadrática $f(x) = x^2 - 4x + 8$.

O mínimo se dará para $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$ e será $f(2) = 4 - 4 \cdot 2 + 8 = 4$.

A área mínima será, então, $S = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$.

3) Calcular os valores máximos e mínimos da função $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

Solução:

Temos: $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$. Eliminando o denominador vem:

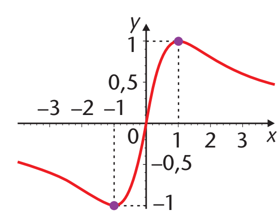
$$x^2y + y = 2x$$

NOTA

O domínio dessa função $S = \sqrt{\dfrac{3}{2}(x^2 - 4x + 8)}$ é o intervalo real $0 \leq x \leq 4$.

NOTA

$f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ é ímpar, logo, o seu gráfico é simétrico em relação à origem.



Tratemos essa igualdade como uma equação em x, com $x \in \mathbb{R}$.

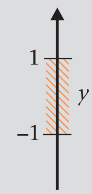
Como $x \in \mathbb{R}$, $x^2y - 2x + y = 0$ possui $\Delta \geq 0$, então:

$$4 - 4y^2 \geq 0 \ (\div 4)$$

$$y^2 \leq 1 \Rightarrow y^2 - 1 \leq 0$$

$$-1 \leq y \leq 1$$

$$y_M = 1 \qquad y_m = -1$$



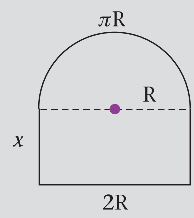
Para $y_M = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_M = 1 \Rightarrow M(1, 1)$

Para $y_m = -1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_m = -1 \Rightarrow M(-1, -1)$

A função terá mínimo igual a (–1) para $x = -1$ e máximo igual a 1 para $x = 1$.

4) Deseja-se construir uma janela com a forma de um retângulo encimado por um semicírculo. Sabendo-se que o perímetro da janela é k, determinar as dimensões da janela para que se tenha um máximo de ventilação.

Solução:



Temos: $\pi R + 2R + 2x = k$
O máximo de ventilação se dará para uma área máxima.
Calculemos então a expressão da área:

$$S = 2Rx + \frac{1}{2}\pi R^2$$

Tirando o valor de x em função de R, temos:

$$2x = k - \pi R - 2R$$

$$x = \frac{1}{2}(k - \pi R - 2R)$$

Substituindo na expressão da área:

$$S = 2R\frac{1}{2}(k - \pi R - 2R) + \frac{1}{2}\pi R^2$$

$$S = \frac{1}{2}(2kR - 2\pi R^2 - 4R^2 + \pi R^2)$$

$$S = \frac{1}{2}\left[-(\pi + 4)R^2 + 2kR\right]$$

O máximo de S se dará para o máximo do trinômio:

$$y = -(\pi + 4)R^2 + 2kR$$

Tiramos então o maximante:

$$R_M = -\frac{2k}{-2(\pi + 4)} = \frac{k}{\pi + 4}$$

A altura do retângulo será:

$$x = \frac{1}{2}\left[k - \frac{(\pi+2)k}{\pi+4}\right] \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\cdot k \cdot \left[\frac{(\pi+4-\pi-2)}{\pi+4}\right] \Leftrightarrow x = \frac{k}{\pi+4}$$

Logo, a condição para o máximo de ventilação é $x = R$.
A área máxima será:

$$S_M = \frac{1}{2}\left[-(\pi+4)\frac{k^2}{(\pi+4)^2} + 2k\cdot\frac{k}{\pi+4}\right] \Leftrightarrow S_M = \frac{1}{2}\left[\frac{k^2}{\pi+4}\right]$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Na função $f(x) = -x^2 + 5x - 1$, dado que x varia no intervalo fechado $[0, 6]$, determine o maior e o menor valor que $f(x)$ pode assumir.

2 A parábola de equação $f(x) = -2x^2 + bx + c$ passa pelo ponto $(1, 0)$ e seu vértice é o ponto de coordenadas $(3, v)$. Determine v.

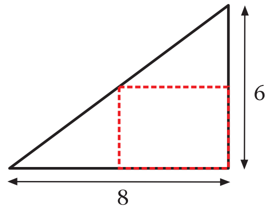
3 Entre todos os retângulos de perímetro 40 cm, determine o de área máxima.

4 Entre todos os números reais x e z tais que $2x + z = 8$, determine aqueles cujo produto é máximo.

5 Encontre dois números x e z de soma 6, cuja soma dos quadrados é mínima.

6 Determine o retângulo de área máxima localizado no primeiro quadrante, com dois lados nos eixos cartesianos e um vértice na reta $y = -4x + 5$.

7 É dada uma folha de cartolina como na figura abaixo. Cortando a folha na linha tracejada, resultará um retângulo. Determine esse retângulo, sabendo que a área é máxima.



8 Determine o retângulo de maior área contido num triângulo equilátero de lado 6 cm, estando a base do retângulo num lado do triângulo.

9 Num triângulo isósceles de base 6 cm e altura 4 cm está um retângulo. Determine o retângulo de área máxima, sabendo que a base do retângulo está sobre a base do triângulo.

10 Uma parede de tijolos será usada como um dos lados de um curral retangular. Para os outros lados iremos usar 400 metros de tela de arame, de modo a produzir área máxima. Qual é o quociente de um lado pelo outro?

11 Calcule o valor de p na função real $g(x) = -3x^2 + 2(p - 1)x + (p + 1)$ para que o valor máximo seja 2.

12 Determine o valor de p na função real $g(x) = px^2 + (p - 1)x + (p + 2)$ para que o valor máximo seja 2.

13 Encontre o valor de p na função $f(x) = 3x^2 - 2x + p$ para que o valor mínimo seja $\frac{5}{3}$.

14 Calcule o valor de p na função real $f(x) = (p - 1)x^2 + (p + 1)x - p$ para que o valor mínimo seja 1.

15 Calcule m de modo que a função $f(x) = mx^2 + 2x + 1$ tenha um valor mínimo igual a $\frac{1}{4}$.

16 Para qual valor de x a função $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$ tem seu valor mínimo?

17 a) Se $x + \frac{1}{x} = b$, calcule $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

b) Resolva a equação: $x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$.

18 Quando uma pizzaria cobra R$ 14,00 por pizza, 80 unidades são vendidas por dia. Quando o preço é R$ 12,00 por pizza, 90 unidades são vendidas.

a) Admitindo que a quantidade vendida (y) seja função do 1º grau do preço (x), qual o preço que deve ser cobrado para maximizar a receita diária?

b) Se a relação entre y e x fosse $y = -4x + 160$, e o custo de cada pizza R$ 8,00, qual o preço que deveria ser cobrado para maximizar o lucro?

19 Um fazendeiro decide cercar um pasto na forma de um retângulo à margem de um rio retilíneo. Como ele só tem 1 000 m de cerca e sabe que o gado não vai escapar pelo rio, resolve não erguer cerca ao longo da margem. Nessas circunstâncias, quais as dimensões do pasto de área máxima que ele pode cercar?

7.4 – Gráfico do trinômio

Consideremos o trinômio $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ definido em todo conjunto dos números reais.

i) A **curva representativa do trinômio** é simétrica em relação à reta $x = \dfrac{-b}{2a}$.

Com efeito, basta ver que y assume os mesmos valores quando se dão a x valores simétricos em relação a $\dfrac{-b}{2a}$. De fato, atribuindo a x os valores:

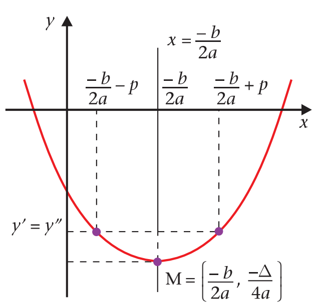
$$x' = \frac{-b}{2a} - p \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b}{2a} + p$$

obtemos para o trinômio:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$$x' = \frac{-b}{2a} - p \Rightarrow y' = a\left[\left(\frac{-b}{2a} - p + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(p^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

$$x'' = \frac{-b}{2a} + p \Rightarrow y'' = a\left[\left(\frac{-b}{2a} + p + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(p^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$



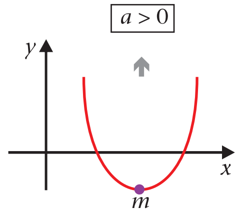
ii) **Máximos e mínimos**

Como vimos:

Se $a > 0$, o trinômio tem um mínimo de coordenadas:

$$m = \left(\frac{-b}{2a},\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

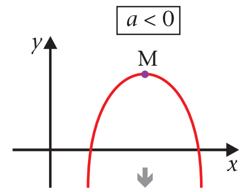
Neste caso, dizemos que o gráfico do trinômio tem **concavidade para cima**.



Se $a < 0$, o trinômio tem um máximo de coordenadas:

$$M = \left(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

Neste caso, dizemos que o gráfico do trinômio tem **concavidade para baixo**.



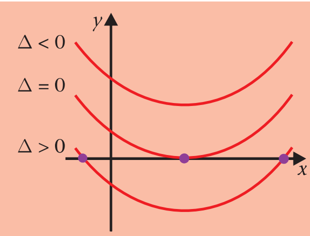
Note que o máximo ou o mínimo se situam sobre o eixo de simetria da curva, uma vez que têm abscissa $x = \frac{-b}{2a}$.

iii) **Intersecções com eixo O*x***
São pontos em que $y = 0$, sendo, portanto, pontos cujas abscissas são as raízes x_1 e x_2 da equação $ax^2 + bx + c = 0$. São eles $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$.

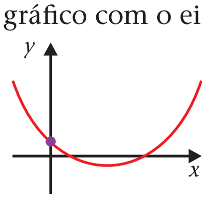
Se $\Delta < 0$, o trinômio não corta O*x*.

Se $\Delta = 0$, então $x_1 = x_2$ e o trinômio tangencia O*x*.

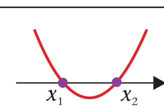
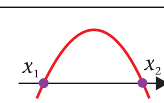
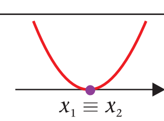
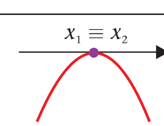
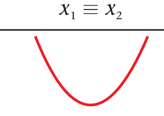
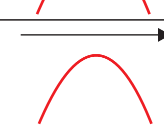
Se $\Delta > 0$, $x_1 \neq x_2$ e o trinômio corta O*x* em dois pontos.



iv) **Intersecção com o eixo O*y***
Fazendo $x = 0$, temos $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow y = c$, portanto, o ponto de coordenadas $(0, c)$ é a intersecção do gráfico com o eixo O*y*.



v) A curva obtida é uma **parábola**.

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

Para esboçar o gráfico do trinômio:

a) ver o sinal de a para determinar a concavidade;

b) determinar as coordenadas do vértice (x_v, y_v) para encontrar o eixo de simetria da parábola;

c) ver o sinal de Δ para determinar se o gráfico corta o eixo Ox;

d) marcar o ponto $(0, c)$ no eixo Oy;

e) traçar uma parábola.

NOTA
O passo c) é redundante, mas confirma os anteriores.

Exemplos:

Fazer os gráficos dos trinômios:

i) $y = 2x^2 - 5x + 2$

a) Concavidade: $a = 2 > 0$ para cima.

b) Mínimo: $m = \left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$

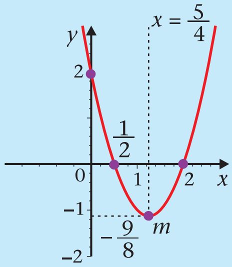
Eixo de simetria: $x = \frac{5}{4}$

c) $\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$

Raízes: $\frac{1}{2}$, 2

d) Intersecção com Oy: (0, 2)

e)



ii) $y = -3x^2 + 5x + 2$

a) Concavidade: $a = -3 < 0$ para baixo.

b) Máximo: $M = \left(\frac{5}{6}, \frac{49}{12}\right)$

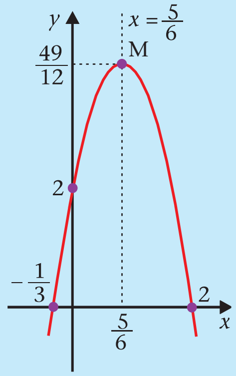
Eixo de simetria: $x = \frac{5}{6}$

c) $\Delta = 25 + 24 = 49$

Raízes: $-\frac{1}{3}$, 2

d) Intersecção com Oy: (0, 2)

e)



iii) $y = x^2 + 1$

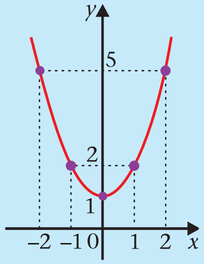
a) Concavidade: $a = 1 > 0$ para cima.

b) Mínimo: $m = (0, 1)$
Eixo de simetria: $x = 0$

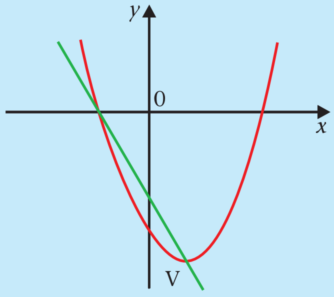
c) $\Delta = 0 - 4 = -4$; não há raízes no conjunto dos números reais

x	y	(x, y)
–2	5	(–2, 5)
2	5	(2, 5)
–1	2	(–1, 2)
1	2	(1, 2)
0	1	(0, 1)

d) Intersecção com Oy: (0, 1)



iv) A figura mostra os gráficos de: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = x^2 + bx + c$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g(x) = ax - 2$, com a, b, c números reais.



NOTA
Para ter noção melhor do gráfico, no caso de $\Delta < 0$, é conveniente dar a x valores simétricos em relação ao ponto $x = -\frac{b}{2a}$, que é de passagem do eixo de simetria do gráfico.

Sabendo que o ponto V é o vértice da parábola, $f(-1) = 0$ e a função f apresenta mínimo para $x = 1$, determine:

a) $a + b + c$;

b) $f(g(x))$.

Temos que: $\left.\begin{array}{l} f(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^2 + b(-1) + c = 0 \\ g(-1) = 0 \Rightarrow a(-1) - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} b - c = 1 \\ a = -2 \end{cases}$

$$x_m = -\frac{b}{2 \cdot 1} \Rightarrow 1 = -\frac{b}{2} \Rightarrow b = -2 \Rightarrow -2 - c = 1 \Rightarrow c = -3$$

Então $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e $g(x) = -2x - 2$

a) $a + b + c = -2 - 2 - 3 = -7$

b) $f(g(x)) = (g(x))^2 - 2g(x) - 3 = (-2x - 2)^2 - 2 \cdot (-2x - 2) - 3$

$f(g(x)) = 4x^2 + 8x + 4 + 4x + 4 - 3$

$f(g(x)) = 4x^2 + 12x + 5$

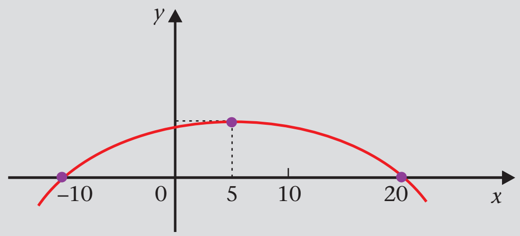
Exercícios resolvidos:

1) Um soldado entrincheirado lança uma granada ao nível do solo e sua trajetória obedece a equação $y = -\frac{1}{45}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{40}{9}$.

i) Qual o alcance do lançamento, isto é, a distância entre o ponto de lançamento e o ponto atingido pela granada no solo, que é horizontal? (Considere o solo o eixo Ox.)

ii) Qual a altura máxima atingida pela granada?

Solução:



i) O alcance é a distância entre as raízes da função:

$$-\frac{1}{45}x^2+\frac{2}{9}x+\frac{40}{9}=0\ \left[\cdot\ (-45)\right]$$

$x^2 - 10x - 200 = 0 \Rightarrow x = -10$ ou $x = 20$, logo, o alcance será $20 - (-10) = 30$.

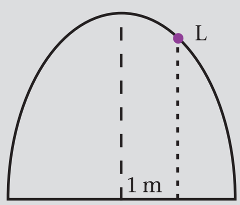
ii) A altura máxima será: $-\dfrac{\Delta}{4a}=\dfrac{\dfrac{4}{81}+\dfrac{4\cdot 40}{45\cdot 9}}{-\dfrac{4}{45}}=5$

Esta altura também poderia ser calculada por meio da semissoma das raízes.

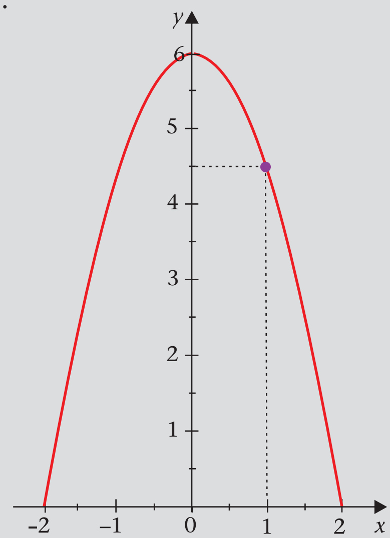
$$\frac{-b}{2a}=\frac{-10+20}{2}=5 \Rightarrow f\left(\frac{-b}{2a}\right)=f(5)=-\frac{25}{45}+\frac{10}{9}+\frac{40}{9}=5$$

NOTA
Observe que podemos colocar os eixos na posição que melhor nos convier.

2) O teto de um túnel parabólico, com eixo vertical, tem altura máxima igual a 6 m e largura da base igual a 4 m. Determine a altura do teto do túnel a 1 m do eixo de simetria, onde se encontra instalada uma luminária L.



Solução:
Coloquemos os eixos coordenados com a origem no ponto médio da base, eixo Ox, e a altura máxima sobre o eixo Oy.
Assim, a função se escreverá $y = a(x - h)^2 + k$, em que $h = 0$ e $k = 6$ e a função ficará $y = ax^2 + 6$.



Como para $x = 2$, $y = 0$, vem:

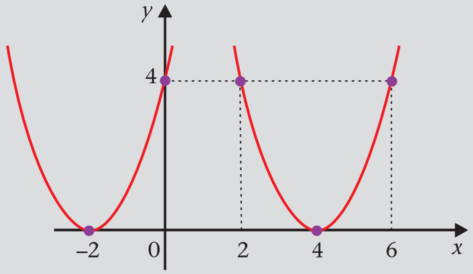
$$0 = a \cdot 2^2 + 6 \;\Rightarrow\; 4a + 6 = 0 \;\Rightarrow\; a = -\frac{3}{2}$$

Temos então a função $y = -\frac{3}{2}x^2 + 6$. Fazendo agora $x_L = 1$, obtemos a altura da luminária: $H = y_L = -\frac{3}{2} \cdot 1^2 + 6 = -\frac{3}{2} + 6 \;\Rightarrow\; H = 4{,}5$ m

3) Determinar o valor de m de modo que o gráfico da função $t: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid t(x) = x^2 + mx + (8 - m)$ seja tangente ao eixo Ox, e desenhar seus gráficos em um mesmo plano cartesiano.

Solução:

Devemos ter $\Delta = 0 \;\Rightarrow\; m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (8 - m) = 0$
$m^2 + 4m - 32 = 0 \;\Rightarrow\; m = -8$ ou $m = 4$
Para $m = -8 \Rightarrow t(x) = x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$
Para $m = 4 \Rightarrow t(x) = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

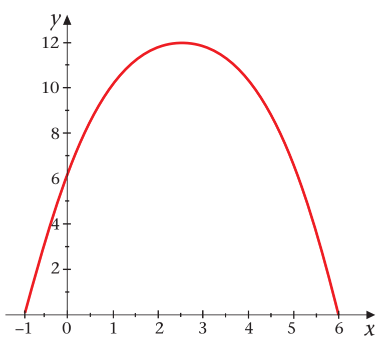
1 Quais devem ser os valores de p na função $f(x) = (p + 3)x^2 + 4x$ para que f seja quadrática?

2 Qual deve ser o valor de p na função quadrática $i(x) = (2p - 12)x^2 - 3x + 1$ para que seu gráfico seja uma parábola de concavidade:

a) voltada para baixo?

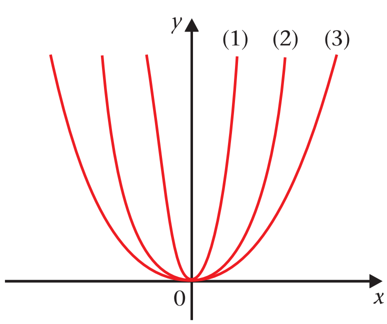
b) voltada para cima?

3 Abaixo está o esboço do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Determine os valores de x para os quais:



a) $f(x) > 6$ b) $f(x) = 0$ c) $f(x) < 0$

4 No gráfico abaixo estão representadas três parábolas (1, 2 e 3) de equações, respectivamente, $y = ax^2$, $y = bx^2$ e $y = cx^2$.



Podemos concluir que:

(A) $a < b < c < 0$

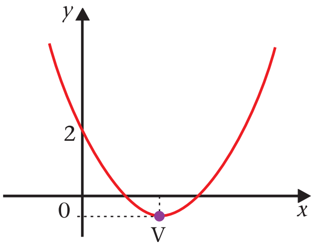
(B) $c < b < a < 0$

(C) $0 < a < b < c$

(D) $0 < c < b < a$

(E) nenhuma das alternativas anteriores é correta.

5 (Unirio-RJ)



Considere o gráfico acima que representa a função definida por $y = 2x^2 - 5x + c$. As coordenadas do vértice V da parábola são:

(A) $\left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$

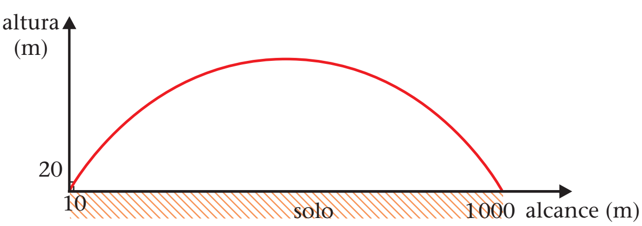
(B) $\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{5}\right)$

(C) $\left(-\frac{5}{4}, -2\right)$

(D) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$

(E) $(2, -1)$

6 (Unirio-RJ)



A figura acima representa a trajetória parabólica de um projétil disparado a partir do solo com uma certa inclinação. O valor aproximado da altura máxima, em metros, atingida pelo projétil é:

(A) 550

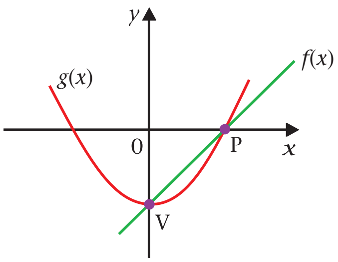
(B) 535

(C) 510

(D) 505

(E) 500

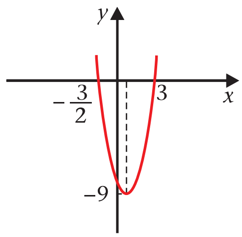
7 (Unificado-RJ)



Os pontos V e P são comuns às funções $f(x) = 2\sqrt{2}x - 8$ e $g(x) = ax^2 + bx + c$, representadas no gráfico acima. Sendo V o vértice da parábola de $g(x)$, o valor de $g(-8)$ é igual a:

(A) 0
(B) 8
(C) 16
(D) 32
(E) 56

8 (UMC-SP) Qual função representa o gráfico seguinte?



(A) $y = -2x^2 + 3x + 9$
(B) $y = x^2 - 3x - 9$
(C) $y = 2x^2 - 3x - 9$
(D) $y = x^2 + 3x - 9$
(E) Faltam dados para determinar o trinômio.

9 (UFF-RJ) A equação da parábola que passa pelo ponto (–2, 0) e tem vértice situado no ponto (1, 3) é:

(A) $y = -x^2 + 2x + 8$
(B) $y = -3x^2 + 6x + 24$
(C) $y = -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{8}{3}$
(D) $y = \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3} - \frac{8}{3}$
(E) $y = x^2 + 2x + 8$

10 (PUC-SP) Um projétil da origem O(0, 0), segundo um referencial dado, percorre uma trajetória parabólica que atinge sua altura máxima no ponto (2, 4). Escreva a equação dessa trajetória.

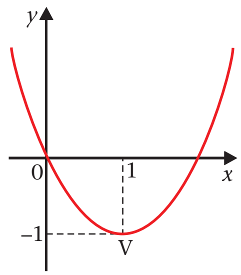
11 Observando a função $y = -3x^2 + 18x$, pode-se afirmar que:

(A) tem como coordenadas do vértice (0, 6);
(B) tem duas raízes iguais;
(C) tem uma raiz nula;
(D) é negativa para os valores de $x \in [1, 5]$;
(E) tem como conjunto imagem $\mathbb{R}$.

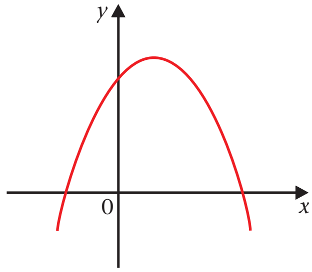
12 (Fuvest-SP) O gráfico de $f(x) = x^2 + bx + c$, onde b e c são constantes, passa pelos pontos (0, 0) e (1, 2). Então, $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ vale:

(A) $-\frac{2}{9}$
(B) $\frac{2}{9}$
(C) $-\frac{1}{4}$
(D) $\frac{1}{4}$
(E) 4

13 O gráfico da função quadrática representado abaixo é definido por $f(x) = x^2 + bx + c$. Com estas condições, determine os valores de b e c da função.

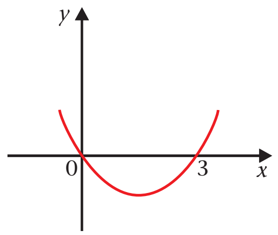


14 (FGV-RJ) A representação cartesiana da função $y = ax^2 + bx + c$ é a parábola abaixo. Tendo em vista esse gráfico, podemos afirmar que:



(A) $a < 0$; $\Delta < 0$ e $c > 0$
(B) $a > 0$; $\Delta > 0$ e $c > 0$
(C) $a < 0$; $\Delta > 0$ e $c > 0$
(D) $a < 0$; $\Delta > 0$ e $c < 0$

15 (Cesgranrio-RJ) O valor mínimo do polinômio $y = x^2 + bx + c$, cujo gráfico é mostrado na figura, é:



(A) –1

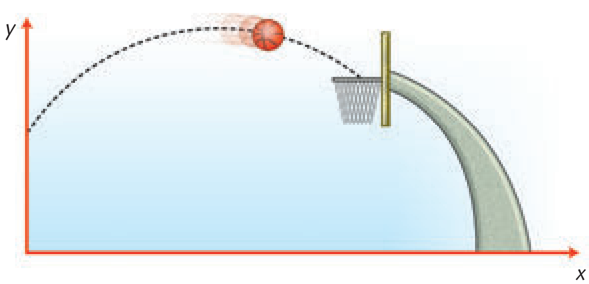
(B) –2

(C) $-\frac{9}{4}$

(D) $-\frac{9}{2}$

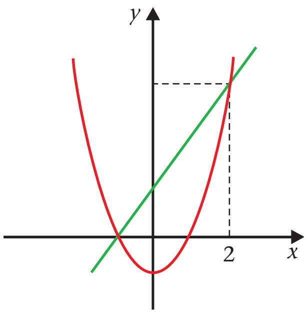
(E) $-\frac{3}{2}$

16 (UFRJ) Oscar arremessa uma bola de basquete cujo centro segue uma trajetória plana vertical de equação $y = -\frac{1}{7}x^2 + \frac{8}{7}x + 2$, na qual os valores de x e y são dados em metros.



Oscar acerta o arremesso, e o centro da bola passa pelo centro da cesta, que está a 3 m de altura.
Determine a distância do centro da cesta ao eixo y.

17 (Unirio-RJ) Observe a figura abaixo, onde estão representadas uma reta e a parábola $y = x^2 - 1$. Pergunta-se:



a) Quais os pontos de intersecção da reta com a parábola?

b) Qual a equação da reta?

7.5 – Trinômio que passa por três pontos

A condição para que um ponto pertença a um trinômio é que as suas coordenadas x e y o satisfaçam. Como o trinômio do 2º grau apresenta três coeficientes reais, três pontos são suficientes para determiná-lo.

Sejam os pontos (x_1, y_1); (x_2, y_2) e (x_3, y_3) e o trinômio $y = ax^2 + bx + c$.

Façamos os três pontos pertencerem ao trinômio. Temos o sistema:

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases}$$

A solução do sistema nos leva aos valores de a, b e c que devem ser substituídos em:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Exemplos:

i) Determinar o trinômio que passa pelos pontos $\left(\frac{1}{3}, 4\right)$; (1, 16); (–2, 25).
Seja o trinômio: $y = ax^2 + bx + c$
Para:

$$\begin{array}{ll} x = \frac{1}{3}, & y = 4 \\ x = 1, & y = 16 \\ x = -2, & y = 25 \end{array} \qquad \begin{cases} 4 = \frac{a}{9} + \frac{b}{3} + c & \text{(I)} \\ 16 = a + b + c & \text{(II)} \\ 25 = 4a - 2b + c & \text{(III)} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:
Façamos (II) – (I) e (III) – (II).

$$\begin{cases} 12 = \frac{8}{9}a + \frac{2b}{3} \\ 9 = 3a - 3b \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 108 = 8a + 6b & \text{(IV)} \\ 9 = 3a - 3b & \text{(V)} \end{cases}$$

Multiplicando a equação (V) por 2 e somando à equação (4), temos:

$$126 = 14a \qquad a = 9 \qquad b = 6 \qquad c = 1$$

O trinômio será: $y = 9x^2 + 6x + 1$.

ii) (UFF-RJ) O custo, em reais, de fabricação de x peças, em determinada fábrica é $C(x) = mx^2 + nx + p$.
Sabe-se que:

I) se nenhuma peça for produzida, o custo fixo é de 80 reais;

II) se forem produzidas 30 peças, o custo é de 50 reais;

III) se forem produzidas 50 peças, o custo é de 130 reais.

Determine:

a) o número de peças que se deve produzir para o custo ser o menor possível;

b) o custo mínimo.

Temos que o trinômio $C(x)$ passa pelos pontos (0, 80), (30, 50) e (50, 130), então:

$$\begin{matrix} C(0)=m\cdot 0^2+n\cdot 0+p=80 \\ C(30)=m\cdot 30^2+n\cdot 30+p=50 \\ C(50)=m\cdot 50^2+n\cdot 50+p=130 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} p=80 \\ 900m+30n+80=50 \\ 2500m+50n+80=130 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 90m+3n=-3 \\ 50m+n=1 \end{cases} \Rightarrow -60m=-6 \Rightarrow m=\frac{1}{10} \text{ e } n=-4$$

A função custo é dada por: $C(x)=\frac{1}{10}x^2-4x+80$

a) O custo mínimo se dará com: $x_m=\frac{-b}{2a}=-\frac{-4}{\frac{2}{10}}=20$

b) O custo mínimo será de: $C(x_m)=C(20)=\frac{1}{10}\cdot 20^2-4\cdot 20+80=40$ reais

Exercício resolvido:

Mostre que, quando m varia, a equação $y = mx^2 - 2mx + 1$ representa um feixe de parábolas que têm uma corda comum e calcule os extremos da corda.

Solução:

Como para cada valor de m temos uma parábola diferente, tomemos duas dessas parábolas e procuremos a sua intersecção. Façamos por exemplo:

$m = 1$ $\quad y = x^2 - 2x + 1 \quad$ (I)

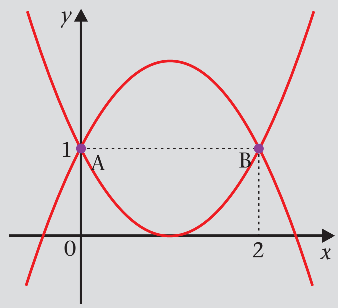
$m = -1$ $\quad y = -x^2 + 2x + 1 \quad$ (II)

A corda comum $\overline{AB}$ deverá ter como extremidades as intersecções dessas parábolas, logo, somando (I) e (II):

$2y = 2 \Rightarrow y = 1$

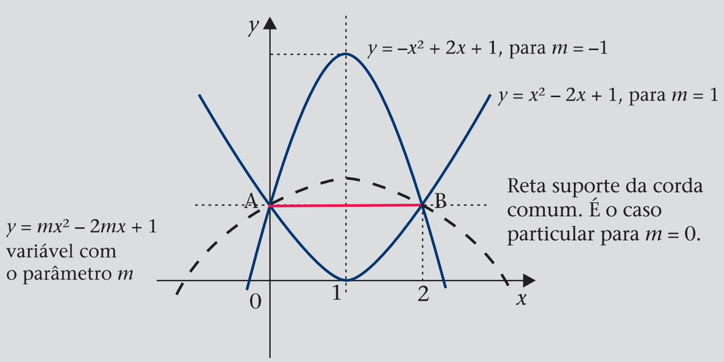
Levando $y = 1$ em (I), por exemplo, temos:

$1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ ou $x_2 = 2$

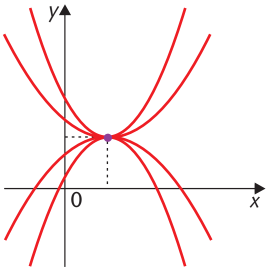


Temos então dois pontos, A(0, 1) e B(2, 1).
Basta agora verificar se para qualquer que seja m, os pontos encontrados satisfazem aos trinômios $y = mx^2 - 2mx + 1$.
Para $x = 0$, $y = 0 - 0 + 1 \Rightarrow y = 1$
Para $x = 2$, $y = 4m - 4m + 1 \Rightarrow y = 1$

Os dois pontos satisfazem a todos os trinômios da forma $y = mx^2 - 2mx + 1$, logo, eles têm uma corda comum cujas extremidades são os pontos A(0, 1) e B(2, 1).



NOTA
Observemos que o sistema formado pelas equações (I) e (II) poderá ter apenas uma solução. Neste caso, o feixe de parábolas passará por um ponto fixo, apenas.



Se o sistema formado por (I) e (II) não tiver solução no conjunto dos números reais, as parábolas não passarão por pontos fixos.

7.6 – Propriedade característica da função quadrática

Consideremos a função quadrática:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax^2 + bx + c, \ (a \neq 0)$$

Quando se atribuem a x os valores da sucessão (0, 1, 2, 3, ...), obtém-se para $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} y_0 &= f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c \\ y_1 &= f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c \\ y_2 &= f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c \\ y_3 &= f(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 9a + 3b + c \\ &\vdots \end{aligned}$$

As primeiras diferenças entre dois termos consecutivos são: $\Delta_1 = y_1 - y_0 = a + b$; $\Delta_2 = y_2 - y_1 = 3a + b$; $\Delta_3 = y_3 - y_2 = 5a + b$; ... que formam uma sucessão na qual as segundas diferenças, $\Delta_2 - \Delta_1$; $\Delta_3 - \Delta_2$; ... são constantes e diferentes de zero.

$$\Delta_2 - \Delta_1 = 2a; \ \Delta_3 - \Delta_2 = 2a; \ ... \ (a \neq 0)$$

Esta é a propriedade característica da função quadrática.

NOTA
Não faremos aqui a prova da suficiência nem da necessidade da condição das segundas diferenças serem constantes. Estas condições serão estudadas no capítulo "Progressões aritméticas" do volume II desta coleção.

A condição necessária e suficiente para que uma função seja quadrática é que as segundas diferenças entre os termos consecutivos da sucessão sejam constantes e diferentes de zero.

Exemplos:

i) Seja a função quadrática em que $f(x) = 10x - 2x^2$.
Atribuindo-se a x os valores da sequência (0, 1, 2, 3, 4, 5, ...), obtém-se a sequência:

$$\begin{array}{ccccccccccc} (0 & , & 8 & , & 12 & , & 12 & , & 8 & , & 0, \ldots) \\ & 8 & & 4 & & 0 & & -4 & & -8 & \cdots \end{array}$$

Cujas primeiras diferenças foram a sequência:

$$\begin{array}{ccccccccc} (8 & , & 4 & , & 0 & , & -4 & , & -8, \ldots) \\ & -4 & & -4 & & -4 & & -4 & \cdots \end{array}$$

As segundas diferenças formarão a sucessão constante (–4, –4, –4, ...) em que $-4 = 2a$, pois $f(x) = -2x^2 + 10x$ com $a = -2$.

ii) Escrevem-se os números ímpares numa disposição triangular como a seguir.

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
3 & 5 & & & \\
7 & 9 & 11 & & \\
13 & 15 & 17 & 19 & \\
21 & 23 & 25 & 27 & 29 \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

Qual o primeiro número da n-ésima linha?
A sequência de primeiros números é:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(1 & , & 3 & , & 7 & , & 13 & , & 21, \ldots) \\
 & 2 & & 4 & & 6 & & 8 & \ldots \\
 & & 2 & & 2 & & 2 & \ldots &
\end{array}$$

NOTA
É esta propriedade que permite a modelagem matemática dos fenômenos em que as segundas diferenças são constantes e diferentes de zero.

Fazendo as segundas diferenças, verificamos serem constantes e iguais a 2, então, o termo geral é $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Sabemos que $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ e $f(3) = 7$, logo, resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} a+b+c=1 & \text{(I)} \\ 4a+2b+c=3 & \text{(II)} \\ 9a+3b+c=7 & \text{(III)} \end{cases} \qquad \text{(II)} - \text{(I) e (III)} - \text{(II) dão:} \quad \begin{cases} 3a+b=2 \\ 5a+b=4 \end{cases}$$

NOTA
O 1º número da 1ª linha é $f(1) = 1$, o 1º número da 2ª linha é $f(2) = 3$ e o 1º número da 3ª linha é $f(3) = 7$ etc.

Subtraindo membro a membro essas duas últimas equações, temos: $2a = 2 \Rightarrow a = 1$, $b = -1$ e $c = 1$.
A função que determina os primeiros termos é f tal que $f(x) = x^2 - x + 1$.
Para verificar, basta calcular por meio dessa fórmula, por exemplo, o primeiro elemento da 5ª linha $f(5) = 5^2 - 5 + 1 = 25 - 5 + 1 = 21$.

iii) Um fabricante de ovos de Páscoa resolveu estocar ovos durante dois meses (60 dias). Fabricou no primeiro dia 20 ovos e a cada dia fabricava 5 ovos a mais que no dia anterior. Quantos ovos estocou ao final desse período?
Façamos a sucessão de ovos estocados:

dias (n)	1	2	3	4	5 ...
nº de ovos	20	25	35	50	70 ...
1as diferenças	5	10	15	20	...
2as diferenças	5	5	5	5	...

Temos: $n(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} n(1)=20 \\ n(2)=25 \\ n(3)=35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=20 \\ 4a+2b+c=25 \\ 9a+3b+c=35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+b=5 \\ 5a+b=10 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{5}{2}$$

$$a=\frac{5}{2} \Rightarrow 3a+b=5 \Rightarrow b=-\frac{5}{2} \Rightarrow a+b+c=20 \Rightarrow c=20$$

$$n(60)=\frac{5}{2}\cdot 60^2-\frac{5}{2}\cdot 60+20=9\,000-150+20=8\,870 \text{ ovos}$$

Exercícios resolvidos:

1) O Sr. Atento é muito observador. Ao parar diante de uma vitrine de uma empresa de turismo onde havia dois relógios, verificou que:

i) os dois relógios marcavam meio-dia;

ii) um dos relógios estava certo e o outro com um defeito curioso.

Quando o relógio certo marcou 12h01min o defeituoso marcou 12h01min. Quando o certo marcou 12h02min o defeituoso marcou 12h03min. Quando o certo marcou 12h03min o defeituoso marcou 12h06min, e assim sucessivamente, isto é, quando o certo avançava 1 minuto o defeituoso avançava 1 minuto a mais que no minuto anterior.

certo	12:00	12:01	12:02	12:03	12:04	12:05
defeituoso	12:00	12:01	12:03	12:06	12:10	12:15

Que horas marcou o defeituoso quando o certo marcou 12h30min?

Solução:

Considerar a sequência dos minutos:

certo	00	01	02	03	04	05	...
defeituoso	00	01	03	06	10	15	...
1as diferenças	01	02	03	04	05	...	
2as diferenças	01	01	01	01	01	...	

A sequência dos minutos no relógio defeituoso obedece, portanto, a uma função quadrática.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ e $f(0) = 0$; $f(1) = 1$ e $f(2) = 3$

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \\ a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 1 \\ 4a + 2b = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} = b$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$f(30) = \frac{1}{2}30^2 + \frac{1}{2}30 = 450 + 15 = 465 \text{ minutos } = 7\text{h}45\text{min}$$

O relógio defeituoso marcou 19h45min.

2) Quando o preço de entrada para uma peça teatral é R$ 20,00, a frequência é de 300 espectadores. O gerente do teatro constata que, para cada redução no preço de R$ 1,00, o número de espectadores aumenta em 50.

i) Qual deve ser o preço da entrada para se obter a receita máxima?

ii) Qual é esta receita?

iii) Quantos serão os espectadores?

Solução:

preço	20	19	18	17	...
número de espectadores	300	350	400	450	...
receita	6 000	6 650	7 200	7 650	...

A sequência de receitas é tal que:

receita	6 000	6 650	7 200	7 650	...
1as diferenças	650	550	450	350	...
2as diferenças	–100	–100	–100	–100	...

As receitas têm as segundas diferenças constantes, logo, a receita R(x) é um trinômio do 2º grau do preço.

$R(x) = ax^2 + bx + c$

$x = 20 \Rightarrow 400a + 20b + c = 6\,000$ (I)

$x = 19 \Rightarrow 361a + 19b + c = 6\,650$ (II)

$x = 18 \Rightarrow 324a + 18b + c = 7\,200$ (III)

Resolvendo o sistema, temos:
Fazendo (I) – (II) e (II) – (III) vem:

$$\begin{cases} 39a + b = -650 \\ 37a + b = -550 \end{cases} \Rightarrow 2a = -100 \Rightarrow \begin{array}{l} a = -50 \\ b = 1\,300 \\ c = 0 \end{array}$$

A função que determina a receita será: R(x) = $-50x^2 + 1\,300x$

a) O máximo se dará para $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1300}{-100} = 13$ reais.

b) A receita máxima será $R(x) = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{1690\,000}{-200} = 8\,450.$

c) O número de espectadores será $\dfrac{R(x)}{x} = 650.$

Esta questão pode ser também resolvida da seguinte maneira:
Suponhamos n reduções de R\$ 1,00. Se para cada redução de R\$ 1,00, aumentam 50 espectadores, para n reduções haverá um aumento de $50n$ espectadores, logo, a receita será o produto de preço $(20 - n)$ pela quantidade de espectadores $(300 + 50n)$. Temos, então, a função receita:

$$R(n) = (20 - n)\,(300 + 50n)$$
$$R(n) = -50n^2 + 700n + 6\,000$$

Que terá um máximo para:

$$n = -\frac{b}{2a} = -\frac{700}{-100} = 7 \text{ reduções}$$

$$R(7) = -50 \cdot 49 + 700 \cdot 7 + 6\,000 = 8\,450$$

Como o preço inicial era R\$ 20,00 e houve 7 reduções de R\$ 1,00, o preço do ingresso será, portanto, 20 – 7 = 13 reais.

O número de espectadores será $\dfrac{8\,450}{13} = 650.$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Determine a lei da função quadrática f, sabendo que $f(2) = -8$; $f(0) = -8$ e $f(-1) = -5$.

2 Calcule b e c, sabendo que a parábola $y = x^2 + bx + c$ passa pelos pontos (1, 1) e (2, 6).

3 Determine uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, tal que $f(0) = 2$; $f(1) = 6$ e $f(-1) = 0$.

4 Uma **função cúbica** é uma função da forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ com $a \neq 0$. Encontre uma função cúbica cujo gráfico passa pelos pontos (–1, 1), (0, 0), (1, 1) e (2, 0) e encontre suas raízes.

5 Um computador gera uma sequência de números da seguinte forma:

- passo 0: o primeiro número da sequência é 41;
- passo 1: o computador adiciona 2 ao número anterior, obtendo 43;
- passo 2: o computador adiciona 4 à soma anterior, obtendo 47;
- passo 3: o computador adiciona 6 à soma anterior, obtendo 53;
- e assim por diante.

Em outras palavras, no passo n, o computador adiciona $2n$ à soma anterior.

a) Encontre os próximos 3 números da sequência, obtidos após os passos 4, 5 e 6.

b) Encontre uma fórmula para a soma obtida após o passo n.

c) Mostre que o número obtido após o passo 40 **não** é primo.

APÊNDICE

Posição de um número em relação às raízes do trinômio

Seja o trinômio $t(x) = ax^2 + bx + c$ e um número real k. Consideremos o valor numérico do trinômio para $x = k$:

$$t(k) = ak^2 + bk + c$$

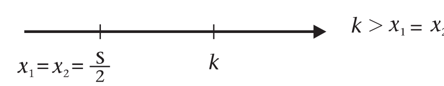
Se $t(k) = 0$, k será raiz do trinômio.

Para que seja possível comparar o número real k às raízes do trinômio, é preciso que ele tenha raízes reais, logo, $\Delta \geq 0$.

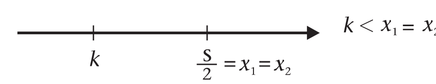
Caso 1: $\Delta = 0$

Nesse caso, o trinômio terá raízes reais e iguais, e bastará comparar o número k à raiz dupla:

Se $k > \frac{S}{2}$, k estará à direita das raízes.



Se $k < \frac{S}{2}$, k estará à esquerda das raízes.



Caso 2: $\Delta > 0$

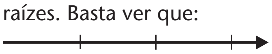
O trinômio terá raízes reais e desiguais, digamos, $x_1 < x_2$. Temos dois casos a considerar:

A) k está fora do intervalo das raízes:

Como $k < x_1$ ou $k > x_2$, o valor numérico do trinômio para $x = k$ terá o sinal de a, isto é:

$$(k < x_1 \text{ ou } k > x_2) \Leftrightarrow a \text{ e } t(k) \text{ têm o mesmo sinal} \Leftrightarrow a \cdot t(k) > 0$$

NOTA
O número m é o ponto médio do intervalo das raízes. Basta ver que:



Se m é ponto médio, então:

$m - x_1 = x_2 - m \Rightarrow$

$\Rightarrow 2m = x_1 + x_2 \Rightarrow$

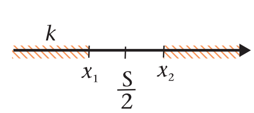
$\Rightarrow m = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow m = \frac{S}{2}$

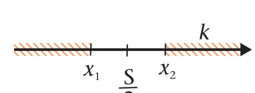
Observemos que a desigualdade em questão não define se $k < x_1$ ou $k > x_2$. Para que possamos definir a posição do número k, basta compará-lo com a média aritmética (m) das raízes, isto é, o valor $\frac{S}{2}$.

Se $k > \frac{S}{2}$, ele será maior que a maior das raízes e se $k < \frac{S}{2}$, ele será menor que a menor das raízes.

$$\boxed{k < \frac{S}{2} \Rightarrow k < x_1}$$



$$\boxed{k > \frac{S}{2} \Rightarrow k > x_2}$$



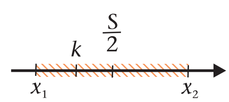
B) k é interior ao intervalo das raízes: 

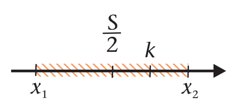
Nesse caso o valor numérico do trinômio para $x = k$ terá o sinal contrário ao sinal de a, isto é:

$$(x_1 < k < x_2) \Leftrightarrow a \text{ e } t(k) \text{ têm sinais contrários} \Leftrightarrow a \cdot t(k) < 0$$

Comparando ainda o valor k com a média aritmética das raízes $\frac{S}{2}$, podemos concluir de qual raiz o valor k é mais próximo.

Se $k > \frac{S}{2}$, ele estará mais próximo da maior das raízes e se $k < \frac{S}{2}$, ele estará mais próximo da menor das raízes.

$\boxed{x_1 < k < \frac{S}{2}}$ 

$\boxed{\frac{S}{2} < k < x_2}$ 

Exemplos:

Comparar o número 1 às raízes dos trinômios:

i) $y = x^2 + x + 1$

ii) $y = x^2 - 4x + 4$

iii) $y = 2x^2 - 5x + 2$

iv) $y = -3x^2 + 5x + 3$

v) $y = 2x^2 + 10x + 12$

Chamemos de $t(x)$ estes trinômios.

i) $\Delta < 0$, então não há critério de comparabilidade, pois não há raízes reais.

ii) $\Delta = 16 - 16 = 0$, então a raiz dupla é $\frac{S}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Portanto, o número 1 é menor que a raiz dupla.

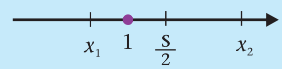
NOTA
Esse método é útil por dispensar o cálculo das raízes.

iii) $\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$

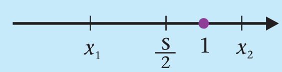
$$a = 2 \text{ e } t(1) = 2 - 5 + 2 = -1$$

Como $a \cdot t(1) = -2 < 0$, então o número 1 é interior ao intervalo das raízes.

Por outro lado, $\frac{S}{2} = \frac{5}{4}$; $1 < \frac{S}{2}$, então o número 1 está mais próximo da menor das raízes.



iv) $\Delta = 25 + 36 = 61$
$a = -3$ e $t(1) = -3 + 5 + 3 = 5$
Como $a \cdot t(1) < 0$, 1 é interior ao intervalo das raízes.
Por outro lado, $\frac{S}{2} = \frac{5}{6}$; $1 > \frac{S}{2}$, portanto, 1 está mais próximo da maior das raízes.

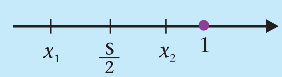


v) $\Delta = 100 - 96 = 4$

$$a = 2 \text{ e } t(1) = 24$$

$a \cdot t(1) = 48 > 0 \Rightarrow$ 1 é exterior ao intervalo das raízes

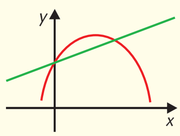
$\frac{S}{2} = -1$; $1 > \frac{S}{2} \Rightarrow$ 1 é maior que a maior das raízes



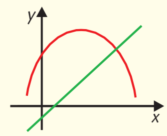
EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (UFF-RJ) Considere m, n e p números reais e as funções reais f e g de variável real, definidas por:
$f(x) = mx^2 + nx + p$ e $g(x) = mx + p$. A alternativa que melhor representa os gráficos de f e g é:

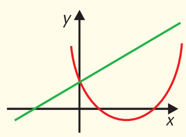
(A)



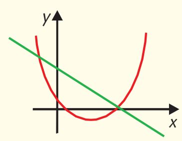
(D)



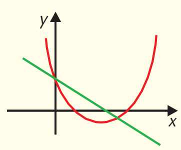
(B)



(E)



(C)



2 (Unificado-RJ) O ponto de maior ordenada, pertencente ao gráfico da função real definida por:
$f(x) = (2x - 1)(3 - x)$, é o par ordenado (a, b). Então, $a - b$ é igual a:

(A) $\frac{-39}{8}$

(B) $\frac{-11}{8}$

(C) $\frac{3}{8}$

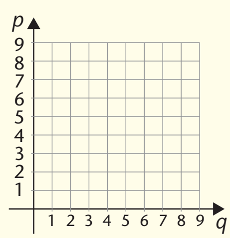
(D) $\frac{11}{8}$

(E) $\frac{39}{8}$

3 (UFF-RJ) A relação entre o preço p de determinado produto e a quantidade q disponível no mercado obedece à seguinte lei: $5q = p^2 + 2p - 3$, sendo p e q quantidades positivas e $q \in [1, 9]$.

a) Determine uma expressão que defina p em função de q.

b) Numa figura como a que está abaixo, faça um esboço da parte do gráfico de p em função de q que está contida na região quadriculada.



4 (Fuvest-SP) O valor, em reais, de uma pedra semipreciosa é sempre numericamente igual ao quadrado de sua massa, em gramas. Infelizmente uma dessas pedras, de 8 gramas, caiu e se partiu em dois pedaços. O prejuízo foi o maior possível. Em relação ao valor original, o prejuízo foi de:

(A) 92%

(B) 80%

(C) 50%

(D) 20%

(E) 18%

5 (Uece) Se o conjunto imagem da função
$f(x) = 3x^2 + 4x + p$ é o intervalo $[0, +\infty)$, então p é igual a:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{4}{3}$

6 (IBMEC-RJ) Uma revendedora de carros novos tem um lucro de R$ 1.800,00 na venda de cada unidade do modelo α, se for vendido até o máximo de 20 unidades por mês. A partir daí, o lucro decresce R$ 50,00 por unidade que ultrapasse 20 veículos.
Assim, podemos apresentar:

número de unidades que ultrapasse $20 = x$	número total de unidades $= 20 + x$

O número de unidades que deve ser vendido, por mês, para que o lucro dessa revendedora, na venda desse modelo α, seja máximo é:

(A) 24

(B) 26

(C) 28

(D) 36

7 (Cescem-SP) A expressão $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac > 0$ e $a < 0$, é estritamente positiva se x for:

(A) positivo.

(B) não nulo.

(C) igual às raízes.

(D) exterior às raízes.

(E) interior às raízes.

8 (Ufes) A imagem da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4 - x^2$ é o conjunto:

(A) $\operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 4\}$

(B) $\operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 < y < 4\}$

(C) $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

(D) $\operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$

(E) n. d. a.

9 (PUC-RJ) Um balão está no solo a 10 m de um homem. O homem começa a andar em direção ao balão com velocidade de 2 m/s no exato instante em que o balão começa a subir com velocidade de 1 m/s. A menor distância entre o homem e o balão será, em metros, de:

(A) $\sqrt{10}$ (D) $\sqrt{18}$

(B) $\sqrt{15}$ (E) $\sqrt{20}$

(C) $\sqrt{12}$

10 O domínio de definição da função $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ com valores reais é um dos conjuntos abaixo. Assinale-o.

(A) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$

(B) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$

(C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1$ ou $x \geq 3\}$

(D) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$

(E) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1$ ou $x \geq 1\}$

11 (Cesgranrio-RJ) Os valores do parâmetro p, para os quais a equação $x^2 + x + (p^2 - 7p) = 0$, tem uma raiz nula, são:

(A) 2 e 5 (D) 0 e 7

(B) –5 e –2 (E) –7 e 3

(C) 3 e 4

12 (PUC-SP) Se uma das raízes reais da equação $2x^2 + kx - 2 = 0$ é $\frac{1}{2}$, então, a outra raiz é:

(A) –4 (D) 2

(B) –2 (E) 4

(C) –1

13 (UFRJ) Um avião tem combustível para voar durante 4 horas. Na presença de um vento com velocidade v km/h na direção e sentido do movimento, a velocidade do avião é de $(300 + v)$ km/h. Se o avião se desloca em sentido contrário ao do vento, sua velocidade é de $(300 - v)$ km/h.
Suponha que o avião se afaste a uma distância d do aeroporto e retome ao ponto de partida, consumindo todo o combustível, e que durante todo o trajeto a velocidade do vento é constante e tem a mesma direção que a do movimento do avião.

a) Determine d como função de v.

b) Determine para que valor de v a distância d é máxima.

14 (UFPA) A parábola de equação $y = x^2 - 5x - 14$ é simétrica em relação à reta:

(A) $y = x$ (D) $x = \frac{5}{2}$

(B) $x = -2$ (E) $y = -x$

(C) $x = 7$

15 (Ufes) O vértice da parábola de equação $y = 2x^2 - 4x + t$ será um ponto do eixo das abscissas se o valor de t for igual a:

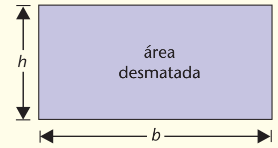
(A) 2 (D) –2

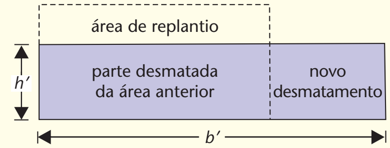
(B) 1 (E) –3

(C) –1

16 (UFF-RJ) Determine o domínio da função real de variável real f, definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{\sqrt[4]{x - 1}}$.

17 (Uerj) No interior de uma floresta, foi encontrada uma área em forma de retângulo, de 2 km de largura por 5 km de comprimento, completamente desmatada. Os ecologistas começaram imediatamente o replantio, com o intento de restaurar toda a área em 5 anos. Ao mesmo tempo, madeireiras clandestinas continuavam o desmatamento, de modo que, a cada ano, a área retangular desmatada era transformada em outra área também retangular. Veja as figuras:





A largura (h) diminuía com o replantio e o comprimento (b) aumentava devido aos novos desmatamentos. Admita que essas modificações foram observadas e representadas através das funções: $h(t) = -\frac{2}{5}t + 2$ e $b(t) = 5t + 5$ (t = tempo em anos; h = largura em km e b = comprimento em km).

a) Determine a expressão da área A do retângulo desmatado, em função do tempo t $(0 \leq t \leq 5)$ e represente A(t) no plano cartesiano.

b) Calcule a área máxima desmatada e o tempo gasto para este desmatamento, após o início do replantio.

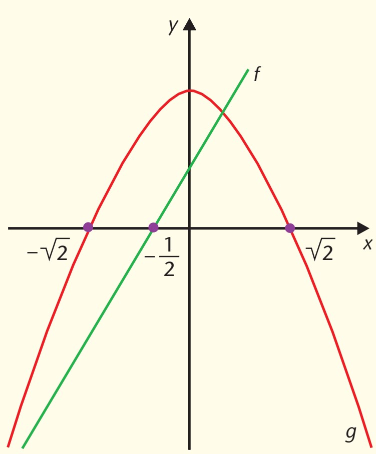
18 (Unificado-RJ) Uma loja está fazendo uma promoção na venda de balas: "Compre x balas e ganhe x% de desconto". A promoção é válida para compras de até 60 balas, caso em que é concedido o desconto máximo de 60%. Alfredo, Beatriz, Carlos e Daniel compraram 10, 15, 30 e 45 balas, respectivamente. Qual deles poderia ter comprado mais balas e gasto a mesma quantia, se empregasse melhor seus conhecimentos de Matemática?

(A) Alfredo.
(B) Beatriz.
(C) Carlos.
(D) Daniel.
(E) Nenhum.

19 (Unesp) O vértice da parábola $y = x^2 + bx + 6$ está no ponto $(2, k)$. O valor de k é:

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

20 Sabe-se que o polinômio $P(x) = -2x^3 - x^2 + 4x + 2$ pode ser decomposto na forma $P(x) = (2x + 1)(-x^2 + 2)$. Representando as funções reais $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = -x^2 + 2$, num mesmo sistema de coordenadas cartesianas, obtém-se o gráfico abaixo:



Tendo por base apenas o gráfico, é possível resolver a inequação $-2x^3 - x^2 + 4x + 2 < 0$. Todos os valores de x que satisfazem a essa inequação estão indicados na alternativa:

(A) $x < -\sqrt{2}$ ou $x > -\frac{1}{2}$

(B) $x < -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2}$

(C) $x < -\sqrt{2}$ ou $-\frac{1}{2} < x < \sqrt{2}$

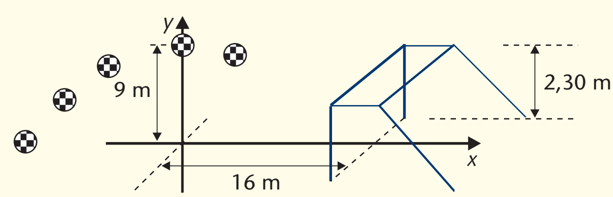
(D) $-\sqrt{2} < x < -\frac{1}{2}$ ou $x > \sqrt{2}$

21 (Fuvest-SP) O número de pontos de interseção dos gráficos das funções reais $f(x) \frac{x^2+1}{x^2+4}$ e $f(g) \frac{x^2+4}{x^2+3}$ é:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

22 (Uerj) Numa partida de futebol, no instante em que os raios solares incidiam perpendicularmente sobre o gramado, o jogador "Chorão" chutou a bola em direção ao gol, de 2,30 m de altura interna. A sombra da bola descreveu uma reta que cruzou a linha do gol. A bola descreveu uma parábola e quando começou a cair da altura máxima de 9 metros, sua sombra se encontrava a 16 metros da linha do gol. Após o chute de "Chorão", nenhum jogador conseguiu tocar na bola em movimento.

A representação gráfica do lance em um plano cartesiano está sugerida na figura abaixo:



A equação da parábola era do tipo: $y = \frac{-x^2}{36} + c$.

O ponto onde a bola tocou pela primeira vez foi:

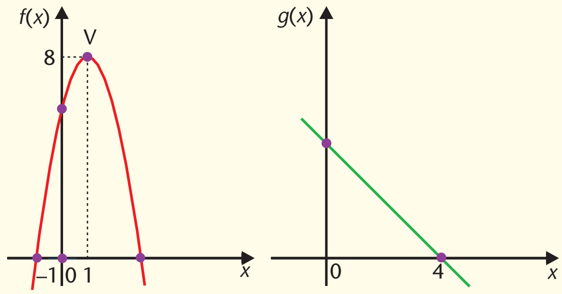
(A) na baliza.
(B) atrás do gol.
(C) dentro do gol.
(D) antes da linha do gol.

23 Um feirante comprou n frangos pelo custo total de d reais. Todos os frangos, exceto dois, foram vendidos com o lucro de R$ 8,00 por unidade. Cada um dos dois frangos restantes foi vendido pela metade do custo de um frango. Se o lucro total do feirante foi de R$ 72,00, determine:

a) uma equação (lei) que relacione d e n.

b) o menor valor possível para n, lembrando-se que n é inteiro positivo e d é maior que zero.

24 As figuras abaixo mostram os gráficos das funções, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:
$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ e $g(x) = mx + n$
(a, b, c, m, n: números reais)



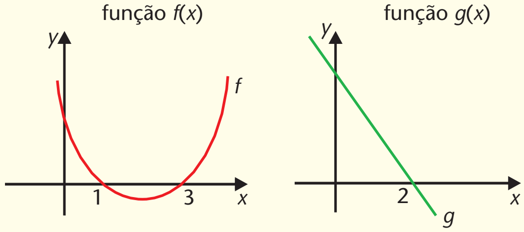
Sabendo que o ponto V(1, 8) é o vértice da parábola e que $g(0) = 4$, determine:

a) $a + b + c + m + n$;

b) o conjunto solução de $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0$.

25 (Cesgranrio-RJ)

Figura I função $f(x)$ — Figura I função $g(x)$



As figuras acima nos mostram as funções $f(x)$ e $g(x)$ representadas pelos seus gráficos cartesianos. A solução da inequação $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ é:

(A) $x \leq 1$ ou $2 < x \leq 3$
(B) $1 \leq x < 2$ ou $x \geq 3$
(C) $x < 2$ ou $x \geq 3$
(D) $1 \leq x \leq 3$ e $x \neq 2$
(E) $x \geq 1$ e $x \neq 2$

26 (Cefet-RJ) Sejam os conjuntos A e B definidos por:
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 5 \leq 5x - 6\}$ e
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 10x + 3 = 0\}$.
Pode-se afirmar que $A \cap B$ é:

(A) $\{3\}$
(B) $\left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{7}{3}\right[$
(C) $\left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{7}{3}, 3\right\}$
(D) $[3, 8[$
(E) $]-8, 3]$

27 (Acafe-SC) O conjunto solução da inequação $\dfrac{2x^2 - 4}{x - 1} < -1$ é:

(A) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq \dfrac{3}{2}\right\}$

(B) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ ou } x \leq \dfrac{3}{2}\right.$

(C) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{3}{2}\right\}$

(D) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \dfrac{3}{2}\right|$

(E) n.d.a.

28 (PUC-RJ) Um número positivo y é maior que o seu inverso $\dfrac{1}{y}$:

(A) só se $y > 1$.
(B) nunca.
(C) sempre.
(D) só se $y > 1{,}1$.
(E) se $0 < y < 1$.

29 A solução da inequação $x > \dfrac{1}{x^2}$ é:

(A) $-1 < x < 0$ ou $x > 1$
(B) $x < -1$ ou $x > 1$
(C) $x > 1$
(D) $x > 0$
(E) $x > -1$

30 (Fuvest-SP) O conjunto das soluções, no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, da inequação $\dfrac{x}{x+1} > x$ é:

(A) vazio.
(B) $\mathbb{R}$.
(C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.
(D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$.
(E) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$.

31 (Unirio-RJ) O conjunto solução da inequação $\dfrac{(x-2)^2}{3x+3} < 0$ é:

(A) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{3}{2}\right\}$
(B) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \dfrac{3}{2}\right\}$
(C) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{3}{2}\right\}$
(D) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{3}{2} \text{ ou } x \neq 2\right\}$
(E) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{3}{2} \text{ e } x \neq 2\right\}$

32 (UFR-RJ) O conjunto solução da inequação

$\frac{x}{x+3} - \frac{1}{x-1} < 1$ é:

(A) $-3 < x < 1$

(B) $-3 < x < 0$ ou $x > 1$

(C) $-3 < x < \sqrt{3}$ ou $1 < x < \sqrt{3}$

(D) $-\sqrt{3} < x < 1$ ou $x > \sqrt{3}$

(E) $-1 < x < 1$ ou $x > 3$

33 (PUC-RJ) A inequação $\frac{x^2 - 3x + 8}{x+1} < 2$ tem como solução o conjunto dos números reais:

(A) $(-\infty, 1) \cup (2, 3)$

(B) $(2, 3)$

(C) $(-\infty, 1] \cup [2, 3]$

(D) $[2, 3]$

(E) n. d. a.

34 (Unirio-RJ) Dadas as funções $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = 5 - x$ e $h(x) = x^2 - 4x + 3$, definimos a função $\varphi(x) = \frac{g(x) \cdot h(x)}{f(x)}$.

Analisando os valores de x, para os quais $\varphi(x) \geq 0$, temos:

(A) $x < 1$ ou $3 < x < 5$

(B) $x < 1$ ou $3 \leq x \leq 5$

(C) $x \leq 1$ ou $3 \leq x \leq 5$

(D) $x \geq 5$ ou $1 \leq x \leq 3$

(E) $x > 5$ ou $1 < x < 3$

35 (PUC-RJ) Seja k um número positivo. Então o conjunto dos números x tais que $\frac{x-k}{k} \geq 1$ e $\frac{x+k^2}{k} < k + 2$ é:

(A) vazio.

(B) formado por um elemento único.

(C) $[4, +\infty)$.

(D) $(-\infty, 4)$.

(E) $[-4, 2)$.

36 (Ucsal-BA) Um professor dispunha de 144 doces para dividir igualmente entre os alunos de sua classe. Como no dia da distribuição faltaram 12 alunos, ele dividiu os 144 doces igualmente entre os presentes, cabendo a cada aluno 1 doce a mais. O número de alunos presentes no dia da distribuição era:

(A) 36

(B) 40

(C) 42

(D) 48

(E) 50

37 (FGV-SP) Equação de oferta (E*o*) é uma função econômica que relaciona o preço de venda unitário (p) com a quantidade (x) oferecida pelo produtor. Equação de demanda (E*d*) é uma função econômica que relaciona o preço de venda unitário (p) com a quantidade (x) demandada pelo consumidor.

Sejam E*o* = $2x + p - 10 = 0$ e E*d* = $p^2 - 8x - 5 = 0$.

Determinar o ponto de equilíbrio (PE) entre as duas funções.

Notas: I. O PE é dado por um par de valores (x, p) que satisfaz as duas equações.

II. Em Economia, só interessam valores $x \geq 0$, $p \geq 0$.

(A) (–9,00; 0,50)

(B) (2,90; 4,00)

(C) (0; 0)

(D) (2,50; 5,00)

(E) n. d. a.

38 Construa o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 4|$, determinando a sua imagem.

39 Construa o gráfico de $f(x) = |x^2 - 1| + 1$.

40 (Epusp) As raízes da equação $|x|^2 + |x| - 6 = 0$

(A) são positivas.

(B) têm soma 0.

(C) têm soma 1.

(D) têm produto 6.

(E) nenhuma das respostas anteriores.

41 (Mack-SP) Os gráficos das funções reais definidas por $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = k^x$, $1 \neq k > 0$ se interceptam num ponto de abscissa 3. Então o valor de $f(g(k))$ é:

(A) 3

(B) 9

(C) 12

(D) 15

(E) 18

42 (UF-MG) O número de soluções negativas da equação $|5x - 6| = x^2$ é:

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

43 (Fafi-MT) O conjunto solução da equação $| x^2 + x - 5 | = | 4x - 1 |$ está contido no conjunto dos:

(A) naturais.

(B) inteiros não nulos.

(C) irracionais não negativos.

(D) reais não positivos.

44 (Cesgranrio-RJ) Os gráficos de $f(x) = x$ e $g(x) = | x^2 - 1 |$ têm 2 pontos em comum. A soma das abscissas dos pontos em comum é:

(A) $\sqrt{5}$ (D) $-\sqrt{5}$

(B) 1 (E) 0

(C) –1

45 (Fuvest-SP) Determine as raízes das equações seguintes:

a) $| 2x - 3 | = 5$

b) $| 2x^2 - 1 | + x = 0$

46 (FMSC-SP) A soma e o produto das raízes da equação $x^2 - 2| x | - 8 = 0$ são, respectivamente:

(A) 0 e –16.

(B) 0 e 16.

(C) 1 e –16.

(D) 2 e –8.

(E) –2 e 8.

47 (Mack-SP) Se $|x^2 - 4| < N$ para todo x tal que $|x - 2| < 1$. Então:

(A) o menor valor possível de N é 3.

(B) o maior valor possível de N é 3.

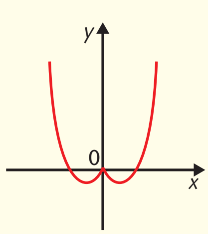
(C) o menor valor possível de N é 5.

(D) o maior valor possível de N é 5.

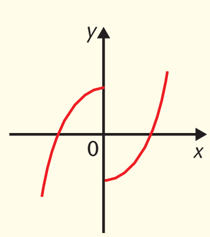
(E) N pode assumir qualquer valor.

48 (Cescem-SP) A representação gráfica da função $y = x^2 - | x |$ é:

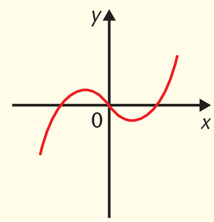
(A)



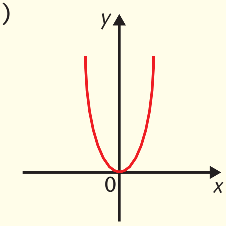
(B)



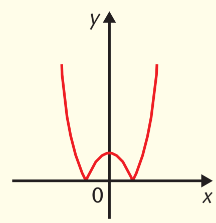
(C)



(E)

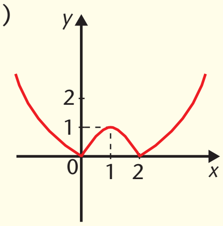


(D)

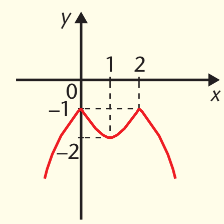


49 (Vunesp) O gráfico da função $f(x) = | x^2 - 2x | - 1$ é:

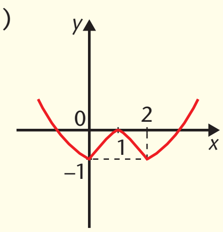
(A)



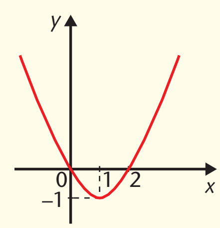
(D)



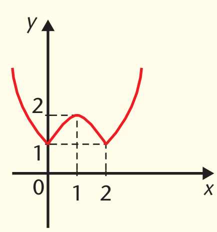
(B)



(E)



(C)



50 (Cesgranrio-RJ) A função $P(x) = |x^2 + x - 1|$ é menor do que 1 para os valores de x em:

(A) $[-2, 1] \cup [0, 1]$

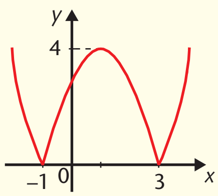
(B) $(-2, -1) \cup (0, 1)$

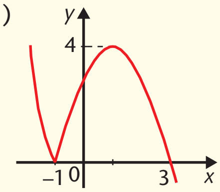
(C) $[-2, -1] \cup (0, 1)$

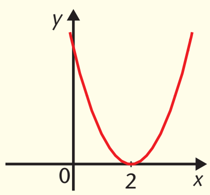
(D) $(-2, -1) \cup [0, 1]$

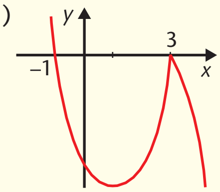
(E) $[-2, 1]$

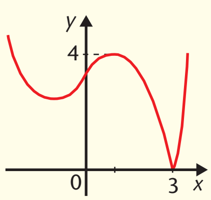
51 (Covest-RJ) Qual dos gráficos abaixo melhor representa a função $f(x) = |\, x^2 - 2x - 3 \,|$?

(A)


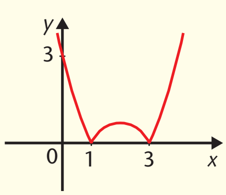
(D)


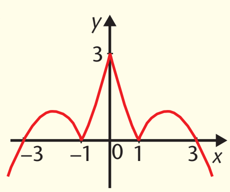
(B)


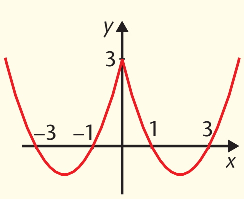
(E)


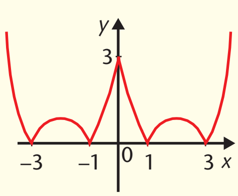
(C)


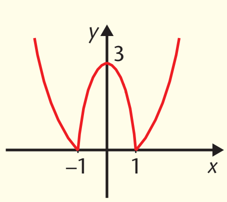
52 (UC-MG) O gráfico da função $f(x) = x^2 - 4|\, x \,| + 3$ é:

(A)


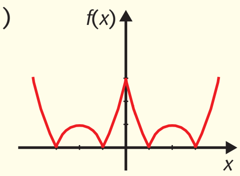
(D)


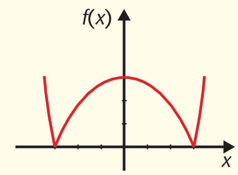
(B)


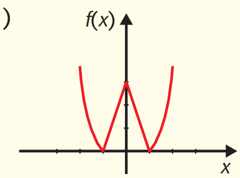
(E)


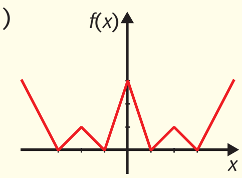
(C)


53 (Mack-SP) O gráfico cartesiano da função definida por $y = |\, x^2 - 4|\, x \,| + 3 \,|$ pode ser:

(A)


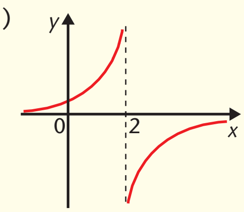
(C)


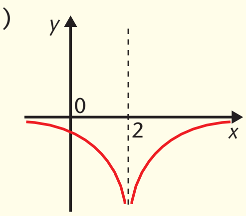
(B)


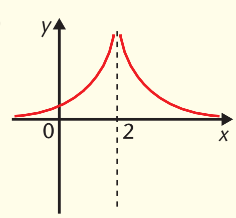
(D)


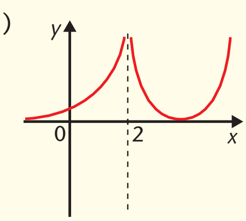
54 (Mack-SP) O gráfico da função f dada por

$$f(x) = \frac{1}{4x - x^2 - 4}$$ é, aproximadamente:

(A)


(C)


(B)


(D)


55 (Cescem-SP) As figuras de equações $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{x\,(x-1)}{x-1}$:

(A) não têm ponto em comum.

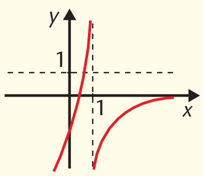
(B) têm um único ponto comum.

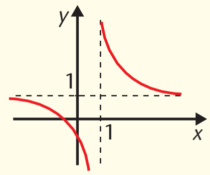
(C) têm exatamente dois pontos comuns.

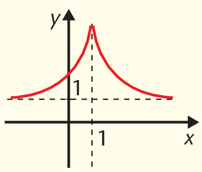
(D) têm exatamente quatro pontos comuns.

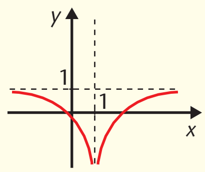
(E) têm uma infinidade de pontos comuns.

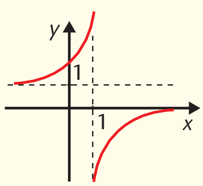
56 (Mack-SP) O gráfico cartesiano da função definida por $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ pode ser:

(A) 

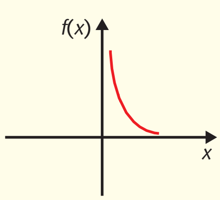
(D) 

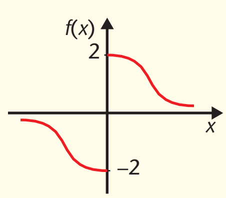
(B) 

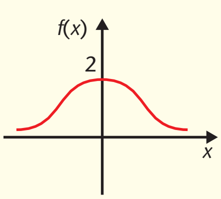
(E) 

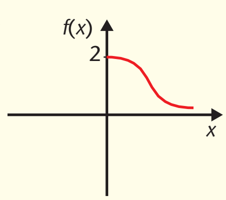
(C) 

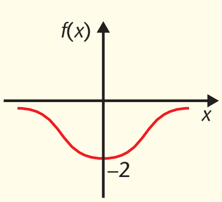
57 (Mack–SP) O gráfico da função definida por $y = \dfrac{8}{x^2+4}$ pode ser:

(A) 

(D) 

(B) 

(E) 

(C) 

58 (Fuvest-SP) As curvas $y = \dfrac{1}{x^2}$ e $y = x^2$:

(A) interceptam-se em um único ponto de abscissa positiva.

(B) interceptam-se em dois pontos.

(C) não se interceptam.

(D) interceptam-se em mais de dois pontos.

(E) interceptam-se em um único ponto de abscissa negativa.

59 (Unirio-RJ) O conjunto imagem da função $f(x) = |\, x^2 - 4x + 8 \,| + 1$ é o intervalo:

(A) $[5, +\infty[$

(B) $[4, +\infty[$

(C) $[3, +\infty[$

(D) $[1, +\infty[$

(E) $[0, +\infty[$

60 (FEI-SP) Chama-se **ponto fixo** de uma função f um número real x tal que $f(x) = x$. Calcule os pontos fixos da função $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

(A) $x = \pm 1$

(B) $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

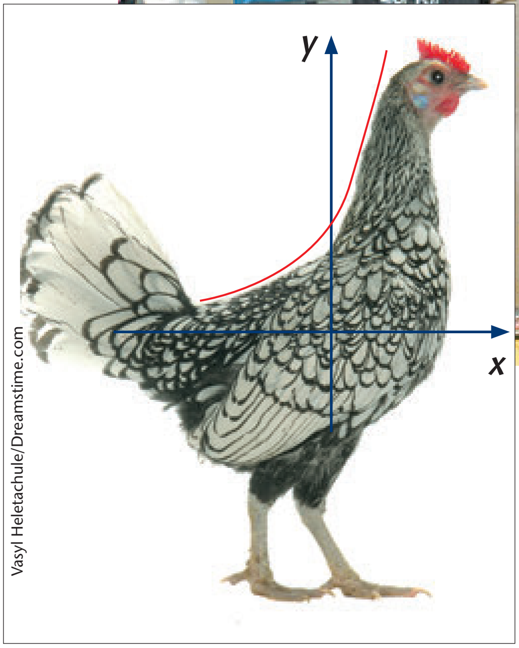
(C) Não tem ponto fixo.

(D) Tem infinitos pontos fixos.

CAPÍTULO VIII

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Peter Treanor/Alamg/Other Images



Vasyl Heletachule/Dreamstime.com

Funções exponenciais aparecem em modelos que procuram estimar o número de pessoas afetadas por uma epidemia, a concentração de um medicamento na corrente sanguínea de um paciente e a difusão de uma informação na população. Na fotografia, pessoas vestem máscaras para evitar o contágio pela gripe aviária (gripe das aves ou gripe da galinha) na China em 2003.

8 – FUNÇÃO EXPONENCIAL

8.1 – Expoentes inteiros

DEFINIÇÃO
Função exponencial (expoentes inteiros).

Consideremos, inicialmente, a **função exponencial** definida no conjunto dos inteiros:

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \mid f(n) = a^n,\ 0 < a \neq 1$$

OBSERVAÇÃO
Se $a = 1$, $1^n = 1$, a função se reduz à função constante $y = 1$.

Quando $n \geq 2$, a^n é o produto de n fatores iguais a a:

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}} \quad n \in \mathbb{N}$$

8.1.1 – Casos particulares

A) Para que a propriedade $\dfrac{a^{n_1}}{a^{n_2}} = a^{n_1 - n_2}$ seja válida para $n_1 = n_2$, devemos ter:

$\dfrac{a^{n_1}}{a^{n_2}} = a^{n_1 - n_2} \Rightarrow 1 = a^0$. Como a^0 não está definido, convencionamos $\boxed{a^0 = 1}$.

NOTA
Neste livro consideramos que 0^0 não tem significado matemático.

Exemplos:

i) $2^0 = 1$

ii) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 1$

iii) $\pi^0 = 1$

iv) $\left(\sqrt{2}\right)^0 = 1$

NOTA
Temos, então, as propriedades das potências, para n_1 e n_2 naturais:

1) $a^{n_1} \cdot a^{n_2} = a^{n_1 + n_2}$

2) $\dfrac{a^{n_1}}{a^{n_2}} = a^{n_1 - n_2}$

3) $\left(a^{n_1}\right)^{n_2} = a^{n_1 \cdot n_2}$

4) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

B) Analogamente, para n_1 e n_2 consecutivos, teremos:

$$\frac{a^{n_1}}{a^{n_2}} = \frac{a^{n+1}}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}^{(n+1) \text{ fatores}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}} = a$$

Por outro lado, deveremos ter:

$\dfrac{a^{n+1}}{a^n} = a^{(n+1)-n} = a^1$ e como a^1 não está definido, convencionamos $\boxed{a^1 = a}$.

Exemplos:

i) $2^1 = 2$

ii) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^1 = \dfrac{1}{2}$

iii) $\pi^1 = \pi$

iv) $\left(\sqrt{2}\right)^1 = \sqrt{2}$

C) Quando x é negativo, isto é, $x = -n$ $(n \in \mathbb{N})$, devemos ter:

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} \Rightarrow \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Exemplos:

i) $2^{-1} = \frac{1}{2}$ ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ iii) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

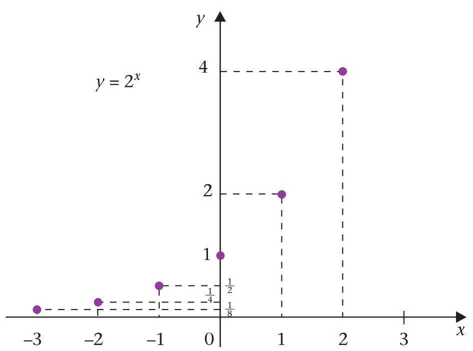
Poderíamos também fazer:

$$2^{-3} = \left(2^{-1}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

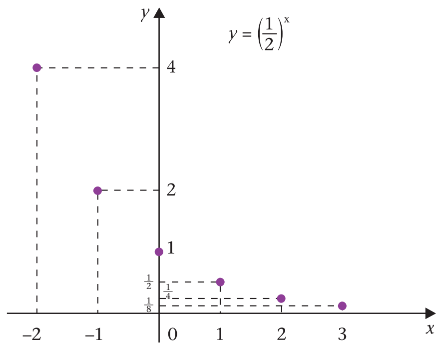
8.1.2 – Gráfico da função exponencial

Os gráficos das funções exponenciais $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ serão obtidos se atribuirmos a x os valores do conjunto $\mathbb{Z}$.

x	y	(x, y)
-3	$\frac{1}{8}$	$\left(-3, \frac{1}{8}\right)$
-2	$\frac{1}{4}$	$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$
-1	$\frac{1}{2}$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
0	1	(0, 1)
1	2	(1, 2)
2	4	(2, 4)
3	8	(3, 8)



x	y	(x, y)
-3	8	$(-3, 8)$
-2	4	$(-2, 4)$
-1	2	$(-1, 2)$
0	1	(0, 1)
1	$\frac{1}{2}$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$
2	$\frac{1}{4}$	$\left(2, \frac{1}{4}\right)$
3	$\frac{1}{8}$	$\left(3, \frac{1}{8}\right)$



NOTA
Qualquer que seja a base $0 < a \neq 1$, o ponto (0, 1) pertencerá ao gráfico, pois $a^0 = 1$.

i) $f(x) = a^x$ é crescente se, e só se, $a > 1$

$a > 1$ $\Leftrightarrow a^2 > a \Leftrightarrow a^3 > a^2$ ... (basta multiplicar por a), logo:

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

ii) $f(x) = a^x$ é decrescente se, e só se, $0 < a < 1$

$0 < a < 1$ $\Leftrightarrow a^2 < a \Leftrightarrow a^3 < a^2$ ... (basta multiplicar por $a > 0$), logo:

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

NOTA
A função exponencial só é definida para $a > 0$ porque se $a < 0$ não existiriam nos reais as raízes de índice par de números negativos.

8.2 – Expoentes racionais

Consideremos a função definida no conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \mid f(x) = a^x,\ 0 < a \neq 1$, onde $x = \dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, isto é, quando x é uma fração.

Elevando $a^{\frac{p}{q}}$ ao expoente q, temos: $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^{\frac{pq}{q}} = a^p$.

Por outro lado, elevando $\sqrt[q]{a^p}$ ao expoente q, obtemos $\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q = a^p$, pela definição de raiz. Como $a^{\frac{p}{q}}$ e $\sqrt[q]{a^p}$ são dois números positivos que elevados ao mesmo expoente deram o mesmo resultado, podemos concluir que eles são iguais.

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Exemplos:

i) $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

ii) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{2^2}} = \dfrac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{2^3}}{2}$

Observe que $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$, que não existe nos reais.

Se $a < 0$, a propriedade $\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 x_2}$ não teria sentido porque levaria a contradições.

Veja:

$\left[(-2)^2\right]^{\frac{1}{2}} \neq (-2)^{2\cdot\frac{1}{2}}$, basta ver que $\left[(-2)^2\right]^{\frac{1}{2}} = (-2)^{2\cdot\frac{1}{2}} = (-2)^1 = -2$

Por outro lado: $\left[(-2)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$.

Então, –2 = 2 é absurdo. E esse é um dos motivos pelos quais não se define a função exponencial com a base negativa.

Exemplos:

i) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{7}{6}}$

ii) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}}$

iii) $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}}$

iv) $(2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$

v) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{5}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{5}} = \dfrac{3^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{1}{5}}}$

Propriedades

Se $a > 0$, a^x não se anula, seja qual for o valor de x.

Suponhamos que a^x se anula para $x = \alpha$, isto é, $a^\alpha = 0$ para algum $\alpha \in \mathbb{Q}$. Temos que, para qualquer x:

$$a^x = a^{\alpha + (x-\alpha)} = a^\alpha \cdot a^{x-\alpha}$$

Como, por hipótese, $a^\alpha = 0$, teremos então $a^x = 0 \cdot a^{x-\alpha} = 0$ para qualquer x, o que significa que a função seria nula para todo x.

Por outro lado, sabemos que $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^2 > a > 0$, ..., o que mostra a contradição. Concluimos que tal número α não existe, logo:

$$a^x \neq 0, \forall x \text{ e } 0 < a \neq 1$$

NOTA
Estamos usando o processo de demonstração de "redução ao absurdo".

NOTA
Outra demonstração:

$a^x = 0 \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} = 0$

$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = 0^q \Rightarrow a^p = 0$

$\sqrt[p]{a^p} = \sqrt[p]{0} \Rightarrow a = 0$

Os valores da função exponencial são todos positivos, qualquer que seja x.

$$a^x = a^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = a^{\frac{x}{2}} \cdot a^{\frac{x}{2}} = \left(a^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0, \forall x$$

Quando $a > 1$, o gráfico será crescente.

De fato, dados $x_1 = \dfrac{p_1}{q_1}$ e $x_2 = \dfrac{p_2}{q_2}$ racionais, temos:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow a^{\frac{p_1}{q_1}} > a^{\frac{p_2}{q_2}} \Leftrightarrow \left(a^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{q_1 \cdot q_2} > \left(a^{\frac{p_2}{q_2}}\right)^{q_1 \cdot q_2} \Leftrightarrow a^{p_1 \cdot q_2} > a^{p_2 \cdot q_1}$$

NOTA
Na seção anterior vimos que para $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_2 \Leftrightarrow a^{n_1} > a^{n_2}$ quando $a > 1$.

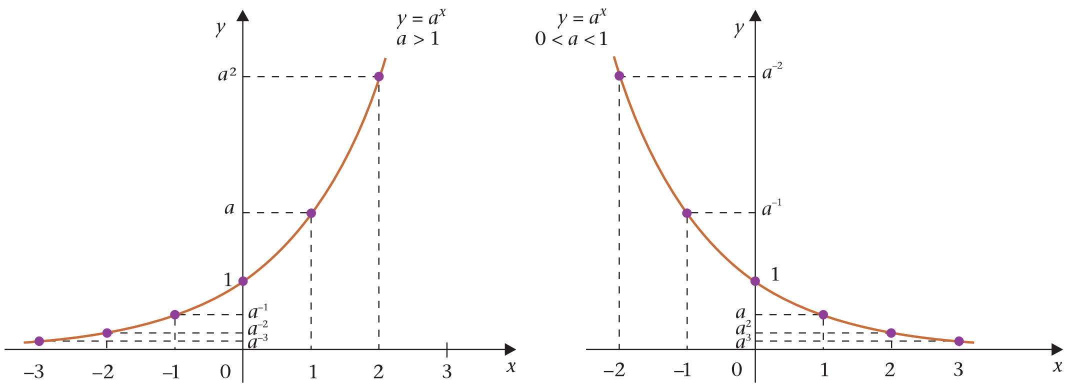
Como $p_1 \cdot q_2$ e $p_2 \cdot q_1$ são naturais, define-se a propriedade

$$a^{p_1 \cdot q_2} > a^{p_2 \cdot q_1} \Leftrightarrow p_1 \cdot q_2 > p_2 \cdot q_1 \text{ então, } p_1 \cdot q_2 > p_2 \cdot q_1 \Leftrightarrow \frac{p_1}{q_1} > \frac{p_2}{q_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2 .$$

Quando $0 < a < 1$, o gráfico será decrescente.

A demonstração é análoga, porém neste caso:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow a^{p_1 \cdot q_2} > a^{p_2 \cdot q_1} \Leftrightarrow p_1 \cdot q_2 < p_2 \cdot q_1 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$



Uma desigualdade de membros positivos não se altera quando se elevam ambos os membros ao mesmo expoente positivo, e muda de sentido quando o expoente é negativo.

Para $x > 0$: $a > b \Leftrightarrow a^x > b^x$

Para $x < 0$: $a > b \Leftrightarrow a^x < b^x$

Exemplos:

i) $2^{\frac{4}{3}} < 3^{\frac{4}{3}}$, mas $2^{-\frac{4}{3}} > 3^{-\frac{4}{3}}$

ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{5}} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{5}}$, mas $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{5}} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{5}}$

8.3 – Expoentes reais

Consideremos a função definida no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, isto é, para x inteiro, racional ou irracional.

DEFINIÇÃO
Função exponencial.

Chama-se tal que função exponencial a função:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = f(x) = a^x$, em que $0 < a \neq 1$

Exemplos:

Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

i) $y = 2^x$

ii) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

iii) $y = (1{,}1)^x$

iv) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2^{\frac{x}{2}}$

NOTA
Se a base a fosse negativa ($a < 0$), não existiria a^x no campo real nos casos que se transformassem em raízes de índice par.

8.3.1 – Valor numérico da função exponencial

Valor numérico de uma função exponencial para $x = \alpha$ é o número $f(\alpha)$, que resulta quando se eleva a base a ao expoente α.

Temos os seguintes casos a considerar:

A) $\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow a^\alpha = a \cdot a \cdot ... \cdot a$ (α fatores)

Neste caso, a^α é o produto de α fatores iguais a a.

Exemplos:

i) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

B) $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^\alpha = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ $(p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}_+^*)$

Neste caso, a^α é a raiz q-ésima, positiva, de a^p.

NOTA
Lembrar que:
$a^0 = 1$
$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
$a^1 = a$

Exemplos:

i) $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

ii) $3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

iii) $2^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{2}$

iv) $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

C) $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$

Neste caso, o valor de a^α será obtido por **aproximações sucessivas**.

Seja, por exemplo, o valor $2^{\sqrt{2}}$.

Sabemos que $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$

Podemos obter aproximações de $\sqrt{2}$ com valores menores, por meio da sucessão de números racionais (1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ...), que são valores para $\sqrt{2}$ com aproximações menores que (1; 0,1; 0,01; 0,001; ...), respectivamente.

Por outro lado, podemos obter aproximações de $\sqrt{2}$ com valores maiores, por meio da sucessão de números racionais (2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; ...), que são valores para $\sqrt{2}$ com aproximações menores que (1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; ...), respectivamente.

A sequência de valores menores é crescente e a de valores maiores, decrescente. Como a sequência de diferenças $\left(1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1\,000}, ...\right)$ pode ser prolongada indefinidamente, dizemos que ela "tende para zero", pois seus valores podem se tornar menores que qualquer número positivo.

OBSERVAÇÃO
Se $\sqrt{2}$ fosse uma dízima periódica, $\sqrt{2}$ seria racional, contradizendo o que vimos no Capítulo II.

Por essa razão, dizemos que a sequência de valores menores é limitada superiormente pelo número $\sqrt{2}$ e a sequência de valores maiores é limitada inferiormente pelo mesmo número $\sqrt{2}$. O número $\sqrt{2}$, cuja representação decimal é infinita e não periódica, é, então, o número que separa as duas sequências.

1	1,4	1,41	1,414	1,4142	...	$\sqrt{2}$	...	1,4143	1,415	1,42	1,5	2
crescente →						↑ elemento separador		← decrescente				

Assim, as duas sequências (2^1, $2^{1,4}$, $2^{1,41}$, $2^{1,414}$, ...) e (2^2, $2^{1,5}$, $2^{1,42}$, $2^{1,415}$, ...) são respectivamente crescente e decrescente e limitadas superiormente e inferiormente pelo número $2^{\sqrt{2}}$.

2^1	$2^{1,4}$	$2^{1,41}$	$2^{1,414}$	$2^{1,4142}$	...	$2^{\sqrt{2}}$	...	$2^{1,4143}$	$2^{1,415}$	$2^{1,42}$	$2^{1,5}$	2^2
crescente →						↑ elemento separador		← decrescente				

OBSERVAÇÃO
Para obter o valor de 2^x, sendo x irracional, toma-se uma sequência de valores racionais (x_1, x_2, ..., x_n) que determinam x, e a sequência de valores obtidos $\left(2^{x_1}, 2^{x_2}, \ldots, 2^{x_n}\right)$, definirá o número real 2^x. A sequência de valores pode ser "por falta" ou "por excesso".

