COLEÇÃO APRENDER

MATEMÁTICA I

MATEMÁTICA

para o ensino médio – volume I

MANUAL DO PROFESSOR

Miguel Jorge

Mestre em Educação Matemática pela USU-RJ
Bacharel e licenciado em Matemática pela Uerj
Professor da Fundação Getulio Vargas – FGV-RJ
Professor do Colégio Santo Inácio – Rio de Janeiro – RJ
Engenheiro eletricista com especialização de Engenharia Econômica pela UFRJ

Ralph Costa Teixeira

Doutor em Matemática pela Universidade de Harvard, EUA
Mestre em Matemática pelo Impa-RJ
Engenheiro de Computação pelo IME-RJ
Professor adjunto da UFF-RJ

Thales do Couto Filho

Bacharel e licenciado em Matemática pela Sesni-RJ
Engenheiro mecânico pela UFRJ
Professor da PUC-RJ
Professor do Colégio Santo Inácio, Colégio Zacarias e da rede pública estadual do Rio de Janeiro

Felipe Ferreira da Silva

Licenciado em Matemática pela PUC-RJ
Professor do Colégio Santo Inácio e da Escola SESC de Ensino Médio – Rio de Janeiro – RJ

1ª edição

EDITORA do BRASIL

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

SUMÁRIO

1 – O Ensino da Matemática no Ensino Médio

Sabemos que, na atual conjuntura, o ensino da Matemática deve ser levado em conta após um estudo detalhado do binômio ensino-aprendizagem e, para tal, consideramos a experiência da equipe de autores e sugestões de professores e alunos de várias escolas do Brasil, enviadas por e-mail ou feitas durante os muitos contatos em palestras e oficinas promovidas pela Fundação Getúlio Vargas – Ensino Médio, na cidade do Rio de Janeiro.

Por outro lado, buscamos incorporar as novas tendências em Educação Matemática, que têm sido usadas para desmistificar a Matemática como ciência pronta, elitizada, tornado-a, cada vez mais, um instrumento de serviço para a sociedade e para o mundo de uma forma geral.

É nosso propósito que esta obra permita formar cidadãos capazes de: ler, interpretar e analisar informações, muitas vezes apresentadas em gráficos e tabelas, de forma crítica, com autonomia; tomar decisões, a fim de resolver problemas; criar; aprimorar seus conhecimentos; que sejam capazes, enfim, de exercitar o pensar.

Podemos verificar o que os *PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, de 2002, p. 9, nos apresentam com relação à formação do estudante:

"A intenção de completar a formação geral do estudante nessa fase implica, entretanto, uma ação articulada, no interior de cada área e no conjunto das áreas. Essa ação articulada não é compatível com um trabalho solitário, definido independentemente no interior de cada disciplina, como acontecia no antigo ensino de segundo grau – no qual se pressupunha outra etapa formativa na qual os saberes se interligariam e, eventualmente, ganhariam sentido. Agora, a articulação e o sentido dos conhecimentos devem ser garantidos já no Ensino Médio.

No mundo atual, de tão rápidas transformações e de tão difíceis contradições, estar formado para a vida significa mais do que reproduzir dados, denominar classificações ou identificar símbolos. Significa:

- saber se informar, comunicar-se, argumentar, compreender e agir;
- enfrentar problemas de diferentes naturezas;
- participar socialmente, de forma prática e solidária;
- ser capaz de elaborar críticas ou propostas; e,
- especialmente, adquirir uma atitude de permanente aprendizado."

Assim, com esse propósito, é que percebemos que a Matemática tem um papel importante para a formação do pensamento. Por isso, ela não pode ser vista como uma ciência pronta, pois está em evolução a cada instante, o aluno deve ser incentivado a fazer as descobertas e a saborear os novos saberes com desenvoltura.

Pretendemos, com esta obra, que os alunos possam adquirir uma formação sólida em Matemática nesse nível do ensino, que exige métodos de aprendizado compatíveis, ou seja, condições efetivas para que os alunos possam:

- comunicar-se e argumentar;
- defrontar-se com problemas, compreendê-los, enfrentá-los e resolvê-los;
- participar de um convívio social que lhes dê oportunidades de se realizarem como cidadãos;
- fazer escolhas e proposições;
- tomar gosto pelo conhecimento, aprender a aprender.

2 – Objetivos da coleção

Com esta obra, pretendemos dar a oportunidade para que o estudante possa desenvolver suas habilidades e competências em Matemática, permitindo o aprofundamento e a capacidade de **representação** e **comunicação**; **investigação** e **compreensão**; **contextualização sóciocultural**, objetivos que convergem com a área de Linguagens, Códigos e suas Tecnologias – sobretudo no que se refere ao desenvolvimento da representação, da informação e da comunicação de fenômenos e processos – e com a área de Ciências Humanas e suas Tecnologias – especialmente ao apresentar as ciências e técnicas como construções históricas, com participação permanente no desenvolvimento social, econômico e cultural, conforme propõem os *PCN+* de 2002.