Os valores obtidos são respectiva e aproximadamente os seguintes:

2	2,639	2,657	2,664	2,665	...	$2^{\sqrt{2}}$	...	2,665	2,667	2,676	2,828	4

Concluímos que $2^{\sqrt{2}} = 2{,}665$ com uma aproximação menor que 0,001.

Esse é o procedimento para definir operações com irracionais.

Se tivéssemos de calcular o valor $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ (agora uma exponencial com a base menor que 1), a sucessão de valores menores que $\sqrt{2}$ daria a sequência de valores

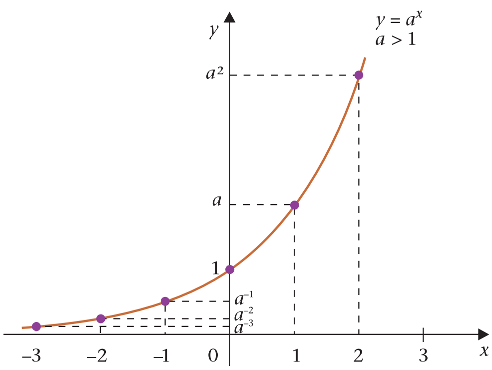
maiores que $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$, e a sucessão de valores maiores que $\sqrt{2}$ daria a sequência de valores menores que $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$.

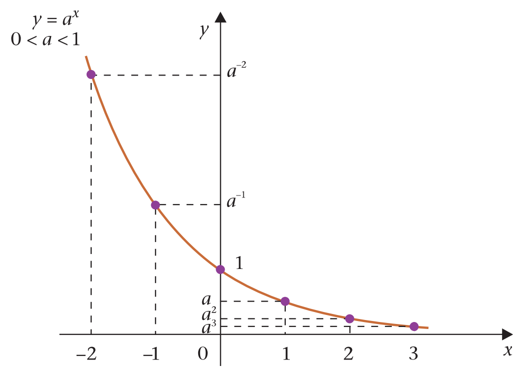
$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1,41}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1,414}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4142}$	...	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$	...	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4143}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1,415}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1,42}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1,5}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$
decrescente →					↑ elemento separador			← crescente				

0,5	0,379	0,376	0,375	0,375	...	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$	...	0,375	0,375	0,374	0,353	0,250

Assim, todas as propriedades das potências de expoente racional se mantêm para expoentes irracionais, bastando considerar para cada expoente as sucessões de valores aproximados "por falta" e também "por excesso".

A função exponencial é sempre positiva, crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

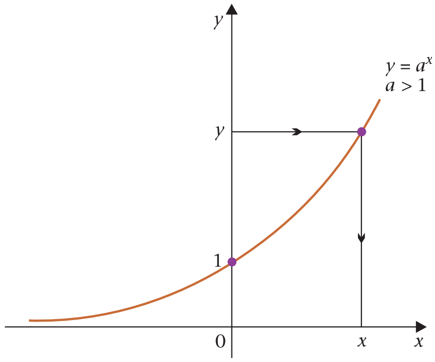


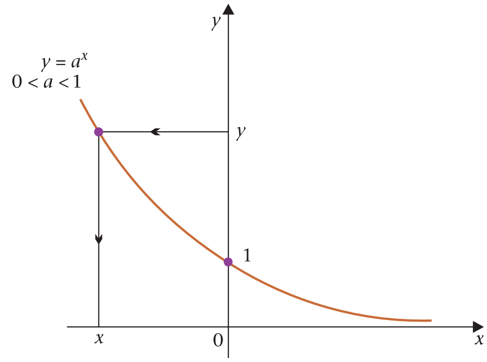


8.3.2 – Estudo do gráfico da função exponencial

Pode-se mostrar que a função exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = a^x$ é **contínua**, isto é, seu gráfico será constituído de uma única linha contínua. Como ela é crescente (para $a > 1$) ou decrescente (para $0 < a < 1$), ela toma todos os valores do intervalo $(0, +\infty)$.

OBSERVAÇÃO
Sendo $f(x) = a^x$, temos:
$f(x + y) = a^{x+y} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x + y) = a^x \cdot a^y \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$





NOTA
Como vimos no Capítulo I, o símbolo $\exists!$ significa "existe um único".

A função exponencial é bijetiva de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}_+^*$, isto é:

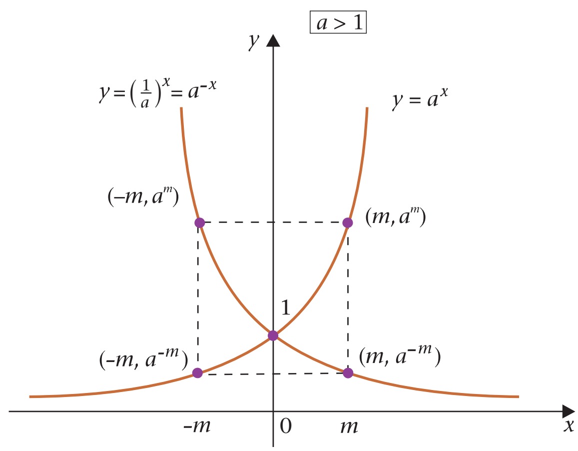
$\forall y > 0, \exists!\, x \in \mathbb{R} \mid y = a^x \ (0 < a \neq 1)$

Temos então:

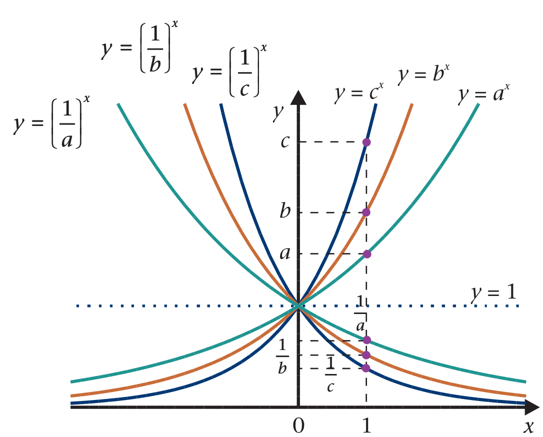
$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ para } 0 < a \neq 1$$

OBSERVAÇÃO
As funções exponenciais mais importantes são $y = e^x$ e $y = 10^x$, onde $e = 2{,}71828...$
A letra e é uma homenagem ao matemático Euler. O número e tem grande importância em Matemática.

Seja $a > 1$. Os gráficos das funções exponenciais $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = a^x$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ são simétricos em relação ao eixo Oy.



Consideremos as funções $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$, $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ e $y = \left(\frac{1}{c}\right)^x$, tais que $1 < a < b < c$ e $1 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c} > 0$.



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Esboce o gráfico de cada função real definida por:

a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = 2^x + 1$

c) $f(x) = 2^{x+1}$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

2 (PUC-SP) Sejam $f(x) = 3^{x-1}$, $g(x) = 3^x$ e $s(x) = f(x) + g(x)$. Qual o valor de x, tal que $s(x) = 4$?

(A) –1

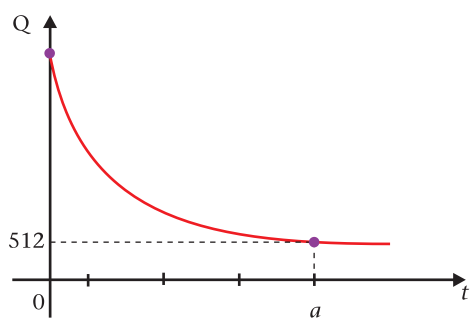
(B) 0

(C) 1

(D) 2

(E) 3

3 Uma substância se decompõe, aproximadamente, segundo a lei $Q(t) = k \cdot 2^{-0,5t}$; na qual π é uma constante, t indica o tempo (em minutos) e $Q(t)$ indica a quantidade de substância (em gramas) no instante t.



Considerando-se os dados desse processo de decomposição mostrados no gráfico, determine os valores de k e a.

4 (Unificado-RJ) Segundo dados de uma pesquisa, a população de certa região do país vem decrescendo em relação ao tempo t, contado em anos, aproximadamente, segundo a relação $P(t) = P(0) \cdot 2^{-0,25t}$. Sendo P(0) uma constante que representa a população inicial dessa região e $P(t)$ a população t anos após, determine quantos anos se passarão para que essa população fique reduzida à quarta parte da que era inicialmente.

(A) 6

(B) 8

(C) 10

(D) 12

(E) 15

5 (Unirio-RJ) Num laboratório é realizada uma experiência com um material volátil, cuja velocidade de volatilização é medida pela sua massa, em gramas, que decresce em função do tempo t, em horas, de acordo com a fórmula $m = -3^{2t} - 3^{t+1} + 108$. Assim sendo, o tempo máximo de que os cientistas dispõem para utilizar este material antes que ele se volatilize totalmente é:

(A) inferior a 15 minutos.

(B) superior a 15 minutos e inferior a 30 minutos.

(C) superior a 30 minutos e inferior a 60 minutos.

(D) superior a 60 minutos e inferior a 90 minutos.

(E) superior a 90 minutos e inferior a 120 minutos.

8.4 – Equações e inequações exponenciais

8.4.1 – Equações exponenciais

São equações em que as incógnitas figuram em expoentes. Faremos apenas o estudo de alguns tipos clássicos dessas equações.

1º tipo:

São as equações que podem ser reduzidas à forma: $a^{f(x)} = a^k$, em que $0 < a \neq 1$.

Nessas condições, podemos reduzir tais equações à forma: $f(x) = k$.

Então, a solução da equação proposta fica sujeita à solução desta última.

NOTA
Lembre-se de que 1 sempre pode ser escrito como a^0 onde $0 < a$.

Exemplos:

i) $8^{\frac{x^2-5x+6}{x-1}} = 1$

$8^{\frac{x^2-5x+6}{x-1}} = 8^0$

$\dfrac{x^2-5x+6}{x-1} = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$, para $x \neq 1$

$x = 2$ ou $x = 3$

ii) $2^{3^{x-1}} = 512$

Inicialmente podemos decompor o número $512 = 2^9$.

Temos: $2^{3^{x-1}} = 2^9 \Rightarrow 3^{x-1} = 9 \Rightarrow 3^{x-1} = 3^2 \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$.

iii) $\left(2\sqrt{3}\right)^{x^2-3x} = 144$

$\left(2\sqrt{3}\right)^{x^2-3x} = 2^4 \cdot 3^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^4$

$x^2 - 3x = 4$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$x = -1$ ou $x = 4$

NOTA
Quando, na equação $a^x = b$, o número b não for uma potência de expoente racional de a, o problema será resolvido com a utilização de logaritmos, que serão estudados no próximo capítulo.

2º tipo:

São equações que têm a forma:

$$a^{f(x)+a_1} + a^{f(x)+a_2} + \ldots + a^{f(x)+a_n} = b$$

Essas equações reduzem-se com a simples evidenciação dos fatores comuns $a^{f(x)}$.

Temos:

$$a^{f(x)}\left(a^{a_1} + a^{a_2} + \ldots + a^{a_n}\right) = b$$

$$a^{f(x)} = \frac{b}{a^{a_1} + a^{a_2} + \ldots + a^{a_n}}$$

que é do 1º tipo desde que o lado direito tenha a forma a^k.

Exemplo:

Resolver a equação: $3^{x+1} + 3^{x-2} - 3^{x-3} + 3^{x-4} = 750$

A equação se escreve: $3^x \cdot 3 + \frac{3^x}{3^2} - \frac{3^x}{3^3} + \frac{3^x}{3^4} = 750$. Pondo 3^x em evidência:

$$3^x\left(3 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4}\right) = 750 \Leftrightarrow 3^x \cdot \frac{3^5 + 3^2 - 3 + 1}{3^4} = 750 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x = \frac{3^4 \cdot 750}{250} \Leftrightarrow 3^x = 3^5 \Leftrightarrow x = 5$$

3º tipo:

Equações que se reduzem à forma: $am^{2f(x)} + bm^{f(x)} + c = 0$ se resolvem fazendo o artifício: $m^{f(x)} = y$. Então, $m^{2f(x)} = y^2$, e a equação se reduz à equação do 2º grau $ay^2 + by + c = 0$, cujas raízes são y_1 e y_2.

Obtêm-se então as equações do 1º tipo: $m^{f(x)} = y_1$ e $m^{f(x)} = y_2$.

Exemplo:

Resolver a equação:

$$2^{2x+1} - 17 \cdot 2^{x+1} + 144 = 0$$

Decompondo as potências em produtos:

$$2^{2x} \cdot 2 - 17 \cdot 2^x \cdot 2 + 144 = 0 \ (\div 2)$$

$$2^{2x} - 17 \cdot 2^x + 72 = 0$$

Fazendo $2^x = y$ vem $2^{2x} = y^2$, logo:

$$y^2 - 17y + 72 = 0$$

$$y_1 = 8 \text{ ou } y_2 = 9$$

$$2^x = y_1 \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$$

$$2^x = y_2 \Leftrightarrow 2^x = 9$$

Como não sabemos escrever $9 = 2^x$, ainda não temos como encontrar o x.

NOTA
Como $2^3 = 8 < 9 < 16 = 2^4$, a solução da equação $2^x = 9$ satisfaz $3 < x < 4$. Para ser exato, tem-se $x = 3{,}169925...$, que pode ser encontrado por aproximações sucessivas com uma calculadora científica. No capítulo seguinte, resolveremos essa equação usando logaritmos: $x = \log_2 9$.

Exercícios resolvidos:

1) Uma epidemia se alastra segundo a função $p(x) = 2^x + 2^{x-2} + 2^{x-4} + 6$, em que $p(x)$ é o número de pessoas atingidas (em milhares) em x dias. Em quantos dias o número de pessoas infectadas atingirá 174 mil pessoas?

Solução:

$$2^x + 2^{x-2} + 2^{x-4} + 6 = 174$$

$$2^x + \frac{2^x}{2^2} + \frac{2^x}{2^4} = 168$$

Fazendo $2^x = y$, a equação fica:

$$y + \frac{y}{4} + \frac{y}{16} = 168$$

$$21y = 16 \cdot 168$$

$$y = 128$$

Como $y = 2^x$, vem:

$$2^x = 128 \Leftrightarrow 2^x = 2^7 \Leftrightarrow x = 7$$

Resposta: Em 7 dias.

2) Uma fábrica produz em t semanas de trabalho $P(t) = 2^{2t}$ produtos no horário da manhã. Para um mesmo número de horas, à tarde, em t semanas a produção é $Q(t) = 30 \cdot 2^t + 64$ produtos. Em quantas semanas a produção matutina será a mesma que a vespertina?

Solução:
Devemos ter:

$$2^{2t} = 30 \cdot 2^t + 64$$

$$2^{2t} - 30 \cdot 2^t - 64 = 0$$

Fazendo $2^t = y$, $2^{2t} = y^2$, a equação fica:

$$y^2 - 30y - 64 = 0 \Rightarrow y = 32 \text{ ou } y = -2$$

Como $y = 2^t$, vem:

$2^t = 32$ ou $2^t = -2 \Rightarrow$ impossível, pois $2^t > 0, \forall t$

$2^t = 2^5$

$t = 5$

Resposta: Em 5 semanas.

3) Resolver a equação:

$$2\sqrt[x]{4^{\frac{x+4}{2}}} + 3\sqrt[x]{2^{\frac{x+4}{2}}} - 14 = 0$$

<u>Solução:</u>

$$2 \cdot 4^{\frac{x+4}{2x}} + 3 \cdot 2^{\frac{x+4}{2x}} - 14 = 0$$

$$2 \cdot 2^{2 \cdot \frac{x+4}{2x}} + 3 \cdot 2^{\frac{x+4}{2x}} - 14 = 0$$

Fazendo $2^{\frac{x+4}{2x}} = y$, $2^{2 \cdot \frac{x+4}{2x}} = y^2$, logo:

$$2y^2 + 3y - 14 = 0$$

$$y_1 = -\frac{7}{2} \text{ ou } y_2 = 2$$

Temos então:

$$2^{\frac{x+4}{2x}} = -\frac{7}{2} \Rightarrow \text{impossível}$$

$$\text{ou } 2^{\frac{x+4}{2x}} = 2 \Leftrightarrow \frac{x+4}{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 4$$

<u>Resposta:</u> S = {4}

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Faça o que se pede.

a) Calcule as seguintes potências:
$a = 3^3$; $b = (-2)^3$; $c = 3^{-2}$ e $d = (-2)^{-3}$.

b) Escreva os números *a, b, c,* e *d* em ordem crescente.

2 Sendo $x = (2^2)^3$, $y = 2^{3^2}$ e $z = 2^{2^3}$ qual é a potência que representa a expressão *xyz*?

3 Que número real representa a expressão abaixo?

$$\frac{(0,1)^{-1} - (0,8)^0}{2\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$$

4 Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 32$

b) $4^{x-2} = 3^{x+1}$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{4x} = 0,25$

d) $\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} = \frac{27}{125}$

e) $2^{-5x+x^2} = \frac{1}{64}$

f) $3^{x^2-x-3} = 27$

g) $3 \cdot 5^{x^2} + 3^{x^2+1} - 8 \cdot 3x^2 = 0$

h) $2^{1+x} + \sqrt{8} = \sqrt{72}$

i) $4^{x-4} - \frac{3^x}{81} = 0$

j) $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^{x+2} = 32$

k) $1^x + 5^x + 25^x = 3$

l) $\frac{4^{\frac{x}{2}}}{2} - \frac{2^{x-1}}{3} = \frac{4}{3}$

m) $9^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{3^{1-x}} = -1$

8.4.2 – Sistemas de equações exponenciais

Sistemas de equações exponenciais se resolvem combinando os casos vistos anteriormente.

Exemplos:

i) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} \sqrt[x]{x+y} = 2 & \text{(I)} \\ (x+y)\cdot 5^x = 10\,000 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (I) tiramos: $x + y = 2^x$

Substituindo em (II): $2^x \cdot 5^x = 10^4 \Rightarrow 10^x = 10^4 \Rightarrow x = 4$

Donde:

$$4 + y = 2^4 \Rightarrow y = 12$$

Verificando a solução:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{4+12} = 2 & \text{(verdadeira)} \\ (4+12)\cdot 5^4 = 10\,000 & \text{(verdadeira)} \end{cases}$$

Resposta: $S = \{(4, 12)\}$

ii) Resolver o sistema abaixo sabendo que $y > 1$:

$$\begin{cases} (y+1)^x = 4 \\ 4(y^2-1)^{2(x-1)} = (y-1)^{2x} \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{cases} (y+1)^x = 4 \\ 4(y+1)^{2x-2}(y-1)^{2x-2} = (y-1)^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y+1)^x = 4 & \text{(I)} \\ 4\dfrac{(y+1)^{2x}}{(y+1)^2} = (y-1)^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II) vem:

$4 \cdot 4^2 = (y-1)^2 (y+1)^2 \Rightarrow (y^2-1)^2 = 64$

Como $y > 1$: $y^2 - 1 = 8 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = 3$

Substituindo em (I): $(3 + 1)^x = 4 \Rightarrow x = 1$

Testando esses valores:

$$\begin{cases} (3+1)^1 = 4 & \text{(verdadeira)} \\ 4\cdot\dfrac{(3+1)^2}{(3+1)^2} = (3-1)^2 & \text{(verdadeira)} \end{cases}$$

Resposta: $S = \{(1, 3)\}$

8.4.3 – Inequações exponenciais

As inequações exponenciais se resolvem utilizando as propriedades das exponenciais vistas anteriormente.

Quando $a > 1$: $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

Quando $0 < a < 1$: $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

Exemplos:

i) $2^{x+1} > 2^{\frac{x-7}{3}}$

Como a base é maior que 1, a desigualdade se conserva nos expoentes, logo:

$$x + 1 > \frac{x-7}{3} \Leftrightarrow 3x + 3 > x - 7 \Leftrightarrow x > -5$$

ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x} < \left(\frac{1}{9}\right)^{x^2+1} \Leftrightarrow \left(3^{-1}\right)^{5x} < \left(3^{-2}\right)^{x^2+1} \Leftrightarrow 3^{-5x} < 3^{-2x^2-2}$

Como a base é maior que 1:

$$-5x < -2x^2 - 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 < 0 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

O trinômio será negativo para x entre as raízes, isto é:

$$x \in \left[\frac{1}{2},\ 2\right]$$

NOTA
Este exemplo pode ser resolvido da seguinte maneira: $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2(x^2+1)}$
Como a base é entre 0 e 1,
$5x > 2(x^2 + 1) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2.$

iii) Calcular x na desigualdade: $3^{2x} + 3^{2x-1} + 3^{2x-2} > 13 \cdot 3^{x-3}$

Colocando 3^{2x} em evidência:

$$3^{2x}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right) > 13 \cdot 3^{x-3} \Leftrightarrow 3^{2x} > 3^{x-1} \Leftrightarrow 2x > x - 1 \Leftrightarrow x > -1$$

iv) $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{x+1}{x}} < \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{2} \ (x \neq 0)$

Como $1 + x^2 > 1$, então, $\frac{1}{1+x^2} < 1$ (base < 1) e a desigualdade mudará de sentido, logo,

$$\frac{x+1}{x} > 2 \Rightarrow \frac{x+1}{x} - 2 > 0 \Rightarrow \frac{x+1-2x}{x} > 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x} > 0.$$

Como o quociente tem o mesmo sinal que o produto, temos:

$$\frac{x-1}{x} < 0 \Rightarrow x(x-1) < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $4^{3x} \geq 16^{x+1}$

b) $(0{,}1)^{2x+8} \leq (0{,}1)^{5x-1}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}$

d) $\left(\sqrt{3}\right)^{x^2-3x} \geq \left(\sqrt{3}\right)^{4}$

e) $3^{x^2-3x} \geq \frac{1}{9}$

2 Determine o domínio da função definida por $f(x) = \sqrt{2^x - 2^{1-x}}$.

3 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3^x$. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que $f(x+1) + f(-x+4) = 36$.

4 Dê o conjunto solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} 3^{x+y} = 81 \\ 81^{x-y} = 3 \end{cases}$$

5 Se o número real K satisfaz à equação $3^{2k} - 4 \cdot 3^k + 3 = 0$, calcule o valor de K^2.

6 A relação $P = 64\,000(1 - 2^{-0,1t})$ descreve o crescimento de uma população de microrganismos, sendo P o número de microrganismos, t dias após o instante 0. O valor de P é superior a 63 000 se, e somente se, t satisfizer à condição:

(A) $2 < t < 16$

(B) $t > 16$

(C) $t < 30$

(D) $t > 60$

(E) $32 < t < 64$

8.5 – Propriedade característica da função exponencial

NOTA
Essas estimativas são compatíveis com o censo de 2000. Para saber mais, visite o site do IBGE em http://www.ibge.com.br.

NOTA
Modelar matematicamente um fenômeno é determinar uma função que o represente a partir de medidas obtidas de sua observação e que permita reproduzi-las.

Considere as seguintes estimativas da população brasileira, em milhões de pessoas, no início dos anos 2000 a 2004:

ano	2000	2001	2002	2003	2004
população	168,12	170,65	173,21	175,80	178,42

Gostaríamos de encontrar uma fórmula que aproximasse a relação entre cada ano e sua população. Assim, seja t o número de anos desde 2000 e seja $P(t)$ a população brasileira, em milhões, no início daquele ano. Como encontrar um modelo matemático razoável para $P(t)$?

Podemos começar tentando encontrar uma função afim para $P(t)$. Isso só funcionará se os números acima satisfizerem a propriedade característica das funções afins, isto é, se as diferenças entre as populações de anos sucessivos for independente do ano. Vejamos se é esse o caso:

t	0	1	2	3	4
$P(t)$	168,12	170,65	173,21	175,80	178,42
$\frac{\Delta P}{\Delta t} = P(t+1) - P(t)$	$170{,}65 - 168{,}12 = 2{,}53$	$173{,}21 - 170{,}65 = 2{,}56$	2,59	2,62	...

Note que as diferenças são próximas, mas as duas casas decimais não são exatamente iguais. De fato, você pode ver um certo padrão nas diferenças acima – a cada ano, a população parece crescer um pouco mais (em números absolutos) do que no ano anterior. Como a função não obedece muito bem à propriedade característica das funções afins, talvez este não seja o melhor modelo para $P(t) = P(0) + \frac{\Delta P}{\Delta t} \cdot t$.

Mas e se observarmos, ano a ano, o quociente entre populações sucessivas? Usando três casas decimais, obteríamos a seguinte tabela:

t	0	1	2	3	4
$P(t)$	168,12	170,65	173,21	175,80	178,42
$\frac{P(t+1)}{P(t)}$	$\frac{170{,}65}{168{,}12} = 1{,}015$	$\frac{173{,}21}{170{,}65} = 1{,}015$	$\frac{175{,}80}{173{,}21} = 1{,}015$	$\frac{178{,}42}{175{,}80} = 1{,}015$	...

Isto é, o **fator de crescimento** pelo qual a população é multiplicada a cada ano é aproximadamente constante. Essa propriedade nos dá a seguinte ideia para estimar $P(t)$:

No início de 2000: $P(0) = 168{,}12$;

No início de 2001: $P(1) = 168{,}12 \cdot 1{,}015 \simeq 170{,}65$;

No início de 2002: $P(2) = P(1) \cdot 1{,}015 = P(0) \cdot (1{,}015)^2 \simeq 173{,}21$;

No início de 2003: $P(3) = P(2) \cdot 1{,}015 = P(0) \cdot (1{,}015)^2 \cdot 1{,}015 =$
$= P(0) \cdot (1{,}015)^3 \simeq 175{,}80$;

No início de 2004: $P(4) = P(3) \cdot 1{,}015 = P(0) \cdot (1{,}015)^3 \cdot 1{,}015 =$
$= P(0) \cdot (1{,}015)^4 \simeq 178{,}42$

Se esse padrão continuar, concluímos que:

$$P(t) = P(0) \cdot (1{,}015)^t = 168{,}12\,(1{,}015)^t$$

É uma função exponencial de **valor inicial** 168,12 e **fator de crescimento** (isto é, base) 1,015. Por exemplo, esse modelo prevê que as populações brasileiras no início de 1995 e de 2010 seriam cerca de:

$$P(-5) = 168{,}12\ (1{,}015)^{-5} \simeq 156{,}06$$

$$P(10) = 168{,}12\ (1{,}015)^{10} \simeq 195{,}11$$

em milhões de habitantes, respectivamente.

Observe que poderíamos chegar à mesma conclusão calculando a razão entre a diferença de valores consecutivos e o primeiro desses valores:

t	0	1	2	3	4
$P(t)$	168,12	170,65	173,21	175,80	178,42
$\dfrac{P(t+1)-P(t)}{P(t)}$	$\dfrac{170{,}65-168{,}12}{168{,}12}=0{,}015$	$\dfrac{2{,}56}{170{,}65}=0{,}015$	$\dfrac{2{,}59}{173{,}21}=0{,}015$	$\dfrac{2{,}62}{175{,}80}=0{,}015$	...

Ou seja, a população brasileira crescia a uma **taxa relativa de crescimento** praticamente constante de 0,015 (isto é, 1,5%) ao ano entre 2000 e 2004!

Note a relação entre o fator de crescimento e a taxa relativa de crescimento:

$$\underbrace{\frac{P(t+1)-P(t)}{P(t)}}_{taxa} = \frac{P(t+1)}{P(t)} - \frac{P(t)}{P(t)} = \underbrace{\frac{P(t+1)}{P(t)}}_{fator} - 1 \Rightarrow \text{taxa} = \text{fator} - 1$$

Isto é, fator = 1 + taxa:

Por exemplo, no caso acima temos um fator anual de 1,015, que corresponde à taxa anual de 1,015 – 1 = 0,015, ou seja, 1,5% ao ano.

A propriedade acima (fator ou taxa de crescimento constante) é característica das funções exponenciais:

> Em qualquer função exponencial $f(x)$, a diferença entre dois valores consecutivos assumidos pela função $f(x+1) - f(x)$ é proporcional ao primeiro valor $f(x)$, isto é:
>
> $$\frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)} = \text{constante}$$

Para demonstrar essa propriedade para funções exponenciais em geral, escrevemos $f(x) = a \cdot b^x$ (toda função exponencial pode ser escrita assim, onde $a = f(0)$. Então, note que:

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)} = \frac{ab^{x+1}-ab^x}{ab^x} = \frac{ab^x(b-1)}{ab^x} = b-1$$

que não depende de x.

Essa propriedade da função exponencial é que permite modelar matematicamente muitos fenômenos que ocorrem na natureza. A função exponencial ocorre na Física, Química, Biologia, Economia, Sociologia etc.

NOTA
Tempo t negativo é comum e simplesmente indica instantes que ocorrem antes do início da escala de tempo utilizada (pense no significado de "os jogos olímpicos começaram na Grécia em 776 a.C."). **Intervalos** de tempo Δt negativos é que merecem uma segunda inspeção...

OBSERVAÇÃO
Como usar esse modelo para estimar a população brasileira em agosto de 2000? Você acha que esse modelo é preciso para quaisquer valores de t? Seria razoável usá-lo para estimar a população em 1500, 1900 ou 2050? Você acha que a taxa de crescimento da população brasileira é, de fato, constante e igual a 1,5% ao ano?

NOTA
A constante de proporcionalidade é a **taxa de crescimento**.

NOTA
A base b é o *fator* de crescimento, enquanto *b – 1* é a *taxa* de crescimento frequentemente denotada por uma porcentagem.

Exemplos:

i) Numa cultura de bactérias, o número delas duplica a cada hora. Se num determinado instante essa cultura tem 1000 bactérias, em quantas horas ela terá 1024000 bactérias? Quanto cresceu essa cultura durante a quinta hora?
Dizer que a população duplica a cada hora significa que a população é multiplicada pelo fator 2 a cada hora, isto é:

$$f(t) = f(0) \cdot 2^t = 1000 \cdot 2^t$$

onde $f(t)$ é a população de bactérias t horas após o instante inicial em que havia 1000 bactérias.
Para que a população seja 1024000, devemos ter:

$$1000 \cdot 2^t = 1024000 \Leftrightarrow 2^t = 1024 = 2^{10} \Leftrightarrow t = 10 \text{ horas}$$

Para obter o crescimento durante a quinta hora, fazemos:

$$f(5) - f(4) = 1000\,(2^5 - 2^4) = 16000 \text{ bactérias}$$

Observe que:

$$\frac{f(5)}{f(4)} = 2 \Rightarrow \frac{f(5) - f(4)}{f(4)} = 1 = 100\%,$$

ou seja, essa população cresce a uma taxa de $2 - 1 = 1 = 100\%$ a cada hora.

NOTA
Para ler o fator b diretamente da função exponencial, é preciso escrevê-la na forma $C(t) = a \cdot b^t$, com o t sozinho no expoente.

ii) A concentração de um medicamento no sangue em t horas depois de ministrado é dada pela lei $C(t) = 5 \cdot 2^{-0,25t}$ em miligramas por litro. Esse medicamento é metabolizado proporcionalmente à quantidade presente no sangue.
a) Qual a concentração do medicamento no momento de sua aplicação?
b) Qual a concentração 8 horas depois de aplicado?
c) Qual o fator e a taxa de decaimento dessa concentração?

a) No instante da aplicação, $t = 0$, a concentração será:
$C(0) = 5 \cdot 2^{-0,25 \cdot 0} = 5$ mg/L

b) Após 8 horas, a concentração será:
$C(8) = 5 \cdot 2^{-0,25 \cdot 8} = 5 \cdot 2^{-2} = \dfrac{5}{4} = 1,25$ mg/L

c) Reescrevendo a função: $C(t) = 5 \cdot (2^{-0,25})^t = 5 \cdot (0,841)^t$. O fator correspondente a essa função exponencial é 0,841 a cada hora (ou seja, a concentração é multiplicada por 0,841 a cada hora). Portanto, a taxa correspondente é $0,841 - 1 = -0,159$, isto é, a concentração decai 15,9% a cada hora.

NOTA
Quando o fator é menor do que 1, ele é chamado de **fator de decaimento** (ao invés de crescimento). Correspondentemente, a taxa fica negativa e é chamada de **taxa de decaimento**.

iii) Usando o modelo $P(t) = 168,12 \cdot (1,015)^t$ para a população brasileira em milhões (onde t está em anos desde o início de 2000), estime a população brasileira ao final de agosto de 2000 (você vai precisar de uma calculadora).

Agosto é o oitavo mês do ano. Assim, ao final desse mês, teríamos $t = \frac{8}{12}$, e portanto, a população seria de aproximadamente $P\left(\frac{8}{12}\right) = 168{,}12 \cdot (1{,}015)^{\frac{2}{3}} \simeq 169{,}80$ milhões de habitantes.

NOTA
No início de agosto teríamos de usar $t = \frac{7}{12}$, assim como no início de dezembro usaríamos $t = \frac{11}{12}$.

iv) Num país com hiperinflação, o preço de uma banana (que é de \$125,00 quando $t = 0$) dobra a cada 5 dias. Escreva uma fórmula que represente o preço dessa banana em função do tempo t (em dias). Qual será o preço dela depois de 2 meses?
Como o preço $P(t)$ sobe exponencialmente (fator a cada 5 dias é constante) e começa a \$125,00, teremos uma fórmula do tipo $P(t) = 125 \cdot b^t$, onde b será o fator de crescimento diário do preço. Para descobrir b, façamos $t = 5$:

$$P(5) = 125 \cdot b^5 = 125 \cdot 2 \Rightarrow b^5 = 2 \Rightarrow b = 2^{\frac{1}{5}}$$

Assim, a fórmula pedida é $P(t) = 125 \cdot (2^{\frac{1}{5}})^t = 125 \cdot 2^{\frac{t}{5}}$.

Enfim, o preço da banana em 2 meses será aproximadamente:

$$P(60) = 125 \cdot 2^{\frac{60}{5}} = 125 \cdot 2^{12} = 125 \cdot 2^3 \cdot 2^9 = 512000 = \$512.000{,}00$$

Exercícios resolvidos:

1) Ao ser aquecido, o açúcar passa da forma sólida para a líquida, resultando num produto chamado vulgarmente de caramelo. Durante a transformação, a temperatura se mantém constante e ao fim de t minutos a quantidade de açúcar existente é dada pela lei $Q = A \cdot 3^{-0,1t}$.
Sabendo que foram aquecidos 600 g de açúcar para serem invertidos em caramelo, qual a quantidade de caramelo produzida em 10 minutos?

NOTA
Inversão é a transformação do açúcar sólido em açúcar líquido.

Solução:
No instante $t = 0$ a quantidade de açúcar existente é 600 g, logo:

$$600 = A \cdot 3^{-0,1 \cdot 0} \Rightarrow 600 = A \cdot 3^0 \Rightarrow A = 600$$

A fórmula fica, então:

$$Q = 600 \cdot 3^{-0,1t}$$

Ao fim de 10 minutos teremos de açúcar $Q = 600 \cdot 3^{-0,1 \cdot 10} = 600 \cdot 3^{-1} = \frac{600}{3} = 200$ g, logo, a quantidade de caramelo será 400 g.
Resposta: A quantidade é de 400 g.

2) Um recipiente com água é aquecido e a temperatura da água verifica a equação $T = 1 + k \cdot 2^{0,02t}$, em que t é o tempo de aquecimento em segundos e T a temperatura em graus Celsius.

i) Determinar a equação de T sabendo que, no início da observação, a temperatura era 17 °C.

ii) Em quanto tempo a temperatura atingirá 65 °C?

Solução:

i) O início da observação se dá em $t = 0$, logo:

$$17 = 1 + k \cdot 2^{0,02 \cdot 0} \Rightarrow 17 = 1 + k \Rightarrow k = 16$$

A equação fica, então: $T = 1 + 16 \cdot 2^{0,02t}$

ii) Para T = 65 °C, vem: $65 = 1 + 16 \cdot 2^{0,02t}$

$64 = 16 \cdot 2^{0,02t} \Rightarrow 2^{0,02t} = 4 \Rightarrow 2^{0,02t} = 2^2$

$0,02t = 2 \Rightarrow t = 100$ segundos

Resposta: Em 1 minuto e 40 segundos.

3) Uma substância radioativa está em processo de desintegração, de modo que, no instante t, a quantidade não desintegrada é:

$$A(t) = A(0) \cdot 2^{-4t} \quad (t \text{ em anos}),$$

onde A(0) indica a quantidade de substância no instante $t = 0$. Dê o tempo necessário para que a metade da quantidade inicial se desintegre.

Solução:

Devemos ter $A(t) = \dfrac{A(0)}{2}$, logo, $\dfrac{A(0)}{2} = A(0) \cdot 2^{-4t} \Rightarrow 2^{-1} = 2^{-4t} \Rightarrow 4t = 1$

$t = \dfrac{1}{4} = 0,25$ anos

Resposta: O tempo é de 3 meses.

NOTA
O tempo necessário para que um elemento radioativo tenha sua massa reduzida à metade se chama **meia-vida**.

4) A função $v(t) = 1,5 - 0,9 \cdot 3^{-0,1t}$ representa a velocidade (em m/s) de um floco de neve em queda livre (t em segundos).

i) Qual a velocidade inicial do floco?

ii) Quanto tempo leva o floco para atingir o dobro de sua velocidade inicial?

Solução:

i) $v(0) = 1,5 - 0,9 \cdot 3^0 = 0,6$ m/s

ii) Queremos $v(t) = 1,2$ m/s. Assim:

$1,5 - 0,9 \cdot 3^{-0,1t} = 1,2$

$0,3 = 0,9 \cdot 3^{-0,1t}$

$\dfrac{1}{3} = 3 - 0,1t$

$-0,1t = -1$

$t = 10$ segundos

Resposta: A velocidade inicial é de 0,6 m/s e o floco dobra a velocidade em 10 segundos.

5) Um refrigerante é retirado de uma geladeira e colocado num local onde a temperatura é constante. A temperatura do refrigerante t horas após sua retirada da geladeira é dada pela lei $T(t) = A - B \cdot 2^{-0,5t}$. Sabe-se que a temperatura do refrigerante era de 4 graus centígrados quando estava na geladeira e 20 graus centígrados duas horas depois de retirado. Qual será sua temperatura 4 horas depois de retirado do refrigerador?

Solução:

Temos:

$$\begin{cases} T(0) = 4 \\ T(2) = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - B \cdot 2^0 = 4 \\ A - B \cdot 2^{-1} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - B = 4 \\ A - \dfrac{B}{2} = 20 \end{cases}$$

$$A = 4 + B \Rightarrow 4 + B - \frac{B}{2} = 20 \Rightarrow \frac{B}{2} = 16 \Rightarrow B = 32$$

$$A = 4 + 32 \Rightarrow A = 36$$

A fórmula fica, então:

$$T(t) = 36 - 32 \cdot 2^{-0,5t}$$

$$T(4) = 36 - 32 \cdot 2^{-2} = 36 - \frac{32}{4} = 28$$

Resposta: $T(4) = 28\ ^\circ C$

6) Conforme o modelo de Brody, para crescimento de novilhas, o “peso” vivo y (em quilos) em função da idade x (em meses) é expresso em certa faixa etária por:

$$y = 582,6 - 543,1e^{-0,032x}$$

i) Qual o “peso” de uma novilha ao nascer?

ii) Qual o “peso” de uma novilha de 5 meses?

Solução:

i) Para $x = 0$, temos:

$y = 582,6 - 543,1e^{-0,032 \cdot 0} = 582,6 - 543,1$

$y = 39,5$ kg

ii) Para $x = 5$, temos:

$y = 582,6 - 543,1e^{-0,032 \cdot 5} = 582,6 - 543,1 \cdot e^{-0,16}$

$y \simeq 582,6 - 543,1 \cdot 0,852 = 582,6 - 462,8$

$y = 119,8$ kg

NOTA
Quando a base é e, devem ser usadas calculadoras com função e^x.

7) (ITA-SP) Um acidente de carro foi presenciado por $\frac{1}{65}$ da população de Votuporanga (SP). O número de pessoas que soube do aconteci-

mento t horas após é dado por: $f(t) = \dfrac{B}{1 + Ce^{-kt}}$, onde B é a população da cidade.

Sabendo-se que $\dfrac{1}{9}$ da população soube do acidente 3 horas após, calcule o tempo que passou até que $\dfrac{1}{5}$ da população soubesse da notícia.

<u>Solução:</u>

Temos que: $f(0) = \dfrac{B}{65}$, logo, $\dfrac{B}{65} = \dfrac{B}{1 + C \cdot e^{-k \cdot 0}}$

Como B $\neq$ 0, então $\dfrac{1}{65} = \dfrac{1}{1 + C} \Rightarrow C = 64$

A fórmula fica: $f(t) = \dfrac{B}{1 + 64 \cdot e^{-kt}}$

É dado que $f(3) = \dfrac{B}{9}$, logo,

$$\frac{B}{9} = \frac{B}{1 + 64e^{-k \cdot 3}} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{1 + 64e^{-k \cdot 3}}$$

então, $1 + 64 \cdot e^{-3k} = 9 \Rightarrow 64 \cdot e^{-3k} = 8 \Rightarrow e^{-3k} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow e^{-k} = \left(\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$

Substituindo na fórmula original:

$$f(t) = \frac{B}{1 + 64\left(e^{-k}\right)^t} = \frac{B}{1 + 64 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^t}$$

Deseja-se que:

$$\frac{B}{5} = \frac{B}{1 + 64 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^t} \Leftrightarrow 1 + 64\left(\frac{1}{2}\right)^t = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{5 - 1}{64} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^t = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Leftrightarrow t = 4$$

<u>Solução:</u> O tempo pedido é de 4 horas.

NOTA
Não foi necessário descobrir o valor de k (e^{-k} bastou). A ferramenta para encontrá-lo será apresentada no próximo capítulo:
$k = \ln 2 = 0{,}693...$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (Cesgranrio-RJ) Simplificando $\dfrac{2^{10}-3^6}{2^5+3^3}$, encontramos:

(A) 59
(B) 50
(C) 25
(D) 15
(E) 5

2 (PUC-SP) O valor da expressão $\dfrac{10^{-30}\cdot 10^5}{10\cdot 10^4}$ é:

(A) 1 000
(B) 10
(C) 0,1
(D) 0,01
(E) 0,001

3 (Fuvest-SP) Dos números abaixo, o que está mais próximo de $\dfrac{(5,2)^4\cdot(10,3)^3}{(9,9)^2}$ é:

(A) 0,625
(B) 6,25
(C) 62,5
(D) 625
(E) 6 250

4 (Ucsal-BA) Sejam os números inteiros $A = 2^3\cdot 3^x\cdot 5^y$ e $b = 10^4\cdot 3^8$. Se o máximo divisor comum de A e B é 360, então $x + y$ é igual a:

(A) 9
(B) 6
(C) 5
(D) 3
(E) 2

5 (PUC-MG) O resultado simplificado da expressão $\left[\left(\dfrac{1}{m^2}-\dfrac{1}{n^2}\right):\left(\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}\right)\right]:\dfrac{m+n}{mn}$ é:

(A) $\dfrac{1}{m^2}$
(B) $\dfrac{m+n}{n}$
(C) $\dfrac{m}{n}$
(D) $\dfrac{m+n}{m}$
(E) 1

6 (Vunesp-SP) O valor da expressão $5^{-1}-\dfrac{1}{2}$ é:

(A) 0,3
(B) –0,3
(C) –0,2
(D) 0,2
(E) 0

7 (FGV-SP) O resultado da expressão:

$$A=\frac{a\cdot b^{-2}\cdot(a^{-1}\cdot b^2)^4\cdot(a\cdot b^{-1})^2}{a^{-2}\cdot b\cdot(a^2\cdot b^{-1})\cdot(a^{-1}\cdot b)}$$ para $a = 10^{-3}$ e $b = -10^{-2}$

faz parte de qual conjunto?

(A) $(10^{-6}, 10^{-6})$
(B) $(-10^{-6}, -10^{6})$
(C) $(-10^{9}, 10^{-9})$
(D) $(-10^{-9}, 10^{9})$
(E) nenhuma das respostas anteriores.

8 (UFPR) Se $2^x + 2^{-x} = 3$, o valor de $8^x + 8^{-x}$ é:

(A) 12
(B) 18
(C) 21
(D) 24
(E) 27

9 (PUC-MG) A expressão $\dfrac{2^{3+x}-2^{x-3}}{2^x+2^{x-3}}$ é igual a:

(A) 2^x
(B) 2^{-x}
(C) 2^{-3}
(D) 7
(E) 8

10 (PUC-MG) Se $A=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$ e $B=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, $A^2 + B^2$ é igual a:

(A) 1
(B) 2
(C) 4
(D) e
(E) e^2

11 (Ucsal-BA) A média geométrica de dois números positivos a e b é igual a $\sqrt{a\cdot b}$. Sabendo-se que a média geométrica de dois números é igual a 6 e um deles é o quádruplo do outro, então:

(A) o menor deles é um número primo.
(B) o maior deles é um número ímpar.
(C) o menor deles é um número quadrado perfeito.
(D) o maior deles é um número primo.
(E) o menor deles é um número par.

12 (PUC-MG) Das sentenças abaixo, é correto afirmar:

I) $-3^2 = 9$

II) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

III) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

IV) $(2^{-2})^{-5} = 2^{10}$

V) $\sqrt[3]{2^7} = 4\sqrt[3]{2}$

(A) só duas são falsas.
(B) todas são falsas.
(C) todas estão corretas.
(D) quatro estão corretas.
(E) só duas são corretas.

13 (UFMG) Seja $(x+2)^{\frac{1}{3}} = 3, x > 0$. Pode-se afirmar que $x^{\frac{-3}{2}}$ é igual a:

(A) 0,002
(B) 0,008
(C) 0,025
(D) 0,125
(E) 1

14 (UFMG) Se a e b são números reais positivos, tais que $(a^2 + b^3)(a^2 - b^3) = \frac{2^3}{3^7} - b^6$, pode-se afirmar que $a^{\frac{-1}{3}}$ é igual a:

(A) $\sqrt[12]{3^7 \cdot 2^{-3}}$
(B) $\sqrt[12]{3^{-7} \cdot 2^3}$
(C) $\sqrt[3]{3^{28} \cdot 2^{-12}}$
(D) $\sqrt[3]{3^{-28} \cdot 2^{12}}$
(E) $\sqrt[4]{(3 \cdot 2)^{-21}}$

15 (Ufpel-RS) O valor da expressão $\left(\frac{1}{4}\right)^{0,5} : \left(\frac{1}{32}\right)^{0,2}$ é:

(A) 0,125
(B) 0,25
(C) 0,5
(D) 0,75
(E) 1

16 (UFRN) $\dfrac{2^{\frac{3}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}}{8^{\frac{5}{6}}}$ é igual a:

(A) 1
(B) 2
(C) $4^{\frac{1}{2}}$
(D) $8^{\frac{3}{4}}$
(E) $8^{\frac{7}{6}}$

17 (UEL-PR) Seja $M = \left[\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\right]^{1,5} \cdot (0,6)^{-2}$. Efetuando-se as operações, tem-se que:

(A) $M < \frac{5}{3}$
(B) $-1 < M < 0$
(C) $0 < M < \frac{1}{3}$
(D) $\frac{1}{2} < M < \frac{4}{5}$
(E) $M > 2$

18 (Ucsal-BA) O valor da expressão :

$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \cdot \left(2^{12} \cdot 5^{21}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(2^2 \cdot 5^{2^3}\right)$ é:

(A) 8
(B) 10
(C) 20
(D) 125
(E) $2^3 \cdot 5^4$

19 (UFMG) O valor de $m = \left[\sqrt{(-3)^2} - \frac{1}{0,444...}\right]^{\frac{-3}{2}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{2^8}}$ é:

(A) $-\frac{2}{21\sqrt{7}}$
(B) $\frac{1}{42}$
(C) $\frac{3}{5}$
(D) $\frac{2}{3}$
(E) $\frac{9}{8}$

20 (UFCE) Se $f(x) = 16^{1+\frac{1}{x}}$, então $f(-1) + f(-2) + f(-4)$ é igual a:

(A) 11
(B) 13
(C) 15
(D) 17

21 (UFMG) Se $f(x) = \begin{cases} 2x \text{ para } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} \text{ para } x > 1 \end{cases}$, então

$f(0) - f\left(\frac{3}{2}\right)$ é igual a:

(A) $\frac{5}{2}$
(B) $\frac{5}{3}$
(C) $\frac{1}{3}$
(D) $-\frac{1}{2}$
(E) $-\frac{2}{3}$

22 (PUC-RS) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x$. Então, $f(a + 1) - f(a)$ é igual a:

(A) 2
(B) 1
(C) $f(a)$
(D) $f(1)$
(E) $2f(a)$

23 (PUC-MG) Seja a função exponencial $f(x) = a^x$. É correto afirmar que:

(A) ela é crescente se $x > 0$.

(B) ela é crescente se $a > 0$.

(C) ela é crescente se $a > 1$.

(D) ela é decrescente se $a \neq 1$.

(E) ela é decrescente se $0 < x < 1$.

24 (PUC-MG) Os valores de $a \in \mathbb{R}$ que tornam a função exponencial $f(x) = (a - 3)^x$ decrescente são:

(A) $a < 3$

(B) $0 < a < 3$

(C) $3 < a < 4$

(D) $a < 3$ e $a \neq 0$

(E) $a > 3$ e $a \neq 4$

25 (PUC-SP) As funções $y = a^x$ e $y = b^x$, com $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq b$, têm gráficos que se encontram em:

(A) 1 ponto.

(B) 2 pontos.

(C) 4 pontos.

(D) nenhum ponto.

(E) infinitos pontos.

26 Resolva as seguintes equações:

a) $8^x = 32$

b) $(0,1)^{x-5} = 10$

c) $10^x = 10^{-0,2} \cdot \sqrt[4]{10}$

d) $2^8 \cdot 5^5 = 0,8 \cdot 01^n$

e) $3^3 \cdot 2^5 = 4 \cdot 6^k$

f) $3^{3x-1} \cdot 9^{2x+3} = 27^{3-x}$

g) $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$

h) $3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 9 = 0$

27 (PUC-RJ) O sistema de equações $\begin{cases} 3^{x+y} = 81 \\ 81^{x-y} = 3 \end{cases}$:

(A) não tem solução.

(B) tem uma solução, tal que $x = y$.

(C) tem uma solução com x e y inteiros.

(D) tem uma solução com x e y racionais não inteiros.

(E) tem duas soluções diferentes (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

28 (UFF-RJ) Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{4x} - e^{2x} - e^{2(x+1)} + e^2$, pode-se afirmar que a soma das abscissas dos pontos em que o gráfico de f corta o eixo x é:

(A) 0

(B) 1

(C) e

(D) $1 + e$

(E) $1 + e^2$

29 Sob certas condições, o número de bactérias B de uma cultura, em função do tempo t, medido em horas, é dado por $B(t) = 2^{\frac{t}{12}}$. Isso significa que em 5 dias completos após a hora zero, o número de bactérias será:

(A) 512

(B) 1 024

(C) 1 120

(D) 2 000

(E) 2 048

30 (UFMG) Se $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2}$, e $h(x)$ $\dfrac{3^x - 3^{-x}}{2}$, $f(g(x)) - f(h(x))$ é igual a:

(A) 3^{-x}

(B) 3^{-2x}

(C) 3^{2x}

(D) 0

(E) 1

31 (PUC-SP) Os gráficos das funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = x^2 - 1$ se interceptam em um ponto de abscissa 3. O valor de a é:

(A) 2

(B) 3

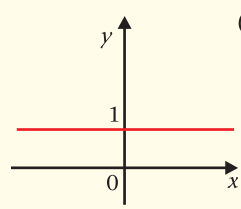
(C) 4

(D) 8

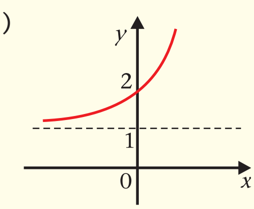
(E) 9

32 O gráfico que melhor representa a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x + \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, é:

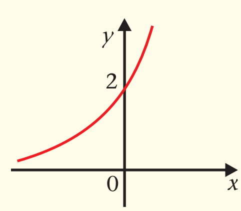
(A)



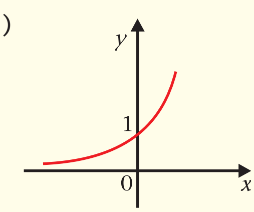
(D)



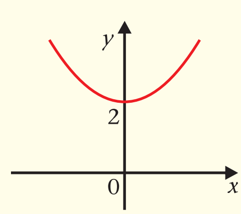
(B)



(E)

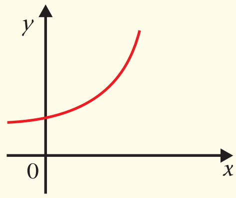


(C)

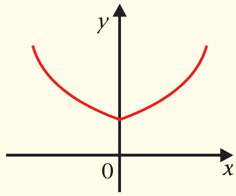


33 (Cesgranrio-RJ) A função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{|x|}$, é melhor representada por:

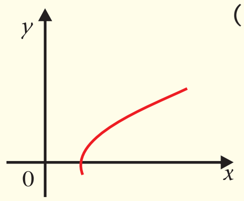
(A)



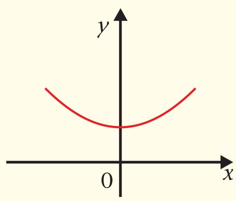
(D)



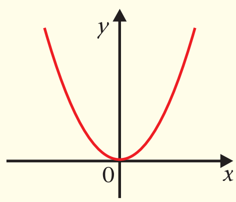
(B)



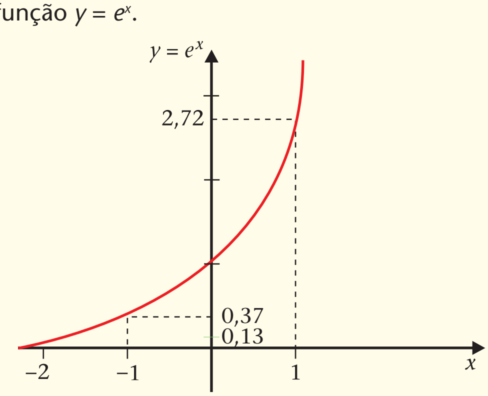
(E)



(C)



34 (Uerj) Uma empresa acompanha a produção diária de um funcionário recém-admitido utilizando uma função $f(d)$, cujo valor corresponde ao número mínimo de peças que a empresa espera que ele produza em cada dia (d), a partir da data de sua admissão.
Considere o gráfico auxiliar abaixo, que representa a função $y = e^x$.



Utilizando $f(d) = 100 - 100 \cdot e^{-0,2d}$ e o gráfico acima, a empresa pode prever que o funcionário alcançará a produção de 87 peças num mesmo dia, quando d for igual a:

(A) 5 (C) 15

(B) 10 (D) 20

35 (Unirio-RJ) Numa população de bactérias, há $P(t) = 10^9 \cdot 4^{3t}$ bactérias no instante t medido, em horas e/ou fração da hora. Sabendo-se que inicialmente existem 109 bactérias, quantos minutos são necessários para que se tenha o dobro da população inicial?

(A) 20 (D) 15

(B) 12 (E) 10

(C) 30

36 Resolva as seguintes inequações:

a) $(0,1)^{2x+3} > (0,1)^{x-1}$

b) $25^{1-x} < \dfrac{1}{5}$

c) $(0,8)^{4x^2-x} > (0,8)^{3(x+1)}$

37 (UFF-RJ) A automedicação é considerada um risco, pois a utilização desnecessária ou equivocada de um medicamento pode comprometer a saúde do usuário: substâncias ingeridas difundem-se pelos líquidos e tecidos do corpo exercendo efeito benéfico ou maléfico.
Depois de se administrar determinado medicamento a um grupo de indivíduos, verificou-se que a concentração (y) de certa substância em seus organismos alterava-se em função do tempo decorrido (t), de acordo com a expressão $y = y_0 \cdot 2 - 0,5t$, em que y_0 é a concentração inicial e t é o tempo em horas.
Nessas circunstâncias, pode-se afirmar que a concentração da substância tornou-se a quarta parte da concentração inicial após:

(A) 14 horas. (D) 2 horas.

(B) meia hora. (E) 4 horas.

(C) 1 hora.

38 (IBMEC-RJ) A condição necessária e suficiente a que deve satisfazer K, na equação exponencial $2^x = 4 - K^2$ para que ela tenha solução é:

(A) $K < -2$ ou $K > 2$ (C) $K \geq 0$

(B) $K < 2$ (D) $-2 < K < 2$

39 (Unirio-RJ) Seja uma função f definida por $f(x) = 2^{x^2+5x-3}$. Determine os valores de x tais que $f(x)$ seja menor do que 8.

40 (Unirio-RJ) O conjunto solução da inequação $x^2 \geq x^{x+3}$, onde $x > 0$ e $x \neq 1$, é:

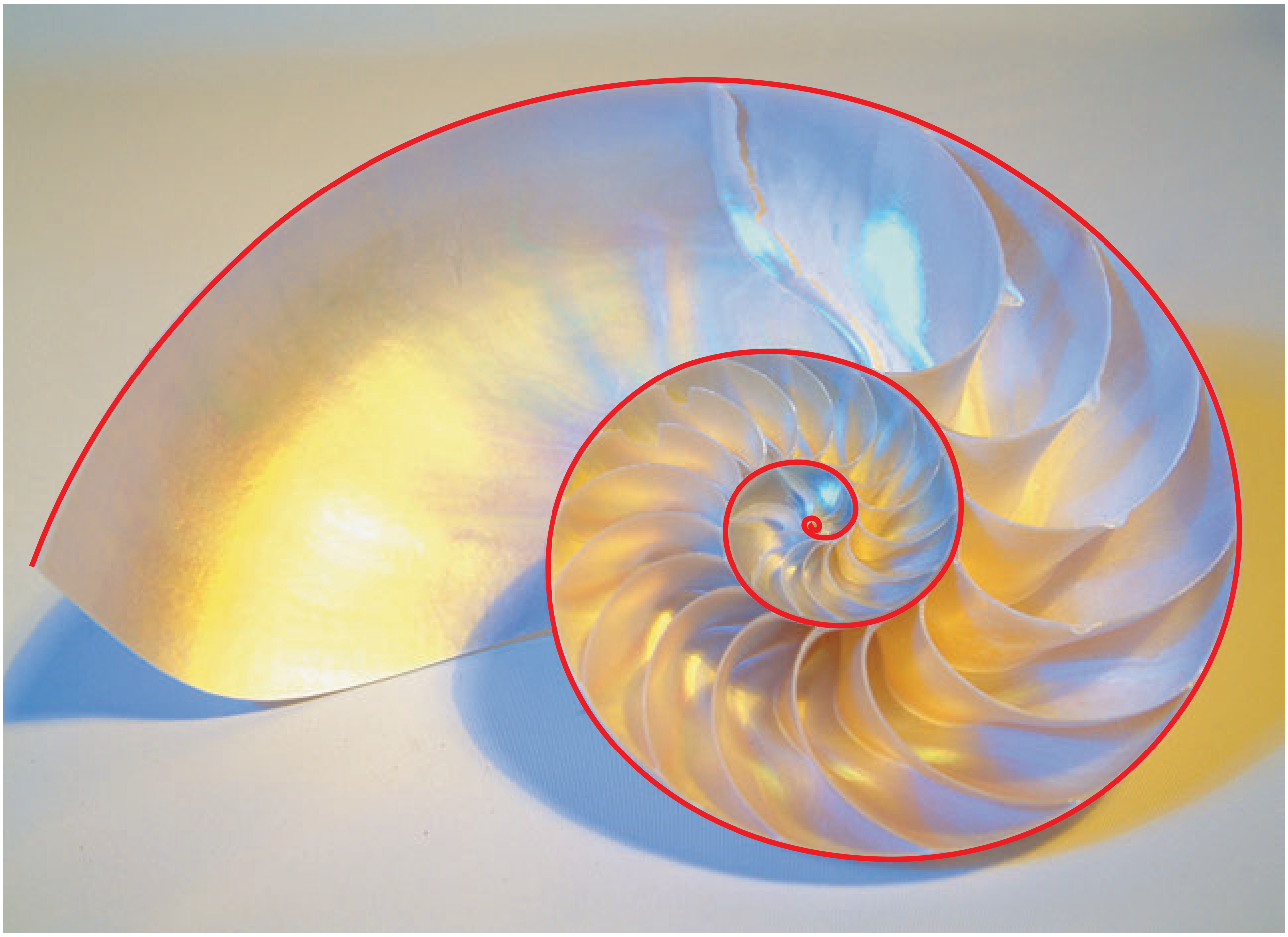
(A) $]0, 1[\cup [3, +\infty[$ (D) $\varnothing$

(B) $\{x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < x\ 1\}$ (E) $\mathbb{R}$

(C) $[3, +\infty[$

CAPÍTULO IX

FUNÇÃO LOGARÍTMICA



David Freund/Stockphoto.com

Uma das aplicações da função logaritmo é descobrir a idade de achados arqueológicos e fósseis, ou descobrir quanto tempo tem-se de esperar para que a radiação numa área decaia para níveis seguros. Na fotografia, uma concha de molusco do gênero *Nautilus* – cujo formato pode ser aproximado por uma espiral logarítmica.

9 – FUNÇÃO LOGARÍTMICA

9.1 – Introdução

A função $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ em que $f(x) = b^x$ com $0 < b \neq 1$ é uma função bijetiva, isto é, qualquer que seja $y > 0$ existe apenas um $x \in \mathbb{R}$, tal que $b^x = y$. A função exponencial tem então inversa que se denomina **função logarítmica**, ou simplesmente **logaritmo**.

DEFINIÇÃO
Função logarítmica.

Dado um número real $0 < b \neq 1$, define-se como logaritmo de um número positivo $y > 0$ na base b ao expoente x a que se deve elevar a base b para obter o número y. Usa-se a notação $x = \log_b y$. Temos então:

$$x = \log_b y \Leftrightarrow b^x = y;\ 0 < b \neq 1$$

OBSERVAÇÃO
Nem sempre os logaritmos são números racionais. Por exemplo, vamos mostrar que o $\log_2 3$ não é racional.

Suponhamos que:

$\log_2 3 = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$

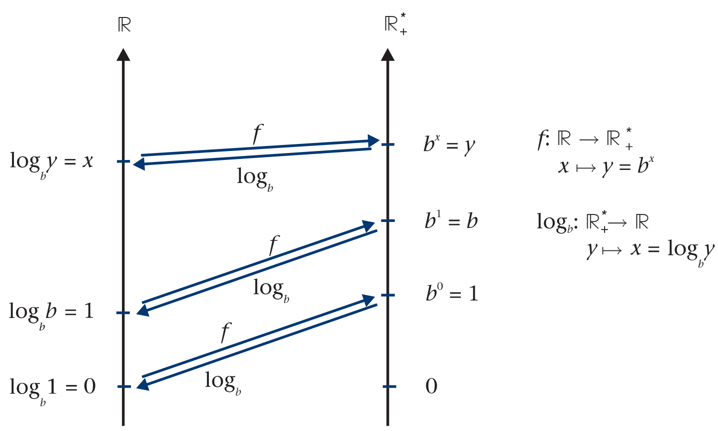
Então:

$2^{\frac{p}{q}} = 3 \Rightarrow \left(2^{\frac{p}{q}}\right)^q = 3^q \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^p = 3^q$

Como p e q são inteiros, $2^p = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$ com p fatores, logo, 2^p é um número par. Por outro lado, temos: $3^q = 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3$ com q fatores, então, 3^q é um número ímpar. Nesse caso a hipótese:

$\log_2 3 = \frac{p}{q}$ nos conduz ao absurdo (nº par) = (nº ímpar). O número $\log_2 3$ não é, portanto, do tipo $\frac{p}{q}$, racional.



Exemplos:

i) Calcular:

a) $\log_2 32 = x \Rightarrow 2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \log 32 = 5$

b) $\log_2 \frac{1}{16} = x \Rightarrow 2^x = \frac{1}{16} \Rightarrow 2^x = 2^{-4} \Rightarrow x = -4 \Rightarrow \log_2 \frac{1}{16} = -4$

c) $\log_2 \sqrt[5]{8}\ x \Rightarrow 2^x = (2^3)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow 2^x = 2^{\frac{3}{5}} \Rightarrow x = \frac{3}{5} \Rightarrow \log_2 \sqrt[5]{8} = \frac{3}{5}$

d) $\log_8 4 = x \Rightarrow 8^x = 4 \Rightarrow (2^3)^x = 2^2 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

e) $\log_{\frac{1}{16}} 8 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{16}\right)^x = 8 \Rightarrow (2^{-4})^x = 2^3 \Rightarrow -4x = 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

f) $\log_2 (-64) = x \Rightarrow 2^x = -64$ (impossível)

ii) Calcular a base a em cada caso abaixo:

a) $\log_a 32 = 5 \Rightarrow a^5 = 2^5 \Rightarrow a = 2$

b) $\log_a 4 = 4 \Rightarrow a^4 = 4 \Rightarrow a = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}\ (a > 0)$

c) $\log_a \frac{3}{5} = -\frac{4}{3} \Rightarrow a^{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \left(a^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{4}} \Rightarrow a = \sqrt[4]{\frac{125}{27}}$

iii) Calcular o número y em cada caso abaixo:

a) $\log_2 y = 3 \Rightarrow y = 2^3 = 8$

b) $\log_{\frac{1}{3}} y = -4 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 3^4 = 81$

c) $\log_{10} y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Exercícios resolvidos:

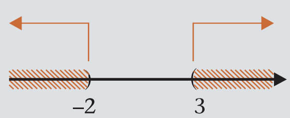
1) Dar o domínio da função $y = f(x)$ em que $y = \log_2 (5x - 15)$.

Solução:
Como só existem logaritmos de números positivos, $5x - 15 > 0 \Rightarrow 5x > 15 \Rightarrow$
$\Rightarrow x > 3 \Rightarrow \text{Dom } f = (3, +\infty)$.

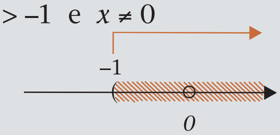
2) Dar o domínio da função $y = f(x)$ em que $y = \log_{x+1} (x^2 - x - 6)$.
Solução:

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 & \text{(I)} \\ 0 < x + 1 \neq 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

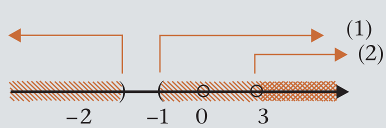
A inequação (I) dá:



A inequação (II) dá: $x > -1$ e $x \neq 0$



A solução comum será:



$$\text{Dom } f = (3, +\infty)$$

NOTA
Nos exercícios sobre logaritmos, as condições de existência devem ser obedecidas.

3) Resolver a equação $\log_{x+5}(4-2x) = \log_{x+5}(8-2x-x^2)$.

Solução:

Devemos ter:

$$\begin{cases} 0 < x+5 \neq 1 \\ 4-2x > 0 \\ 8-2x-x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 < x \neq -4 \\ x < 2 \\ -4 < x < 2 \end{cases}$$

Essas são as condições de existência. Resolvendo, agora, a equação, vem:

$$4-2x = 8-2x-x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Observe que a única raiz que satisfaz às condições iniciais é $x = -2$. É comum resolver-se primeiro a equação logarítmica e em seguida verificar se as soluções encontradas satisfazem as condições de existência.

Resposta: $S = \{-2\}$

4) Resolver a equação $(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x - 12 = 0$.

Solução:

Façamos $\log_2 x = y$. A equação se reduz a $y^2 - 4y - 12 = 0 \Rightarrow y = 6$ ou $y = -2$.

Então:

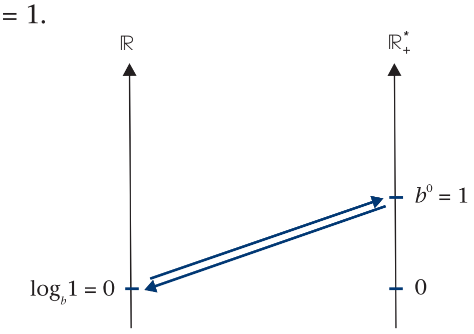
$\log_2 x = 6 \Rightarrow x = 2^6 = 64$ ou $\log_2 x = -2 \Rightarrow x = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$

Resposta: $S = \left\{\dfrac{1}{4}, 64\right\}$

9.2 – Casos particulares da definição

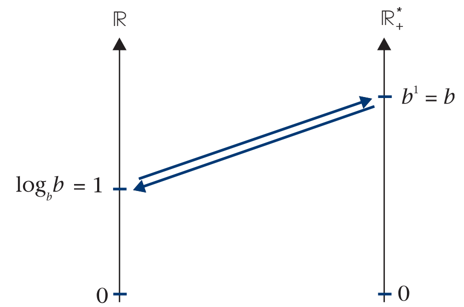
1) $\log_b 1 = 0$

Basta ver que $b^0 = 1$.



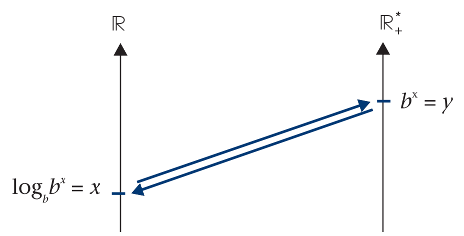
2) $\log_b b = 1$

Basta notar que $b^1 = b$.



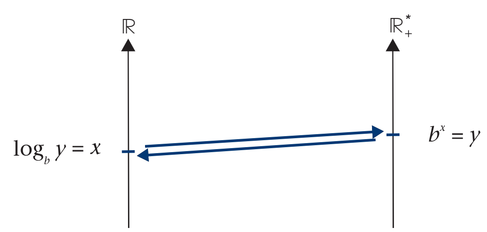
3) $\log_b b^x = x$

Basta ver que $\log_b b^x = y \Leftrightarrow b^y = b^x \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow \log_b b^x = x$.



4) $b^{\log_b y} = y$

Basta ver que $x = \log_b y \Leftrightarrow b^x = y \Leftrightarrow b^{\log_b y} = y$.



NOTA
Quando a base é 10 usa-se a notação $\log_{10} x = \log x$.

NOTA
Quando a base é o número e = 2,71828... usa-se a notação $\log_e x = \ln x$.
Essa base é de grande importância teórica e prática.

Exemplos:

i) $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$

ii) $\log_e 1 = 0$

iii) $\log_{18} 18 = 1$

iv) $\ln e = 1$

v) $\log_3 3^5 = 5$

vi) $\log 10^7 = 7$

vii) $\log_3 3^5 = 5$

viii) $\log_{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}\right)^{\pi}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Aplicando a definição, calcule o valor dos logaritmos:

a) $\log_5 625$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 81$

c) $\log_{100} 0{,}0001$

d) $\log_{0{,}125} \sqrt[4]{32}$

e) $\log_{2\sqrt{2}} 256$

f) $\log_4 2\sqrt{2}$

2 Determine o valor de x real para que exista:

a) $\log_3 (x - 7)$

b) $\log_7 (3 - x)$

c) $\log_{x^2+1} (x^2 + x - 12)$

d) $\log_{x+1} (x^2 - 5x + 6)$

e) $\log |x|$

3 Determine o conjunto verdade da equação logarítmica em cada caso.

a) $\log_{\frac{1}{2}} (\log_9 2x) = 1$

b) $\log_{x^2} (3x^2 + 4) = 2$

c) $\log_{10} (x^2 + 11)^2 - \log_{10} (x^2 + 1) = \log_{10} 101$

d) $\log_{10} (x + 1) + 1 = \log (x^2 + 35)$

4 Calcule o valor de x.

a) $\log_x \frac{9}{4} = \frac{1}{2}$

b) $\log_3 8 = \frac{3}{4}$, $x > 0$

c) $\log_x 3 = \frac{1}{3}$

d) $3^{(\log_3 4 + \log_3 2)} = x$

e) $3^{\log_3 12} = x$

9.3 – Propriedades operatórias

Considere os números x e y positivos.

1) $\log_b x \cdot y = \log_b x + \log_b y$

Em outras palavras:

O logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores.

NOTA
Atenção! Mostramos que $\log_b x \cdot y = \log_b x + \log_b y$.
Mas, em geral, tem-se $\log_b (x \cdot y) \neq \log_b x \cdot \log_b y$ e $\log_b (x + y) \neq \log_b x + \log_b y$.

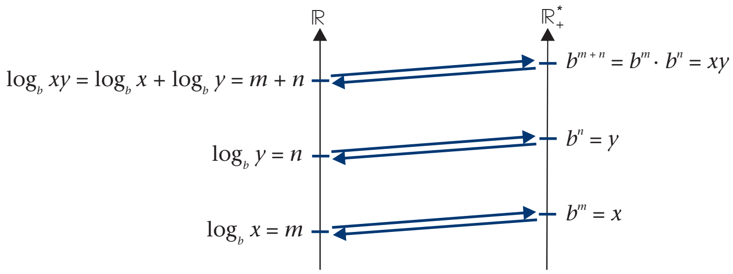
Demonstração:
Suponhamos que, $\left.\begin{array}{l}\log_b x = m \\ \log_b y = n\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} x = b^m & \text{(I)} \\ y = b^n, & \text{(II)}\end{array}$
multiplicando membro a membro, (I) e (II):

$$x \cdot y = b^m \cdot b^n = b^{m+n}$$

Aplicando o logaritmo dos dois lados da equação, temos:

$$\log_b (xy) = \log_b b^{m+n}$$

$$\log_b (xy) = m + n = \log_b x + \log_b y$$



Exemplos:

i) $\log_b a^2 b\sqrt{c} = \log_b a^2 + \log_b b + \log_b \sqrt{c} = \log_b a^2 + 1 + \log_b \sqrt{c}$

ii) $\log 2x = \log 2 + \log x$

2) $\log_b \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

Isto é:

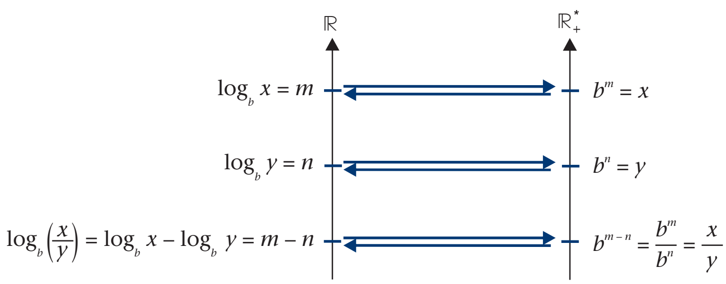
O logaritmo de um quociente é a diferença entre os logaritmos do dividendo e do divisor.

Demonstração:
Suponhamos que:

$$\left.\begin{array}{l} m = \log_b x \\ n = \log_b y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = b^m \\ x = b^n \end{array}$$

Dividindo membro a membro, vem:

$$\frac{x}{y} = \frac{b^m}{b^n} = b^{m-n} \Rightarrow \log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b b^{m-n} = m - n \Rightarrow \log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$



Exemplos:

i) $\log_b \left(\frac{2a^2}{bc}\right) = \log_b 2a^2 - \log_b bc =$

$= \log_b 2 + \log_b a^2 - (\log_b b + \log_b c) =$

$= \log_b 2 + \log_b a^2 - 1 - \log_b c$

ii) $\log \frac{1}{n} = \log 1 - \log n =$

$= 0 - \log n =$

$= -\log n$

NOTA
Atenção! Em geral,
$\log_b \left(\frac{x}{y}\right) \neq \frac{\log_b x}{\log_b y}$.

3) $\log_b x^k = k \cdot \log_b x$

Em outras palavras:

O logaritmo de uma potência é o produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

Demonstração:
Suponhamos que,

$$\log_b x = m \Rightarrow b^m = x$$

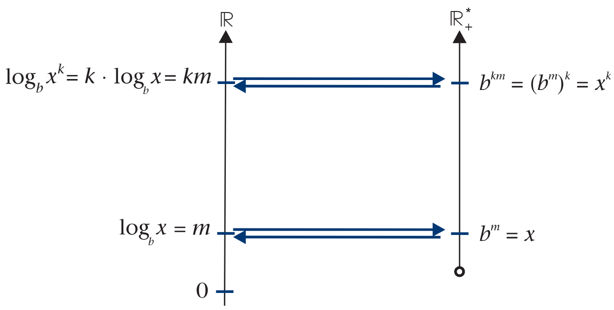
Elevando a equação a k, temos:

$$(b^m)^k = x^k \Rightarrow b^{km} = x^k$$

Aplicando o $\log_b$ em ambos os membros:

$$\log_b x^k = \log_b b^{(km)} \Rightarrow \log_b x^k = k \cdot m \Rightarrow \log_b x^k = k \cdot \log_b x$$

NOTA
$\log_b b^R = R$



Exemplos:

i) $\log_b x^3 = 3\log_b x$

ii) $\log \dfrac{ab^3}{c^2} = \log ab^3 - \log c^2 = \log a + \log b^3 - 2\log c = \log a + 3\log b - 2\log c$

iii) $\log \sqrt[5]{a^2} = \log a^{\frac{2}{5}} = \dfrac{2}{5}\log a$

iv) $\log \sqrt{\dfrac{ab}{c}} = \dfrac{1}{2}\log \dfrac{ab}{c} = \dfrac{1}{2}(\log ab - \log c) = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b - \log c)$

NOTA

$\log_b \sqrt[q]{x^p} = \log_b x^{\frac{p}{q}} =$

$= \dfrac{p}{q} \cdot \log_b x$

Exercícios resolvidos:

1) Sendo log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477, calcular:

i) log 6

ii) log 8

iii) $\log \sqrt[3]{1,44}$

Solução:

i) $\log 6 = \log 2 \cdot 3 = \log 2 + \log 3 = 0,301 + 0,477 = 0,778$

ii) $\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2 = 3 \cdot 0,301 = 0,903$

iii) $\log \sqrt[3]{1,44} = \dfrac{1}{3}\log 1,44 = \dfrac{1}{3}\log \dfrac{144}{100} = \dfrac{1}{3}\log \dfrac{2^4 \cdot 3^2}{10^2} =$

$= \dfrac{1}{3}(\log 2^4 \cdot 3^2 - \log 10^2) = \dfrac{1}{3}(\log 2^4 + \log 3^2 - 2\log 10) =$

$= \dfrac{1}{3}(4\log 2 + 2\log 3 - 2\log 10) = \dfrac{1}{3}(4 \cdot 0,301 + 2 \cdot 0,477 - 2 \cdot 1) =$

$= \dfrac{1}{3}(1,204 + 0,954 - 2) = \dfrac{1}{3}(2,158 - 2) = \dfrac{1}{3} \cdot 0,158 = 0,053$

2) Sendo log 2 = 0,301, calcular log 5.

Solução:

$$5 = \frac{10}{2} \Rightarrow \log 5 = \log \frac{10}{2} \Rightarrow \log 5 = \log 10 - \log 2$$
$$\log 5 = 1 - 0,301 \Rightarrow \log 5 = 0,699$$

3) As editoras enviam para os professores cópias dos lançamentos. Estima-se que se x cópias forem distribuídas, a quantidade de livros vendidos será $Q = 60 - 20 \cdot e^{-0,002x}$ em milhares de livros. ($\ln 2 = 0,693$)

i) Quantos exemplares serão vendidos se não houver distribuição aos professores?

ii) Quantos exemplares devem ser distribuídos para se ter uma venda de 50 000 exemplares?

Solução:

i) Se não houver distribuição, $x = 0$, logo:

$Q = 60 - 20 \cdot e^{-0,002 \cdot 0} = 40$, ou seja, 40 000 exemplares.

ii) Fazendo Q = 50, vem: $50 = 60 - 20 \cdot e^{-0,002 \cdot x}$

$$20\, e^{-0,002x} = 10 \Rightarrow e^{-0,002x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln e^{-0,002x} = \ln \frac{1}{2}$$

$$-0,002x \;\ln e = \ln 1 - \ln 2 \Rightarrow 0,002x = 0,693 \Rightarrow x \cong 347 \text{ cópias}$$

4) A temperatura do cadáver de uma vítima de assassinato foi medida às 11h. Neste momento, o médico da polícia constatou que a temperatura era de 34,8 °C. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva é de 36,5 °C e que o corpo esfria obedecendo à lei $T = k \cdot 2^{-0,025t}$ em que T é a temperatura do corpo t horas após a morte e k uma constante. A que horas se deu a morte da vítima?
(log 2 = 0,30; log 34,8 = 1,54 e log 36,5 = 1,56)

Solução:

No instante $t = 0$ a temperatura era 36,5 °C, então:

$36,5 = k \cdot 2^{-0,025 \cdot 0} \Rightarrow k = 36,5$

A equação do resfriamento fica:

$T = 36,5 \cdot 2^{-0,025t}$

Aplicando logaritmos decimais:

$\log 34,8 = \log 36,5 + \log 2^{-0,025t}$

$1,54 = 1,56 - 0,025t \cdot \log 2$

$$-0,02 = -0,025t \cdot 0,30 \Rightarrow t = \frac{0,02}{0,025 \cdot 0,30}$$

$$t = \frac{2}{0,025 \cdot 30} = \frac{2}{0,75} = \frac{200}{75} = \frac{8}{3}\text{h} = 2\frac{2}{3}\text{h} = 2\text{h}40\text{min}$$

A morte se deu às 11h – 2h40min = 8h20min.

5) O carbono 14 (C^{14}) é um elemento radioativo e se desintegra espontaneamente numa taxa proporcional à quantidade presente numa amostra.
Se $Q(t)$ é a quantidade de C^{14} presente numa amostra no instante t e Q_0, a quantidade presente no instante $t = 0$ (quando a amostra foi formada), então $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-kt}$ em que k é uma constante de desintegração radioativa do C^{14}.

i) Calcular a constante k sabendo que a quantidade de C^{14} se reduz à metade (meia-vida) a cada 5 568 anos. ($\ln 2 = 0,693$)

ii) Calcule a idade de um fóssil cuja quantidade de C^{14} é 12,5% da inicial.

<u>Solução:</u>

i) Devemos ter: $\dfrac{Q_0}{2} = Q_0 \cdot e^{-5568k} \Rightarrow e^{5568k} = 2$

Aplicando logaritmos neperianos,

$\ln e^{5\,588k} = \ln 2 \Rightarrow 5\,568k \cdot \ln e = 0,693,$

então $k = \dfrac{0,693}{5\,568} = 1,2446 \cdot 10^{-4} = 0,00012446.$

A equação fica: $Q(t) \cong Q_0 \cdot e^{-0,0001245t}$

ii) Se $Q(t) = \dfrac{12,5}{100} Q_0$, temos $\dfrac{12,5}{100} Q_0 = Q_0\, e^{-0,0001245t}$

$$e^{-0,0001245t} = \frac{1}{8} \Rightarrow e^{0,0001245t} = 8 \Rightarrow 0,0001245t \cdot \ln e = \ln 8$$

$$0,0001245t = 3 \cdot \ln 2 \Rightarrow t = \frac{3 \ln 2}{0,0001245} = \frac{3 \cdot 0,693}{0,0001245} \cong 16\ 700 \text{ anos}$$

6) Se $\dfrac{\log p}{a} = \dfrac{\log q}{b} = \dfrac{\log r}{c} = \log t$, prove que $\dfrac{q^2}{pr} = t^{2b-a-c}$.

NOTA
Poderíamos raciocinar assim: se são necessários 5 568 anos para termos 50% da massa, seriam necessários $2 \cdot 5\,568$ para termos 25% da massa e $3 \cdot 5\,568$ para 12,5% da massa, ou seja, 16 700 anos aproximadamente.

$$\underbrace{M \xrightarrow{5\,568} \frac{M}{2} \xrightarrow{5\,568} \frac{M}{4} \xrightarrow{5\,568} \frac{M}{8}}_{16\,700 \text{ anos}}$$

Solução:

$$\frac{\log p}{a} = \log t \Rightarrow \log p = a \log t \Rightarrow p = t^a$$

$$\frac{\log q}{b} = \log t \Rightarrow \log q = b \log t \Rightarrow q = t^b$$

$$\frac{\log r}{c} = \log t \Rightarrow \log r = c \log t \Rightarrow r = t^c$$

Calculemos q^2 e pr.

$q^2 = t^{2b}$ $\quad pr = t^{a+c}$

Dividindo membro a membro, vem:

$$\frac{q^2}{pr} = \frac{t^{2b}}{t^{a+c}} \Rightarrow \frac{q^2}{pr} = t^{2b-a-c}$$

7) Prove que, se $\log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$, então $a^2 + b^2 = 7ab$.

$$\log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}\log(ab) = \log\sqrt{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{3} = \sqrt{ab} \Rightarrow \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 9ab \Rightarrow a^2 + b^2 = 7ab$$

9.4 – Mudança de base

A mudança de base consiste em estabelecer a relação entre logaritmos de bases distintas.

Sabemos que $b^{\log_b x} = x$.

Aplicando a ambos os membros, logaritmos na base a, vem:

$$\log_a b^{\log_b x} = \log_a x \Rightarrow \log_b x \cdot \log_a b = \log_a x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}$$

Para passarmos da base b para a base a, basta dividir o logaritmo de base a pelo logaritmo de b na base a.

Caso particular

Se fizermos $x = a$ na fórmula acima, temos:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} \Rightarrow \boxed{\log_b a = \frac{1}{\log_a b}}$$

Exemplos:

i) $\log_2 3 = \dfrac{\log 3}{\log 2} = \dfrac{0,477}{0,301} = 1,585$

ii) $\dfrac{\log_4 10}{\log_5 10} = \dfrac{\dfrac{\log 10}{\log 4}}{\dfrac{\log 10}{\log 5}} = \dfrac{\cancel{\log 10}}{\log 4} \cdot \dfrac{\log 5}{\cancel{\log 10}} = \dfrac{\log 5}{\log 4} = \log_4 5$

iii) $\ln 10 = \dfrac{1}{\log e}$

OBSERVAÇÃO
Para passarmos do sistema decimal para o neperiano, basta dividir os logaritmos decimais por $\log e \cong 0,434$, isto é, $\boxed{\ln x = \dfrac{\log x}{0,434}}$.

Exercícios resolvidos:

1) Calcular $(\log_a b)\,(\log_b c)\,(\log_c d)\,(\log_d a)$.
<u>Solução:</u>
Passando todos os logaritmos para a base a, por exemplo, temos:

$$\log_a b \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \frac{\log_a d}{\log_a c} \cdot \frac{\log_a a}{\log_a d} = 1$$

2) Resolver a equação $\log_3 x + 2\log_9 x - 3\log_{27} x + \log_{81} 27x = 2$.
<u>Solução:</u>
Passando todos os logaritmos para a base 3, temos:

$$\log_3 x + 2 \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 9} - 3 \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 27} + \frac{\log_3 27x}{\log_3 81} = 2$$

$$\log_3 x + 2 \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 3^2} - 3 \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 3^3} + \frac{\log_3 27 + \log_3 x}{\log_3 3^4} = 2$$

Chamando $\log_3 x = y$, vem:

$$y + \frac{2y}{2} - \frac{3y}{3} + \frac{3+y}{4} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + \frac{3+y}{4} = 2 \Rightarrow 4y + 3 + y = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y = 5 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3$$

3) Resolver a equação $\log_2 x^2 + \log_x 4 = 5$.

Solução:

Devemos ter: $2\log_2 x + 2\log_x 2 = 5 \quad (0 < x \neq 1)$

Passando para a base 2: $2\log_2 x + 2 \cdot \dfrac{1}{\log_2 x} = 5$

Chamando $\log_2 x = y$, vem:

$$2y + \frac{2}{y} = 5 \Rightarrow 2y^2 + 2 = 5y \Rightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ ou } y = \frac{1}{2}$$

Então:

$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4$ ou $\log_2 x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

4) O logaritmo de e numa base A é o dobro do seu logaritmo na base B. Sabendo que a soma das bases é o sêxtuplo do logaritmo de B na base A, calcule A e B.

Solução:

$$\log_A e = 2\log_B e \Rightarrow \frac{\log_A e}{\log_B e} = \frac{\ln e}{\ln A} \cdot \frac{\ln B}{\ln e} = \log_A B = 2 \Rightarrow B = A^2$$

$A + B = 6\log_A B \Rightarrow A + A^2 = 6\log_A A^2 \Rightarrow A + A^2 = 12$

$A^2 + A - 12 = 0 \Rightarrow A = 3$ ou $A = -4$ (não serve por ser negativo)

$A^2 = B \Rightarrow B = 9$

Resposta: $A = 3$ e $B = 9$

5) Mostre que $\dfrac{\log_a m}{\log_{ma} a} = (\log_a m)^2 + \log_a m$.

Solução:

Tomemos o 1º membro da igualdade e passemos a base ma do denominador para a base a:

$$\frac{\log_a m}{\log_{ma} a} = \frac{\log_a m}{\dfrac{\log_a a}{\log_a ma}} = \log_a m \cdot \log_a ma =$$

$$= \log_a m\,(\log_a m + \log_a a) = (\log_a m)^2 + \log_a m$$

9.5 – Cologaritmo

Definimos como cologaritmo de um número ao simétrico do logaritmo do número.

$$\operatorname{colog}_b x = -\log_b x$$

A relação anteriormente descrita, também se escreve:

$$\text{colog}_b\, x = -\log_b x = \log_b x^{-1}$$

ou $\boxed{\text{colog}_b\, x = \log_b \frac{1}{x}}$

Podemos definir como cologaritmo de número também o logaritmo do inverso do número.

De forma que o cologaritmo de um número é um logaritmo, as propriedades dos logaritmos são extensivas aos cologaritmos.

Assim:

$$\log_b \frac{x_1}{x_2} = \log_b x_1 + \text{colog}_b\, x_2$$

$$\text{colog}_b\, x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k = \text{colog}_b\, x_1 + \text{colog}_b\, x_2 + \ldots + \text{colog}_b\, x_k$$

$$\text{colog}_b \frac{x_1}{x_2} = \text{colog}_b\, x_1 - \text{colog}_b\, x_2 = \text{colog}_b\, x_1 + \log_b x_2$$

$$\text{colog}_b\, x^p = p\, \text{colog}_b\, x$$

$$\text{colog}_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \text{colog}_b\, x$$

$$\log_b x = -\text{colog}_b\, x = \text{colog}_b \frac{1}{x}$$

NOTA
A utilização do cologaritmo perdeu a importância com o desenvolvimento das calculadoras.

Exercício resolvido:

A acidez ou basicidade de uma solução aquosa é medida por seu $\text{pH} = \text{colog}\left[H_3O^+\right]$, onde $\left[H_3O^+\right]$ é a concentração em moles por litro de H_3O^+.

i) O rótulo de uma água mineral indica pH = 6. Qual a concentração de íons H_3O^+ nesta água?

ii) Qual a concentração de íons H_3O^+ em uma solução neutra, isto é, de pH = 7?

iii) Como varia o pH quando a concentração decuplica?

<u>Solução:</u>

i) $6 = \text{colog}\left[H_3O^+\right] \Rightarrow \log\left[H_3O^+\right] = -6 \Rightarrow \left[H_3O^+\right] = 10^{-6}$ mol/l

ii) $7 = -\log\left[H_3O^+\right] \Rightarrow \left[H_3O^+\right] = 10^{-7}$ mol/l

iii) $\left[H_3O^+\right] = x;\ \ 10 \cdot \left[H_3O^+\right] = y \Rightarrow y = 10x$

$\text{pH}_1 = -\log x;\quad \text{pH}_2 = -\log y = -\log 10x = -\log 10 - \log x = \text{pH}_1 - 1$

Quando a concentração decuplica, o pH diminui uma unidade.

NOTA
Procure no dicionário o significado da palavra **decuplicar**.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Dê o conjunto solução para cada caso abaixo.

a) $\log_2 (3x - 1) - \log_4 (x + 1) = \dfrac{1}{2}$

b) $\log_{10} \sqrt{x} + \log_{100} x = 2$

c) $\log_2 x = \dfrac{1}{2} + \log_4 (4x + 10)$

2 (Unirio-RJ) Resolva o sistema: $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4 \\ xy = 8 \end{cases}$

3 Determinar o valor do quociente $\dfrac{a}{b}$, com $a > 0$ e $b > 0$, na equação: $\log_3 b - \log_3 a = -4$.

4 Sejam $\log 2 = a$ e $\log 5 = b$. Escreva $\log 40$ em função de a e b.

5 Resolva as equações:

a) $\log (x + 4) + \log (x - 4) = 2\log 3$

b) $3\log_{10} \dfrac{x}{4} + 3\log_{10} \dfrac{x}{4} = 5\log_{10} x - \log_{10} 12{,}5$

6 Se os números reais positivos a e b são tais que $\begin{cases} a - b = 48 \\ \log_2 a - \log_2 b = 2 \end{cases}$, calcule o valor de $a + b$.

7 Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} \log(x + 1) - \log y = 3\log 2 \\ x = 4y - 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$

8 Acrescentando 16 unidades a um número, seu logaritmo na base 3 aumenta 2 unidades. Qual é esse número?

9 O pH de uma solução é definido por $\text{pH} = \log_{10}\left(\dfrac{1}{H^t}\right)$, onde H^+ e a concentração de hidrogênio em íons-grama por litro de solução. Determine o pH de uma solução, tal que $H^t = 1{,}0 \cdot 10^{-8}$.

10 A vida média de uma substância radioativa é o tempo decorrido para que a massa inicial dessa substância se reduza à metade, e é dada pela expressão: $\dfrac{1}{2} = e^{-kt}$, onde k é uma constante positiva de proporcionalidade, e o tempo t é dado em anos. Calcule a vida média para o rádio, sabendo-se que sua constante de proporcionalidade é $k = 4{,}4 \cdot 10^{-4}$ e que $\ln 2 = 0{,}7$.

11 Qual o conjunto solução da equação $\log_4 (x - 3) - \log_{16} (x - 3) = 1$?

12 (UFRN) Considere $\log 2 = 0{,}3010$ e $\log 3 = 0{,}4771$. Então, a quantidade de algarismos do número $3^{15} \cdot 2^{12} \cdot 6^{23}$ é igual a:

(A) 25 (B) 26 (C) 27 (D) 28 (E) 29

13 (Fuvest-SP) Pressionando a tecla **log** de uma calculadora, aparece no visor o logaritmo decimal do número que estava antes no visor. Digita-se inicialmente 88888888 (oito oitos). Quantas vezes a tecla **log** precisa ser pressionada para que apareça mensagem de erro?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

14 (Fuvest-SP) Seja $x = 2^{1\,000}$. Sabendo que $\log_{10} 2$ é aproximadamente igual a 0,30103 pode-se afirmar que o número algarismo de x é:

(A) 300 (B) 301 (C) 302 (D) 1 000 (E) 2 000

15 (UFCE) A função real $f(x) = x^2 - 2x + 2$ é definida para todo número x, e P (a, b) é o ponto do gráfico de f mais próximo do eixo das abscissas. O valor do logaritmo decimal de ab é igual a:

(A) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ (B) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{1}{2}$ (E) 0

16 (PUC-SP) Supondo uma taxa de inflação de 20% ao ano, os preços deverão dobrar em aproximadamente:

(A) 1 ano. (B) 2 anos. (C) 3 anos. (D) 4 anos. (E) 5 anos.

17 As indicações R_1 e R_2, na escala Richter, de dois terremotos estão relacionadas pela fórmula:

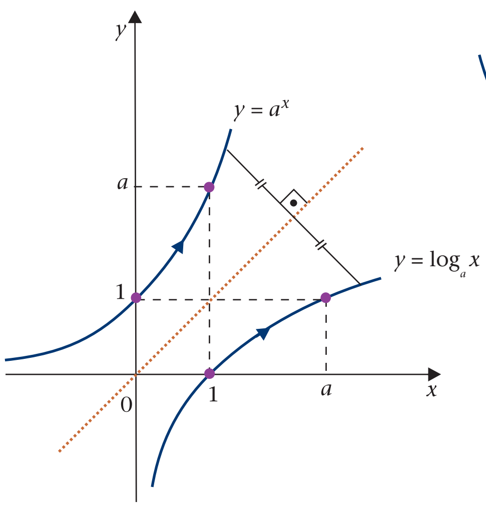
$R_1 - R_2 = \log_{10}\left(\dfrac{M_2}{M_1}\right)$, onde M_1 e M_2 medem as energias liberadas pelos respectivos terremotos, sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Considerando que ocorreram dois terremotos, um correspondente a $R_1 = 6$ e outro correspondente a $R_2 = 4$, determine a razão entre as energias liberadas por eles.

9.6 – Gráfico da função logarítmica

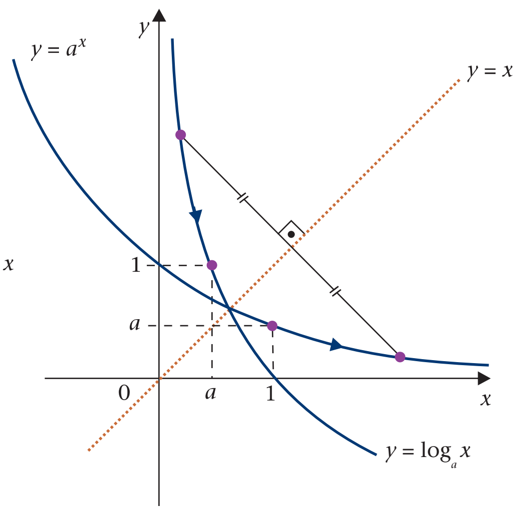
Como a função logarítmica é a inversa da função exponencial, seu gráfico é simétrico ao gráfico da exponencial em relação à reta $y = x$.

$$f(x) = a^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$$

$a > 1$ função crescente



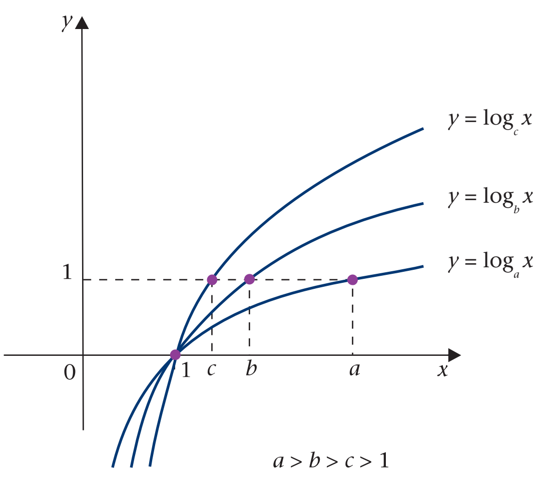
$0 < a < 1$ função decrescente

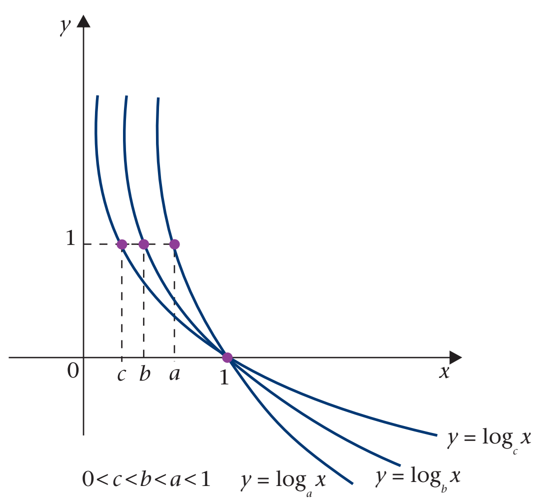


Para as bases maiores que 1, quanto maior for a base, mais próximo do eixo Ox estará o gráfico da função logarítmica. Para bases entre zero e um, quanto menor for a base, mais próximo ele estará do eixo Ox.

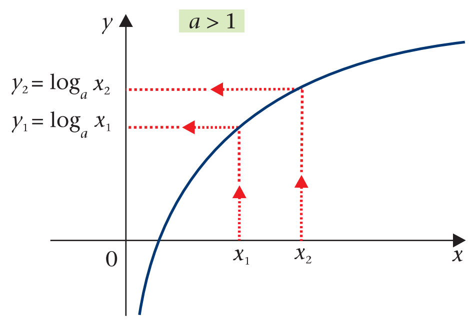
i) Os gráficos das funções logarítmicas sempre cortam o eixo Ox no ponto (1, 0).
ii) As bases podem ser obtidas intersectando a reta $y = 1$ com os gráficos das funções.

NOTA
Assim como as exponenciais têm o eixo Ox como assíntota, as funções logarítmicas têm o eixo Oy como assíntota.



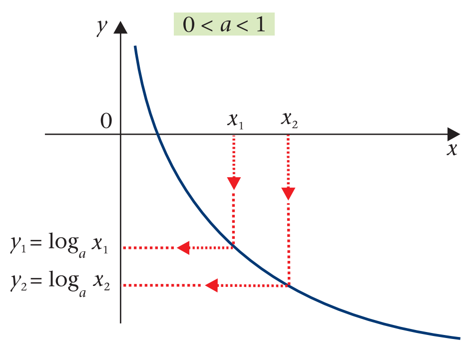


Demonstração algébrica de que $f(x) = \log_a x$ é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$.



Seja $x_1 < x_2$, escreva $y_1 = \log_a x_1$ e $y_2 = \log_a x_2$, então:

$$x_1 = a^{y_1} \text{ e } x_2 = a^{y_2}$$
$$a^{y_1} < a^{y_2} \Rightarrow y_1 < y_2$$
$$\log_a x_1 < \log_a x_2$$



Seja $x_1 < x_2$, escreva $y_1 = \log_a x_1$ e $y_2 = \log_a x_2$, portanto:

$$x_1 = a^{y_1} \text{ e } x_2 = a^{y_2}$$
$$a^{y_1} < a^{y_2} \Rightarrow y_1 > y_2$$
$$\log_a x_1 > \log_a x_2$$

Uma desigualdade não se altera quando se aplicam, a ambos os membros, logaritmos em base maior que 1 e muda de sentido quando a base positiva é menor que 1.

Exemplos:

i) $\log_2 8 > \log_2 5$ porque a base é maior que 1 e $8 > 5$

ii) $\ln 10 < \ln 11$ porque $e > 1$ e $10 < 11$

iii) $\log_{\frac{1}{2}} 8 < \log_{\frac{1}{2}} 5$ porque $\frac{1}{2} < 1$ e $8 > 5$

iv) $\log_{\frac{1}{10}} e > \log_{\frac{1}{10}} 10$ porque $\frac{1}{10} < 1$ e $10 > e$

Propriedades

Quando a base é maior que 1, os números maiores que 1 têm logaritmos positivos e os números entre 0 e 1 têm logaritmos negativos.

Temos: $x > 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a 1 \Rightarrow \log_a x > 0$

$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a 1 \Rightarrow \log_a x < 0$

Quando a base é menor que 1, positiva, os números maiores que 1 têm logaritmos negativos e os números entre 0 e 1 têm logaritmos positivos.

Temos: $x > 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a 1 \Rightarrow \log_a x < 0$

$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a 1 \Rightarrow \log_a x > 0$

Exercícios resolvidos:

1) Resolver a inequação $\log_2 (2x - 10) > 3$.

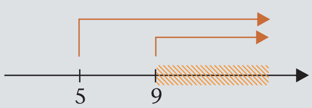
Solução:

Devemos ter: $2x - 10 > 0 \Rightarrow x > 5$ (condição de existência)

Por outro lado, para retirarmos o símbolo $\log_2$ devemos tê-lo em ambos os membros da desigualdade. Então, como $3 = \log_2 2^3$, vem:

$\log_2 (2x - 10) > \log_2 2^3 \Rightarrow 2x - 10 > 2^3$ (base maior que 1)

$2x > 8 + 10 \Rightarrow x > 9$



Resposta: Como $x > 5$ e $x > 9$, a solução comum é $x > 9$.

2) $\log_{\frac{1}{2}} (2x - 1) < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{2} + 3\right)$

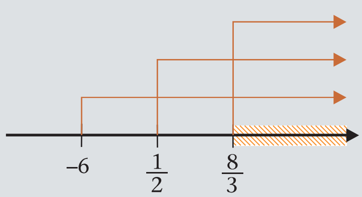
Solução:

Como a base está entre 0 e 1, a desigualdade muda de sentido ao retirarmos o símbolo $\log_{\frac{1}{2}}$, então:

$$2x - 1 > \frac{x}{2} + 3 \Rightarrow 4x - 2 > x + 6 \Rightarrow x > \frac{8}{3}$$

Temos então:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x}{2} + 3 > 0 \Rightarrow x > -6 \\ x > \dfrac{8}{3} \Rightarrow x > \dfrac{8}{3} \end{cases}$$



Resposta: $x > \dfrac{8}{3}$

3) (Fuvest-SP) A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que varia de I = 0 até I = 8,9 para o maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula:

$$I = \frac{2}{3} \log_{10} \frac{E}{E_0}$$

na qual E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh.

i) Qual é a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter?

ii) Aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

i) $8 = \frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0} \Rightarrow \log\frac{E}{E_0} = 12 \Rightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{12}$

$$E = 10^{12} \cdot E_0 = 10^{12} \cdot 7 \cdot 10^{-3} = 7 \cdot 10^9 \text{ kWh}$$

ii) $I = \frac{2}{3}\log\frac{E_1}{E_0} \Rightarrow I + 1 = \frac{2}{3}\log\frac{E_2}{E_0}$

$$\frac{2}{3}\log\frac{E_2}{E_0} - \frac{2}{3}\log\frac{E_1}{E_0} = 1 \Rightarrow \frac{2}{3}\left(\log\frac{E_2}{E_0} - \log\frac{E_1}{E_0}\right) = 1$$

$$\log\frac{\frac{E_2}{E_0}}{\frac{E_1}{E_0}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \log\frac{E_2}{E_1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = 10^{\frac{3}{2}}$$

$$E_2 = E_1\sqrt{10^3} \Rightarrow E_2 = 10\sqrt{10} \cdot E_1$$

Resposta: Fica multiplicada por $10\sqrt{10}$.

4) A energia E em joules liberada no epicentro de um terremoto de intensidade I é dada pela relação $\log E = a + bI$, sendo a e b constantes. Calcular a e b sabendo que um terremoto de intensidade 7 libera cerca de 1000 vezes mais energia que um terremoto de intensidade 5 que por sua vez libera $1{,}4 \cdot 10^{14}$ joules.

Solução:

$\log E_1 = a + 7b$ e $\log E_2 = a + 5b$

Sendo $E_1 = 1000 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{14}$ joules,

$$\text{então: } \begin{cases} \log 1{,}4 \cdot 10^{17} = a + 7b \\ \log 1{,}4 \cdot 10^{14} = a + 5b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 7b = \log 1{,}4 + 17 \\ a + 5b = \log 1{,}4 + 14 \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro: $2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$

Substituindo: $a + 5 \cdot \frac{3}{2} = \log 1{,}4 + 14 \Rightarrow a = \log 1{,}4 + 6{,}5 \Rightarrow a = 6{,}646$

5) (PUC-RJ) Em Química, define-se o pH de uma solução como o logaritmo decimal do inverso da respectiva concentração de H_3O^+. O cérebro humano contém um fluido cuja concentração de H_3O^+ é $4{,}8 \cdot 10^{-8}$ (em média). Calcule o pH desse fluido sendo log 2 = 0,30 e log 3 = 0,49.

Solução:

$$pH = \log \frac{1}{4{,}8 \cdot 10^{-8}} = -\log 4{,}8 \cdot 10^{-8} = -\log 4{,}8 - \log 10^{-8}$$

$$pH = -\log \frac{48}{10} + 8 = 8 - \log 48 + 1 = 9 - \log(3 \cdot 2^4)$$

$$pH = 9 - (\log 3 + 4 \log 2) = 9 - (0{,}49 + 4 \cdot 0{,}30) = 9 - 1{,}69 = 7{,}31$$

6) A magnitude de um astro de brilho B é definida a partir de uma referência B_0 por meio da fórmula $M = \log_a \frac{B}{B_0}$ com a seguinte convenção: "a magnitude aumenta em 5 quando o brilho é dividido por 100".

i) Calcular log *a*.

ii) Determinar a magnitude aparente:

a) do Sol, em que $B = 4{,}786 \cdot 10^{10}\ B_0$;

b) da Lua, em que $B = 1{,}2 \cdot 10^5\ B_0$.

Solução:

i) $$M + 5 = \log_a \frac{\frac{B}{100}}{B_0} \Rightarrow M + 5 = \log_a \frac{\frac{B}{B_0}}{100} \Rightarrow M + 5 = \log_a \frac{B}{B_0} - \log_a 100$$

$$M + 5 = M - \log_a 100 \Rightarrow -\log_a 100 = 5 \Rightarrow \log_a 100 = -5 \Rightarrow \frac{\log 100}{\log a} = -5$$

$$\log a = -\frac{2}{5}$$

ii) a) $$M_{Sol} = \log_a \frac{B}{B_0} = \log_a 4{,}786 \cdot 10^{10} = \frac{\log 4{,}786 \cdot 10^{10}}{\log a}$$

$$M_{Sol} = \frac{\log 4{,}786 + 10 \log 10}{-\frac{2}{5}} = \frac{0{,}68 + 10}{-0{,}4} = -26{,}7$$

b) $$M_{Lua} = \log_a 1{,}2 \cdot 10^5 = \frac{\log 1{,}2 \cdot 10^5}{\log a} = \frac{\log 1{,}2 + 5 \log 10}{-0{,}4}$$

$$= \frac{0{,}08 + 5}{-0{,}4} = -12{,}7$$

NOTA
A lei de Weber-Fechner diz que a sensação provocada por um fenômeno é uma função logarítmica da intensidade do fenômeno.

NOTA
Para calcular o log 4,786 você precisa de uma calculadora.

NOTA
Potência sonora acima de 90 dB é prejudicial ao ouvido humano.

7) O nível sonoro em decibéis (dB) de um som de pressão acústica P é dado pela relação $N = 20 \log \frac{P}{P_0}$, em que $P_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ pascals (menor pressão acústica audível para o ouvido humano).

Calcular os níveis sonoros correspondentes a:

i) $P = P_0$ (limite da audibilidade)

ii) $P = 10^3 P_0$ (conversação normal)

iii) $P = 10^9 P_0$ (decolagem de foguetes)

Solução:

i) $N = 20 \log \frac{P_0}{P_0} = 20 \log 1 = 0\,dB$

ii) $N = 20 \log \frac{10^3 P_0}{P_0} = 20 \log 10^3 = 60\,dB$

iii) $N = 20 \log \frac{10^9 P_0}{P_0} = 20 \log 10^9 = 180\,dB$

8) Um rádio portátil atinge a potência máxima de 100 dB e um CD *player* pode atingir até 120 dB.

Calcular a razão $\frac{P}{P_0}$ para esses dois sons.

Solução:

$$100 = 20 \log \frac{P}{P_0} \Rightarrow \log \frac{P}{P_0} = 5 \Rightarrow \frac{P}{P_0} = 10^5$$

$$120 = 20 \log \frac{P}{P_0} \Rightarrow \log \frac{P}{P_0} = 6 \Rightarrow \frac{P}{P_0} = 10^6$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Sendo $y = e^x$ para x pertecente a $\mathbb{R}$, expresse sua função inversa.

2 Se $f(x) = \log_e \frac{1}{x}$, calcule o valor de $f(e^3)$.

3 Construa os gráficos das funções:

a) $f(x) = \log_3 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

c) $f(x) = \log x$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$

4 Construa os gráficos das funções:

a) $f(x) = \log_2 |x|$

b) $f(x) = |\log_2 x|$

c) $f(x) = |\log_2 |x||$

5 Represente graficamente a função f definida por $f(x) = \ln |x|$.

6 Construa os gráficos das funções:

a) $f(x) = \log_2 (x - 1)$

b) $f(x) = \log_3 (2x - 1)$

c) $f(x) = \log_2 x^2$

d) $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$

7 Construa os gráficos das funções:

a) $f(x) = 2 + \log_2 x$

b) $f(x) = 1 + \log_{\frac{1}{2}} x$

8 Determine o domínio da função definida por $f(x) = \log_2 x + \log_2 (x + 1)$.

9 Resolva a inequação:

$\log_2 x + \log_2 (x + 1) > 1$.

10 É dada a função f definida por $f(x) = \log_2 x - \log_4 (x - 3)$. Determine os valores de x para os quais:

a) $f(x) \leq 2$

b) $f(x) > 2$

11 Quantos números inteiros são soluções do sistema abaixo?

$$\begin{cases} 27^x < 9^{x+3} \\ \log_{\frac{1}{2}} 2x < 0 \end{cases}$$

12 Quais as soluções reais da inequação: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_5 (x+3)} > 1$?

13 Para $x \in \mathbb{R}$, resolva o sistema: $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 16 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (PUC-SP) Se $a = \log_{10}(10^5 \times 100^7) - 10^{\left(\log_2 8 + \log_3\left(\frac{1}{3}\right)\right)}$, então:

(A) $a = -81,1$
(B) $a = -81$
(C) $a = -30$
(D) $a = -30,1$
(E) nenhuma das respostas anteriores

2 (UFRJ) Considere x e y números reais positivos tais que: $\log_3(\log_4(x)) = \log_4(\log_3(y)) = 0$.
Determine o valor de $x + y$.

3 (Cesgranrio-RJ) Um médico, após estudar o crescimento médio das crianças de uma determinada cidade, com idades que variavam de 1 a 12 anos, obteve a fórmula $h = \log\left(10^{0,7} : \sqrt{i}\right)$, onde h é a altura (em metros) e i é a idade (em anos). Pela fórmula, uma criança de 10 anos desta cidade terá de altura:

(A) 120 cm
(B) 123 cm
(C) 125 cm
(D) 128 cm
(E) 130 cm

4 (Unirio-RJ) Um professor propôs aos seus alunos o seguinte exercício: "Dada a função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, determine a imagem de $x = 1\,024$".

$$x \mapsto y = \log_2 64x^3$$

Qual não foi sua surpresa quando, em menos de um minuto, um aluno respondeu corretamente que a imagem era:

(A) 30
(B) 32
(C) 33
(D) 35
(E) 36

5 (Uerj) Em uma calculadora científica de 12 dígitos, quando se aperta a tecla log, aparece no visor o logaritmo decimal do número que estava no visor. Se a operação não for possível, aparece no visor a palavra ERRO. Depois de digitar 42 bilhões, o número de vezes que se deve apertar a tecla log para que, no visor, apareça ERRO pela primeira vez é:

(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

6 (UFRJ) Determine o conjunto D dos números inteiros positivos x para os quais a função $y = \dfrac{\log\left(\dfrac{5-x}{10+x}\right)}{x-2}$ está definida.

7 (PUC-MG) Se $\log_a b = -2$ e $ab = 3$, então $b - a$ é igual a:

(A) $\frac{20}{3}$
(B) $\frac{22}{3}$
(C) $\frac{23}{6}$
(D) $\frac{25}{9}$
(E) $\frac{26}{3}$

8 (PUC-SP) Se $x + y = 20$ e $x - y = 5$, então $\log_{10}(x^2 - y^2)$ é igual a:

(A) 100
(B) 2
(C) 25
(D) 12,5
(E) 15

9 (PUC-SP) Se $0 < x < 1$, um valor aproximado, por falta, de $\log_e(1 + x)$ é dado por $x - \frac{x^2}{2}$, com erro inferior a $\frac{x^3}{3}$. Qual dos valores abaixo está mais próximo de $\log_e 1,2$?

(A) 0,14
(B) 0,16
(C) 0,18
(D) 0,20
(E) 0,22

10 (Fuvest-SP) Se $\log_{10} 8 = a$, então $\log_{10} 5$ vale:

(A) a^3
(B) $5^a - 1$
(C) $\frac{2a}{3}$
(D) $1 + \frac{a}{3}$
(E) $1 - \frac{a}{3}$

11 (PUC-SP) $\log 50 + \log 40 + \log 20 + \log 2,5$ é igual a:

(A) 1
(B) 3
(C) 5
(D) 10
(E) 1 000

12 (UFF-RJ) Pode-se afirmar que o valor de $\log 18$ é igual a:

(A) $\log 20 - \log 2$
(B) $3\log 6$
(C) $\log 3 + \log 6$
(D) $\frac{\log 36}{2}$
(E) $(\log 3)(\log 6)$

13 (Unificado-RJ) O nível de intensidade sonora (N) é expresso em decibéis (dB) por:

$N = 10\log_{10}\frac{I}{I_0}$

onde: I = intensidade sonora fornecida pela caixa de som;

I_0 = intensidade-padrão, correspondente ao limiar da audição (para o qual N = 0).

Para o nível de intensidade N = 120 dB, a intensidade sonora, fornecida pela caixa de som, deverá ser de:

(A) $10^{13} \cdot I_0$
(B) $10^{12} \cdot I_0$
(C) $1\,200 \cdot I_0$
(D) $120 \cdot I_0$
(E) $12 \cdot I_0$

14 (UFF-RJ) No dia 6 de junho de 2000, um terremoto atingiu a cidade de Ankara, na Turquia, com registro de 5,9 graus na escala Richter e outro terremoto atingiu o oeste do Japão, com registro de 5,8 graus na escala Richter.

Considere que m_1 e m_2 medem a energia liberada sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre por terremotos com registros, na escala Richter, r_1 e r_2, respectivamente.

Sabe-se que estes valores estão relacionados pela fórmula:

$$r_1 - r_2 = \log_{10}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)$$

Considerando-se que r_1 seja o registro do terremoto da Turquia e r_2 o registro do terremoto do Japão, pode-se afirmar que $\frac{m_1}{m_2}$ é igual a:

(A) 10^{-1}
(B) $10^{0,1}$
(C) $(0,1)^{10}$
(D) $\frac{10}{0,1}$
(E) $\frac{1}{0,1}$

15 (UFF-RJ) Considere $p = \log_3 2$, $q = \log_{\sqrt{3}} 4$ e $r = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2}$.

É correto afirmar que:

(A) $p < q < r$
(B) $r < q < p$
(C) $q < r < p$
(D) $p < r < q$
(E) $r < p < q$

16 (UFRS) Supondo que uma cidade, com P_0 habitantes, no instante 0, terá $P = P_0\, e^{kt}$ habitantes, no instante t, com $k \in \mathbb{R}$, sendo a população de $2P_0$ no instante 30 e $\ln 2 \cong 0,693$, então $k \cong$:

(A) 20,79
(B) 2,079
(C) 0,693
(D) 0,231
(E) 0,0231

17 (Cesgranrio-RJ) Simplificando $\frac{2^6}{\log_3 81}$, encontramos:

(A) 16
(B) 12
(C) 8
(D) 4
(E) 3

18 (FGV-SP) O valor da expressão:

$\left[\log_2 0,5 + \log_3 \sqrt{27} - \log_{\sqrt{2}} 8\right]^2$ é:

(A) $\frac{121}{4}$
(B) $\frac{289}{4}$
(C) $\frac{49}{4}$
(D) $\frac{169}{4}$
(E) n.d.a.

19 (UFMG) Considerando-se $\log_{10} 2 = 0,30$ e $\log_{10} 3 = 0,47$, pode-se afirmar que o valor de $\log_{10} 60$ é:

(A) 0,141
(B) 0,77
(C) 1,41
(D) 1,77
(E) 10,77

20 (PUC-SP) Determinar $\log_{10} 350$, supondo que $\log_{10} 0,35 = -0,456$.

(A) 1,456
(B) 2,456
(C) 1,544
(D) 2,544
(E) 3,649

21 (UFPR) Sendo log 2 = 0,301 e log 7 = 0,845, qual será o valor de log 28?

(A) 1,146
(B) 1,447
(C) 1,690
(D) 2,107
(E) 1,107

22 (FGV-SP) Sabendo-se que $\log_{10} 2 = 0,3010$ e $\log_{10} 3 = 0,4771$, então $\log_{10} 0,6$ é igual a:

(A) 1,7781
(B) −0,7781
(C) 0,7781
(D) 0,2213
(E) −0,2219

23 (Cesgranrio-RJ) Se log a = 0,4771 e log b = 0,3010, então $\log\frac{a}{b}$ é:

(A) 0,1761
(B) −0,1761
(C) 0,7781
(D) 0,8239
(E) −0,8239

24 (Cesgranrio-RJ) O valor de $\log_a\left(a\sqrt{a}\right)$ é:

(A) $\frac{3}{4}$
(B) $\frac{4}{3}$
(C) $\frac{2}{3}$
(D) $\frac{3}{2}$
(E) $\frac{5}{4}$

25 (Cesgranrio-RJ) O valor de $\log_2 8 + \log_{10}\sqrt{10}$ é:

(A) $\frac{5}{2}$
(B) 3
(C) $\frac{7}{2}$
(D) 4
(E) $\frac{9}{2}$

26 (UFF-RJ) Sejam x, y e p números reais positivos e $p \neq 1$. Se $\log_p(x+y) = m$ e $\log_p x + \log_p y = n$, então $\log_p\left(\frac{x+y}{xy}\right)$ é igual a:

(A) m^n
(B) $\frac{m}{n}$
(C) $m \cdot n$
(D) $m + n$
(E) $m - n$

27 (Unirio-RJ) Seja a função definida por $f(x) = \log_2\left(\frac{x-1}{2x}\right)$.

O valor de x para o qual $f(x) = 1$ é tal que:

(A) $0 < x < \frac{1}{100}$
(B) $\frac{1}{100} < x < \frac{1}{10}$
(C) $\frac{1}{10} < x < \frac{1}{5}$
(D) $\frac{1}{5} < x < \frac{3}{10}$
(E) $x > \frac{3}{10}$

28 (UFR-RJ) Considerando que log 2 = 0,3010300 (logaritmo de 2 na base 10), log 1 250 é:

(A) 376,29000
(B) 188,15000
(C) 1,9030900
(D) 2,9818000
(E) 3,0969100

29 (Cesgranrio-RJ) Se $\log_{10} 123 = 2{,}09$, o valor de $\log_{10} 1{,}23$ é:

(A) 0,0209
(B) 0,09
(C) 0,209
(D) 1,09
(E) 1,209

30 (Unirio-RJ) O conjunto-solução da equação $\log_4 x + \log_x 4 = \frac{5}{2}$, sendo $U = \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, é tal que a soma de seus elementos é igual a:

(A) 0
(B) 2
(C) 14
(D) 16
(E) 18

31 (UFF-RJ) Assinale o produto das raízes da equação $\sum_{k=1}^{50} \log x^{2k} = \log(11x - 30)^{1275}$.

(A) 15
(B) 20
(C) 25
(D) 30
(E) 35

32 (Unirio-RJ) Na solução do sistema $\begin{cases} \log(x+1) - \log y = 3\log 2 \\ x - 4y = 7 \end{cases}$, o valor de x é:

(A) 15
(B) 13
(C) 8
(D) 5
(E) 2

33 Resolva o sistema: $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ xy = 8 \end{cases}$

34 (UFR-RJ) Se log 5 = 3n, log 3 = m, log 10 = 1 e $100^{2x} = \sqrt[3]{135}$, então x vale:

(A) $m + n$
(B) $\frac{3m+n}{4}$
(C) $\frac{3n+m}{4}$
(D) $3n + m$
(E) $\frac{n+m}{4}$

35 O produto das raízes reais de $x^{\log_{10} x} = 10$ vale:

(A) 1
(B) –1
(C) 10
(D) 10^{-1}
(E) 10^{-2}

36 Neste ano (2002), estima-se que o PIB (produto interno bruto) de um país seja de 400 bilhões de dólares. Daqui a t anos, estima-se que o PIB seja de $400(1{,}05)^t$ bilhões de dólares.

a) Em quantos bilhões de dólares crescerá o PIB entre 2009 e 2010?

b) Para que valores de t o PIB superará a marca dos 800 bilhões de dólares?

Observação: não é necessário fazer as contas; deixar o resultado indicado.

37 (UFF-RJ) O valor da expressão $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \ldots \cdot \log_{10} 9$ é:

(A) 0
(B) $\log_{10} 2$
(C) $\log_4 3$
(D) $\log_3 4$
(E) 1

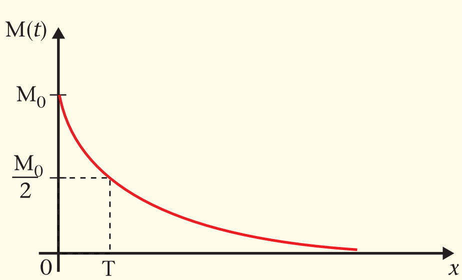
38 Segundo uma pesquisa, após x meses da constatação da existência de uma epidemia, o número de pessoas por ela atingida é $f(x) = \dfrac{20000}{2 + 15 \cdot 4^{-2x}}$.
Supondo log 2 = 0,30 e log 3 = 0,43, daqui a quanto tempo, aproximadamente, o número de pessoas atingidas por essa epidemia chegará a 2 000?

39 Um acidente de carro foi presenciado por $\dfrac{1}{65}$ da população de Caxias (RJ). O número de pessoas que soube do acontecimento t horas após é dado por: $f(t) = \dfrac{B}{1 + Ce^{-kt}}$, onde B é a população da cidade. Sabendo-se que $\dfrac{1}{9}$ da população soube do acidente 3 horas depois, determine o tempo que passou até que $\dfrac{1}{5}$ da população soubesse da notícia.

40 (UFRJ) Um modelo matemático que se usa para estudar a decomposição de uma substância radioativa baseia-se na suposição de que a taxa de variação da massa da substância em relação ao tempo é proporcional à massa existente em cada instante, isto é:

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = -kM$$

A partir dessa informação, pode-se demonstrar que $M(t) = M_0 e^{-kt}$, onde:
M_0 é o valor inicial da massa;
$M(t)$ é a massa no tempo t;
k é uma constante característica da substância.
Chama-se meia-vida da substância o tempo T durante o qual a massa da substância radioativa fica reduzida à metade de sua massa original, conforme ilustra o gráfico abaixo.



Calcule a constante k em função da meia-vida T.

41 (Vunesp) Se $\log_a A = 2 \cdot \log_a c - \dfrac{1}{3} \cdot \log_a d$, então:

(A) $A = \dfrac{c^2}{\sqrt[3]{d}}$
(B) $A = \dfrac{c^2}{3\sqrt{d}}$
(C) $A = \dfrac{2c}{3\sqrt{d}}$
(D) $A = c^2 \cdot \sqrt[3]{d}$
(E) $A = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{c}{\sqrt{d}}$

42 (Vunesp) Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Se α, β e γ são números reais estritamente positivos cujo produto é $\alpha\beta\gamma = \sqrt{a}$, então o valor de x para que $\dfrac{1}{\log_a x} = \dfrac{1}{\log_\alpha a} = \dfrac{1}{\log_\beta a} = \dfrac{1}{\log_\gamma a}$ é:

(A) a
(B) 2^a
(C) $a\sqrt{a}$
(D) a^2
(E) $2\sqrt{a}$

43 Usando a tabela abaixo, o valor de log 75 é:

(A) 1,1417
(B) 1,3011
(C) 1,5564
(D) 1,6818
(E) 1,8752

x	log x
2	0,3010
6	0,7782

44 (Ucsal-BA) Utilizando-se a tabela abaixo, conclui-se que $\sqrt[5]{371293}$ é igual a:

(A) 11
(B) 13
(C) 14
(D) 15
(E) 1

N	log N
9	0,95
11	1,04
13	1,11
15	1,18
17	1,23
...	...
371 293	5,55

45 (Cesgranrio-RJ) O valor de $\sum_{j=1}^{10} \log j$ é:

(A) log (10!)
(B) log (9!)
(C) log 10
(D) $\log 10^{10}$
(E) 0

46 (Ucsal-BA) Indica-se por log x o logaritmo de um número x na base 10. Se log 2 = a, o valor de log 25 é:

(A) $\frac{a}{4}$
(B) $\frac{a}{2}$
(C) $4a$
(D) $1 - a$
(E) $2 - 2a$

47 (Uerj) Há números em que, para cada um deles, o quadrado do logaritmo decimal é igual ao logaritmo decimal do seu respectivo quadrado. Logo, a soma dos valores reais dos números que satisfazem essa igualdade é:

(A) 90
(B) 99
(C) 100
(D) 101
(E) 201

48 (Uerj) O logaritmo decimal do número positivo x é representado por log x. Então, a soma das raízes de $\log^2 x - \log x^3 = 0$ é igual a:

(A) 1
(B) 101
(C) 1 000
(D) 1 001

49 (PUC-SP) Sabendo-se que $\log_3 10 \cong 0{,}47712$, podemos afirmar que o número de algarismos de 9^{25} é:

(A) 21
(B) 22
(C) 23
(D) 24
(E) 25

50 (Unirio-RJ) Sabendo-se que $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ onde a, b, c são positivos e $b \neq 1$ e $c \neq 1$, o valor de $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[3]{12}$ é igual a: (considere $\log_2 3 = x$)

(A) $\frac{-2x}{3}$
(B) $\frac{-(2+x)}{9}$
(C) $\frac{-(2+x)}{3}$
(D) $\frac{(2+x)}{9}$
(E) $\frac{(2+x)}{3}$

51 (UFF-RJ) São dados os números reais positivos a, b e x tais que $a \neq 1$ e $b \neq 1$. Sabe-se que $\log_a x = x$ e $\log_b x = 4$. Calcule $\log_{ab} a\sqrt{x}$.

52 (UFRJ) Sendo x e y números reais e $y \neq 0$, expresse o logaritmo de 3^x na base 2^y em função de x, y e $\log_2 3$.

53 (UFF-RJ) A energia potencial elástica (E) e a variação no comprimento ($\Delta\ell$) de uma determinada mola estão associadas conforme a tabela.

$y = \log E$	$x = \log \Delta\ell$
4	1
6	2

Sabe-se, também, que a relação entre y e x é estabelecida pela equação $y = nx + \log\left(\frac{K}{2}\right)$, sendo K a constante elástica da mola e n uma constante.

a) Determine os valores das constantes K e n.

b) Determine o valor de E para $\Delta\ell = 3$.

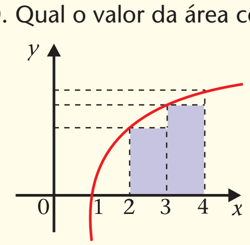
54 (UFRJ) Uma calculadora eletrônica pode escrever números inteiros de até oito dígitos. Quando uma operação cujo resultado é maior ou igual a 100 000 000 é realizada, aparece no visor o símbolo "E", que indica a incapacidade da máquina de fazer aquele cálculo.
Uma pessoa digitou o número 5 na máquina e, em seguida, efetuou a operação "multiplicação por 2" diversas vezes, até aparecer o símbolo "E" no visor.
Sabendo que $\log_{10} 2 \cong 0{,}301$, determine o número de vezes que a operação foi realizada.

55 (Unirio-RJ) Um explorador descobriu, na selva amazônica, uma espécie nova de planta e, pesquisando-a durante anos, comprovou que o seu crescimento médio variava de acordo com a fórmula $A = 40(1{,}1)^t$, onde a altura média A é medida em centímetros e o tempo t em anos. Verificou também que seu crescimento estaciona, após os 20 anos, abaixo de 3 metros.
Sabendo-se que log 2 = 0,30 e log 11 = 1,04, determine:

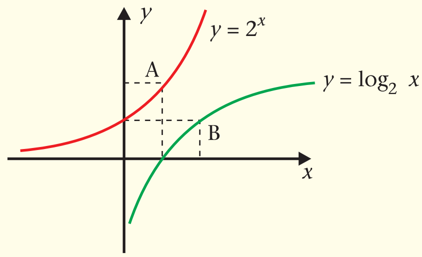
a) a altura média, em centímetros, de uma planta dessa espécie aos 3 anos de vida;

b) a idade, em anos, na qual a planta tem uma altura média de 1,6 m.

56 (UFGO) A curva abaixo representa o gráfico da função $y = \log x$, $x > 0$. Qual o valor da área colorida?



57 (Unirio-RJ) Analisando os gráficos abaixo, podemos afirmar que os pontos A e B correspondem, respectivamente, a:



(A) (3, 8) e (2, 1)

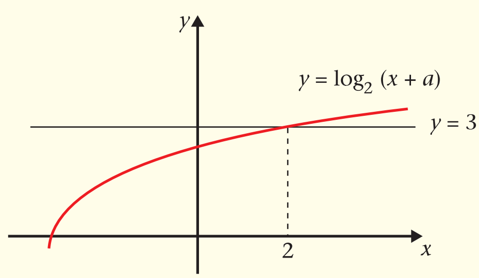
(B) (2, 1) e (3, 8)

(C) (2, 1) e (1, 2)

(D) (1, 2) e (1, 1)

(E) (1, 2) e (2, 1)

58 (Uerj) No sistema cartesiano abaixo, estão representadas as funções $y = \log_2 (x + a)$ e $y = 3$, onde a é número real diferente de zero.



Assim, o valor de a é:

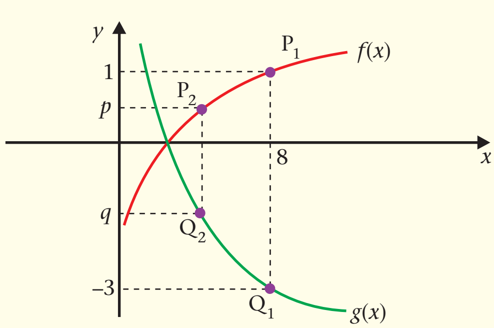
(A) 5

(B) 6

(C) 8

(D) 10

59 (UFRJ) Sejam a e b dois números reais positivos e diferentes de um. Considere as funções $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = \log_b x$, mostradas na figura a seguir.



Os pontos $P_1 = (8,1)$ e $P_2 = (m, p)$ pertencem ao gráfico de f, enquanto $Q_1 = (8, -3)$ e $Q_2 = (m, q)$ pertencem ao gráfico de g.

Determine a razão $\dfrac{p}{q}$.

60 (UFRJ) Segundo algumas estimativas, o volume de água facilmente disponível, para o consumo, em todo o planeta, é de 14 mil km^3 por ano. Consideremos como razoável um consumo de 500 m^3 por ano por habitante. Sabendo que a população da Terra é de cerca de 6 bilhões de pessoas e que cresce à taxa de 1,6% ao ano, gostaríamos de ter uma estimativa de em quanto tempo chegaremos, mantidos estes dados, ao limite dos recursos disponíveis. Expresse, utilizando os dados acima e as funções usuais em máquina de calcular (ou seja: as quatro operações elementares, $\sqrt{x}$, $\log x$, $\ln x$, e^x, 10^x, sen x, cos x e tg x, o número x de anos em que ainda teremos água facilmente disponível.

61 Dê o valor de:

a) $a^{\log_a x}$

b) $4^{\log_2 9}$

c) $5^{-\log_5 3 \cdot \log_7 7}$

62 (Cesesp-PE) Uma alga cresce de modo que, em cada dia, ela cobre uma superfície de área igual ao dobro da coberta no dia anterior. Se esta alga cobre a superfície de um lago em 100 dias, assinale a alternativa correspondente ao número de dias necessários para que duas algas, da mesma espécie da anterior, cubram a superfície do mesmo lago.

(A) 50 dias

(B) 25 dias

(C) 98 dias

(D) 99 dias

(E) 43 dias

63 (Mack-SP) Cada golpe de uma bomba de vácuo extrai 10% do ar de um tanque. Se a capacidade inicial do tanque é de 1 m^3, após o 5º golpe, o valor mais próximo para o volume do ar que permanece no tanque é:

(A) 0,590 m^3

(B) 0,500 m^3

(C) 0,656 m^3

(D) 0,600 m^3

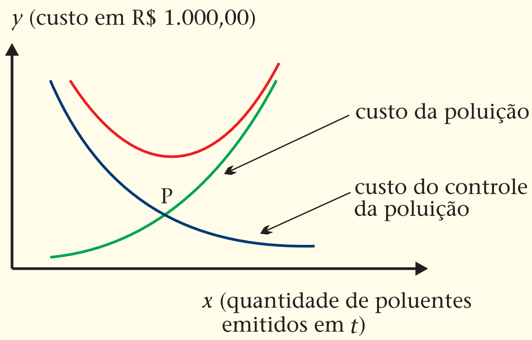
(E) 0,621 m^3

64 (Unicamp-SP) Suponha que o preço de um automóvel tenha uma desvalorização média de 19% ao ano sobre o preço do ano anterior. Se F representa o preço inicial (preço de fábrica) e $p(t)$, o preço após t anos, pede-se:

a) a expressão para $p(t)$;

b) o tempo mínimo necessário, em número inteiro de anos, após a saída da fábrica, para que um automóvel venha a valer menos que 5% do valor inicial. Se necessário, use $\log 2 \cong 0,301$ e $\log 3 \cong 0,477$.

65 (Unirio-RJ) Uma indústria do Rio de Janeiro libera poluentes na baía de Guanabara. Foi feito um estudo para controlar essa poluição ambiental, cujos resultados são a seguir relatados.



Do ponto de vista da comissão que efetuou o estudo, essa indústria deveria reduzir sua liberação de rejeitos até o nível onde se encontra P, admitindo-se que o custo total ideal é o resultado da adição do custo de poluição $y = 2^x - 1$, ao custo de controle da poluição $y = 6\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Para que se consiga o custo ideal, a quantidade de poluentes emitidos, em kg, deve ser aproximadamente:

(A) 1 333

(B) 2 333

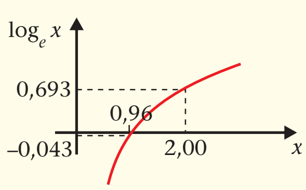
(C) 3 333

(D) 4 333

(E) 5 333

Considere log 2 = 0,3 e log 3 = 0,4.

66 (Uerj) Meia-vida ou período de semidesintegração de um isótopo radioativo é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade.



A meia-vida de um isótopo radioativo pode ser calculada utilizando-se equações do tipo $A = C \cdot e^{kt}$, em que:
C é a massa inicial;
A é a massa existente em *t* anos;
k é uma constante associada ao isótopo radioativo.
Em um laboratório, existem 60 mg de ^{226}Ra, cujo período de semidesintegração é de 1 600 anos.
Daqui a 100 anos restará, da quantidade original desse isótopo, o correspondente, em mg, a:

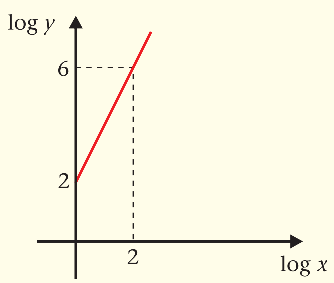
(A) 40,2

(B) 42,6

(C) 50,2

(D) 57,6

67 (UFRJ) Sejam *x* e *y* duas quantidades. O gráfico abaixo expressa a variação log *y* em função de log *x*, onde log *x* é o logaritmo na base decimal.

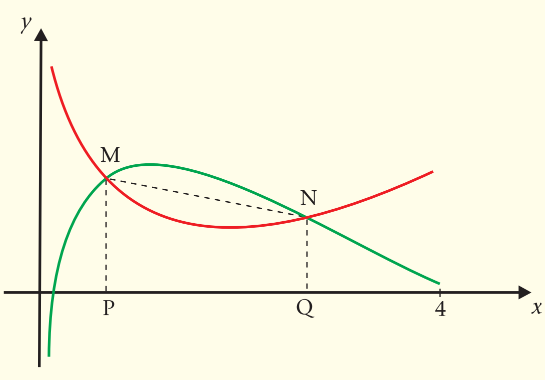


Determine uma relação entre *x* e *y* que não envolva a função logaritmo.

68 (UFRJ) A figura a seguir mostra os gráficos das funções *f* e *g*, definidas no intervalo]0, 4] por:

$f(x) = \frac{x}{2} - \ln x$ e $g(x) = \frac{x}{2} - (\ln x)^2$,

onde ln expressa o logaritmo na base neperiana *e* ($e \cong 2,7$).



Sejam M, N os pontos de interseção dos dois gráficos e P, Q suas respectivas projeções sobre o eixo *x*.
Determine a área do trapézio MNQP.

69 (Unirio-RJ) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

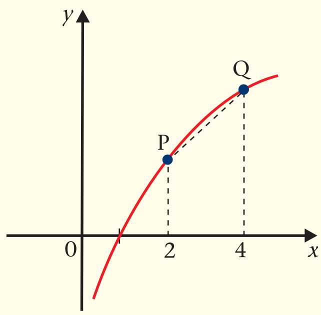
$$x \mapsto y = 3^{x-4}$$

Sabendo-se que $f(g(x)) = \frac{x^2}{81}$, obtenha:

a) um esboço do gráfico de *f*;

b) a lei da função *g*.

70 (UFF-RJ) A figura representa o gráfico da função f definida por $f(x) = \log_2 x$.

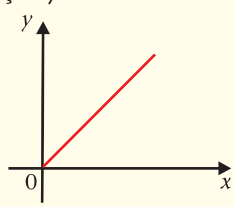


O comprimento do segmento $\overline{PQ}$ é:

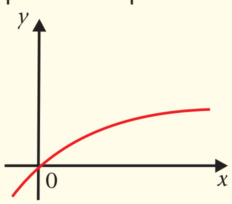
(A) $\sqrt{6}$
(B) $\sqrt{5}$
(C) $\log_2 5$
(D) 2
(E) log 2

71 (Cesgranrio-RJ) Seja log a função logaritmo natural. A função $y = e^{\log x}$ é mais bem representada por:

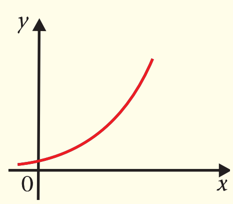
(A)



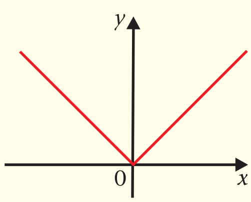
(D)



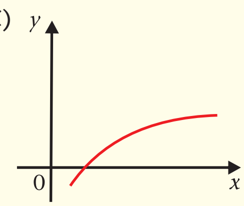
(B)



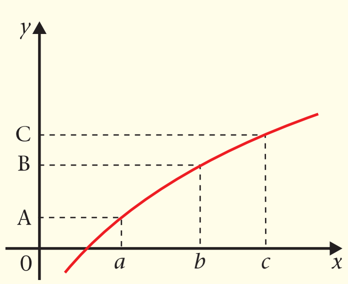
(E)



(C)



72 (Vunesp) A figura representa o gráfico de $y = \log_{10} x$.



Sabe-se que OA = BC. Então pode-se afirmar que:

(A) $\log_a b = c$
(B) $a + b = c$
(C) $a^c = b$
(D) $ab = c$
(E) $10^a + 10^b = 10^c$

73 (ITA-SP) O domínio da função

$f(x) = \log_{2x^2 - 3x + 1} (3x^2 - 5x + 2)$ é:

(A) $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

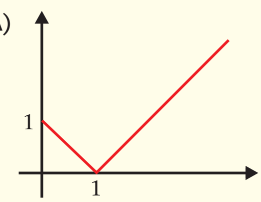
(B) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

(C) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

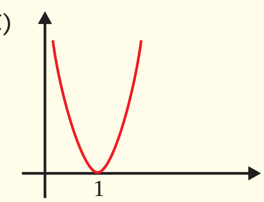
(D) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

74 (Unifor-CE) O gráfico de $f(x) = |\ln x|$, $x > 0$ está melhor representado no item:

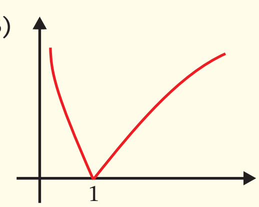
(A)



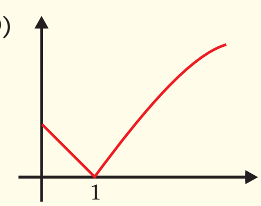
(C)



(B)



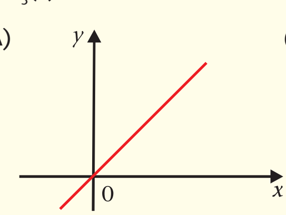
(D)



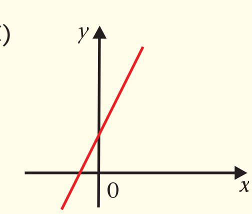
75 (UFPE) Considere as seguintes funções e os gráficos abaixo:

$f_1(x) = 10^x$, $f_2(x) = \log_{10} x$, $f_3(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$, $f_4(x) =$
$= 2f_3(x) + 1$.

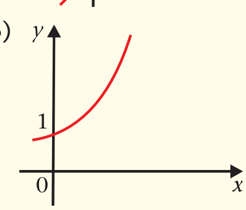
(A)



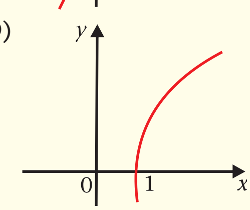
(C)



(B)



(D)



Assinale a alternativa que completa corretamente a frase: "Os gráficos de f_1, f_2, f_3 e f_4 são respectivamente...

(A) 1, 2, 3 e 4."
(B) 2, 4, 1 e 3."
(C) 2, 4, 3 e 1."
(D) 4, 2, 1 e 3."
(E) 4, 2, 3 e 1."

76 (ITA-SP) Seja α um número real, $\alpha > \sqrt{5}$ tal que $(\alpha + \ell)^m = 2^p$, onde m é um inteiro positivo maior que ℓ e $p = m\,[\log_2 m][\log_m (\alpha^2 - 5)]$. O valor de α é:

(A) 3
(B) 5
(C) $\sqrt{37}$
(D) 32
(E) Não existe apenas um valor de a nestas condições.

77 (Cesgranrio-RJ) Se $\log_{10} (2x - 5) = 0$, então x vale:

(A) 5
(B) 4
(C) 3
(D) $\frac{7}{3}$
(E) $\frac{5}{2}$

78 (UC-MG) O produto das raízes da equação $(\log_2 x)^2 - 1 = 0$ é:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) $\frac{1}{2}$
(E) $\frac{3}{2}$

79 (Fatec-SP) Se $x > 0$, $y > 0$ e $\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt{2}} y = 8$, então a média geométrica entre x e y é:

(A) 64
(B) 32
(C) 16
(D) 8
(E) 4

80 (Ueba) No universo $\mathbb{R}$, a solução da equação $\log_2 x + \log_2 (x + 1) = 1$ é um número:

(A) ímpar.
(B) entre 0 e 1.
(C) maior que 3.
(D) múltiplo de 3.
(E) divisível por 5.

81 (FGV-SP) Admitindo-se os valores: log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, a equação $4^x = 12$ terá uma raiz:

(A) negativa.
(B) superior a 2.
(C) inteira.
(D) inferior a 3.
(E) imaginária.

82 (PUC-SP) Um estudante quer resolver a equação $2^x = 5$, utilizando uma calculadora que possui a tecla log x. Para obter um valor aproximado de x, o estudante deverá usar a calculadora para obter os seguintes números:

(A) log 2, log 5 e log 5 – log 2
(B) log 2, log 5 e log 5 : log 2
(C) log 2, log 5 e log 25
(D) $\frac{5}{2}$ e $\log \frac{5}{2}$
(E) $\sqrt{5}$ e $\log \sqrt{5}$

83 (PUC-MG) A igualdade $3^{1-x} \cdot 6^{x-1} = 3$ é verdadeira para x igual a:

(A) $\log_3 2$
(B) $\log_6 2$
(C) $\log_2 3$
(D) $\log_2 6$
(E) $\log_3 6$

84 (FGV-SP) A equação $2^{2x+3} = 4^x + \frac{7}{128}$ tem por solução:

(A) $x = 5$
(B) $\log_2 4$
(C) $\log_4 2$
(D) $\nexists\, x \in \mathbb{R}$
(E) n.d.a.

85 (UECE) O conjunto solução da equação $\log_2 4x - \log_4 2 = 0$ é:

(A) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$
(B) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$
(C) $\left\{\sqrt{2}\right\}$
(D) $\left\{2\sqrt{2}\right\}$

86 (UFBA) O conjunto verdade de $\log_2 (x - 1) - \text{colog}_4 (5x - 1) = 5$ é subconjunto de:

(A) $\varnothing$
(B) $\{x \in \mathbb{Q};\ x > 5\}$
(C) $\{x \in \mathbb{Q};\ x < 5\}$
(D) $\{x \in \mathbb{Q};\ x > 6\}$
(E) $\{x \in \mathbb{Q}_-;\ x < 5\}$

87 (Mack-SP) Se $\log_2 x + \log_4 x = 1$, então:

(A) $x = \sqrt[3]{\sqrt{2}}$
(B) $x = \sqrt[3]{4}$
(C) $x = \sqrt{2^3}$
(D) $x = 3\sqrt[3]{2}$
(E) $x = 2$

88 (Puccamp-SP) O sistema $\begin{cases} \log_2 x \log_2 y = 1 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$ tem solução, tal que $x + y$ é igual a:

(A) 3
(B) 1
(C) $-\frac{11}{7}$
(D) $-\frac{41}{12}$
(E) n.d.a.

89 (Cesgranrio-RJ) Se $x = a$ e $y = b$ é a solução real de 0 $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 6 \\ x - y = 12 \end{cases}$, então $a + b$ vale:

(A) 15
(B) 16
(C) 20
(D) 24
(E) 30

90 (UFRN) Se $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x^2 - 5y^2 = 5 \end{cases}$, então $x + y$ é igual a:

(A) 7
(B) 10
(C) 13
(D) 15
(E) 20

91 (Cesgranrio-RJ) Se $\begin{cases} 2\log x + 3\log y = 7 \\ 4\log x - \log y = 0 \end{cases}$, então $\log(xy)$ é:

(A) $\frac{7}{2}$
(B) $\frac{5}{2}$
(C) 2
(D) 1
(E) 0

92 (Ucsal-BA) Quanto às soluções da equação $(\log x)^2 - 3\log x + 2 = 0$, é verdade que:

(A) só uma delas é real.
(B) a maior delas é 1 000.
(C) a menor delas é 10.
(D) a menor delas é 100.
(E) a maior delas é 1.

93 (Cesgranrio-RJ) Sendo $x > 0$, a soma das raízes de $\log_{10}^2 x - \log_{10} x^3 = 0$ vale:

(A) 50.
(B) 501.
(C) 1 000.
(D) 1 001.
(E) 1 005.

94 (PUC-MG) Para $0 \leq x < 3$, a única raiz da equação $\log_3^2 x - \log_3 x^2 = 3$ é uma fração que, na sua forma irredutível, tem para soma de seus termos:

(A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6
(E) 7

95 (FGV-SP) A equação logarítmica $\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = 3$ admite:

(A) uma única raiz irracional.
(B) duas raízes opostas.
(C) duas raízes cujo produto é –4.
(D) uma única raiz e negativa.
(E) uma única raiz e maior do que 2.

96 (FGV-SP) A equação $\log_x (2x + 3) = 2$ apresenta o seguinte conjunto solução:

(A) {–1, 3}
(B) {–1}
(C) {3}
(D) {1, 3}
(E) n.d.a.

97 (Unicap-PE) Seja f: $(2, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (x - 2)$. Assinale a única alternativa que corresponde à solução da equação $f(x) = 1$.

(A) $1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$
(B) $1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$
(C) $2 + \frac{\sqrt{6}}{2}$
(D) $1 + 2\sqrt{6}$
(E) $3 + \sqrt{6}$

98 (UFBA) No sistema $\begin{cases} \left(\sqrt[8]{2}\right)^x = \sqrt{2} \\ \log_x \left(4\sqrt{2}\right) = y \end{cases}$, o valor de y é:

(A) $\frac{3}{2}$
(B) $\frac{5}{4}$
(C) $\frac{5}{6}$
(D) $\frac{9}{2}$
(E) $\frac{9}{4}$

99 (Mack-SP) O menor valor natural de n para o qual se tem $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} > \sqrt{\log 10^{100}}$ é:

(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 10
(E) 100

100 (Mack-SP) Se $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$, com $b > 0$, $c > 0$ e $0 < a < 1$, então:

(A) $x > y$ se e somente se $b > c$.
(B) $x > y$ se e somente se $b < c$.
(C) $x = y$ se e somente se $b = c = 1$.
(D) $x > y$ se e somente se $b > c > 1$.
(E) $x > y$ se e somente se $b < c < 1$.

101 (PUC-MG) A desigualdade $\log_2 (5x - 3) < \log_2 7$ é verdadeira para:

(A) $x > 0$

(B) $x > 2$

(C) $x < \dfrac{3}{5}$

(D) $\dfrac{3}{5} < x < 2$

(E) $0 < x < \dfrac{3}{5}$

102 (UFPA) Qual o valor de x na inequação $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 2$?

(A) $x > \dfrac{1}{2}$

(B) $x < \dfrac{1}{2}$

(C) $x > 2$

(D) $x < 2$

(E) $x = 2$

103 (Mack-SP) A desigualdade $\log_{2-3x} \dfrac{3}{7} > \log_{2-3x} \dfrac{4}{3}$ é verdadeira se:

(A) $0 < x < \dfrac{1}{9}$

(B) $\dfrac{1}{9} < x < \dfrac{1}{3}$

(C) $\dfrac{2}{3} < x < 1$

(D) $\dfrac{13}{30} < x < \dfrac{17}{30}$

(E) $x > 1$

104 (FGV-SP) Uma pessoa deposita R$ 50.000,00 na Caderneta de Poupança Futuro Feliz. Trimestralmente são creditados juros de 10% sobre o saldo. Calcular o valor dos juros, 1 ano após o depósito de R$ 50.000,00 (admitindo que não houve nenhuma retirada).

(A) R$ 20.000,00

(B) 40%

(C) alternativas (A) e (B)

(D) R$ 73.205,00

(E) aproximadamente R$ 23.000,00

105 (UFCE) Meia-vida de uma substância radioativa é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade. Tomemos, hoje, 16 gramas de uma substância radioativa cuja meia-vida é de 5 anos. Se daqui a n anos sua massa for 2^{-111} gramas, o valor de n é igual a:

(A) 525

(B) 550

(C) 565

(D) 575

(E) 595

106 (FGV-SP) Daqui a t anos o valor de um automóvel será $V = 2000(0{,}75)t$ dólares. A partir de hoje, daqui a quantos anos ele valerá a metade do que vale hoje? Adote $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 3 = 0{,}48$.

(A) 3 anos

(B) 2,5 anos

(C) 2 anos

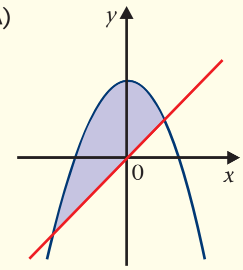
(D) 4,5 anos

(E) 6 anos

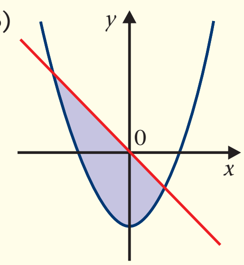
107 (Cesesp-SP) Assinale a única alternativa cuja região colorida representa o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, que satisfaz o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \log_2(x^2 - y) < \log_2 12 - \log_2 3 \\ (\log_{10} 2)^{y-x} > 1 \end{cases}$$

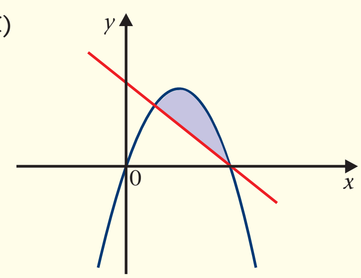
(A)



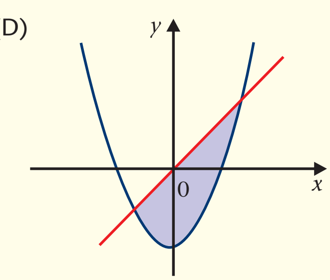
(B)



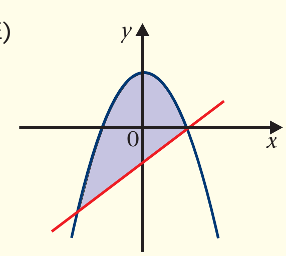
(C)



(D)

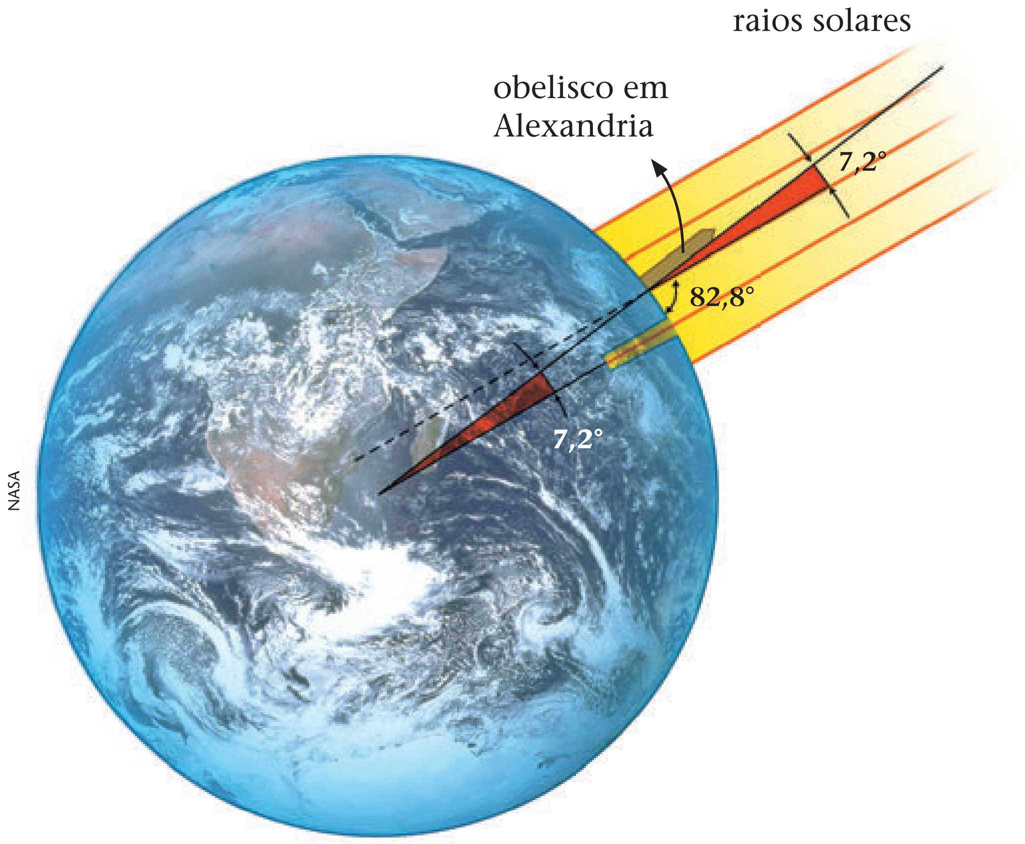


(E)



CAPÍTULO X

TRIGONOMETRIA



Neste capítulo, estudamos a trigonometria do triângulo retângulo, que estabelece relações entre seus lados e seus ângulos. Em aproximadamente 240 a.C., Eratóstenes (diretor da grande Biblioteca de Alexandria, no Egito) coletou as seguintes informações: ao meio dia do solstício de verão, o Sol iluminava o fundo de um poço (e, portanto, estava a pino) em Assuã; por outro lado, no mesmo horário, a 800 km de distância, em Alexandria, colunas verticais deixavam uma pequena sombra. Eratóstenes concluiu que a Terra devia ser esférica, e usou trigonometria simples para estimar o comprimento de sua circunferência (que é de 40 000 km).

10 – TRIGONOMETRIA

10.1 – Introdução

Podemos observar que na Geometria são estabelecidas relações exclusivamente entre lados de figuras (como o teorema de Pitágoras e o teorema de Tales) e relações exclusivamente entre ângulos (como a soma dos ângulos internos de um triângulo, o ângulo inscrito e o ângulo central de um círculo). A Geometria estabelece poucas relações entre lados e ângulos de uma figura (por exemplo, o triângulo retângulo de ângulos 30°, 60° e 90°; o triângulo retângulo isósceles de ângulos 45°, 45° e 90°; e o triângulo áureo de ângulos 72°, 72° e 36°).

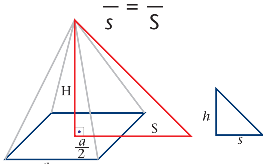
A Trigonometria tem por finalidade estabelecer relações entre lados e ângulos de um triângulo de modo a simplificar, por meio de manipulações algébricas, a determinação dos elementos das figuras geométricas. Modernamente, a Trigonometria envolve o estudo das funções periódicas e sua aplicação em diversos ramos da ciência.

NOTA
A palavra *trigonometria* significa medida de triângulos.

10.2 – Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo

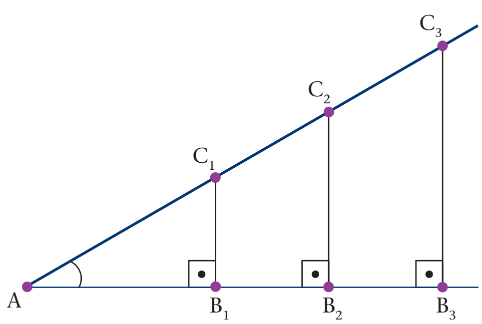
NOTA
Os egípcios calculavam a altura das pirâmides medindo o comprimento de sua sombra e fazendo a proporcionalidade entre esta e a sombra de uma haste.

$$\frac{h}{s} = \frac{H}{S}$$



Como S podia ser medido, calculava-se a altura H da pirâmide. Observe que:
h = altura da haste,
s = sombra da haste.

Considere a figura:



Como os triângulos AB_1C_1, AB_2C_2, AB_3C_3 são semelhantes, podemos escrever:

$$\frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{B_3C_3}{AC_3} = \ldots$$

$$\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB_2}{AC_2} = \frac{AB_3}{AC_3} = \ldots$$

$$\frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_3C_3}{AB_3} = \ldots$$

Para cada valor do ângulo A, tem-se apenas um valor para cada razão. Variando o ângulo A, essas razões também variam. Essa univocidade entre o conjunto dos ângulos $0° < \hat{A} < 90°$ e as razões correspondentes garantem que as razões são funções do ângulo, e, então, definimos:

NOTA
Quando se estabelece a razão k entre as medidas de duas grandezas a e b, $\left(k = \frac{b}{a}\right)$, k significa quantas vezes b está contido em a.

1) $\text{sen}\,\hat{A} = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{B_3C_3}{AC_3} = \ldots$ que chamamos de seno de $\hat{A}$.

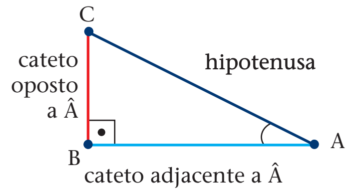
Então: $\text{sen}\,\hat{A} = \dfrac{\text{cateto oposto a }\hat{A}}{\text{hipotenusa}}$

DEFINIÇÃO
Seno.

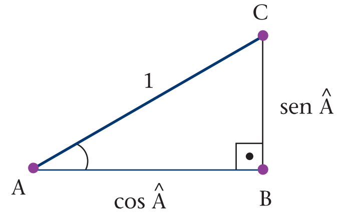
2) $\cos\hat{A} = \dfrac{AB_1}{AC_1} = \dfrac{AB_2}{AC_2} = \dfrac{AB_3}{AC_3} = \ldots$ que chamamos de cosseno de Â.

Então: $\cos\hat{A} = \dfrac{\text{cateto adjacente a }\hat{A}}{\text{hipotenusa}}$

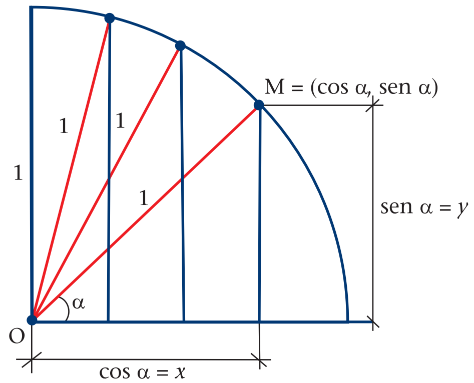
DEFINIÇÃO
Cosseno.



O sen Â e o cos Â serão então as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente a Â quando a hipotenusa do triângulo for igual a 1.



Se considerarmos um quadrante do círculo de raio igual a 1, cos α = x será a abscissa de um ponto M desse quadrante e sen α = y será a ordenada desse ponto M.



3) $\text{tg}\,\hat{A} = \dfrac{B_1C_1}{AB_1} = \dfrac{B_2C_2}{AB_2} = \dfrac{B_3C_3}{AB_3} = \ldots$ que chamamos de tangente de Â.

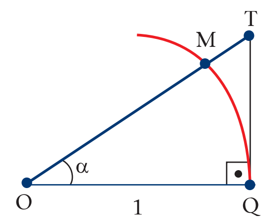
DEFINIÇÃO
Tangente.

Então: $\text{tg}\,\hat{A} = \dfrac{\text{cateto oposto a } \hat{A}}{\text{cateto adjacente a } \hat{A}}$

NOTA
Usa-se, também, a notação tan Â para a tangente do ângulo A.

Propriedades

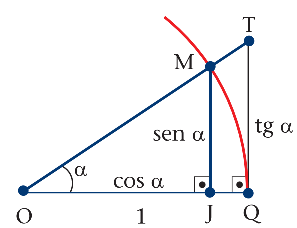
1) No quadrante do círculo de raio 1, temos:



Sendo QT tangente ao círculo, o triângulo OQT é retângulo.

Assim: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{QT}{OQ} = \dfrac{QT}{1} \Rightarrow \boxed{QT = \text{tg}\,\alpha}$

2) Traçando o segmento MJ perpendicular a OQ na figura anterior, temos:



Da semelhança entre OMJ e OTQ, temos:

$$\frac{TQ}{OQ} = \frac{MJ}{OJ} \Rightarrow \frac{\text{tg}\,\alpha}{1} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}$$

NOTA
Como sen α, cos α e tg α são razões que dependem univocamente do ângulo α, elas são chamadas *funções trigonométricas* ou, também, *linhas trigonométricas*.

3) Ao ser aplicado o teorema de Pitágoras no triângulo OMJ acima, temos:

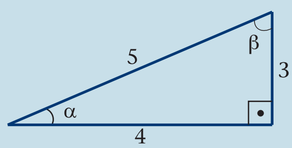
$MJ^2 + OJ^2 = OM^2$, isto é: $\boxed{\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

Essa é a relação que liga o cos α ao sen α, $\forall\alpha$ tal que $0° < \alpha < 90°$.

NOTA
Se $\alpha + \beta = 90°$, então:
$\text{sen}\ \alpha = \cos \beta$
$\cos \alpha = \text{sen}\ \beta$

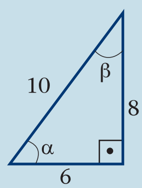
Exemplos:

i) No triângulo abaixo, temos:



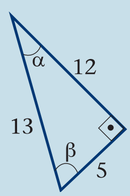
$$\text{sen}\ \alpha = \frac{3}{5} \qquad \text{sen}\ \beta = \frac{4}{5}$$
$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \qquad \cos \beta = \frac{3}{5}$$
$$\text{tg}\ \alpha = \frac{3}{4} \qquad \text{tg}\ \beta = \frac{4}{3}$$

ii) No triângulo abaixo, temos:



$$\text{sen}\ \alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \text{sen}\ \beta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$
$$\cos \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad \cos \beta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$
$$\text{tg}\ \alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \qquad \text{tg}\ \beta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

iii) No triângulo abaixo, temos:



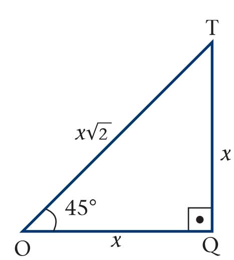
$$\text{sen}\ \alpha = \frac{5}{13} \qquad \text{sen}\ \beta = \frac{12}{13}$$
$$\cos \alpha = \frac{12}{13} \qquad \cos \beta = \frac{5}{13}$$
$$\text{tg}\ \alpha = \frac{5}{12} \qquad \text{tg}\ \beta = \frac{12}{5}$$

10.3 – Ângulos notáveis: 30°, 45° e 60°

Ângulo de 45°

Considere o triângulo retângulo isósceles OQT.

Para o ângulo QOT = 45°, temos:



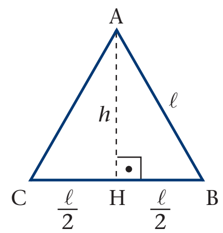
$$\text{sen}\ 45° = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}\ 45° = \frac{x}{x} = 1$$

Ângulo de 60° e 30°

Considere o triângulo ABC equilátero de lado ℓ. Como a altura AH é mediana, então, $BH = HC = \dfrac{\ell}{2}$. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:



$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2$$

$$h^2 + \frac{\ell^2}{4} = \ell^2$$

$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow \boxed{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

Para o ângulo ABH = 60°, temos:

$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \sqrt{3}$$

Para o ângulo BAH = 30°, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

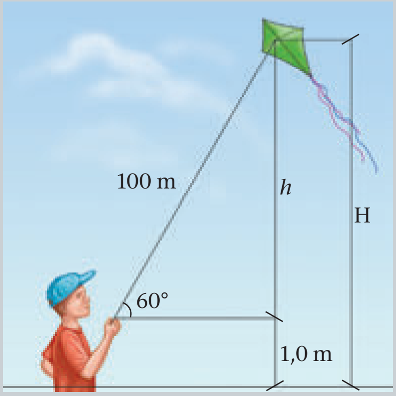
$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exercícios resolvidos:

1) Um papagaio (também conhecido como pipa ou pandorga) está preso a um fio, perfeitamente esticado, de comprimento 100 m. O ângulo da elevação do fio é 60º. A que altura do solo se encontra o papagaio, sabendo que um menino segura o fio na altura de seu queixo, cuja distância até sua cintura é de 1,0 m?

Solução:



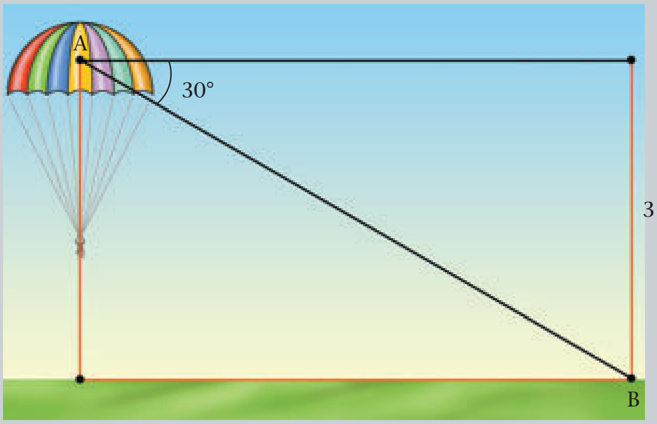
$$\text{sen } 60° = \frac{h}{100}$$

$$h = 100 \text{ sen } 60° = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$$

$$H = \left(50\sqrt{3} + 1\right)\text{m}$$

2) Um paraquedista salta de um avião no instante em que sua altura é 3000 m. O paraquedista cai em linha reta com um ângulo de depressão de 30º. Qual é a distância percorrida pelo paraquedista no espaço até atingir o solo?

Solução:



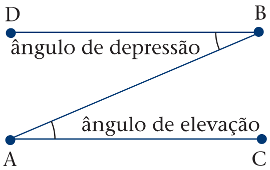
$$\text{sen } 30° = \frac{3000}{AB}$$

$$3000 = AB \cdot \text{sen } 30°$$

$$3000 = AB \cdot \frac{1}{2}$$

$$AB = 6000 \text{ m}$$

NOTA



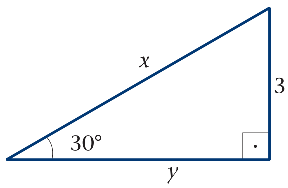
Para um observador em A, o **ângulo de elevação** de B é o ângulo formado pela reta AB com a horizontal AC, isto é, $C\hat{A}B$.

Para um observador em B, o **ângulo de depressão** de A é o ângulo formado pela reta BA com a horizontal BD, isto é, $D\hat{B}A$.

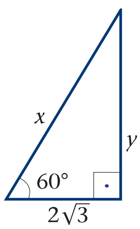
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Calcule o valor de x e y nos retângulos a seguir.

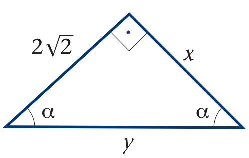
a)



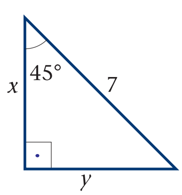
b)



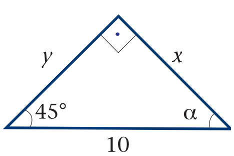
c)



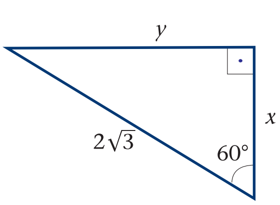
d)



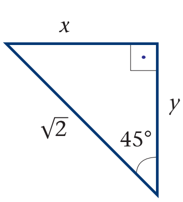
e)



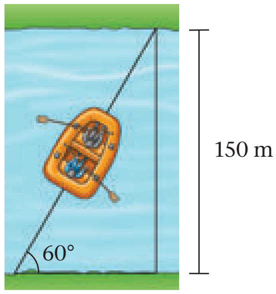
f)



g)



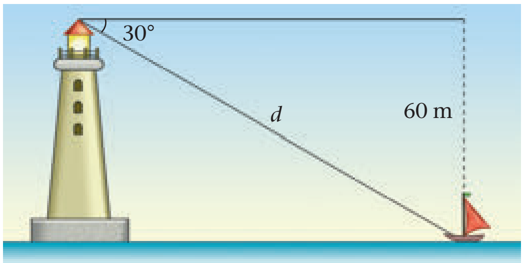
2 Uma canoa atravessa um rio num trecho onde a largura é 150 m, seguindo uma direção que forma 60° com a margem, como mostra a ilustração.



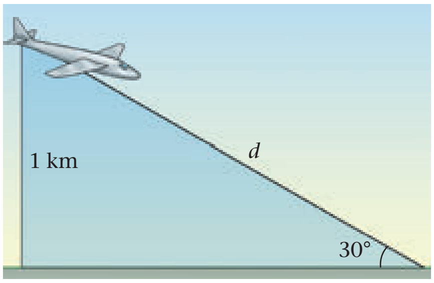
a) Qual é a distância x percorrida pela canoa?

b) Quantos metros a canoa desvia-se rio abaixo em relação ao ponto de partida?

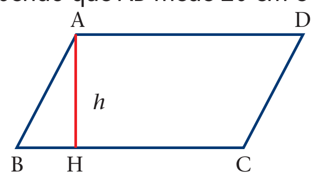
3 Do alto de um farol, a 60 m do nível do mar, avista-se um barco segundo um ângulo de depressão de 30°. Qual o valor da distância d indicada na figura? (Use $\sqrt{3} = 1{,}73$.)



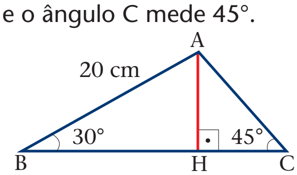
4 O piloto de um avião começou a acionar o sistema de travagem à altura de 1 km da pista. Sabendo que a direção da linha de rumo do avião, na descida para a pista, faz um ângulo de 30° com o solo, calcule a distância d percorrida pelo avião desde o início da travagem até chegar ao solo.



5 Determine a medida da altura h do paralelogramo a seguir, sabendo que $\overline{AB}$ mede 20 cm e $A\hat{B}C$ mede 60°.



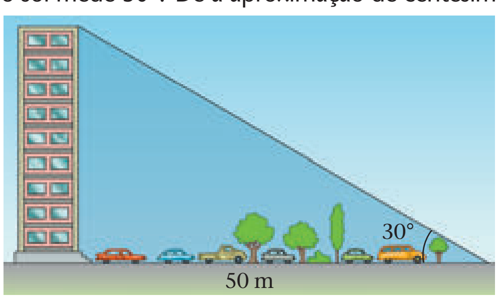
6 No triângulo ABC a seguir, $\overline{AB}$ mede 20 cm, o ângulo B mede 30° e o ângulo C mede 45°.



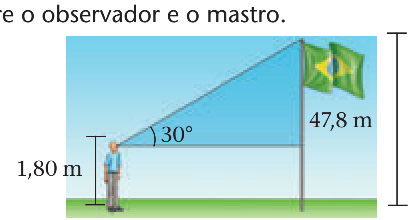
Determine a medida de:

a) $\overline{HA}$ b) $\overline{AC}$ c) $\overline{BC}$

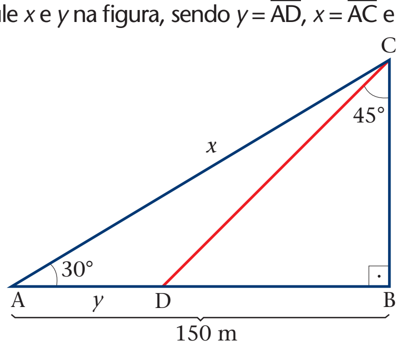
7 Qual é a altura de um edifício que projeta uma sombra de comprimento 50 m, quando o ângulo de elevação do sol mede 30°? Dê a aproximação de centésimos.



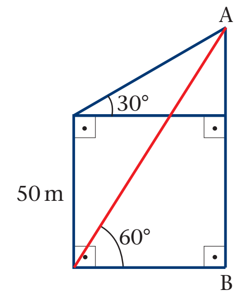
8 Sob um ângulo de 30°, um observador de 1,80 m de altura vê o ponto mais alto de um mastro. Sabendo que a altura do mastro é de 47,8 m, calcule a distância entre o observador e o mastro.



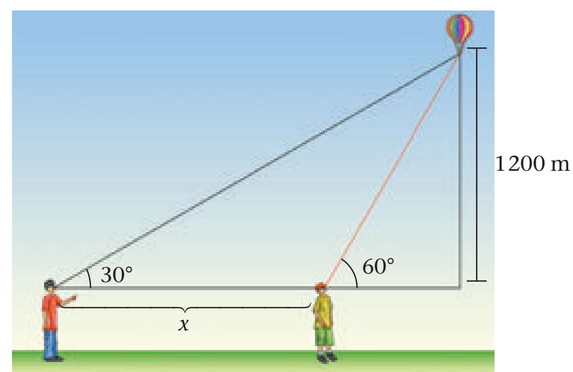
9 Calcule x e y na figura, sendo $y = \overline{AD}$, $x = \overline{AC}$ e $\overline{AB} = 150$ m.



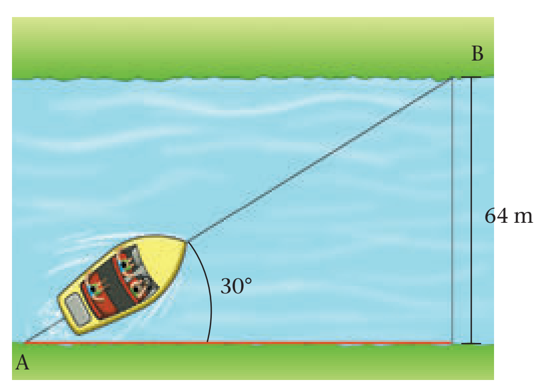
10 Determine a medida de $\overline{AB}$ na figura abaixo.



11 Um balão, que se encontra a 1 200 m de altura, é visto por dois meninos sob ângulos de 30° e 60°, conforme mostra a figura. Qual é a distância aproximada entre os dois meninos? (Use $\sqrt{3} = 1{,}73$, após racionalizar o denominador.)



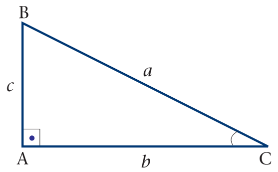
12 Um barco atravessa um rio num trecho onde a largura é 64 m. Ele segue a direção da reta AB que forma um ângulo de 30° com uma das margens. Qual é a distância entre os pontos A e B?



10.4 – Resolução de triângulos retângulos

A resolução de triângulos retângulos consiste em determinar seus lados e ângulos, sendo dados dois lados de um triângulo ou um lado e um ângulo agudo.

Usaremos as seguintes relações:



$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \text{ (teorema de Pitágoras)}$$

$$\text{Como } \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow \boxed{c = a \operatorname{sen} \hat{C}}$$

Qualquer cateto é o produto da hipotenusa pelo seno do ângulo oposto.

$$\text{Como } \cos \hat{C} = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{b = a \cos \hat{C}}$$

Qualquer cateto é o produto da hipotenusa pelo cosseno do ângulo adjacente.

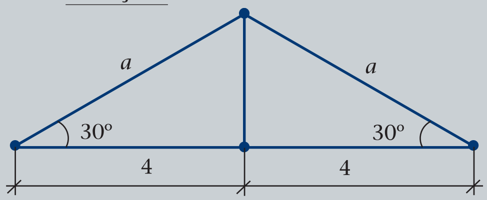
$$\text{Como } \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{b} \Rightarrow \boxed{c = b \operatorname{tg} \hat{C}}$$

Qualquer cateto é o produto do outro cateto pela tangente do ângulo oposto.

Exercícios resolvidos:

1) Qual é o perímetro de um triângulo isósceles de base igual a 8 m sabendo que os ângulos da base são iguais a 30°? Calcule também a área do triângulo.

Solução:



$$4 = a \cos 30° \Rightarrow 4 = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

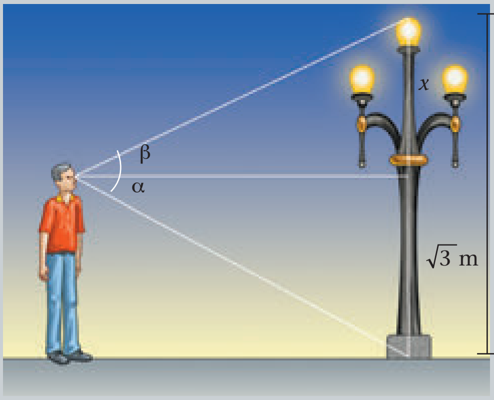
$$a = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ m}$$

$$\text{perímetro } = 2a + 8 = \frac{16\sqrt{3}}{3} + 8 = 8\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right) \text{m}$$

$$h = a \operatorname{sen} 30° = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{Área} = \frac{8 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{32\sqrt{3}}{6} = \frac{16\sqrt{3}}{3} \text{m}^2$$

2) Um homem está a 3 m de distância de um poste e o vê sob um ângulo de 90°. A altura de seus olhos é de $\sqrt{3}$ m. Calcular a altura do poste.

Solução:



$$\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$$

$$\beta = 90° - 30° = 60°$$

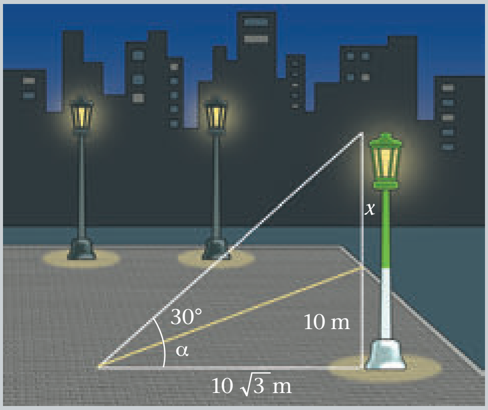
$$\text{tg } 60° = \frac{x}{3} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3\sqrt{3} \text{ m}$$

$$H = x + \sqrt{3} = 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ m}$$

NOTA
Esse problema poderia ser resolvido usando a relação: $h^2 = m \cdot n$

3) Um poste está pintado de branco até uma altura de 10 m. Acima da parte pintada, pinta-se o poste de verde até a extremidade. Um observador a $10\sqrt{3}$ m do poste cujo ponto de vista está no chão vê a parte verde sob um ângulo de 30°. Calcular a altura do poste.

Solução:



$$\text{tg } \alpha = \frac{10}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$$

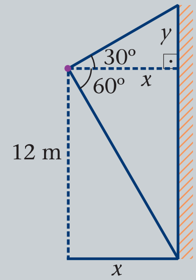
$$\text{tg } (30° + \alpha) = \frac{x + 10}{10\sqrt{3}} \Rightarrow \text{tg } 60° = \frac{x + 10}{10\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{x + 10}{10\sqrt{3}} \Rightarrow 30 = x + 10 \Rightarrow x = 20 \text{ m}$$

altura do poste = $x + 10 = 30$ m

4) De um ponto situado a 12 m de altura se vê o telhado de um prédio sob um ângulo de elevação de 30° e a base do mesmo prédio sob um ângulo de depressão de 60°. Calcular a altura do prédio e a distância do ponto ao prédio.

Solução:



$$12 = x\,\text{tg}\,60° \Rightarrow x = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

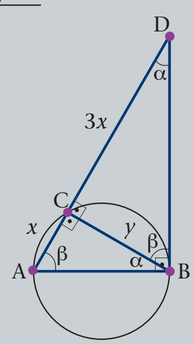
$$y = x\,\text{tg}\,30° \Rightarrow y = 4\sqrt{3}\,.\,\frac{\sqrt{3}}{3} = 4$$

distância $= 4\sqrt{3}$ m

altura $= 12 + 4 = 16$ m

5) Considere um círculo de diâmetro AB. Pelo ponto A traça-se uma secante que corta o círculo em C e corta a tangente traçada pelo ponto B em D. Sabe-se que CD é o triplo de AC. Calcule o ângulo BAC.

Solução:



No triângulo BCD: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{y}{3x}$

No triângulo BCA: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{x}{y}$

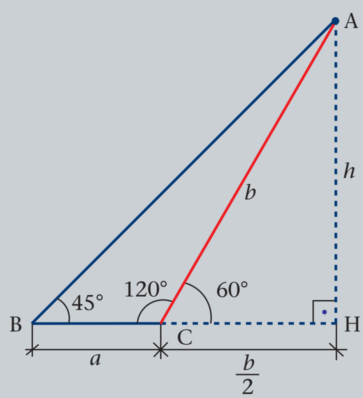
$$\frac{x}{y} = \frac{y}{3x} \Rightarrow y^2 = 3x^2 \Rightarrow y = x\sqrt{3}$$

No triângulo BAC:

$$\frac{y}{x} = \text{tg}\,\beta \Rightarrow \text{tg}\,\beta = \sqrt{3} \Rightarrow \beta = 60°$$

6) No triângulo ABC os ângulos B e C são iguais respectivamente a 45° e 120°. Se o lado $a = 40$ cm, determine o comprimento da perpendicular do ponto A ao prolongamento de BC.

Solução:



$$CH = b\cos 60° = b \cdot \frac{1}{2} = \frac{b}{2}$$

$$h = BH\,\text{tg}\,45° = \left(40 + \frac{b}{2}\right) \cdot 1 = 40 + \frac{b}{2}$$

$$2h = 80 + b \Rightarrow b = 2h - 80$$

Por outro lado:

$$h = b\,\text{sen}\,60° \Rightarrow h = (2h - 80) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2h = 2h\sqrt{3} - 80\sqrt{3} \Rightarrow 2h\left(\sqrt{3}-1\right) = 80\sqrt{3} \Rightarrow 2h = \frac{80\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$h = \frac{40\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

$$h = \frac{120 + 40\sqrt{3}}{2}$$

$$h = 60 + 20\sqrt{3}$$

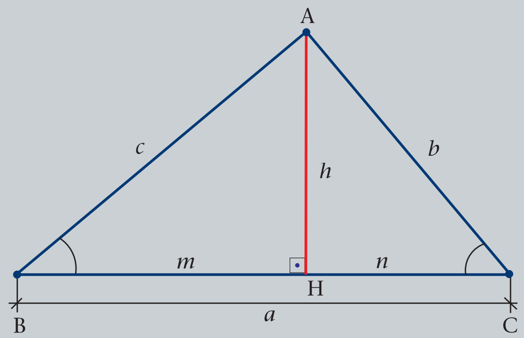
$$h = 20\left(3+\sqrt{3}\right)\text{ cm}$$

7) Mostrar que num triângulo acutângulo ABC, de lados, a, b, c, tem-se:

i) $b \text{ sen } \hat{C} = c \text{ sen } \hat{B}$

ii) $a = b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B}$

iii) A área $S = \frac{1}{2} ab \cdot \text{sen } \hat{C}$



Solução:

No triângulo BHA:

$h = c \text{ sen } \hat{B}$ e $m = c \cos \hat{B}$

No triângulo CHA:

$h = b \text{ sen } \hat{C}$ e $n = b \cos \hat{C}$

i) Então: $b \text{ sen } \hat{C} = c \text{ sen } \hat{B}$

ii) Como $a = m + n \Rightarrow a = c \cos \hat{B} + b \cos \hat{C}$

iii) Basta ver que: $S = \frac{1}{2} \cdot ah = \frac{1}{2}\ a\, b \text{ sen } \hat{C}$

NOTA
A área de um triângulo é a metade do produto de dois lados pelo seno do ângulo entre eles.

10.5 – Secante, cossecante e cotangente de um ângulo agudo

Define-se:

DEFINIÇÃO
Secante, cossecante e cotangente de um ângulo agudo.

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

NOTA
A cossecante pode ser representada por csc ou cossec.
A cotangente pode ser representada por ctg ou cotg ou cot ou cotan.

Exemplos:

i) $\sec\ 45° = \dfrac{1}{\cos\ 45°} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

ii) $\sec\ 30° = \dfrac{1}{\cos\ 30°} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

iii) $\sec\ 60° = \dfrac{1}{\cos\ 60°} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

iv) $\operatorname{cossec} 45° = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 45°} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

v) $\operatorname{cossec} 30° = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 30°} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

vi) $\operatorname{cossec} 60° = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 60°} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

vii) $\operatorname{cotg} 45° = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 45°} = \dfrac{1}{1} = 1$

viii) $\operatorname{cotg} 30° = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 30°} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

ix) $\operatorname{cotg} 60° = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 60°} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

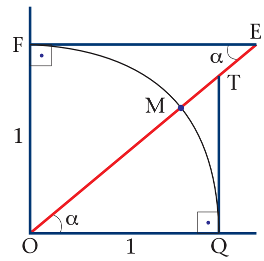
NOTA

$\operatorname{cotg} \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{cotg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}}$

Interpretação geométrica

Considerando um quadrante de círculo de raio 1, podemos obter segmentos que representem: cossec α, sec α e cotg α.