Para isso, você, professor, é nosso aliado. Queremos convocá-lo para essa parceria, pois, ao nosso ver, temos de romper com o ensino tradicional, a escola não pode ficar restrita ao ensino de natureza enciclopédica (**cumprir o programa** $\times$ **ensinar o programa**).

Espera-se, com esta obra, que os alunos:

- saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano;
- saibam usar a Matemática para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento;
- compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações;
- percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído;
- saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

Visto que as disciplinas Biologia, Física, Química e Matemática fazem parte da área Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, segundo os PCNEM, pretende-se, nesta obra, sempre que possível, realçar o aspecto interdisciplinar de seus conteúdos básicos, enfatizando situações do cotidiano e buscando aferir, de um conjunto de competências fundamentais, aquelas que estejam relacionadas tanto com a habilitação dos candidatos para progredir em estudos mais avançados, quanto com a estimulação do desenvolvimento da capacidade de análise de situações e de tomada de decisões.

A abordagem proposta pelos eixos interdisciplinares possibilita uma avaliação do conhecimento que não se restrinja, apenas, ao conteúdo disciplinar especializado, favorecendo a ampliação da capacidade de compreensão e interpretação dos fenômenos naturais como um todo. Desse modo, os conteúdos que serão apresentados não se esgotam nesta obra. A tendência é que se construam situações mais a frente pelo trabalho lado a lado do aluno-professor e professor-aluno, construindo de forma ampla os demais fenômenos interdisciplinares no Ensino Médio, sendo a Matemática ferramenta indispensável para as aplicações fundamentais da Ciência.

Assim, é nosso propósito que o aluno tenha domínio nos seguintes temas da Matemática:

- Números e operações
  - Proporcionar aos alunos uma diversidade de situações, de forma a capacitá-los a resolver problemas do cotidiano:
    - ler faturas de consumo de água, luz e telefone; decidir sobre as vantagens/desvantagens de uma compra à vista ou a prazo; usar calculadora e escrever números em notação científica.

- Proporcionar aos alunos uma diversidade de problemas geradores da necessidade de ampliação dos campos numéricos e suas operações, dos números naturais para contar aos números reais para medir.
- Permitir ao aluno a compreensão das estruturas dos algoritmos, prevenindo recorrentes erros na resolução de problemas que envolvam manipulações algébricas.

- Funções
  - Iniciar o estudo de funções com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações:
    - idade e altura; área e raio do círculo; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo etc.
  - Prosseguir com os diferentes modelos que devem ser objeto de estudo na escola – modelos linear, quadrático e exponencial, aplicados a:
    - queda livre de um corpo; crescimento de uma colônia de bactérias; quantidade de medicamento na corrente sanguínea; rendimento financeiro; consumo doméstico de energia elétrica etc.

- Funções especiais
  - Destacar o contraste entre crescimento linear e crescimento exponencial.
  - Evitar exageros com logaritmos.
  - Explorar funções polinomiais simples de grau maior do que 2.
  - Anteceder o estudo de funções trigonométricas (enfatizar seu uso como modelo para funções periódicas) com o estudo da trigonometria no triângulo retângulo e nos demais triângulos.

- Geometria
  - Usar geometria analítica como articulação entre geometria e álgebra, trabalhando as duas vias:
    - entendimento de figuras geométricas, via equações;
    - entendimento de equações, via figuras geométricas.
  - Evitar memorização excessiva e introdução de fórmulas não baseadas em raciocínio lógico.
  - Introduzir a noção de vetor.
  - Associar sistema linear à sua interpretação geométrica.

- Tratamento da informação e Probabilidade
  - Aprimorar as habilidades adquiridas no Ensino Fundamental no que se refere à coleta, à organização e à representação de dados.
  - Intensificar a compreensão sobre as medidas de posição (média, moda e mediana) e as medidas de dispersão (desvio médio, variância e desvio padrão).
  - Entender combinatória como uma organização de técnicas de contagem, principalmente por meio do princípio multiplicativo e sua associação com árvores de enumeração.
  - Destacar probabilidade como ferramenta para modelar incerteza e enfatizar o espírito crítico na construção de espaços equiprováveis.

- Tecnologias
  - Usar a calculadora como instrumento para promover (e não para prejudicar) a aprendizagem.
  - Usar programas de computador (ou calculadoras) capazes de construir gráficos.
  - Usar geometria dinâmica (para estimular a experimentação e o raciocínio algorítmico).

- Usar planilhas eletrônicas (para fórmulas, estudo de padrões e simulação probabilística).