No triângulo OFE, temos:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{OE} \Rightarrow OE = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha}$$

$$\boxed{OE = \csc \alpha}$$

No triângulo OQT, temos:

$$\cos\alpha = \frac{1}{OT} \Rightarrow OT = \frac{1}{\cos\alpha}$$

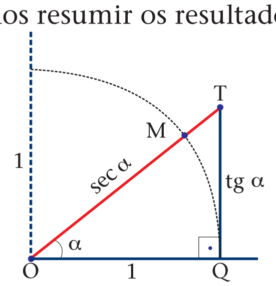
$$\boxed{OT = \sec\alpha}$$

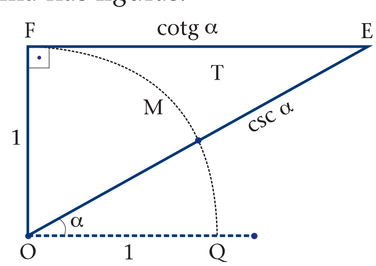
No triângulo OFE, temos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{1}{FE} \Rightarrow FE = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha}$$

$$\boxed{FE = \text{cotg}\ \alpha}$$

Podemos resumir os resultados acima nas figuras:



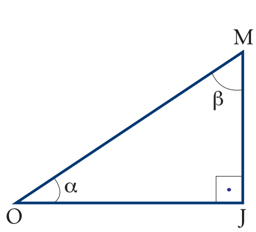


Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos acima, obtemos as relações:

$$\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\ \alpha \qquad \text{cossec}^2\ \alpha = 1 + \text{cotg}^2\ \alpha$$

10.6 – Linhas trigonométricas de ângulos complementares

Num triângulo retângulo, o cateto adjacente a um ângulo é oposto ao seu complementar. Assim:



$$\text{sen}\ \alpha = \frac{MJ}{OM} = \cos\beta \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \cos(90° - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \frac{OJ}{OM} = \text{sen}\ \beta \Rightarrow \cos\alpha = \text{sen}\ (90° - \alpha)$$

O seno de um ângulo é o cosseno do seu complementar, assim como o cosseno de um ângulo é o seno do seu complementar.

Dividindo membro a membro as igualdades acima:

$$\frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos(90° - \alpha)}{\text{sen }(90° - \alpha)} \Rightarrow \boxed{\text{tg }\alpha = \text{cotg }(90° - \alpha)}$$

Analogamente:

$$\text{cotg }\alpha = \text{tg }(90^{\underline{o}} - \alpha)$$

$$\sec\alpha = \text{cossec }(90^{\underline{o}} - \alpha)$$

$$\text{cossec }\alpha = \sec(90^{\underline{o}} - \alpha)$$

Exemplos:

i) sen 30° = cos 60°

ii) sen 60° = cos 30°

iii) tg 30° = cotg 60°

iv) cotg 60° = tg 60°

v) sec 30° = cossec 60°

vi) sec 60° = cossec 30°

NOTA
Se você sabe a tg α e quer sen α e cos α, use a relação: $\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\,\alpha$

Exercícios resolvidos:

1) Dada $\text{tg }\alpha = \frac{3}{4}$, calcular sen α e cos α.

Solução:

Calculamos inicialmente a sec α.
Sabemos que $\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\,\alpha$, então:

$$\sec^2\alpha = 1 + \frac{9}{16} \Rightarrow \sec^2\alpha = \frac{25}{16} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{5}{4}$$

Como $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{4}{5}$

Usando $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + \frac{16}{25} = 1$

$$\text{sen}^2\,\alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \text{sen }\alpha = \frac{3}{5}$$

2) Sendo $\text{cotg}\ \alpha = \dfrac{5}{12}$, calcular sen α e cos α.

Solução:

Temos: $\text{cossec}^2\ \alpha = 1 + \text{cotg}^2\ \alpha \Rightarrow \text{cossec}^2\ \alpha = 1 + \dfrac{25}{144}$

$$\Rightarrow \text{cossec}^2\ \alpha = \frac{169}{144} \Rightarrow \text{cossec}\ \alpha = \frac{13}{12}$$

Como $\text{cossec}\ \alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\ \alpha} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \dfrac{1}{\text{cossec}\ \alpha} = \dfrac{12}{13}$.

Usando $\text{cotg}\ \alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha}$, vem: $\cos\alpha = \text{cotg}\ \alpha \cdot \text{sen}\ \alpha$

$$\text{Logo: } \cos\alpha = \frac{5}{12}\cdot\frac{12}{13} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{13}$$

3) Mostrar que a igualdade $(\text{sen}\ x + \cos x)^2 = 1 + 2\text{sen}\ x \cos x$ é verdadeira para qualquer x.

Solução:

Desenvolvendo o primeiro membro da igualdade:

$$\begin{aligned}(\text{sen}\ x + \cos x)^2 &= \text{sen}^2\ x + 2\text{sen}\ x\cos x + \cos^2 x = \\ &= (\text{sen}^2\ x + \cos^2 x) + 2\text{sen}\ x \cos x = \\ &= 1 + 2\text{sen}\ x\cos x\end{aligned}$$

4) Mostrar que $\text{tg}\ x + \text{cotg}\ x = \sec x\ \text{cossec}\ x$.

Solução:

Temos:

$$\text{tg}\ x + \text{cotg}\ x = \frac{\text{sen}\ x}{\cos\alpha} + \frac{\cos x}{\text{sen}\ x} =$$

$$= \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}\ x \cdot \cos x} = \frac{1}{\text{sen}\ x\cdot\cos x} = \frac{1}{\text{sen}\ x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \text{cossec}\ x \cdot \sec x$$

5) Se $\sec B = \dfrac{13}{5}$, calcular o valor de $\dfrac{2\ \text{sen}\ B - 3\cos B}{4\ \text{sen}\ B - 9\cos B}$.

Solução:

$$\sec B = \frac{13}{5} \Rightarrow \cos B = \frac{5}{13}$$

Como $\text{sen}^2\ B + \cos^2\ B = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\ B = 1 - \dfrac{25}{169} = \dfrac{144}{169} \Rightarrow \text{sen}\ B = \dfrac{12}{13}$

Então:

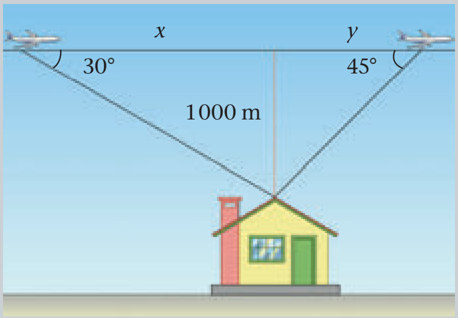
$$\frac{2\ \text{sen}\ B - 3\cos B}{4\ \text{sen}\ B - 9\cos B} = \frac{2\cdot\frac{12}{13} - 3\cdot\frac{5}{13}}{4\cdot\frac{12}{13} - 9\cdot\frac{5}{13}} = \frac{\frac{9}{13}}{\frac{3}{13}} = 3$$

NOTA

Se você sabe a cotg α e quer sen α e cos α, use a relação:

$\text{cossec}^2\ \alpha = 1 + \text{cotg}^2\ \alpha$

6) Voando a uma altitude de 1 000 m, um piloto mede, em dois instantes diferentes, os ângulos segundo os quais ele avista uma casa, como indica a figura. Qual é a distância percorrida pelo avião entre os dois instantes?



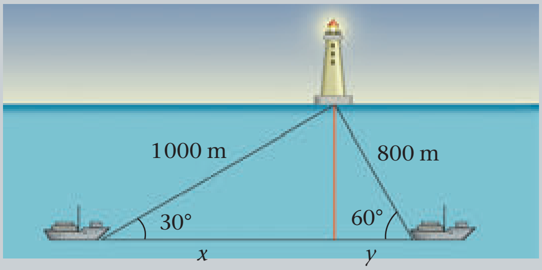
Solução:

$$\frac{1000}{x} = \text{tg } 30° \Rightarrow x = \frac{1000}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 1000\sqrt{3}$$

$$\frac{1000}{y} = \text{tg } 45° \Rightarrow y = 1000$$

$$x + y = 1000\sqrt{3} + 1000 = 1000\left(\sqrt{3} + 1\right) \text{ m}$$

7) Um barco numa trajetória retilínea dista 1 000 m de um farol quando o ângulo da trajetória com a reta que o une ao farol é 30°.
Mantida a trajetória, quando o ângulo da trajetória com a reta que o une ao farol é 60°, sua distância dele é 800 m. Qual é a distância percorrida pelo barco?



Solução:

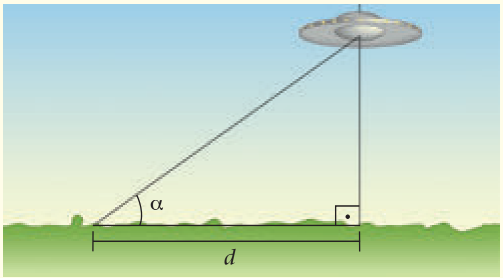
$$\frac{x}{1000} = \cos 30° \Rightarrow x = 1000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 500\sqrt{3}$$

$$\frac{y}{800} = \cos 60° \Rightarrow y = 800 \cdot \frac{1}{2} = 400$$

$$x + y = 500\sqrt{3} + 400 = 100(5\sqrt{3} + 4) \text{ m}$$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (Unificado-RJ) Um disco voador é avistado, numa região plana a uma certa altitude, parado no ar. Em certo instante, algo se desprende da nave e cai em queda livre, conforme mostra a figura. A que altitude se encontra esse disco voador?



Considere as afirmativas:

I – A distância *d* é conhecida.

II – A medida de α e a tg α são conhecidas.

Então, tem-se que:

(A) a I sozinha é suficiente para responder à pergunta, mas a II, sozinha, não.

(B) a II sozinha é suficiente para responder à pergunta, mas a I, sozinha, não.

(C) I e II, juntas, são suficientes para responder à pergunta, mas nenhuma delas, sozinha, o é.

(D) ambas são, sozinhas, suficientes para responder à pergunta.

(E) a pergunta não pode ser respondida por falta de dados.

2 (Unificado-RJ) Um navegador devia viajar durante duas horas, no rumo nordeste, para chegar a certa ilha. Enganou-se, e navegou duas horas no rumo norte. Tomando, a partir daí, o rumo correto, em quanto tempo, aproximadamente, chegará à ilha?

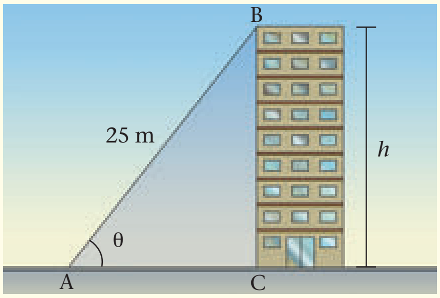
(A) 30 min
(B) 1 h
(C) 1 h 30 min
(D) 2 h
(E) 2 h 15 min

3 (PUC-RJ) Andando 3 km no rumo nordeste e depois mais 3 km no rumo sul, de quantos quilômetros você se afasta aproximadamente do ponto inicial do seu percurso?

(A) 2,3
(B) 2,7
(C) 3
(D) 3,6
(E) 4,8

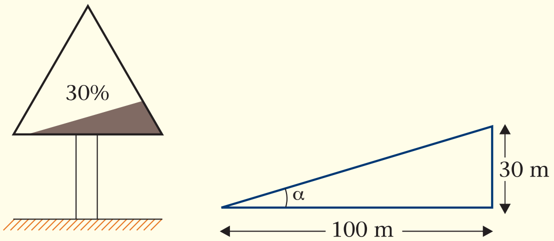
4 Dois pescadores, P_1 e P_2, estão na beira de um rio de margens paralelas e conseguem ver um bote B na outra margem. Sabendo que $P_1P_2 = 63$ m, os ângulos $B\hat{P}_1P_2 = \alpha$ e $B\hat{P}_2P_1 = \beta$ e que tg $\alpha = 2$ e tg $\beta = 4$, determine a distância (em metros) entre as margens.

5 Observe a figura abaixo e determine a altura *h* do edifício, sabendo que $\overline{AB}$ mede 25 m e cos $\theta = 0{,}6$.



(A) $h = 22{,}5$ m
(B) $h = 15$ m
(C) $h = 18{,}5$ m
(D) $h = 20$ m

6 Dizemos que a declividade é de 30% se subirmos 30 m para uma distância horizontal de 100 m.



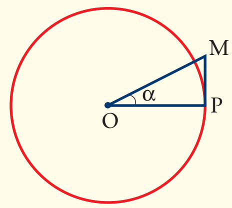
Qual é o ângulo α correspondente a uma declividade de 100%?

(A) 100°
(B) 50°
(C) 1°
(D) 90°
(E) 45°

7 (Unificado-RJ) No triângulo ABC, os lados AC e BC medem 8 cm e 6 cm, respectivamente, e o ângulo A vale 30°.
O seno do ângulo B vale:

(A) $\frac{1}{2}$
(B) $\frac{2}{3}$
(C) $\frac{3}{4}$
(D) $\frac{4}{5}$
(E) $\frac{5}{6}$

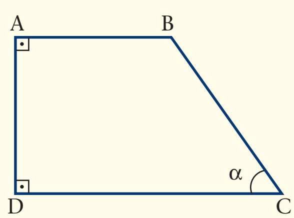
8 (UFF-RJ) O círculo da figura tem centro O e raio R. Sabendo-se que $\overline{MP}$ equivale a $\frac{5R}{12}$ e é tangente ao círculo no ponto P, o valor de sen α é:



(A) $\frac{12}{13}$ (C) $\frac{5R}{12}$ (E) $\frac{5}{13}$

(B) $\frac{5R}{13}$ (D) $\frac{5}{12}$

9 (Unificado-RJ) Na figura abaixo, ABCD é um trapézio retângulo com $\overline{AB} \cong \overline{AD}$, BC – AB = 1 cm e CD = 7 cm. Então:



(A) sen $\alpha = \frac{1}{3}$

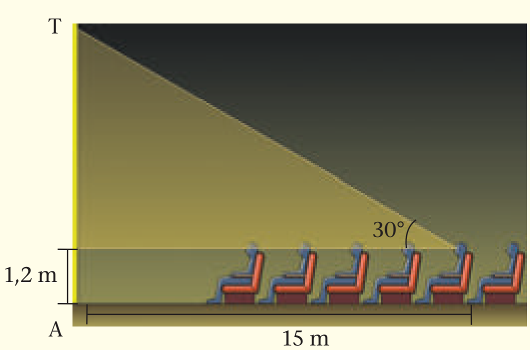
(B) sen $\alpha = \frac{3}{5}$

(C) cos $\alpha = \frac{4}{5}$

(D) tg $\alpha = \frac{3}{4}$

(E) tg $\alpha = \frac{4}{3}$

10 Ao lado está um esquema de uma sala de cinema, com o piso horizontal. De quanto deve ser a medida de $\overline{AT}$ para que um espectador sentado a 15 m da tela, com os olhos 1,2 m acima do piso, veja o ponto mais alto da tela, que é T, a 30° da horizontal?



11 (Ucsal-BA) Um triângulo isósceles é tal que a medida dos ângulos de sua base é 30°. Se a altura relativa a essa base mede 1,5 cm, o perímetro desse triângulo, em centímetros, é:

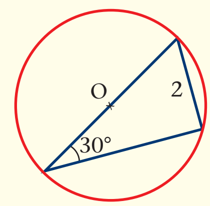
(A) $6+3\sqrt{3}$ (D) $3+\sqrt{3}$

(B) $3+3\sqrt{3}$ (E) $\frac{6+\sqrt{3}}{2}$

(C) $6+\sqrt{3}$

12 Enquanto um edifício projeta uma sombra de 18 m, um bastão de comprimento 1 m, colocado verticalmente ao lado do edifício, projeta uma sombra de 30 cm. Determine a altura do edifício.

13 (Unifap-AP) Quando o maior lado de um triângulo inscrito em um círculo coincide com o diâmetro desse círculo, o triângulo é necessariamente retângulo. Assim sendo, na figura, o raio do círculo de centro O é igual a:



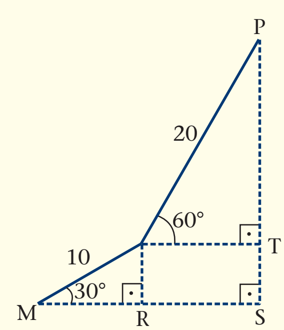
(A) 4 (D) $2\sqrt{3}$

(B) $2\sqrt{3}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) 2

14 (Vunesp) Um obelisco de 12 m de altura projeta, em certo momento, uma sombra de 4,8 m de extensão. Calcule a distância máxima que uma pessoa de 1,80 m de altura poderá se afastar do centro da base do obelisco, ao longo da sombra, para, em pé, continuar totalmente na sombra.

15 (UFRN) Ao se tentar fixar as extremidades de um pedaço de arame reto, de 30 m de comprimento, entre os pontos M e P de um plano, o arame, por ser maior do que o esperado, entortou, como mostra a figura abaixo. A partir desses dados, calcule, em metros:



a) o comprimento dos segmentos MS e SP;

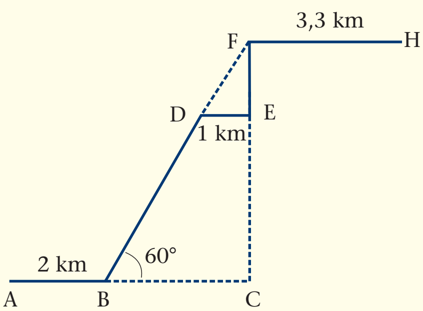
b) quanto o arame deveria medir para que tivesse o mesmo tamanho do segmento MP.

16 (Unificado-RJ) Uma escada de 2 m de comprimento está apoiada no chão e em uma parede vertical. Se a escada faz 30° com a horizontal, a distância do topo da escada ao chão é de:

(A) 0,5 m (C) 1,5 m (E) 2 m

(B) 1 m (D) 1,7 m

17 (Vunesp) Ao chegar de viagem, uma pessoa tomou um táxi no aeroporto para se dirigir ao hotel. O percurso feito pelo táxi, representado pelos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FH}$, está esboçado na figura, onde o ponto A indica o aeroporto, o ponto H indica o hotel, BCF é um triângulo retângulo com o ângulo reto em C, o ângulo no vértice B mede 60° e $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Sabendo-se que AB = 2 km, BC = 3 km, DE = 1 km e FH = 3,3 km, determine:



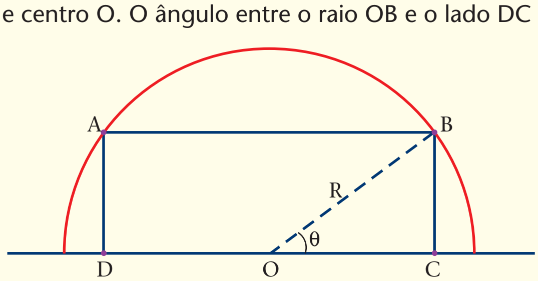
a) as medidas dos segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{EF}$ em quilômetros;

b) o preço que a pessoa pagou pela corrida (em reais), sabendo-se que o valor da corrida do táxi é dado pela função $y = 4 + 0{,}8x$, sendo x a distância percorrida em quilômetros e y o valor da corrida em reais.

18 Um balão meteorológico encontra-se preso ao solo por dois cabos, supostos retilíneos, e inclinados de 60° e 45° com a horizontal. A distância entre os pontos de fixação dos cabos no solo é de 1 000 m. A altura aproximada do balão é:

(A) 320 m
(B) 449 m
(C) 412 m
(D) 556 m
(E) 635 m

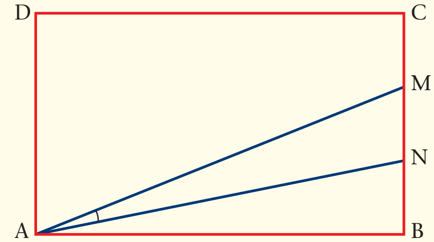
19 (UFRJ) Na figura dada temos um semicírculo de raio R e centro O. O ângulo entre o raio OB e o lado DC é θ.



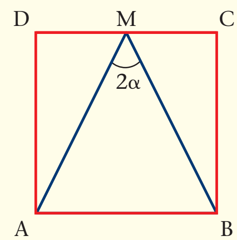
a) Calcule os lados do retângulo ABCD em função de R e θ.

b) Mostre que a área do retângulo ABCD é máxima para θ = 45°.

20 (Cesgranrio-RJ) No retângulo ABCD da figura $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 3$ e $\overline{CM} = \overline{MN} = \overline{NB}$. Determine tg $M\hat{A}N$.



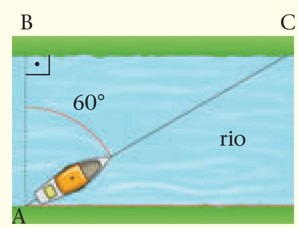
21 O lado do quadrado ABCD, da figura abaixo, mede *a* cm e M é ponto médio do lado $\overline{CD}$.



Nessas condições, o valor da tan α é:

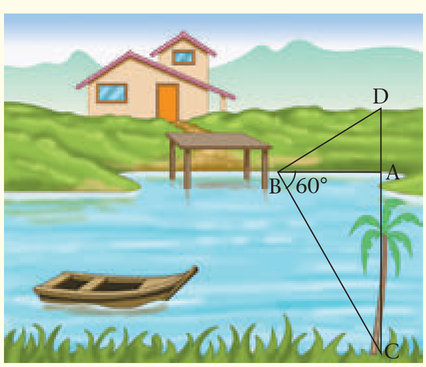
(A) 3
(B) 2
(C) $\frac{3}{2}$
(D) 1
(E) $\frac{1}{2}$

22 (Unama-AM) A figura abaixo representa um barco atravessando um rio, partindo de A em direção ao ponto B. A forte correnteza arrasta o barco em direção ao ponto C, segundo um ângulo de 60°. Sendo a largura do rio de 120 m, a distância percorrida pelo barco até o ponto C é:

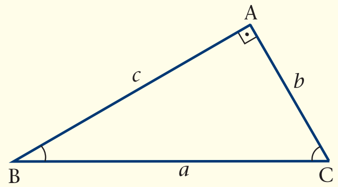


(A) $240\sqrt{3}$ m
(B) 240 m
(C) $80\sqrt{3}$ m
(D) 80 m
(E) $40\sqrt{3}$ m

23 Para medir a largura $\overline{AC}$ de um rio, um técnico usou o seguinte procedimento: localizou um ponto B de onde podia ver na margem oposta o coqueiro C, de forma que o ângulo ABC fosse de 60°; determinou o ponto D no prolongamento de $\overline{CA}$ de forma que o ângulo CBD fosse de 90°. Medindo $\overline{AD}$, obteve 40 m e pôde achar a largura do rio. Determine essa largura.



24 (UFSE) Considere o triângulo retângulo ABC representado na figura abaixo, cujos lados têm as medidas indicadas.

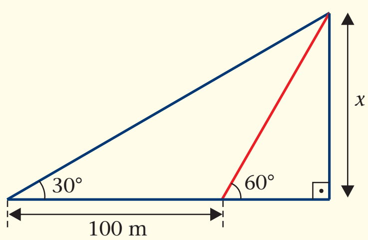


Se $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são as medidas dos ângulos internos do triângulo, é correto afirmar que $\dfrac{\text{sen}\,\hat{A} \cdot \cos\hat{C}}{\text{tg}\,\hat{B}}$ é igual a:

(A) $\dfrac{c}{a}$ (C) $\dfrac{b}{a}$ (E) $\dfrac{a}{b}$

(B) $\dfrac{c}{b}$ (D) $\dfrac{b}{c}$

25 (Fuvest-SP) Calcular x indicado na figura.

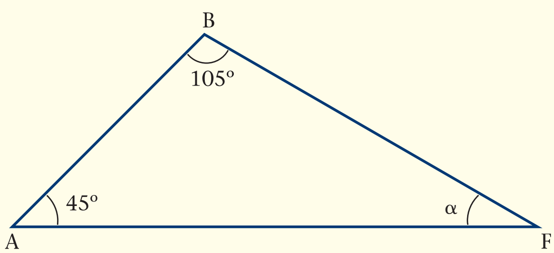


26 (Unicamp-SP) Caminhando em linha reta ao longo de uma praia, um banhista vai de um ponto A a um ponto B, cobrindo a distância AB = 1 200 m. Quando em A, ele avista um navio parado em N de tal maneira que o ângulo $N\hat{A}B$ é de 60°; e quando em B, verifica que o ângulo $N\hat{B}A$ é de 45°.

a) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita.

b) Calcule a distância em que se encontra o navio da praia.

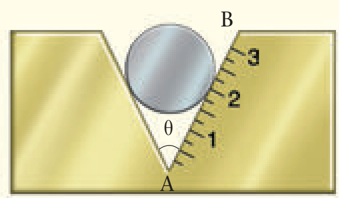
27 (Unicamp-SP) Observadores nos pontos A e B localizam um foco de incêndio florestal em F. Conhecendo os ângulos $F\hat{A}B = 45°$, $F\hat{B}A = 105°$ e a distância $\overline{AB} = 15$ km, determine as distâncias $\overline{AF}$ e $\overline{BF}$.



28 Sabendo que em um triângulo retângulo os ângulos são α e β, a hipotenusa mede 5 m e se $\beta = 2\text{sen}\,\alpha$, encontre as medidas dos catetos.

29 Dado $\text{sen}\,x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, tal que $0° < x < 90°$, calcule o valor da expressão $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\text{tg}^2 x + 1}$.

30 Um instrumento para medir o diâmetro de pequenos cilindros consiste em um bloco metálico que tem uma fenda com o perfil em V contendo uma escala, conforme ilustração abaixo. O cilindro é colocado na fenda e a medida de seu diâmetro, em centímetros, é o número que na escala corresponde ao ponto de tangência entre o cilindro e o segmento AB. Ao construir a escala de um instrumento desses, o número 2 corresponde a um certo ponto de $\overline{AB}$. Sendo x a distância desse ponto ao ponto A, assinale V ou F nas afirmações seguintes:



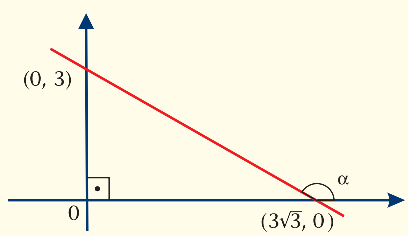
a) x é igual a $\dfrac{2}{\text{tg}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$ cm

b) x é igual a $\dfrac{1}{\text{tg}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$ cm

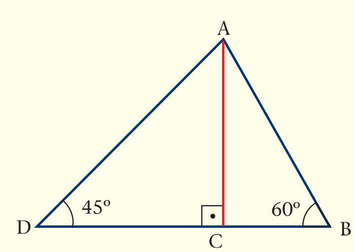
c) Se a medida de θ for 90°, então x será igual a 2 cm.

d) Quanto menor for o ângulo θ, maior será a distância x.

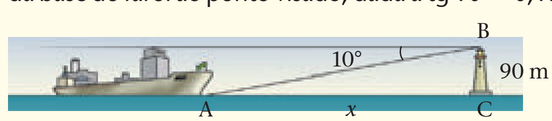
31 Qual é a medida α do ângulo assinalado na figura?



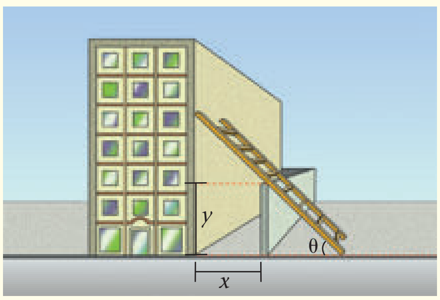
32 Na figura, se o segmento BC mede 5, obtenha a medida do segmento AD.

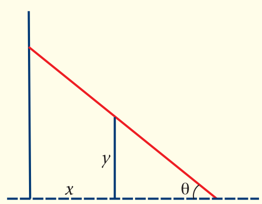


33 Do topo de um farol de 90 m de altura, um ponto de um navio é visto segundo um ângulo de depressão de 10°, conforme indica a figura. Determine a distância x da base do farol ao ponto visado, dada a $\text{tg}\,10° = 0{,}176$.



34 (UFCE) Um muro com y metros de altura se encontra a x metros da parede de um edifício. Uma escada que está tocando a parede e apoiada sobre o muro faz um ângulo θ com o chão, sendo $\text{tg}\,\theta = \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$. Suponha que o muro e a parede são perpendiculares ao chão e que este é plano (veja figura).





O comprimento da escada é:

(A) $\left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

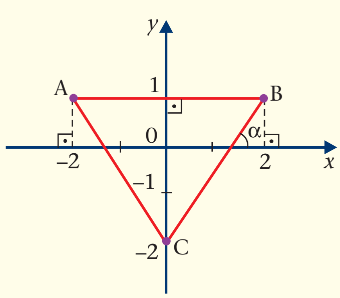
(B) $\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

(C) $\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$

(D) $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}$

(E) $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$

35 De acordo com os dados que estão na figura, responda:



a) Qual o valor de tg α?

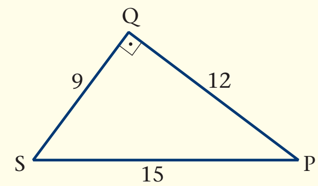
b) O triângulo ABC é equilátero?

c) Qual o valor de sen α – cos α?

d) Qual o valor de sec α – cossec α?

e) Qual o valor de $\dfrac{\text{tg}\,\alpha}{\cos\alpha}$?

36 No triângulo PQS, determine as seguintes razões:



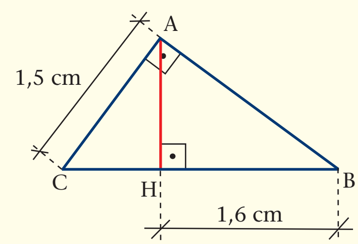
a) $\dfrac{\text{sen}\,\hat{P}}{\cos\hat{P}}$

b) $\dfrac{\text{sen}\,\hat{S}}{\cos\hat{S}}$

c) $\dfrac{\sec\hat{P}}{\text{cossec}\,\hat{P}}$

d) $\dfrac{\text{tg}\,\hat{P}}{\text{cotg}\,\hat{P}}$

37 (Unirio-RJ)



Na figura acima, o valor da secante do ângulo interno C e igual a:

(A) $\dfrac{5}{3}$

(B) $\dfrac{4}{3}$

(C) $\dfrac{5}{4}$

(D) $\dfrac{7}{6}$

(E) $\dfrac{4}{5}$

38 (UFF-RJ) Se $\hat{M}$, $\hat{N}$ e $\hat{P}$ são ângulos internos de um triângulo não retângulo, pode-se afirmar que $\text{tg}(\hat{M}) + \text{tg}(\hat{N}) + \text{tg}(\hat{P})$ é:

(A) –1

(B) 0

(C) $\dfrac{1}{\text{tg}(\hat{M}) + \text{tg}(\hat{N}) + \text{tg}(\hat{P})}$

(D) $\text{tg}(\hat{M}) \cdot \text{tg}(\hat{N}) \cdot \text{tg}(\hat{P})$

(E) $\text{tg}(\hat{M}) \cdot (\text{tg}(\hat{N}) + \text{tg}(\hat{P}))$

39 (UFF-RJ) Para $\theta = 89°$, conclui-se que:

(A) $\text{tg}\,\theta < \text{sen}\,\theta < \cos\theta$

(B) $\cos\theta < \text{sen}\,\theta < \text{tg}\,\theta$

(C) $\text{sen}\,\theta < \cos\theta < \text{tg}\,\theta$

(D) $\cos\theta < \text{tg}\,\theta < \text{sen}\,\theta$

(E) $\text{sen}\,\theta < \text{tg}\,\theta < \cos\theta$

40 Dê o valor da expressão:

$$\frac{\cos 45° \cdot \text{tg}\,45° - \cos 60° \cdot \text{sen}\,30°}{\cos^2 30° + \cos^2 60° + \cos^2 45°}.$$

41 Sabendo que a hipotenusa de um triângulo retângulo é 12 e um dos catetos mede 6, calcule o valor da secante do menor ângulo do triângulo.

42 Nestes casos vamos considerar que o ângulo x seja agudo, assim:

a) sendo sen $x = \frac{3}{5}$, obtenha o valor de cos x.

b) sendo sen $x = \frac{12}{13}$, obtenha sen x + tg x.

c) se sen $x = \frac{1}{3}$, determine tg² x.

43 Se a tg $x = \frac{\sqrt{11}}{11}$, obtenha cos x.

44 Sendo sen $x = \frac{3}{5}$, obtenha o valor numérico para cada expressão abaixo.

a) sen $(90° - x)$ c) $\cos^2 x$

b) cos $(90° - x)$ d) $1 + \text{tg}\, x$

45 A média aritmética de tg 30° e tg 60° é menor ou maior que tg 45°?

46 Encontre o valor de p para que se tenha simultaneamente sen $x = \sqrt{p-2}$ e cos $x = p - 1$.

47 Se cos $x = \frac{1}{2}$ e $0° < x < 90°$, qual é o valor da expressão $\frac{\text{cossec}\, x - \text{sen}\, x}{\sec x - \cos x}$?

48 Determine o valor de $\frac{\text{cotg}\, x - 1}{\text{cossec}\, x - \sec x}$, visto que $0° < x < 90°$ e cos $x = \frac{1}{2}$.

49 Se p = sen x + cos x e q = sen x – cos x, prove que $p^2 + q^2 = 2$.

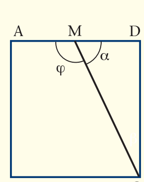
50 Dê o valor de sen $x \cdot \cos x$, visto que tg x + cotg x = 2.

51 Determine o valor de K para que se tenha simultaneamente cossec $x = \frac{1}{K}$ e sec $x = \frac{\sqrt{3}}{3K}$.

52 Sabendo que cos $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ e $0° \leq x \leq 90°$, calcule:

$$A = \frac{\text{sen}\, x \cdot \cos x - \text{tg}\, x}{1 - \text{cossec}\, x}$$

53 Na figura ao lado, A, B, C e D são vértices de um quadrado, M é o ponto médio do lado $\overline{AD}$, e $\overline{MC}$ é o segmento de reta que une M e C.



É correto afirmar que:

a) $\overline{MD}$ é uma altura do triângulo MDC.

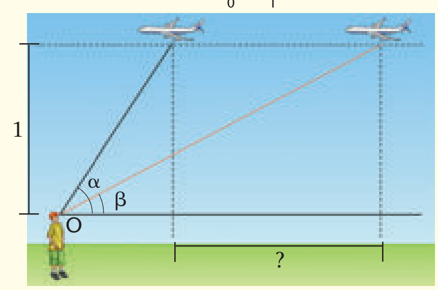
b) a área do trapézio ABCM é igual ao triplo da área do triângulo MDC.

c) tg α = 2.

d) sen² α + sen² β = 1.

e) sen φ = sen α.

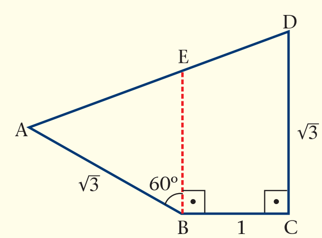
54 Um avião voa numa reta horizontal à altura 1 em relação a um observador O, situado na projeção horizontal da trajetória. No instante t_0, é visto sob ângulo β e; no instante t_1, sob ângulo α. Qual é a distância percorrida entre os instantes t_0 e t_1?



55 Calcule o valor de x que verifica, simultaneamente, as igualdades: sen α = $x + 2$ e cos α = $\sqrt{1 - x^2}$.

56 (PUC-MG) Sabendo-se que tg x = 2, calcule a cossecante de x, sendo x um arco do primeiro quadrante.

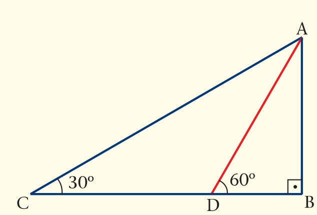
57 (Fuvest-SP) No quadrilátero ABCD da figura ao lado, E é um ponto sobre o lado $\overline{AD}$ tal que o ângulo $A\hat{B}E$ mede 60° e os ângulos $E\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$ são retos. Sabe-se ainda que $\overline{AB} = \overline{CD} = \sqrt{3}$ e $\overline{BC}$ = 1. Determine a medida de $\overline{AD}$.



58 Num triângulo ABC, $\overline{BC}$ = 4 cm, o ângulo $\hat{C}$ mede 30° e a projeção do lado $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$ mede 2,5 cm. Calcule o comprimento da mediana que sai do vértice A, nos casos:

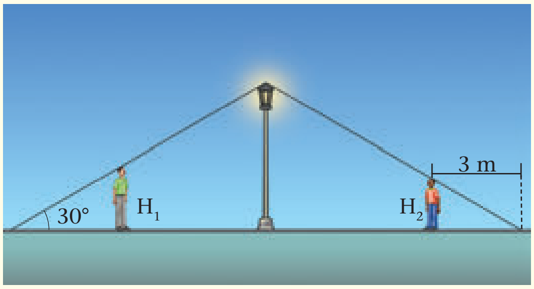
a) $\hat{B} < 90°$ b) $\hat{B} > 90°$

59 (Vunesp) Na figura, os pontos C, D e B são colineares e os triângulos ABD e ABC são retângulos em B. Se a medida do ângulo $A\hat{D}B$ é 60° e a medida do ângulo $A\hat{C}B$ é 30°, demonstre que:



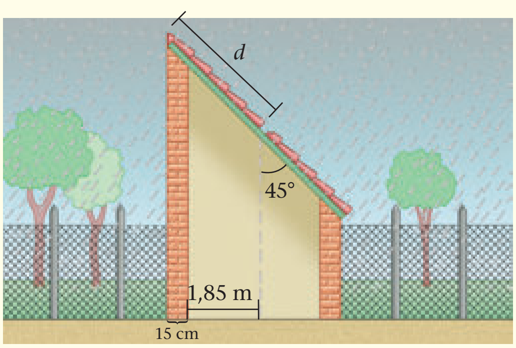
$\overline{AD} = \overline{DC} = 2 \cdot \overline{DB}$

60 (Unirio-RS)

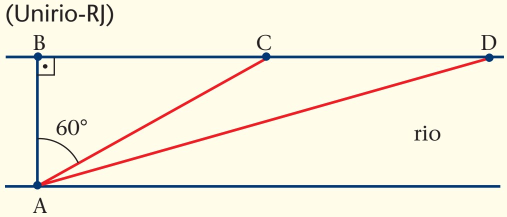


Dois homens, H_1 e H_2, com 2 m e 1,5 m de altura, respectivamente, estão em pé numa calçada, em lados opostos de um poste de 5 m de comprimento, iluminados por uma lâmpada desse poste, como mostra a figura. Determine a distância (em metros) entre os homens.

61 (UFMS) Uma telha de um galinheiro quebrou. Em dias chuvosos, uma goteira produz no chão, embaixo da telha quebrada, uma pequena poça de água, a 1,85 m de uma das paredes do galinheiro, conforme a figura. Considerando que a espessura dessa parede é 15 cm e que *d* é a distância entre o ponto mais alto do telhado e a quebra da telha, calcule, em metros, $d^2 + 20$.



62 (Unirio-RJ)

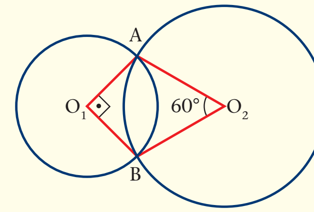


Considere a figura, que representa um rio de margens retas e paralelas, nesse trecho. Sabendo-se que $\overline{AC} = 6$ e $\overline{CD} = 5$, determine:

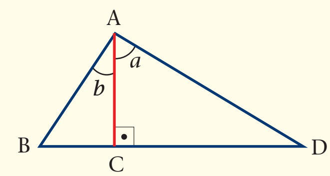
a) a distância entre B e D;

b) a área do triângulo ABD.

63 (Fuvest-SP)
A corda comum de dois círculos que se interceptam é vista de seus centros sob ângulos de 90° e 60°, respectivamente. Sabendo-se que a distância entre seus centros é igual a $\sqrt{3}+1$, determine os raios dos círculos.



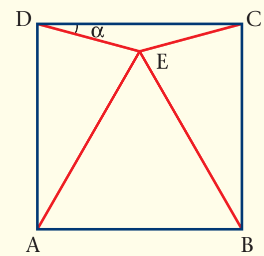
64 Utilize a figura ao lado para provar que:
sen $(a + b)$ =
= sen $a \cdot \cos b$ +
+ sen $b \cdot \cos a$.
Mãos à obra.



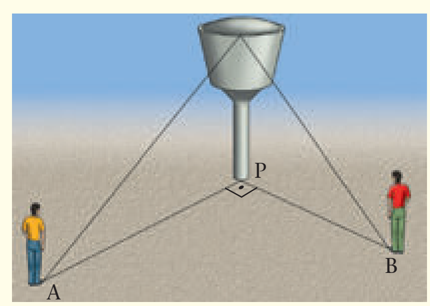
65 Na figura, ABCD é um quadrado de lado unitário (medida igual a 1) e o triângulo ABE é equilátero.

a) Prove que $\alpha = 15°$.

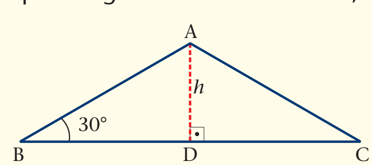
b) Obtenha o seno do ângulo $D\hat{E}C$.



66 (UFMS) Uma caixa-d'água está localizada num ponto P de um terreno plano, conforme a figura. Ela é avistada do ponto A sob um ângulo de 30° e do ponto B sob um ângulo de 45°. Sabendo-se que a medida do ângulo $A\hat{P}B$ é 90° e a distância entre os pontos A e B é 100 m, calcule, em metros, a altura da caixa-d'água.



67 (UFJF-MG) O triângulo abaixo é isósceles. Sabendo-se que o segmento BD mede 5 cm, calcule:

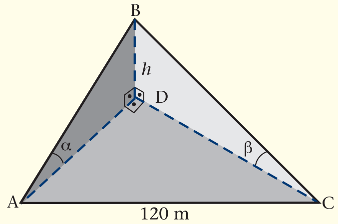


a) a altura *h*;

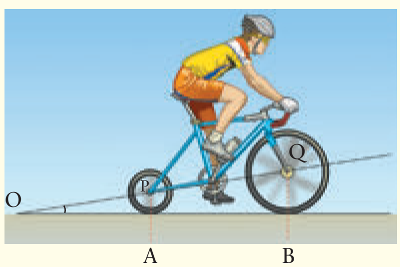
b) a área do triângulo ABC.

68 Uma escada apoiada em uma parede, num ponto que dista 3 m do solo, forma, com essa parede, um ângulo de 30°. Determine a distância da parede ao pé da escada.

69 Para calcular a altura de uma montanha B, desde um plano horizontal que passa por A, um observador mede o ângulo $\alpha = 45°$, se desloca depois para C, distante 120 m de A, obtendo o ângulo $\beta = 30°$. Calcule a altura h da montanha.



70 (Uerj) Observe a bicicleta e a tabela trigonométrica.

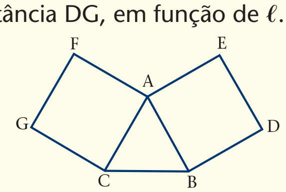


Ângulo (em graus)	Seno	Cosseno	Tangente
10	0,174	0,985	0,176
11	0,191	0,982	0,194
12	0,208	0,978	0,213
13	0,225	0,974	0,231
14	0,242	0,970	0,249

Os centros das rodas estão a uma distância PQ igual a 120 cm e os raios PA e QB medem, respectivamente, 25 cm e 52 cm.
De acordo com a tabela, o ângulo AÔP tem o seguinte valor:

(A) 10° (B) 12° (C) 13° (D) 14°

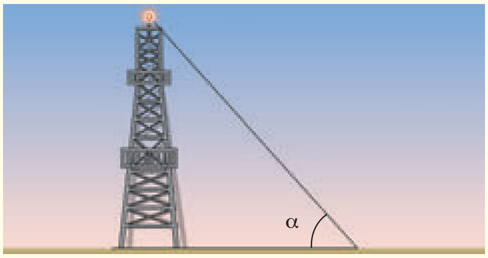
71 (Unirio-RJ) Na figura abaixo, o triângulo ABC é equilátero de lado ℓ; ABDE e AFGC são quadrados.
Calcule a distância DG, em função de ℓ.



72 No triângulo retângulo ABC, o ponto médio da hipotenusa $\overline{BC}$ é P e o pé da perpendicular baixada de A sobre $\overline{BC}$ é Q. Sabendo que AC é o maior cateto, mostre que:

$$\frac{QP}{BP} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 - \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 \qquad \frac{AQ}{AP} = 2\,\frac{AB}{BC}\cdot\frac{AC}{BC}$$

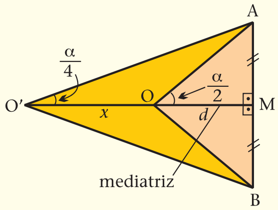
73 (Fuvest-SP) A uma distância de 40 m, uma torre é vista sob um ângulo α, como mostra a figura.



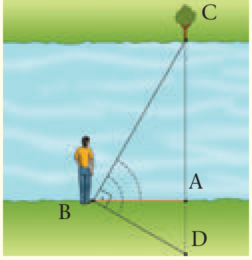
x	sen x	cos x	x	sen x	cos x
10	0,174	0,985	21	0,358	0,934
11	0,191	0,982	22	0,375	0,927
12	0,208	0,978	23	0,391	0,921
13	0,225	0,974	24	0,407	0,914
14	0,242	0,970	25	0,423	0,906
15	0,259	0,966	26	0,438	0,899
16	0,276	0,961	27	0,454	0,891
17	0,292	0,956	28	0,470	0,883
18	0,309	0,951	29	0,485	0,875
19	0,326	0,946	30	0,500	0,866
20	0,342	0,940			

Usando a tabela acima determine a altura da torre, supondo $\alpha = 20°$.

74 Um observador O, na mediatriz de um segmento $\overline{AB}$, vê esse segmento sob um ângulo α. O observador afasta-se do segmento ao longo da mediatriz até uma nova posição O', de onde ele vê o segmento sob o ângulo $\frac{\alpha}{2}$. Expresse a distância x = OO' em termos de α e d.



75 Para medir a largura $\overline{AC}$ de um rio, um homem usou o seguinte procedimento: localizou um ponto B de onde podia ver na margem oposta uma árvore C, de modo que o ângulo AB̂C fosse 30° e determinou o ponto D no prolongamento $\overline{CA}$, de forma que o ângulo DB̂C fosse 90°. Medindo $\overline{AD}$ = 60 m, achou a largura do rio, que é igual a:



(A) 15 m
(B) 20 m
(C) 25 m
(D) 30 m
(E) n.d.a.

CAPÍTULO XI

RELAÇÕES MÉTRICAS NUM TRIÂNGULO

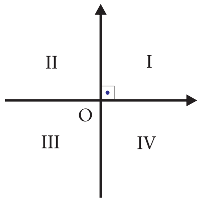
iStockphoto.com

Neste capítulo, estendemos as noções da trigonometria para ângulos obtusos e apresentamos as relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo qualquer, como a lei dos senos e a lei dos cossenos.

11 – RELAÇÕES MÉTRICAS NUM TRIÂNGULO

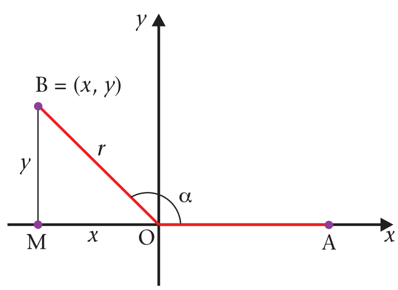
11.1 – Linhas trigonométricas de um ângulo obtuso

As linhas trigonométricas dos ângulos maiores que um ângulo reto podem ser expressas em função das linhas de ângulos agudos, que são chamados de **ângulos de referência**, desde que com sinais adequados. A divisão do plano em quatro quadrantes por eixos cartesianos nos fornece os elementos necessários para calculá-las.



Consideremos os eixos do referencial xOy, colocando o vértice O do ângulo AOB na origem e o lado AO, que chamaremos de lado inicial, sobre o semieixo positivo Ox.

Façamos a rotação de um segmento $OA = r > 0$ inicialmente sobre Ox, no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio comum, até que o ângulo $AOB = \alpha$ esteja entre 90° e 180°.



Dizemos então que o ângulo obtuso $90° < \alpha < 180°$ está no segundo quadrante.

DEFINIÇÃO
Linhas trigonométricas de um ângulo obtuso.

Define-se portanto:

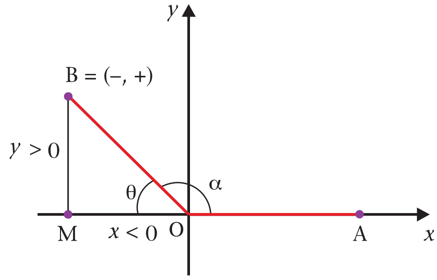
$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r} \text{ e cossec } \alpha = \frac{r}{y}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \text{ e sec } \alpha = \frac{r}{x}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x} \text{ e cotg } \alpha = \frac{x}{y}$$

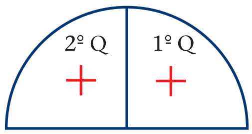
NOTA
sec α, cossec α, cotg α se mantêm inversas respectivamente de cos α, sen α e tg α.

Os sinais das linhas trigonométricas dependem das coordenadas do ponto $B = (x, y)$, uma vez que $OB = r$ é sempre positivo. Assim, no segundo quadrante $y > 0$ e $x < 0$ temos:

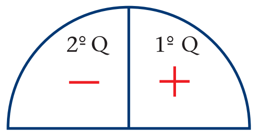


sen $\alpha > 0$ e cossec $\alpha > 0$
cos $\alpha < 0$ e sec $\alpha < 0$
tg $\alpha < 0$ e cotg $\alpha < 0$

NOTA
No caso $90° < \alpha < 180°$, ângulo de referência θ será então $\theta = 180° - \alpha$. Como α é obtuso, então θ será agudo tendo todas as suas linhas trigonométricas positivas.

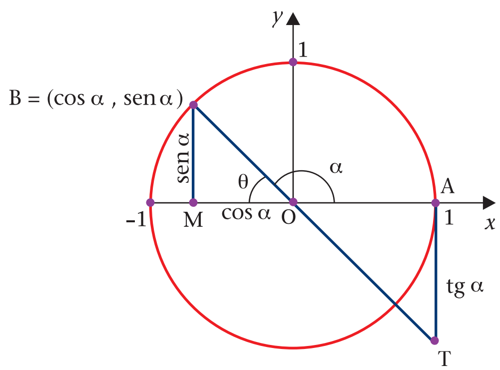


sinais do seno e cossecante



sinais do cosseno, tangente, secante e cotangente

Se $r = 1$ as coordenadas do ponto B = (x, y) serão $x = \cos\alpha$ e $y = \text{sen}\,\alpha$.
De fato:



NOTA
No caso da tangente, basta observar os sinais do seno e do cosseno. Para a representação da tangente, prolonga-se o raio que passa pela extremidade do ângulo até encontrar a tangente no ponto A.
A ordenada do ponto T de interseção será a tangente do ângulo.

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$
$$\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$
então B = (cos α, sen α)

Pela semelhança dos triângulos OBM e OTA, temos:

$$\frac{AT}{OA} = \frac{MB}{OM} \Rightarrow \frac{AT}{1} = \frac{|y|}{|x|} \Rightarrow AT = \left|\frac{y}{x}\right|$$

Como $\text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} < 0$, então tg α = –AT, ou seja:

$$\boxed{T = (1, \text{tg}\,\alpha)}$$

Assim, para 90° < α < 180°:

$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\theta = \text{sen}\,(180° - \alpha) > 0$	Os senos de ângulos suplementares são iguais.
$\cos\alpha = -\cos\theta = -\cos(180° - \alpha) > 0$	Os cossenos de ângulos suplementares são opostos.
$\text{tg}\,\alpha = -\text{tg}\,\theta = -\text{tg}\,(180° - \alpha) < 0$	As tangentes de ângulos suplementares são opostas.

O **ângulo de referência** θ é um ângulo agudo cujas linhas trigonométricas são positivas e de mesmo módulo que do ângulo α.

DEFINIÇÃO
Ângulo de referência.

NOTA
O cosseno e o seno de um ângulo obtuso α são numericamente iguais aos do seu ângulo de referência $\theta = 180° - \alpha$ precedidos dos sinais das respectivas coordenadas dos pontos do segundo quadrante.

Exemplos:
Temos para os principais ângulos:

i) $\text{sen } 120° = \text{sen }(180° - 120°) = \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ii) $\cos 120° = -\cos(180° - 120°) = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$

iii) $\text{tg } 120° = -\text{tg }(180° - 120°) = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$

iv) $\text{sen } 135° = \text{sen }(180° - 135°) = \text{sen } 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

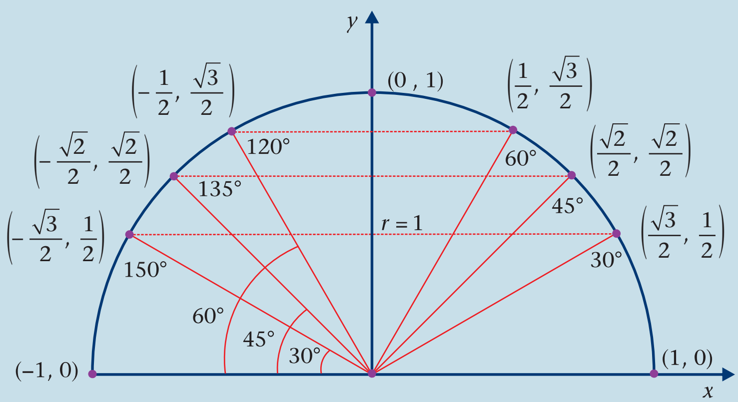
v) $\cos 135° = -\cos(180° - 135°) = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

vi) $\text{tg } 135° = \dfrac{\text{sen } 135°}{\cos 135°} = -1$

vii) $\text{sen } 150° = \text{sen }(180° - 150°) = \text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}$

viii) $\cos 150° = -\cos(180° - 150°) = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ix) $\text{tg } 150° = \dfrac{\text{sen } 150°}{\cos 150°} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



Casos particulares importantes:

	0°	90°	180°
sen	0	1	0
cos	1	0	–1
tg	0	∄	0

Observações:

1) As relações $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\sec^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha$ e $\text{cossec}^2 \alpha = 1 - \text{cotg}^2 \alpha$ continuam válidas, desde que os sinais sejam considerados.

2) Como o seno é positivo para ângulos agudos e obtusos existirão dois ângulos com o mesmo seno. A duplicidade desaparece quando se conhece o cosseno ou a tangente.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Coloque na ordem decrescente os números: sen 50°; sen 120° e sen 170°.

2 O sinal de cos 98° + sen 98° é:

(A) positivo

(B) negativo

(C) nulo

3 Se sen $x = \dfrac{3}{5}$ e $x \in 2^{\underline{o}}$ quadrante, determine:

a) cos x

b) tg x

c) cotg x

4 Dê o sinal de:

$$y = \frac{\text{sen } 120° \cdot \cos 150°}{\text{sen } 30° \cdot \cos 120° \cdot \text{tg } 145°}$$

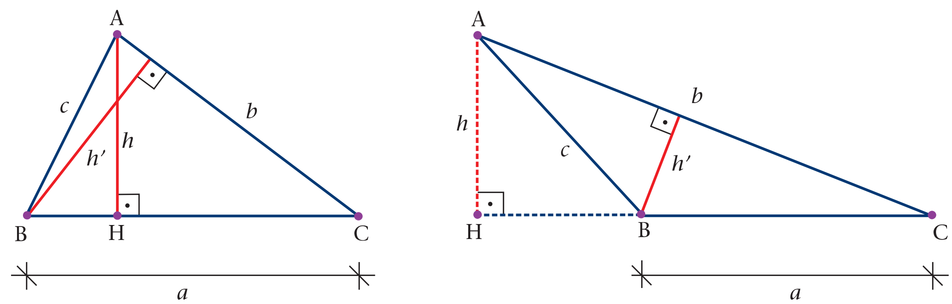
5 Calcule o valor de y.

a) $y = \dfrac{\text{sen } 45° \cdot \text{sen } 120° \cdot \cos 135°}{\text{tg } 135° \cdot \cos 180° \cdot \text{tg } 120°}$

b) $y = \dfrac{\text{sen } 45° \cdot \cos 120° \cdot \text{tg } 150°}{\cos 135° \cdot \cos 150° \cdot \text{sen } 135°}$

11.2 – Lei dos senos

Seja ABC um triângulo qualquer, acutângulo ou obtusângulo conforme as figuras abaixo:



A altura AH determina dois triângulos retângulos ABH e ACH, em ambos os casos. Temos:

$$h = c \operatorname{sen} \hat{B} = b \operatorname{sen} \hat{C} \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

Analogamente:

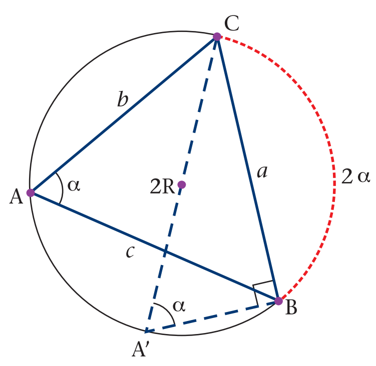
$$h' = c \operatorname{sen} \hat{A} = a \operatorname{sen} \hat{C} \Rightarrow \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}}$$

Logo:

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}}$$

Inscrevendo o $\triangle$ABC num círculo de raio R, temos:

NOTA
Os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos na razão do diâmetro do círculo circunscrito.



a) $\hat{A} = \hat{A}'$ por serem inscritos no círculo.

b) O ângulo A′BC é reto por ser oposto ao diâmetro A′C = 2R.

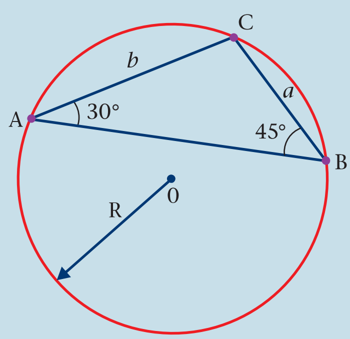
c) $a = A'C \operatorname{sen} \hat{A}' = 2R \operatorname{sen} \hat{A} \Rightarrow \dfrac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = 2R$

Então:

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R}$$

Exemplo:

Um triângulo ABC está inscrito num círculo de raio R. Se a = 10, $\hat{A}$ = 30° e $\hat{B}$ = 45°, calcular b e o raio do círculo circunscrito.



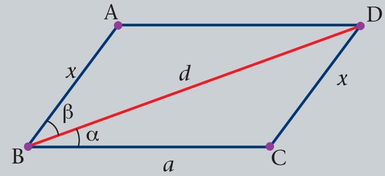
$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$$

$$\frac{10}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow b = 10\sqrt{2}$$

$$\frac{10}{\frac{1}{2}} = 2R \Rightarrow 2R = 20 \Rightarrow R = 10$$

Exercícios resolvidos:

1) Sejam d e a, respectivamente, os comprimentos da diagonal BD e do lado BC do paralelogramo ABCD. Supondo conhecidos o comprimento a e os ângulos α e β, calcular os comprimentos x e d.



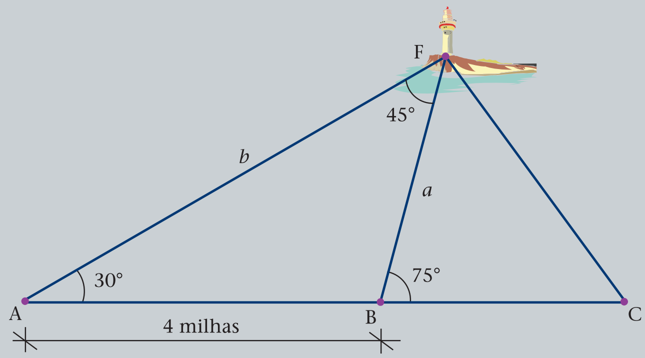
Solução:

$B\hat{D}C = \beta$ (alternos internos). Então: $\dfrac{a}{\text{sen } \beta} = \dfrac{x}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow x = \dfrac{a \text{ sen } \alpha}{\text{sen } \beta}$

$$\hat{C} = 180° - (\alpha + \beta) \Rightarrow \frac{d}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{a}{\text{sen } \beta} \Rightarrow d = a \cdot \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \beta} \Rightarrow$$

$$d = a \cdot \frac{\text{sen } [180° - (\alpha + \beta)]}{\text{sen } \beta} \Rightarrow d = \frac{a \text{ sen } (\alpha + \beta)}{\text{sen } \beta}$$

2) Navegando em linha reta, um navio passa sucessivamente pelos pontos A, B e C. O comandante, quando o navio está em A, observa um farol em F e calcula $F\hat{A}C = 30°$. Após navegar 4 milhas até B, verifica $F\hat{B}C = 75°$. Quantas milhas separam o farol do ponto B?

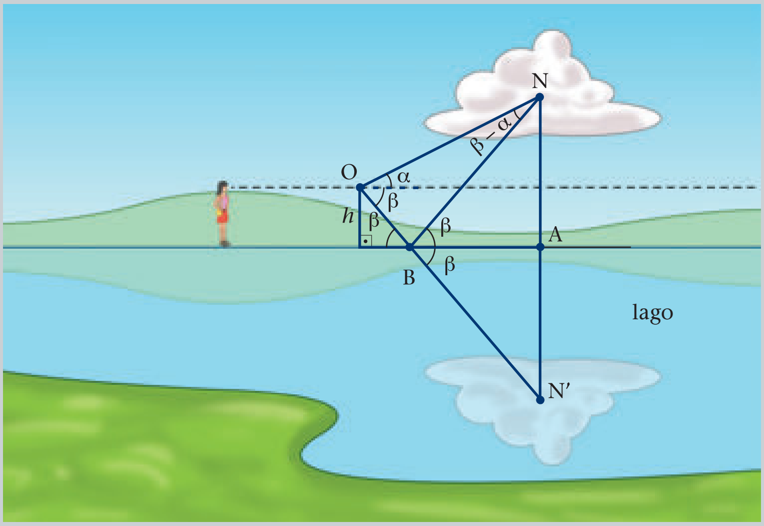


Solução:

Temos $A\hat{F}B = 180° - (30° + 105°) = 45°$.

$$\frac{4}{\text{sen } 45°} = \frac{a}{\text{sen } 30°} \Rightarrow a = \frac{4 \text{ sen } 30°}{\text{sen } 45°} = \frac{4 \cdot \frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ milhas}$$

3) Um observador colocado nas margens de um lago, a uma altura h acima do nível da água, vê que o ângulo de elevação de uma nuvem é α, e o ângulo de depressão da imagem refletida sobre a água é β. Calcular a altura da nuvem.



Note que: $O\hat{N}B = N\hat{B}N' - N\hat{O}B$

Aplicando a lei dos senos no triângulo ONB:

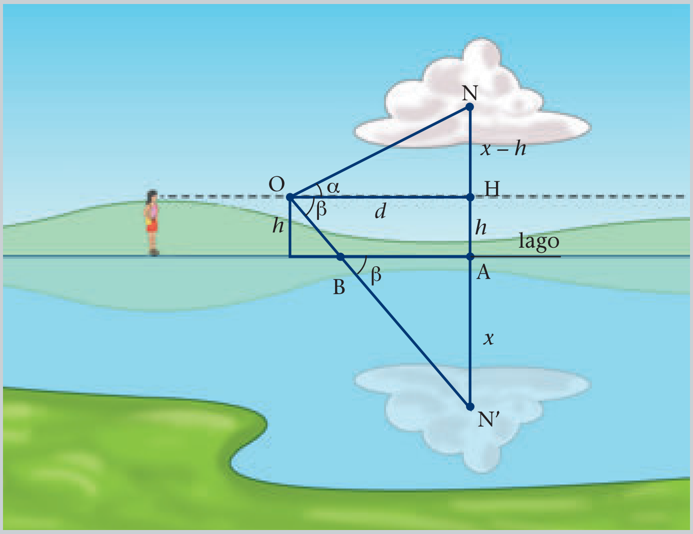
$$\frac{NB}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = \frac{OB}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}$$

A altura da nuvem é NA, logo:

$NA = NB \cdot \operatorname{sen}\beta = OB \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}\operatorname{sen}\beta$. Enfim, $OB \cdot \operatorname{sen}\beta = h$, logo:

$NA = h\,\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}$.

Outra solução:



$$x - h = d\operatorname{tg}\alpha$$
$$x + h = d\operatorname{tg}\beta$$

Eliminando d: $\dfrac{x-h}{x+h} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$

Usando proporções:

$$\frac{(x+h)+(x-h)}{(x+h)-(x-h)} = \frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}$$

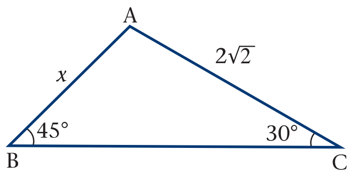
$$\frac{2x}{2h} = \frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}$$

$$x = h\cdot\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}$$

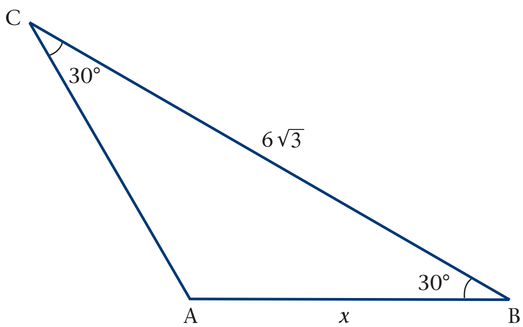
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Determine o valor de x em cada triângulo abaixo.

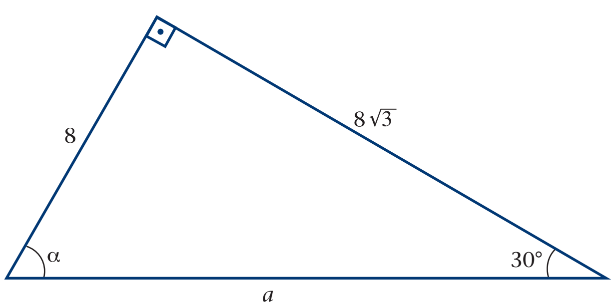
a)



b)



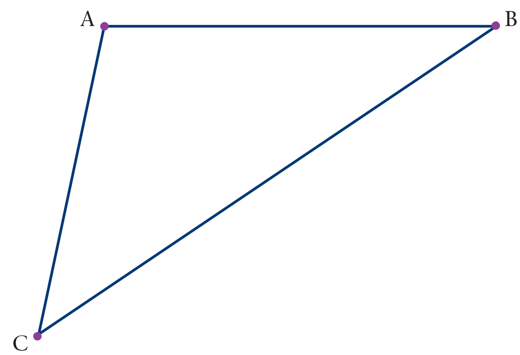
2 Determine a medida de a, sabendo que $\alpha < 90°$.



3 O segmento PA é perpendicular ao plano que contém o triângulo equilátero ABC. Supondo que AB = 2AP e M é ponto médio do segmento BC, calcule o ângulo formado pelos segmentos PA e PM.

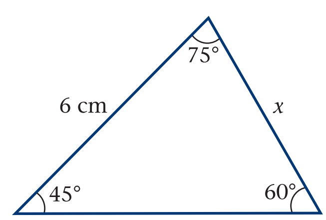
4 Num triângulo ABC, BC = a, AC = b, $\hat{A} = 45°$ e $\hat{B} = 30°$. Sendo $a + b = 1 + \sqrt{2}$, calcule a e b.

5 Deseja-se determinar a distância entre os pontos A e B, entre os quais há um lago. Para isso, coloca-se uma marca no ponto C, a 50 m de A, e determina-se que $A\hat{C}B = 44°$ e $C\hat{A}B = 102°$. Calcule a distância AB, sabendo que sen 34° = 0,559, sen 44° = 0,695 e sen 78° = 0,978.

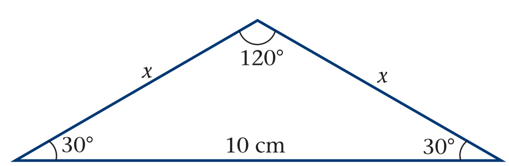


6 Calcule x em cada caso.

a)



b)

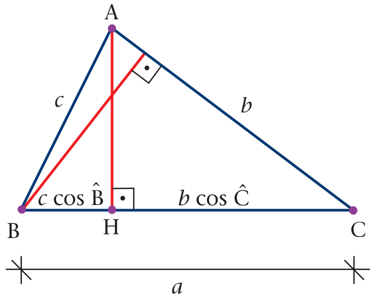


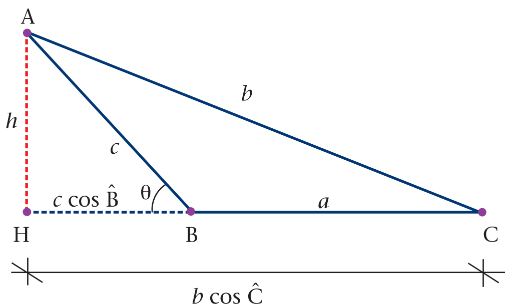
7 Num triângulo ABC, temos AC = 8 m, BC = 6 m, $\alpha = B\hat{A}C$ e $\beta = A\hat{B}C$. Se $\beta = 60°$, calcule sen α.

11.3 – Lei dos cossenos

11.3.1 – Lei das projeções

Seja ABC um triângulo qualquer acutângulo ou obtusângulo, conforme as figuras abaixo:





$\overline{BC} = \overline{HC} + \overline{BH}$

$\boxed{\overline{BC} = b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B}}$

$\overline{BC} = \overline{HC} - \overline{HB}$

$\overline{BC} = b \cos \hat{C} - c \cos \theta$

Como $\theta = 180° - \hat{B}$

Então:

$\overline{BC} = b \cos \hat{C} - c \cos (180° - \hat{B})$

$\overline{BC} = b \cos \hat{C} - c (- \cos \hat{B})$

$\boxed{\overline{BC} = b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B}}$

Em ambos os casos temos então:

$$\boxed{a = b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B}}$$

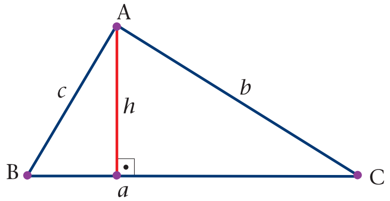
Analogamente:

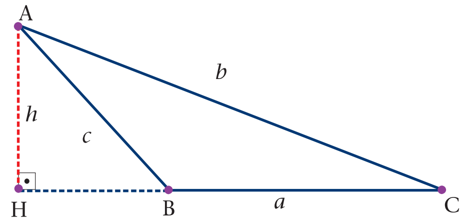
$$\boxed{\begin{array}{l} b = a \cos \hat{C} + c \cos \hat{A} \\ c = a \cos \hat{B} + b \cos \hat{A} \end{array}}$$

NOTA
Qualquer lado é a soma das projeções ortogonais dos dois outros lados sobre si mesmo.

11.3.2 – Lei dos cossenos

Seja ABC um triângulo qualquer:





Consideremos a relação $a = b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B}$.
Transpondo o termo $b \cos \hat{C}$ para o 1º membro:
$a - b \cos \hat{C} = c \cos \hat{B}$

Elevando ambos os membros ao quadrado:
$a^2 - 2ab\cos\hat{C} + b^2\cos^2\hat{C} = c^2\cos^2\hat{B}$
Como $\cos^2\hat{B} = 1 - \text{sen}^2\hat{B}$, temos:
$a^2 - 2ab\cos\hat{C} + b^2\cos^2\hat{C} = c^2(1 - \text{sen}^2\hat{B})$
$a^2 - 2ab\cos\hat{C} + b^2\cos^2\hat{C} = c^2 - c^2\,\text{sen}^2\hat{B}$
Mas $b\,\text{sen}\,\hat{C} = c\,\text{sen}\,\hat{B}$, substituindo:
$a^2 - 2ab\cos\hat{C} + b^2\cos^2\hat{C} = c^2 - b^2\,\text{sen}^2\hat{C}$

Transpondo o termo $b^2\,\text{sen}^2\hat{C}$, vem:

$$a^2 - 2ab\cos\hat{C} + b^2\cos^2\hat{C} + b^2\,\text{sen}^2\,c = c^2$$

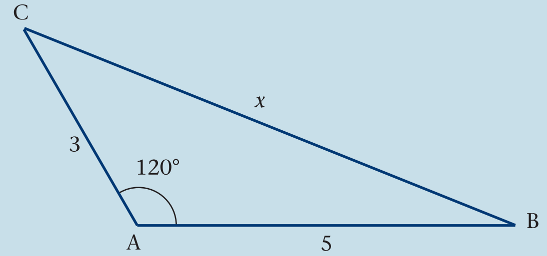
Então: $c^2 = a^2 - 2ab\cos\hat{C} + b^2(\text{sen}^2\hat{C} + \cos^2\hat{C})$
Como $\text{sen}^2\hat{C} + \cos^2\hat{C} = 1$, temos:

$$\boxed{c^2 = a^2 - 2ab\cos\hat{C} + b^2}$$

NOTA
O quadrado de um lado é a soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados vezes o cosseno do ângulo formado entre eles.

Exemplos:

i) Dois lados de um triângulo medem 5 cm e 3 cm e o ângulo compreendido entre eles é 120°. Calcular o comprimento do terceiro lado.



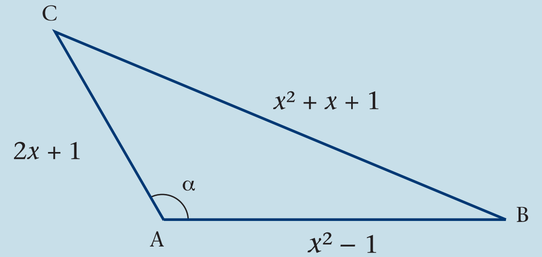
Aplicando a lei dos cossenos para o ângulo de 120°, vem:

$x^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5\cos 120°$

Como $\cos 120° = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$, então:

$x^2 = 9 + 25 - 30\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 49 \Rightarrow x = 7$ cm

ii) Num triângulo os lados medem $x^2 + x + 1$, $2x + 1$ e $x^2 - 1$, $x > 1$. Calcular o ângulo oposto ao lado $x^2 + x + 1$:



Lei dos cossenos para o lado $x^2 + x + 1$:

$(x^2 + x + 1)^2 = (2x + 1)^2 + (x^2 - 1)^2 - 2(2x + 1)(x^2 - 1)\cos\alpha$

$x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x = 4x^2 + 4x + 1 + x^4 - 2x^2 + 1 - 2(2x + 1)(x^2 - 1)\cos\alpha$

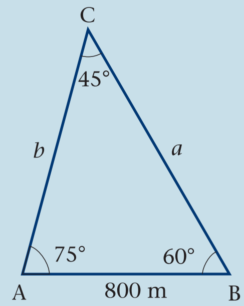
$2x^3 + x^2 - 2x - 1 = -2(2x + 1)(x^2 - 1)\cos\alpha$

$2x(x^2 - 1) + (x^2 - 1) = -2(2x + 1)(x^2 - 1)\cos\alpha$

$(2x + 1)(x^2 - 1) = -2(2x + 1)(x^2 - 1)\cos\alpha$, como $2x + 1 \neq 0$ e $x^2 - 1 \neq 0$:

$1 = -2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120°$

iii) Um agrimensor deseja medir um terreno de forma triângular ABC, que tem como base AB = 800 m. Um marco C é observado das extremidades da base e os ângulos ABC e BAC são, respectivamente, 60° e 75°. Calcular AC e BC.



$\hat{C} = 180° - (75° + 60°) = 45°$

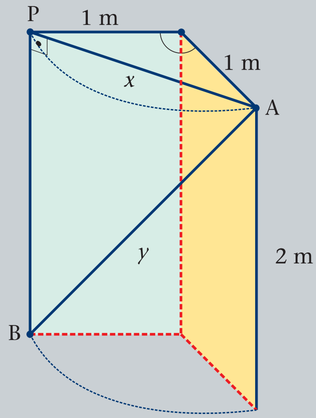
Lei dos senos: $\dfrac{b}{\text{sen } 60°} = \dfrac{800}{\text{sen } 45°} \Rightarrow b = 800 \cdot \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 400\sqrt{6}$ m

Lei das projeções:

$a = 800\cos 60° + 400 \cdot \sqrt{6}\cos 45° = 800 \cdot \dfrac{1}{2} + 400\sqrt{6} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 400\left(1 + \sqrt{3}\right)\text{m}$

Exercícios resolvidos:

1) Uma porta retangular de 2 m de altura por 1 m de largura gira 120° para abrir, conforme a figura abaixo. Calcule a distância entre os pontos A e B em metros.



Solução:

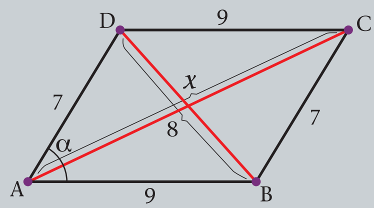
Calculamos a distância PA pela lei dos cossenos:

$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120° \Rightarrow x^2 = 1 + 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$ m

A distância AB = y, pelo teorema de Pitágoras, será: $y^2 = 2^2 + x^2 = 4 + 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \sqrt{7}$ m

2) Os lados de um paralelogramo medem 7 cm e 9 cm e uma de suas diagonais mede 8 cm. Calcular a medida da outra diagonal.



Solução:

Lei dos cossenos:

$8^2 = 7^2 + 9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cos \alpha$

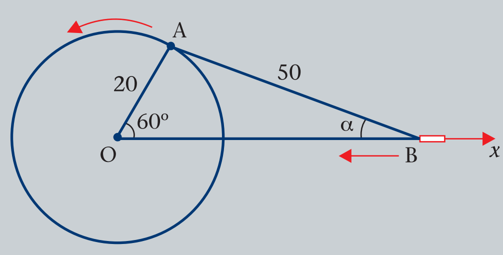
$64 = 49 + 81 - 126 \cos \alpha$

$\cos \alpha = \frac{66}{126}$

Por outro lado: $x^2 = 7^2 + 9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cos (180° - \alpha)$

$x^2 = 49 + 81 - 126 \cdot \left(-\frac{66}{126}\right) = 196 \Rightarrow x = 14$ cm

3) O diagrama abaixo mostra a parte de uma máquina em que B desliza ao longo do eixo Ox quando AO gira em torno do ponto O. Se AO = 20 cm e AB = 50 cm, determinar o comprimento de OB quando o ângulo AÔB = 60°.



Solução:

Lei dos senos: $\frac{50}{\text{sen } 60°} = \frac{20}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2\, \alpha} = \sqrt{1 - \frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{22}}{5}$$

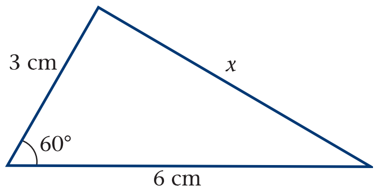
Lei das projeções: OB = AO cos 60° + AB cos α

$$OB = 20 \cdot \frac{1}{2} + 50 \cdot \frac{\sqrt{22}}{5} = 10 + 10\sqrt{22} = 10(1 + \sqrt{22})\ \text{m}$$

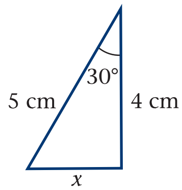
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Calcule x em cada caso.

a)

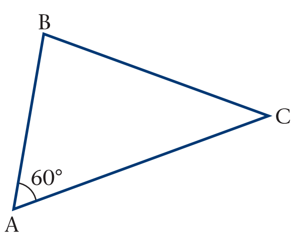


b)



2 Num triângulo ABC são dados $\hat{A} = 45°$, AB = 6 cm e AC = 8 cm. Calcule o lado BC.

3



Deseja-se medir a distância entre duas cidades B e C sobre um mapa, sem escala. Sabe-se que AB = 80 km e AC = 120 km, onde A é uma cidade conhecida, como mostra a figura acima. Logo, a distância entre B e C, em km, é:

(A) menor que 90;

(B) maior que 90 e menor que 100;

(C) maior que 100 e menor que 110;

(D) maior que 110 e menor que 120;

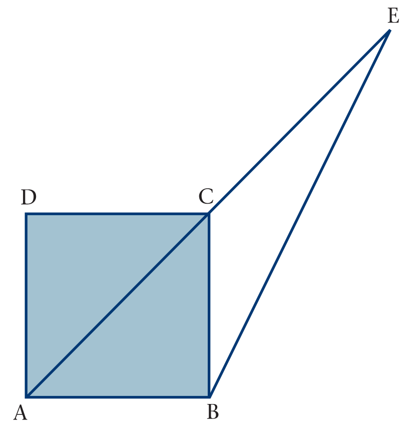
(E) maior que 120.

4 (UFRJ) Os ponteiros de um relógio circular medem, do centro às extremidades, 2 metros, o dos minutos, e 1 metro, o das horas.
Determine a distância entre as extremidades dos ponteiros quando o relógio marca 4 horas.

5 Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 8 e 12 e formam um ângulo de 60°. Determine as medidas das diagonais.

6 Em um triângulo ABC, AB = 3, AC = 5 e BC = 6.
Calcule o comprimento da mediana relativa ao lado BC.

7 A figura ABCD é um quadrado cuja área mede 4 e C é o ponto médio do segmento AE. O comprimento de BE, em metros, é:



(A) $\sqrt{5}$

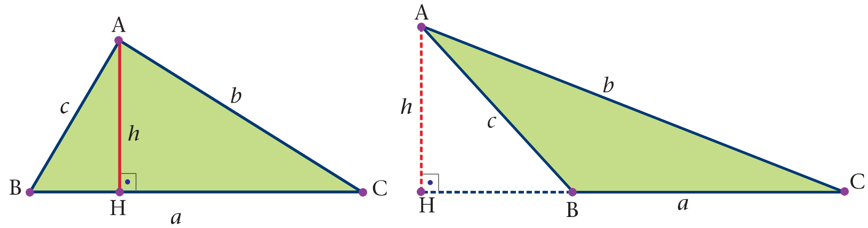
(B) $2\sqrt{5}$

(C) $5\sqrt{2}$

(D) $3\sqrt{5}$

(E) $4\sqrt{2}$

11.4 – Área do triângulo



No triângulo ACH temos: $h = b \cdot \text{sen}\,\hat{C}$. Portanto:

$$S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

$$S = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}\,\hat{C}}$$

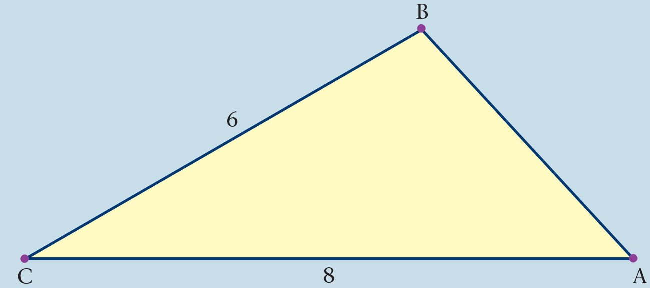
Analogamente:

$$S = \frac{1}{2} ac \,\text{sen}\,\hat{B}$$

$$S = \frac{1}{2} bc \,\text{sen}\,\hat{A}$$

Exemplo:

Dois lados de um triângulo são 6 cm e 8 cm. Sabendo que sua área é 12 cm^2, calcular o ângulo compreendido entre esses lados.



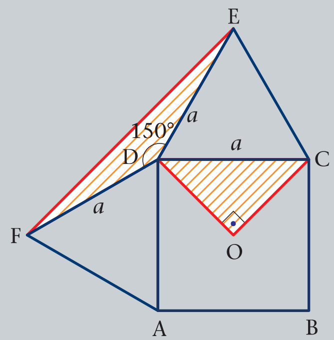
$$S = \frac{1}{2} ab \,\text{sen}\,\hat{C}$$

$$12 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \text{sen}\,\hat{C} \Rightarrow \text{sen}\,\hat{C} = \frac{1}{2}$$

Podemos ter dois ângulos: $\hat{C} = 30°$ ou $\hat{C} = 150°$

Exercícios resolvidos:

1) ABCD é um quadrado de centro O. Sobre os lados DC e DA constroem-se os triângulos equiláteros DAF e DCE. Calcular a razão entre as áreas dos triângulos EDF e DOC.



Solução:

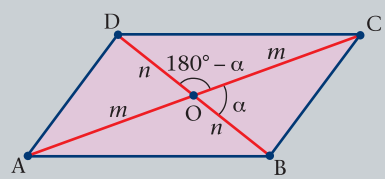
$$F\hat{D}E = 150° \Rightarrow S_{\triangle FDE} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \text{sen } 150°$$

$$D\hat{O}C = 90° \Rightarrow S_{\triangle DOC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ sen } 90°$$

$$\frac{S_{\triangle FDE}}{S_{\triangle DOC}} = \frac{\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{4}a^2} = 1$$

As áreas dos triângulos FDE e DOC são iguais.

2) Mostrar que as diagonais de um paralelogramo o dividem em quatro triângulos de mesma área.



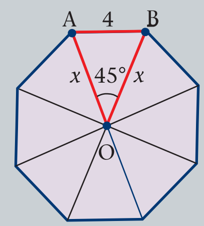
Solução:

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} m \cdot n \cdot \text{sen } \alpha$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} m \cdot n \cdot \text{sen } (180° - \alpha) = \frac{1}{2} m \cdot n \cdot \text{sen } \alpha$$

Logo, $S_{\triangle BOC} = S_{\triangle DOC}$. Como já sabíamos que $S_{\triangle BOC} = S_{\triangle DOA}$ e $S_{\triangle DOC} = S_{\triangle BOA}$, concluímos que os quatro triângulos têm a mesma área.

3) Calcular a área de um octógono regular de lado 4 cm.



Solução:

$$S = 8 \cdot S_{\triangle ABO} = \frac{8 \cdot x \cdot x \cdot \text{sen } 45°}{2}$$

$$S = 4x^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2x^2\sqrt{2}$$

Calculamos x pela lei dos cossenos:

$$4^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos 45°$$

$$4^2 = 2x^2 - 2x^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = x^2\left(2-\sqrt{2}\right)$$

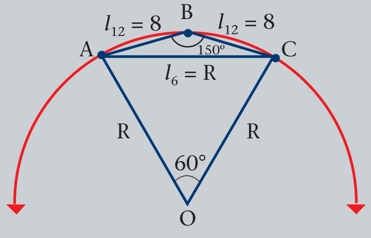
Temos então: $x^2 = \dfrac{16}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{16\left(2+\sqrt{2}\right)}{4-2} = 8\left(2+\sqrt{2}\right)$

Logo: $S = 2 \cdot 8\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{2} = 16\left(2\sqrt{2}+2\right) = 32\left(\sqrt{2}+1\right)\text{cm}^2$

4) Um dodecágono tem lado 8 cm. Unem-se seus vértices de 2 em 2, formando um hexágono regular.

i) Calcular a área desse hexágono.

ii) Qual é a área do dodecágono?



Solução:
Calculemos inicialmente o ângulo interno do dodecágono.

$$a_i = \frac{S_i}{12} = \frac{180°(12-2)}{12} = 15° \cdot 10 = 150°$$

Lei dos cossenos para o triângulo ABC:
$R^2 = 64 + 64 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cos 150°$

$$R^2 = 128 + 128 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 64\left(2+\sqrt{3}\right)$$

A área do hexágono será:

$$S_6 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \operatorname{sen} 60° = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 64\left(2+\sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$S_6 = 96\left(2\sqrt{3}+3\right) \text{cm}^2$$

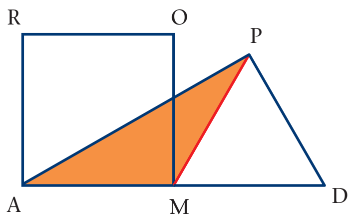
Para calcular a área do dodecágono, basta somar à área do hexágono os seis triângulos isósceles com base no lado do hexágono.

$$S_{12} = S_6 + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \operatorname{sen} 150° = 96\left(2\sqrt{3}+3\right) + 96 =$$

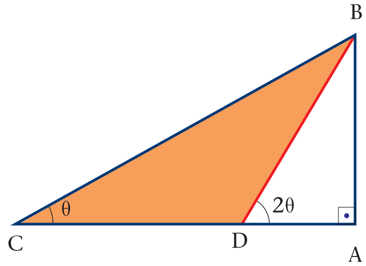
$$= 96\left(2\sqrt{3}+4\right) = 192\left(\sqrt{3}+2\right) \text{cm}^2$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

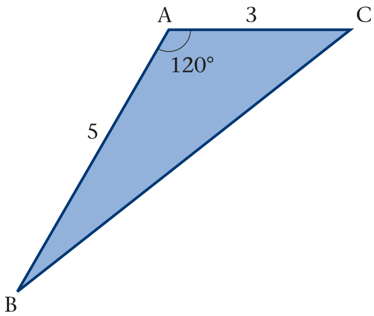
1 Sejam AMOR um quadrado de lado ℓ e o triângulo PMD, equilátero de lado ℓ. Calcule a área do triângulo PMA.



2 Na figura, temos que DA = $\sqrt{3}$ cm e AB = 3 cm. Calcule a área do triângulo CDB, em centímetros quadrados.



3 Na figura a seguir, qual a área do $\triangle$ABC?

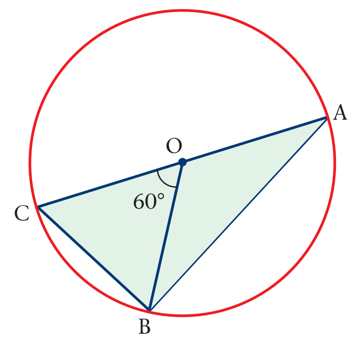


4 Dois lados de um triângulo medem, respectivamente, 5 cm e 6 cm. Qual a área máxima que esse triângulo pode ter?

5 Sabendo que $\overline{AC}$ é o diâmetro de uma circunferência de raio igual a 10 cm e centro O, calcule:

a) a medida da corda AB;

b) a área do triângulo ABC.



EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (Unificado-RJ) No triângulo ABC, os lados AC e BC medem 8 cm e 6 cm, respectivamente, e o ângulo A vale 30°. O seno do ângulo B vale:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{5}{6}$

2 (PUC-SP) Os ângulos de um triângulo medem *x*, 2*x* e 3*x*. O menor dos lados mede 5. Quanto mede o lado maior?

(A) $5\sqrt{3}$

(B) 10

(C) $10\sqrt{3}$

(D) 15

(E) $15\sqrt{3}$

3 (UFRS) Na figura, AB = 3 e BC = 2. A cossec α é:

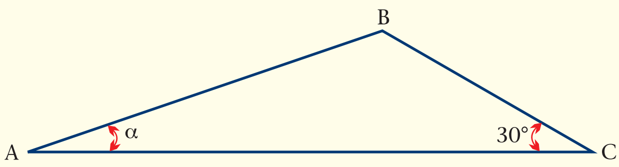
(A) $2\frac{\sqrt{3}}{3}$

(B) $\sqrt{2}$

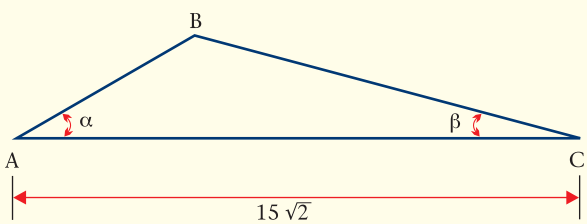
(C) $\sqrt{3}$

(D) 2

(E) 3



4 (UFRS) Na figura, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ radianos, $\beta = \frac{\pi}{12}$ radianos e AC mede $15\sqrt{2}$. A distância de B a C é:



(A) 10

(B) $10\sqrt{6}$

(C) 15

(D) $15\sqrt{2}$

(E) $15\sqrt{3}$

5 (UFPR) Qual das afirmações abaixo não é correta?

(A) A função sec *x* é crescente no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(B) A função tg *x* é crescente em qualquer ponto *x*.

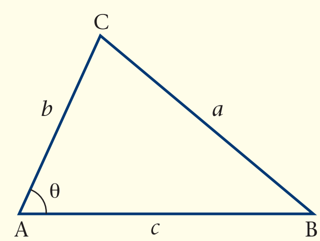
(C) Perímetro de um polígono é a soma das medidas de seus lados.

(D) Em um triângulo qualquer, de vértices A, B e C e lados *a*, *b* e *c*, $\frac{\text{sen}\,\hat{A}}{a} = \frac{\text{sen}\,\hat{B}}{b} = \frac{\text{sen}\,\hat{C}}{c}$.

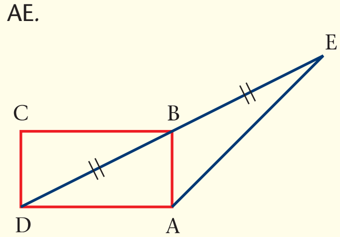
(E) sen $(\pi - \alpha)$ = sen α, para $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

6 A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada do rio para uma caixa-d'água a 50 m de distância. A casa está a 80 m de distância da caixa-d'água e o ângulo formado pelas direções bomba $\rightarrow$ caixa-d'água e caixa-d'água $\rightarrow$ casa é de 60°. Se se pretende bombear água do mesmo ponto de captação até a casa, quantos metros de encanamento serão necessários?

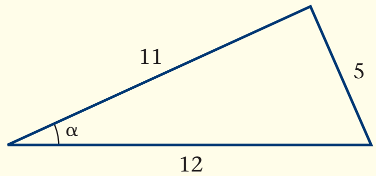
7 (UFRJ) O objetivo desta questão é que você demonstre a lei dos cossenos. Mais especificamente, considerando o triângulo da figura abaixo, mostre que:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$



8 (UFMG) Na figura, B é o ponto médio do segmento DE, e ABCD é um retângulo de lados DC = 1 e AD = 2. Determine AE.



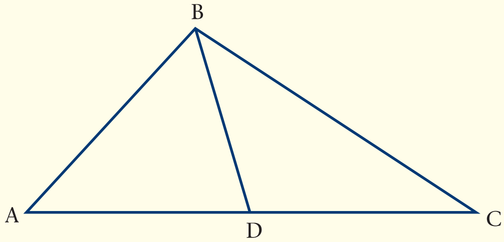
9 Obtenha o cos α na figura:



10 (Uerj) Um triângulo tem lados 3, 7 e 8. Um dos seus ângulos é igual a:

(A) 80°
(B) 60°
(C) 120°
(D) 45°
(E) 90°

11 (Fuvest-SP) Na figura abaixo, AD = 2 cm, AB = $\sqrt{3}$ cm, a medida do ângulo BÂC é 30° e BD = DC, onde D é ponto do lado AC. A medida do lado BC, em cm, é:



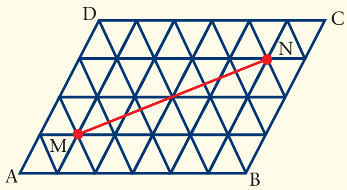
(A) $\sqrt{3}$
(B) 2
(C) $\sqrt{5}$
(D) $\sqrt{6}$
(E) $\sqrt{7}$

12 (Unicamp-SP) A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 1 metro e um dos ângulos agudos é o triplo do outro.

a) Calcule os comprimentos dos catetos.

b) Mostre que o comprimento do cateto maior está entre 92 e 93 centímetros.

13 O paralelogramo ABCD está dividido em triângulos equiláteros congruentes, de lados unitários, conforme sugere a figura:

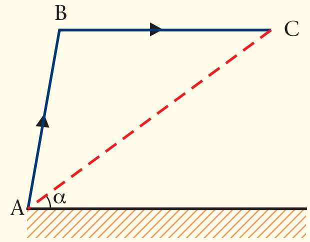


A distância MN é igual a:

(A) $4\sqrt{3}$
(B) $5\sqrt{2}$
(C) $3\sqrt{5}$
(D) $2\sqrt{7}$
(E) 6

14 (UFRS) A figura representa a trajetória ABC de um helicóptero que percorreu 12 km em $\overline{AB}$, 14 km em $\overline{BC}$, paralelamente ao solo, ficando distante 20 km de A. O cosseno da inclinação α é:

(A) $\dfrac{1}{2}$
(B) $\sqrt{\dfrac{2}{2}}$
(C) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$
(D) $\dfrac{59}{70}$
(E) $\dfrac{113}{140}$

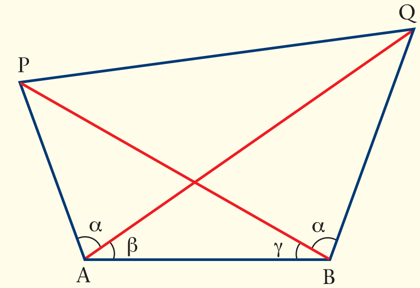


15 (UFSE) Num triângulo qualquer ABC, tem-se que a medida do ângulo de vértice A é 60°, AB = 4 e BC = $2\sqrt{6}$. Então, AC é igual a:

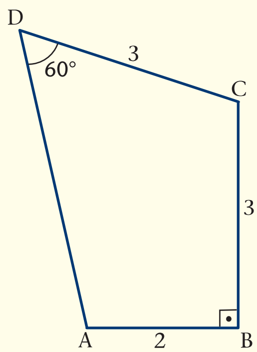
(A) $2 + 2\sqrt{3}$
(B) $2\sqrt{3} - 2$
(C) $\sqrt{3} + 1$
(D) $\sqrt{3}$
(E) 2

16 (UFPE) Na figura a seguir, conhecemos os valores dos ângulos α, β e γ e a distância d do ponto P ao ponto B. Assinale a alternativa que dá o valor da distância do ponto A ao ponto Q.

(A) $\dfrac{d\,\text{sen}\,(\gamma+\alpha)}{\text{sen}\,(\gamma-\beta)}$
(B) $\dfrac{d\,\text{sen}\,(\gamma-\alpha)}{\text{sen}\,(\gamma+\alpha)}$
(C) $\dfrac{\text{sen}\,(\gamma+\alpha)}{\text{sen}\,\gamma}$
(D) $\dfrac{\text{sen}\,(\gamma+\beta)}{\text{sen}\,\gamma}$
(E) $\dfrac{\text{sen}\,(\gamma+\alpha)}{\text{sen}\,(\beta+\alpha)}$



17 (Fuvest-SP) No quadrilátero abaixo, BC = CD = 3 cm, AB = 2 cm, $A\hat{D}C = 60°$ e $A\hat{B}C = 90°$. Em cm, o perímetro do quadrilátero é:



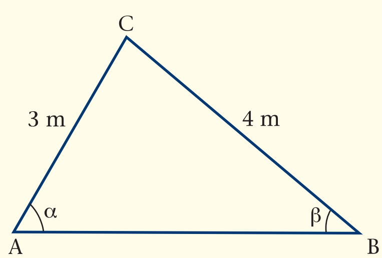
(A) 11
(B) 12
(C) 13
(D) 14
(E) 15

18 Os lados de um triângulo medem $2\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ e $3+\sqrt{3}$. Determine o ângulo oposto ao lado que mede $\sqrt{6}$.

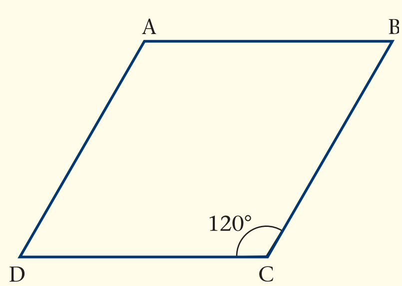
19 Num triângulo ABC temos AC = 3 m, BC = 4 m e $\alpha = B\hat{A}C$.

a) Calcule cos α.

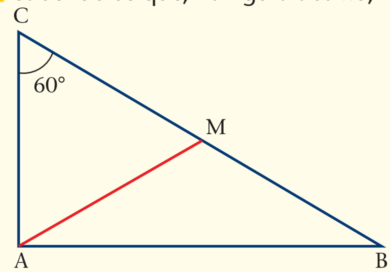
b) Se $\beta = A\hat{B}C$, oposto ao lado $\overline{AC}$, for 60°, calcule sen α.



20 Um terreno tem a forma da figura a seguir, onde os quatro lados têm o mesmo comprimento 40 m. O proprietário irá cercá-lo com uma cerca de dois fios e também irá dividi-lo, construindo outra cerca de dois fios unindo os pontos A e C. Quanto irá gastar de arame?



21 Sabendo-se que, na figura abaixo, $\overline{BA} \perp \overline{CA}$, então:



(A) $\overline{AM} = 4\sqrt{3}$ m
(B) $\overline{AM} = 6$ m
(C) $\overline{AM} = 7{,}5$ m
(D) $\overline{AM} = 6\sqrt{3}$ m

22 Num losango ABCD, a soma das medidas dos ângulos obtusos é o triplo da soma das medidas dos ângulos agudos. Se a sua diagonal menor mede *d* cm, então sua aresta medirá:

(A) $\dfrac{d}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
(B) $\dfrac{d}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$
(C) $\dfrac{d}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$
(D) $\dfrac{d}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}$
(E) $\dfrac{d}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}$

23 O quadrilátero convexo ABCD, cujos lados medem, consecutivamente, 1, 3, 4 e 6 cm, está inscrito em uma circunferência de centro O e raio R.
Calcule o raio R da circunferência.

24 Um triângulo ABC tem lados de comprimentos AB = 5, BC = 4 e AC = 2. Sejam M e N os pontos de $\overline{AB}$ tais que $\overline{CM}$ é a bissetriz relativa ao ângulo $A\hat{C}B$ e $\overline{CN}$ é a altura relativa ao lado $\overline{MN}$.
Determine o comprimento de $\overline{MN}$.

25 (UFRJ) Considere o problema de construir um triângulo ABC, conhecendo $\hat{A} = 30°$, AB = 6 cm e BC = x cm, $x > 0$. Determine x, de modo que o problema tenha:

a) uma única solução;

b) mais de uma solução.

26 (Unicamp-SP) Calcule a área de um triângulo em função de um lado ℓ, e dos dois ângulos α e β a ele adjacentes.

27 (Uerj) Um triângulo tem lados 3, 7 e 8. Um dos seus ângulos é igual a:

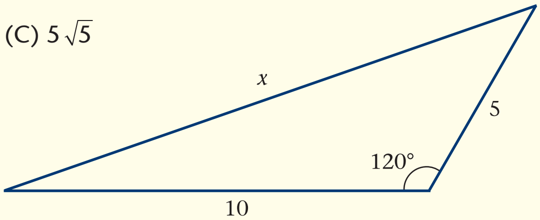
(A) 30°
(B) 45°
(C) 60°
(D) 90°
(E) 120°

28 (PUC-RS) O valor de x no triângulo abaixo é:

(A) $5\sqrt{2}$ (D) $5\sqrt{7}$

(B) $5\sqrt{3}$ (E) $5\sqrt{10}$

(C) $5\sqrt{5}$



29 (Ueba) Um triângulo ABC é tal que AB = AC = 4. Se $\hat{A} = 120°$, a medida do lado $\overline{BC}$ é:

(A) $3\sqrt{3}$ (D) $6\sqrt{3}$

(B) $4\sqrt{3}$ (E) $8\sqrt{3}$

(C) $5\sqrt{3}$

30 (Cesgranrio-RJ) Para traçar uma circunferência de 40π cm de comprimento usa-se um compasso com pernas de 20cm. O ângulo α de abertura do compasso deve ser:

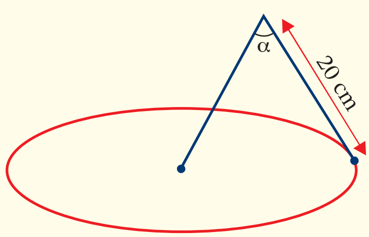
(A) 75°

(B) 60°

(C) 55°

(D) 50°

(E) 45°



31 (Fuvest-SP) Num triângulo ABC, $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$ são alturas, BD = CE e o ângulo $\hat{A} = 40°$ O ângulo $C\hat{B}D$ vale:

(A) 10° (D) 25°

(B) 15° (E) 30°

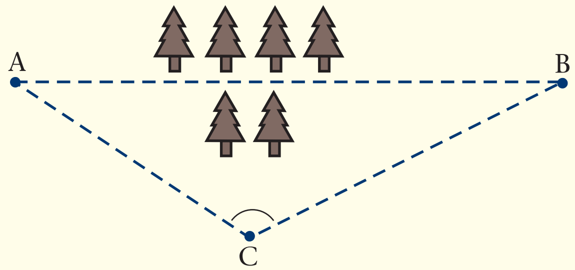
(C) 20°

32 (UFRS) Na figura, A e B são vistos de C sob um ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ radianos. Se AC = 80 e BC = 100, então $\overline{AB}$ é a raiz quadrada de:

(A) 32 400 (D) 8 400

(B) 24 400 (E) 400

(C) 16 400



CAPÍTULO XII

CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

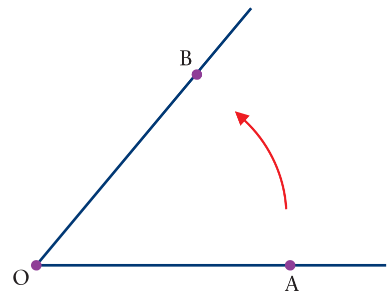
Photos.com

Neste capítulo, apresentamos a noção de arcos orientados, que podem ser negativos ou maiores que 180 graus, e também a trigonometria desses arcos.

12 – CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

12.1 – Ângulo trigonométrico

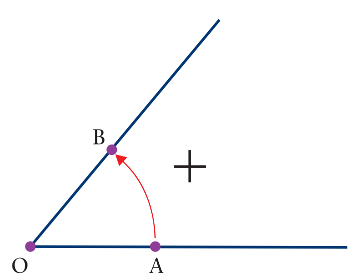
Consideremos uma semirreta OA e efetuemos nela uma rotação em torno de sua origem O, partindo da posição inicial OA até a posição final OB.

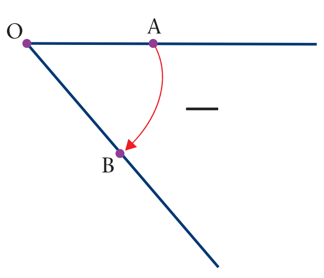


NOTA
Cada vez que a semirreta OA passar pela posição inicial, diremos que o ângulo completou "uma volta".

Nessa rotação, consideraremos que a semirreta OA, geradora do ângulo AOB, possa passar pela posição inicial OA um número qualquer de vezes até atingir OB. Assim, um ângulo trigonométrico será constituído de um número inteiro de voltas mais um ângulo menor do que uma volta.

Como a rotação de OA em torno do ponto O pode se dar em dois sentidos, convenciona-se como negativo o sentido da rotação dos ponteiros de um relógio comum (sentido horário) e, como positivo, o sentido contrário (anti-horário). Ângulos trigonométricos podem ser, portanto, positivos ou negativos. Se a rotação de OA até OB for positiva, o ângulo AOB será positivo e se a rotação de OA até OB for negativa, o ângulo AOB será negativo.



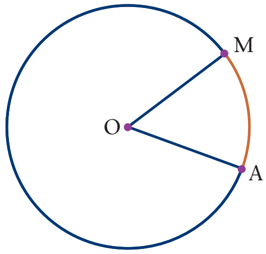


12.2 – Círculo trigonométrico

DEFINIÇÃO
Círculo trigonométrico.

Um **círculo trigonométrico** é um círculo cujo raio é tomado como unidade de medida e orientado conforme as rotações positivas e negativas. Um arco, por exemplo, $\overset{\frown}{AM}$, nesse círculo (que tem a mesma medida que $A\hat{O}M$) será positivo ou negativo conforme o ângulo AOM for positivo ou negativo.

Podemos imaginar que o arco AM é descrito por um ponto móvel que, partindo de A como origem, percorre o círculo num certo sentido um número qualquer de vezes e chega ao ponto M como extremidade. Se o percurso for no sentido anti-horário, $\overset{\frown}{AM}$ será positivo, caso contrário, será negativo.



A medida de um ângulo trigonométrico é igual à medida do arco compreendido entre seus lados, cujo centro é o vértice do ângulo.

O sentido trigonométrico positivo é o sentido contrário ao da rotação dos ponteiros de um relógio.

12.3 – Unidades de ângulo ou de arco

12.3.1 – Sistema sexagesimal

É um sistema cuja unidade é o grau com as subdivisões, minuto e segundo.

DEFINIÇÃO
Sistema sexagesimal.

Grau: corresponde ao ângulo central que subtende um arco igual a $\frac{1}{360}$ do círculo. Um grau se representa por 1°.

Minuto: corresponde a $\frac{1}{60}$ do grau, ou seja, $1° = 60'$. Um minuto se representa por 1'.

Segundo: corresponde a $\frac{1}{60}$ do minuto, ou seja, $1' = 60''$ ou $1° = 3\,600''$. Um segundo se representa por 1''.

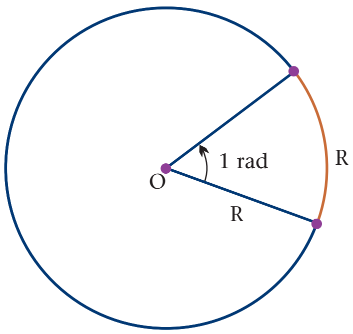
NOTA
O sistema sexagesimal decorre do sistema de numeração dos babilônios que era de base 60.
A palavra minuto significa "muito pequeno" e a palavra segundo significa "segunda parte pequena".

12.3.2 – Sistema circular

É o sistema cuja unidade é o radiano.

DEFINIÇÃO
Sistema circular.

Radiano: é o ângulo central que subtende um arco cujo comprimento é igual ao raio do círculo ao qual pertence. Um radiano se representa por 1 rad.



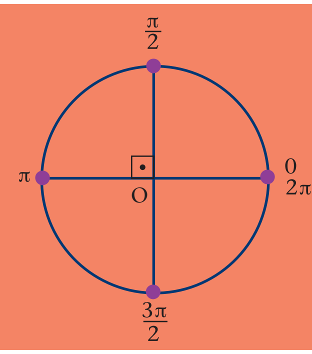
Como o círculo tem comprimento igual a $2\pi R$ e cada radiano tem comprimento igual a R, então o círculo tem $\dfrac{2\pi R}{R} = 2\pi$ radianos. Assim:

NOTA
Outros sistemas para medidas de ângulos são:
Centesimal: usa o grado (1 volta = 400 gr).
Milesimal: usa o milésimo (1 volta = 6 400 mil).

Um arco de meia volta tem π radianos.

Um arco de $\dfrac{1}{4}$ de volta tem $\dfrac{\pi}{2}$ radianos.

Um arco de $\dfrac{3}{4}$ de volta tem $\dfrac{3\pi}{2}$ radianos.



Usa-se a notação rad para radiano.

12.3.3 – Relações entre grau e radiano

Como vimos acima:

NOTA
Para converter unidades de ângulos usamos a regra de três simples: 180° — π rad

Arco	Grau	Radiano
1 volta	360°	2π rad
$\frac{1}{2}$ volta	180°	π rad
$\frac{1}{4}$ volta	90°	$\frac{\pi}{2}$ rad
$\frac{1}{6}$ volta	60°	$\frac{\pi}{3}$ rad
$\frac{1}{8}$ volta	45°	$\frac{\pi}{4}$ rad
$\frac{1}{12}$ volta	30°	$\frac{\pi}{6}$ rad

Em geral:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\ \text{rad} \simeq 0{,}01745\ \text{rad ou}$$

$$1\ \text{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 57{,}29578^\circ \simeq 57^\circ 17' 44{,}806''$$

NOTA
Para outras unidades temos: 180° = 200 gr = = π rad = 3 200 mil

Exemplos:

i) Escrever em radianos o ângulo de 36°:
Seja x a medida, em radianos, do ângulo 36°:

$$x = \frac{\pi}{180} \cdot 36 \Rightarrow x = \frac{\pi}{5} \Rightarrow 36° = \frac{\pi}{5} \text{ rad}$$

Podemos usar também uma regra de três simples:

$$\begin{cases} 180° — \pi \text{ rad} \\ 36° — x \text{ rad} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{36\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$$

ii) Escrever em graus o ângulo de $\frac{3\pi}{5}$ rad.

$$\frac{3\pi}{5} \text{ rad} = \frac{3\pi}{5} \cdot (1 \text{ rad}) = \frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180°}{\pi} = 108°$$

ou

$$\begin{cases} 180° — \pi \text{ rad} \\ x — \dfrac{3\pi}{5} \text{ rad} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{180 \cdot 3\pi}{5\pi} = 108°$$

iii) Escrever em graus, minutos e segundos o ângulo de $\frac{\pi}{8}$ rad.

$$\frac{\pi}{8} \text{ rad} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{180°}{\pi} = 22°30'$$

iv) Escrever em radianos o ângulo de 15°20′30″.

$$15°20'30'' = 15 + \frac{20}{60} + \frac{30}{3600} \text{ graus} = \left(\frac{55230}{3600}\right)^{\circ} = \frac{55230}{3600} \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{1841\pi}{21600} \text{ rad}$$

ou, passando o ângulo para segundos:

$$15°20'30'' = 55230'' \Rightarrow \begin{cases} 180 \cdot 3600'' — \pi \text{ rad} \\ 55230'' — x \text{ rad} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5523\pi}{64800} \text{ rad} = \frac{1841\pi}{21600} \text{ rad}$$

NOTA
Quando se expressam os arcos em radianos, em geral, se omite o símbolo *rad* devido ao seu uso frequente.

NOTA
Deixamos de dar exemplos com sistemas de medidas, tais como: grados, retos e milésimos por serem pouco usados em Matemática.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Escreva 300° em radianos.

2 Expresse 22°30′ em radianos.

3 Quanto mede em graus, aproximadamente, um arco de 1 rad? (Considere $\pi = 3{,}14$.)

4 Três ângulos são tais que a soma da medida do primeiro com a do segundo é 12°, a soma da medida do segundo com a do terceiro é 9° e a do primeiro com a do terceiro é $\frac{\pi}{36}$ rad. Encontre a medida desses ângulos em graus.

5 Represente:

a) 30° em radianos;

b) 67°30′ em radianos;

c) $\frac{10\pi}{9}$ rad em graus;

d) $\frac{\pi}{10}$ rad em graus;

e) $\frac{2\pi}{3}$ rad em graus.

6 Converta em radianos 31°15′45′′.

7 Transforme 7°30′ em radianos.

8 Encontre o ângulo convexo formado pelos ponteiros de um relógio ao marcar:

a) 3h

b) 5h40min

c) 3h30min

d) 10h30min

9 (Ufam) A medida do menor ângulo central formado pelos ponteiros de um relógio que está marcando 10h45min, em graus, é:

(A) 52°30′

(B) 62°30′

(C) 72°30′

(D) 22°30′

(E) 45°

10 (UFCE) Um relógio marca que faltam 15 minutos para as duas horas. Então, o menor dos dois ângulos formados pelos ponteiros das horas e dos minutos mede:

(A) 142°30′

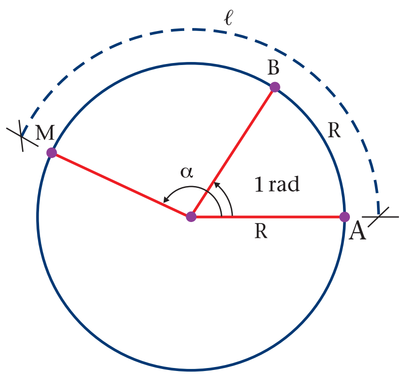
(B) 180°

(C) 157°30′

(D) 130°

(E) 135°

12.4 – Comprimento de um arco



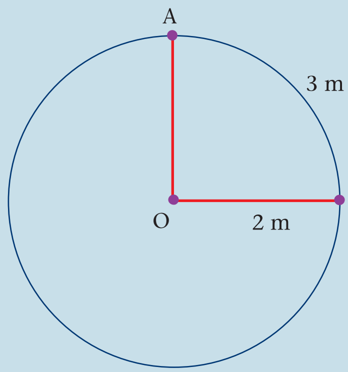
Sendo $\overset{\frown}{AB}$ de 1 rad, seu comprimento AB = R. Se $\overset{\frown}{AM}$ tem comprimento ℓ e seu ângulo central é α rad, então:

$$\begin{cases} 1 \text{ rad} — R \\ \alpha \text{ rad} — \ell \end{cases} \Rightarrow \boxed{\ell = \alpha R}$$

O comprimento de um arco é o produto da sua medida em radianos pelo raio do círculo ao qual pertence.

Exemplos:

i) Uma roda tem 4 m de diâmetro. Determine:
   a) o ângulo central que intersecta, nesta roda, um arco de 3 m;
   b) a velocidade de um ponto, na periferia desta roda, quando ela percorre um arco de 10 rad em cada segundo.



a) Como temos $\ell = \alpha R$, temos que: $3 = \alpha \cdot 2 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} = 1,5$ rad

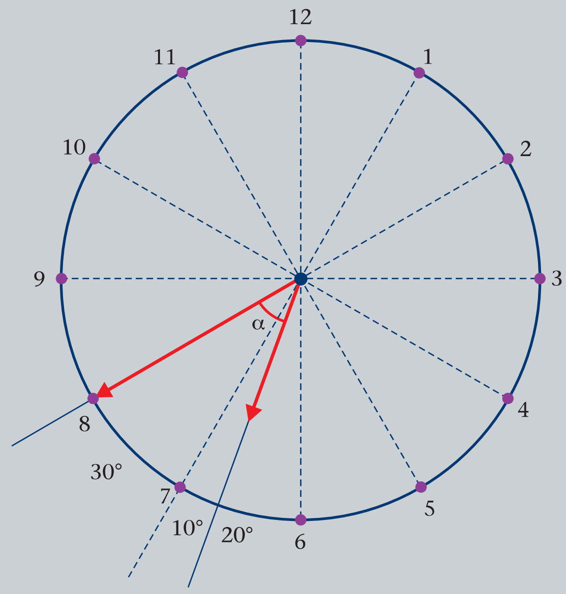
b) A velocidade será $v = \frac{\ell}{t} = \frac{\alpha R}{t} = \frac{\alpha}{t} \cdot R$, logo: $v = 10 \cdot 2 = 20$ m/s

ii) Uma roda dá 120 voltas por minuto. Transformar esta velocidade angular em rad/s.
Temos: 120 voltas = $120 \cdot 2\pi$ rad
1 min = 60 s

$$v = \frac{120 \text{ voltas}}{\text{min}} = \frac{120 \cdot 2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 4\pi \text{ rad/s}$$

Exercícios resolvidos:

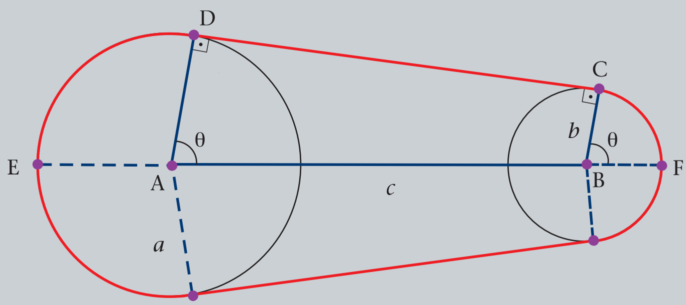
1) Calcular, em radianos, o ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio às 6h40min.
Solução:



Quando o ponteiro dos minutos indicar 40 min, terá percorrido $\frac{2}{3}$ do círculo, logo $\frac{2}{3}$ de 360°. Simultaneamente, o ponteiro das horas terá percorrido $\frac{2}{3}$ de um setor correspondente a uma hora, ou seja, um ângulo de $\frac{2}{3}$ de 30° = 20°.

$$\alpha = 30° + 10° = 40° = \frac{40\pi \text{ rad}}{180} = \frac{2\pi}{9} \text{ rad}$$

2) Uma fita passa por duas polias de raios a e b, cujos centros distam c um do outro, como indica a figura a seguir. Se θ é o ângulo entre AB e AD em radianos, calcular:

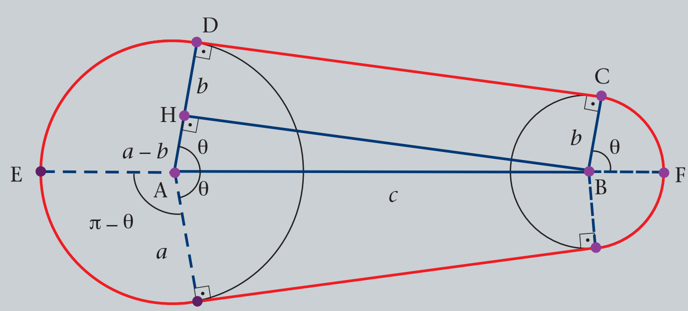


i) o cosseno do ângulo θ;

ii) o comprimento da fita.

<u>Solução:</u>

i) Traçando BH paralelo a CD fica formado um triângulo retângulo AHB em que $AH = a - b$ e $AB = c$, então:



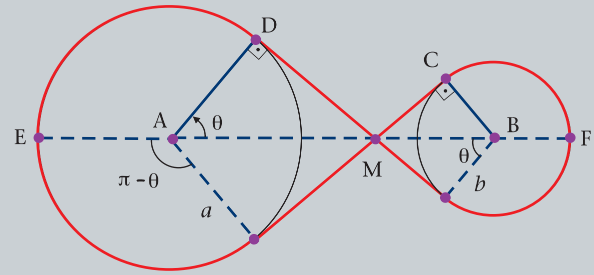
$$\cos\theta = \frac{AH}{AB} = \frac{a-b}{c}$$

ii) O comprimento da fita será:

$$S = 2[\overset{\frown}{ED} + \overline{DC} + \overset{\frown}{CF}] = 2[(\pi - \theta)a + c\operatorname{sen}\theta + b\theta]$$

$$\text{pois: } \begin{cases} \overset{\frown}{ED} = (\pi - \theta)a \\ \overline{DC} = c\operatorname{sen}\theta \\ \overset{\frown}{CF} = b\theta \end{cases}$$

3) Na figura a seguir, considerando que a fita passa entre os círculos de raios a e b, calcular o comprimento da fita.



Solução:

$$\overset{\frown}{DE} = (\pi - \theta)a \qquad \overline{DM} = a\,\text{tg}\,\theta$$
$$\overset{\frown}{CF} = (\pi - \theta)b \qquad \overline{CM} = b\,\text{tg}\,\theta$$

Assim:

$$S = 2 \cdot [\overset{\frown}{DE} + \overline{DM} + \overline{CM} + \overset{\frown}{CF}]$$
$$S = 2 \cdot [(a + b)(\pi - \theta) + (a + b) \cdot \text{tg}\,\theta]$$
$$S = 2 \cdot (a + b)[\pi - \theta + \text{tg}\,\theta]$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Um atleta desloca-se à velocidade constante de 7,85 m/s numa pista circular de raio 200 m. Determine a medida em radianos e em graus do arco que ele percorre no tempo de:

a) 10 segundos;

b) 1 minuto.

2 Tomando-se para π a aproximação 3,14, se um arco de circunferência mede 1,57 cm e o diâmetro tem 8 cm, qual a medida do ângulo correspondente a esse arco?

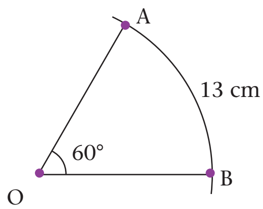
3 Quantos radianos percorre o ponteiro das horas de um relógio de 1h5min até 2h45min?

4 Calcule o ângulo entre os ponteiros do relógio às 4 horas e 20 minutos.

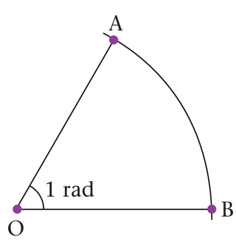
5 O ponteiro dos minutos de um relógio mede 12 cm. Qual a distância que sua extremidade percorre durante 20 minutos? Considere $\pi = 3{,}14$.

6 Ache o raio da circunferência em cada caso:

a)



b)



7 Um ciclista de uma prova de resistência deve percorrer 500 km em uma pista circular de raio 200 m. O número aproximado de voltas que deve dar é:

(A) 100

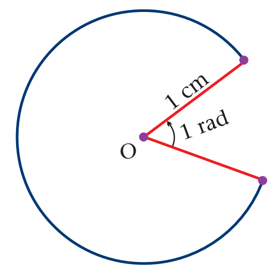
(B) 200

(C) 300

(D) 400

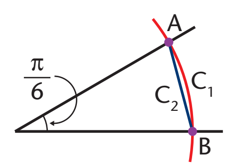
(E) 500

8 (Vunesp) Em um jogo eletrônico, o "monstro" tem a forma de um setor circular de raio 1 cm, como mostra a figura.



A parte que falta no círculo é a boca do "monstro" e o ângulo de abertura mede 1 radiano. Determine o perímetro do "monstro", em cm.

9 (Fuvest-SP) Numa circunferência, C_1 é o comprimento de arco de $\frac{\pi}{6}$ radianos e C_2 é o comprimento da secante determinada por esse arco, como ilustrado na figura abaixo. Nessas condições, a razão $\frac{C_1}{C_2}$ é igual a $\frac{\pi}{6}$ multiplicado por:



(A) 2

(B) $\sqrt{1+2\sqrt{3}}$

(C) $\sqrt{1+\sqrt{3}}$

(D) $\sqrt{2+2\sqrt{3}}$

(E) $\sqrt{3+\sqrt{3}}$

10 (Fuvest-SP) Considere um arco $\overset{\frown}{AB}$ de 110° numa circunferência de raio 10 cm. Considere, a seguir, um arco $\overset{\frown}{A'B'}$ de 60° numa circunferência de raio 5 cm. Dividindo-se o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ pelo do raio do arco $\overset{\frown}{A'B'}$ (ambos medidos em centímetros), obtém-se:

(A) $\frac{11}{10}\pi$

(B) 2π

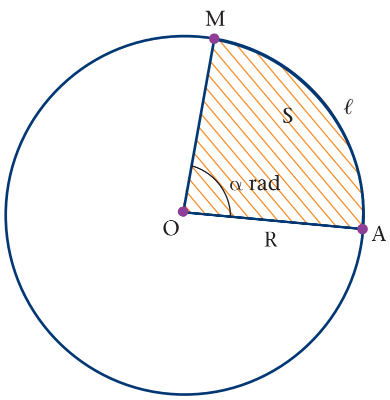
(C) $\frac{11}{9}\pi$

(D) $\frac{22}{3}\pi$

(E) 11π

12.5 – Área de um setor circular

Como o círculo tem 360°, um setor de 1° terá uma área igual a $\frac{\pi R^2}{360}$.



Consideremos um setor de α rad. Tal setor será equivalente a um setor de n°, desde que $\frac{n}{360} = \frac{\alpha}{2\pi}$. Assim, a área do setor de n° será $S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha \cdot R^2}{2}$

$$S_{setor} = \frac{\alpha R^2}{2} \quad (\alpha \text{ em radianos})$$

A área de um setor é a metade do produto do arco em radianos pelo quadrado do raio do círculo ao qual pertence.

NOTA
Como o comprimento do arco é $\ell = \alpha R$, a área do setor será, em função de ℓ, igual a:

$$S = \frac{1}{2} \alpha R^2$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot R \cdot R$$

$$\boxed{S = \frac{\ell R}{2}}$$

Exemplos:

i) Calcular a área de um quadrante de círculo, cujo raio é 2 cm.

$$S = \frac{1}{2} \cdot R^2 \alpha = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \text{ cm}^2$$

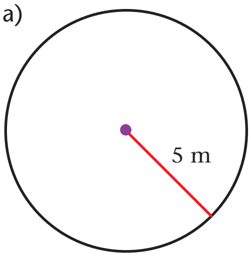
ii) Calcular a área de um setor circular, de raio 2 cm, cujo comprimento do arco, por ele intersectado, seja 4 cm.

Temos: $S = \frac{1}{2} \ell R \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4 \text{ cm}^2$

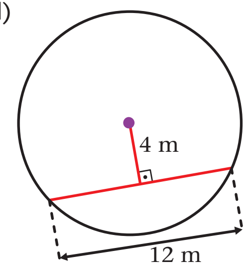
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Determine a área do círculo e o comprimento da circunferência nos casos:

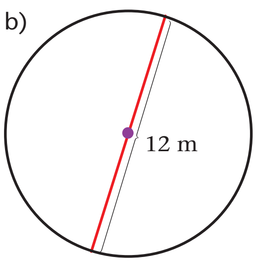
a)



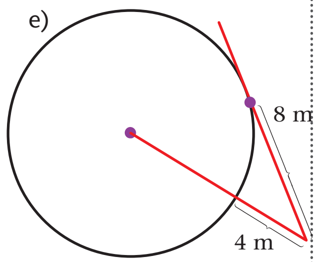
d)



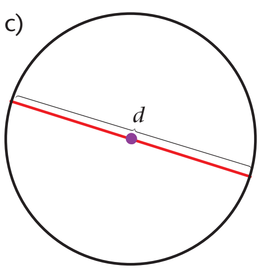
b)



e)

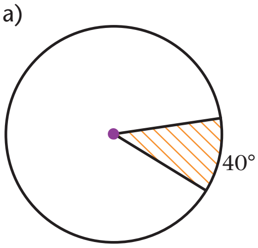


c)

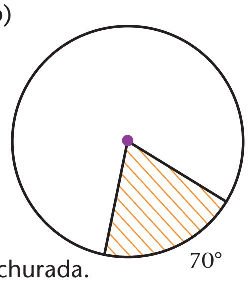


2 Determine a área de cada setor hachurado nos casos abaixo, sendo 6 m o raio.

a)

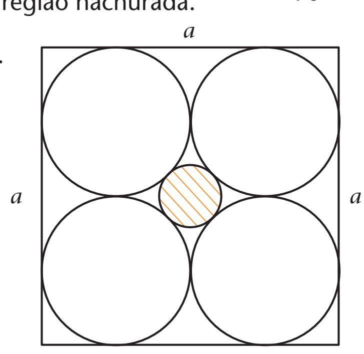


b)

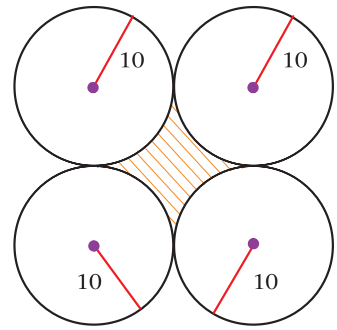


3 Determine a área da região hachurada.

a) ABCD é quadrado.

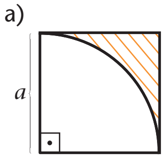


b)

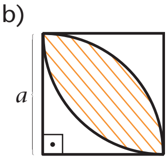


4 Calcule a área da hachurada, sabendo que o quadrilátero dado é um quadrado.

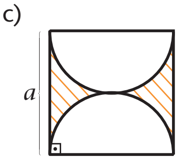
a)



b)

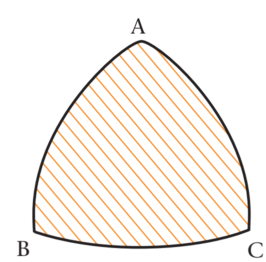


c)

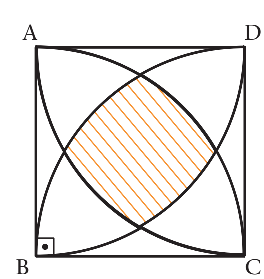


5 Determine o perímetro da figura hachurada nos casos:

a) Os arcos têm raios de 12 m e são centrados em A, B e C.

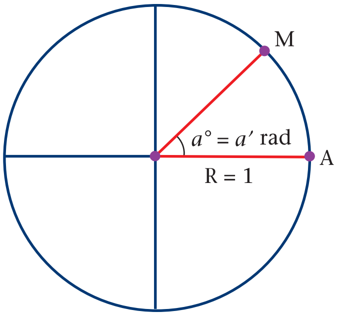


b) ABCD é um quadrado de 48 m de lado e os arcos são centrados em A, B, C e D.



12.6 – Arcos côngruos ou congruentes

Como vimos, um arco pode ser descrito por um ponto móvel partindo de um ponto A, tomado como origem, e tendo como extremidade o ponto M, depois de dar um número inteiro k de voltas completas no círculo trigonométrico. Como cada volta completa corresponde a 2π rad ou 360°, temos que $\overset{\frown}{AM} = k \cdot 360° + a°$ ou $\overset{\frown}{AM} = k \cdot 2\pi + a'$ rad.



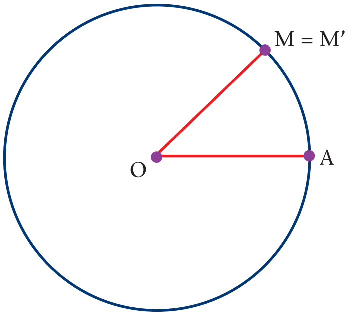
Chamamos de **menor determinação** de $\overset{\frown}{AM}$ ao arco que se obtém quando $k = 0$ e $0 \leq a < 360°$ ou $0 \leq a' < 2\pi$. É o arco menor que uma volta completa, e tem mesma origem e mesma extremidade que $\overset{\frown}{AM}$.

DEFINIÇÃO
Arcos côngruos.

Dois arcos são chamados **côngruos** ou **congruentes** quando têm a mesma origem e extremidades coincidentes.

A diferença entre dois arcos côngruos será um número inteiro de voltas completas. Sendo $\overset{\frown}{AM'}$ e $\overset{\frown}{AM}$ arcos côngruos, temos:

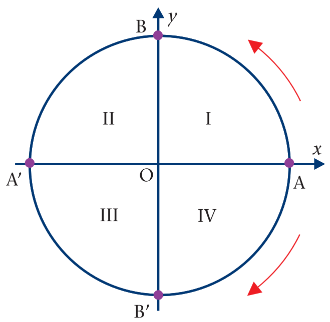
$$\overset{\frown}{AM'} - \overset{\frown}{AM} = k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\overset{\frown}{AM'} - \overset{\frown}{AM} = k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$



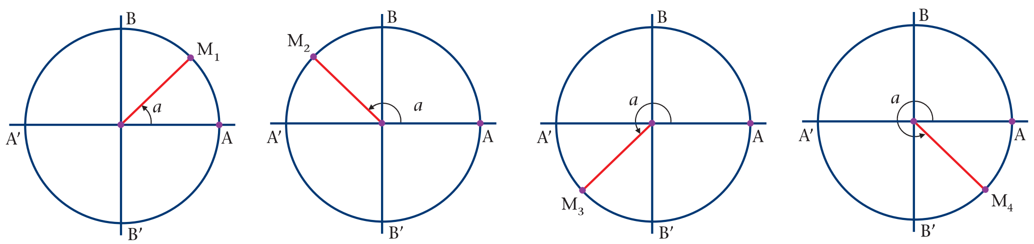
12.7 – Quadrantes

Consideremos dois eixos perpendiculares de origem no centro do círculo trigonométrico. Eles dividem o círculo em quatro regiões que serão chamadas, no sentido trigonométrico positivo, 1º, 2º, 3º e 4º quadrantes respectivamente, ou seja, quadrantes I, II, III e IV.

O círculo e seus quadrantes:



A origem dos arcos é o ponto A e está sobre o eixo O*x*.



$0 < a < \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ $\quad$ $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ $\quad$ $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$

Um arco é de um quadrante conforme sua extremidade esteja nesse quadrante. Assim, o arco AM_1 é do primeiro quadrante, AM_2 do segundo quadrante, AM_3 do terceiro quadrante e AM_4 do quarto quadrante. Seja um arco $AM = k \cdot 2\pi + a$, sendo $0 < a < 2\pi$.

Se $0 < a < \frac{\pi}{2}$, o arco será do **primeiro quadrante**.

Se $\frac{\pi}{2} < a < \pi$, o arco será do **segundo quadrante**.

Se $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$, o arco será do **terceiro quadrante**.

Se $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$, o arco será do **quarto quadrante**.

NOTAS
Os arcos $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e côngruos são chamados **arcos quadrantais** e não pertencem a nenhum quadrante.

Exemplos:

i) $1\,500° = 4 \cdot 360° + 60°$ é do primeiro quadrante e sua menor determinação positiva é $60°$

ii) $-218° = -360° + 142°$ é do segundo quadrante e sua menor determinação positiva é $142°$

iii) $\frac{92\pi}{7} = 13\pi + \frac{\pi}{7} = 12\pi + \pi + \frac{\pi}{7} = 6 \cdot 2\pi + \pi + \frac{\pi}{7}$ é do terceiro quadrante e sua menor determinação é $\pi + \frac{\pi}{7} = \frac{8\pi}{7}$

iv) $-\frac{100\pi}{7} = -14\pi - \frac{2\pi}{7} = -16\pi + 2\pi - \frac{\pi}{7} = -8 \cdot 2\pi + \frac{13\pi}{7}$ é do quarto quadrante e sua menor determinação é $\frac{13\pi}{7}$

Observações:

1) Dois arcos a e b são **côngruos** (módulo 2π) quando têm a mesma origem e extremidades coincidentes. Sua diferença é $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

$$\left.\begin{array}{c} a - b = k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ a - b = k \cdot 360° \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

2) Dois arcos são **complementares** quando sua soma é $\frac{\pi}{2}$ rad ou $90°$.

3) Dois arcos são **suplementares** quando sua soma é π rad ou $180°$.

4) Dois arcos são **replementares** quando sua soma é 2π rad ou $360°$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Dê a expressão geral para os arcos côngruos de:

a) 45°

b) $\frac{3\pi}{4}$ rad

c) 60°

d) $\frac{2\pi}{3}$ rad

2 Qual é o menor arco não negativo côngruo do arco de 1 320° e de $\frac{19\pi}{4}$ rad?

3 Dê a menor determinação e a máxima determinação dos seguintes arcos:

a) 680°

b) 770°

c) $\frac{15\pi}{2}$ rad

d) $\frac{9\pi}{2}$ rad

e) $\frac{21\pi}{5}$ rad

4 Escreva a expressão geral dos arcos côngruos de:

a) –780°

b) 420°

c) $\frac{9\pi}{4}$ rad

d) $\frac{33\pi}{5}$ rad

5 A que quadrante pertence cada arco abaixo?

a) 1 140°

b) –400°

c) $\frac{15\pi}{2}$ rad

d) $\frac{9\pi}{2}$ rad

e) 2 045°

f) $\frac{19\pi}{4}$ rad

6 Considerando a origem em A, represente, no ciclo trigonométrico, os seguintes arcos, definidos por sua expressão geral, sendo que $k \in \mathbb{Z}$.

a) $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$

b) $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$

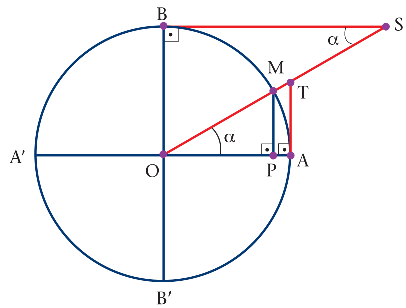
c) $x = k \cdot 90° + 45°$

d) $x = k \cdot 180° + 30°$

e) $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$

12.8 – Linhas trigonométricas nos diversos quadrantes

12.8.1 – Primeiro quadrante



Como o raio do círculo é igual a 1, temos:

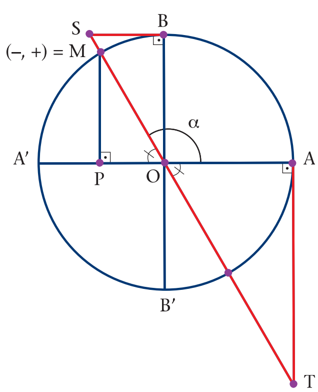
$$\Delta OPM \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \overline{PM} \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \overline{OP}$$
$$\Delta OAT \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = \overline{AT} \quad \text{e} \quad \sec\alpha = \overline{OT}$$
$$\Delta OBS \Rightarrow \text{ctg}\ \alpha = \overline{BS} \quad \text{e} \quad \csc\alpha = \overline{OS}$$

Como vimos no capítulo anterior, as coordenadas do ponto M são: (cos α, sen α) o que torna todas as linhas trigonométricas positivas.

NOTA
O seno e a cossecante possuem sempre o mesmo sinal por serem aritmeticamente inversos. O mesmo ocorre entre o cosseno e a secante, e também entre a tangente e a cotangente.

12.8.2 – Segundo quadrante

NOTA
Não existem ctg 0, csc 0, tg $\frac{\pi}{2}$ e sec $\frac{\pi}{2}$.



Como M(–, +), temos cos α negativo e sen α positivo.

O seno $\overline{MP}$ e a cossecante $\overline{OS}$ são positivos e as demais linhas são negativas.

NOTA
Não existem csc π e ctg π.

Exemplos:

i) $\text{sen}\ 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ii) $\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$

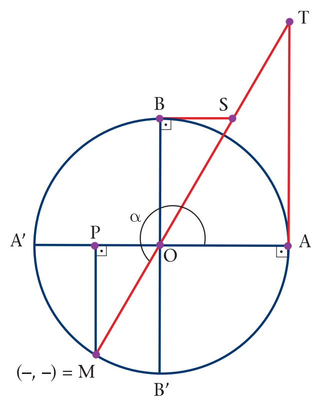
iii) $\text{tg}\ 120° = -\sqrt{3}$

iv) $\csc 120° = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

v) $\sec 120° = -2$

vi) $\text{ctg}\ 120° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

12.8.3 – Terceiro quadrante



Como M(–, –), temos cos α negativo e sen α negativo.

A tangente $\overline{AT}$ e a cotangente $\overline{BS}$ são positivas e as demais linhas são negativas.

NOTA
Não existem $tg\ \frac{3\pi}{2}$ e $sec\ \frac{3\pi}{2}$.

Exemplos:

i) $sen\ 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ii) $cos\ 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

iii) $tg\ 225° = 1$

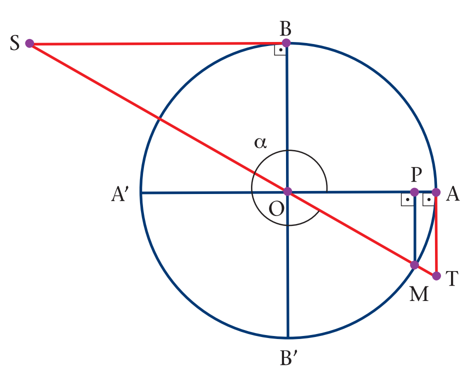
iv) $csc\ 225° = -\sqrt{2}$

v) $sec\ 225° = -\sqrt{2}$

vi) $ctg\ 225° = 1$

NOTA
Os arcos do 1º quadrante escritos sob a forma $\frac{\pi}{2} - a$ ou $90° - a$ são ditos referidos ao eixo O*y*.

12.8.4 – Quarto quadrante



Como M(+, –), temos cos α positivo e sen α negativo.

O cosseno $\overline{OP}$ e a secante $\overline{OT}$ são positivos e as demais linhas são negativas.

Exemplos:

i) $\text{sen } 330° = -\dfrac{1}{2}$

ii) $\cos 330° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

iii) $\text{tg } 330° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

iv) $\csc 330° = -2$

v) $\sec 330° = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

vi) $\text{ctg } 330° = -\sqrt{3}$

Podemos resumir o estudo dos sinais nos quadrantes com o quadro abaixo.

	I	II	III	IV
sen (ou csc)	+	+	–	–
cos (ou sec)	+	–	–	+
tg (ou ctg)	+	–	+	–

Observações:

1) Os valores assumidos pelas linhas trigonométricas em cada volta completa são:

$$-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

Portanto, como $\csc \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha}$ e $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$:

$$\csc \alpha \leq -1 \text{ ou } \csc \alpha \geq 1 \quad \text{e} \quad \sec \alpha \leq -1 \text{ ou } \sec \alpha \geq 1$$

NOTA
Se um número não nulo está em [–1, 1], seu inverso não pertencerá ao intervalo (–1, 1).

A tangente e a cotangente assumem todos os valores reais.

2) Os valores de sen α, cos α, sec α e csc α se repetem a cada volta completa. Dizemos então que são periódicos de período 2π. Os valores de tg α e ctg α se repetem a cada meia volta. São periódicos de período π.

3) tg α e sec α não têm valor para $\alpha = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ ou $\alpha = k \cdot 180° + 90°$ e ctg α e csc α não tem valor para $\alpha = k\pi$ ou $\alpha = k \cdot 180°$, com k inteiro.

Exemplos:

i) Sendo x um arco do terceiro quadrante, determinar o sinal da expressão:

$$y = \frac{\sec x \cdot \operatorname{ctg} x}{\operatorname{sen} x + 3\cos x}$$

Temos que: $\sec x < 0$, $\operatorname{ctg} x > 0$, $\operatorname{sen} x < 0$ e $\cos x < 0$

Logo: $y = \dfrac{(-)\cdot(+)}{(-)+3(-)} = \dfrac{(-)}{(-)} = (+) \Rightarrow y > 0$

ii) Seja $2x - \frac{\pi}{4}$ um arco de primeira volta. Resolva a inequação

$\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > 0.$

Como o seno deve ser positivo, o arco deverá se situar no 1º ou no 2º quadrante, logo:

$$0 < 2x - \frac{\pi}{4} < \pi$$

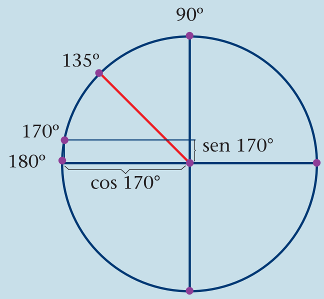
Somando $\frac{\pi}{4}$ a todos os membros desta desigualdade, vem:

$$\frac{\pi}{4} < 2x < \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < 2x < \frac{5\pi}{4}$$

Dividindo por 2, vem:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8}\right\}$$

iii) Dar o sinal de $y = \dfrac{\operatorname{sen} 170° + \cos 170°}{\sec 170°}$.



Note que: $|\operatorname{sen} 170°| < |\cos 170°|$, então $\operatorname{sen} 170° + \cos 170° < 0$

Assim: $y = \dfrac{(-)}{(-)} = (+) \Rightarrow y > 0$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Dê o sinal de sen 98° + cos 98°.

2 Dado $\cos x = -\frac{3}{4}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule tg x + sec x.

3 Sendo 90° < x < 180°, qual é o sinal de $y = \frac{\sec^2 x - 1}{\text{tg}^2 x + 1}$?

4 Determine o valor de k para que se tenha simultaneamente $\text{sen}\, x = \sqrt{k-2}$ e $\cos x = k - 1$.

5 Dê o sinal das expressões abaixo, sabendo-se que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$:

a) $y = \frac{\sec x - \csc x}{1 - \text{cotg}\, x}$

b) $y = (\text{tg}\, x + \text{ctg}\, x) \cdot (\sec x - \cos x) \cdot (\csc x \cdot \text{sen}\, x) + 2$

6 Dê a solução de $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$, se 90° < x < 180°.

7 Dê a solução de $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sendo x um arco do 4º quadrante.

8 (Mack-SP) Sejam $f(x) = 2 - \cos x$, com $0 \leq x < 2\pi$, M o valor máximo de $f(x)$ e m o seu valor mínimo. Determine o valor de $\frac{M}{2m}$.

9 (Unifor-CE) Se k é o número real positivo que satisfaz simultaneamente as equações $\text{sen}\, x = \frac{k+1}{3}$ e $\cos x = -k$, então:

(A) $k = \frac{1}{5}$

(B) $k = \frac{2}{5}$

(C) $k = \frac{3}{5}$

(D) $k = \frac{4}{5}$

(E) 1

10 (UFMS) Sabendo-se que sen x · cos x = 0,4 e que $0 < x < \frac{\pi}{4}$, calcule o valor de 300 · tg x.

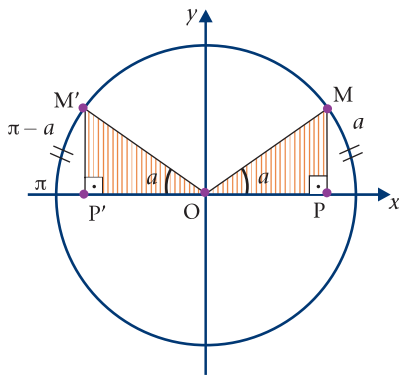
12.9 – Redução ao primeiro quadrante

Reduzir ao primeiro quadrante é determinar os valores das linhas trigonométricas de um arco maior que $\frac{\pi}{2}$ utilizando as linhas trigonométricas de um arco compreendido entre 0 e $\frac{\pi}{2}$.

12.9.1 – Redução do segundo quadrante ao primeiro quadrante

Os ângulos do 2º quadrante podem ser representados por $\pi - a$, onde a é um arco do 1º quadrante.

NOTA
Observe que os dois arcos a e $\pi - a$ têm o mesmo seno e a mesma cossecante. A soma desses arcos é π, ou, de um modo geral, $k \cdot 2\pi + \pi$, k inteiro.



Temos que:

$$\text{sen}\,(\pi - a) = \text{sen}\, a$$

$\cos\,(\pi - a) = -\cos a$, então:

$$\text{tg}\,(\pi - a) = \frac{\text{sen}\,(\pi - a)}{\cos\,(\pi - a)} = \frac{\text{sen}\, a}{-\cos a} = -\text{tg}\, a$$

$\sec\,(\pi - a) = -\sec a$

$\csc\,(\pi - a) = \csc a$

$\text{ctg}\,(\pi - a) = -\text{ctg}\, a$

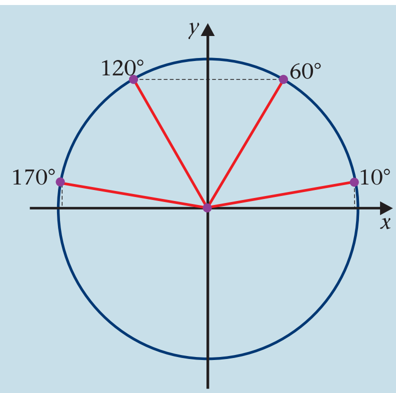
Exemplos:

i) $\text{sen}\, 120° = \text{sen}\,(180° - 60°) = \text{sen}\, 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ii) $\text{tg}\, 120° = \text{tg}\,(180° - 60°) = -\text{tg}\, 60° = -\sqrt{3}$

iii) $\cos 170° = \cos\,(180° - 10°) = -\cos 10°$

iv) $\csc 170° = \csc\,(180° - 10°) = \csc 10°$

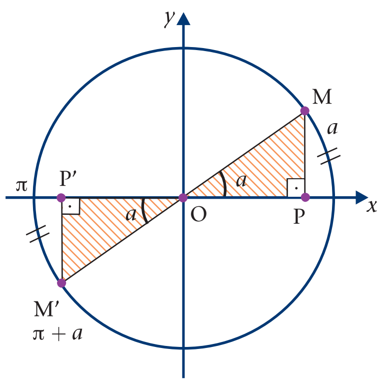


12.9.2 – Redução do terceiro quadrante ao primeiro quadrante

NOTA
Observe que os dois arcos a e $\pi + a$ têm a mesma tangente e a mesma cotangente. A diferença entre esses arcos é π, ou, de um modo geral, $k \cdot 2\pi + \pi$, k inteiro.

Os ângulos do 3º quadrante podem ser representados por $\pi + a$, onde a é um arco do 1º quadrante.

Temos, pela congruência dos triângulos OPM e OP'M':



$\text{sen}\,(\pi + a) = -\text{sen}\,a$

$\cos\,(\pi + a) = -\cos\,a$

$\text{tg}\,(\pi + a) = \text{tg}\,a$

$\sec\,(\pi + a) = -\sec\,a$

$\csc\,(\pi + a) = -\csc\,a$

$\text{ctg}\,(\pi + a) = \text{ctg}\,a$

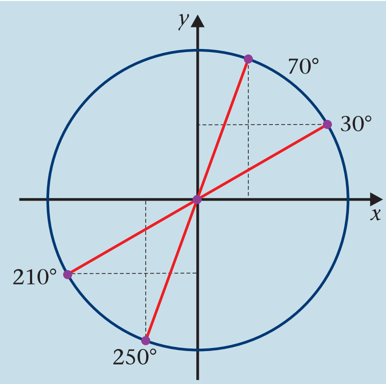
Exemplos:

i) $\text{sen}\,210° = \text{sen}\,(180° + 30°) = -\text{sen}\,30° = -\dfrac{1}{2}$

ii) $\text{tg}\,210° = \text{tg}\,(180° + 30°) = \text{tg}\,30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

iii) $\cos\,250° = \cos\,(180° + 70°) = -\cos\,70°$

iv) $\text{ctg}\,250° = \text{ctg}\,(180° + 70°) = \text{ctg}\,70°$

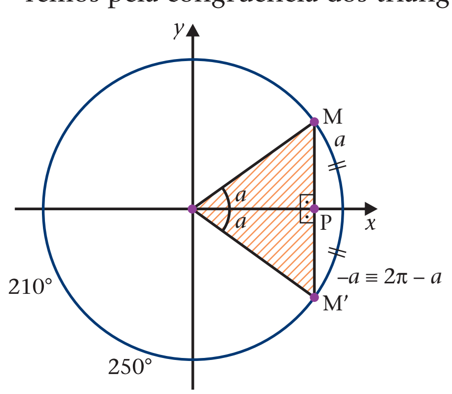


12.9.3 – Redução do quarto quadrante ao primeiro quadrante

NOTA
Observe que os dois arcos a e $2\pi - a$ têm o mesmo cosseno e secante. A soma desses arcos é 2π. De um modo geral, $k \cdot 2\pi$, k inteiro.

Os ângulos do 4º quadrante podem ser representados por $2\pi - a$ ou $-a$, onde a é um arco do 1º quadrante.

Temos pela congruência dos triângulos OPM e OPM':



$\text{sen}\,(2\pi - a) = \text{sen}\,(-a) = -\text{sen}\,a$

$\cos\,(2\pi - a) = \cos\,(-a) = \cos\,a$

$\text{tg}\,(2\pi - a) = \text{tg}\,(-a) = -\text{tg}\,a$

$\sec\,(2\pi - a) = \sec\,(-a) = \sec\,a$

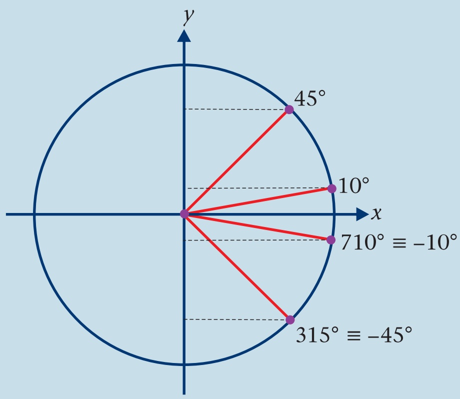
$\csc\,(2\pi - a) = \csc\,(-a) = -\csc\,a$

$\text{ctg}\,(2\pi - a) = \text{ctg}\,(-a) = -\text{ctg}\,a$

Exemplos:

i) sen 315° = sen (360° – 45°) = sen (–45°) = –sen 45° = $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

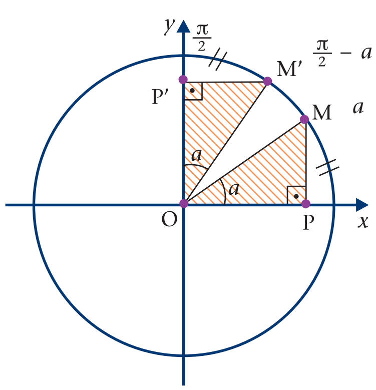
ii) sen 710° = sen (2 · 360° – 10°) = sen (–10°) = –sen 10°



12.9.4 – Arcos referidos ao eixo O*y*

Observe que em todos os casos vistos até agora, os arcos estão referidos ao eixo O*x*, isto é, se escrevem do tipo $\pi - a$; $\pi + a$ e $2\pi - a$. Nesta seção, estudaremos os arcos referidos ao eixo O*y*, isto é, arcos do tipo $\dfrac{\pi}{2} - a$; $\dfrac{\pi}{2} + a$; $\dfrac{3\pi}{2} - a$ e $\dfrac{3\pi}{2} + a$.

Arcos complementares



$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \operatorname{sen} a$$

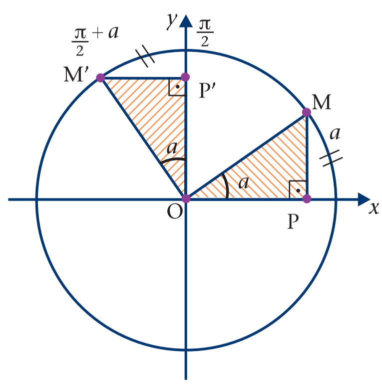
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)} = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} = \operatorname{ctg} a$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)} = \frac{1}{\operatorname{sen} a} = \csc a$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)} = \frac{1}{\cos a} = \sec a$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)} = \frac{1}{\operatorname{ctg} a} = \operatorname{tg} a$$

Arcos do segundo quadrante



$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\text{sen}\ a$$

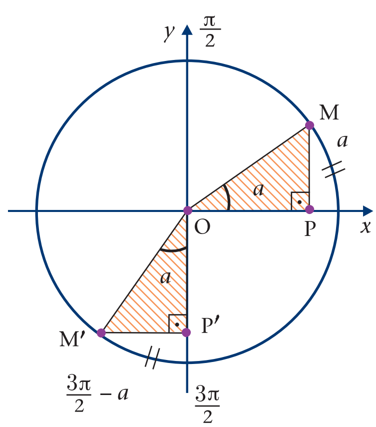
$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\text{ctg}\ a$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\csc a$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sec a$$

$$\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\text{tg}\ a$$

Arcos do terceiro quadrante



$$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = -\cos a$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = -\text{sen}\ a$$

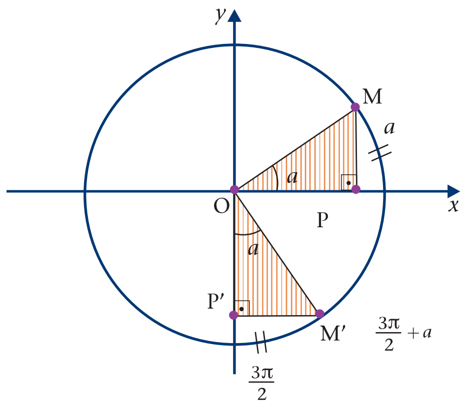
$$\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = \text{ctg}\ a$$

$$\sec\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = -\csc a$$

$$\csc\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = -\text{sen}\ a$$

$$\text{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = \text{tg}\ a$$

Arcos do quarto quadrante



$$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\cos a$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=\text{sen}\,a$$

$$\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\text{ctg}\,a$$

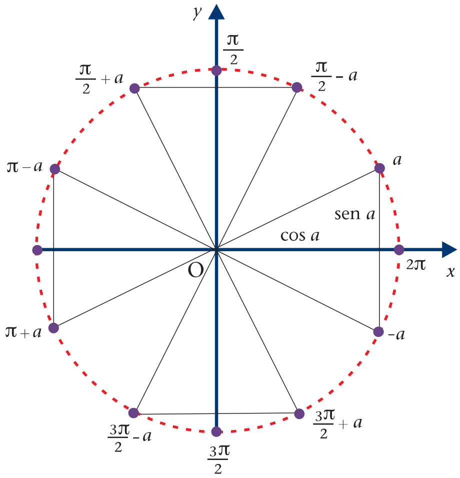
$$\sec\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=\csc a$$

$$\csc\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\sec a$$

$$\text{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\text{tg}\,a$$

12.9.5 – Resumo

Podemos reunir todos esses resultados observando que o sinal é sempre o da linha original no quadrante em que estiver o arco. Quanto à linha equivalente, podemos observar que:



NOTA
Os arcos podem ser escritos sob a forma $n \cdot 90° + a$ ou $n \cdot \frac{\pi}{2}+a$. Para n par, a linha mantém o nome e para n ímpar, a linha toma o nome da complementar. O sinal será o da linha inicial no quadrante do arco.

- quando o arco está referido ao eixo Ox (180° – a, 180° + a ou – a), a linha mantém o nome original;

2º quadrante	3º quadrante	4º quadrante
sen (180° – a) = sen a	sen (180° + a) = –sen a	sen (–a) = –sen a
cos (180° – a) = –cos a	cos (180° + a) = –cos a	cos (–a) = cos a
tg (180° – a) = –tg a	tg (180° + a) = tg a	tg (–a) = –tg a
ctg (180° – a) = –ctg a	ctg (180° + a) = ctg a	ctg (–a) = –ctg a
sec (180° – a) = –sec a	sec (180° + a) = –sec a	sec (–a) = sec a
csc (180° – a) = csc a	csc (180° + a) = –csc a	csc (–a) = –csc a

• quando o arco está referido ao eixo Oy (90° – a, 90° + a, 270° – a ou 270° + a), a linha toma o nome da complementar;

2º quadrante	3º quadrante	4º quadrante
sen (90° + a) = –cos a	sen (270° – a) = –cos a	sen (270° + a) = –cos a
cos (90° + a) = –sen a	cos (270° – a) = –sen a	cos (270° + a) = sen a
tg (90° + a) = –ctg a	tg (270° – a) = ctg a	tg (270° + a) = –ctg a
ctg (90° + a) = –tg a	ctg (270° – a) = tg a	ctg (270° + a) = –tg a
sec (90° + a) = –csc a	sec (270° – a) = –csc a	sec (270° + a) = csc a
csc (90° + a) = sec a	csc (270° – a) = –sec a	csc (270° + a) = –sec a

• o sinal é sempre o da linha inicial no quadrante do arco.

Exercícios resolvidos:

1) Reduzir ao primeiro quadrante o seno, o cosseno e a tangente de:

i) 1665°

ii) $\dfrac{831\pi}{11}$ rad

Solução:

i) Dividindo o arco de 1 165° por 360° temos: 1 665° = 4 · 360° + 225°. Abandonando o número de voltas completas, vemos que o arco de 1 665° é côngruo de 225°, que pode ser escrito referido ao eixo Ox: 225° = 180° + 45°. Assim, as linhas de 1 665° conservam o nome das linhas de 45°.

$$\text{sen } 1\,665° = \text{sen } (180° + 45°) = -\text{sen } 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 1\,665° = \cos (180° + 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 1\,665° = \text{tg } (180° + 45°) = \text{tg } 45° = 1$$

Os sinais são os sinais do seno, coseno e tangente no 3º quadrante.

ii) Dividindo $\frac{831\pi}{11}$ por 2π, para retirar as voltas completas, temos:

$$\frac{831\pi}{11} \div 2\pi = \frac{831}{22} = 37 + \frac{17}{22}$$

Logo: $\frac{831\pi}{11} = \left(37 + \frac{17}{22}\right)2\pi = 37 \cdot 2\pi + \frac{17\pi}{11}$

Abandonando as 37 voltas completas, temos: $\frac{17\pi}{11} = 2\pi - \frac{5\pi}{11}$

Como $\frac{5\pi}{11}$ é do 1º quadrante, o arco em questão será do 4º quadrante, logo:

$$\operatorname{sen}\frac{831\pi}{11} = \operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{5\pi}{11}\right) = -\operatorname{sen}\frac{5\pi}{11}$$

$$\cos\frac{831\pi}{11} = \cos\left(2\pi - \frac{5\pi}{11}\right) = \cos\frac{5\pi}{11}$$

$$\operatorname{tg}\frac{831\pi}{11} = \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{5\pi}{11}\right) = -\operatorname{tg}\frac{5\pi}{11}$$

Observe que escrevemos o arco de $\frac{17\pi}{11}$ rad sob a forma $2\pi - \frac{5\pi}{11}$ por ser $\frac{17\pi}{11} = \pi + \frac{6\pi}{11}$ e $\frac{6\pi}{11}$ não ser um arco do 1º quadrante.

2) Simplificar a expressão, onde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$E = 3\cos(\pi + x) - \operatorname{ctg}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + 4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{tg}(-x)$$

Solução:

- $\pi + x$ é um arco do 3º quadrante referido ao eixo Ox, logo $\cos(\pi + x) = -\cos x$ (o sinal é o do cos no 3º quadrante)

- $x + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + x$ é um arco do 4º quadrante referido ao eixo Oy, logo $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg} x$ (o sinal é o da cotangente no 4º quadrante)

NOTA
Algumas vezes convém transformar o ângulo de radianos em graus para tornar a identificação do quadrante mais rápida:
$\frac{17\pi}{11} = \frac{3\,060°}{11} \cong 278{,}18°$ é um arco do 4º quadrante.

NOTA
Pode-se mostrar que as fórmulas de redução ao 1º quadrante valem ainda se o arco x não for do 1º quadrante, portanto, esta resposta é válida mesmo que $x \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- $\frac{\pi}{2} + x$ é um arco do 2º quadrante referido ao eixo O*y*, logo

  $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ (o sinal é o do seno no 2º quadrante)

- tg $(-x)$ é um arco do 4º quadrante referido ao eixo O*x*, logo
  tg $(-x) = -\text{tg}\ x$ (o sinal é o da tangente no 4º quadrante)

Assim: $E = 3(-\cos x) - (-\text{tg}\ x) + 4\cos x - \text{tg}\ x$

$$E = \cos x$$

3) Simplificar:

$$A = \frac{-\text{sen}\,(-a) + 3\cos\,(90° + a) + 2\text{sen}\,(180° + a)}{\text{sen}\,(90° + a) + \cos\,(180° - a) + \cos\,(360° - a)}$$

Solução:

$$A = \frac{-(-\text{sen}\ a) + 3(-\text{sen}\ a) + 2(-\text{sen}\ a)}{(-\cos a) + (-\cos a) + (\cos a)} = \frac{-4\text{sen}\ a}{-\cos a}$$

$$A = 4\text{tg}\ a$$

4) Mostrar que se A, B e C são ângulos de um triângulo, então $\text{sen}(A + B) = \text{sen}\ C$ e $\cos(A + B) = -\cos C$.

Solução:

Se $A + B + C = 180°$, então $A + B = 180° - C$.

Logo:

$\text{sen}(A + B) = \text{sen}(180° - C) = \text{sen}\ C$ e $\cos(A + B) = \cos(180° - C) = -\cos C$

NOTA
A relação sen (A + B) = sen C para os ângulos de um triângulo é importante e usada com a lei dos senos.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Determine o valor de:

a) sen 3 600°

b) sen (–720°)

c) sen 765°

d) sen (–2 130°)

e) cos 450°

f) cos 1 620°

g) cos 11π

h) sen 6π

2 Qual dos números é o maior? Justifique.

a) sen 830° ou sen 1 195°

b) cos (–535°) ou cos 190°

3 Sabendo que $x = \frac{\pi}{2}$ rad, calcule:

$A = \text{sen}\,\frac{x}{2} - 3 \cdot \text{sen}\,2x + \frac{\text{sen}\,3x}{4}$

4 Sabendo que $x = \frac{5\pi}{2}$ rad, qual é o valor da expressão $\cos 3x + \cos \frac{x}{2}$?

5 Dê os valores de sen 210° e cos 210°.

6 Determine o valor de $\frac{8\pi}{3}$ rad e $\cos \frac{8\pi}{3}$ rad.

7 Calcule o valor de sen 330° – cos 2 460°.

8 Simplifique as expressões:

a) sen (900° – x) + cos (1 980° + x) + sen (1 440° – x)

b) sen (9π – x) + sen (5π – x)

c) sen (4π – x) + cos (8π – x) – sen (720° – x)

9 Simplifique: $y = \frac{\text{sen}\,(270° - x) \cdot \text{tg}\,(540° - x)}{\text{tg}\,(540° + x) \cdot \cos\,(540° - x)}$

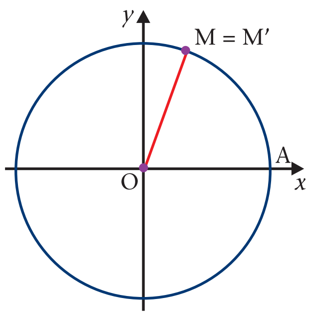
10 Simplifique as expressões:

a) $y = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

b) $y = \frac{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

12.10 – Condições para dois arcos terem as mesmas linhas trigonométricas

Todos os arcos côngruos têm as mesmas linhas trigonométricas, pois têm extremidades coincidentes.



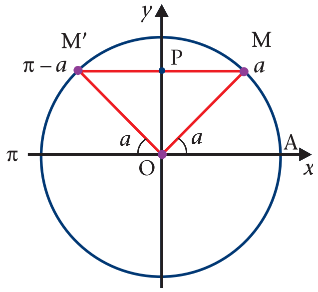
Se $\overset{\frown}{AM} = a$, então $\overset{\frown}{AM'} = k \cdot 2\pi + a$ então, $\overset{\frown}{AM'} - \overset{\frown}{AM} = k \cdot 2\pi$.

Arcos côngruos têm diferença igual a um número inteiro de voltas completas.

Além dessa condição, existe, para cada par de linhas trigonométricas, uma condição a mais.

12.10.1 – Seno e cossecante

NOTA
As duas condições podem ser escritas
$a = 2k\pi + a'$ ou
$a = (2k + 1)\pi - a'$, ou ainda
$a = k\pi + (-1)^k a'$. Se k for par, temos a primeira, e se k for ímpar, a segunda.



Os arcos AM = a e AM' = $\pi - a$ têm o mesmo seno $\overline{OP}$, então $\overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{AM'} = \pi$ ou de um modo geral $\overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{AM'} = k \cdot 2\pi + \pi$.

Dois arcos terão o mesmo seno e cossecante se forem suplementares. Eles têm extremidades simétricas em relação ao eixo Oy.

Temos então:

$$\text{sen } a = \text{sen } a' \Leftrightarrow a - a' = k \cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad a + a' = k \cdot 2\pi + \pi$$

Exemplos:

Resolver as equações:

i) sen $x = 1$

Escrevendo o segundo membro como um seno, temos:

sen x = sen 90°

Aplicando as condições de mesmo seno, vem:

$x - 90° = k \cdot 360° \Rightarrow x = k \cdot 360° + 90°$

ou

$x + 90° = k \cdot 360° + 180° \Rightarrow x = k \cdot 360° + 90°$ que é a mesma solução.

$S = \{x \mid x = k \cdot 360° + 90°, k \in \mathbb{Z}\}$

ii) csc $2x = -2$

Invertendo ambos os membros da equação, temos:

$$\text{sen } 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } 2x = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

Aplicando as condições de igualdades de senos:

$$2x - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = k \cdot 2\pi \Rightarrow 2x = k \cdot 2\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12}$$

ou

$$2x + \left(-\frac{\pi}{6}\right) = k \cdot 2\pi + \pi \Rightarrow 2x = k \cdot 2\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12}$$

$$S = \left\{x \mid x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \vee x = k\pi + \frac{\pi}{12},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

iii) sen $4x$ = cos $2x$

Como cos $2x$ = sen $(90° - 2x)$, temos:

sen $4x$ = sen $(90° - 2x)$

Logo: $4x - (90° - 2x) = k \cdot 360° \Rightarrow 6x = k \cdot 360° + 90° \Rightarrow x = k \cdot 60° + 15°$

ou

$4x + (90° - 2x) = k \cdot 360° + 180° \Rightarrow 2x = k \cdot 360° + 90° \Rightarrow x = k \cdot 180° + 45°$

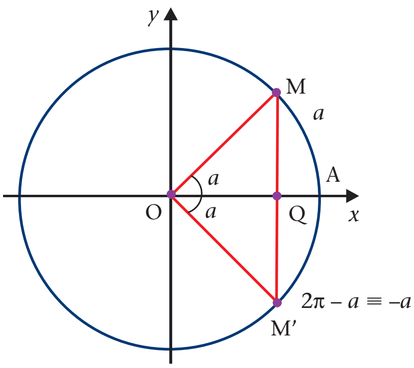
O conjunto das soluções desta equação é:

$$S = \{x \mid x = k \cdot 60° + 15° \quad \text{ou} \quad k \cdot 180° + 45°,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Se quiséssemos as soluções entre –90° e +90°, bastaria dar a k valores que fizessem os arcos se situarem entre esses valores. Teríamos:

$S = \{-45°, 15°, 45°, 75°\}$

12.10.2 – Cosseno e secante



NOTA
As duas condições podem ser resumidas em $a \pm a' = k \cdot 2\pi$ ou ainda $a = k \cdot 2\pi \pm a'$.

Os arcos AM = a e AM′ = $2\pi - a$ tem o mesmo cosseno $\overline{OQ}$, então $\overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{AM'} = 2\pi$ ou de um modo geral $k \cdot 2\pi$.

Dois arcos terão o mesmo cosseno e mesma secante quando forem replementares. Eles têm extremidades simétricas em relação ao eixo Ox.

Temos então:

$$\cos a = \cos a' \Leftrightarrow a - a' = k \cdot 2\pi \text{ ou } a + a' = k \cdot 2\pi$$

Exemplos:

Resolver as equações:

i) $\cos x = -1$

$\cos x = \cos \pi \Rightarrow x \pm \pi = k \cdot 2\pi \Rightarrow x = k \cdot 2\pi \pm \pi, k \in \mathbb{Z}$

ii) $\sec x - 2\cos x = 0$

$$\frac{1}{\cos x} - 2\cos x = 0 \Rightarrow 1 - 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Temos então:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow x \pm \frac{\pi}{4} = k \cdot 2\pi \Rightarrow x = k \cdot 2\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

ou

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{3\pi}{4} \Rightarrow x \pm \frac{3\pi}{4} = k \cdot 2\pi \Rightarrow x = k \cdot 2\pi \pm \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{x \mid x = k \cdot 2\pi \pm \frac{\pi}{4} \text{ ou } k \cdot 2\pi \pm \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

iii) $\cos(5x + 40°) = \text{sen } 3x$

$\cos(5x + 40°) = \cos(90° - 3x)$

$5x + 40° \pm (90° - 3x) = k \cdot 360°$

Logo:

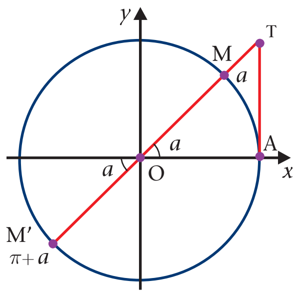
$5x + 40° + 90° - 3x = k \cdot 360° \Rightarrow 2x = k \cdot 360° - 130° \Rightarrow x = k \cdot 180° - 65°$

ou

$5x + 40° - 90° + 3x = k \cdot 360° \Rightarrow 8x = k \cdot 360° + 50° \Rightarrow x = k \cdot 45° + 6°15'$

$S = \{x \mid x = k \cdot 180° - 65° \text{ ou } k \cdot 45° + 6°15', k \in \mathbb{Z}\}$

12.10.3 – Tangente e cotangente



Os arcos AM = a e AM' = π + a têm a mesma tangente $\overline{AT}$, então $\overset{\frown}{AM} - \overset{\frown}{AM'} = \pi$ ou de um modo geral $k \cdot 2\pi + \pi$.

Dois arcos terão a mesma tangente e mesma cotangente quando forem diametralmente opostos. Eles têm extremidades simétricas em relação à origem.

Temos então:

$$\text{tg } a = \text{tg } a' \Leftrightarrow a - a' = k \cdot 2\pi \ \text{ ou } \ a - a' = k \cdot 2\pi + \pi$$

NOTA
As duas condições podem ser resumidas em $a - a' = k\pi$.

Exemplos:

Resolver as equações:

i) tg x = 1

$$\text{tg } x = 1 \Rightarrow \text{tg } x = \text{tg } \frac{\pi}{4} \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$$

ii) ctg $2x = -\sqrt{3}$

$$\text{ctg } 2x = -\sqrt{3} \Rightarrow \text{tg } 2x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{tg } 2x = \text{tg } (-30°) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - (-30°) = k \cdot 180° \Rightarrow 2x = k \cdot 180° - 30° \Rightarrow x = k \cdot 90° - 15°,\ k \in \mathbb{Z}$$

iii) $3\text{tg } x - 3\text{ctg } x = 2\sqrt{3}$

$$3\text{tg } x - 3\text{ctg } x = 2\sqrt{3} \Rightarrow 3\text{tg } x - \frac{3}{\text{tg } x} = 2\sqrt{3}$$

$$3\text{tg}^2 x - 3 = 2\sqrt{3}\text{tg } x \Rightarrow 3\text{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\text{tg } x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg } x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12+36}}{6} = \frac{2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \begin{cases} \text{tg } x = \sqrt{3} \\ \text{ou} \\ \text{tg } x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\text{tg } x = \sqrt{3} \Rightarrow \text{tg } x = \text{tg } 60° \Rightarrow x = k \cdot 180° + 60°,\ k \in \mathbb{Z}$$

ou

$$\text{tg } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{tg } x = \text{tg}(-30°) \Rightarrow x = k \cdot 180° - 30°,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{x \mid x = k \cdot 180° + 60° \text{ ou } k \cdot 180° - 30°,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Resolva as seguintes equações:

a) tg $x = 1$

b) $2\cos x = -1$

c) csc $x = -1$

d) $\cos x = \frac{3}{2}$

2 Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) sen $2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) sen $x = -\frac{1}{2}$

3 Sendo x um arco situado no intervalo $[0, 2\pi]$, quais são os possíveis valores de x que satisfazem a $\cos 3x = 1$?

4 Resolva equação $2\cos x + \sqrt{3} = 0$, sendo $U = [0, 2\pi]$.

5 Seja a equação tg $\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$, sendo $U = [0, \pi]$, quais são os possíveis valores de x que tornam verdadeira a igualdade?

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (UFSE) Se um arco mede 3 780°, sua medida em radianos é:

(A) 19π (C) 21π (E) 23π

(B) 20π (D) 22π

2 (UFRS) Considere as desigualdades abaixo sobre arcos medidos em radianos.

I) sen 1 < 0

II) cos 2 < 0

III) tan 1 < tan 2

Quais são verdadeiras?

(A) Apenas I. (D) Apenas I e III.

(B) Apenas II. (E) Apenas II e III.

(C) Apenas III.

3 (UFF-RJ) Para $\theta = 89°$, conclui-se que:

(A) $\text{tg } \theta < \text{sen } \theta < \cos \theta$ (D) $\cos \theta < \text{tg } \theta < \text{sen } \theta$

(B) $\cos \theta < \text{sen } \theta < \text{tg } \theta$ (E) $\text{sen } \theta < \text{tg } \theta < \cos \theta$

(C) $\text{sen } \theta < \cos \theta < \text{tg } \theta$

4 (UFRS) Considere as seguintes afirmações para arcos medidos em radianos:

I) sen 1 < sen 3

II) cos 1 < cos 3

III) cos 1 < sen 1

Quais são verdadeiras?

(A) Apenas I é verdadeira.

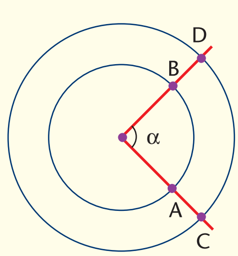
(B) Apenas II é verdadeira.

(C) Apenas III é verdadeira.

(D) São verdadeiras apenas I e II.

(E) São verdadeiras I, II e III.

5 (PUC-SP) Na figura, $\alpha = 1{,}5$ rad, AC = 1,5 e o comprimento do arco AB é 3. Qual é a medida do arco CD?



(A) 1,33

(B) 4,50

(C) 5,25

(D) 6,50

(E) 7,25

6 (Mack-SP)

I) cos 225° < cos 215°

II) $\text{tg } \frac{5\pi}{12} > \text{sen } \frac{5\pi}{12}$

III) sen 160° > sen 172°

Das afirmações acima:

(A) todas são verdadeiras.

(B) todas são falsas.

(C) somente II e III são verdadeiras.

(D) somente II é verdadeira.

(E) somente I e II são verdadeiras.

7 (Vunesp) Se x é a medida de um ângulo em radianos e $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$, então:

(A) $\cos x > 0$ (D) $\text{sen } x < 0$

(B) $\cos 2x < 0$ (E) $\text{sen } 2x > 0$

(C) $\text{tg } x > 0$

8 (Mack-SP)

I) sen 2 > sen 3

II) sen 1 > cos 30°

III) cos 2 < cos 3

Relativamente às desigualdades acima, é correto afirmar que:

(A) todas são verdadeiras.

(B) todas são falsas.

(C) somente I e II são verdadeiras.

(D) somente II e III são verdadeiras.

(E) somente I e III são veradadeiras.

9 (UFRS) Se o ponteiro menor de um relógio percorre um arco de $\frac{\pi}{12}$ rad, o ponteiro maior percorre um arco de:

(A) $\frac{\pi}{6}$ rad (C) $\frac{\pi}{3}$ rad (E) π rad

(B) $\frac{\pi}{4}$ rad (D) $\frac{\pi}{2}$ rad

10 (UEL-PR) Dos números a seguir, o mais próximo de sen 5 é:

(A) 1 (C) 0 (E) –1

(B) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

11 (Ufal) Se a medida de um arco, em graus, é igual a 128, sua medida em radianos é igual a:

(A) $\left(\frac{\pi}{4}\right) - 17$ (C) $\left(\frac{64}{45}\right)\pi$ (E) $\left(\frac{32}{45}\right)\pi$

(B) $\left(\frac{64}{15}\right)\pi$ (D) $\left(\frac{16}{25}\right)\pi$

12 (Cesesp-PE) Tomando para π a aproximação 3,14, se um arco de circunferência mede 1,57 cm e o diâmetro da mesma 8 cm, então o ângulo correspondente a este arco mede:

(A) 22°5′ (C) 11°25′ (E) 39°25′

(B) 22°30′ (D) 11°15′

13 (Fuvest-SP) Quantos graus mede aproximadamente um ângulo de 0,105 rad?

(A) 2 (C) 6 (E) 10

(B) 4 (D) 8

14 (UFMG) Transformando 7°30′ em radianos, teremos:

(A) $\frac{\pi}{24}$ (C) $\frac{\pi}{30}$ (E) $\frac{5\pi}{32}$

(B) $\frac{\pi}{25}$ (D) $\frac{3\pi}{25}$

15 (Fuvest-SP) O ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio à 1 hora e 12 minutos é:

(A) 27° (C) 36° (E) 72°

(B) 30° (D) 42°

16 (Ufla-MG) Às 11 horas e 15 minutos, o ângulo α (figura a seguir) formado pelos ponteiros de um relógio mede:

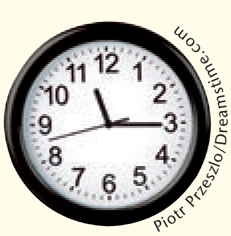
(A) 90°

(B) 112°30′

(C) 82°30′

(D) 120°

(E) 127°30′



17 (Ufscar-SP) Se o ponteiro dos minutos de um relógio mede 12 centímetros, o número que melhor aproxima a distância em centímetros percorrida por sua extremidade em 20 minutos é:

(A) 37,7 cm (C) 20 cm (E) 3,14 cm

(B) 25,1 cm (D) 12 cm

18 (Unifor-CE) Em uma circunferência de raio 6 cm, um ângulo central de medida 15° determina um arco cujo comprimento, em centímetros, é aproximadamente:

(A) 1,75 (C) 1,57 (E) 0,78

(B) 1,68 (D) 1,05

19 (UFPA) Quantos radianos percorre o ponteiro dos minutos de um relógio em 50 min?

(A) $\frac{16\pi}{9}$ (C) $\frac{4\pi}{3}$ (E) π

(B) $\frac{5\pi}{3}$ (D) $\frac{4\pi}{2}$

20 (Fuvest-SP) Um arco de circunferência mede 300° e seu comprimento é 2 km. Qual o número inteiro mais próximo da medida do raio, em metros?

(A) 157 (C) 382 (E) 764

(B) 284 (D) 628

21 (Cescem-SP) Os quadrantes onde estão os ângulos α, β e γ tais que:

sen $\alpha < 0$ e cos $\alpha < 0$

cos $\beta < 0$ e tg $\beta < 0$

sen $\gamma > 0$ e ctg $\gamma > 0$

são respectivamente:

(A) 3º, 2º, 1º (D) 1º, 2º, 3º

(B) 2º, 1º, 3º (E) 3º, 2º, 2º

(C) 3º, 1º, 2º

22 (UM-SP) Assinale a única alternativa correta:

(A) π (D) tg 90° = $\pm\infty$

(B) 1 rad equivale a 180° (E) $\pi = 3{,}1418$

(C) sen 1 > cos 1

23 (Unificado-RJ) Se x é um ângulo agudo, tg $(90° + x)$ é igual a:

(A) tg x (C) –tg x (E) 1 + tg x

(B) cot x (D) –cot x

24 (Unificado-RJ) Sendo $A = \dfrac{7\cos(5\pi - x) - 3\cos(3\pi + x)}{8\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}$, com $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, então:

(A) A = –1
(B) 2A = 1
(C) 2A + 1 = 0
(D) 4A + 5 = 0
(E) 5A – 4 = 0

25 (Unirio-RJ) O valor numérico da expressão

$$\frac{\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4} + \cos 240° - \left[\text{tg}\,(-750°)\right]^2}{(\sec 1\,200°)\left(\text{cossec}\,\dfrac{9\pi}{4}\right) + \left(\text{cotg}\,\dfrac{5\pi}{6}\right)^2}$$ é:

(A) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{6}$
(B) $-\dfrac{3+\sqrt{2}}{6}$
(C) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{6}$
(D) $-\dfrac{3-\sqrt{2}}{6}$
(E) 0

26 (Unificado-RJ) O valor de $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{12} + \cdots\right)$ é:

(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
(B) $-\dfrac{1}{2}$
(C) –1
(D) zero
(E) $\dfrac{1}{2}$

27 (Udesc) Os arcos cujo cosseno é $\sqrt{2}$ podem estar nos quadrantes:

(A) 1º e 4º
(B) 1º e 2º
(C) 1º e 3º
(D) 2º e 3º
(E) Nenhuma das opções é correta.

28 (Cesgranrio-RJ) Se $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = a$, então $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$ é igual à:

(A) a
(B) $-a$
(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
(D) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
(E) $\dfrac{\pi}{4}$

29 (PUC-SP) O valor numérico da expressão
$y = \cos 4x + \text{sen}\,2x + \text{tg}\,2x - \sec 8x$, para $x = \dfrac{\pi}{2}$, é:

(A) 2
(B) 1
(C) 3
(D) 0
(E) 4

30 (UF-MS) O valor da expressão
$\dfrac{2}{3} \cdot \text{sen}\,\dfrac{x}{12} - \text{sen}\,\dfrac{3x}{4} \cdot \text{sen}\,\dfrac{x}{4}$, para $x = 2\pi$, é:

(A) $-\dfrac{2}{3}$
(B) $-\dfrac{1}{6}\sqrt{3}$
(C) $\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{2} - 3\right)$
(D) $\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{3} - 3\right)$
(E) $\dfrac{4}{3}$

31 (Aman-RJ) O valor da expressão

$$y = \frac{\text{sen}^2\,80° + \cos^2\,80° - 1}{\sec 23° + \cos 17° - \text{tg}\,3°}$$ é:

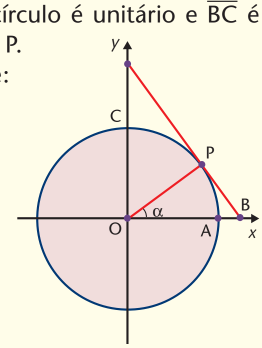
(A) ∞
(B) 0
(C) 1
(D) –1
(E) n.d.a.

32 (FEI-SP) Aponte a alternativa correta:

(A) $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
(B) $\sec \alpha = 1 + \text{tg}\,\alpha$
(C) $\cos^2 \alpha = 1 + \text{sen}^2\,\alpha$
(D) $\text{tg}^2\,\alpha = \sec^2 \alpha - 1$
(E) $\text{tg}\,2\alpha = \dfrac{1 + \text{tg}^2\,\alpha}{2\text{tg}\,\alpha}$

33 (UFRS) Na figura abaixo, o círculo é unitário e $\overline{BC}$ é tangente ao círculo no ponto P.
Se o arco AP mede α, BC vale:

(A) tan α + cot α
(B) sen α + cos α
(C) sec α + cossec α
(D) tan α + sen α
(E) cot α + cos α



34 (Cesgranrio-RJ) Se x é arco do 3º quadrante e $\sec x = -\dfrac{5}{2}$, então tg x é igual a:

(A) $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$
(B) $-\dfrac{\sqrt{21}}{2}$
(C) $\dfrac{3}{5}$
(D) $-\dfrac{25}{2}$
(E) $\dfrac{25}{2}$

35 (UFMS) Se $\cos x = \dfrac{4}{5}$ e tg $x < 0$, então sen x – cotg x é igual a:

(A) $-\dfrac{29}{15}$
(B) $-\dfrac{27}{20}$
(C) $\dfrac{3}{20}$
(D) $\dfrac{11}{15}$
(E) $\dfrac{27}{25}$

36 (FATEC-SP) Se sen α = 3t – 1 e cos α = 1 – t, então α é um ângulo do:

(A) II ou IV quadrante.
(B) I ou II quadrante.
(C) I ou IV quadrante.
(D) I ou III quadrante.
(E) II ou III quadrante.

37 (FGV-SP) A expressão $\frac{\text{sen } x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\text{sen } x}$ é igual a:

(A) $\frac{2}{\cos x}$
(B) $\frac{1}{\text{sen } x}$
(C) sec x
(D) 2cossec x
(E) $\frac{\cos x}{1+\text{sen } x}$

38 (UFES) Sendo α e β dois ângulos complementares, tais que cos α + cos β = m, então cos α · cos β é:

(A) $\frac{m^2-1}{2}$
(B) 1
(C) $\frac{1}{2}$
(D) $\frac{m^2-1}{4}$
(E) $\frac{1}{4}$

39 (UEL-PR) O valor da expressão $\dfrac{\left(\text{sen }\frac{8\pi}{3}-\cos 5\pi\right)}{\text{tg }\frac{13\pi}{6}}$ é:

(A) $\frac{\left(3+2\sqrt{3}\right)}{2}$
(B) $\frac{\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{2}$
(C) $3+2\sqrt{3}$
(D) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$
(E) $3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

40 (Fuvest-SP) Se α é um ângulo tal que $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ e sen α = a, então tg (π – α) é igual a:

(A) $\frac{-a}{\sqrt{(1-a^2)}}$
(B) $\frac{a}{\sqrt{(1-a^2)}}$
(C) $\frac{\sqrt{(1-a^2)}}{a}$
(D) $\frac{-\sqrt{(1-a^2)}}{a}$
(E) $\frac{-(1+a^2)}{a}$

41 (Unifor-CE) O número real m que satisfaz a sentença $\frac{m+1}{m-2}=\cos 3015°$ é:

(A) $3\sqrt{2}+4$
(B) $4-3\sqrt{2}$
(C) $3\sqrt{2}-4$
(D) $3-4\sqrt{2}$
(E) $4\sqrt{2}+3$

42 (PUC-PR) O gráfico da função definida por
$f(x) = x^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, onde $c=\cos\frac{8\pi}{7}$:

(A) intercepta o eixo das abscissas em exatamente 2 pontos positivos.
(B) intercepta o eixo das abscissas em exatamente 2 pontos negativos.
(C) intercepta o eixo das abscissas em 2 pontos de sinais diferentes.
(D) intercepta o eixo das abscissas na origem.
(E) não intercepta o eixo das abscissas.