Assim é que, com a experiência da equipe de autores e de anos de testagem dessa coleção, podemos afirmar, será um importante auxílio para o professor, que visa dar uma melhor apresentação dos assuntos a serem ensinados.

3 – Estrutura da coleção e conteúdos trabalhados

Esta coleção foi concebida com a aplicação dos conceitos modernos da Educação Matemática, sem perder de vista o rigor dos conceitos matemáticos em toda a obra. Chamamos a sua atenção para os destaques que aparecem nas margens de algumas páginas, pois devem ser apresentados aos alunos como complemento de conceitos ou como forma de enriquecer os assuntos de cada capítulo.

A coleção está dividida em três volumes, de tal modo que o volume I compreende a aplicação da lógica e conjuntos, abordados de forma clara e objetiva, para se apresentar o conceito de função e os seus tipos. Nesse campo, nos preocupamos em apresentar as características de cada uma das funções, como a função afim, a linear, a modular, a quadrática, a exponencial e a logarítmica, dando ênfase às aplicações de forma concreta. Também é valorizada a trigonometria dos triângulos, aplicando-a no ciclo trigonométrico.

Já no volume II, apresentamos as progressões e a aplicação da matemática financeira, a análise combinatória e a probabilidade, assim como o Binômio de Newton. Valorizamos o ensino da geometria, agrupando os grandes assuntos, ou seja, prisma e cilindro, assim como pirâmide e cone, e um estudo completo da esfera.

No volume III, apresentamos um novo enfoque para o ensino da geometria analítica, pois a desenvolvemos com o tratamento vetorial, uma grande modernidade, visto que os conceitos desse tema ainda não foram tratados com essa visão. Seguindo esse ponto de vista, haverá a contribuição para o amadurecimento desses conceitos pelos estudantes e a facilidade para acompanhar um curso superior. Ainda nesse volume, apresentamos os números complexos, os polinômios e as equações de forma objetiva.

A nossa recomendação é que o professor possa explorar a coleção utilizando-a da melhor forma possível, entretanto devem ser observados os seguintes procedimentos:

- A exposição dos conceitos conforme são apresentados na coleção, dando tempo ao aluno para que ele possa ler e discuti-los, com ou sem ajuda do professor. Assim, o estudante poderá interpretá-los e construir a autonomia no processo de aprendizagem.
- Os exemplos e exercícios resolvidos devem ser estudados pelos alunos, mas não devem servir de modelos que se repetem sem uma lógica, pois são contribuições que irão permitir a formação do conhecimento e sua aplicação nos exercícios seguintes.
- A coleção tem uma variedade e uma quantidade considerável de exercícios e problemas para que o estudante possa consolidar seu conhecimento, resolvendo-os com segurança e podendo escolher entre os mais interessantes. Cabe ao professor instigar e fazer perguntas sobre cada situação proposta.
- No final de cada capítulo da coleção, há uma seção de exercícios de revisão. São testes para a verificação do que foi efetivamente aprendido sobre o capítulo.

Assim, esperamos que o ensino da Matemática possa contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.

4 – Bibliografia indicada

ABRANTES, Paulo. *O trabalho de projeto e a relação dos alunos com a Matemática: uma experiência de Projeto Mat. 789*. Tese (Doutorado). Lisboa: APM, 1994.

ADLER, Irving. *Matemática e desenvolvimento mental*. São Paulo: Cultrix, 1968.

AEBLI, Hans. *Didática psicológica:* aplicação à didática da psicologia de Jean Piaget. Rio de Janeiro: Nacional, 1971.

ÁVILA, Geraldo. *Introdução às funções e à derivada*. São Paulo: Atual, 1994.

BASSANEZI, Rodney C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher/Edusp, 1996.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: MEC, 2002.

______. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *PCN+*: Ensino Médio – Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

______. Secretaria de Educação Básica. *Explorando o ensino da Matemática*. Brasília: MEC, 2004. Artigos: v. 1, 2 e 3.

CÂMARA, Marcelo. Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem em Matemática. *Educação Matemática em Revista*. São Paulo: Sbem, n. 12, 2002.

______. Um exemplo de situação-problema: o problema do bilhar. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo: Sbem, n. 50, 2002.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARRAHER, Terezinha et al. *Aprender pensando*. Rio de Janeiro: Vozes, 1989.

CARRAHER, Terezinha N.; CARRAHER, David W.; SCHLIEMANN, Analúcia. *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez, 1988.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. *Metodologia do ensino da Matemática*. São Paulo: Cortez, 1994.

CHENALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. *Estudar Matemática:* o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

COLEÇÃO *Matemática: Aprendendo e Ensinando*. Vários autores. São Paulo: Atual/MIR, 1994. Vários volumes.

COLEÇÃO *O Prazer da Matemática*. Vários autores. Lisboa: Gradiva. Vários volumes.

COLEÇÃO *Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula*. Vários autores. São Paulo: Atual, 1992. Vários volumes.