43 (Unifor-CE) A expressão
sen 270° – cos 150° – tg 135° – sec 300° é igual a:

(A) $-\frac{5}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
(B) $-\frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
(C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
(D) $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$
(E) $2-\frac{\sqrt{3}}{2}$

44 (Cesgranrio-RJ) Se x é um arco do 3° quadrante e tg x = 1, então cos x é:

(A) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$
(B) –1
(C) $-\frac{1}{2}$
(D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
(E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

45 (FGV-SP) Se sen $a=\frac{24}{25}$ e sec a é negativa, então o valor de $\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$ é:

(A) $\frac{3}{4}$
(B) $\frac{3}{5}$
(C) $\frac{5}{4}$
(D) $\frac{4}{3}$
(E) $\frac{1}{2}$

46 (UFRS) Considere as afirmativas abaixo.

I) tan 92° = –tan 88°
II) tan 178° = tan 88°
III) tan 268° = tan 88°
IV) tan 272° = –tan 88°

Quais estão corretas?

(A) Apenas I e III.
(B) Apenas III e IV.
(C) Apenas I, II e IV.
(D) Apenas I, III e IV.
(E) Apenas II, III e IV.

47 (Ufal) O seno de um arco de medida 2 340° é igual a:

(A) –1 (C) 0 (E) $\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{2}$ (D) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

48 (Unip-SP) O valor da expressão

$\cos\frac{2\pi}{3} + \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} + \text{tg}\,\frac{5\pi}{4}$ é:

(A) $\frac{\sqrt{213}}{2}$ (C) 0 (E) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

(B) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

49 (Aman-RJ) A expressão $\frac{\cos x}{1+\text{sen}\,x} + \frac{1+\text{sen}\,x}{\cos x}$ é igual a:

(A) $\frac{\cos x}{2}$ (C) $2\sec x$ (E) $-2\text{sen}\,x$

(B) $\frac{2}{\text{sen}\,x}$ (D) $\text{sen}^2\,x$

50 (PUC-SP) A expressão $\frac{\text{cossec}\,x - \text{sen}\,x}{\sec x - \cos x}$ é identicamente igual a:

(A) $\text{cotg}^3\,x$ (D) $\text{tg}^2\,x + \sec x$

(B) $\sec^2 x$ (E) $\text{cossec}^3\,x$

(C) $\text{sen}^2\,x + \cos x$

51 (Ufes) Se $\text{sen}\,x + \cos x = a$ e $\text{sen}\,x \cdot \cos x = b$, podemos dizer que:

(A) $a^2 = 2b + 1$ (D) $a^2 = b^2$

(B) $a = b$ (E) n.d.a.

(C) $a^2 = 2b$

52 Dê a expressão geral para o arco de:

a) 1 690° b) 1 940°

53 Dê o quadrante em que estão situados os arcos do exercício acima.

54 Determine o quadrante onde está a extremidade dos seguintes arcos:

a) 1 810° c) $\frac{2487\pi}{4}$rad

b) $\frac{25\pi}{4}$rad d) 2 630°

55 Quantos graus mede, aproximadamente, um arco de 0,105 rad?

56 Quanto mede em radianos um arco de 2°15′?

57 Duas rodas dentadas, com sessenta dentes a maior e vinte dentes a menor, estão engrenadas entre si. Quando a maior girar 32π rad, quantas voltas dará a menor?

58 Às 9h10min, o menor ângulo, em graus, formado pelos ponteiros de um relógio é:

(A) 160° (B) 150° (C) 145° (D) 147°30′

59 Dê em graus, a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às:

a) 10h15min b) 10h10min c) 2h15min

60 Uma circunferência é dividida em sete arcos de medidas iguais. Qual é o valor da medida de cada um desses arcos?

61 (Ufes) O valor de x que satisfaz o sistema:

$$\begin{cases} \cos a = \frac{2\sqrt{3}}{x} \\ \text{tg}\,a = \frac{\sqrt{x}-1}{3} \end{cases}$$ é:

(A) –16 (C) $\sqrt{3}$ (E) n.d.a.

(B) 4 (D) $-\frac{16}{6}$

62 (Aman-RJ) Se $\text{tg}^2\,\theta = 3$ e $0° \le \theta \le 90°$, então o valor de $\text{sen}\,\theta$ é:

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $2-\sqrt{2}$ (E) n.d.a.

(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

63 (Aman-RJ) Se $\text{cotg}\,x = \sqrt{3}$ e $180° < x < 270°$, então o valor de $\sec x$ é:

(A) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (E) n.d.a.

(B) –2 (D) 2

64 (UnB-DF) Se $\sec^2 x + \text{tg}\,x - 7 = 0$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então:

(A) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$

(B) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ (D) n.d.a.

65 (Fuvest-SP) Sendo α uma solução da equação $tg^2\,\alpha = \cos^2 x - sen^2\,\alpha$, o valor de $tg^2\,\alpha$ é:

(A) $\sqrt{2}-1$ (C) $\sqrt{3}-1$ (E) $\sqrt{2}+3$

(B) $\sqrt{2}+1$ (D) $\sqrt{3}+1$

66 (Ufes) A soma das raízes da equação $tg^2\,x - tg\,x = 0$, $0 \le x \le \pi$, é:

(A) 0 (B) $\frac{5\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$ (E) 2π

67 (Cescea-SP) A soma das raízes da equação $1 - 4\cos^2 x = 0$, compreendidas entre 0 e π, é:

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) π (C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$ (E) $\frac{7\pi}{6}$

68 (FGV-SP) No intervalo $[0, 2\pi]$, a soma das raízes da equação $2sen^2\,x + 3sen\,x - 2 = 0$ é:

(A) $-\frac{3}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) π (D) $\frac{2\pi}{3}$ (E) $\frac{3\pi}{2}$

69 (FGV-SP) No intervalo $[0, 2\pi]$, a soma das raízes da equação:
$sen^3\,x - 3sen^2\,x \cdot \cos x + 3sen\,x \cdot \cos^2 x - \cos^3 x = 0$ é:

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) $\frac{3\pi}{2}$ (D) 2π (E) $\frac{5\pi}{2}$

70 (FGV-SP) A solução da inequação $\sqrt{2}\cdot\cos^2 x > \cos x$ no intervalo $[0, \pi]$ é:

(A) $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{2} < x \le \pi$

(B) $0 < x \le \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} \le x < \pi$

(C) $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$

(D) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$

(E) n.d.a.

71 (Cescea-SP) A solução da inequação $sen^2\,x < 2sen\,x$, no intervalo fechado $[0, 2\pi]$, é:

(A) $0 < x < 2\pi$ (C) $0 < x < \pi$

(B) $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ (D) $0 < x < \frac{\pi}{2}$

72 (Cescea-SP) O conjunto solução da equação $3tg^2 x + 5 = \frac{7}{\cos x}$, no intervalo fechado $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, é:

(A) $\left\{\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, 0\right\}$ (C) $\left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$

(B) $\left\{\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$ (D) $\left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right\}$

73 (FGV-SP) Dada a equação $\cos^2 x - 2\sec^2 x = 1$, com $0 \le x \le \pi$, então:

(A) $x = \frac{\pi}{4}$

(B) $x = \frac{3\pi}{4}$

(C) $x = 0$

(D) Não existe x que satisfaz a equação.

(E) n.d.a.

74 (Cescea-SP) Se a é a menor raiz positiva da equação $(tg\,x - 1)(4sen^2\,x - 3) = 0$, então o valor de $sen^4\,a - \cos^2 a$ é:

(A) $\frac{5}{16}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (E) $-\frac{1}{2}$

(B) 0 (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

75 (FGV-SP) A solução da equação $\frac{625^{\cos^2 x}}{25^{\cos x}} = 1$, para $0 \le x < \frac{\pi}{2}$, é:

(A) $x = 0$

(B) $x = \frac{\pi}{6}$

(C) $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{6}$

(D) $x = \frac{\pi}{3}$

(E) $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{3}$

76 (Fuvest-SP) No intervalo $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$, a equação $\sqrt{1 - sen^2 x} + \cos x = -\sqrt{2}$:

(A) não admite solução.

(B) admite como solução $x = \frac{3\pi}{4}$.

(C) admite como solução $x = \frac{2\pi}{3}$.

(D) admite como solução $x = \frac{5\pi}{6}$.

(E) admite como solução $x = \pi$.

77 (UFSCar-SP) A inequação $|\cos x| \ge sen\,x$, $0 < x < 2\pi$, é válida se, e somente se:

(A) $0 < x < \frac{\pi}{2}$

(B) $0 \le x \le 2\pi$

(C) $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4} \le x \le 2\pi$

(D) $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3}{2}\pi$

(E) $0 \le x \le \frac{\pi}{8}$

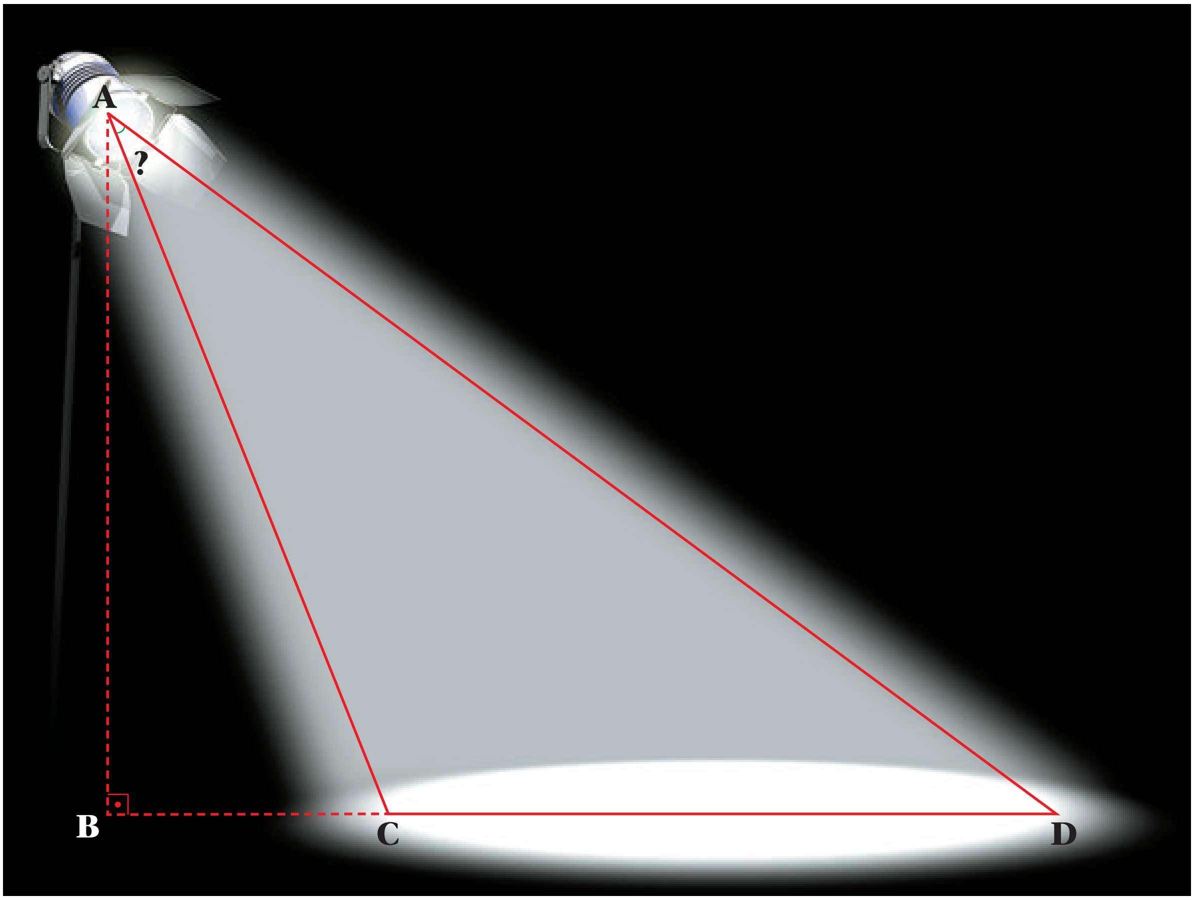
78 Dê o número de raízes da equação $\cos x + sen\,x = 0$, no intervalo $[\pi, 3\pi]$.

79 Resolva, para $x \in [0, 2\pi]$:
$sen\,x \cdot tg\,x \cdot \sec x = \cos x \cdot ctg\,x \cdot \csc x$.

80 Dê o menor valor real e positivo de x tal que $4^{-sen\,x} = \frac{1}{2}$.

CAPÍTULO XIII

RELAÇÕES E IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS



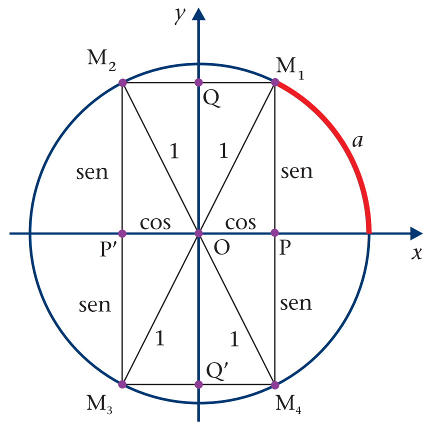
Kiyoshi Takahase/iStockphoto.com

Neste capítulo, obteremos as relações entre as linhas trigonométricas de um mesmo arco, que nos permitirão seu cálculo e nos ajudarão a resolver equações trigonométricas. Também veremos como calcular as linhas trigonométricas da soma de dois ângulos e como transformar somas em produtos (e vice-versa).

13 – RELAÇÕES E IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

13.1 – Cálculo das linhas trigonométricas de um arco

13.1.1 – Seno e cosseno



NOTA
Quando não for conhecido o quadrante, deve ser mantido o duplo sinal ±, pois existirão dois valores para o sen e para o cos.

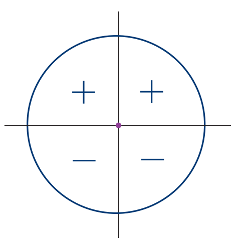
Os triângulos OPM_1, $OP'M_2$, $OP'M_3$ e OPM_4 nos dão, qualquer que seja o quadrante do arco, a relação:

$$\boxed{\text{sen}^2\, a + \cos^2 a = 1}$$

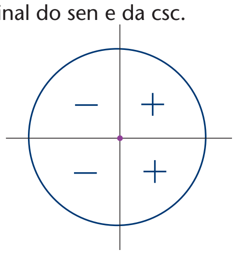
Desta relação se tem:

$$\text{sen}\, a = \pm\sqrt{1-\cos^2 a} \quad \text{ou} \quad \cos a = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2 a}$$

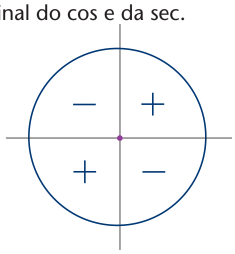
O sinal do radical dependerá do quadrante do arco.



Sinal do sen e da csc.



Sinal do cos e da sec.



Sinal da tg e da ctg.

Exemplos:

i) Se $\cos a = -\frac{1}{2}$ e a pertence ao terceiro quadrante, calcular as outras linhas trigonométricas do arco a.
Como o arco a é do 3º quadrante, sen $a < 0$, logo:

$$\text{sen}\, a = -\sqrt{1-\cos^2 a} = -\sqrt{1-\frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Temos então:

$$\text{tg}\, a = \frac{\text{sen}\, a}{\cos a} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3};\ \sec a = \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$\csc a = \frac{1}{\text{sen } a} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ii) Sendo $\csc a = -\frac{5}{3}$, calcular as outras linhas trigonométricas sabendo que a pertence ao 4º quadrante.

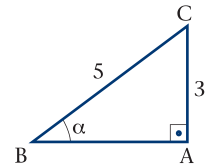
Temos que $\csc a = \frac{1}{\text{sen } a} = -\frac{5}{3}$, logo, $\text{sen } a = -\frac{3}{5}$.

$$\cos a = +\sqrt{1-\text{sen}^2 a} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\sec a = \frac{1}{\cos a} = \frac{5}{4};\ \text{tg } a = \frac{\text{sen } a}{\cos a} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

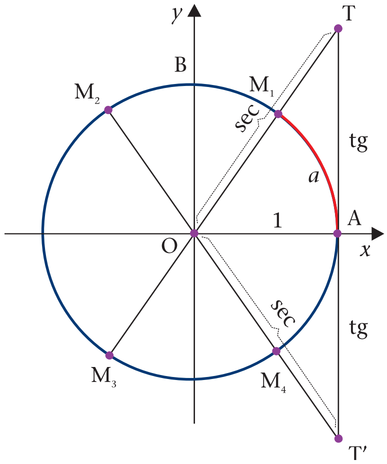
$$\text{ctg } a = \frac{1}{\text{tg } a} = -\frac{4}{3}$$

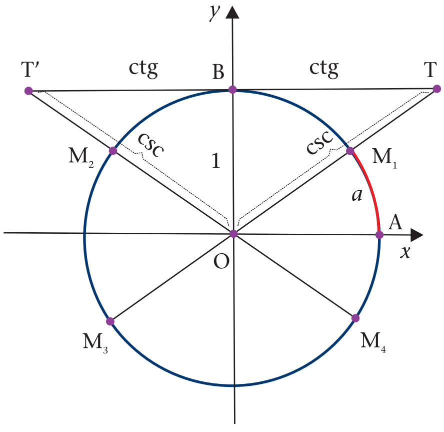
NOTA
As linhas trigonométricas em questão podem ser obtidas utilizando-se o triângulo abaixo:



onde α é a redução de *a* ao 1º quadrante. Calculando AB pelo teorema de Pitágoras, podemos encontrar as demais linhas trigonométricas de α (que são as mesmas de *a*, a não ser pelo sinal).

13.1.2 – Tangente e cotangente





Os triângulos OAT e OAT' nos dão: $\sec^2 a = 1 + \text{tg}^2 a$ e os triângulos OBT e OBT' nos dão $\csc^2 a = 1 + \text{ctg}^2 a$. Assim, temos:

$$\sec a = \frac{1}{\cos a} = \pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a} \text{ ou } \csc a = \frac{1}{\text{sen } a} = \pm\sqrt{1+\text{ctg}^2 a}$$

Existem duas soluções para cada tangente ou cotangente, conforme o sinal dos radicais. A duplicidade fica eliminada quando se conhece o quadrante do arco.

Exemplos:

i) Dada tg a = –2, calcular as outras linhas trigonométricas sabendo que o arco a pertence ao 2º quadrante.
Temos que $\sec^2 a = 1 + \text{tg}^2 a$. Como a é do 2º quadrante, $\sec a = \dfrac{1}{\cos a}$ será negativa, logo:

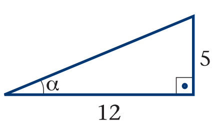
$$\sec a = -\sqrt{1+\text{tg}^2 a} = -\sqrt{1+4} = -\sqrt{5}$$

$$\cos a = \frac{1}{\sec a} = \frac{1}{-\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{sen } a = \text{tg } a \cdot \cos a = (-2)\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{ctg } a = \frac{1}{\text{tg } a} = -\frac{1}{2};\ \csc a = \frac{1}{\text{sen } a} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

NOTA
Outra solução: use o triângulo:



ii) Sendo $\text{ctg } a = \dfrac{12}{5}$ e o arco a do 3º quadrante, calcular as outras linhas trigonométricas.
Temos:

$$\text{tg } a = \frac{1}{\text{ctg } a} = \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{12}$$

$$\csc a = -\sqrt{1+\text{ctg}^2 a} = -\sqrt{1+\frac{144}{25}} = \frac{-13}{5}$$

$$\text{sen } a = -\frac{5}{13};\ \cos a = \text{sen } a \cdot \text{ctg } a = \left(-\frac{5}{13}\right)\cdot\frac{12}{5} = -\frac{12}{13}$$

NOTA
A expressão A foi calculada em função da cotangente (que foi dada), evitando estudo de sinais.

iii) Calcular o valor de $A = \dfrac{\cos x - \sec x}{\text{sen } x - \csc x}$ sabendo que $\text{ctg } x = \dfrac{1}{2}$.

Temos que:

$$A = \frac{\frac{1}{\sec x} - \sec x}{\frac{1}{\csc x} - \csc x} = \frac{1-\sec^2 x}{1-\csc^2 x}\cdot\frac{\csc x}{\sec x} = \frac{-\text{tg}^2 x}{-\text{ctg}^2 x}\cdot\frac{\frac{1}{\text{sen } x}}{\frac{1}{\cos x}}$$

$$A = \frac{\text{tg}^2 x}{\text{ctg}^2 x}\cdot \text{ctg } x \Rightarrow A = \frac{\text{tg}^2 x}{\text{ctg } x} = \frac{\frac{1}{\text{ctg}^2 x}}{\text{ctg } x}$$

$$A = \frac{1}{\text{ctg}^3 x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 8$$

Exercícios resolvidos:

1) Simplificar a expressão:

$$A = \sec^2 a \cdot \csc^2 b + \mathrm{tg}^2 a \cdot \mathrm{ctg}^2 b - \sec^2 a \cdot \mathrm{ctg}^2 b - \mathrm{tg}^2 a \cdot \csc^2 b$$

Solução:
Pondo $\sec^2 a$ em evidência, assim como $\mathrm{tg}^2 a$ nos termos que as contém, temos:

$$A = \sec^2 a\,(\csc^2 b - \mathrm{ctg}^2 b) + \mathrm{tg}^2 a\,(\mathrm{ctg}^2 b - \csc^2 b)$$

Como $\csc^2 b = 1 + \mathrm{ctg}^2 b$, então $\csc^2 b - \mathrm{ctg}^2 b = 1$

$$A = \sec^2 a \cdot 1 + \mathrm{tg}^2 a \cdot (-1) = \sec^2 a - \mathrm{tg}^2 a = 1$$

2) Eliminar x entre as equações:

$$\begin{cases} \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x = a & \text{(I)} \\ 2\mathrm{sen}\, x \cdot \cos x = b & \text{(II)} \end{cases}$$

Solução:
Elevando ao quadrado as equações (I) e (II), vem:

$$\begin{cases} \cos^4 x - 2\mathrm{sen}^2 x \cos^2 x + \mathrm{sen}^4 x = a^2 \\ 4\mathrm{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = b^2 \end{cases}$$

Somando membro a membro:

$$\cos^4 x + 2\mathrm{sen}^2 x \cos^2 x + \mathrm{sen}^4 x = a^2 + b^2$$

Fatorando: $(\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x)^2 = a^2 + b^2$

$$1^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 1$$

3) Eliminar x nas equações: $\begin{cases} 1 + \cos x = a\,\mathrm{sen}\, x \\ 1 - \cos x = b\,\mathrm{sen}\, x \end{cases}$

Solução:
Somando membro a membro:

$$2 = (a+b)\,\mathrm{sen}\, x \Rightarrow \mathrm{sen}\, x = \frac{2}{a+b}$$

Substituindo na primeira equação:

$$\cos x = a\,\mathrm{sen}\, x - 1 = \frac{2a}{a+b} - 1 = \frac{a-b}{a+b}$$

Como $\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, temos:

$$\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} + \frac{4}{(a+b)^2} = 1 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 + 4 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4ab = 4 \Rightarrow ab = 1$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Sendo $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule o valor do cos α e da tg α.

2 Sendo $\text{sen}\ x = 2\cos x$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule os valores de sen x e cos x.

3 Sendo $\text{sen}\ x = -\frac{3}{5}$ e $\pi < x < 3\pi$, calcule: cos x; tg x; sec x e csc x.

4 Sendo $\cos x = -\frac{1}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule os valores de sen x e tg x.

5 Sendo $\cos x = \frac{5}{13}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcule os valores de sen x e tg x.

6 Sendo $\text{sen}\ x = \sqrt{k-2}$ *e* $\cos x = k - 1$, calcule k.

7 Sendo $\cos x = \frac{1}{k}$ e $\text{sen}\ x = \frac{\sqrt{k+1}}{k}$, determine k.

8 Sabendo que $2\text{tg}^2 x + \frac{1}{\text{ctg}\ x} = 1$ e que $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, calcule o valor de sen x + cos x.

9 Se $\text{tg}\ x = \frac{3}{4}$, com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, determine o valor de $y = \cos x - \text{sen}\ x$.

10 Obtenha k, $k \in \mathbb{R}$ de modo que $\text{sen}\ x = \frac{k}{5}$ e $\cos x = \frac{k+1}{5}$.

13.2 – Equações trigonométricas

Algumas equações trigonométricas se resolvem utilizando as relações entre essas linhas, quando estas estão em função de um mesmo arco.

Exemplos:

i) $2\cos^2 x + 3\text{sen}\,x - 3 = 0$

Substituindo $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, vem:

$2(1 - \text{sen}^2 x) + 3\text{sen}\,x - 3 = 0$

$2 - 2\text{sen}^2 x + 3\text{sen}\,x - 3 = 0 \Rightarrow 2\text{sen}^2 x - 3\text{sen}\,x + 1 = 0$

Temos uma equação do 2º grau em sen x, logo:

$$\text{sen}\,x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow \text{sen}\,x = 1 \text{ ou } \text{sen}\,x = \frac{1}{2}$$

que são duas equações fundamentais.

$$\text{sen}\,x = 1 \Rightarrow \text{sen}\,x = \text{sen}\,\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

ou

$$\text{sen}\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}\,x = \text{sen}\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6} \text{ou } x = k \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ x \mid x = k \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ou } k \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ou } k \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

ii) Resolver, para valores de x de 0° a 720°, a equação tg x = 2sen x.

Temos: $\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} - 2\text{sen}\,x = 0 \quad (\cos x \neq 0)$

$$\text{sen}\,x \left(\frac{1}{\cos x} - 2 \right) = 0$$

Esta equação se decompõe em sen $x = 0$ ou $\dfrac{1}{\cos x} - 2 = 0$.

Temos:
sen $x = 0 \Rightarrow x = k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$ então:
$x = 0°$, $x = 180°$, $x = 360°$, $x = 540°$ ou $x = 720°$
ou

$$\frac{1}{\cos x} - 2 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos 60°, \text{ logo:}$$

$x = k \cdot 360° \pm 60°,\ k \in \mathbb{Z}$

NOTA
Na equação tg x = 2sen x não devemos dividir por sen x porque sen x pode ser igual a zero e, com a divisão, estaríamos eliminando as raízes da equação sen $x = 0$.

Devemos ter:

$k = 0 \Rightarrow x = 60°$

$k = 1 \Rightarrow x = 300°$ ou $420°$

$k = 2 \Rightarrow x = 660°$

S = {0°, 60°, 180°, 300°, 360°, 420°, 540°, 660°, 720°}

iii) Resolver $\sqrt{3}\left(\text{tg } x + \text{ctg } x\right) = 4$.

Temos: $\sqrt{3}\left(\text{tg } x + \dfrac{1}{\text{tg } x}\right) = 4 \Rightarrow \sqrt{3}\left(\text{tg}^2 x + 1\right) = 4\text{tg } x$

$$\sqrt{3}\text{tg}^2 x - 4\text{tg } x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \text{tg } x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2\sqrt{3}} = \frac{4 \pm 2}{2\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\text{tg } x = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

ou

$$\text{tg } x = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ ou } k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

iv) Resolver $\cos x + \sqrt{3}\text{sen } x = 1$, onde $x \in [0, 360°]$.

Isolando cos x no 1º membro e elevando ao quadrado:

$\cos x = 1 - \sqrt{3}\text{sen } x \Rightarrow \cos^2 x = 1 - 2\sqrt{3}\text{sen } x + 3\text{sen}^2 x$

Então: $1 - \text{sen}^2 x = 1 - 2\sqrt{3}\text{sen } x + 3\text{sen}^2 x$

$4\text{sen}^2 x - 2\sqrt{3}\text{sen } x = 0 \Rightarrow 2\text{sen } x\ (2\text{sen } x - \sqrt{3}) = 0$

sen $x = 0 \Rightarrow x = 0°$, $x = 180°$ ou $x = 360°$ (Observe que a solução $x = 180°$ não serve. Ela surgiu devido à elevação ao quadrado.)

ou

$\text{sen } x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 60°$ ou $x = 120°$ (Aqui a solução $x = 60°$ também não serve, pela mesma razão.)

S = {0°, 120°, 360°}

NOTA

Quando se elevam ambos os membros de uma equação ao quadrado, podem surgir raízes estranhas à equação. Com efeito, seja $f(x) = b$. Elevando ao quadrado, temos:

$[f(x)]^2 = b^2$

$[f(x)]^2 - b^2 = 0$

$(f(x) - b)(f(x) + b) = 0$

que dá origem às equações $f(x) = b$ que é a equação original e $f(x) = -b$ que tem raízes estranhas à equação. "Quando se elevam ambos os membros ao quadrado, devemos verificar se as soluções encontradas servem na equação."

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Qual o menor valor positivo de x, para o qual $9^{-\cos x} = \frac{1}{3}$?

2 Determine a soma das raízes da equação $1 - 4\cos^2 x = 0$, compreendidas entre 0 e π.

3 Qual é a soma das raízes da equação $\text{sen}\, x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$, para $0 \leq x < 2\pi$?

4 Determine o número de raízes da equação $\cos x + \text{sen}\, x = 0$, no intervalo $[\pi, 3\pi]$.

5 Resolva a equação $2\cos x\, \text{sen}\, x - \text{sen}\, x = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

6 Resolva a equação $\cos x\, \text{sen}\, x - \cos x + \text{sen}\, x - 1 = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

7 Resolva a equação $2\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 1 = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

8 Resolva a equação $2\cos^2 x + \text{sen}\, x - 1 = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

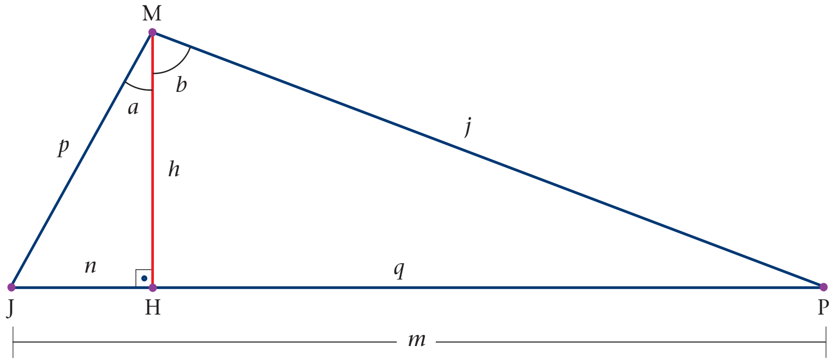
9 Dê a solução da equação $\frac{625^{\cos^2 x}}{25^{\cos x}} = 1$, para $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

10 Resolva a equação $\text{tg}\, x + \frac{3}{\text{tg}\, x} = 3$ para $0 \leq x < 2\pi$.

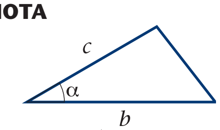
13.3 – Adição e subtração de ângulos ou arcos

13.3.1 – Seno da soma e seno da diferença de arcos

A soma de ângulos ou arcos se reduz à soma de ângulos do primeiro quadrante, sendo, portanto, compreendida entre 0 e π rad.



NOTA



$A = \frac{1}{2} bc \text{ sen } \alpha$

Consideremos, inicialmente, o triângulo MJP com os ângulos JMH = a e HMP = b agudos. Comparando as áreas:

$A_{\Delta JMP} = A_{\Delta JMH} + A_{\Delta HMP}$

$$\frac{1}{2} pj \text{ sen } (a+b) = \frac{1}{2} ph \text{ sen } a + \frac{1}{2} jh \text{ sen } b$$

Dividindo por $\frac{1}{2} pj$, vem:

$$\text{sen } (a+b) = \frac{h}{j} \text{ sen } a + \frac{h}{p} \text{ sen } b$$

mas $\frac{h}{j} = \cos b$ e $\frac{h}{p} = \cos a$ e a fórmula fica:

$$\text{sen } (a+b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

Consideremos agora que os ângulos a e b sejam obtusos. Então $a = 90° + a'$ e $b = 90° + b'$.

Então:

$$\text{sen } (a+b) = \text{sen } (90° + a' + 90° + b') = \text{sen } [180° + (a' + b')] = -\text{sen } (a' + b')$$

$$\text{sen}(a+b) = -\text{sen } a' \cdot \cos b' - \text{sen } b' \cdot \cos a'$$

Mas $a' = -90° + a$ e $b' = -90° + b$, logo:

$\text{sen } (a+b) = -\text{sen } (-90° + a) \cdot \cos (-90° + b) - \text{sen } (-90° + b) \cdot \cos (-90° + a)$

$\text{sen } (a+b) = -(-\cos a) \cdot (\text{sen } b) - (-\cos b) \cdot \text{sen } a$

$\text{sen } (a+b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

A fórmula é, então, válida para qualquer ângulo.

NOTA

O mesmo método pode ser utilizado para mostrar que a fórmula para sen $(a + b)$ se mantém para ângulos de outros quadrantes.

Para sen $(a - b)$, basta fazer:

$$\text{sen}\ (a - b) = \text{sen}\ [a + (-b)] = \text{sen}\ a \cdot \cos\ (-b) + \text{sen}\ (-b) \cdot \cos\ a$$

$$\boxed{\text{sen}\ (a - b) = \text{sen}\ a \cdot \cos\ b - \text{sen}\ b \cdot \cos\ a}$$

Exemplos:

i) $\text{sen}\ 15° = \text{sen}\ (45° - 30°) = \text{sen}\ 45° \cdot \cos\ 30° - \text{sen}\ 30° \cdot \cos\ 45°$

$$\text{sen}\ 15° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

ii) $\text{sen}\ 75° = \text{sen}\ (45° + 30°) = \text{sen}\ 45° \cdot \cos\ 30° + \text{sen}\ 30° \cdot \cos\ 45°$

$$\text{sen}\ 75° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

13.3.2 – Cosseno da soma e cosseno da diferença de arcos

$\cos\ (a + b) = \text{sen}\ [90° - (a + b)] = \text{sen}\ [(90° - a) - b]$

$\cos\ (a + b) = \text{sen}\ (90° - a) \cdot \cos\ b - \text{sen}\ b \cdot \cos(90° - a)$

$$\boxed{\cos\ (a + b) = \cos\ a \cdot \cos\ b - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b}$$

$\cos\ (a - b) = \cos\ [a + (-b)] = \cos\ a \cdot \cos\ (-b) - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ (-b)$

$$\boxed{\cos\ (a - b) = \cos\ a \cdot \cos\ b + \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b}$$

13.3.3 – Tangente da soma e tangente da diferença de arcos

$$\text{tg}\ (a + b) = \frac{\text{sen}\ (a + b)}{\cos\ (a + b)} = \frac{\text{sen}\ a \cdot \cos\ b + \text{sen}\ b \cdot \cos\ a}{\cos\ a \cdot \cos\ b - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b}$$

Dividindo ambos os termos dessa fração por $\cos\ a \cdot \cos\ b$, temos:

$$\text{tg}\ (a + b) = \frac{\dfrac{\text{sen}\ a \cdot \cos\ b}{\cos\ a \cdot \cos\ b} + \dfrac{\text{sen}\ b \cdot \cos\ a}{\cos\ a \cdot \cos\ b}}{\dfrac{\cos\ a \cdot \cos\ b}{\cos\ a \cdot \cos\ b} - \dfrac{\text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b}{\cos\ a \cdot \cos\ b}}$$

Substituindo $\dfrac{\text{sen}\ a}{\cos\ a} = \text{tg}\ a$ e $\dfrac{\text{sen}\ b}{\cos\ b} = \text{tg}\ b$, vem:

$$\boxed{\text{tg}\ (a + b) = \frac{\text{tg}\ a + \text{tg}\ b}{1 - \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}} \quad \text{e} \quad \boxed{\text{tg}\ (a - b) = \frac{\text{tg}\ a - \text{tg}\ b}{1 + \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}}$$

Exercícios resolvidos:

1) Sabendo que $a + b = 30°$, calcule o valor da expressão
$E = (\text{sen } a - \cos b)^2 + (\text{sen } b - \cos a)^2$.

Solução:
$E = \text{sen}^2 a - 2\text{sen } a \cdot \cos b + \cos^2 b + \text{sen}^2 b - 2\text{sen } b \cdot \cos a + \cos^2 a$

Como $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$ e $\text{sen}^2 b + \cos^2 b = 1$, vem:
$E = (\text{sen}^2 a + \cos^2 a) + (\text{sen}^2 b + \cos^2 b) - 2(\text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a)$
$E = 1 + 1 - 2\text{sen}(a + b) = 2 - 2 \cdot \text{sen } 30° = 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 - 1 = 1$

2) Num triângulo ABC tem-se $\text{tg } \hat{A} = \frac{1}{2}$ e $\text{tg } \hat{B} = \frac{1}{3}$. Calcular o ângulo C.

Solução:
Temos que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180° - \hat{C}$
Então: $\text{tg } (\hat{A} + \hat{B}) = \text{tg } (180° - \hat{C})$

$$\frac{\text{tg } \hat{A} + \text{tg } \hat{B}}{1 - \text{tg } \hat{A} \cdot \text{tg } \hat{B}} = -\text{tg } \hat{C} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = -\text{tg } \hat{C}$$

$1 = -\text{tg } \hat{C} \Rightarrow \text{tg } \hat{C} = -1 \Rightarrow \hat{C} = 135°$

3) Sendo $\text{sen } \hat{A} = \frac{3}{5}$ com $\hat{A}$ do 2º quadrante e $\cos \hat{B} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$ com $\hat{B}$ do 3º quadrante, calcular $\text{tg } (\hat{A} - \hat{B})$.

Solução:

$$\text{tg } (\hat{A} - \hat{B}) = \frac{\text{tg } \hat{A} - \text{tg } \hat{B}}{1 + \text{tg } \hat{A} \cdot \text{tg } \hat{B}}$$

Como $\text{sen } \hat{A} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{-4}{5}$, pois $\hat{A}$ é do 2º quadrante.

Como $\cos \hat{B} = -\frac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \text{sen } \hat{B} = \frac{-7\sqrt{2}}{10}$, pois $\hat{B}$ é do 3º quadrante.

Então: $\text{tg } \hat{A} = \dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \dfrac{-3}{4}$ e $\text{tg } \hat{B} = \dfrac{-\frac{7\sqrt{2}}{10}}{-\frac{\sqrt{2}}{10}} = 7$

Logo: $\text{tg } (\hat{A} - \hat{B}) = \dfrac{-\frac{3}{4} - 7}{1 - \frac{3}{4} \cdot 7} = \dfrac{-\frac{31}{4}}{-\frac{17}{4}} = \dfrac{31}{17}$

4) Simplificar $E = \dfrac{\text{sen }(210° + a) - \text{sen }(330° + a)}{\text{sen }(150° - a) + \text{sen }(330° + a)}$.

Solução:

$$E = \frac{\text{sen } 210° \cdot \cos a + \text{sen } a \cdot \cos 210° - \text{sen } 330° \cdot \cos a - \text{sen } a \cdot \cos 330°}{\text{sen } 150° \cdot \cos a - \text{sen } a \cdot \cos 150° + \text{sen } 330° \cdot \cos a + \text{sen } a \cdot \cos 330°}$$

$$E = \frac{-\text{sen } 30° \cdot \cos a - \text{sen } a \cdot \cos 30° + \text{sen } 30° \cdot \cos a - \text{sen } a \cdot \cos 30°}{\text{sen } 30° \cdot \cos a + \text{sen } a \cdot \cos 30° - \text{sen } 30° \cdot \cos a + \text{sen } a \cdot \cos 30°}$$

$$E = \frac{-2 \text{ sen } a \cdot \cos 30°}{2 \text{ sen } a \cdot \cos 30°} \Rightarrow E = -1$$

5) Eliminar x e y entre as equações:

$$\begin{cases} \text{sen } x + \text{sen } y = a & \text{(I)} \\ \cos x + \cos y = b & \text{(II)} \\ \cos (x - y) = c & \text{(III)} \end{cases}$$

Solução:

Elevando as equações (I) e (II) ao quadrado e somando, vem:

$$\text{sen}^2 x + 2\text{sen } x \cdot \text{sen } y + \text{sen}^2 y + \cos^2 x + 2\cos x \cdot \cos y + \cos^2 y = a^2 + b^2$$

$$(\text{sen}^2 x + \cos^2 x) + (\text{sen}^2 y + \cos^2 y) + 2(\cos x \cdot \cos y + \text{sen } x \cdot \text{sen } y) = a^2 + b^2$$

$$1 + 1 + 2\cos(x - y) = a^2 + b^2$$

$$2 + 2c = a^2 + b^2$$

As fórmulas da adição de arcos permitem simplificar expressões do tipo $y = a\text{sen } x + b\cos x$.

O processo consiste em multiplicar e dividir a expressão por $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$y = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ sen } x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x\right)$$

e chamar $\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \theta$ e $\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \text{sen } \theta$.

Isto pode ser feito porque $\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$.

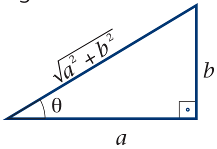
A expressão fica:

$$y = \sqrt{a^2 + b^2}(\text{sen } x \cdot \cos \theta + \text{sen } \theta \cdot \cos x)$$

$$\boxed{y = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ sen } (x + \theta)}$$

NOTA

θ é o ângulo definido pelo triângulo:



Exercícios resolvidos:

1) Resolver a equação $\cos x - \sqrt{3}\text{sen } x = \sqrt{2}$.

Solução:

Dividindo ambos os membros por $\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$, temos:

$\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então:

$\text{sen } 30° \cdot \cos x - \cos 30° \cdot \text{sen } x = \text{sen } 45°$

$\text{sen}(30° - x) = \text{sen } 45°$, logo:

$45° - (30° - x) = k \cdot 360° \Rightarrow x = k \cdot 360° - 15°, k \in \mathbb{Z}$

ou

$45° + 30° - x = k \cdot 360° + 180° \Rightarrow x = -k \cdot 360° - 105°, k \in \mathbb{Z}$

$S = \{x \mid x = k \cdot 360° - 15° \text{ ou } k \cdot 360° - 105°, k \in \mathbb{Z}\}$

NOTA

Como $k \in \mathbb{Z}$, fica indiferente escrever k ou $-k$.

2) Calcular o menor e o maior valor que assume a expressão $y = 3\text{sen } x + 4\cos x$.

Solução:

Dividindo ambos os membros por $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, vem:

$$\frac{y}{5} = \frac{3}{5}\text{sen } x + \frac{4}{5}\cos x$$

Como $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$ são respectivamente cos e sen de certo ângulo a, temos:

$$\frac{y}{5} = \text{sen } x \cdot \cos a + \text{sen } a \cdot \cos x$$
$$y = 5 \text{ sen } (x + a)$$

O menor e o maior valor de y se darão para o menor e o maior valor do sen $(x + a)$, que são respectivamente –1 e 1, logo o menor valor de y será –5 e o maior, 5.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Calcule.

a) cos 75°   b) sen 15°   c) cos 105°

2 Calcule.

a) sen 105°   b) cos 135°   c) cos 15°

3 Sendo $x, y \in \,]0°, 90°[$, $\text{sen } x = \frac{1}{3}$ e $\cos y = \frac{1}{2}$, determine:

a) sen $(x + y)$ b) cos $(x + y)$

4 A expressão $\text{sen }(a + b) \cdot \text{sen }(a - b)$ na sua forma mais simples é:

(A) $\cos b - \cos a$

(B) $\text{sen } b - \text{sen } a$

(C) $\cos^2 b - \cos^2 a$

(D) $\text{sen}^2 b - \text{sen}^2 a$

(E) $\cos^2 a - \cos^2 b$

5 Determine o valor de $\cos (x - y)$, sendo:

$\cos (3\pi - x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in 3^{\underline{o}}$ Q e $\cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = \frac{3}{5}$, $y \in 3^{\underline{o}}$ Q.

6 Calcule.

a) tg 75°

b) tg 15°

7 Sabendo que $\text{tg } x = 2\sqrt{3}$, calcule $\text{tg }(60° - x)$.

8 Sendo $\text{tg } x = 3$, determine o valor de $\text{tg }(45° + x)$.

9 Se $\text{sen } a = \frac{3}{5}$, $\text{sen } b = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ e $\frac{\pi}{2} < b < \pi$, qual é o valor de $\text{sen }(a + b)$?

10 Se $\text{tg }(x + y) = 33$ e $\text{tg } x = 3$, calcule $\text{tg } y$.

13.4 – Arco duplo

Para se obter as linhas trigonométricas do arco $2a$, basta fazer $b = a$ nas fórmulas de sen $(a + b)$, cos $(a + b)$ e tg $(a + b)$. Assim temos:

$\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a$

$\text{sen}\,2a = \text{sen}\,(a + a) = \text{sen}\,a \cdot \cos a + \text{sen}\,a \cdot \cos a$

$$\boxed{\text{sen}\,2a = 2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \cos a}$$

NOTA
Esta fórmula também se escreve assim:
$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) =$
$= 2\cos^2 a - 1$
ou
$\cos 2a = (1 - \text{sen}^2 a) - \text{sen}^2 a =$
$= 1 - 2\text{sen}^2 a$

$\cos\,(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

$\cos 2a = \cos\,(a + a) = \cos a \cdot \cos a - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,a$

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a}$$

$$\text{tg}\,(a + b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$$

$$\text{tg}\,2a = \text{tg}\,(a + a) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,a}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,a}$$

$$\boxed{\text{tg}\,2a = \frac{2\text{tg}\,a}{1 - \text{tg}^2 a}}$$

Para obtermos as linhas dos arcos $3a$, $4a$, ..., na, basta fazer $b = 2a$, $3a$, ..., $(n - 1)a$ e utilizar as fórmulas obtidas.

Exercícios resolvidos:

1) Sabendo que $\text{sen}\,a - \cos a = \frac{1}{5}$, calcular sen $2a$.

<u>Solução:</u>

Basta elevar ao quadrado ambos os membros da igualdade:

$$(\text{sen}\,a - \cos a)^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow \text{sen}^2 a - 2\text{sen}\,a \cdot \cos a + \cos^2 a = \frac{1}{25}$$

Como $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, vem:

$$1 - \text{sen}\,2a = \frac{1}{25} \Rightarrow \text{sen}\,2a = \frac{24}{25}$$

2) Resolver a equação $(1 - \cos 2x)\cos x = (1 + \cos 2x)\text{sen}\,x$.

<u>Solução:</u>

Como $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$, temos:

$(1 - \cos^2 x + \text{sen}^2 x)\cos x = (1 + \cos^2 x - \text{sen}^2 x)\text{sen}\,x$

$(\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x)\cos x = (\cos^2 x + \cos^2 x)\text{sen}\,x$

$2\,\text{sen}^2 x \cos x = 2\cos^2 x\,\text{sen}\,x$

Transpondo e fatorando:
$2\text{sen } x \cdot \cos x \cdot (\text{sen } x - \cos x) = 0$
$\text{sen } 2x \cdot (\text{sen } x - \cos x) = 0$

$\text{sen } 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z};$

ou

$\text{sen } x - \cos x = 0 \Rightarrow \text{sen } x = \cos x \Rightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

$S = \left\{ x \mid x = \dfrac{k\pi}{2} \text{ ou } k\pi + \dfrac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

3) Verificar a identidade tg $(x + 45°) = \text{tg } 2x + \sec 2x$.

Solução:

$$\text{tg } (x+45°) = \frac{\text{tg } x + \text{tg } 45°}{1 - \text{tg } x \cdot \text{tg } 45°} = \frac{1 + \text{tg } x}{1 - \text{tg } x} = \frac{1 + \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}}{1 - \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}}$$

$$\text{tg } (x+45°) = \frac{\cos x + \text{sen } x}{\cos x - \text{sen } x} = \frac{(\cos x + \text{sen } x)(\cos x + \text{sen } x)}{(\cos x - \text{sen } x)(\cos x + \text{sen } x)}$$

$$\text{tg } (x+45°) = \frac{\cos^2 x + 2\text{sen } x \cdot \cos x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x} = \frac{1 + \text{sen } 2x}{\cos 2x}$$

$$\text{tg } (x+45°) = \frac{1}{\cos 2x} + \frac{\text{sen } 2x}{\cos 2x} = \sec 2x + \text{tg } 2x$$

4) Entre que valores está compreendida a expressão $y = (\text{sen } x - \cos x)^2$?

Solução:
$y = \text{sen}^2 x + \cos^2 x - 2\text{sen } x \cdot \cos x$
$y = 1 - \text{sen } 2x \Rightarrow \text{sen } 2x = 1 - y$
Como $-1 \leq \text{sen } 2x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 1 - y \leq 1$.
Somando –1 a todos os membros da desigualdade:
$-1 - 1 \leq -1 + 1 - y \leq -1 + 1 \Rightarrow -2 \leq -y \leq 0$
Multiplicando por –1, vem: $2 \geq y \geq 0$

Resposta:
Entre 0 e 2 inclusive, isto é, máximo 2 e mínimo 0.

13.5 – Arco metade

Sabemos que $\cos^2\frac{a}{2}+\text{sen}^2\frac{a}{2}=1$. Por outro lado, temos:

$$\cos a = \cos\left(2\cdot\frac{a}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

O sistema $\begin{cases} 1=\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)+\text{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right) & \text{(I)} \\ \cos a=\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)-\text{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right) & \text{(II)} \end{cases}$ nos dá,

somando (I) e (II):

$$1+\cos a = 2\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}}$$

OBSERVAÇÃO
Quando o arco é conhecido, sua metade será conhecida e não haverá duplicidade de valores.

Subtraindo (I) e (II):

$$1-\cos a = 2\text{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}}$$

Então: $\boxed{\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}}$

Exemplos:

i) Sabendo que $\sec a = \frac{3}{2}$ e que a pertence ao 4º quadrante, calcular:

$$\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right), \cos\left(\frac{a}{2}\right) \text{ e } \text{tg}\left(\frac{a}{2}\right).$$

Observe que um arco do 4º quadrante pode estar entre $k\cdot 360° + 270°$ e $k\cdot 360° + 360°$, $k \in \mathbb{Z}$.
Se o arco do 4º quadrante é do tipo $270° < a < 360° \Rightarrow 135° < \frac{a}{2} < 180°$ que é do 2º quadrante.

Assim, $\cos a = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$

$$\cos\left(\frac{a}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}}{2}} = -\sqrt{\frac{5}{6}} = -\frac{\sqrt{30}}{6}$$

$$\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right) = -\sqrt{\frac{6}{30}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Aqui foram observados os sinais do seno, cosseno e tangente no 2º quadrante.

Se o arco do 4º quadrante é do tipo 360° + 270° < a < 360° + 360° ⇒ ⇒ 180° + 135° < $\frac{a}{2}$ < 180º + 180° que é do 4º quadrante, logo:

$$\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{6},\ \cos\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\sqrt{30}}{6} \text{ e } \text{tg}\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Aqui os sinais são das linhas do 4º quadrante.

NOTA
Conforme o tipo do arco no quadrante as metades serão diferentes.

ii) Sendo $2\text{sen}^2\left(\frac{90° + x}{2}\right) + 2\sqrt{3}\,\text{sen}\left(\frac{90° + x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{90° + x}{2}\right) = 3$, calcular x.

Como $\text{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos a}{2}$ e $2\text{sen } a \cdot \cos a = \text{sen } 2a$, temos:

$$2 \cdot \frac{1 - \cos(90° + x)}{2} + \sqrt{3}\,\text{sen}\left(2 \cdot \frac{90° + x}{2}\right) = 3$$

$$1 + \text{sen } x + \sqrt{3}\cos x = 3 \Rightarrow \text{sen } x + \sqrt{3}\cos x = 2$$

Dividindo por $\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$, vem:

$$\frac{1}{2}\,\text{sen } x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1 \Rightarrow \cos 60° \cdot \text{sen } x + \text{sen } 60° \cdot \cos x = 1$$

$\text{sen}(x + 60°) = 1 \Rightarrow x + 60° = k \cdot 360° + 90°$

$x = k \cdot 360° + 30°,\ k \in \mathbb{Z}$

$S = \{x \mid x = k \cdot 360° + 30°,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Mostraremos a seguir que as linhas trigonométricas de um arco são funções racionais da tangente do arco metade.

Consideremos as relações:

$$\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)+\text{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right)=1 \qquad \text{(I)}$$

$$\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)-\text{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right)=\cos a \qquad \text{(II)}$$

$$2\,\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a}{2}\right)=\text{sen}\,a \qquad \text{(III)}$$

Dividindo-as por $\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)$, temos:

$$1+\text{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)} \qquad \text{(IV)}$$

$$1-\text{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{\cos a}{\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)} \qquad \text{(V)}$$

$$2\,\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{\text{sen}\,a}{\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)} \qquad \text{(VI)}$$

Dividindo a igualdade (V) pela (IV), vem:

$$\boxed{\cos a=\frac{1-\text{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\text{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)}}$$

Dividindo a igualdade (VI) pela (IV), vem:

$$\boxed{\text{sen}\,a=\frac{2\,\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\text{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)}}$$

Dividindo a igualdade (VI) pela (V), vem:

$$\boxed{\text{tg}\,a=\frac{2\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right)}{1-\text{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)}}$$

NOTA
As outras linhas se obtêm invertendo-se estas igualdades.

Exercícios resolvidos:

1) Mostrar que $\dfrac{1+\text{sen }x}{1-\text{sen }x} = \text{tg}^2\left(45° + \dfrac{x}{2}\right)$.

Solução:

Substituindo $\text{sen }x = \dfrac{2\,\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$, vem:

$$\frac{1+\text{sen }x}{1-\text{sen }x} = \frac{1+\dfrac{2\,\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{1-\dfrac{2\,\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1+\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\,\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)-2\,\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} = \left(\frac{1+\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\text{tg }45° + \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\text{tg }45°\cdot\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 = \left[\text{tg}\left(45° + \frac{x}{2}\right)\right]^2 = \text{tg}^2\left(45° + \frac{x}{2}\right)$$

2) Resolver a equação $\cos 2x + \sqrt{3}\,\text{sen }2x = 1$.

Solução:

Substituindo $\cos 2x = \dfrac{1-\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x}$ e $\text{sen }2x = \dfrac{2\text{tg }x}{1+\text{tg}^2 x}$ e fazendo $\text{tg }x = t$, vem:

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} + \sqrt{3}\cdot\frac{2t}{1+t^2} = 1 \Rightarrow 1-t^2+2\sqrt{3}\,t = 1+t^2$$

$$2t^2 - 2\sqrt{3}t = 0 \Rightarrow t = 0 \ \text{ ou } \ t = \sqrt{3}$$

$$\text{tg }x = 0 \Rightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{tg }x = \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{x \mid x = k\pi \text{ ou } k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Sendo sen $x = \frac{3}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule sen $2x$.

2 Sabendo que sen $a = \frac{4}{5}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, calcule:

a) sen $2a$

b) cos $2a$

c) tg $2a$

3 Sendo sen $x = \frac{1}{2}$ e sen $y = \frac{1}{4}$, com x e y pertencentes ao 1º quadrante, calcule cos $(2x + y)$.

4 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação sen $2x$ – sen $x = 0$.

5 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação sen $2x$ – 2sen $x = 0$.

6 Dê o valor da expressão $(\cos 15° + \text{sen } 15°)^2$.

7 Se tg $x = m$ e tg $2x = 3m$, $m > 0$, calcule o valor do ângulo agudo x.

8 Sendo $\cos a = \frac{1}{2}$, com $0 < a < \frac{\pi}{2}$, calcule $\cos \frac{a}{2}$.

9 Sabendo que sen $x = \frac{5}{13}$ e $x \in 2^{\underline{o}}$ quadrante, calcule tg $\frac{x}{2}$.

10 Resolva a equação $(\cos x + \text{sen } x)^2 = \frac{1}{2}$.

13.6 – Transformações de somas em produtos

As fórmulas de somas de arcos e de subtração de arcos nos permitem transformar somas e subtrações em produtos combinando-as convenientemente.

Sejam: $\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a$ (I)

$\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b - \text{sen}\,b \cdot \cos a$ (II)

$\cos\,(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$ (III)

$\cos\,(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$ (IV)

Somando as igualdades (I) e (II):

$\text{sen}\,(a+b) + \text{sen}\,(a-b) = 2\text{sen}\,a \cdot \cos b$ (V)

Subtraindo (I) e (II):

$\text{sen}\,(a+b) - \text{sen}\,(a-b) = 2\text{sen}\,b \cdot \cos a$ (VI)

Somando (III) e (IV):

$\cos\,(a+b) + \cos\,(a-b) = 2\cos a \cdot \cos b$ (VII)

Subtraindo (III) e (IV):

$\cos\,(a+b) - \cos\,(a-b) = -2\text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$ (VIII)

Fazendo agora $a + b = p$ e $a - b = q$, vem:

$$a = \frac{p+q}{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{p-q}{2}$$

Substituindo nas relações obtidas, temos:

$$\text{sen}\,p + \text{sen}\,q = 2\,\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\text{sen}\,p - \text{sen}\,q = 2\,\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\,\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

NOTA
Para tangente temos:
$\text{tg}\,a \pm \text{tg}\,b =$

$$= \frac{\text{sen}\,a}{\cos a} \pm \frac{\text{sen}\,b}{\cos b} =$$

$$= \frac{\text{sen}\,a \cdot \cos b \pm \text{sen}\,b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$\boxed{\text{tg}\,a \pm \text{tg}\,b = \frac{\text{sen}\,(a \pm b)}{\cos a \cdot \cos b}}$$

com correspondência de sinais.

Exercícios resolvidos:

1) Calcular sen 75° – sen 15°.
Solução:

$$\text{sen}\,75° - \text{sen}\,15° = 2\,\text{sen}\,\frac{75°-15°}{2} \cdot \cos\frac{75°+15°}{2} = 2\text{sen}\,30° \cdot \cos 45°$$

$$\text{sen } 75° - \text{sen } 15° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) Simplificar $\dfrac{\cos a + \cos b}{\text{sen } a + \text{sen } b}$.

Solução:

$$\frac{\cos a + \cos b}{\text{sen } a + \text{sen } b} = \frac{2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\,\text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)} = \text{ctg}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

3) Se a, b e c são ângulos de um triângulo, mostre que:
$\text{E} = \text{sen } 2a + \text{sen } 2b + \text{sen } 2c = 4\text{sen } a \cdot \text{sen } b \cdot \text{sen } c$

Solução:
Temos que $a + b + c = 180° \Rightarrow c = 180° - (a + b)$

$$\text{sen } 2a + \text{sen } 2b = 2\text{sen}\left(\frac{2a+2b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2a-2b}{2}\right) = 2\text{sen } (a+b) \cdot \cos (a-b)$$

$$\text{sen } 2c = \text{sen}\left[360° - 2(a+b)\right] = -\text{sen } 2(a+b) = -2\text{sen } (a+b) \cdot \cos (a+b)$$

$$\text{sen } 2a + \text{sen } 2b + \text{sen } 2c = 2\text{sen } (a+b) \cdot \cos (a-b) - 2\text{sen } (a+b) \cdot \cos (a+b)$$

$$\text{E} = 2\text{sen } (a+b)\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\text{E} = 2\text{sen}(180° - c)\left[-2\text{sen } \frac{(a-b)-(a+b)}{2} \cdot \text{sen } \frac{(a-b)+(a+b)}{2}\right]$$

$$\text{E} = 2\text{sen } c\left[-2\text{sen } (-b) \cdot \text{sen } a\right] = 4\text{sen } a \cdot \text{sen } b \cdot \text{sen } c$$

4) Resolver a equação $\text{sen } x + \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Solução:
Temos que $\text{sen } x + \text{sen } (90° - x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\text{sen } \frac{x + 90° - x}{2} \cdot \cos \frac{x - (90° - x)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\text{sen } 45° \cdot \cos (x - 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2\frac{\sqrt{2}}{2} \cos (x - 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(x - 45°) = \frac{1}{2} \Rightarrow x - 45° = k \cdot 360° \pm\ 60° \Rightarrow\ x = k \cdot 360° + 105,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou}$$

$$x = k\ .\ 360° - 15°,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{x \mid x = k \cdot 360° + 105° \text{ ou } k \cdot 360 - 15°,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

13.7 – Transformações de produtos em somas

Das relações (V), (VII) e (VIII) tiramos:

$$\text{sen } a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b)\right]$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a + b) + \cos(a - b)\right]$$

$$\text{sen } a \cdot \text{sen } b = \frac{1}{2}\left[\cos(a - b) - \cos(a + b)\right]$$

Exercícios resolvidos:

1) Calcular no intervalo $[0, 2\pi]$ a solução da equação:
$4\text{sen } x \cdot \cos 3x - 2\text{sen } 4x = 1$

Solução:

$$4 \cdot \frac{1}{2}\left[\text{sen } 4x + \text{sen}(-2x)\right] - 2\text{sen } 4x = 1$$

$$2\text{sen } 4x - 2\text{sen } 2x - 2\text{sen } 4x = 1$$

$$-2\text{sen } 2x = 1 \Rightarrow \text{sen } 2x = \frac{-1}{2} \Rightarrow 2x = k \cdot 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{12},\ k \in\ \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad 2x = k2\pi - \frac{5\pi}{6} \quad \Rightarrow\ x = k\pi - \frac{5\pi}{12},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{\ x \mid x = k\pi - \frac{\pi}{12} \text{ ou } k\pi - \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}\ \right\}$$

2) Simplificar $y = \text{sen } 6x \cdot \text{sen } 4x - \text{sen } 15x \cdot \text{sen } 13x + \text{sen } 19x \cdot \text{sen } 9x$.

Solução:

$$y = \frac{1}{2}\left[\cos 2x - \cos 10x\right] - \frac{1}{2}\left[\cos 2x - \cos 28x\right] + \frac{1}{2}\left[\cos 10x - \cos 28x\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\cos 2x - \cos 10x - \cos 2x + \cos 28x + \cos 10x - \cos 28x\right)$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot 0 \Rightarrow y = 0$$

3) Simplificar a soma:

$$S = \text{sen } a + \text{sen } 3a + \text{sen } 5a + \text{sen } 7a + \text{sen } 9a$$

Solução:

Este exercício pode ser resolvido com o artifício de multiplicar ambos os membros da igualdade por sen a.

$$S \cdot \text{sen } a = \text{sen } a \cdot \text{sen } a + \text{sen } a \cdot \text{sen } 3a + \text{sen } a \cdot \text{sen } 5a +$$
$$+ \text{sen } a \cdot \text{sen } 7a + \text{sen } a \cdot \text{sen } 9a$$

Transformando os produtos em somas:

$$S \cdot \text{sen } a = \frac{1}{2}\left[\cos 0 - \cos 2a\right] + \frac{1}{2}\left[\cos(-2a) - \cos 4a\right] + \frac{1}{2}\left[\cos(-4a) - \cos 6a\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\cos(-6a) - \cos 8a\right] + \frac{1}{2}\left[\cos(-8a) - \cos 10a\right]$$

$$S \cdot \text{sen } a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a + \cos 2a - \cos 4a + \cos 4a -$$
$$- \cos 6a + \cos 6a - \cos 8a + \cos 8a - \cos 10a)$$

$$S \cdot \text{sen } a = \frac{1}{2}(1 - \cos 10a) \Rightarrow S = \frac{1 - \cos 10a}{2\text{sen } a}$$

NOTA
Este artifício permite calcular somas de senos ou cossenos quando os arcos estão em progressão aritmética.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Fatore a expressão $\cos 6x + \cos 2x$.

2 Fatore a expressão $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x$.

3 Fatore a expressão $\cos 3x + \cos 7x$.

4 Fatore $\cos 10° - \cos 40°$.

5 Simplifique $\dfrac{\cos 40° + \cos 50°}{\cos 40° - \cos 50°}$.

6 Calcule o valor da expressão $\cos 15° + \cos 75°$.

7 Transforme em produto a expressão $\operatorname{sen} 20° + \cos 40°$.

8 Sendo $a - b = \dfrac{\pi}{2}$, calcule o valor da expressão:

$$A = \frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{\cos a + \cos b}$$

9 Determine o máximo valor que pode assumir a expressão $\cos x + \operatorname{sen} x$.

10 Fatore a expressão $y = \cos x + 1$.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 Calculando o valor de cos 15°, encontramos:

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(C) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(D) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2 (Ufes) cos (75°) é igual a:

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}$

(E) $\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}$

3 (Fuvest-SP) O valor de (sen 22°30′ + cos 22°30′)^2 é:

(A) $\frac{3}{2}$

(B) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

(D) 1

(E) 2

4 O valor numérico da expressão:

$$\frac{\text{sen}\,75°\cdot\sec 1\,500°}{\frac{1}{2}\csc 1\,110°\cdot\cos 1830°} \text{ é:}$$

(A) $\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}$

(B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(C) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}$

(E) $\frac{3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}$

5 Sabe-se que $\text{tg}\,75° = 2+\sqrt{3}$ e tg 60° = $\sqrt{3}$. O valor de tg 15° é:

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $-\sqrt{3}$

(C) $\sqrt{3}$

(D) $2+\sqrt{3}$

(E) $2-\sqrt{3}$

6 (Ufma) Sabendo que $x - y = \pi$, assinale o valor da expressão:
$(\cos x - \cos y)^2 + (\text{sen}\, x - \text{sen}\, y)^2$

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 4

7 (ITA-SP) Considerando x e y arcos do primeiro quadrante, sen $x = \frac{4}{5}$ e cos $y = \frac{1}{4}$, podemos assegurar que o valor de cos $(x + y)$ é:

(A) $-4\sqrt{15}$

(B) $\frac{3\sqrt{15}}{20}$

(C) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

(D) $\frac{3+4\sqrt{15}}{10}$

(E) $\frac{3-4\sqrt{15}}{20}$

8 (FEI-SP) Se $\cos x = \frac{3}{5}$, então sen $\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ é igual a:

(A) $\frac{3}{5}$

(B) $-\frac{3}{5}$

(C) $\frac{4}{5}$

(D) $-\frac{4}{5}$

(E) n.d.a.

9 sen $(5\pi - x)$, qualquer que seja x, é igual a:

(A) cos x

(B) sen x

(C) cos x

(D) n.d.a.

10 (Uece) Se $\text{tg}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\text{tg}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=2$, $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$, então tg θ é igual a:

(A) $\sqrt{2}-1$

(B) $\sqrt{2}+1$

(C) $2\sqrt{2}-1$

(D) $2\sqrt{2}+1$

11 Se $M=\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e a = sen x, então:

(A) $M=\frac{2a^2}{\sqrt{1-a^2}}$

(B) $M=\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}$

(C) $M=\frac{1}{a\sqrt{1-a^2}}$

(D) $M=\frac{1}{a}$

(E) $M=\frac{a+\sqrt{1-a^2}}{a\sqrt{1-a^2}}$

12 (UFF-RJ) Se $\hat{M}$, $\hat{N}$ e $\hat{P}$ são ângulos internos de um triângulo não retângulo, pode-se afirmar que tg $\hat{M}$ + tg $\hat{N}$ + tg $\hat{P}$ é:

(A) –1

(B) 0

(C) $\frac{1}{\text{tg}\,\hat{M}+\text{tg}\,\hat{N}+\text{tg}\,\hat{P}}$

(D) tg $\hat{M}$ · tg $\hat{N}$ · tg $\hat{P}$

(E) tg $\hat{M}$ · (tg $\hat{N}$ · tg $\hat{P}$)

13 (Uerj) Seja x tal que sen x + cos x = 1. Determine todos os valores possíveis para sen $2x$ + cos $2x$.

14 (Unificado-RJ) Considerando $\text{sen}\, x = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\, \frac{25\pi}{6}$, o valor de cos $2x$ será:

(A) $\frac{7}{8}$ (C) $\frac{3}{8}$ (E) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{3}{4}$

15 (UFF-RJ) O valor de (sen 22,5° + cos 22,5°)^2 é:

(A) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ (E) 1

(B) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

16 (UM-RJ) A expressão $y = \frac{2\,\text{tg}\, 2x}{1 + \text{tg}^2 2x}$, admitidas as condições de existência, é sempre igual a:

(A) sen x (C) sen $\frac{x}{2}$ (E) sen $4x$

(B) sen $2x$ (D) sen $\frac{x}{4}$

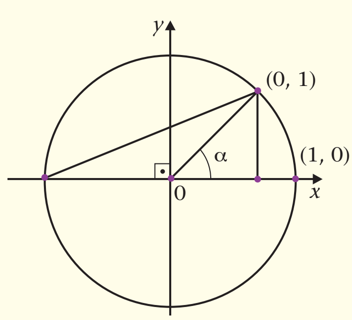
17 (FGV-SP) Sendo x um arco do primeiro quadrante e sen $x = a$, a expressão 2 cos^2 x + sen^2 $2x$ é igual a:

(A) $2(1 - 2a^4)$ (D) $4(1 - a^2 - a^4)$

(B) $-2(-1 + 2a^2 - 2a^4)$ (E) n.d.a.

(C) $2(1-2a^2)+4a\sqrt{1-a^2}$

18 (UM-SP) Seja $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Da figura, pode-se concluir diretamente que:



(A) $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{tg}\,\alpha}{2}$ (D) $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{-\text{sen}\,\alpha}{1-\cos\alpha}$

(B) $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{1+\cos\alpha}$ (E) $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\text{sen}\,\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}}$

(C) $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$

19 (FEI-SP) A equação sen $2x$ = sen x, no intervalo $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}$, tem:

(A) nenhuma solução. (D) 4 soluções.

(B) 2 soluções. (E) 5 soluções.

(C) 3 soluções.

20 (UnB-DF) Para $0 \le t \le 2\pi$, a expressão $\frac{1}{2}\sqrt{2(1-\cos t)}$ é igual a:

(A) $\cos\left(\frac{1}{2}\right)$ (C) $\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$

(B) $\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right|$ (D) n.d.a.

21 (Ufscar-SP) Se $\text{ctg}\,\frac{a}{2} = \sqrt{3}$, então:

(A) $\text{sen}\, a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) sen a = 1

(B) $\text{sen}\, a = \frac{\sqrt{2}}{3}$ (E) n.d.a.

(C) $\text{sen}\, a = \frac{1}{2}$

22 (Fuvest-SP) No quadrilátero ABCD onde os ângulos B e D são retos e os lados têm as medidas indicadas, o valor de sen Â é:

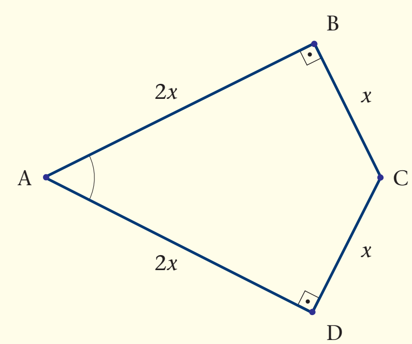
(A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(C) $\frac{4}{5}$

(D) $\frac{2}{5}$

(E) $\frac{1}{2}$



23 (Fuvest-SP) Os números reais sen $\frac{\pi}{12}$, sen α e sen $\frac{5\pi}{12}$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então o valor de sen α é:

(A) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

(B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

24 (Fuvest-SP) Sendo $\operatorname{sen} a = \frac{9}{10}$, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, tem-se:

(A) $\operatorname{sen}\alpha < \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} < \operatorname{sen}2\alpha$

(B) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} < \operatorname{sen}\alpha < \operatorname{sen}2\alpha$

(C) $\operatorname{sen} a < \operatorname{sen}2\alpha < \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$

(D) $\operatorname{sen}2\alpha < \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} < \operatorname{sen}\alpha$

(E) $\operatorname{sen}2\alpha < \operatorname{sen}\alpha < \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$

25 O maior valor da expressão $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2$ é:

(A) 1 (C) 2 (E) 4

(B) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

26 (UM-SP) A expressão $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ é equivalente a:

(A) 2sen x (C) 2cos x (E) 2tg x

(B) 2sec x (D) 2csc x

27 Se $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ e x é um arco do 2º quadrante, então cos $2x$ é igual a:

(A) 1 (C) $\frac{3}{4}$ (E) $-\frac{3}{4}$

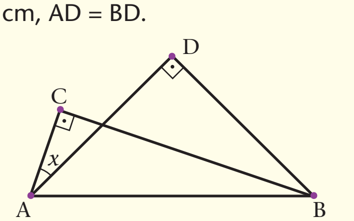
(B) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

28 Sabendo-se que $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, então $f(\theta)$ é igual a:

(A) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{2}{7}$ (E) 1

(B) $\frac{7}{2}$ (D) $\sqrt{\frac{7}{2}}$

29 (Fuvest-SP) Nos triângulos da figura abaixo, AC = 1 cm, BC = 7 cm, AD = BD.



Sabendo que $\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \cos a \cdot \operatorname{sen} b$, o valor de sen x é:

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

(B) $\frac{7}{\sqrt{50}}$ (D) $\frac{4}{3}$

30 (Fuvest-SP) Se tg θ = 2, então o valor de $\frac{2\theta}{1 + \operatorname{sen}2\theta}$ é:

(A) –3 (C) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$

(B) $-\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

31 (Mack-SP) Se $y = 4\cos 15° \cdot 75°$, então y^2 vale:

(A) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (E) 2

(B) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$

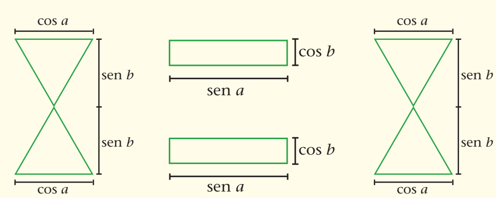
32 (UFV-MG) Sabendo-se que $\operatorname{sen}30° = \frac{1}{2}$, o valor de sen 15° é:

(A) $\sqrt{\sqrt{3} - 2}$ (D) $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

(B) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(C) 1

33 (UFR-RJ) Os símbolos a seguir foram encontrados em uma caverna em Machu Picchu, no Peru, e cientistas julgam que extraterrestres os desenharam.



Tais cientistas descobriram algumas relações trigonométricas entre os lados das figuras, como é mostrado acima. Se $a + b = 60°$, pode-se afirmar que a soma das áreas das figuras é igual a:

(A) π (C) 2 (E) $\frac{\pi}{2}$

(B) 3 (D) 1

34 (Vunesp) O seno do ângulo da base de um triângulo isósceles é igual a $\frac{1}{4}$. Então, a tangente do ângulo do vértice desse triângulo é igual a:

(A) $-\frac{\sqrt{13}}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{15}}{5}$ (E) $-\frac{\sqrt{15}}{7}$

(B) $\frac{\sqrt{13}}{5}$ (D) $\frac{\sqrt{14}}{7}$

35 (Cesgranrio-RJ) Sendo

$$A = \frac{[7\cos(5\pi - x) - 3\cos(3\pi + x)]}{\left[8\text{sen}\left(\frac{x}{2} - x\right)\right]}$$

com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, então:

(A) A = 1
(B) 2A = 1
(C) 2A + 1 = 0
(D) 4A + 5 = 0
(E) 5A – 4 = 0

36 (Fatec-SP) Se $\text{sen}\,2x = \frac{1}{2}$, então tg x + cotg x é igual a:

(A) 8
(B) 6
(C) 4
(D) 2
(E) 1

37 (FEI-SP) Se $\text{sen}\,x = \frac{1}{2}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então sen $2x$ vale:

(A) $\frac{2}{3}$
(B) $\frac{1}{3}$
(C) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$
(D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

38 (FEI-SP) Se cos x = 0,8 e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então o valor de sen $2x$ é:

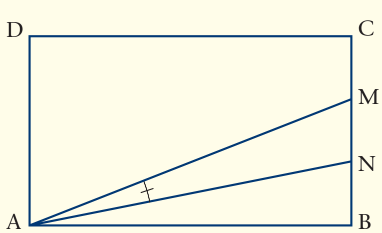
(A) 0,6
(B) 0,8
(C) 0,96
(D) 0,36
(E) 0,49

39 (Udesc) A expressão mais simples para

$$1 + \left(\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \text{cossec}^2\, x\right) - \sec^2 x \text{ é:}$$

(A) 1
(B) –1
(C) 0
(D) tg x
(E) $\sec^2 x$

40 (Cesgranrio-RJ) No retângulo ABCD da figura AB = 5, BC = 3 e CM = MN = NB. Determine tg MÂN.



41 (PUC-RJ) A equação tan (x) = cos (x) tem, para x no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, uma raiz $x = \theta$ sobre a qual podemos dizer:

(A) $\theta = \frac{\pi}{4}$
(B) $\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
(C) $\text{sen}\,\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
(D) $\cos\theta = \frac{1}{2}$
(E) $\theta = \frac{\pi}{3}$

42 (PUC-RJ) Quantas soluções a equação cos x = sen x tem no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$?

(A) Uma solução.
(B) Três soluções.
(C) Duas soluções.
(D) Infinitas soluções.
(E) Nenhuma solução.

43 (Unirio-RJ) O menor valor real e positivo de x tal que $4^{-\text{sen}\,x} = \frac{1}{2}$ é:

(A) π
(B) $\frac{\pi}{2}$
(C) $\frac{\pi}{3}$
(D) $\frac{\pi}{4}$
(E) $\frac{\pi}{6}$

44 (Unificado-RJ) O valor da expressão
$P = 1 - 4\text{sen}^2\, x + 6\,\text{sen}^4\, x - 4\,\text{sen}^6\, x + \text{sen}^8\, x$

(A) $\cos^4 x$
(B) $\cos^8 x$
(C) $\text{sen}^2\, x$
(D) 1
(E) 0

45 (UFF-RJ) Sendo $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$, a expressão $[(\text{sen}\,x + \cos x)^2 - \text{sen}\,(2x)]^n$ é equivalente a:

(A) $[\text{sen}(2k\pi)]^n$
(B) $[\cos(2k\pi + \pi)]^n$
(C) $\cos(nk\pi)$
(D) $\left[\text{sen}\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right]^n$
(E) $\text{sen}(nk\pi)$

46 (Unificado-RJ) Se $\text{sen}\,x - \cos x = \frac{1}{2}$, o valor de sen x · cos x é igual a:

(A) $\frac{-3}{16}$
(B) $\frac{-3}{8}$
(C) $\frac{3}{8}$
(D) $\frac{3}{4}$
(E) $\frac{3}{2}$

47 (Cesgranrio-RJ) Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, a equação $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = 0$:

(A) tem uma infinidade de soluções.

(B) não tem solução.

(C) tem exatamente quatro soluções.

(D) tem apenas uma solução.

(E) tem um número finito, maior do que quatro, de soluções.

48 (Unicamp-SP) Ache todos os valores de x, no intervalo $[0, 2\pi]$, para os quais $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$.

49 (UFPE) Sabendo-se que $\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 0$, os possíveis valores para $\operatorname{tg} x$ são:

(A) 0 e –1 (B) 0 e 1 (C) 1 e 2 (D) –1 e –2 (E) –2 e 0

50 (Cefet-PR) O conjunto de todos os zeros da função $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ pode ser determinado pela seguinte expressão ($k \in \mathbb{Z}$):

(A) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

(B) $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

(C) $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

(D) $x = \pi + \frac{k\pi}{2}$

(E) $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

51 (PUC-RJ) Se $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$, um possível valor de $\operatorname{sen} 2x$ é:

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{6}{5}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{12}{13}$ (E) $\frac{24}{25}$

52 (Unirio-RJ) O conjunto solução da equação $\cos 2x = \frac{1}{2}$, onde x é um arco da 1ª volta positiva, é dado por:

(A) {60°, 300°}

(B) {30°, 330°}

(C) {30°, 150°}

(D) {30°, 150°, 210°, 330°}

(E) {15°, 165°, 195°, 345°}

53 (Unicamp-SP) Encontre todas as soluções do sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) = 0 \\ \operatorname{sen}(x-y) = 0 \end{cases}$$

que satisfaçam $0 \leq x \leq \pi$ e $0 \leq y \leq \pi$.

54 (Unificado-RJ) Se $\cos 2x = \frac{1}{4}$, então $\operatorname{tg}^2 x$ é igual a:

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{8}{5}$ (D) $\frac{5}{3}$ (E) $\frac{8}{3}$

55 (Fuvest-SP) Se α está no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e satisfaz $\operatorname{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{4}$, então o valor da tangente de α é:

(A) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ (B) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ (C) $\sqrt{\frac{3}{7}}$ (D) $\sqrt{\frac{7}{3}}$ (E) $\sqrt{\frac{5}{7}}$

56 (ITA-SP) Sendo α e β os ângulos agudos de triângulo retângulo, e sabendo que $\operatorname{sen}^2 2\beta - 2\cos 2\beta = 0$, então $\operatorname{sen} \alpha$ é igual a:

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(B) $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$

(D) $\frac{\sqrt[4]{8}}{4}$

(E) zero

57 (ITA-SP) Se $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ é tal que $4\operatorname{tg}^4 x = \frac{1}{\cos^4 x} + 4$, então o valor de $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x$ é:

(A) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

(B) $\frac{\sqrt{15}}{8}$

(C) $\frac{3\sqrt{5}}{8}$

(D) $\frac{1}{2}$

(E) 1

58 (Mack-SP) Em $[0, 2\pi]$, a soma das soluções reais da equação $\left[2 - \sqrt{1-\cos^2 x}\right] \cdot \left[0{,}5 - \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}\right] = 0$ é:

(A) π (B) 2π (C) 3π (D) 4π (E) 5π

59 (ITA-SP) A soma das raízes da equação $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\operatorname{sen} 2x + \cos 2x = 0$, que pertencem ao intervalo $[0, 2\pi]$, é:

(A) $\frac{17\pi}{4}$ (B) $\frac{16\pi}{3}$ (C) $\frac{15\pi}{4}$ (D) $\frac{14\pi}{3}$ (E) $\frac{13\pi}{4}$

60 (UFRS) Considere a equação $\cos x = \cos(x + \pi)$. Se $0 \leq x \leq 2\pi$, esta equação:

(A) não tem solução.

(B) tem apenas 1 solução.

(C) tem somente as soluções 0 e π.

(D) tem somente as soluções $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

(E) tem infinitas soluções.

61 (Cefet-MG) Sendo x medida em radianos, com $0 \leq x \leq 2\pi$, a soma de todas as raízes da equação $\cos^2 2x = \text{sen}^2\, x$ é igual a:

(A) $\frac{3\pi}{2}$

(B) 2π

(C) 3π

(D) 4π

(E) 6π

62 O valor de x, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, é tal que $4(1 - \text{sen}^2\, x)(\sec^2 x - 1) = 3$ é:

(A) $\frac{\pi}{2}$

(B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{6}$

(E) 0

63 (Fatec-SP) A diferença entre o maior e o menor valor de $\theta \in [0, 2\pi]$ na equação $2\text{sen}^2\,\theta + 3\,\text{sen}\,\theta = 2$ é:

(A) $\frac{\pi}{3}$

(B) $\frac{2\pi}{3}$

(C) $\frac{4\pi}{3}$

(D) $\frac{5\pi}{3}$

(E) $\frac{7\pi}{3}$

64 (Cesgranrio-RJ) No intervalo $[0, 6\pi]$ a equação trigonométrica $\cos 2x + 2\text{sen}^2\, x + 2 = 0$:

(A) possui uma infinidade de raízes.

(B) possui exatamente duas raízes.

(C) não possui raízes.

(D) possui uma única raiz.

(E) possui exatamente três raízes.

65 (UM-SP) O conjunto solução da inequação, $|\,3\text{tg}\, x\,| \geq \sqrt{3}$, para $0 \leq 2x \leq 2\pi$ é:

(A) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

(B) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$

(C) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$

(D) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \text{ e } x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

(E) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$

66 (Aman-RJ) Os valores de x que satisfazem a equação $\sqrt{3}\cos x + 3\text{sen}\, x - \sqrt{3} = 0$ são:

(A) $k\pi$ ou $\pm\frac{\pi}{3}$

(B) $k\pi$ ou $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(C) $2k\pi$ ou $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$

(D) $k\pi$ ou $k\pi + \frac{2\pi}{3}$

(E) n.d.a.

67 (FGV-SP) O conjunto de todas as soluções da equação $\cos^2 x \cdot \text{tg}\, x = \text{sen}\, x$ é o conjunto dos números x tais que x é igual a:

(A) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

(B) $2k\pi$

(C) $k\pi$

(D) $k\pi + \frac{3\pi}{2}$

(E) n.d.a.

68 (UM-SP) O número de soluções da equação $\text{sen}\, x - \cos x = 0$, $x \in [0, 9]$, é:

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

69 (ITA-SP) Seja α um número real tal que $\alpha > 2\left(1 + \sqrt{2}\right)$ e considere a equação $x^2 - \alpha x + \alpha + 1 = 0$. Sabendo que as raízes reais dessa equação são as cotangentes de dois ângulos internos de um triângulo, então o terceiro ângulo interno desse triângulo vale:

(A) 30°

(B) 45°

(C) 60°

(D) 35°

(E) 120°

70 (PUC-SP) Se simplificarmos a expressão obteremos:

(A) sen β

(B) tg β

(C) cos β

(D) $-$cos β

(E) $-$sen β

71 Considerando $x \neq y$, a expressão sen $(x + y) \cdot$ sen $(x - y)$ é equivalente a:

(A) sen $(x^2 - y^2)$

(B) sen x^2 + sen y^2

(C) sen $x \cdot$ sen y + cos $x \cdot$ cos y

(D) sen^2 $x \cdot$ cos^2 y

(E) cos^2 y – cos^2 x

72 (Unifor-CE) Para todo $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, a expressão $\frac{\text{cossec } \theta + \cos \theta}{\sec \theta + \text{sen } \theta}$ é equivalente a:

(A) $-$tg θ

(B) tg θ

(C) $-$cotg θ

(D) cotg θ

(E) sec θ

73 (UFF-RJ) A simplificação de $\frac{1 - \text{tg}^4 x}{\cos^4 x - \text{sen}^4 x}$ é:

(A) cossec^4 x

(B) cos^4 x

(C) sen^4 x

(D) sec^4 x

(E) cotg^4 x

74 (FEI-SP) A expressão 1 – cos^2 x – sen^4 x pode ser reescrita como:

(A) sen $x \cdot$ cos^3 x

(B) sen x(1 – sen^3 x)

(C) cos x(1 – cos^3 x)

(D) sen^2 $x \cdot$ cos^2 x

(E) sen^3 $x \cdot$ cos^2 x

75 (Cefet-MG) A expressão trigonométrica $\frac{\sec x - \text{cossec } x}{\text{sen } x - \cos x}$, onde sen $x \neq$ cos x, equivale a:

(A) sec $x \cdot$ cossec x

(B) $-$sec $x \cdot$ cossec x

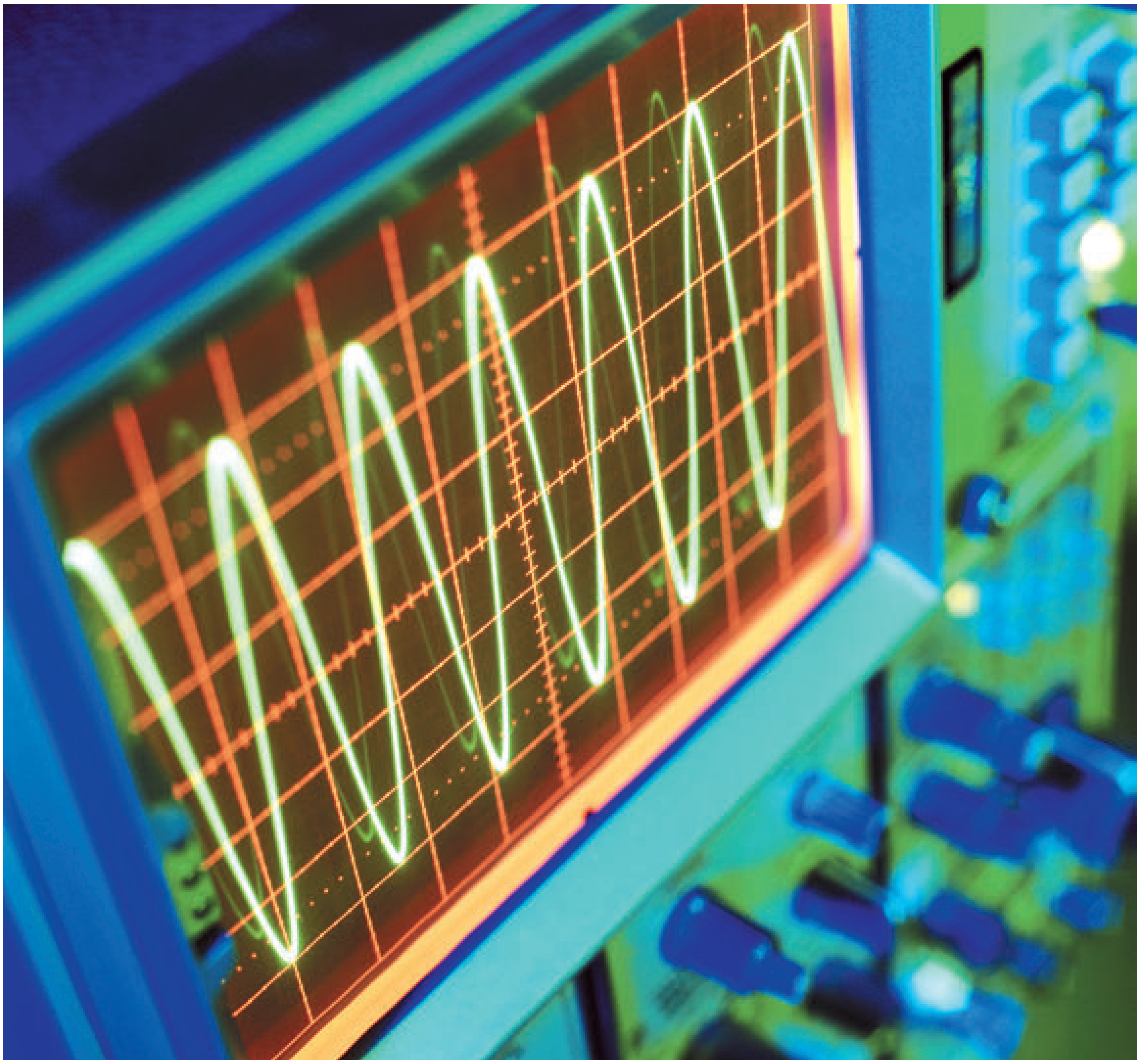
(C) -1

(D) 0

(E) 1

CAPÍTULO XIV

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS



Andrew Brookes/CORBIS/LatinStock

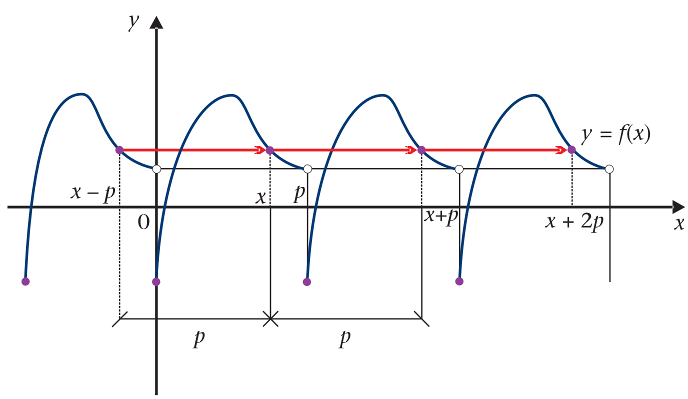
Funções trigonométricas são muito utilizadas, por exemplo, para modelar fenômenos ondulatórios, incluindo fenômenos eletromagnéticos como a luz.

14 – FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

14.1 – Função periódica

DEFINIÇÃO
Função periódica; período.

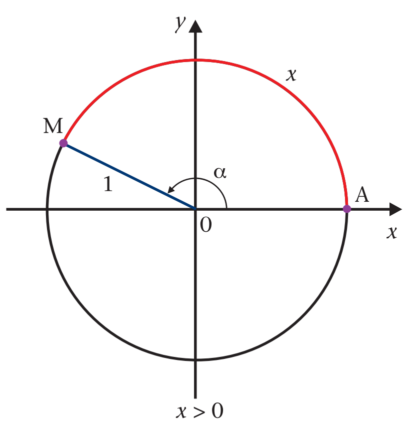
Seja a função f de domínio X. Se existe um número real p para o qual $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in X$, então a função é chamada **periódica**. O menor valor de p para o qual $f(x + p) = f(x)$ é o **período** da função periódica.

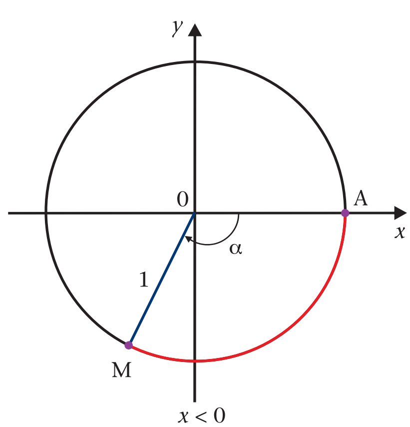


Esta propriedade torna possível construir o gráfico da função repetindo o gráfico do intervalo $0 \leq x \leq p$.

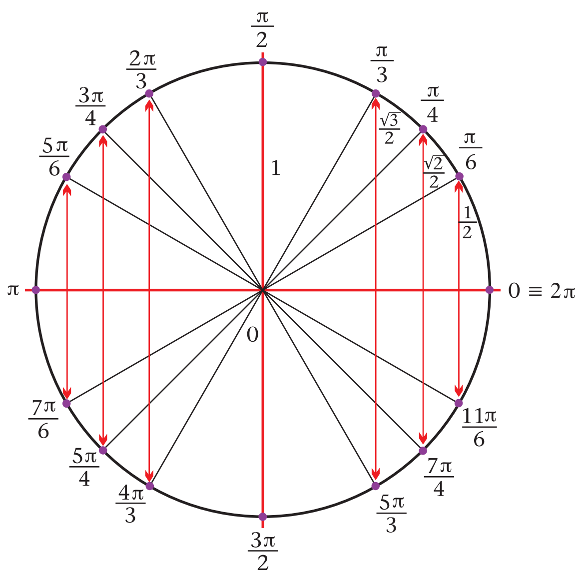
14.2 – Função seno

É a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que $y = f(x) = \text{sen } x$.





Como $x = \alpha \cdot R$ e $R = 1$, temos que a medida do ângulo α em radianos é igual ao comprimento do arco AM. Assim, a cada ângulo $\alpha = x$ em radianos podemos associar uma abscissa x num referencial cartesiano.



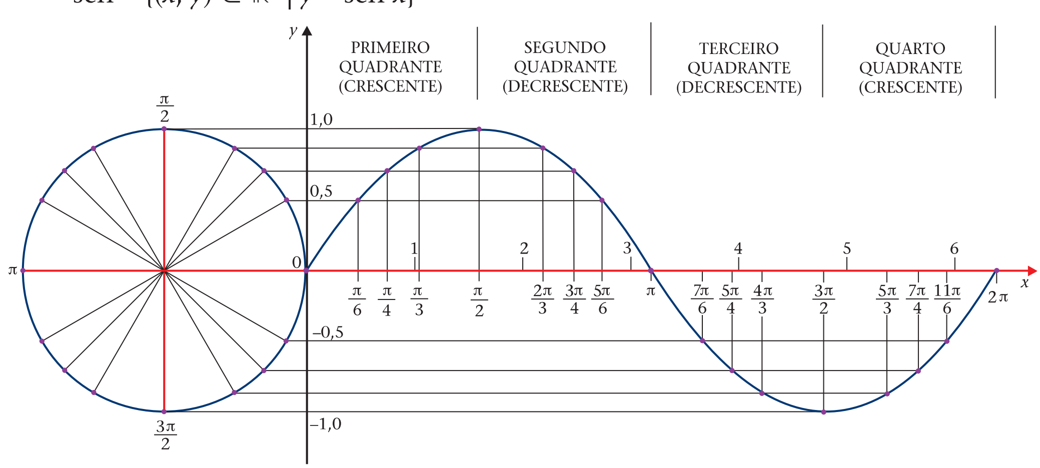
Observe que no primeiro quadrante, quando o arco varia de 0 a $\frac{\pi}{2}$ radianos, o seno cresce de 0 até 1. No segundo quadrante, quando o arco cresce de $\frac{\pi}{2}$ até π rad, o seno decresce de 1 até 0. No terceiro quadrante, quando o arco vai de π até $\frac{3\pi}{2}$ rad, o seno continua decrescendo de 0 até –1. No quarto quadrante, quando o arco cresce de $\frac{3\pi}{2}$ até 2π rad, o seno volta a crescer de –1 até 0. A partir daí, o seno começa a repetir os seus valores. É uma função periódica de período 2π.

Podemos então fazer a tabela para y = sen x em aproximação até centésimos:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen x	0	0,50	0,71	0,87	1,00	0,87	0,71	0,50	0,00	–0,50	–0,71	–0,87	–1,00	–0,87	–0,71	–0,50	0,00

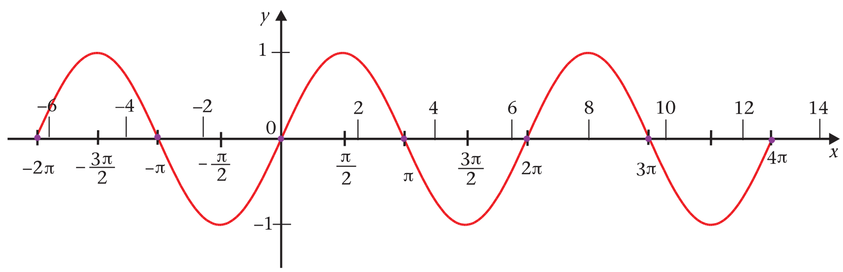
Podemos então esboçar o gráfico da função seno para um período, isto é, para $x \in [0, 2\pi]$.

sen = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \text{sen } x\}$



NOTA
O nome da curva, que representa o gráfico da função seno, é **senoide** e sua equação é $y = \text{sen } x$.

Este gráfico se repete infinitamente de 2π em 2π. Vemos abaixo o gráfico para o intervalo $[-2\pi, 4\pi]$, isto é, para 3 voltas completas.



$\{(x, y): y = \text{sen } x, -2\pi \leq x \leq 4\pi\}$

Como o seno assume todos os valores do intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$, seu conjunto imagem é Im (sen) = $[-1, 1]$. A função seno não é injetiva nem sobrejetiva. Se, entretanto, o contradomínio for reduzido ao intervalo $[-1, 1]$, ela se tornará sobrejetiva. O valor máximo atingido pelo seno é $y = 1$ no ponto $x = \frac{\pi}{2}$ e o valor mínimo é $y = -1$ no ponto $x = \frac{3\pi}{2}$.

De um modo geral, para todo k inteiro, temos $\text{sen } (k \cdot \pi) = 0$, $\text{sen}\left(k \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ e $\text{sen}\left(k \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1$.

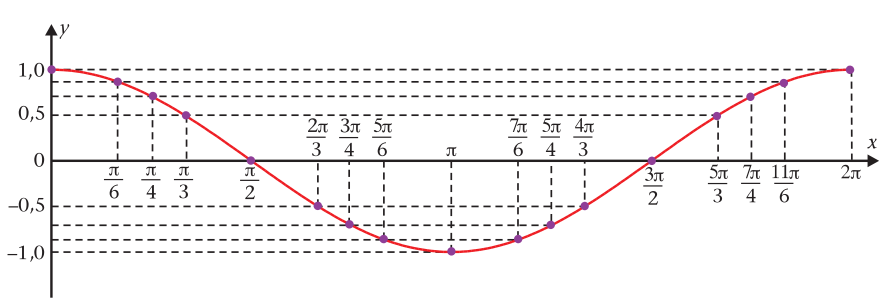
14.3 – Função cosseno

É a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que $f(x) = \cos x$. Sua tabela de valores é:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos x$	1,00	0,87	0,71	0,50	0,00	–0,50	–0,71	–0,87	–1,00	–0,87	–0,71	–0,50	0,00	0,50	0,71	0,87	1,00

Podemos então esboçar o gráfico da função cosseno para $x \in [0, 2\pi]$.

$$\cos = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \cos x\}$$



NOTA
Como $\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, o gráfico do $\cos x$ é o gráfico de $\text{sen } x$ transladado de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda.

Observe que:

De 0 a $\frac{\pi}{2}$, ela é decrescente de 1 a 0.

De $\frac{\pi}{2}$ a π, continua decrescente de 0 a –1.

De π a $\frac{3\pi}{2}$, passa a ser crescente de –1 a 0.

De $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, continua crescente de 0 a 1.

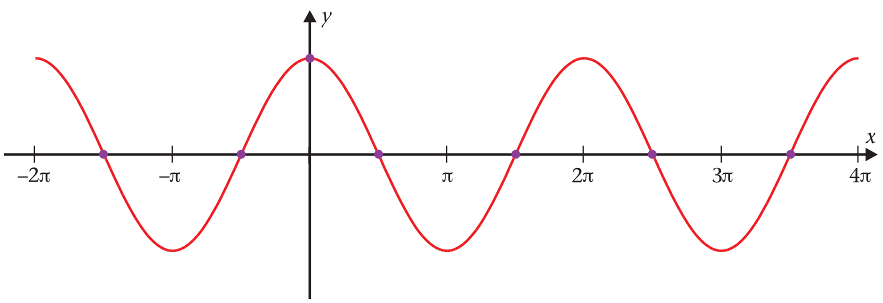
A partir de $x = 2\pi$, ela começa a repetir os seus valores. É periódica de período 2π.

O conjunto das imagens é o intervalo $[-1, 1]$. O cosseno assume seu valor mínimo $y = -1$ no ponto $x = \pi$, e seu valor máximo $y = 1$ no ponto $x = 0$.

Temos, em geral, para todo k inteiro: $\cos(k \cdot 2\pi) = 1$, $\cos(k \cdot 2\pi + \pi) = -1$ e $\cos\left(k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

O gráfico da função cosseno se repete infinitamente de 2π em 2π.

Temos abaixo o gráfico para o intervalo $[-2\pi, 4\pi]$.



$\{(x, y): y = \cos x, -2\pi \leq x \leq 4\pi\}$

NOTA
O nome da curva que representa a variação do cosseno é **cossenoide** e sua equação é $y = \cos x$.

O gráfico da função cosseno se obtém deslocando-se o gráfico da função seno de $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda ou, ainda, $\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Exercícios resolvidos:

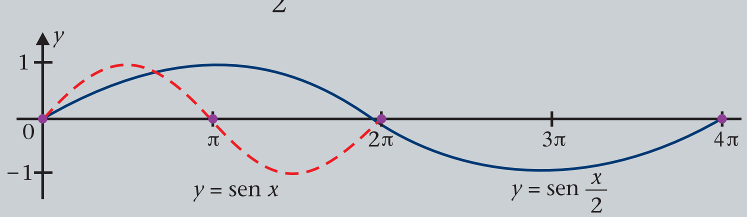
1) Calcular o período da função em que:

i) $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

Solução:

Devemos ter $\operatorname{sen} \frac{x+p}{2} = \operatorname{sen} \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x+p}{2} - \frac{x}{2} = 2\pi$

$$\frac{p}{2} = 2\pi \Rightarrow p = 4\pi$$



NOTA
Observe que, quando o arco está dividido por 2, o período fica multiplicado por 2.

NOTA
Observe que, quando o arco está multiplicado por 3, o período fica dividido por 3.

NOTA
Observe que, somando ou subtraindo uma constante ao arco, o período não se altera.

ii) $y = 2\text{tg}\, 3x$

Solução:

Temos: $2\text{tg}\, 3(x + p) = 2\text{tg}\, 3x \Rightarrow \text{tg}\,(3x + 3p) = \text{tg}\, 3x$

$$3x + 3p - 3x = \pi \Rightarrow 3p = \pi \Rightarrow p = \frac{\pi}{3}$$

iii) $y = \sec\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Solução:

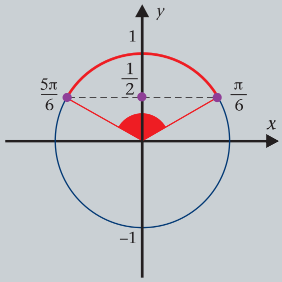
Devemos ter: $\sec\left(x + p + \frac{\pi}{3}\right) = \sec\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$\left(x + p + \frac{\pi}{3}\right) - \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\pi$ (o período da secante é igual ao do cosseno)

$$p = 2\pi$$

2) Resolver a inequação $\text{sen}\, x \geq \frac{1}{2}$ no intervalo $(0, 2\pi)$.

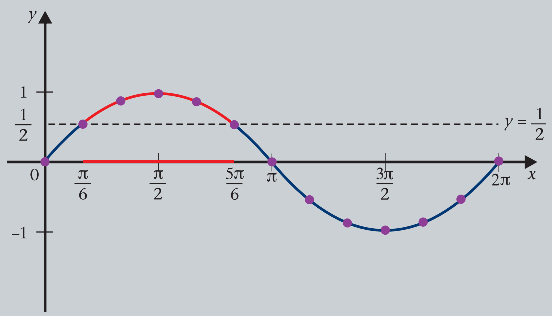
Solução:



Observe que, no círculo trigonométrico, os arcos compreendidos entre $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ têm os seus senos entre $\frac{1}{2}$ e 1.

A solução geral dessa inequação será o conjunto de todos os arcos compreendidos entre $k \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}$ e $k \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$. No intervalo $(0, 2\pi)$ teremos a solução $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

Outra solução:

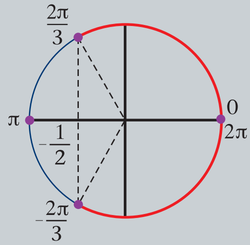


Utilizando o gráfico da função seno, observamos que a solução corresponde aos arcos cujas ordenadas se situam sobre ou acima da reta $y = \frac{1}{2}$. São então os arcos compreendidos entre $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$, isto é, $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6}$.

3) Resolver a inequação $\cos x \ge -\frac{1}{2}$ no intervalo $(-2\pi, 4\pi)$.

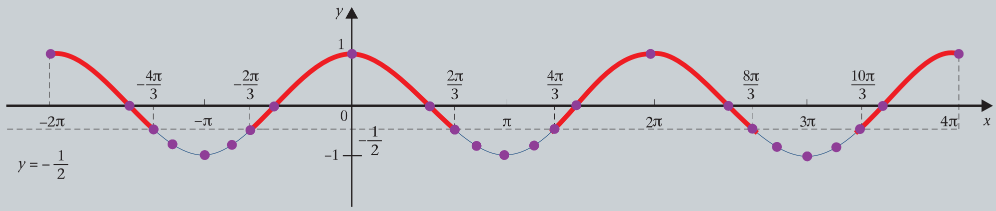
Solução:

No círculo trigonométrico temos os arcos que têm o cosseno à direita do ponto $-\frac{1}{2}$. Os arcos cujo cosseno é $-\frac{1}{2}$ são $-\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$. A solução geral será então: $k \cdot 2\pi - \frac{2\pi}{3} \le x \le k \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Dentro do intervalo $(-2\pi, 4\pi)$, a solução se resume a: $\left(-2\pi, -\frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{10\pi}{3}, 4\pi\right)$



Outra solução:

Na cossenoide, a solução geral aparece com facilidade.



É o conjunto:

$$\left(-2\pi, -\frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{10\pi}{3}, 4\pi\right)$$

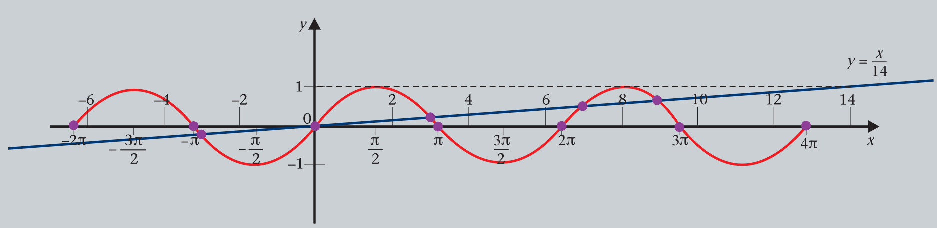
4) Quantas soluções tem a equação $x = 14\text{sen } x$ no intervalo $[-2\pi, 4\pi]$?

Solução:

Dividindo ambos os membros da equação por 14, vem: sen $x = \dfrac{x}{14}$. Fazendo $y = \text{sen } x$, temos que $y = \dfrac{x}{14}$. Basta então, verificar graficamente em quantos pontos a reta $y = \dfrac{x}{14}$ intersecta a senoide $y = \text{sen } x$. Temos então cinco raízes, assim distribuídas: uma raiz entre $-\pi$ e $-\dfrac{\pi}{2}$, uma raiz igual a zero, uma raiz entre $\dfrac{\pi}{2}$ e π, uma raiz entre 2π e $\dfrac{5\pi}{2}$ e uma última entre $\dfrac{5\pi}{2}$ e 3π.

NOTA

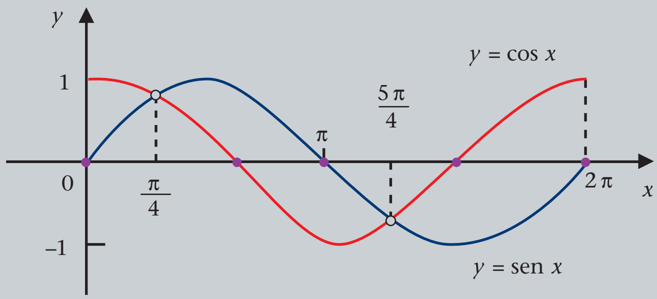
Observe que a reta $y = \dfrac{x}{14}$ passa na origem e no ponto (14, 1).



5) Resolver a inequação sen x – cos $x > 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

Solução:

Devemos ter sen $x >$ cos x. Basta observar nos gráficos $y = \text{sen } x$ e $y = \cos x$ onde o gráfico do seno está acima do gráfico do cosseno. Verifica-se imediatamente que isto se dá no intervalo $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$, uma vez que, $\text{sen } x = \cos x \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{5\pi}{4}$.



6) Determinar no intervalo $[0, 2\pi]$ a solução da inequação: $\sqrt{3}$ sen $2x + \cos 2x > 1$.

Solução:

Dividindo ambos os membros por 2, temos: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sen $2x + \frac{1}{2}\cos 2x > \frac{1}{2}$.

Substituindo $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$ e $\frac{1}{2} = \text{sen}\,\frac{\pi}{6}$, temos:

$$\text{sen}\,2x\cos\frac{\pi}{6} + \text{sen}\,\frac{\pi}{6}\cos 2x > \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2} \Rightarrow k\cdot 2\pi + \frac{\pi}{6} < 2x + \frac{\pi}{6} < k\cdot 2\pi + \frac{5\pi}{6}$$

Subtraindo $\frac{\pi}{6}$ de todos os membros desta desigualdade:

$k\cdot 2\pi < 2x < k\cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3}$, dividindo por 2 vem: $k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{3}$

Observe que:

$$k = 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ e } k = 1 \Rightarrow \pi < x < \frac{4\pi}{3}$$

Os valores de k maiores que 1 ou negativos já darão arcos fora do intervalo $[0, 2\pi]$. A solução será então: $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\pi, \frac{4\pi}{3}\right)$.

NOTA
Colocamos a solução geral porque o arco está multiplicado por 2. Quando dividirmos por 2, as soluções poderão ficar no intervalo $[0, 2\pi]$.
$2 = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Construa os gráficos das seguintes funções no campo dos números reais, destacando o conjunto imagem e o período da função.

a) $f(x) = 1 + \text{sen } x$

b) $f(x) = 2 \cdot \text{sen } x$

c) $f(x) = -\text{sen } x$

d) $f(x) = |\text{sen } x|$

e) $f(x) = \text{sen } 2x$

f) $f(x) = \text{sen } \dfrac{x}{2}$

g) $f(x) = \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

h) $f(x) = 1 + \cos x$

i) $f(x) = -\cos x$

j) $f(x) = \cos 2x$

k) $f(x) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

l) $f(x) = |\cos x|$

m) $f(x) = \cos \dfrac{x}{2}$

n) $f(x) = 2\cos x$

2 Determine o período das seguintes funções:

a) $f(x) = \text{sen } 2x$

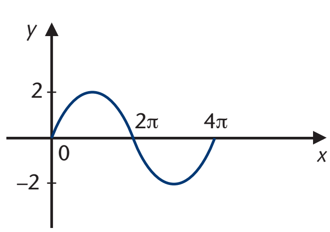
b) $f(x) = 2 + 3 \cdot \cos 7x$

c) $f(x) = 7 \cdot \text{sen } \dfrac{x}{2}$

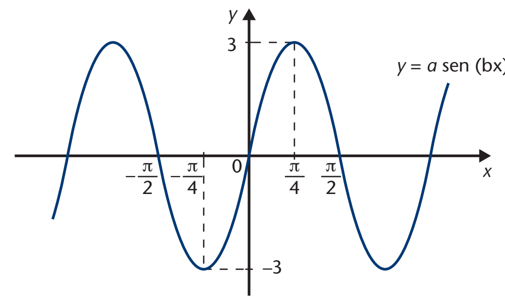
d) $f(x) = -\text{sen } \dfrac{x}{3}$

e) $f(x) = \cos \dfrac{x}{2} + \text{sen } \dfrac{x}{3}$

3 A figura abaixo representa o gráfico de que função?



4 A figura a seguir representa o gráfico da função $y = a \text{ sen } (bx)$, onde $a \neq 0$ e $b > 0$.
Para o *menor* valor possível de b, quais são os valores de a e b, respectivamente?

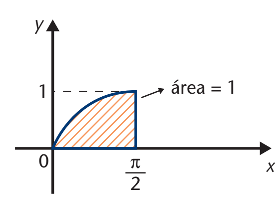


5 Represente o gráfico de:

a) $y = |\text{sen } x|$

b) $y = 1 + 2\,\text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

6 (Uerj) O aluno que estudar Cálculo poderá provar com facilidade que a área da superfície plana limitada pelos gráficos de $f(x) = \text{sen } x$ e $f(x) = 0$, no intervalo $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$, como ilustra o gráfico abaixo, é igual a 1.



A partir dessa informação, qual é a área limitada pelos gráficos de $f(x) = \cos x$ e $f(x) = 0$, no intervalo $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}$?

7 (Aman-RJ) Os gráficos de $y = x$ e $y = \text{sen } x$ interceptam-se:

(A) em nenhum ponto.

(B) em um só ponto.

(C) em dois pontos.

(D) em quatro pontos.

(E) em infinitos pontos.

8 (Umesp) O número de pontos de intersecção dos gráficos das funções f e g dadas por $f(x) = -|\cos x|$ e $g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, com $-\pi < x < \pi$, é:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) maior que 3

9 (Cescea-SP) Dadas as curvas $y = x^2$ e $y = \cos x$, assinalar, entre as afirmações abaixo, a verdadeira:

(A) Elas não se interceptam.
(B) Elas se interceptam numa infinidade de pontos.
(C) Elas se interceptam em dois pontos.
(D) Elas se interceptam num único ponto.
(E) Elas se interceptam em três pontos.

10 (FGV-SP) A função $f(x) = 16\ (\text{sen}\ x)\ (\cos x)$ assume valor máximo igual a:

(A)16
(B)12
(C)10
(D)8
(E)4

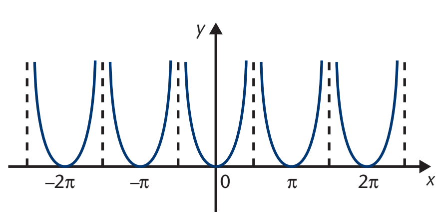
11 (UFU-MG) Considere que f e g são as funções reais de variável real dadas, respectivamente, por $f(x) = 1 + \text{sen}\ 2x$ e $g(x) = 1 + 2\cos x$. Desse modo, podemos afirmar que, para $x \in [0, 2\pi)$, os gráficos de f e g cruzam-se em:

(A) 1 ponto.
(B) 2 pontos.
(C) 3 pontos.
(D) nenhum ponto.

12 Dê o período da função $f(x) = |(\text{sen}\ x) \cdot (\cos x)|$.

13 Dê o período de $y = \text{sen}\ \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3}$.

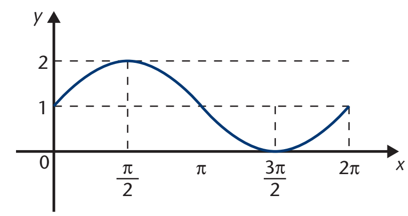
14 (Cescem-SP) Qual das funções a seguir melhor se adapta ao gráfico?



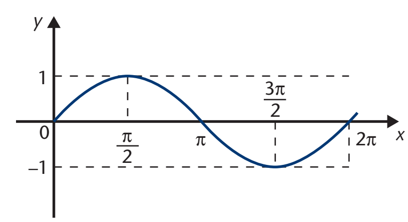
(A) $y = x^2$
(B) $y = |\text{sen}\ x|$
(C) $y = |\sec x| - 1$
(D) $y = |\cos x|$
(E) $y = |\text{tg}\ x| + 1$

15 (Aman-RJ) O gráfico que melhor representa a função $y = 1 + 2\text{sen}\ x \cdot \cos x$ é:

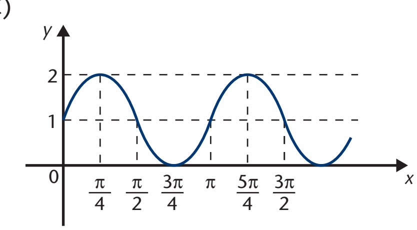
(A)



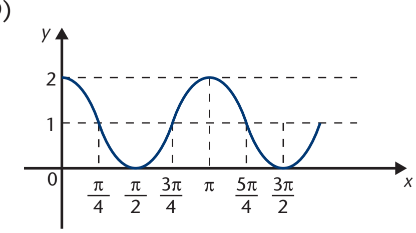
(B)



(C)

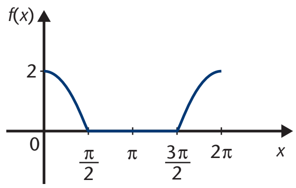


(D)

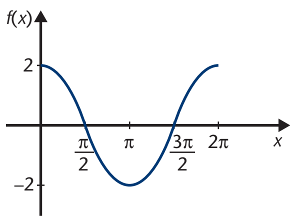


16 (Ufes) O gráfico da função $f(x) = \cos x + |\cos x|$, para $x \in [0, 2\pi]$ é:

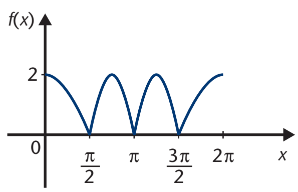
(A)



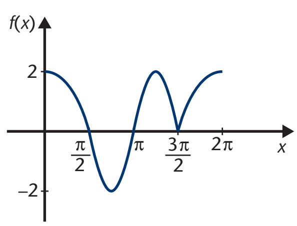
(B)



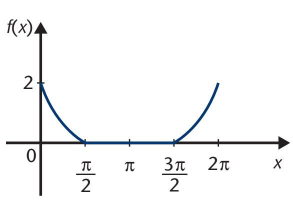
(C)



(D)



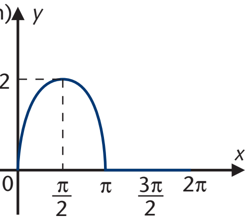
(E)



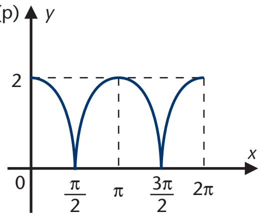
17 (UFG-GO) Associando a função com sua representação gráfica, assinale a alternativa correta.

1. $f(x) = \text{sen } x + |\text{sen } x|;\ 0 \leq x \leq 2\pi$
2. $g(x) = 2\,|\cos x|;\ 0 \leq x \leq 2\pi$
3. $h(x) = 2\,|\text{sen } 2x|;\ 0 \leq x \leq 2\pi$

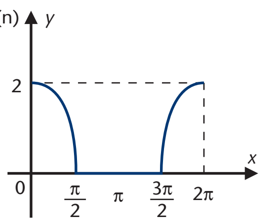
(m)



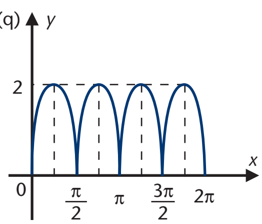
(p)



(n)

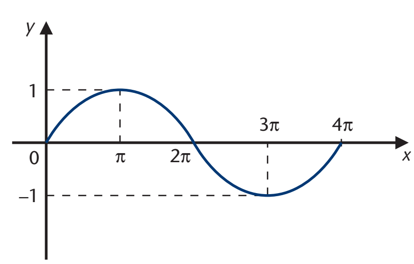


(q)



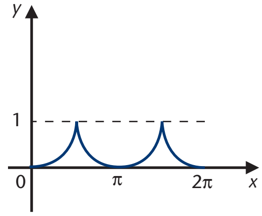
(A) 1 - m, 2 - p, 3 - q
(B) 1 - m, 2 - n, 3 - p
(C) 1 - n, 2 - m, 3 - p
(D) 1 - q, 2 - m, 3 - q
(E) 1 - n, 2 - p, 3 - m

18 (Cescem-SP) A função que melhor se adapta a este gráfico é:



(A) $y = \text{sen } \dfrac{x}{2}$
(B) $y = \cos \dfrac{x}{2}$
(C) $y = \text{sen } 2x$
(D) $y = \cos 2x$
(E) $y = \text{sen } x$

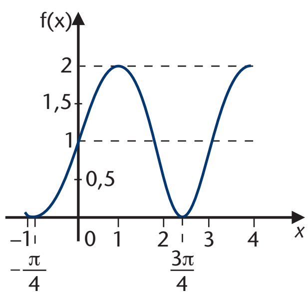
19 (Umesp) Este gráfico pode ser o da função:



(A) $|\text{sen } x|$ (C) $1 - |\text{sen } x|$

(B) $\text{sen}^2 x$ (D) $1 - |\cos x|$

20 (PUC-SP) O gráfico abaixo corresponde a uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ a seguir definidas. A qual delas?

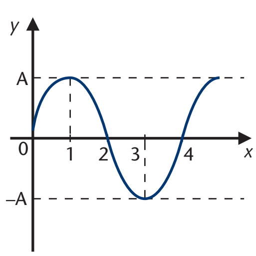


(A) $f(x) = \text{sen } 2x + 1$ (D) $f(x) = 2\text{sen } 2x$

(B) $f(x) = 2\text{sen } x$ (E) $f(x) = 2\cos x + 1$

(C) $f(x) = \cos x + 1$

21 (UFSM-RS)



O gráfico acima representa a função:

(A) $y = 2A(\text{sen } x + \cos x)$

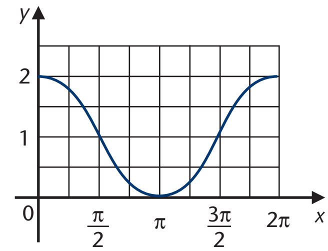
(B) $y = \frac{A}{2}\left(\text{sen } \frac{\pi}{2}x + \cos \frac{\pi}{2}x\right)$

(C) $y = 2A\,(\text{sen } x + 1)$

(D) $y = A \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}x - \pi\right)$

(E) $y = A \cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{2}\right)$

22 (UFRS) O gráfico a seguir representa a função real *f*.



Essa função é dada por:

(A) $f(x) = 1 - \cos x$

(B) $f(x) = 1 + \cos x$

(C) $f(x) = \cos(x + 1)$

(D) $f(x) = \cos(x - 1)$

(E) $f(x) = \cos(x + \pi)$

23 Determine o valor de *a* para que a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } 3x}{x}, \text{ se } x < 0 \\ 2x + a, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$$

seja contínua para todo *x* real.

24 (ITA-SP) Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$f(x) = 2\text{sen } 3x - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Sobre *f* podemos afirmar que:

(A) é uma função par.

(B) é uma função ímpar e periódica de período fundamental 4π.

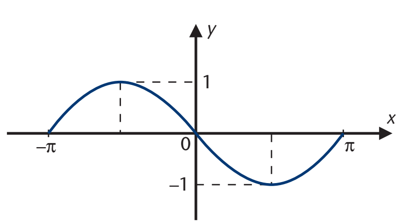
(C) é uma função ímpar e periódica de período fundamental $\frac{4\pi}{3}$.

(D) é uma função periódica de período fundamental 2π.

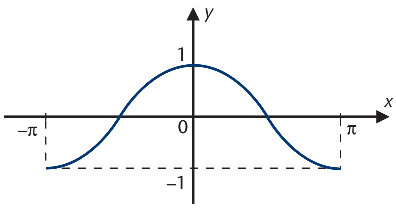
(E) não é par, não é ímpar e não é periódica.

25 (Aman-RJ) O gráfico que melhor representa a função $y = -\text{sen } x$, para $-\pi \leq x \leq \pi$, é:

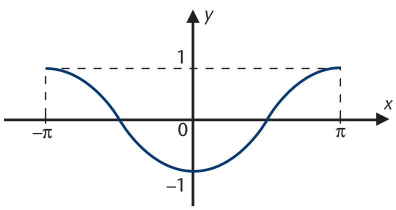
(A)



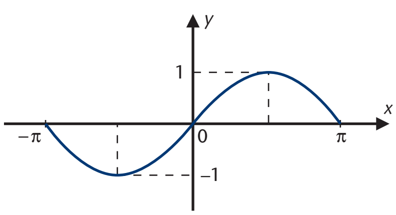
(B)



(C)



(D)



26 (Uerj) Considere a função real, de variável real x, definida por $f(x) = \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} + \cos x, x \in [0, 2\pi]$. Utilizando esses dados, responda aos itens seguintes:

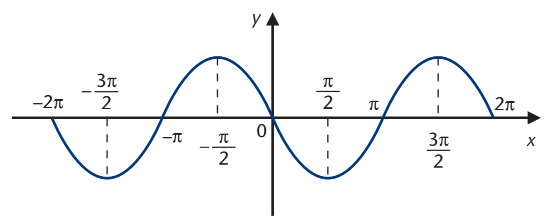
a) Calcule $f(\pi)$.

b) Esboce o gráfico cartesiano de f.

27 Construa o gráfico da função $f: \left[-\frac{3\pi}{2}, 4\right] \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \le x \le 4 \\ \cos x, \text{ se } -\frac{3\pi}{2} \le x < 0 \end{cases}$$

28 (Vunesp-SP) Sabe-se que h é o menor número positivo para o qual o gráfico de $y = \text{sen}\,(x - h)$ é:

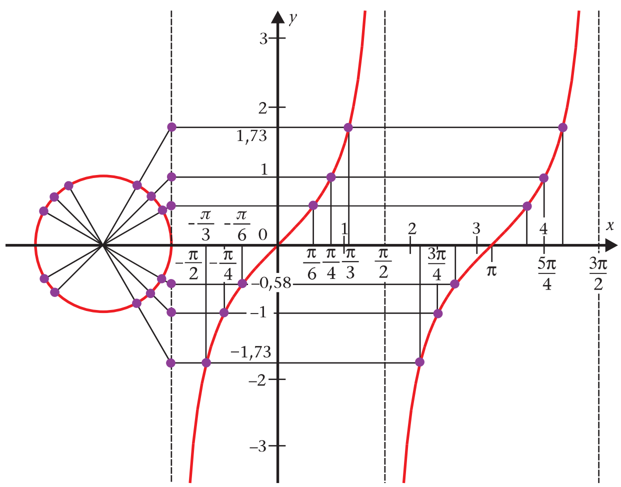


Calcule o valor de $\cos \frac{2h}{3}$.

14.4 – Função tangente

Como $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$, não existirão valores para a tangente nos pontos em que, $\cos x = 0$, isto é, $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ para todo k inteiro. O domínio da função tangente será então $\mathbb{R} - \left\{x \mid x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Sua tabela de valores é:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
tg x	0	0,58	1	1,73	$\nexists$	–1,73	–1	–0,58	0	0,58	1	1,73	$\nexists$	–1,73	–1	–0,58	0



$$\{(x, y) \mid y = \text{tg } x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\}$$

De 0 a $\dfrac{\pi}{2}$, o arco cresce e a tangente também cresce. Quando o arco se aproxima de $\dfrac{\pi}{2}$ pelo primeiro quadrante, isto é, por valores menores que $\dfrac{\pi}{2}$, a tangente ultrapassa qualquer valor positivo por maior que seja. Dizemos então que quando x tende para $\dfrac{\pi}{2}$ por valores menores que $\dfrac{\pi}{2}$, o limite da tangente é $+\infty$.

NOTA
O símbolo $+\infty$ não é um número, ele significa que a grandeza que ele está representando cresce ultrapassando qualquer quantidade positiva.

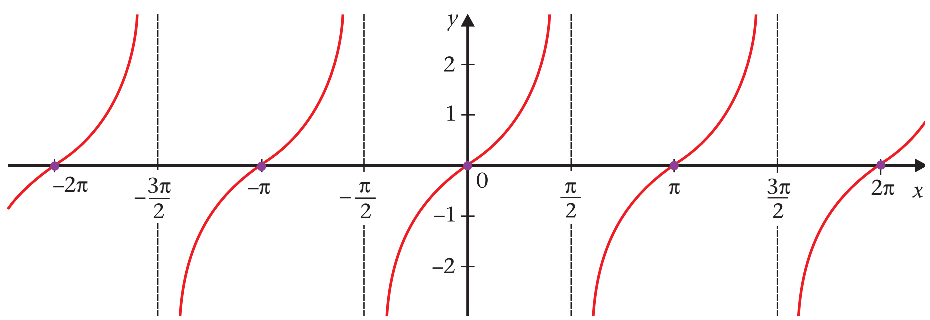
Quando o arco ultrapassa o ponto $\dfrac{\pi}{2}$, a tangente dá um salto de $+\infty$ para $-\infty$. Observe que, quando o arco se aproxima do ponto $\dfrac{\pi}{2}$ por valores superiores a $\dfrac{\pi}{2}$, a tangente decresce e se torna negativa e, por conseguinte, menor que qualquer valor negativo. Dizemos que a tangente tem limite $-\infty$ quando o arco tende para $\dfrac{\pi}{2}$ por valores maiores que $\dfrac{\pi}{2}$.

De $\frac{\pi}{2}$ a π, a tangente é negativa e cresce até 0. A partir de π, os valores da tangente começam a se repetir. A tangente é uma função periódica de período π.

No gráfico esboçado, usamos os intervalos $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ para melhor observação da variação da tangente. São dois períodos.

A função tangente tem domínio $\mathbb{R} - \left\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. O conjunto das suas imagens é todo o conjunto dos reais, portanto, ela é uma função sobrejetiva sobre os reais. As retas paralelas ao eixo O*y* que passam nos pontos de abscissas $k\pi + \frac{\pi}{2}$ com *k* inteiro são chamadas **assíntotas**.

A função tangente é $f: \mathbb{R} - \left\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{tg } x$. Vemos abaixo o gráfico de $y = \text{tg } x$.



$\{(x, y): y = \text{tg } x\}$

NOTA
O nome da curva que representa a variação da tangente é **tangentoide** e sua equação é $y = \text{tg } x$.

14.5 – Função cotangente

É a função $f: \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{ctg } x$. Como a cotangente de um arco é a tangente do seu complementar, temos que:

$$\boxed{\text{ctg } x = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

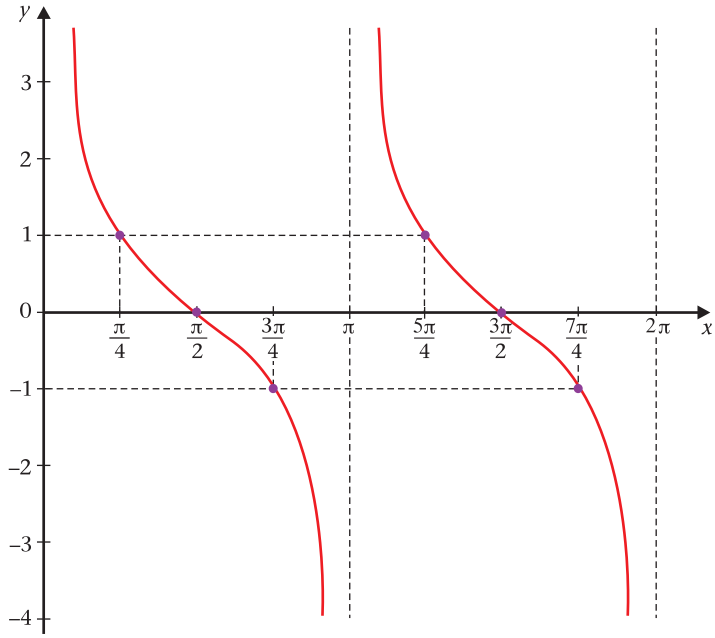
Ou seja:

$$\text{ctg } x = \text{tg}\left[-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\text{ctg } x = -\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Portanto, podemos esboçar o gráfico da função cotangente deslocando-se o gráfico da função tangente de $\frac{\pi}{2}$ unidades para direita e, em seguida, refletindo o gráfico obtido em relação ao eixo Ox.

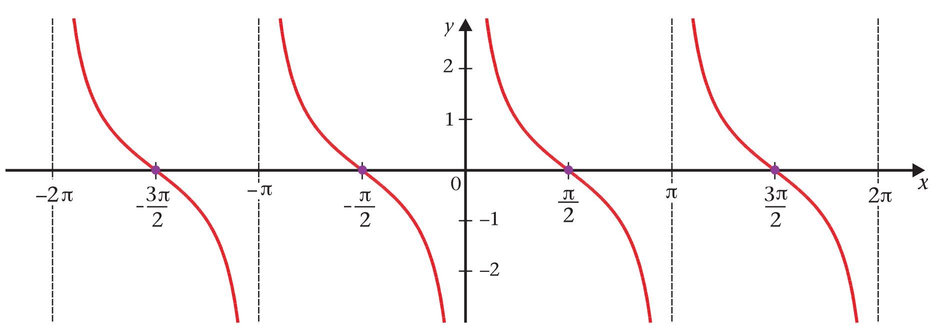
As retas paralelas ao eixo Oy que passam nos pontos de abscissas $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ serão assíntotas verticais do gráfico. A função cotangente é periódica de período π e sobrejetiva sobre os reais.



De 0 a $\frac{\pi}{2}$, a função cotangente decresce de $+\infty$ até 0.

De $\frac{\pi}{2}$ a π, a função cotangente decresce de 0 até $-\infty$.

De π a 2π, a função cotangente repete os valores do primeiro e segundo quadrantes.



$\{(x, y): y = \text{ctg } x\}$

14.6 – Função cossecante

NOTA

$0 < a \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \dfrac{1}{a} < +\infty$

Por exemplo:

$a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{a} = 2 > 1$

Por outro lado:

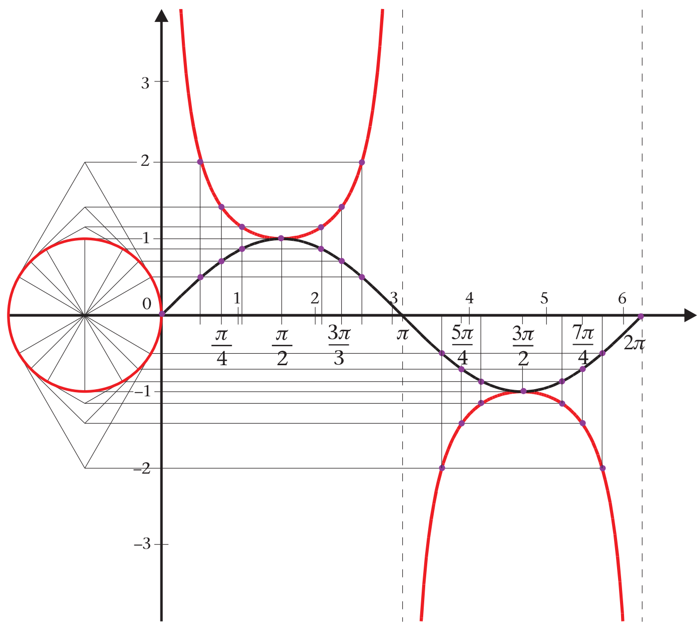
$-1 \leq a \leq 0 \Rightarrow -\infty < \dfrac{1}{a} \leq -1$

Por exemplo:

$a = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{a} = -3 < -1$

Como $\csc x = \dfrac{1}{\text{sen } x}$, não existirão valores para a cossecante quando o seno for zero. Então o domínio da função cossecante será $\mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Por outro lado, como $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$, então quando $-1 \leq \text{sen } x < 0 \Rightarrow \csc x \leq -1$ e quando $0 < \text{sen } x \leq 1 \Rightarrow \csc x \geq 1$. Observe que a cossecante não assume valores entre –1 e 1, por ser a inversa do seno.



Observe que nos pontos $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ o gráfico sofre descontinuidades e as retas paralelas ao eixo Oy que passam nesses pontos são assíntotas verticais.

NOTA

Observe que a senoide está na região $-1 \leq y \leq 1$ enquanto a cossecantoide está na região $y \leq -1$ ou $y \geq 1$.

De 0 a $\dfrac{\pi}{2}$, a função decresce assumindo um valor mínimo igual a 1.

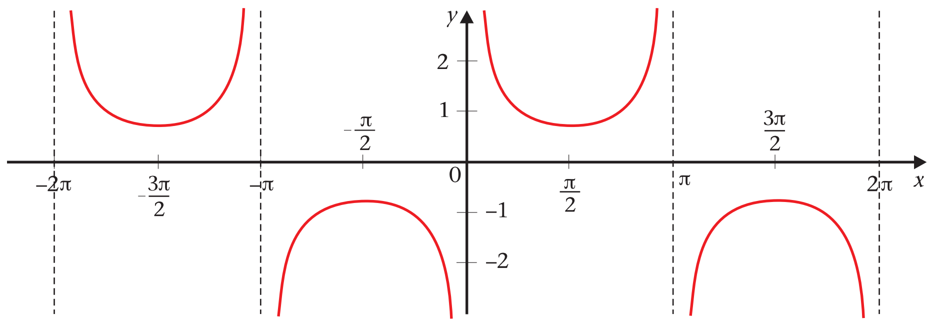
De $\dfrac{\pi}{2}$ a π, a função cresce para $+\infty$. Em $x = \pi$, dá um "salto" para $-\infty$ e a partir daí, cresce até –1 em $\dfrac{3\pi}{2}$.

De $\dfrac{3\pi}{2}$ a 2π, ela volta a decrescer para $-\infty$.

Os valores da cossecante começam a se repetir a partir de 2π, isto é, a função é periódica de período 2π.

O domínio da cossecante é o conjunto $\mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ e o conjunto das imagens é o conjunto $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

A função não é injetiva nem sobrejetiva. Temos abaixo o gráfico da função $y = \csc x$ no intervalo $(-2\pi, 2\pi)$.



$\{(x, y): y = \csc x\}$

14.7 – Função secante

Como $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, não existirão valores para a secante nos pontos em que $\cos x = 0$, isto é, $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, para $k \in \mathbb{Z}$.

O domínio da função será $\mathbb{R} - \left\{x \mid x = k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Por outro lado, como $-1 \leq \cos x \leq 1$, temos: $-1 \leq \cos x < 0 \Rightarrow \sec x \leq -1$ e quando $0 < \cos x \leq 1 \Rightarrow \sec x \geq 1$.

Observe que a secante não assume valores entre -1 e 1, por ser a inversa dos valores do cosseno.

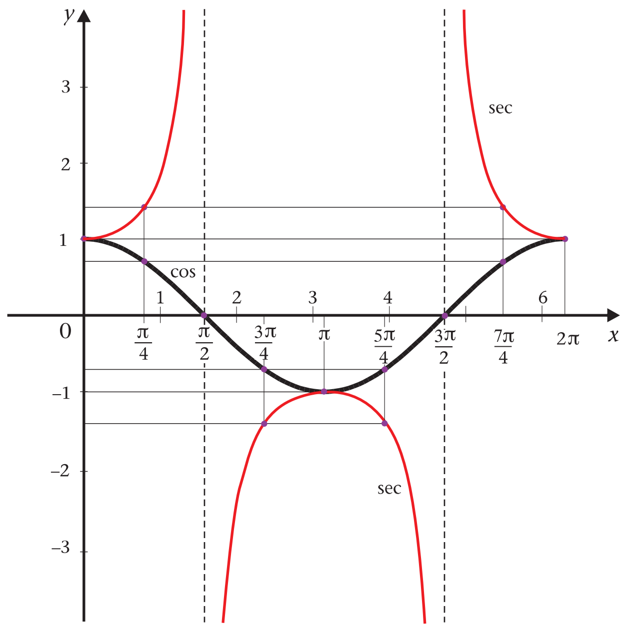
Para obter o gráfico da função secante, basta ter em vista que:

$$\sec x = \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Esta relação nos permite concluir que o gráfico da secante se obtém fazendo o gráfico da cossecante deslocar-se de $\dfrac{\pi}{2}$ para a esquerda.

De 0 a $\dfrac{\pi}{2}$, a secante cresce. Em $\dfrac{\pi}{2}$, ela dá um salto de $+\infty$. Daí até π, ela cresce até -1. De π até $\dfrac{3\pi}{2}$, decresce até $-\infty$ e dá um salto para $+\infty$ em $\dfrac{3\pi}{2}$, decrescendo em seguida até -1 em 2π.

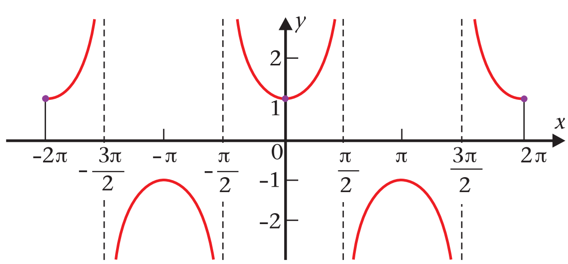
NOTA
Observe que a cossenoide está na região $-1 \leq y \leq 1$ e a secantoide está nas regiões $y \leq -1$ ou $y \geq 1$.



$\{(x, y): y = \sec x, \text{ para } x \in [0, 2\pi]\}$

A secante é uma função periódica de período 2π, e não é injetiva nem sobrejetiva.

Temos abaixo o gráfico da função secante para o intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.



$\{(x, y): y = \sec x\}$

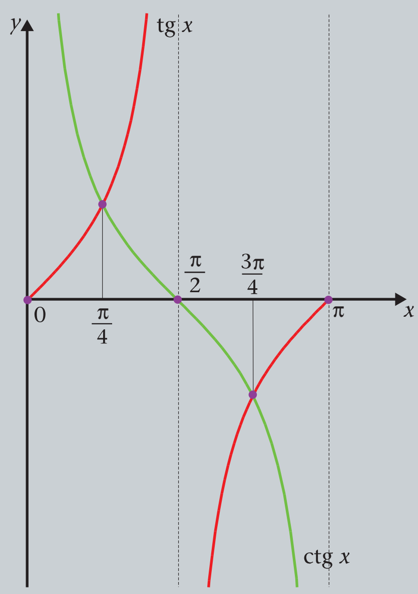
Exercícios resolvidos:

1) Resolver a inequação tg x – ctg $x \geq 0$ no intervalo $(0, \pi)$.

Solução:

Devemos ter tg $x \geq$ ctg x. Os gráficos de y = tg x e y = ctg x se cortam nos pontos $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$.

O gráfico da tangente se situa acima do gráfico da cotangente nos intervalos $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$. A solução será então: $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$



2) Calcule o período da função em que:

i) $y = \text{tg}\,\frac{x}{2}$

Solução:

Devemos ter: $\text{tg}\,\frac{x+p}{2} = \text{tg}\,\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x+p}{2} - \frac{x}{2} = \pi \Rightarrow \frac{p}{2} = \pi \Rightarrow p = 2\pi$

NOTA
Observe que, quando o arco está dividido por 2, o período fica multiplicado por 2.

NOTA
Observe que, quando o arco está multiplicado por 3, o período fica divido por 3.

ii) $y = 2\text{tg } 3x$

Solução:

Temos: $2\text{tg } 3(x + p) = 2\text{tg } 3x \Rightarrow \text{tg } (3x + 3p) = \text{tg } 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + 3p - 3x = \pi \Rightarrow 3p = \pi \Rightarrow p = \dfrac{\pi}{3}$

iii) $y = \sec\left(x + \dfrac{\pi}{5}\right)$

Solução:

Devemos ter: $\sec\left(x + p + \dfrac{\pi}{5}\right) = \sec\left(x + \dfrac{\pi}{5}\right) \Rightarrow$

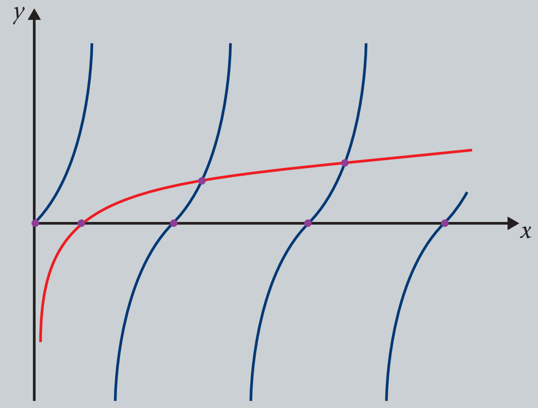
$$\left(x + p + \frac{\pi}{5}\right) - \left(x + \frac{\pi}{5}\right) = 2\pi \Rightarrow p = 2\pi$$

(O período da secante é igual ao do cosseno.)

3) Quantas são as soluções da igualdade $\text{tg } x = \log x$, no intervalo $0 < x < 2\pi$?

Solução:

Podemos verificar quantas são as soluções, construindo os gráficos das funções, $y = \text{tg } x$ e $y = \log x$:

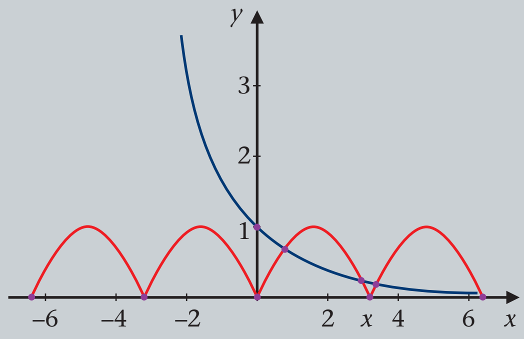


Assim temos um ponto de intersecção perto de $x = 4$. Com o auxílio de um computador encontramos $x = 4{,}09546$.

4) Quantas são as soluções da igualdade $|\text{sen } x| = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, no intervalo $-2\pi < x < 2\pi$?

Solução:

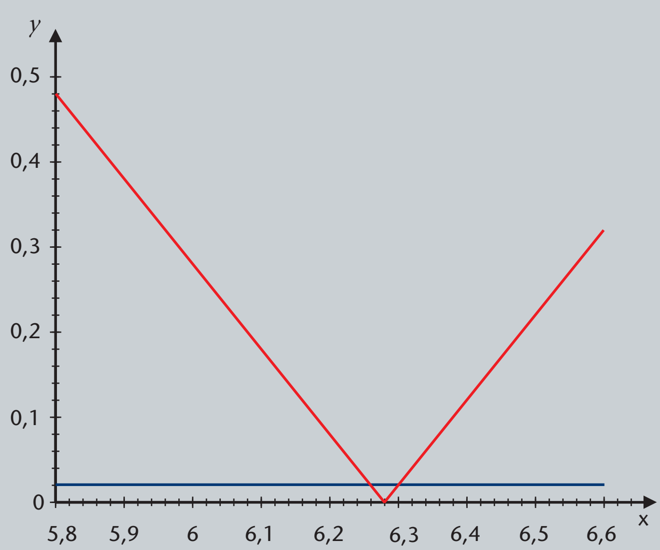
Construindo-se os gráficos de cada uma das funções, temos:



Assim, temos para $x < 0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 1 > |\text{sen } x|$.

Portanto, a igualdade não se verifica; não tem solução para $x < 0$.

Para $x > 0$, o gráfico indica claramente três soluções (uma próxima de $x = 0{,}7$ e duas próximas de $x = \pi$). Como $\text{sen } 2\pi = 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{2\pi}$, o gráfico da função seno está abaixo do gráfico de $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\pi}$ no ponto $x = 2\pi$. Portanto, existe uma quarta solução um pouco antes de 2π.



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Encontre o valor de:

a) tg 1 845°

b) $\text{tg } \frac{13\pi}{3}$

c) tg (–540°)

d) tg 13π

e) $\text{tg } \frac{13\pi}{2}$

2 Determine o domínio da função definida por:

a) $f(x) = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

b) $f(x) = \text{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $f(x) = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

d) $f(x) = \text{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

3 Dê o período das seguintes funções:

a) $f(x) = \text{tg } 2x$

b) $f(x) = \text{tg } 3x$

c) $f(x) = \text{tg } \pi x$

d) $f(x) = \text{ctg } (\pi - 2x)$

e) $f(x) = 14\text{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$

4 Determine m real, para que a igualdade $\text{tg } x = 10 - m^2$ seja possível no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

5 Para que valor de m existe x tal que $\text{tg } x = \sqrt{m^2 - 5m + 4}$?

6 Represente o gráfico de $f(x) = \text{tg } 2x$; forneça o domínio, a imagem e o período dessa função.

7 Esboce o gráfico de $f(x) = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; determine o domínio, a imagem e o período dessa função.

8 Determine o conjunto solução da equação $\text{tg}^2 2x - 1 = 0$.

9 Determine p real para que torne possível as seguintes igualdades:

a) $\csc x = 1 - p$

b) $\sec x = 2p + 2$

c) $\sec x = p^2 + 1$

10 Determine o domínio de:

$f(x) = \sec\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$.

11 Encontre o valor de p, tal que

$\sec \alpha = p - 2,\ \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

12 Qual o conjunto imagem de $f(x) = -3 + 2\sec x$?

14.8 – Funções trigonométricas inversas

Como sabemos, uma função admite inversa se, e somente se, for bijetiva.

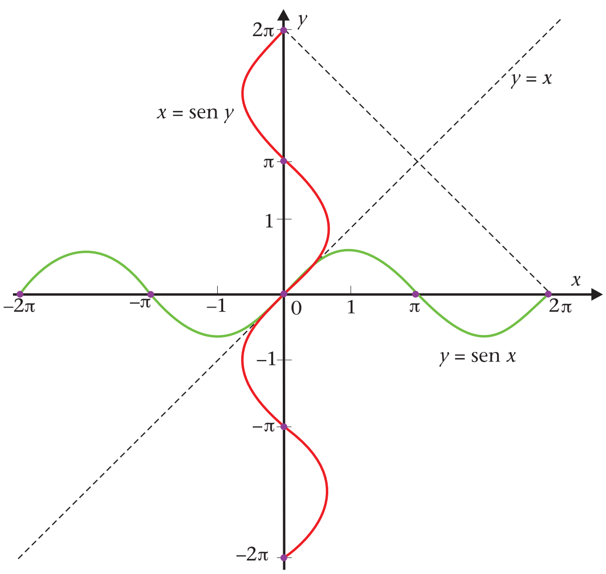
As funções trigonométricas sendo periódicas não são bijetivas e, para torná-las bijetivas, devemos restringir o seu domínio a um conjunto adequado.

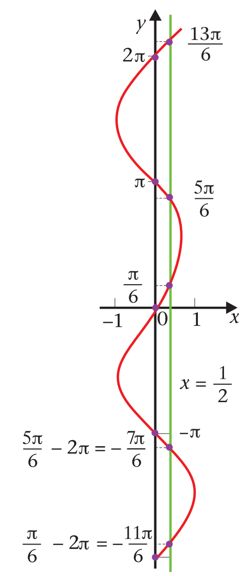
14.8.1 – Inversa da função seno

Consideremos a função sen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y = \text{sen } x$.

Observe que ela não é bijetiva, logo sua inversa não é uma função. A inversa é uma relação. Os gráficos abaixo ilustram esta afirmação.

NOTA
O gráfico da inversa é simétrico do gráfico da função em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, $y = x$.

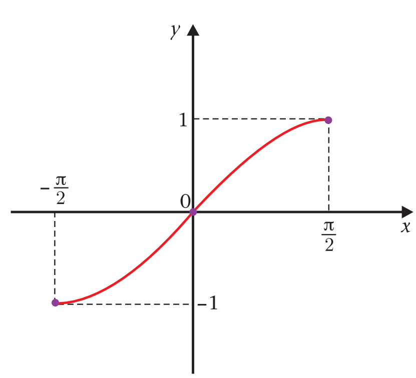




Observe que, se desejássemos os arcos cujos senos fossem iguais a $\frac{1}{2}$ como indica a figura, teríamos só no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ os arcos $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ e $\frac{13\pi}{6}$.

Para eliminarmos esta multiplicidade, restringimos a função seno ao intervalo:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ e } y \in [-1, 1]$$

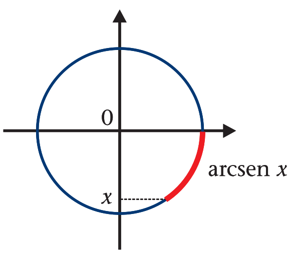


Como essa restrição é bijetiva, ela admitirá uma função inversa que será representada por:

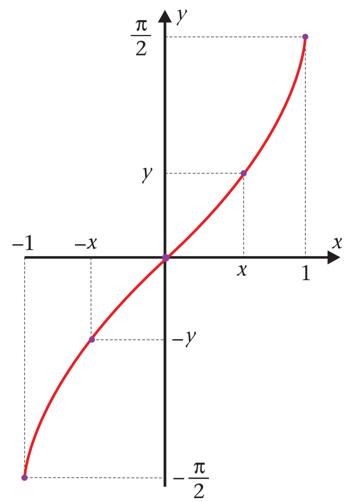
DEFINIÇÃO
Arcsen.

arcsen: $[-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $y = \text{arcsen } x$ se, e somente se, $x = \text{sen } y$

NOTA
Arcsen x é um arco cujo seno é x.



Cujo gráfico é:



Assim:

$$\text{Dom (arcsen)} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$$

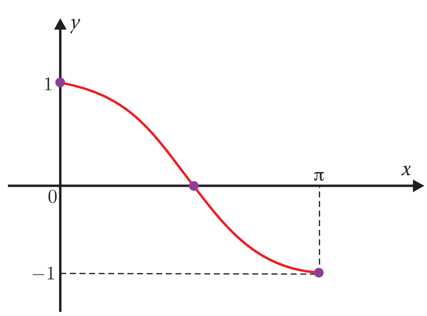
$$\text{Im (arcsen)} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

Observe que: sen (arcsen x) = x. Por outro lado, se $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, então arcsen (sen y) = y.

14.8.2 – Inversa da função cosseno

Analogamente à função seno, a função cosseno não é bijetiva, portanto não tem inversa.

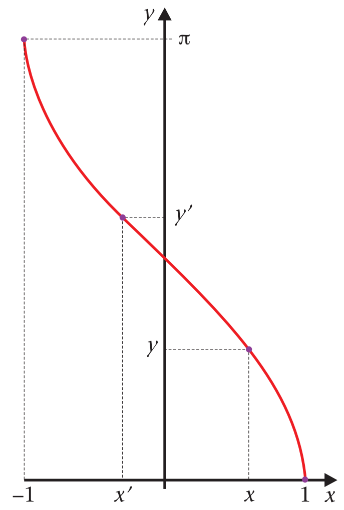
Para resolver esse problema, restringimos a função cosseno ao domínio $x \in [0, \pi]$ e ao contra domínio $y \in [-1, 1]$.



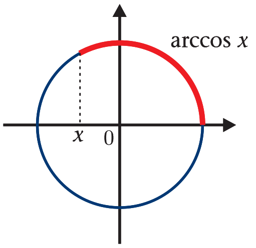
arccos: $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ tal que $y = \text{arccos } x$ se, e somente se, $x = \cos y$

DEFINIÇÃO
Arccos.

Cujo gráfico é:



NOTA
Arccos x é um arco cujo cosseno é x.



Concluímos então:
Dom (arccos) = $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$
Im (arccos) = $\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq \pi\}$

Observe que:

i) $\text{arccos } x = \dfrac{\pi}{2} - \text{arcsen } x$

ii) $\cos(\text{arccos } x) = x$

iii) Se $y \in [0, \pi]$, então $\text{arccos}(\cos y) = y$.

Exemplos:

i) $\text{arcsen}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$, pois $\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ii) $\text{arcsen}\left(\text{sen}\dfrac{7\pi}{8}\right) = \dfrac{\pi}{8}$, pois o arco deve estar entre $-\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2}$

iii) $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + \text{arcsen}\dfrac{1}{2}\right) = \text{sen}\dfrac{2\pi}{3} = \text{sen}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Exercícios resolvidos:

1) Calcule $\cos\left(\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Solução:
Chamando $a = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \operatorname{sen} a = -\frac{1}{3}$.

$\cos a = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Como $a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ então

$\cos\left(\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2) Calcule $\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{5}{13} + \operatorname{arcsen}\frac{12}{13}\right)$.

Solução:

Façamos $a = \operatorname{arcsen}\frac{5}{13} \Rightarrow \operatorname{sen} a = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos a = \frac{12}{13}$

$b = \operatorname{arcsen}\frac{12}{13} \Rightarrow \operatorname{sen} b = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos b = \frac{5}{13}$

Queremos então $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$.

$$\cos(a+b) = \frac{12}{13}\cdot\frac{5}{13} - \frac{5}{13}\cdot\frac{12}{13} = 0$$

3) Resolver a equação $\arccos 2x = 60° - \arccos x$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

Solução:

Apliquemos cos a em ambos os membros da equação:
$\cos(\arccos 2x) = \cos(60° - \arccos x)$
$2x = \cos 60° \cdot \cos(\arccos x) + \operatorname{sen} 60° \cdot \operatorname{sen}(\arccos x)$

$2x = \frac{1}{2}\cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} a$, onde $a = \arccos x \Rightarrow \cos a = x \Rightarrow \operatorname{sen} a = \sqrt{1-x^2}$

A equação fica:

$$2x = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}$$

$$4x - x = \sqrt{3-3x^2} \Rightarrow 9x^2 = 3 - 3x^2 \Rightarrow 12x^2 = 3$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

NOTA
Observe que sen $a > 0$ porque a função arccos está definida em $[0, \pi]$.

Verificando as possíveis soluções temos:

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{arccos } 2x = \text{arccos } 1 = 0 \\ 60° - \text{arccos } x = 60° - \text{arccos } \frac{1}{2} = 60° - 60° = 0° \end{cases}$$

(serve)

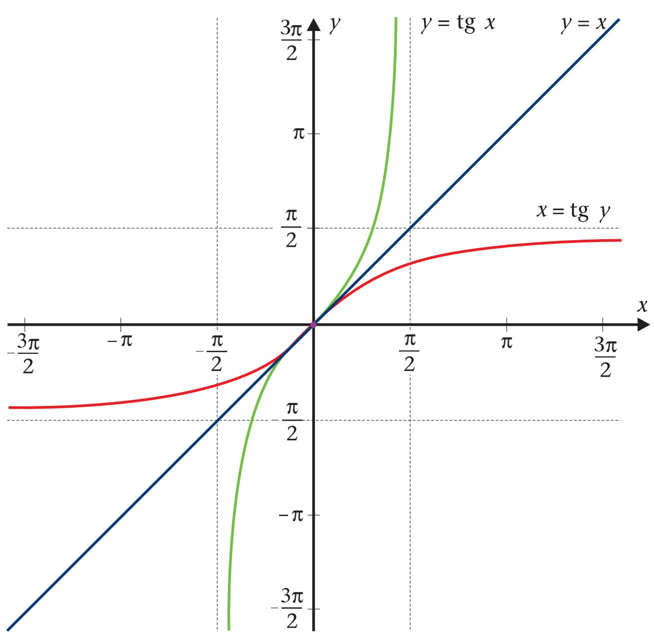
$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{arccos } 2x = \text{arccos } (-1) = 180° \\ 60° - \text{arccos } x = 60° - \text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = 60° - 120° = -60° \end{cases}$$

(não serve)

$$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

14.8.3 – Inversa da função tangente

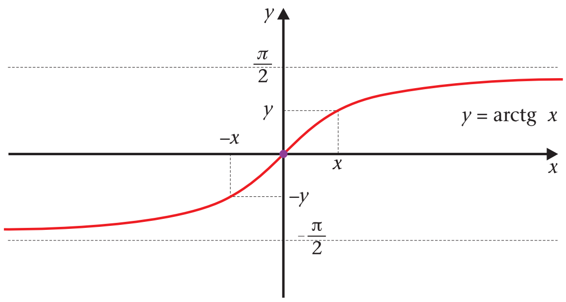
Para que a função tangente tenha inversa, restringe-se a função ao domínio $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e ao contradomínio $\mathbb{R}$.



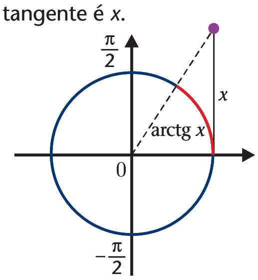
arctg: $\mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $y = \text{arctg } x$ se, e somente se, $x = \text{tg } y$

DEFINIÇÃO
Arctg.

Cujo gráfico é:



NOTA
Arctg x é um arco cuja tangente é x.



Temos que:

Dom (arctg) = $\mathbb{R}$

Im (arctg) = $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Observe que:

i) tg (arctg x) = x

ii) Se $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, então arctg (tg y) = y.

Exemplos:

i) arctg 1 = $\frac{\pi}{4}$, pois tg $\frac{\pi}{4}$ = 1

ii) arctg 0 = 0, pois tg 0 = 0

iii) arctg (tg 315°) = arctg (–1) = –45°

Quando as funções trigonométricas têm inversas, isto é, quando estão restritas aos intervalos adequados, usam-se as letras iniciais maiúsculas ou com índices superiores –1.

$y = \text{Arc sen}\, x = \text{sen}^{-1} x$
$y = \text{Arc cos}\, x = \cos^{-1} x$
$y = \text{Arc tag}\, x = \text{tag}^{-1} x$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1 Dê o valor de:

a) $\operatorname{arcsen} \frac{1}{2}$

b) $\operatorname{arcsen} \left(-\frac{1}{2}\right)$

c) arcsen 1

d) $\operatorname{arcsen} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

e) arcsen (–1)

f) $\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\operatorname{arccos} \frac{1}{2}$

h) arccos 1

i) $\operatorname{arccos} \left(-\frac{1}{2}\right)$

j) $\operatorname{arccos} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

k) arctg 1

l) arctg 0

m) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$

n) sen (arctg 1)

o) cos (arctg 0)

p) $\operatorname{tg} \left(\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

2 Determine as soluções da equação $5\operatorname{sen} x - 2 = 0$.

3 Determine o domínio da função $f(x) = \operatorname{arcsen} 2x$.

4 Dê o valor de:

a) $y = \cos \left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2}\right)$

b) $y = \cos (\operatorname{arctg} 0)$

c) $y = \cos \left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{3}\right)$

5 Determine o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da equação $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$.

6 Qual o valor de $f(x) = \operatorname{sen} (\operatorname{arctg} \sqrt{3})$?

7 Dê o valor de $\operatorname{tg} \left(\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arctg} 3\right)$.

8 Dê o valor de $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.

9 Determine, em $\mathbb{R}$, a solução da equação $\operatorname{arcsen} 2x = \operatorname{arccos} x$.

10 Dê o domínio da função $f(x) = \operatorname{arccos} 5x$.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 (FGV-SP) O período da função dada por $y = 3\text{sen}\left(2\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$ é:

(A) $\frac{1}{2}$
(B) $\frac{\pi}{2}$
(C) 2π
(D) 1
(E) $\frac{\pi}{4}$

2 (UFMS) O período da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -1 + 3\text{sen}\ 2x$, é:

(A) 4π
(B) π
(C) $\frac{2\pi}{3}$
(D) $\frac{\pi}{2}$
(E) $\frac{\pi}{3}$

3 (UFSCar-SP) O período da função $3\cos 4x$ é:

(A) $\frac{\pi}{8}$
(B) $\frac{3\pi}{4}$
(C) $\frac{2\pi}{3}$
(D) $\frac{\pi}{2}$
(E) $\frac{\pi}{4}$

4 (Ufes) O período da função $f(x) = 4\cos\left(\frac{1}{4}x + 3\right)$ é:

(A) 8π
(B) 7π
(C) 6π
(D) 3π
(E) 2π

5 (FEI-SP) O menor período da função $f(x) = \text{sen}\ x \cdot \cos x$ é:

(A) π
(B) $2k\pi$
(C) $\frac{\pi}{4}$
(D) $\frac{\pi}{2}$
(E) n.d.a.

6 (Umesp) O período da função f definida por $f(x) = \text{sen}^4 x$ é:

(A) $\frac{\pi}{2}$
(B) $\frac{\pi}{4}$
(C) π
(D) 2π
(E) $\sqrt[4]{2\pi}$

7 (Ufam) O período da função $y = 8\text{sen}\ x \cdot \cos x$ é igual a:

(A) $\frac{\pi}{2}$
(B) $\frac{\pi}{4}$
(C) π
(D) 2π
(E) 8π

8 (Mack-SP) $f_1(x) = \text{sen}\ x + \cos x$ e $f_2(x) = 3\text{sen}\ x \cdot \cos x$. Relativamente às funções anteriores, de domínio $\mathbb{R}$, fazem-se as afirmações:

I) O período de $f_1(x)$ é 2π.
II) O maior valor que $f_2(x)$ pode assumir é 1,5.
III) O conjunto imagem de $f_1(x)$ está contido no conjunto imagem de $f_2(x)$.

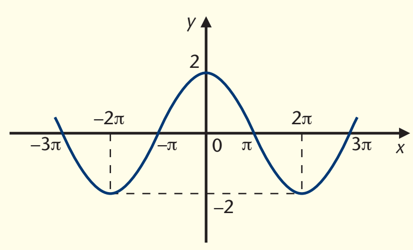
Então:

(A) todas são verdadeiras.
(B) somente II e III são verdadeiras.
(C) somente I e III são verdadeiras.
(D) somente I e II são verdadeiras.
(E) somente III é verdadeira.

9 (Mack-SP) Se k e p são números naturais não nulos tais que o conjunto imagem da função $f(x) = 2k + p \cdot \cos(px + k)$ é $[-2, 8]$, então o período de $f(x)$ é:

(A) $\frac{\pi}{7}$
(B) $\frac{2\pi}{7}$
(C) $\frac{2\pi}{3}$
(D) $\frac{\pi}{5}$
(E) $\frac{2\pi}{5}$

10 (Puccamp-SP) Na figura a seguir tem-se parte do gráfico da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = k \cdot \cos(tx)$.



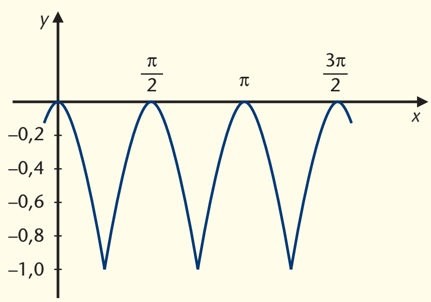
Nessas condições, calculando-se $k - t$ obtém-se:

(A) $-\frac{3}{2}$
(B) -1
(C) 0
(D) $\frac{3}{2}$
(E) $\frac{5}{2}$

11 (FEI-SP) A expressão $f(t) = 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$, $0 \leq t \leq 12$, representa a variação da profundidade do trabalho de uma ferramenta de corte em relação ao tempo de operação. Em que instante essa profundidade é máxima?

(A) $t = 9$
(B) $t = 12$
(C) $t = 6$
(D) $t = 3$
(E) $t = 2$

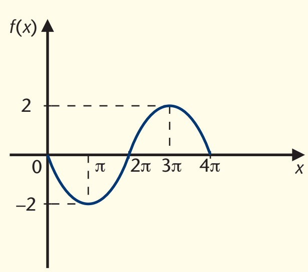
12 (Cefet-MG)



A figura acima representa o gráfico da função:

(A) $\cos 2x - 1$
(B) $1 - \cos 2x$
(C) $2\cos \frac{x}{2} - 2$
(D) $|\cos 2x| - 1$
(E) $\left|\cos \frac{x}{2}\right| - 1$

13 (UFR-RJ) Analise o gráfico abaixo.



A função f: $[0, 4\pi] \to \mathbb{R}$ que pode ter como gráfico o desenho acima é $f(x)$ igual a:

(A) $-2\text{sen}\,(2x)$
(B) $4\text{sen}\,(3x)$
(C) $-3\text{sen}\,(2x)$
(D) $-2\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$
(E) $2\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

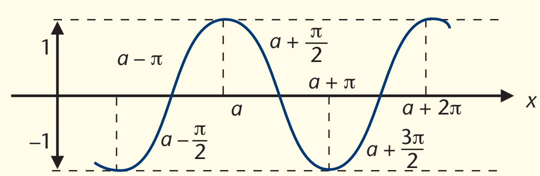
14 (Fatec-SP) Considerando as funções trigonométricas definidas por $f(x) = 2\text{sen}\,x$, $g(x) = \text{sen}\,2x$ e $h(x) = 2 + \text{sen}\,x$, tem-se:

(A) $f(x) > h(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
(B) $g(x) \leq h(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
(C) $f(x)$ e $g(x)$ têm períodos iguais.
(D) $f(x)$ e $h(x)$ têm períodos diferentes.
(E) $g(x) \leq \text{sen}\,x \leq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

15 (FEI-SP) Sobre a função $f(x) = |\text{sen}\,x|$ é válido afirmar-se que:

(A) $f(x) = f(2x)$
(B) $f(-x) = -f(x)$
(C) $f(x) = f(x + \pi)$
(D) $f(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
(E) $f(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

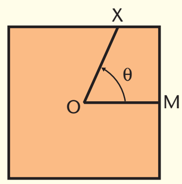
16 (UFMT) A figura abaixo mostra o gráfico de uma função trigonométrica $f(x)$ num sistema cartesiano ortogonal, em que não está fixada a posição do eixo Oy e as abscissas são dadas em função de uma constante real a.



A partir dessas informações, julgue os itens:

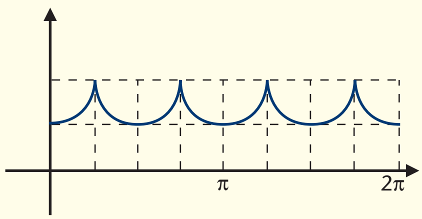
a) O gráfico da função passa pela origem do sistema quando $a = -\frac{\pi}{2}$.
b) O período da função é 2π, qualquer que seja a constante real a.
c) A soma do quadrado de $f(x)$ para $a = -\frac{\pi}{2}$ com o quadrado de $f(x)$ para $a = \frac{\pi}{2}$ é igual a 1, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

17 (Fuvest-SP) O quadrado abaixo tem O como centro e M como ponto médio de um de seus lados. Para cada ponto X pertencente aos lados do quadrado, seja θ o ângulo MÔX, medido em radianos, no sentido anti-horário.

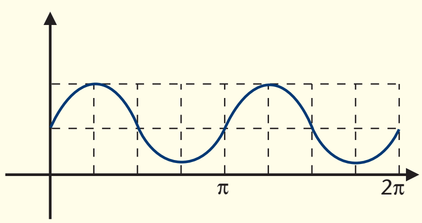


O gráfico que melhor representa a distância de O a X, em função de θ, é:

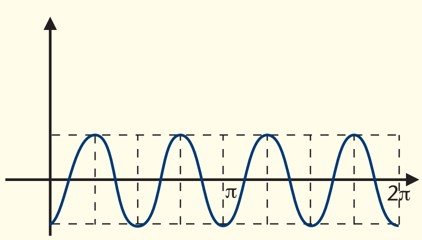
(A)



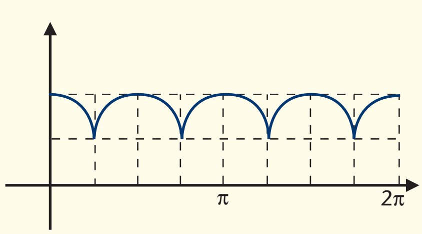
(B)



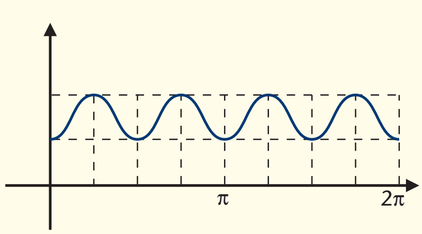
(C)



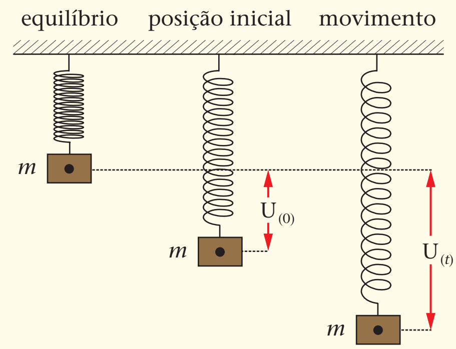
(D)



(E)



18 (UnB-DF) A função U, definida por $U(t) = r\cos(\omega t - \theta)$, descreve o deslocamento, no tempo t, de um bloco de massa m, preso na extremidade de uma mola, em relação à posição de equilíbrio, conforme a figura abaixo. A posição de equilíbrio, nesse caso, é aquela em que $U(t) = 0$. A constante ω depende apenas da mola e da massa m. As constantes r e θ dependem da maneira como o sistema é colocado em movimento.



Com base na situação apresentada, julgue os itens que se seguem:

a) A função U tem período igual a $(2\pi - \theta)$.

b) No instante $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$, o bloco está novamente na posição inicial.

c) O maior deslocamento do bloco, em relação à posição de equilíbrio, é igual a r.

d) Em qualquer intervalo de tempo que tenha duração igual a $\dfrac{4\pi}{3\omega}$, o bloco passa pela posição de equilíbrio.

19 (Vunesp-SP) Uma máquina produz diariamente x dezenas de certo tipo de peças. Sabe-se que o custo de produção $C(x)$ e o valor de venda $V(x)$ são dados, aproximadamente, em milhares de reais, respectivamente, pelas funções:

$$C(x) = 2 - \cos\left(\frac{x\pi}{6}\right) \text{ e } V(x) = 3\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{x\pi}{12}\right), 0 \le x \le 6.$$

O lucro, em reais, obtido na produção de 3 dezenas de peças é:

(A) 500

(B) 750

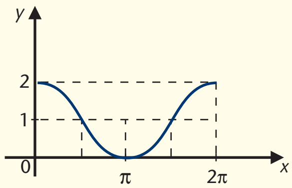
(C) 1 000

(D) 2 000

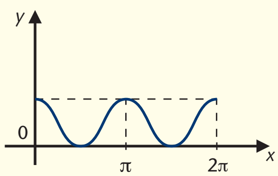
(E) 3 000

20 (Mack-SP) Em $[0, 2\pi]$, a melhor representação gráfica da função real definida por $f(x) = \dfrac{2 - \text{sen}^2\, x - \text{sen}^4\, x}{3 - \cos^2 x}$ é:

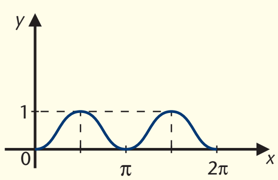
(A)



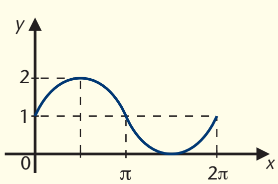
(B)



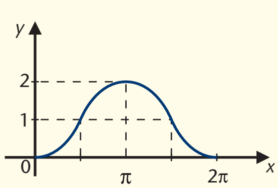
(C)



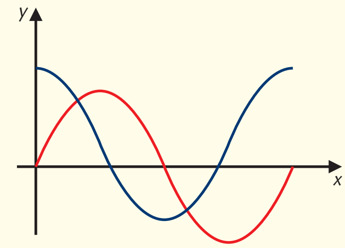
(D)



(E)



21 (Mack-SP)



A partir dos gráficos de $f(x) = \text{sen}\ x$ e $g(x) = \dfrac{1}{2} + \cos x$, esboçados no intervalo $[0,\ 2\pi]$, considere as afirmações:

I) A equação $f(x) = g(x)$ apresenta uma única solução nesse intervalo.

II) $f\left(\dfrac{9\pi}{10}\right) > g\left(\dfrac{9\pi}{10}\right)$

III) Nesse intervalo, para todo x tal que $g(x) < 0$, temos $f(x) > 0$.

Então:

(A) somente III é verdadeira.

(B) somente I é verdadeira.

(C) somente II é verdadeira.

(D) I, II e III são falsas.

(E) I, II e III são verdadeiras.

22 (Unifesp) Seja a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \text{sen}\ x$.
Considere as afirmações seguintes.

I) A função $f(x)$ é uma função par, isto é, $f(x) = f(-x)$, para todo x real.

II) A função $f(x)$ é periódica de período 2π, isto é, $f(x + 2\pi) = f(x)$, para todo x real.

III) A função $f(x)$ é sobrejetora.

IV) $f(0) = 0$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

São verdadeiras as afirmações:

(A) I e III, apenas.

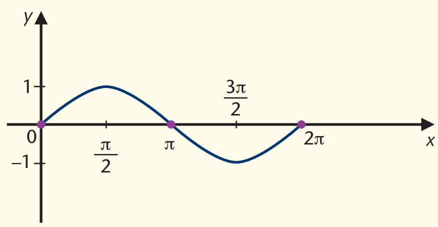
(B) III e IV, apenas.

(C) II e IV, apenas.

(D) I, II e III, apenas.

(E) I, II, III e IV.

23 (UFSM-RS) A função $f(x)$ = sen x, $x \in \mathbb{R}$, tem como gráfico a senoide que, no intervalo $[0, 2\pi]$, está representada na figura abaixo.



Se $g(x) = a\text{sen}\ 3x$ onde $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, assinale verdadeira (V) ou falsa (F) em cada uma das afirmações a seguir.

I) O domínio da função g é igual ao domínio da função f, independente do valor de a.

II) Para todo a, o conjunto imagem da função f está contido no conjunto imagem da função g.

III) O período da função g é maior que o período da função f.

A sequência correta é:

(A) V — F — F
(B) V — V — F
(C) F — V — V
(D) V — F — V
(E) F — V — F

24 (Aman-RJ) Um estudante está encarregado de levantar graficamente a curva y = sen x no sistema cartesiano ortogonal. Que abscissa aproximada marcará no eixo dos x quando x for igual a 126°?

(A) 1,4
(B) 1,6
(C) 1,8
(D) 2,0
(E) 2,2

25 (Umesp) A intersecção dos gráficos das funções seno e tangente para $0 < x < \pi$:

(A) é vazia.
(B) contém um e um só ponto.
(C) contém o ponto de abscissa $\frac{\pi}{4}$.
(D) contém mais de um ponto.
(E) depende da escala usada.

26 (Cescem-SP) Entre as afirmações abaixo, uma, e apenas uma, é verdadeira. Assinale-a.

(A) O seno e o cosseno são funções tais que quando uma cresce a outra decresce.

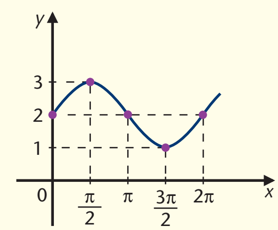
(B) $\cos x - \text{sen}\, x \geq 0$, para todo x real, pois $\cos x \geq \text{sen}\, x$

(C) $\text{tg}\, \frac{x}{4}$ é periódica de período 2π, pois a tangente é uma função periódica de período π

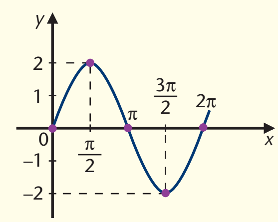
(D) $1 - 2\,\text{sen}\, x \cdot \cos x \geq 0$, para todo x real, pois $(\text{sen}\, x - \cos x)^2 = 1 - 2\text{sen}\, x \cdot \cos x$

27 (Unificado-RS) Assinale o gráfico que representa a função real definida por $y = 2 -$ sen x.

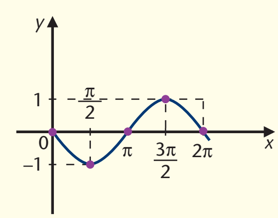
(A)



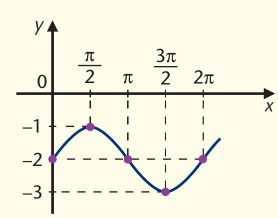
(B)



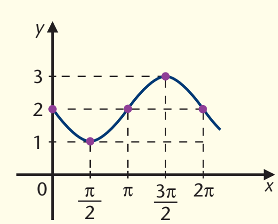
(C)



(D)

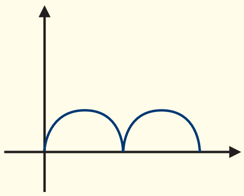


(E)

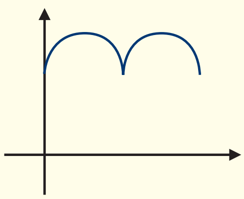


28 (FEI-SP) Assinale a alternativa cujo gráfico representa a função $f(x) = 1 + |\text{sen}\, x|$, $0 \le x \le 2\pi$.

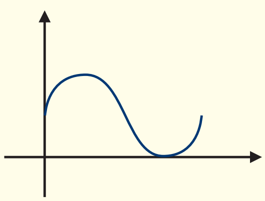
(A)



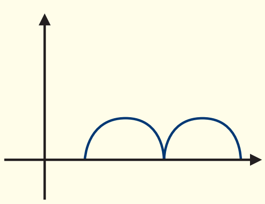
(B)



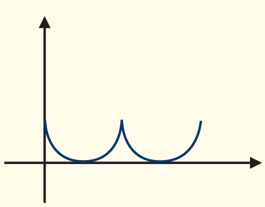
(C)



(D)

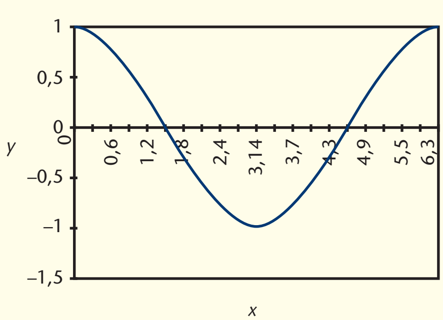


(E)

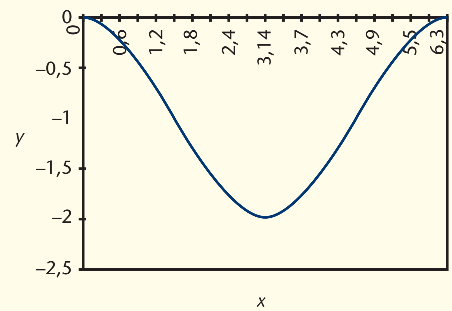


29 (Unirio-RJ) Assinale o gráfico que melhor representa a função real definida por $y = |\cos x| - 1$.

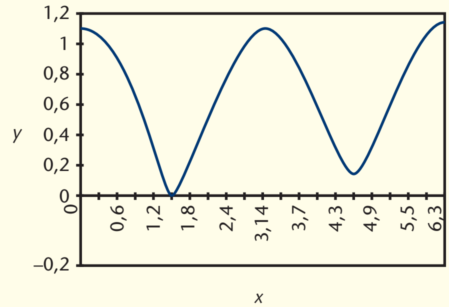
(A)



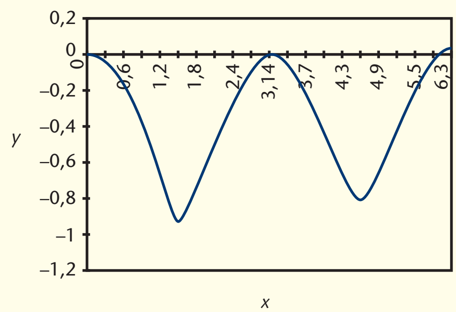
(B)



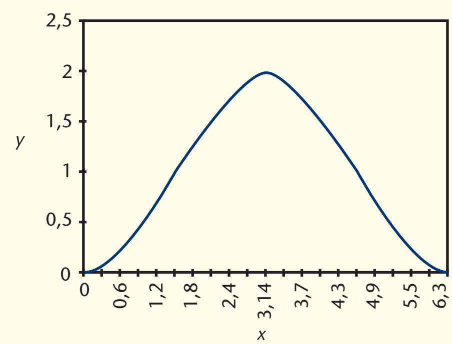
(C)



(D)



(E)



30 (Unifor-CE) Os gráficos das funções f e g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \dfrac{2}{\pi}x$ e $g(x) = \text{sen}\, x$:

(A) não têm pontos comuns.
(B) interceptam-se em um único ponto.
(C) interceptam-se no máximo em dois pontos.
(D) têm infinitos pontos comuns.
(E) têm somente três pontos comuns.

31 (UFPI) O menor valor de $\dfrac{3}{5 + \text{sen}\, x}$, para x real, é:

(A) $\dfrac{1}{2}$

(B) $\dfrac{3}{4}$

(C) $\dfrac{1}{5}$

(D) 1

(E) $\dfrac{2}{7}$

32 (UFES) Uma pequena massa, presa à extremidade de uma mola, oscila segundo a equação $f(t) = 8\text{sen}\,(3\pi t)$, que representa a posição da massa no instante t segundos, medida em centímetros a partir da posição de equilíbrio. Contando a partir de $t = 0$, em que instante a massa passará pela sétima vez a uma distância $|f(t)|$ de 4 cm da posição de equilíbrio?

(A) $\dfrac{11}{18}$

(B) $\dfrac{13}{18}$

(C) $\dfrac{17}{18}$

(D) $\dfrac{19}{18}$

(E) $\dfrac{23}{18}$

33 (UnB-DF) Em um modelo para descrever o processo respiratório, considera-se que o fluxo de ar F na traqueia, em ambos os sentidos — inspiração e expiração —, e a pressão interpleural P — pressão existente na caixa torácica produzida pelo diafragma e por músculos intercostais — são funções periódicas do tempo t, havendo entre elas uma diferença de fase. Essas funções são descritas, para $t > 0$, por:

$$\begin{cases} F(t) = A\,\text{sen}\,(\omega t) \\ P(t) = C - BF\left[t + \left(\dfrac{k}{\omega}\right)\right] \end{cases}$$

em que k, A, B, C são constantes reais positivas e ω é a frequência respiratória.
Com base nessas informações, julgue os itens seguintes:

a) O fluxo máximo de ar na traqueia é igual a A.

b) $P(t) = C - BA\,\text{sen}\,(\omega t + k)$

c) As funções P e F têm o mesmo período.

d) Sempre que o fluxo de ar na traqueia for nulo, a pressão interpleural será máxima.

34 (Mack-SP) A função real definida por $f(x) = k \cdot \cos\,(px)$, $k > 0$ e $p \in \mathbb{R}$, tem o período 7π e conjunto imagem $[-7, 7]$. Então, $k \cdot p$ vale:

(A) 7

(B) $\dfrac{7}{2}$

(C) 2

(D) $\dfrac{2}{7}$

(E) 14

35 (UnB-DF) Supondo que, em determinada região, a temperatura média semanal T (em °C) e a quantidade de energia solar média semanal Q que atinge a região (em kcal/cm²) possam ser expressas em função do tempo t, em semanas, por meio das funções

$$T(t) = 10 + 12\,\text{sen}\; 2\pi\left(\frac{t - 15}{52}\right) \text{ e}$$

$$Q(t) = 400 + 200\,\text{sen}\; 2\pi\left(\frac{t - 11}{52}\right),$$

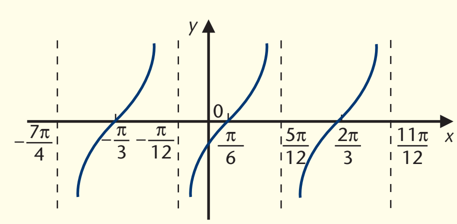
julgue os itens a seguir:

a) A maior temperatura média semanal é de 22 °C.

b) Na 50ª semana, a quantidade de energia solar média é mínima.

c) Quando a quantidade de energia solar média é máxima, a temperatura média semanal também é máxima.

36 (Puccamp-SP) Na figura a seguir tem-se o gráfico de uma função f, de $A \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.



É correto afirmar que:

(A) f é crescente para todo x real tal que $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{2\pi}{3}$.

(B) f é positiva para todo x real tal que $0 < x < \dfrac{5\pi}{12}$.

(C) o conjunto imagem de f é $\mathbb{R} - \{0\}$.

(D) o domínio de f é $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(E) o período de f é $\dfrac{\pi}{2}$.

37 Todos os arcos entre 0 e 2π rad que satisfazem à desigualdade: $\cos x + \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} x > \sqrt{2}$
estão compreendidos entre:

(A) $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{7\pi}{12}$ rad

(B) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ rad

(C) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$ rad

(D) n.d.a.

38 (Cescea-SP) A solução da inequação

$\operatorname{sen} 2x \cdot \left(\sec^2 x - \frac{1}{3}\right) \leq 0$, no intervalo fechado $[0, 2\pi]$, é:

(A) $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ ou $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$

(B) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq x < \frac{3\pi}{2}$

(C) $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ ou $\frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi$

(D) $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ ou $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$

39 (Mack-SP) Considere a condição $x^2 + x > \frac{1}{4} - \operatorname{sen}\alpha$ para todo x real, $0 \leq \alpha \leq \pi$ e sejam os intervalos $\left[0, \frac{\pi}{6}\right], \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right], \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ e $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$; então o número de intervalos que contém pelo menos um valor de α que satisfaz a condição dada é:

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

40 (UFSC) Determine a soma dos números associados às proposições *verdadeiras*:

(01) Se $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então o valor de $\operatorname{sen} x - \cos x$ é igual a $\frac{1}{5}$.

(02) A menor determinação positiva de um arco de 1 000° é de 280°.

(04) Os valores de m, de modo que a expressão $\operatorname{sen} x = 2m - 5$ exista, estão no intervalo $[2, 3]$.

(08) $\operatorname{sen} x > \cos x$ para $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

(16) A medida em radianos de um arco de 225° é $\frac{11\pi}{6}$.

(32) Se $\operatorname{sen} x > 0$, então $\operatorname{cossec} x < 0$.

(64) A solução da equação
$2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x = 2$ para $0 \leq x \leq 2\pi$ é
$x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.

41 (Cesgranrio-RJ) Se $0 \leq x \leq 2\pi$, os valores de x tais que $\operatorname{sen} x \leq \cos x$ são:

(A) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ e $\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$

(B) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4} \leq x \leq 2\pi$

(C) $0 \leq x \leq \pi$

(D) $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$

(E) $\pi \leq x \leq 2\pi$

42 (Cescea-SP) Sejam x e y dois reais tais que $0 \leq x < y < \frac{\pi}{2}$.
Assinale a afirmação falsa:

(A) $2^{\operatorname{tg} x} < 2^{\operatorname{tg} y}$

(B) $\cos x < \cos y$

(C) $\operatorname{sen} x < \operatorname{sen} y$

43 (Umesp) Os pontos da circunferência trigonométrica correspondentes às soluções do sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 2x > 0 \\ \operatorname{cotg} x < 0 \end{cases}$$

(A) estão todos no primeiro quadrante.

(B) estão todos no segundo quadrante.

(C) estão todos no terceiro quadrante.

(D) estão todos no quarto quadrante.

(E) não existem.

44 (Umesp) Para $0 \leq x \leq 2\pi$, o conjunto solução de $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 > 1$ é:

(A) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 < x < \frac{\pi}{2}\right\}$

(B) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$

(C) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$

(D) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$

(E) $\varnothing$

45 (Unifor-CE) Se o número real θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, satisfaz a inequação $\text{tg}\ \pi \geq 1$, então:

(A) $\pi \leq 4\theta < 2\pi$

(B) $\frac{3\pi}{2} \leq 3\theta < 3\pi$

(C) $\frac{\pi}{4} \leq 2\theta < 2\pi$

(D) $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \pi$

(E) $\frac{\pi}{4} \leq \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$

46 (UFMT) Em relação à função $f(x) = 2 + \text{sen}\ 2x$, julgue os itens:

a) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $1 \leq f(x) \leq 3$.

b) A função f é par.

c) No intervalo $[0, 2\pi]$, a equação $f(x) = 0$, apresenta três soluções.

47 (FEI-SP) Se $0 < x < 2\pi$ e $\text{sen}\ x > \cos x$ então:

(A) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$

(B) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{8} < x < \frac{7\pi}{8}$

(D) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

(E) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$

48 (UEL-PR) Se $x \in [0, 2\pi]$, então $\cos x > \frac{1}{2}$ se, e somente se, x satisfazer à condição:

(A) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

(B) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$

(C) $\pi < x < 2\pi$

(D) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ou $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$

(E) $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3} < x \leq 2\pi$

49 (Mack-SP) Supondo x real, a desigualdade $\cos(\cos x) > 0$ é verdadeira:

(A) somente se $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4}$.

(B) somente se $-\frac{\pi}{4} < x < 0$.

(C) somente se $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

(D) somente se $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$.

(E) sempre.

50 (Unioeste-PR) Sobre a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3\cos 2x$, calcule a soma das alternativas corretas:

(01) $f(0) = 0$

(02) É uma função periódica de período 2π.

(04) O maior valor que $f(x)$ assume é 6.

(08) Para todo x, $|f(x)| \leq 3$.

(16) Para todo x, $f(x) = 3 - 6\text{sen}^2 x$.

(32) Para rodo x, $f(x) = f(-x)$.

51 (ITA-SP) Considere os contradomínios das funções arco-seno e arco-cosseno como sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $[0, \pi]$, respectivamente. Com respeito à função $f: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $f(x) = \text{arcsen}\ x + \text{arccos}\ x$, temos que:

(A) f é não crescente e ímpar.

(B) f não é par nem ímpar.

(C) f é sobrejtora.

(D) f é injetora.

(E) f é constante.

52 (UFBA) Calcule a soma dos números associados aos itens corretos:

(01) Sendo $\text{sen}\ x = -\frac{4}{5}$ e x pertencente ao terceiro quadrante, então $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{5}$.

(02) Se $x + y = \frac{\pi}{3}$, então $\cos(3x - 3y) = 2\text{sen}^2 3y - 1$.

(04) Existe $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}\right]$, tal que $\text{sen}^2 x + 3\cos x = 3$.

(08) A função inversa de $f(x) = \cos x$ é $g(x) = \sec x$.

(16) Num triângulo, a razão entre dois de seus lados é 2, e o ângulo por eles formado mede 60°; então o triângulo é retângulo.

53 (ITA-SP) Seja S o conjunto de todas as soluções reais da equação $\sec\left[\frac{\text{arctg}\ 1}{(1 + e^x)} - \text{arctg}\ (1 - e^x)\right] = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Então:

(A) $S = \varnothing$

(B) $S = \mathbb{R}$

(C) $S \subset [1, 2]$

(D) $S \subset [-1, 1]$

(E) $S = [-1, 2]$

54 (UFRS) No intervalo real $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, o conjunto solução da desigualdade $\operatorname{sen} x \cos x \leq \frac{1}{4}$ é:

(A) $\left[0, \frac{\pi}{15}\right]$

(B) $\left[0, \frac{\pi}{12}\right]$

(C) $\left[0, \frac{\pi}{10}\right]$

(D) $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$

(E) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

55 (UFJF-MG) Se θ for um ângulo tal que $0° < \theta < 90°$ e $\cos \theta < \frac{1}{5}$, é correto afirmar que:

(A) $0° < \theta < 30°$

(B) $30° < \theta < 45°$

(C) $45° < \theta < 60°$

(D) $60° < \theta < 75°$

(E) $75° < \theta < 90°$

56 (Uepa) Uma pessoa avista o alto de uma torre sob um ângulo de medida x, tal que: $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} 75°}{1 + \cos 75°}$, então:

(A) $x = 150°$

(B) $x = 137{,}5°$

(C) $x = 105°$

(D) $x = 75°$

(E) $x = 37{,}5°$

57 (Cefet-PR) Considere $A = \operatorname{arcsen} \frac{x}{y}$ e $B = \operatorname{arcsen} \frac{y}{2y + x}$, com A e B pertencentes ao 1º quadrante. Se x = 3 e $y = 5$, então sen (A + B) é igual a:

(A) $-\frac{16}{65}$

(B) $\frac{65}{56}$

(C) $\frac{16}{65}$

(D) $\frac{56}{65}$

(E) $-\frac{56}{65}$

58 (ITA-SP) Considere as funções $f(x) = \frac{(5 + 7^x)}{4}$, $g(x) = \frac{(5 - 7^x)}{4}$ e $h(x) = \operatorname{arctg} x$. Se a é tal que $h(f(a)) + h(g(a)) = \frac{\pi}{4}$, então $f(a) - g(a)$ vale:

(A) 0

(B) 1

(C) $\frac{7}{4}$

(D) $\frac{7}{2}$

(E) 7

59 (Mack-SP) O valor de $\operatorname{tg}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right]$ é:

(A) $\sqrt{2}$

(B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(C) $3\sqrt{2}$

(D) $2\sqrt{2}$

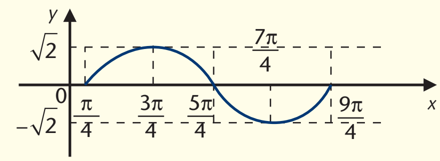
(E) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

60 (Fatec-SP) O gráfico que melhor representa a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$ está na alternativa:

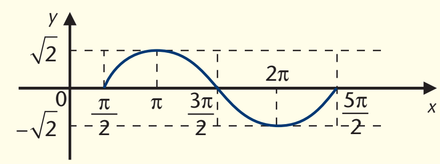
Dados: $\cos a - \cos b = -2\operatorname{sen} \frac{a + b}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{a - b}{2}$ e

$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen} \frac{a - b}{2} \cdot \cos \frac{a + b}{2}$.

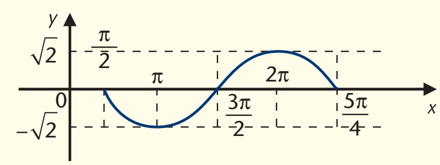
(A)



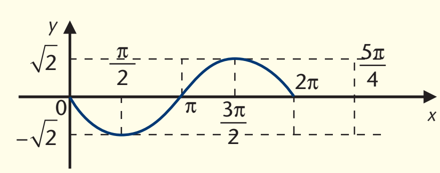
(B)



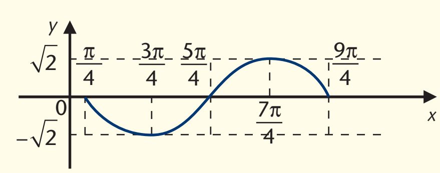
(C)



(D)



(E)



61 (FEI-SP) Na estação de trabalho de pintura de peças de uma fábrica, a pressão em um tambor de ar comprimido varia com o tempo conforme a expressão $P(t) = 50 + 50 \text{ sen } \left(t - \frac{\pi}{2}\right)$, $t > 0$.

Assinale a alternativa em que o instante t corresponda ao valor mínimo da pressão.

(A) $t = \frac{\pi}{2}$

(B) $t = \pi$

(C) $t = \frac{3\pi}{2}$

(D) $t = 2\pi$

(E) $t = 3\pi$

62 (PUC) Resolva a equação $\text{sen}^2 x - \cos^2 x(\pi - x) = \frac{1}{2}$.

63 (UFRS) Se x = arctg (–1), lembrando que $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, o valor de x, convertido em graus, é:

(A) 0°

(B) 30°

(C) 45°

(D) 60°

(E) –45°

64 (PUC-PR) Se $\text{arctg}\,(x+2) + \text{arctg}\,x = \frac{3\pi}{4}$, então x^2 vale:

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

65 (FGV-SP) O valor da expressão $y = \text{arctg}\,\frac{1}{2} + \text{arctg}\,\frac{1}{3}$ é:

(A) $\frac{\pi}{3}$

(B) $\frac{\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{2}$

(D) $\frac{\pi}{6}$

(E) $\frac{5\pi}{6}$

66 (Mack-SP) O valor da expressão:

$$E = \text{arcsen}\,\frac{1}{2} + \text{arcsen}\,(-1) + \text{arcsen}\,\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{é:}$$

(A) $\frac{3\pi}{4}$

(B) $\frac{5\pi}{6}$

(C) $\frac{3\pi}{2}$

(D) 0

(E) π

67 (PUC-SP) Se $y = \text{tg}\left[\text{arcsen}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$, então:

(A) $y = \frac{5}{13}$

(B) $y = \frac{3}{4}$

(C) $y = -\frac{3}{4}$

(D) $y = -\frac{5}{2}$

(E) $y = -1$

68 (Fatec-SP) Determine o domínio da função

$$y = \text{arcsen}\left(\frac{3x-1}{2}\right).$$

69 (UF-CE) Se $x = \text{arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, o valor de $\cos 10x$ é:

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $-\frac{1}{2}$

(D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) –1

70 (Unifei-MG) O valor da expressão:

$$y = \text{sen}\left[\text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\,\text{arcsen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{é:}$$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) 0

(D) 1

(E) –1

71 (Mapofei-SP) Determine o domínio da função $f(x) = \text{arccos}\,\frac{1}{x}$.

72 (Cescem-SP) Quanto aos gráficos das funções:

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \text{ tal que } f(x) = \text{sen } x$$

e

$$g: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tal que } g(x) = \text{arcsen } x,$$

pode-se afirmar que:

(A) não têm ponto comum.

(B) são simétricos em relação ao eixo das abscissas.

(C) são simétricos em relação à reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares.

(D) são simétricos em relação à origem do sistema.

(E) são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

GABARITO

Capítulo I
INTRODUÇÃO À LÓGICA

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 25

1 a) V d) F g) F
b) V e) F
c) V f) F

2 $x < -2$

3 $\sim(p \text{ e } q) = (\sim p) \text{ ou } (\sim q)$ (Basta uma ser falsa para para que (p e q) seja falsa.)

4 a) O empregado não foi demitido.
b) O patrão não indenizou o empregado.
c) O empregado foi demitido e o patrão indenizou o empregado.
d) O empregado foi demitido ou o patrão indenizou o empregado.
e) O empregado não foi demitido e o patrão indenizou o empregado.
f) O empregado foi demitido ou o patrão não indenizou o empregado.
g) Não é verdade que o empregado não foi demitido (isto é, o empregado foi demitido).

5 a) $\sim p$ d) p ou q
b) $\sim q$ e) $(\sim p)$ e q
c) $\sim(\sim q) = q$

6 $\sim(x \in A \cap B) = x \notin (A \cap B) =$
$= x \in \bar{A} \cup \bar{B}$

7 a)

p	q	$\sim p$	$\sim p$ e q
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

b)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p$ ou q
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

c)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	p e $\sim q$	$\sim p$ e q	(p e $\sim q$) ou ($\sim p$ e q)
V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F

d)

p	q	r	p e q	$\sim p$	$\sim p$ ou r	(p e q) ou ($\sim p$ ou r)
V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

8 a) Os pombos não têm pelos (mais exatamente: há pelo menos um pombo que não tem pelos).
b) Maria não é estudiosa.
c) O mdc (6, 8) não é 48.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 40

1 a) mdc (2, 3) $\neq$ 1 e mdc (2, 3) = 6
b) $\frac{3}{5} \neq \frac{6}{10}$ e $3 \cdot 10 = 6 \cdot 5$
c) $\frac{3}{7} < 1$ ou $-3 < -7$
d) $2^2 = 4$ e $\sqrt{4} \neq 2$
e) $(-3)^2 = 9$ e $\sqrt{9} \neq -3$
f) $2 \leq 5$ e $3^2 > 5^2$

2 a) V e) V
b) F f) F
c) V g) V
d) V

3 a) F c) V
b) F d) V

4 a) F d) V
b) V e) F
c) V

5 a) V c) V
b) V d) F

6 a) V $\Rightarrow$ V, a resposta é V.
b) F $\Rightarrow$ F, a resposta é V.

7 a) Se está frio, então não está chovendo.
b) Se está frio e está chovendo, então está frio.

8 a) V c) F
b) V d) V

9 a)

p	q	$p \Leftrightarrow q$	p ou q	$\sim(p$ ou $q)$	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \sim(p$ ou $q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	V

b)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p \Rightarrow q)$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

10 a) V(p) = F (isto é, p é falsa)
b) V(p) = V (isto é, p é verdadeira)

11 a) Recíproca: Se Felipe ensina bem a seus alunos, então Felipe é um professor.
b) Contrapositiva: Se Felipe não ensina bem a seus alunos, então Felipe não é um professor.

12 F

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 41

1 B e D

2 A

3 A

4 D

5 B

6 B

7 D

8 B

9 A

10 B

11 B

12 E

13 D

14 A e D

15 E

16 B

17 C

18 a) G, H e X
b) I - V; II - V; III - F

19 C

20 E

21 D

22 A

23 D

24 B

25 C

26 D

27 B

28 A

29 37

30 31

31 C

32 D

33 C

34 E

35 C

Desafio

1 a) Sim. b) Sim. c) Sim. d) Sim.

2 Demonstração.

Capítulo II
CONJUNTOS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 60

1 P(A) = {∅, {+}, {−}, {×}, {÷}, {+, −}, {+, ×}, {+, ÷}, {−, ×}, {−, ÷}, {×, ÷}, {+, −, ×}, {+, −, ÷}, {+, ×, ÷}, {−, ×, ÷}, {+, −, ×, ÷}}

2 A, B, C e D.

3 a) V b) F c) V d) V e) F f) V g) V h) V

4 E

5 C

6 $2^7 - 1 = 127$ pagamentos distintos (sem contar o "pagamento nulo")

7 $2^{10} - 1 - 10 = 1\,013$ aperitivos (eliminando os que são misturas)

8 12

9 Diagrama com conjunto A contido em conjunto B.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 77

1 a) ∈ b) ∉ c) ∈ d) ∈ e) ∈

2 B

3 B

4 A

5 a) $26 + 15\sqrt{3}$
b) $6 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$

6 a) $-\frac{7}{6}$ b) $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

7 a) {−4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4}
b) {..., −3, −2, −1, 1, 2, 3, ...}

8 $\frac{3}{7}(2\sqrt{2} - 1)$

9 a) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 3^2 - 2 = 7$
b) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 3^3 - 3(3) = 18$

10 C

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 89

1 Parte superior da região dentro da seta M, mas fora do coração P e do trapézio N.

2 $\left\{\frac{3}{2}, 1, 0, \frac{3}{5}\right\}$

3 A ∪ (B ∩ C) = A = {1}

4 X = {−1, 1, 3, 5}

5 a) 65 b) 35 c) 4 d) 50 e) 19 f) 40

6 a) 10% b) 57%

7 7 dias

8 A

9 A

10 A

11 1 paciente

12 D

13 5%

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 91

1 D

2 E

3 C

4 B

5 $\varnothing$, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} e {1, 2, 3}

6 II e III

7 a) $a = b$
b) $a \neq b$
c) a é primo
d) mdc $(a, b) = 1$, isto é, a e b são primos entre si

8 a) $a = b$
b) $a \mid b$, isto é, a é múltiplo de b
c) a e b são primos entre si

9 63 partes

10 A

11 A

12 E

13 B

14 B

15 E

16 A

17 X = {c, h}

18 a) [0, 5) c) [0, 2]
b) (2, 3) d) $\varnothing$

19 Temos $n(C \cup P) = 200 + 400 - 75 = 525 > 500$, então a pesquisa é inconsistente.

20 São 19 de braço, 18 de peito e 11 de costas.

21 A = {2, 3, 5, 6, 8} e B = {1, 4, 6, 8}

22 A = {d, e, f} e B = {a, b, c, d, e}

23 $E = C_E(A) \cup C_E(B) \cup (A \cup B) = \{1, 2, 5, 6, 9, 13, 14, 18, 20\}$

24 B

25 P(X) = {$\varnothing$, {1}} e P(P(X)) = {$\varnothing$, {$\varnothing$}, {{1}}, {$\varnothing$, {1}}}

26 D

27 A

28 E

29 B

30 B

31 B

32 B

33 A = {a, b, c, e, g, h, i, j}, B = {a, b, c, d, f, h} e C = {b}.

34 a) Não. c) α
b) Sim. d) α

35 a) $a = 5$ e $b = 1$
b) $a = 2$ e $b = -1$

36 a) $a = 1$ e $b = 4$
b) $a = 3$ e $b = 1$

37 C

38 B e C

39 C

40 E

41 E

42 C

43 A

44 C

45 $\frac{2015}{999}$

46 C

47 E

48 B

49 D

50 a) $S = \{-3, 3\}$ d) $S = \mathbb{R}_-$
b) $S = \varnothing$ e) $S = \{-2, 2\}$
c) $S = \{3\}$ f) $S = \{-3, 3\}$

51 A e D

52 D

53 a) Se $a > 0$, então $S = \{-a, a\}$. Se $a = 0$, $S = \{0\}$. Enfim, se $a < 0$, então $S = \varnothing$.
b) Se $b \geq 0$, então, $S = \{a - b, a + b\}$. Se $b < 0$, então $S = \varnothing$.
c) $S = \{5\}$

54 D

55 E

56 96 estudantes

57 De 2 a 9 elementos.

58 a) 30 b) 10

59 10 associados

60 0,3333...

61 a) 100 b) 1 440

62 a) 500 b) 700

63 a) 79 b) 18

64 D

65 D

66 $\frac{a+1}{b+1} > \frac{a}{b} > \frac{a-1}{b-1}$

67 D

68 C

69 a) $S = \{-1, 1, 2, 3\}$
b) $S = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

70 B

71 D

72 Não podemos dividir a desigualdade por $x + 1$, pois este pode ser negativo.

73 Demonstração.

74 $S \cap T = \{(20, 30)\}$

Capítulo III
FUNÇÕES: PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 107

1 C

2 C

3 B

4 B

5 B

6 D

7 B

8 $A = \{1, 2, 4\}$

9 24 maneiras

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 113

1 As relações em (a), (b) e (d) são funções. A relação em (c) não é função.

2 $A = 9\ cm^2$

3 a) $n - 3$
b) $(n - 3) + (n + 3) = 2(n - 3)$
c) $3(n - 3) - 1(3(n - 3)$ estaria errado, pois contraria AC duas vezes)
d) $4(n - 3) - 3(4(n - 3)$ contraria AC, AD e BD duas vezes cada)
e) $\frac{n(n-3)}{2}$

4 a) $P = 2 + h$ (onde h é o número de horas e P é o preço em reais)
b) R$ 22,22

5 a) R$ 800,00
b) $600\ m^2$
c) Não.
d) Sim.

6 $A = 4\ cm^2$ em geral, $A = \frac{d^2}{2}$

7 $y = 2\sqrt{x}$

8 a) 30 milhões de litros
b) Em 20 segundos, esta população consome 10 milhões de litros.
c) $t = 3\,600$ s

9 a) R$ 12,90
b) 21 km

10 $\text{Im } f = \{-1, 1, 2, 4\}$

11 $f^{-1}(\{1\}) = \{2, 3\}$
Nota: este conceito será representado a seguir como "imagem inversa".

12 a) 12 m b) 8 m

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 119

1 a) 4
b) -5
c) $-\frac{1}{2}$
d) $1 - 3\sqrt{2}$
e) -2

2 a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R}^*$
c) $\mathbb{R} - \{-1\}$
d) $\mathbb{R}$
e) $\mathbb{R}_+$
f) $[1, +\infty)$
g) $\mathbb{R}$
h) $\mathbb{R} - \{0, 1\}$
i) $\mathbb{R} - \left\{\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right\}$
j) $[1, 3]$
k) $\mathbb{R} - \{-1\}$
l) $[1, 3)$
m) $[1, 3)$
n) $[-3, 0] \cup [1, +\infty)$
o) $(-1, 0) \cup (3, +\infty)$

3 a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
c) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

4 a) $(-3, 2) \cup (2, +\infty)$
b) $(6, \infty)$

5 a) Decrescente em $(-\infty, 0)$ e crescente em $(0, +\infty)$.
b) Decrescente em $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ e crescente em $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.
c) Decrescente em $(1, +\infty)$ e crescente em $\mathbb{R}$.
d) Crescente em $\mathbb{R}$.

6 a) Constante.
b) Crescente.
c) Decrescente.
d) Crescente.
e) Decrescente.
f) Decrescente em $(-\infty, 0)$ e crescente em $(0, +\infty)$.
g) Crescente em $(-\infty, 0)$ e decrescente em $(0, +\infty)$.

7 $k = 0$ ou $k = \frac{7}{4}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 129

1 C

2 2 vezes

3 C

4 C

5 C

6 C

7 a) R$ 1.879,80

b) Esta pessoa é isenta.

c) Aproximadamente R$ 42.851,64

8 Pelo menos 6 unidades.

9 No máximo 11 brigadeiros.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Página 137

1 a) 3^{4x^2} b) 3^{2x^2}

2 $a = 2$ e $b = 3$

3 S = {2}

4 D

5 A

6 $k = -10$

7 $g(x) = \frac{x^2}{4}$ e $g(-1) = \frac{1}{4}$

8 $g(x) = \frac{x+3}{2}$

9 $f(x) = \frac{x-1}{2}$

10 $c(t) = 0{,}05t^2 + 6$ em partes por milhão

11 $x = \frac{3}{2}$

12 $f(g(x)) + g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2x+5} - 8$

13 $f(4) = 18$

14 $f(7) = 56$

15 E

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

Página 138

1 B

2 B

3 D

4 a) Década de 1940.
b) Década de 2040.

5 A = 31, B = 33, C = 36, D = 41 e E = 44

6 D

7 A

8 R$ 1.680,00

9 A

10 A

11 C

12 E

13 D

14 B

15 B

16 C

17 C

18 B

19 C

20 A

21 A expressão se aproxima de $4x - 3$.

22 D

23 I – B; II – B

24 B

25 Alberto é dentista e flautista, Bernardo é mecânico e livreiro, Carlos é alpinista e marceneiro.

26 B

27 A

28 D

29 E

30 B

31 a) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty)$

c) $\mathbb{R}$

32 D

33 B

34 A

35 D

36 De fato:
$f(px + qy) = a(px + qy) = apx + aqy =$
$= p(ax) + q(ay) = pf(x) = pf(x) + qf(y)$
Por outro lado, denotando $g(x) = ax + b$, temos:
$g(px - qy) = a(px + qy) + b$
$pg(x) + qg(y) = p(ax + b) + q(ay + b) =$
$= a(px + qy) + (p + q)b$
Ou seja, a aplicação g será linear apenas se $b = 0$, quando recaímos no caso da função $f(x)$ acima.

37 A

38 De fato, para quaisquer x, y reais:
$f(x + y) = a^{x+y} = a^x a^y = f(x)f(y)$

39 $f(f(f(x))) = \frac{5x+9}{3x+5}$

40 $f(f(x)) = -\frac{1}{x}$

41 C

42 Em $\mathbb{Q}$, temos Dom $f = \mathbb{Q}$ e Dom $g = \mathbb{Q}^*$.

Para $x = 0$ e $x = 1$. Para g, $x = -1$ e $x = 1$.

43 I) $\mathbb{R}$ II) $\mathbb{R}$ III) $[-5, 7]$ IV) $[-1, 3]$ V) $[0, 2]$ VI) $[1, 3]$ VII) $[-4, -2]$ VIII) $[-4, -21]$ IX) $[-4, -21]$ X) $[-4, 45]$

44 B

45 D

46 D

47 D

48 B

49 E

50 A

51 A

52 C

53 D

54 D

55 C

56 B

57 C

58 D

59 A

60 D

61 B

62 E

63 B

64 D

65 A

66 A

67 A

68 D

69 D

70 B

71 C

72 Dom $f = [-2, 6)$

73 $b = -3$

74 $f(f(x)) = -\frac{1}{x}$

75 E

76 5

77 a) A 80 km/h, o carro faz cerca de 8 km/ℓ. Já a 120 km/h, o carro faz 4 km/ℓ.
b) Cerca de 55 km/h.

78 C

79 B

80 B

81 D

Capítulo IV
TIPOLOGIA DE FUNÇÕES

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 161

1 E

2 B

3 a) $f + g$ é par
b) fg é par
c) Nada se pode afirmar sobre $f + g$; por outro lado, fg é impar.
d) $f + g$ é impar, fg é par

4 a) Bijeção (isto é, injeção e sobrejeção).
b) Bijeção.
c) Não é injeção nem sobrejeção.
d) Bijeção.
e) Injeção, mas não sobrejeção.
f) Não é injeção nem sobrejeção.
g) Injeção, mas não sobrejeção.
h) Não é injeção nem sobrejeção.

5 E

6 C e F

7 São sobrejetoras A, D, E e F. A única bijetora é F.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 169

1 $f^{-1}(A) = \{0\}$ e $f^{-1}(B) = \{-1, 1\}$

2 $g(x) = -\frac{x+2}{6}$

3 a) $f^{-1}(y) = y - a$
b) $f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$
c) $f^{-1}(y) = y^2 - a$ para $y \geq 0$
d) $f^{-1}(y) = \frac{y^2-1}{y^2+1}$ para $y \geq 0$
e) $f^{-1}(y) = \left(\frac{y^2+4}{2y}\right)^2$ para $y \geq 2$

4 D

5 E

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 170

1 A aplicação não é injetiva. Então, não é uma bijeção.

2 C

3 C

4 $f \circ f(x) = f(g(x)) = \frac{1-x}{x-2}$
$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{x}{1-x}$
$g \circ f(x) = g(f(x)) = x - 1$
$g \circ g(x) = g(g(x)) = x$

5 C

6 C

7 C

8 D

9 E

10 B

11 E

12 E

13 a) O menor valor de a é 1.
b) $f^{-1}(y) = \sqrt{y} + 1$.

14 A

15 C

16 D

17 E

18 A

19 B

20 D

21 B

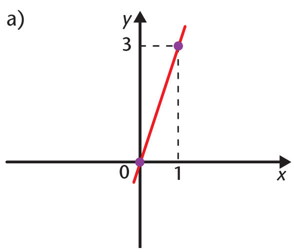
22 C

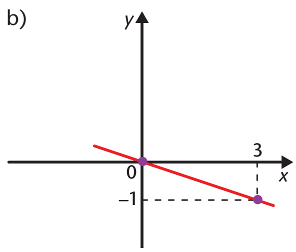
23 E

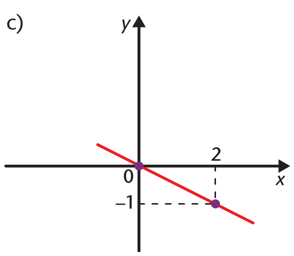
Capítulo 5
FUNÇÃO LINEAR E FUNÇÃO AFIM

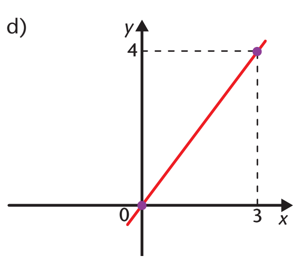
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 182

1 a) Crescente. b) Decrescente. c) Decrescente. d) Crescente.

2 a)


b)


c)


d)


3 a) $f(x) = y = \frac{1}{3}x$ b) $f(x) = y = 3x$

4 29

5 9

6 B

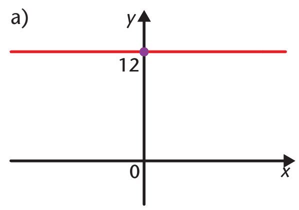
7 a) 578 kcal b) 800 mg

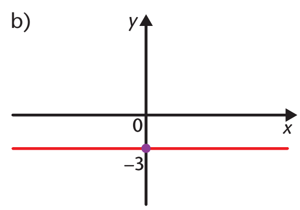
8 40 litros

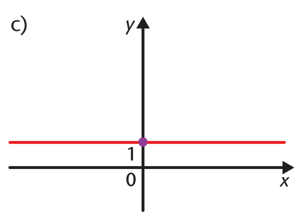
9 C

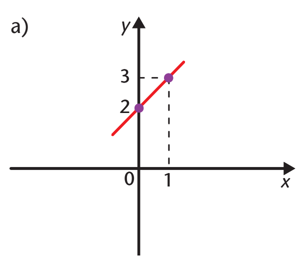
10 E

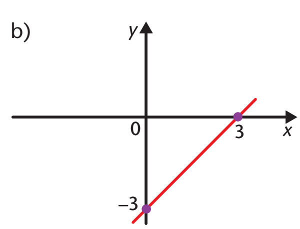
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 190

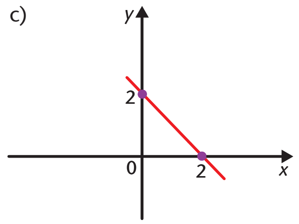
1 a)


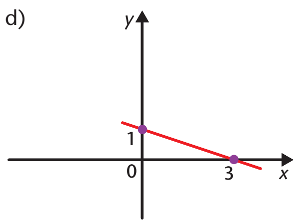
b)


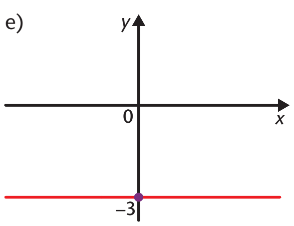
c)


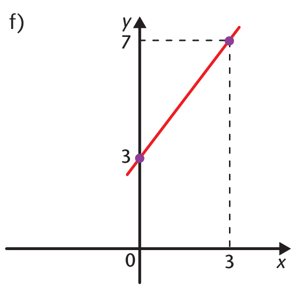
2 a)


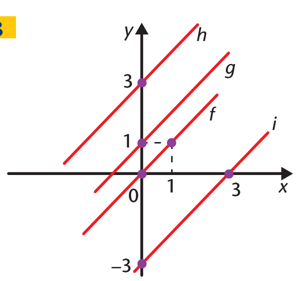
b)


c)


d)


e)


f)


3


4 5

5 A

6 B

7 C

8 a) Crescente.
b) Crescente.
c) Decrescente.
d) Decrescente.
e) Constante.
f) Decrescente.
g) Decrescente.
h) Constante.

9 $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$

10 $f^{-1}(0) = -\dfrac{1}{3}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 194

1 D

2 B

3 a) $\begin{cases} f(x) > 0 \text{ se } x > \dfrac{3}{2} \\ f(x) = 0 \text{ se } x = \dfrac{3}{2} \\ f(x) < 0 \text{ se } x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} g(x) > 0 \text{ se } x < \dfrac{2}{5} \\ g(x) = 0 \text{ se } x = \dfrac{2}{5} \\ g(x) < 0 \text{ se } x > \dfrac{2}{5} \end{cases}$

4 a) $S = \{t \in \mathbb{R} \mid t < -2 \text{ ou } t > 4\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x > 2\}$
c) $S = \{t \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 1 \text{ ou } x > 2\}$

5 C

6 D

7 5,5 ou mais

8 a) A agência B.
b) $x > 120$

9 a) $200\,000 - 2\,500t$
b) 15 meses

10 Dom $f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 30\}$

11 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4 \text{ ou } x > 1\}$

12 a) Eliminando o denominador dessa forma, o aluno está considerando apenas $x - 1 > 0$.
b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \dfrac{8}{3}\right\}$

13 $g(x) = 15x + 25\,000$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 199

1 a) $y = 1{,}25x - 22\,500$
b) $x = 18\,000$ unidades

2 D

3 D

4 C

5 C

6 3 600 £

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 200

1 A

2 A

3 B

4 C

5 a) 64% de mercadoria
b) R$ 16,00

6 E

7 a) R$ 10.000,00
b) 10 000 L

8 a) [0, 50] b) 180 kWh

9 a) R$ 1.263,00 b) R$ 1.230,00

10 a) $P = -2x + 156$ b) 15 semanas

11 $S = 4{,}50h - 60$, com $h \geq 40$

12 D

13 C

14 D

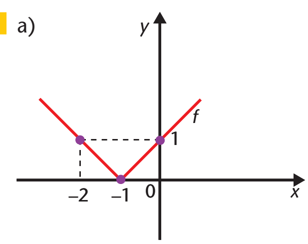
15 C

16 A

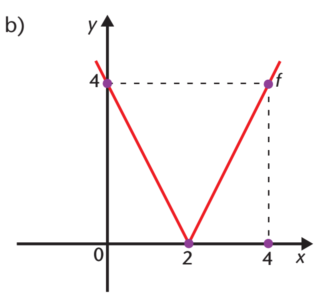
Capítulo VI
FUNÇÃO MODULAR E ANÁLISE DE GRÁFICOS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 210

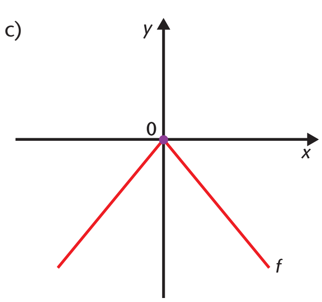
1 a)

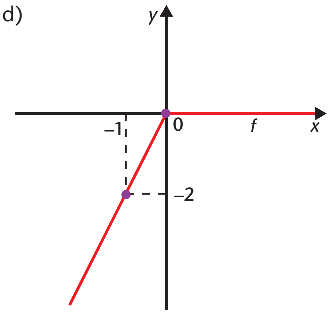


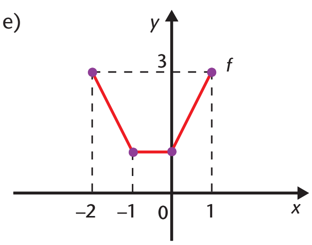
b)

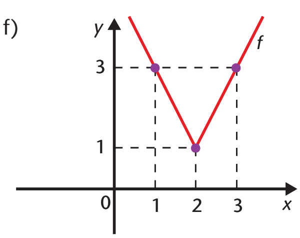


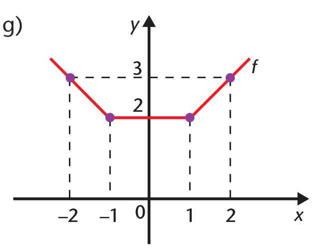
c)

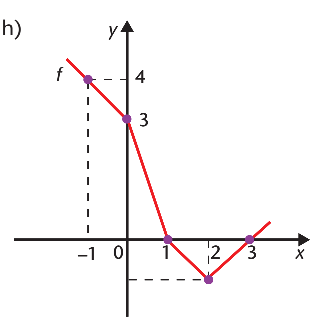


d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

2 a) 4
b) 10
c) 13
d) 3
e) $\sqrt{3}$
f) $1 - \sqrt{2}$

3 a) –1
b) –9

4 a) $-2x - 1$
b) 3
c) $2x + 1$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 219

1 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{7}{3} \text{ ou } x \geq 3\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3 \text{ ou } x \geq 6\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{16}{3} \leq x \leq 2\right\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{22}{3} \text{ ou } x \geq \frac{26}{3}\right\}$

2 C

3 A

4 C

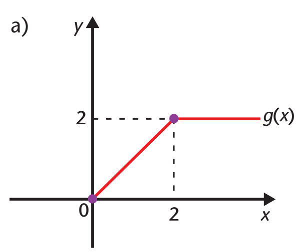
5 $S = \{-\infty, 2\}$

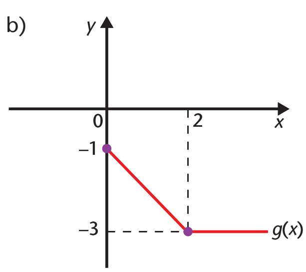
6 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{2}{3}\right\}$
c) $S = \varnothing$
d) $S = \mathbb{R}$

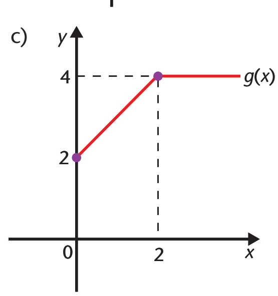
7 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 6\}$

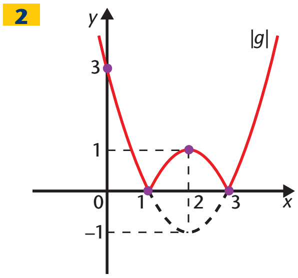
8 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$

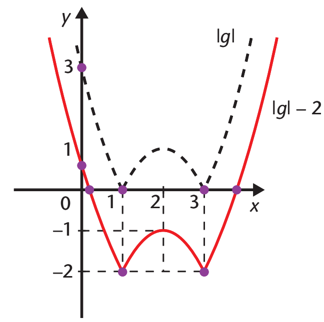
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 227

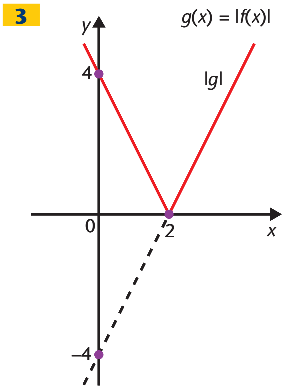
1 a) 

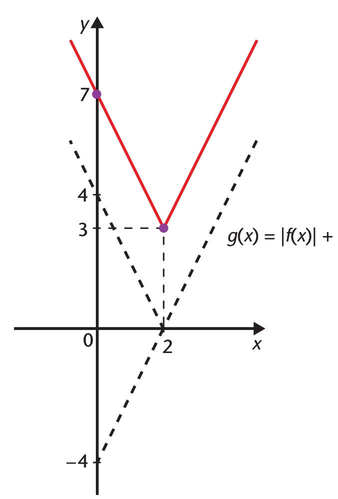
b) 

c) 

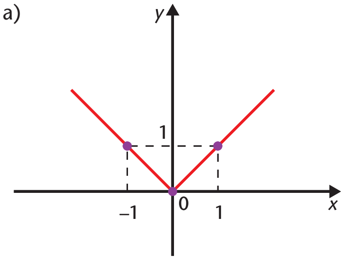
2 



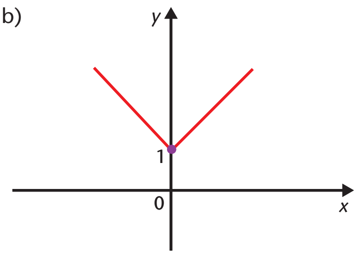
3 



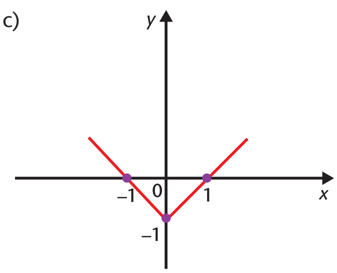
4 a)



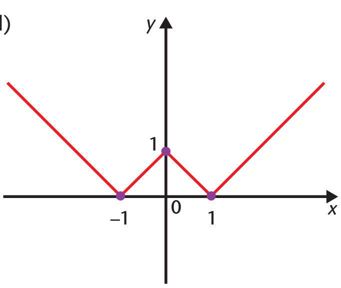
b)



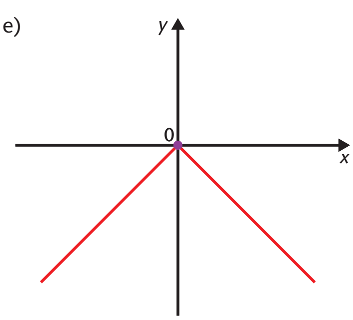
c)



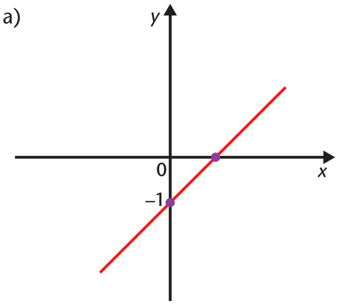
d)



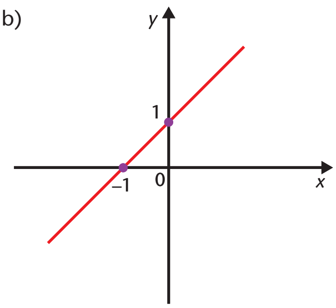
e)



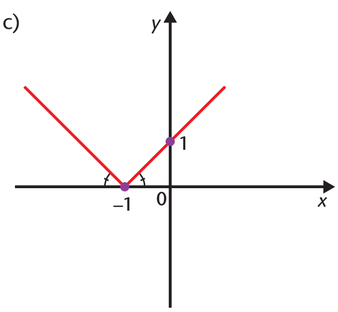
5 a)



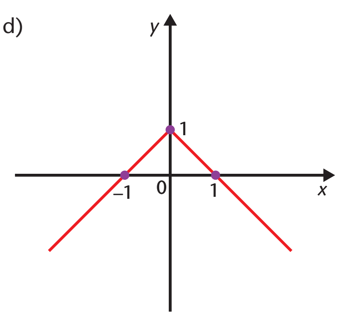
b)



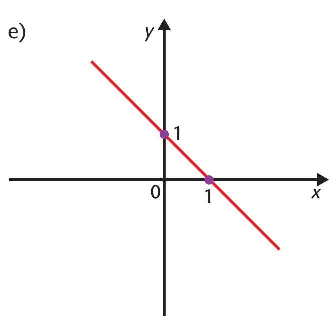
c)



d)



e)

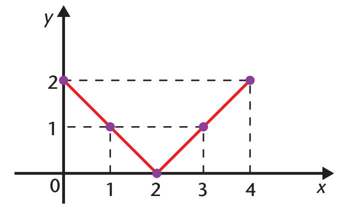


EXERCÍCIOS DE REVISÃO

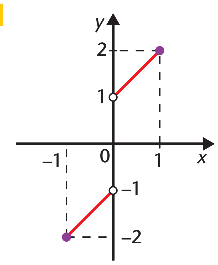
Página 228

1 2 elementos

2



3



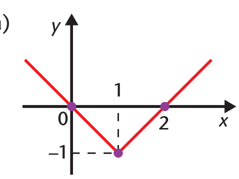
4 a) $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, portanto $f(x) = x - x = 0$

$x \geq 0 \Rightarrow |x| = -x$, portanto $f(x) = x + x = 2x$

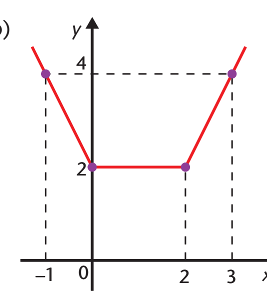
b) $S = \{-1, -3\}$

5 C

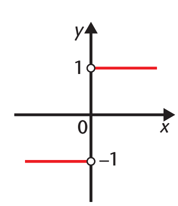
6 a)



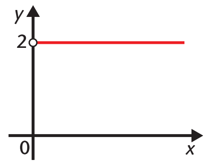
b)



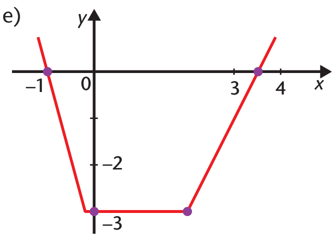
c)



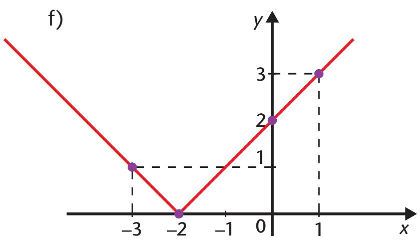
d)



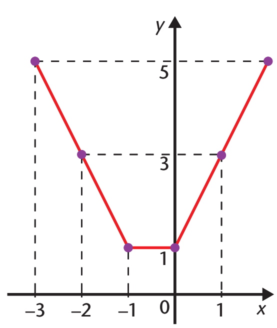
e)



f)

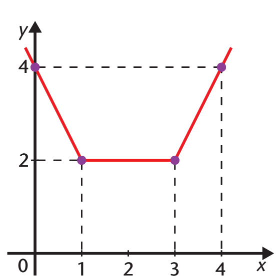


7



D = ℝ
Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$

8



D = ℝ
Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$

9 B

10 C

11 E

12 C

13 C

14 A

15 E

16 B

17 A

18 D

19 C

20 B

21 C

22 D

23 C

24 S = $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

25 D

26 D

27 D

28 D

29 C

30 C

31 C

32 B

33 C

34 A

35 D

36 A

37 D

38 E

39 B

40 A

41 C

42 B

43 C

44 A

45 E

46 A

47 D

48 C

49 E

50 E

51 C

52 D

53 E

54 A

55 C

56 B

57 C

58 D

59 A

60 A

61 E

62 A

63 B

Capítulo VII

FUNÇÃO QUADRÁTICA OU TRINÔMIO DO 2º GRAU

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Página 243

1 A, B e F

2 a) –2
b) 4
c) $x = 4$ ou $x = 1$
d) $x = 3$ ou $x = 2$
e) 10

3 a) $x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{3}$

b) $x = 0$ ou $x = \frac{3}{4}$

c) $x = \frac{1}{3}$

d) A função não possui raízes reais.

4 a) $y = -0{,}2x^2 + 6x$

b) (30; 0) ponto em que está localizado o alvo

5 31 e 41

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 252

1 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 0\}$

d) $S = \mathbb{R}$

e) $S = \varnothing$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{1}{3}\right\}$

2 a) $U = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 < 3\}$

b) $U = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{3} \text{ ou } x > \frac{1}{2}\right\}$

c) $U = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq \frac{5}{2}\right\}$

d) $\nexists x \in \mathbb{R} \mid (x + 2)^2 \geq 4\,(x^2 + 2)$

e) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x < \frac{x^2}{2} + 2$

f) $U = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$

3 $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$

4 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 7\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq x \leq 0 \text{ ou } \frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{2}\right\}$

5 $S = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

6 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

7 $S = \{x \in \mathbb{R}_+^* \mid 2 < x < 4\}$

8 D

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 258

1 $y_M = \frac{21}{4}$ e $y_m = f(6) = -7$

2 $v = 8$

3 O quadrado de lado 10 cm.

4 $x = 2$ e $z = 4$

5 3 e 3

6 O retângulo de lados $\frac{5}{8}$ e $\frac{5}{2}$.

7 O retângulo de lados 4 cm e 3 cm.

8 Os lados são 3 cm e $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.

9 O retângulo de lados 2 cm e 3 cm.

10 0,5 ou $\frac{1}{2}$

11 $p = -2$ ou $p = 1$

12 $p = -1$

13 $p = 2$

14 Não existe $p \in \mathbb{R}$.

15 $m = \frac{4}{3}$

16 $x = 2$

17 a) $b^2 - 2$

b) $S = \left\{1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

18 a) $y = -5x + 150$

b) R$ 19,00

19 As dimensões são 250 m e 500 m.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 266

1 $p \neq -3$

2 a) $p < 6$ b) $p > 6$

3 a) $0 < x < 5$

b) $x < -1$ ou $x = 6$

c) $x < -1$ a $x > 6$

4 D

5 A

6 D

7 E

8 C

9 C

10 $y = -x^2 + 4x$

11 C

12 A

13 $b = -2$ e $c = 0$

14 C

15 C

16 7 m

17 a) $(-1, 0)$ e $(2, 3)$ b) $y = x + 1$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 277

1 $f(x) = x^2 - 2x - 8$

2 $b = 2$ e $c = -2$

3 $f(x) = x^2 + 3x + 2$

4 $f(x) = -\frac{2x}{3}\left(x^2 - \frac{3x}{2} - 1\right)$, cujas raízes são 0,2 e $-\frac{1}{2}$.

5 a) 61, 71 e 83

b) $f(n) = n^2 + n + 41$

c) Demonstração.

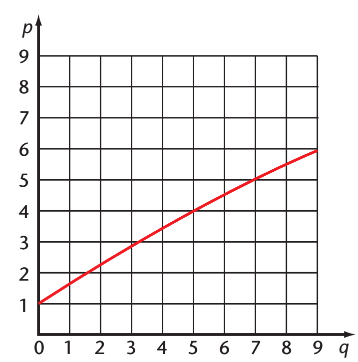
EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 281

1 B

2 B

3 a) Como p é positivo, temos que $p = -1 + \sqrt{4 + 5q}$, $q \in [1, 9]$.

b) É uma parte da parábola conforme o gráfico abaixo.



4 C

5 D

6 C

7 E

8 D

9 E

10 A

11 D

12 B

13 a) $v = \dfrac{90\,000 - v^2}{150}$

b) V = 0

14 D

15 A

16 Dom $f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

17 a) $A(t) = -2t^2 + 8t + 10$

b) 18 km²; dois anos após o início do plantio.

18 D

19 B

20 D

21 A

22 C

23 a) $d = 8n^2 - 88n$ b) $n = 12$

24 a) 11

b) $S = [-1, 3] \cup (4, +\infty)$

25 A

26 A

27 E

28 A

29 C

30 E

31 E

32 B

33 E

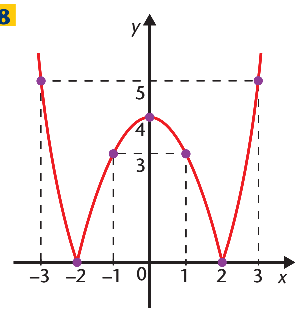
34 B

35 A

36 A

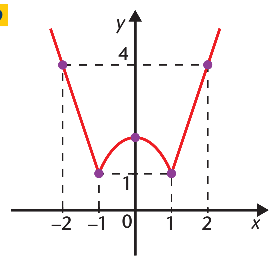
37 D

38



Im $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

39



40 B

41 D

42 B

43 B

44 A

45 a) $S = \{-1, 4\}$ b) $S = \left\{-1, -\dfrac{1}{2}\right\}$

46 A

47 C

48 A

49 B

50 B

51 A

52 E

53 A

54 C

55 B

56 D

57 B

58 B

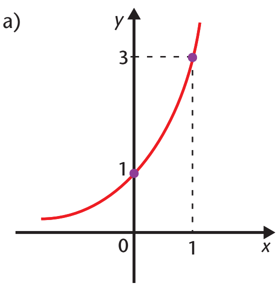
59 A

60 B

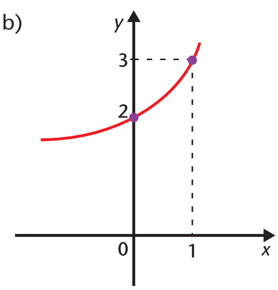
Capítulo VIII
FUNÇÃO EXPONENCIAL

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 299

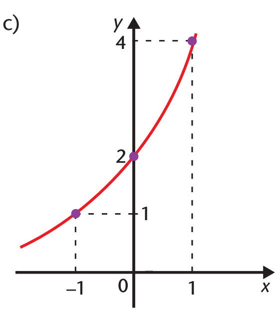
1 a)



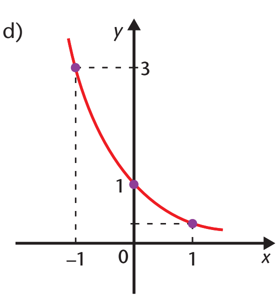
b)



c)



d)



2 C

3 $k = 2\,048$ e $a = 4$

4 B

5 E

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 305

1 $a = 27$; $b = -8$; $c = \frac{1}{9}$; $d = -\frac{1}{8}$

2 2^{23}

3 $-\frac{1}{3}$

4 a) 5
b) –5
c) $\frac{1}{4}$
d) $-\frac{3}{2}$
e) 2 ou 3
f) –2 ou 3
g) –1 ou 1
h) $\frac{2}{3}$
i) 4
j) 3
k) 0
l) 2
m) 0 ou 1

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 307

1 a) $x \geq 2$
b) $x \leq 3$
c) $x > 3$
d) $x \leq -1$ ou $x \geq 4$
e) $x \leq 1$ ou $x \geq 2$

2 $x \geq \frac{1}{2}$

3 $x = 1$ ou $x = 2$

4 $\left(\frac{15}{8}, \frac{17}{8}\right)$

5 0 ou 1

6 D

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 315

1 E

2 E

3 E

4 D

5 E

6 B

7 B

8 B

9 D

10 A

11 A

12 A

13 B

14 A

15 E

16 A

17 D

18 C

19 D

20 B

21 C

22 C

23 C

24 C

25 A

26 a) $x = \frac{5}{3}$
b) $x = 4$
c) $x = 0{,}05$
d) $n = 6$
e) $k = 3$
f) $x = \frac{2}{5}$
g) $x = 0$
h) $x = 1$

27 D

28 B

29 B

30 E

31 A

32 E

33 D

34 B

35 E

36 a) $x < -4$
b) $x > \frac{3}{2}$
c) $-0{,}5 < x < 1{,}5$

37 E

38 D

39 $-6 < x < 1$

40 A

Capítulo IX
FUNÇÃO LOGARÍTMICA

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 324

1 a) 4
b) –4
c) –2
d) $-\frac{5}{12}$
e) $\frac{16}{3}$
f) $\frac{3}{4}$

2 a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

3 a) $V = \left\{\frac{3}{2}\right\}$
b) $V = \{-2, 2\}$
c) $V = \{-10, 10\}$
d) $V = \{5\}$

4 a) $\frac{81}{16}$
b) $\frac{1}{16}$
c) $-\frac{1}{27}$
d) 8
e) 12

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Página 334

1 a) S = {1}

b) S = {100}

c) S = {10}

2 $S = \left\{\left(32, \frac{1}{4}\right)\right\}$

3 81

4 $3a + b$

5 a) $x = 5$ b) $x = 64$

6 80

7 a) S = {(15, 2)}

b) S = {(4 ,8)}

8 2

9 O pH é 8.

10 Aproximadamente 1590 anos.

11 S = {19}

12 E

13 B

14 C

15 E

16 D

17 100

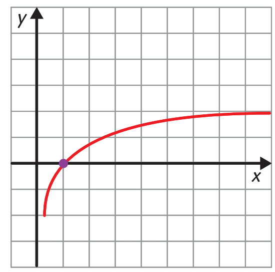
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Página 341

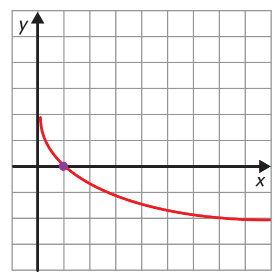
1 $y = \log_e^x;\ x \in \mathbb{R}_+^*$

2 $f(e^3) = -3$

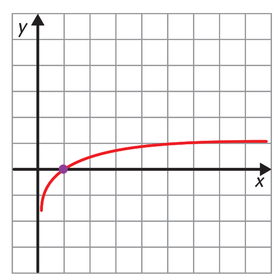
3 a)



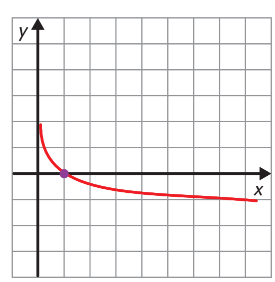
b)



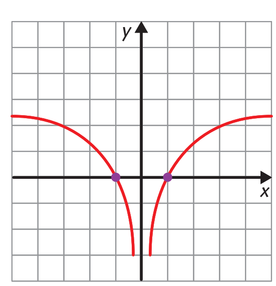
c)



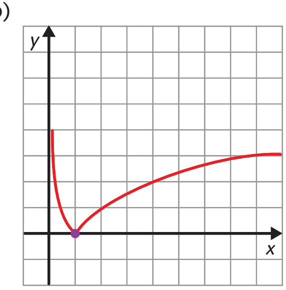
d)



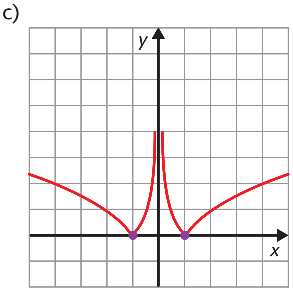
4 a)



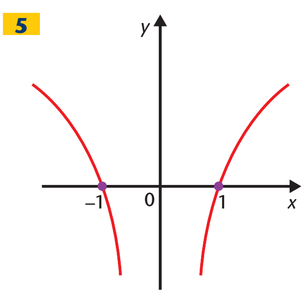
b)



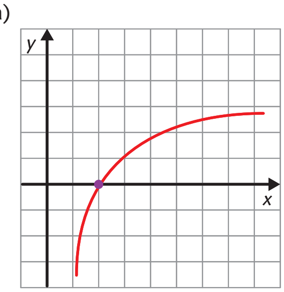
c)



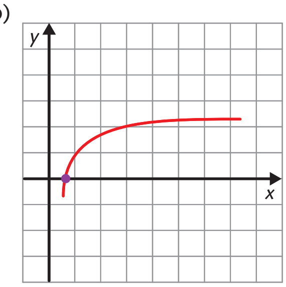
5



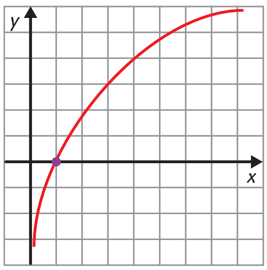
6 a)



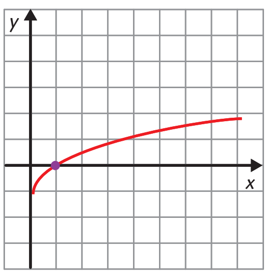
b)



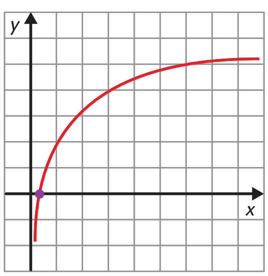
c)



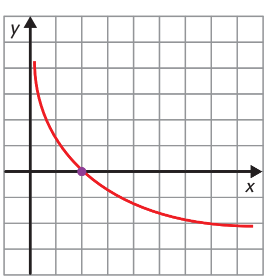
d)



7 a)



b)



8 Dom $f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

9 Dom $f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

10 a) $4 \leq x \leq 12$

b) $3 \leq x \leq 4$ ou $x > 12$

11 5 números

12 $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2\}$

13 $S = \left\{\left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

Página 342

1 B

2 7

3 A

4 C

5 D

6 D = {1, 3, 4}

7 E

8 B

9 C

10 E

11 C

12 C

13 A

14 B

15 E

16 E

17 A

18 A

19 D

20 D

21 B

22 E

23 A

24 D

25 C

26 E

27 E

28 E

29 B

30 E

31 D

32 A

33 $x = 32$ e $y = \frac{1}{4}$

34 E

35 A

36 a) $20 \cdot 1{,}05^7$ bilhões de dólares

b) $t > \frac{\log 2 + 9}{\log 1{,}05}$

37 B

38 7 dias

39 4 horas

40 $k = \frac{ln\,2}{T}$

41 A

42 D

43 E

44 B

45 A

46 E

47 D

48 D

49 D

50 B

51 $\frac{4}{3}$

52 $\frac{x}{y}\log_2 3$

53 a) K = 200 e $n = 2$
b) E = 900

54 25 vezes

55 a) 53,24 cm
b) 15 anos

56 log 6

57 E

58 B

59 $-\frac{1}{3}$

60 $x = \frac{\ln 14 - \ln 3}{\ln 1{,}016}$

61 a) x
b) 81
c) $\frac{1}{7}$

62 D

63 A

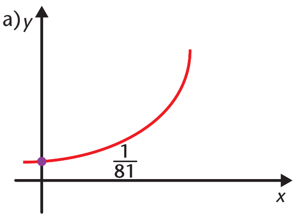
64 a) $p(t) = (0{,}81)^t \cdot F$
b) 15 anos

65 A

66 D

67 $y = 100x^2$, para $x > 1$

68 $\frac{(e-1)^2}{4}$

69 a)


b) $g(x) = \log_3 x^2;\ x \neq 0$

70 B

71 A

72 D

73 A

74 C

75 B

76 A

77 C

78 B

79 E

80 A

81 D

82 B

83 D

84 E

85 A

86 C

87 B

88 A

89 C

90 A

91 B

92 D

93 D

94 B

95 E

96 C

97 C

98 B

99 C

100 B

101 D

102 D

103 D

104 E

105 D

106 B

107 D

Capítulo X
TRIGONOMETRIA

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 360

1 a) $x = 6$ e $y = 3\sqrt{3}$
b) $x = 4\sqrt{3}$ e $y = 6$
c) $x = 2\sqrt{2}$ e $y = 4$
d) $x = y = \frac{7\sqrt{2}}{2}$
e) $x = y = 5\sqrt{2}$
f) $x = \sqrt{3}$ e $y = 6$
g) $x = y = 1$

2 a) $100\sqrt{3}$ m
b) $50\sqrt{3}$ m

3 103,8 m

4 2 km

5 $10\sqrt{3}$ cm

6 a) 10 cm
b) $10\sqrt{2}$ cm
c) $10(1 + \sqrt{3})$ cm

7 86,50 m

8 79,58 m

9 $y = 50(3 - \sqrt{3})$ m e $x = 100\sqrt{3}$ m

10 75 m

11 1 384 m

12 128 m

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

Página 371

1 E

2 C

3 A

4 84 m

5 D

6 E

7 B

8 E

9 E

10 9,8 m

11 A

12 60 m

13 C

14 4,08 m

15 a) $(10 + 5\sqrt{3})$ m e $(5 + 10\sqrt{3})$ m
b) Aproximadamente 29,1 m.

16 B

17 a) 4 km e $\sqrt{3}$ km
b) R$ 13,60

18 E

19 a) $\overline{BC} = R \cdot \text{sen}\,\theta$ e $\overline{AB} = 2R \cdot \cos\theta$
b) $S = R^2 \cdot \text{sen}\,2\theta$ e $2\theta = 90°$

20 $\frac{5}{27}$

21 E

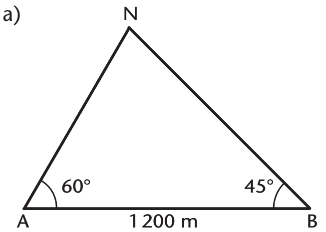
22 B

23 120 m

24 A

25 $50\sqrt{3}$ m

26 a)



b) $(1\,800 - 600\sqrt{3})$ m

27 $\overline{AF} = \frac{15}{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{6})$ km e $\overline{BF} = 15\sqrt{2}$ km

28 $\sqrt{5}$ m e $2\sqrt{5}$ m

29 $\frac{1}{2}$

30 a) F
b) V
c) F
d) V

31 150°

32 $5\sqrt{6}$

33 511 m

34 B

35 a) $\text{tg}\,x = \frac{3}{2}$
b) Não.
c) $\frac{\sqrt{13}}{13}$
d) $\frac{\sqrt{13}}{6}$
e) $\frac{3\sqrt{13}}{4}$

36 a) $\frac{3}{4}$
b) $\frac{4}{3}$
c) $\frac{3}{4}$
d) $\frac{9}{16}$

37 A

38 D

39 B

40 $\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}$

41 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

42 a) $\frac{4}{5}$
b) $\frac{125}{156}$
c) $\frac{1}{8}$

43 $\frac{\sqrt{33}}{6}$

44 a) $\frac{4}{5}$
b) $\frac{3}{5}$
c) $\frac{16}{25}$
d) $\frac{7}{4}$ ou $\frac{1}{4}$

45 Maior.

46 $p = 2$

47 $\frac{\sqrt{3}}{9}$

48 $\frac{1}{2}$

49 Demonstração.

50 $\frac{1}{2}$

51 $\pm\frac{1}{2}$

52 $\frac{\sqrt{2}}{72}$

53 a) Correto.
b) Correto.
c) Correto.
d) Correto.
e) Correto.

54 $\text{cotg}\,\beta - \text{cotg}\,\alpha$

55 $x = -1$

56 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

57 $\sqrt{7}$

58 a) 1 cm
b) $\frac{\sqrt{309}}{3}$ cm

59 Demonstração.

60 $(3\sqrt{3} + 7)$ m

61 28 m

62 a) $5 + 3\sqrt{3}$
b) $\frac{15 + 9\sqrt{3}}{2}$

63 $R_1 = \sqrt{2}$ e $R_2 = 2$

64 Demonstração.

65 a) Demonstração.
b) $\frac{1}{2}$

66 50 m

67 a) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm b) $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ cm²

68 $\sqrt{3}$ m

69 $h = 60$ m

70 C

71 $\ell(\sqrt{3} + 1)$

72 Demonstração.

73 $h = 14{,}56$ m

74 $x = \frac{d}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

75 B

Capítulo XI
RELAÇÕES MÉTRICAS NUM TRIÂNGULO

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 383

1 $\operatorname{sen} 120° > \operatorname{sen} 50° > \operatorname{sen} 170°$

2 A

3 a) $-\frac{4}{5}$ c) $-\frac{4}{3}$
b) $-\frac{3}{4}$

4 $-\sqrt{3}$ (negativo)

5 a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 388

1 a) 2 b) 6

2 $a = 16$

3 60°

4 $a = \sqrt{2}$ e $b = 1$

5 Aproximadamente 62,2 m.

6 a) $2\sqrt{6}$ cm b) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm

7 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 393

1 a) $3\sqrt{3}$ cm
b) $\sqrt{41 - 20\sqrt{3}}$ cm

2 $\sqrt{100 - 48\sqrt{2}}$ cm

3 C

4 $\sqrt{7}$ m

5 $4\sqrt{7}$ e $4\sqrt{19}$

6 $2\sqrt{2}$

7 B

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 398

1 $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{12}$

2 $3\sqrt{3}$ cm²

3 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$

4 15 cm²

5 a) $10\sqrt{3}$ cm b) $50\sqrt{3}$ cm²

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 399

1 B

2 B

3 E

4 C

5 B

6 70 m

7 Demonstração.

8 $2\sqrt{2}$

9 $\cos\alpha = \frac{10}{11}$

10 B

11 A

12 a) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ m e $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ m
b) $0{,}92 < \sqrt{2+\sqrt{2}} < 0{,}93$

13 D

14 E

15 A

16 E

17 B

18 30°

19 a) $\cos\alpha = \frac{1}{9}$
b) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; como $\operatorname{sen}\alpha > 1$, nessas condições não existirá o triângulo

20 400 m

21 A

22 B

23 $\frac{3\sqrt{66}}{8}$ cm

24 $\frac{11}{30}$

25 a) $x = 3$ ou $x \geq 6$ cm
b) $3 < x < 6$

26 $S = \frac{\ell^2 \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{2\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$

27 C

28 D

29 B

30 B

31 C

32 B

Capítulo XII
CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 408

1 $\frac{5\pi}{3}$ rad

2 $\frac{\pi}{8}$ rad

3 57°19'29"

4 4°; 8° e 1°

5 a) $\frac{\pi}{6}$ rad d) 18°

b) $\frac{3\pi}{8}$ rad e) 120°

c) 200°

6 0,545 rad

7 $\frac{\pi}{24}$ rad

8 a) 90° c) 75°
b) 145° d) 135°

9 A

10 A

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 413

1 a) $\frac{\pi}{8}$ rad e 22,5°

b) $\frac{3\pi}{4}$ rad e 135°

2 22°30'

3 $\frac{5\pi}{8}$ rad

4 10°

5 25,12 cm

6 a) 12,42 cm b) 13 cm

7 D

8 $2\pi + 1$ cm

9 C

10 C

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 415

1 a) 25π m²; 10π m

b) 36π m²; 12π m

c) $\frac{\pi d^2}{4}$ m²; πd m

d) 52π m²; $4\sqrt{13}\,\pi$ m

e) 36π m²; 12π m

2 a) 4π m² b) 7π m²

3 a) $\frac{(3 - 2\sqrt{2})\,\pi\, a^2}{16}$
b) $100\,(4 - \pi)$

4 a) $\frac{4 - \pi}{4}\,a^2$

b) $\frac{(\pi - 2)\,a^2}{2}$

c) $\frac{4 - \pi}{4}\,a^2$

5 a) 12π m b) 32π m

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 419

1 a) $k = 360° + 45°;\ k \in \mathbb{R}$
b) $2k\pi + \frac{3\pi}{4};\ k \in \mathbb{R}$
c) $k \cdot 360° + 60°;\ k \in \mathbb{R}$
d) $2k\pi + \frac{2\pi}{3};\ k \in \mathbb{R}$

2 De 1 320° é 240°. De $\frac{19\pi}{4}$ rad é $\frac{3\pi}{4}$ rad.

3 a) 320° d) $\frac{\pi}{2}$ rad

b) 50° e) $\frac{\pi}{5}$ rad

c) $\frac{3\pi}{2}$ rad

4 a) $x = k \cdot 360° + 300°;\ k \in \mathbb{Z}$

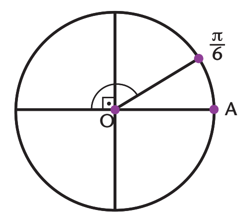
b) $k = 360° + 60°;\ k \in \mathbb{Z}$

c) $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}$

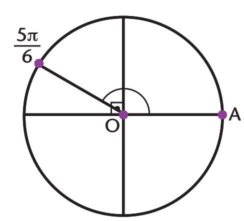
d) $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{5};\ k \in \mathbb{Z}$

5 a) 1º quadrante
b) 4º quadrante
c) É um arco definido como quadrantal.
d) É um arco quadrantal.
e) 3º quadrante
f) 2º quadrante

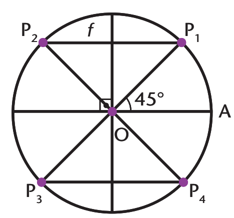
6 a)



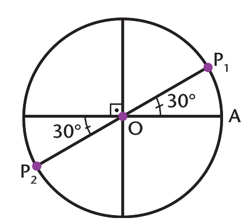
b)



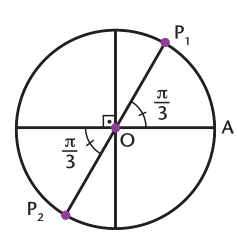
c)



d)



e)



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 424

1 Positivo.

2 $-\dfrac{\sqrt{7}+4}{3}$

3 Positivo.

4 $k = 2$

5 a) Negativo.
b) Positivo.

6 $x = \dfrac{5\pi}{6}$

7 $x = \dfrac{11\pi}{6}$

8 $\dfrac{3}{2}$

9 D

10 150

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 433

1 a) 0
b) 0
c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\dfrac{1}{2}$
e) 0
f) –1
g) –1
h) 0

2 a) sen 830° b) cos 190°

3 $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{4}$

4 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5 $-\dfrac{1}{2}$ e $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\dfrac{1}{2}$

7 –1

8 a) $-\cos x$
b) $2\text{sen}\, x$
c) $\cos x$

9 –1

10 a) –1 b) $\text{cotg}^2\, x$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 438

1 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi + \dfrac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \pm \dfrac{2\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi + \dfrac{3\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\varnothing$

2 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi + \dfrac{\pi}{6} \text{ ou } x = k\pi + \dfrac{\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi + \dfrac{7\pi}{6} \text{ ou } x = 2k\pi + \dfrac{11\pi}{6};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

3 $\left\{0, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}$

4 $\left\{\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right\}$

5 $\left\{\dfrac{7\pi}{12}\right\}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 439

1 C

2 B

3 B

4 C

5 C

6 C

7 B

8 A

9 E

10 E

11 E

12 B

13 C

14 A

15 C

16 B

17 B

18 C

19 B

20 A

21 A

22 C

23 D

24 C

25 C

26 B

27 A

28 A

29 D

30 E

31 B

32 D

33 A

34 A

35 D

36 C

37 D

38 A

39 A

40 A

41 C

42 C

43 C

44 D

45 D

46 D

47 C

48 B

49 C

50 A

51 A

52 a) $1\,690° = 250° + 4 \cdot 360°$
b) $1\,940° = 5 \cdot 360° + 140°$

53 a) 3º quadrante
b) 2º quadrante

54 a) 1º quadrante
b) 1º quadrante
c) 4º quadrante
d) 2º quadrante

55 6°

56 $\frac{\pi}{80}$ rad

57 48 voltas

58 C

59 a) 142°30′
b) 115°
c) 22°30′

60 51°25′42″

61 B

62 B

63 B

64 B

65 A

66 B

67 B

68 C

69 C

70 A

71 C

72 C

73 D

74 C

75 D

76 A

77 C

78 Duas.

79 $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

80 $x = 30°$ ou $x = \frac{\pi}{6}$ rad

Capítulo XIII
RELAÇÕES E IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 450

1 $\cos\alpha = -\frac{4}{3}$ e $\text{tg}\,\alpha = -\frac{3}{4}$

2 $\text{sen}\,x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ e $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

3 $\cos x = -\frac{4}{5}$; $\text{tg}\,x = -\frac{3}{4}$; $\sec x = -\frac{5}{4}$ e $\text{csc}\,x = -\frac{5}{3}$

4 $\text{sen}\,x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ e $\text{tg}\,x = \sqrt{15}$

5 $\text{sen}\,x = -\frac{12}{13}$ e $\text{tg}\,x = -\frac{5}{12}$

6 $k = 2$

7 $k = -1$ ou $k = 2$

8 Zero.

9 $-\frac{1}{5}$

10 $k = -4$ ou $k = 3$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 453

1 $x = \frac{\pi}{3}$

2 π

3 π

4 Duas.

5 $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

6 $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\}$

7 $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

8 $S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\}$

9 $x = \frac{\pi}{3}$

10 $S = \varnothing$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 459

1 a) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
b) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
c) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

2 a) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

3 a) $\frac{1 + 2\sqrt{6}}{6}$
b) $\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}$

4 C

5 $\frac{-8\sqrt{2} - 5}{10}$

6 a) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$ b) $2-\sqrt{3}$

7 $-\dfrac{\sqrt{3}}{7}$

8 –2

9 –1

10 $\dfrac{3}{10}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 466

1 $-\dfrac{24}{25}$

2 a) $\dfrac{24}{25}$ c) $-\dfrac{24}{7}$
b) $-\dfrac{7}{25}$

3 $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{8}$

4 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

5 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

6 $\dfrac{3}{2}$

7 $x = 30°$ ou $x = \dfrac{\pi}{6}$

8 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

9 5

10 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi + \dfrac{7\pi}{6} \text{ ou } x = 2k\pi + \dfrac{11\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 471

1 $2\cos 4x \cdot \cos 2x$

2 $2\text{sen}\, 4x \cdot \cos x$

3 $2\cos 4x \cdot \cos(-x)$

4 $-2\text{sen}\, 25° \cdot \text{sen}(-15°)$

5 cotg 5°

6 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

7 $2\text{sen}\, 35° \cdot \cos 15°$

8 A = 1

9 $\sqrt{2}$

10 $y = 2\cos^2 \dfrac{x}{2}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 472

1 D

2 E

3 C

4 A

5 E

6 D

7 E

8 A

9 B

10 A

11 C

12 D

13 –1 e 1

14 A

15 C

16 E

17 A

18 B

19 D

20 C

21 A

22 C

23 D

24 D

25 C

26 D

27 B

28 B

29 C

30 B

31 A

32 D

33 D

34 E

35 C

36 C

37 E

38 C

39 C

40 $\dfrac{5}{27}$

41 C

42 C

43 E

44 B

45 D

46 C

47 B

48 $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

49 C

50 C

51 E

52 C

53 $S = \left\{(0, 0); (0, \pi); (\pi, 0); (\pi, \pi); \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$

54 A

55 B

56 C

57 B

58 D

59 B

60 D

61 B

62 B

63 B

64 C

65 C

66 C

67 C

68 C

69 D

70 C

71 E

72 D

73 D

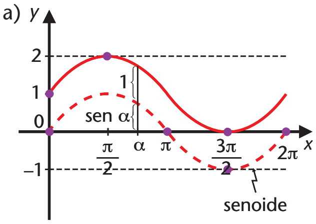
74 D

75 A

Capítulo XIV
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

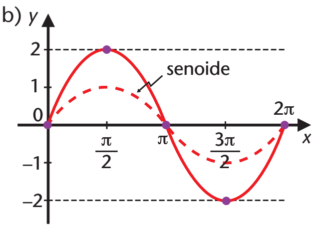
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 488

1 a)



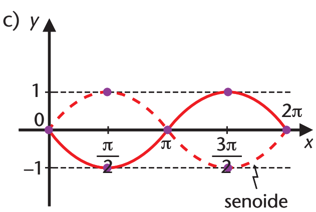
Im = $[0, 2\pi]$
$p = 2\pi$

b)



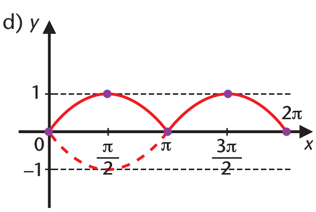
Im = $[-2, 2]$
$p = 2\pi$

c)



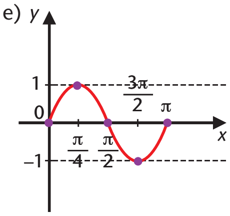
Im = $[-1, 1]$
$p = 2\pi$

d)



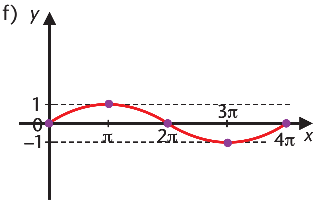
Im = $[0, 1]$
$p = 2\pi$

e)



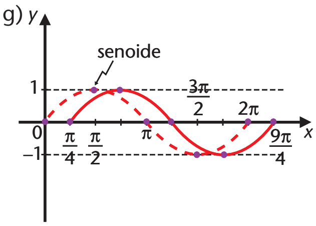
Im = $[-1, 1]$
$p = \pi$

f)



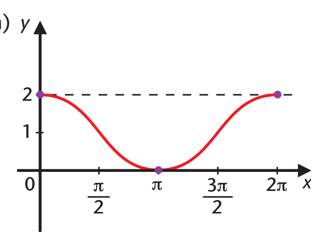
Im = $[-1, 1]$
$p = 2\pi$

g)



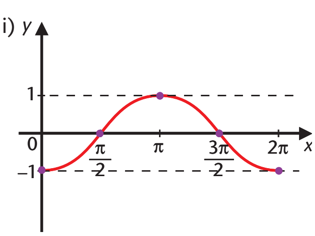
Im = $[-1, 1]$
$p = 2\pi$

h)



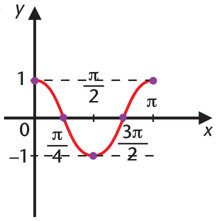
Im = $[0, 2]$
$p = 2\pi$

i)



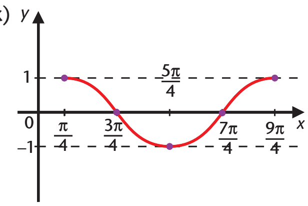
Im = $[-1, 1]$
$p = 2\pi$

j)



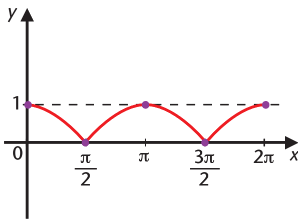
Im = [−1, 1]
$p = \pi$

k)



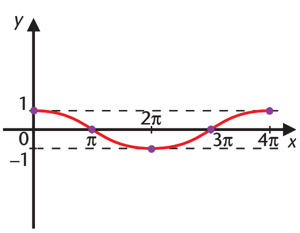
Im = [−1, 1]
$p = 2\pi$

l)



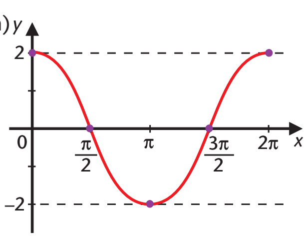
Im = [0, 1]
$p = \pi$

m)



Im = [−1, 1]
$p = 4\pi$

n)



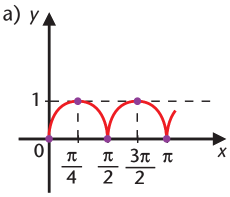
Im = [−2, 2]
$p = 2\pi$

2 a) $p = \pi$
b) $p = \frac{2\pi}{7}$
c) $p = 4\pi$
d) $p = 6\pi$
e) $p = 12\pi$

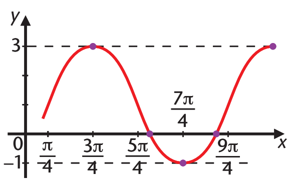
3 $y = 2\text{sen}\,\frac{x}{2}$

4 $a = 3$ e $b = 2$

5 a)



b)



6 4

7 B

8 C

9 C

10 D

11 B

12 $p = \frac{\pi}{2}$

13 $p = 12\pi$

14 C

15 C

16 A

17 A

18 A

19 C

20 A

21 E

22 B

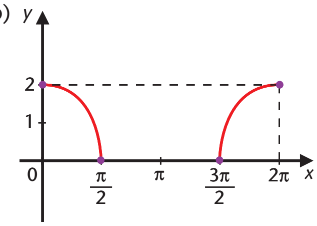
23 $a = 3$

24 D

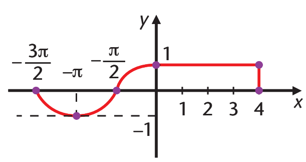
25 A

26 a) Zero.

b)



27



28 $-\frac{1}{2}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Página 502

1 a) 1
b) $\sqrt{3}$
c) 0
d) 0
e) $\nexists$

2 a) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k \cdot \pi + \frac{4\pi}{3},\ k \neq \mathbb{Z}\right\}$

b) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \pi \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

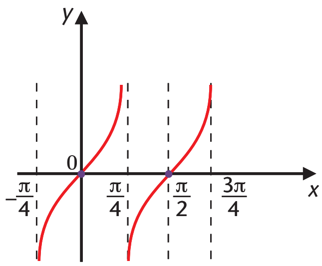
d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

3 a) $p = \frac{\pi}{2}$
b) $p = \frac{\pi}{3}$
c) $p = 1$
d) $p = \frac{\pi}{2}$
e) $p = 3\pi$

4 $\{m \in \mathbb{R} \mid -3 \leq m \leq 3\}$

5 $m \leq 1$ ou $m \geq 4$

6



$p = \frac{\pi}{2}$

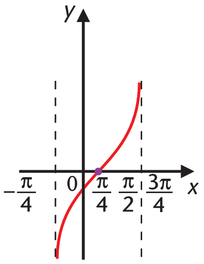
$\text{Im} = \mathbb{R}$

$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k \in \mathbb{Z}\right\}$

7 $p = \pi$

$\text{Im} = \mathbb{R}$

$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$



8 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

9 a) $\{p \in \mathbb{R} \mid p \leq 0 \text{ ou } p \geq 2\}$

b) $\left\{p \in \mathbb{R} \mid p \leq -\frac{3}{2} \text{ ou } p \geq -\frac{1}{2}\right\}$

c) $\forall p \in \mathbb{R}$

10 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{3\pi}{8},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

11 $S = \{p \in \mathbb{R} \mid p \geq 3\}$

12 $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -5 \text{ ou } y \geq 1\}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Página 509

1 a) $\frac{\pi}{6}$ i) $\frac{2\pi}{3}$

b) $-\frac{\pi}{6}$ j) $\frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{2}$ k) $\frac{\pi}{4}$

d) $-\frac{\pi}{4}$ l) 0

e) $-\frac{\pi}{2}$ m) $\frac{\pi}{3}$

f) $\frac{\pi}{3}$ n) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\frac{\pi}{3}$ o) 1

h) 0 p) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

2 $x = 2k\pi + \left(\text{asc sen } \frac{2}{5}\right)$ ou

$x = 2k\pi + \left(\pi - \text{asc sen } \frac{2}{5}\right);\ k \in \mathbb{Z}$

3 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$

4 a) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $y = 1$

5 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{asc sen } \frac{1}{3} + k \cdot 2\pi\right\}$ ou

$S = k \cdot 2\pi + \left(\pi - \text{asc sen } \frac{1}{3}\right);\ k \in \mathbb{Z}$

6 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7 -2

8 $\frac{\pi}{4}$

9 $S = \left\{\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$

10 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{1}{5}\right\}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO
Página 510

1 D

2 B

3 D

4 A

5 A

6 A

7 C

8 A

9 E

10 D

11 C

12 D

13 D

14 B

15 C

16 a) V b) V c) F

17 A

18 a) F c) V
b) V d) V

19 C

20 B

21 C

22 C

23 A

24 E

25 A

26 D

27 E

28 B

29 D

30 E

31 A

32 D

33 a) V c) V
b) V d) F

34 C

35 a) V b) V c) F

36 E

37 A

38 B

39 C

40 71

41 B

42 B

43 E

44 B

45 A

46 a) V b) F c) F

47 A

48 E

49 E

50 56

51 E

52 22

53 D

54 B

55 E

56 E

57 D

58 D

59 D

60 E

61 D

62 $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

63 E

64 C

65 B

66 D

67 C

68 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq 1\right\}$

69 B

70 B

71 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$

72 C

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

Símbolo	Significado	Seção (página)
$\Leftrightarrow$	se, e somente se; é equivalente a	1.1.11 (p. 16); 1.3.2 (p. 32)
$\sim$	negação	1.2.1 (p. 17)
$\blacksquare$	“como queríamos demonstrar”; fim de demonstração	1.2.1 (p. 18)
$\wedge$	e (conectivo lógico)	1.2.2.1 (p. 18)
$\vee$	ou (conectivo lógico)	1.2.2.2 (p. 22)
$\mid$	tal que (outro significado: é divisor de)	2.1.3.2 (p. 50) (ou Cap. 1 (p. 25))
$\Rightarrow$	implica; acarreta; se... então...	1.3.1 (p. 27)
$\forall$	para todo; qualquer que seja; para cada	1.3.3.1 (p. 35)
$\exists$	existe pelo menos um	1.3.3.2 (p. 37)
$\exists^*$ ou $\exists!$	existe um único	1.3.3.2 (p. 37)
$\in$	pertence a; é elemento de	2.1.2 (p. 49)
$\{...\}$	símbolo delimitador de conjuntos	2.1.3 (p. 49)
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais {0, 1, 2, ...}	2.1.3.2 (p. 50) e 2.2.1 (p. 61)
$\varnothing$	conjunto vazio	2.1.5 (p. 52)
$\subset$ ou $\subseteq$	está contido; é subconjunto	2.1.8.1 (p. 53)
$\supset$ ou $\supseteq$	contém; é sobreconjunto	2.1.8.1 (p. 53)
P(X)	conjunto das partes de X	2.1.9.1 (p. 57)
$\mathbb{U}$	conjunto universo	2.1.10 (p. 59)
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros	2.2.2 (p. 61)
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais	2.2.3 (p. 62)
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais	2.2.5 (p. 66)
$\lvert x \rvert$	módulo (valor absoluto) do número *x*	2.2.5.4 (p. 73) e 6.1 (p. 204)

Símbolo	Significado	Seção (página)
$\overline{X}$ ou X^C ou X' ou $C(X)$	conjunto complementar de X	2.3.1 (p. 78)
$\cap$	interseção	2.3.2 (p. 79)
$\cup$	união	2.3.3 (p. 81)
$A - B$	diferença de dois conjuntos A e B	2.3.5 (p. 85)
$C_A(B)$	complemento do conjunto B em relação a A	2.3.5 (p. 86)
$\bigcup\limits_{i=1}^{n}$	união de n conjuntos	2.A (p. 87)
$\bigcap\limits_{i=1}^{n}$	interseção de n conjuntos	2.A (p. 89)
$A \times B$	produto cartesiano de dois conjuntos A e B	3.1.3 (p. 102)
$\text{Dom } f$	domínio da função f	3.2 (p. 109)
$\text{Im } f$	imagem da função f	3.2 (p. 109)
$f \circ g$	composta de duas funções f e g	3.5 (p. 131)
f^{-1}	função inversa	4.3 (p. 162)
Δ	discriminante de uma função quadrática	7.1 (p. 241)
$\log_b a$	logaritmo de a na base b	9.1 (p. 320)
$\ln a$	logaritmo natural de a (base e)	9.2 (p. 323)
$\text{colog}_b\, a$	cologaritmo de a na base b (= $-\log_b a$)	9.5 (p. 332)
$\text{sen } x$, $\cos x$, $\text{tg } x$	seno, cosseno e tangente de x	10.2 (p. 355) e 11.1 (p. 380)
$\sec x$, $\text{csc } x$, $\text{cotg } x$	secante, cossecante e cotangente de x	10.5 (p. 367)
$\text{arcsen } x$	arcosseno de x	14.8.1 (p. 504)
$\arccos x$	arcocosseno de x	14.8.2 (p. 505)
$\text{arctg } x$	arcotangente de x	14.8.3 (p. 507)

ALFABETO GREGO

Letra maiúscula	Letra minúscula	Nome em português
Α	α	Alfa
Β	β	Beta
Γ	γ	Gama
Δ	δ	Delta
Ε	ε	Épsilon
Ζ	ζ	Zeta
Η	η	Eta
Θ	θ	Teta
Ι	ι	Iota
Κ	κ	Capa
Λ	λ	Lambda
Μ	μ	Mi
Ν	ν	Ni
Ο	ο	Ômicron
Π	π	Pi
Ξ	ξ	Csi
Ρ	ρ	Rô
Σ	σ	Sigma
Τ	τ	Tau
Υ	υ	Ípsilon
Φ	φ	Fi
Χ	χ	Qui
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Ômega

SIGNIFICADO DAS SIGLAS

Acafe-SC – Associação Catarinense das Fundações Educacionais (Santa Catarina)
Aman-RJ – Academia Militar das Agulhas Negras (Rio de Janeiro)
Cefet-BA – Centro Federal de Educação Tecnológica (Bahia)
Cefet-MG – Centro Federal de Educação Tecnológica (Minas Gerais)
Cefet-PR – Centro Federal de Educação Tecnológica (Paraná)
Cefet-RJ – Centro Federal de Educação Tecnológica (Rio de Janeiro)
Cescea-SP – Centro de Seleção de Candidatos às Escolas de Administração (São Paulo)
Cescem-SP – Centro de Seleção de Candidatos às Escolas Médicas (São Paulo)
Cesesp-PE – Centro de Seleção ao Ensino Superior de Pernambuco
Cesgranrio-RJ – Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio (Rio de Janeiro)
Covest-PE – Comissão do Vestibular das Universidades Federal e Federal Rural de Pernambuco
CN-RJ – Colégio Naval (Rio de Janeiro)
EAESP – Escola de Administração de Empresas de São Paulo
Enem – Exame Nacional do Ensino Médio
ESCCAI-MG – Escola Superior de Ciências Contábeis e Administrativas de Ituiutaba (Minas Gerais)
Fafi-MT – Faculdade Afirmativo (Mato Grosso)
Fatec-SP – Faculdade de Tecnologia de São Paulo
FEI-SP – Faculdade de Engenharia Industrial (São Paulo)
FGV-SP – Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)
FMIt-MG – Faculdade de Medicina de Itajubá (Minas Gerais)
FMSC-SP – Faculdade de Medicina da Santa Casa de São Paulo
Fuvest-SP – Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)
IBMEC-RJ – Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais (Rio de Janeiro)
IME-RJ – Instituto Militar de Engenharia (Rio de Janeiro)
ITA-SP – Instituto Tecnológico de Aeronáutica (São Paulo)
Mack-SP – Universidade Presbiteriana Mackenzie (São Paulo)
Mapofei-SP – Mauá, Politécnica e Faculdade de Engenharia Industrial (São Paulo)
PUC-MG – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-PR – Pontifícia Universidade Católica do Paraná
PUC-RJ – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC-SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Puccamp-SP – Pontifícia Universidade Católica de Campinas (São Paulo)
Uece – Universidade Estadual do Ceará
UEL-PR – Universidade Estadual de Londrina (Paraná)
Uepa – Universidade do Estado do Pará
Uerj – Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Ufam – Universidade Federal do Amazonas
UFBA – Universidade Federal da Bahia
UFF-RJ – Universidade Federal Fluminense (Rio de Janeiro)

UFC-CE – Universidade Federal do Ceará
UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais
UC-MG – União Colegial de Minas Gerais
Ucsal-BA – Universidade Católica do Salvador (Bahia)
Udesc – Universidade do Estado de Santa Catarina
Ufes – Universidade Federal do Espírito Santo
UFG-GO – Universidade de Goiás
UFJF-MG – Universidade Federal de Juiz de Fora (Minas Gerais)
UFMT – Universidade Federal de Mato Grosso
UFMS – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFPA – Universidade Federal do Pará
UFPR – Universidade Federal do Paraná
UFPE – Universidade Federal de Pernambuco
UFPI – Universidade Federal do Piauí
UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFRRJ – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
UFRS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina
UFSCar-SP – Universidade Federal de São Carlos (São Paulo)
UFSE – Universidade Federal de Sergipe
UFSM-RS – Universidade Federal de Santa Maria (Rio Grande do Sul)
UFU-MG – Universidade Federal de Uberlândia (Minas Gerais)
UFV-MG – Universidade Federal de Viçosa (Minas Gerais)
Umesp – Universidade Metodista de São Paulo
UMC-SP – Universidade de Mogi das Cruzes (São Paulo)
UnB-DF – Universidade de Brasília (Distrito Federal)
Uneb-BA – Universidade do Estado da Bahia
Unama – Universidade do Amazonas
Unesp – Universidade Estadual Paulista (São Paulo)
Unicamp-SP – Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)
Unicap-PE – Universidade Católica de Pernambuco
Unifap – Universidade Federal do Amapá
Unifei-MG – Universidade Federal de Itajubá (Minas Gerais)
Unifesp – Universidade Federal de São Paulo
Unificado-RJ – Vestibular Unificado (Rio de Janeiro)
Unificado-RS – Vestibular Unificado (Rio Grande do Sul)
Unifor-CE – Universidade de Fortaleza (Ceará)
Unioeste-PR – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Unip-SP – Universidade Paulista (São Paulo)
Unirio-RJ – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Unisinos-RS – Universidade do Vale do Rio dos Sinos (Rio Grande do Sul)
UTP-PR – Universidade Tuiuti do Paraná
Vunesp-SP – Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista (São Paulo)