COUTINHO, Cileda de Q. S. *Introdução ao conceito de probabilidade:* uma visão frequentista. São Paulo: Educ, 1996.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação:* reflexões sobre Educação e Matemática. São Paulo: Summus/Unicamp, 1986.

______. *Educação Matemática:* da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. *O sonho de Descartes*. Rio de Janeiro: Editora Francisco Alves, 1988.

______. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro: Editora Francisco Alves, 1985.

EDUCAÇÃO Matemática em Revista. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Sbem. Semestral.

In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE INFORMÁTICA EDUCATIVA 4., 1998, Brasília. *A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados*. Brasília, 1998, v. 1, p. 25-35.

GUELLI, Oscar. Coleção Contando a História da Matemática. São Paulo: Ática, 1998. Vários volumes.

IFRAH, Georges. *Os números:* a história de uma grande invenção. São Paulo: Globo, 2004.

KOETHE, S. *Pensar é divertido.* São Paulo: Herder, 1977.

KUENZER, Acácia Z. (Org.). *Ensino Médio:* construindo uma proposta para os que vivem do trabalho. São Paulo: Cortez, 2000.

______. O Ensino Médio agora é para a vida: entre o pretendido, o dito e o feito. *Revista Educação & Sociedade,* Campinas: Cedes, ano XXI, n. 70, 2000.

LIMA, Elon L. *Coordenadas no espaço.* Rio de Janeiro: Sbem, 2001. (Coleção do Professor de Matemática).

______. Medida e forma em geometria. Rio de Janeiro: Sbem, 2000. (Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo Cezar. *Coordenadas no plano.* Rio de Janeiro: Sbem, 2001. (Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo Cezar; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sbem, 2000, v. 1, 2 e 3. (Coleção do Professor de Matemática).

______. *Temas e problemas*. Rio de Janeiro: Sbem, 2001. (Coleção do Professor de Matemática).

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). *Aprendendo e ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994.

LOPES, Celi Espasandin. *A probabilidade e a estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular.* Dissertação (Mestrado em Educação) – Campinas, 1998, p. 125. Faculdade de Educação da Unicamp.

LOPES, Celi Espasandin; NACARATO, Adair (Org.). *Escritas e leituras na educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MACHADO, Nilson José. *Epistemologia e didática*. São Paulo: Cortez, 1996.

MIORIM, Maria Ângela. *Introdução à história da educação matemática.* São Paulo: Atual, 1998.

MORIN, Edgar. *A cabeça bem-feita:* repensar a reforma, reformar o pensamento. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2000.

NETO, Ernesto Rosa. *Didática da Matemática*. São Paulo: Ática, 1994.

OBERMAIR, Gilbert. *Quebra-cabeças, truques e jogos com palitos de fósforo*. Rio de Janeiro: Ediouro, 1981.

ONRUBIA, Javier. *A atenção à diversidade no Ensino Médio:* algumas reflexões e alguns critérios psicopedagógicos. Porto Alegre: Artmed, 2002.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1944.

PORTUGAL. Ministério da Educação. Departamento do Ensino Secundário. *Didática da Matemática*: Ensino Secundário. Lisboa, 1997.

PRIMEIRO E SEGUNDO GRAUS – MATEMÁTICA. *Telecurso 2000*. Rio de Janeiro: Rede Globo. Programa de TV.

RAMOS, Marise N. O projeto unitário de Ensino Médio sob os princípios do trabalho, da ciência e da cultura. In: FRIGOTTO, Gaudêncio; CIAVATTA, Maria (Orgs.). *Ensino Médio: ciência, cultura e trabalho*. Brasília: MEC/Semtec, 2004.

RATHS, Louis E. *Ensinar a pensar:* teoria e aplicação. São Paulo: EPU, 1977.

REVISTA do professor de matemática. São Paulo: Sbem. Semestral.

REVISTA Nova Escola. São Paulo: Fundação Victor Civita.

STRUIK, Dirk J. *História concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1989.

TAHAN, Malba. *As maravilhas da Matemática*. Rio de Janeiro: Bloch, 1972.

______. *Matemática divertida e curiosa*. Rio de Janeiro: Record, 1993.

______. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 2001.

______. *Os números governam o mundo*. Rio de Janeiro: Ediouro, 1998.

VEIGA, Ilma P. A. (org.). *Projeto político-pedagógico da escola*. Campinas: Papirus, 2003. 16. ed.

4.1 – Instituições para contato, cursos e obtenção de publicações

Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática (Caem)
Instituto de Matemática e Estatística (IME) – USP
Rua do Matão, 1 010, bloco B, sala 167
CEP 05508-090 – São Paulo, SP
Tel.: (011) 3091-6160

Centro de Ciências de Minas Gerais (Cecimig)
Faculdade de Educação – UFMG
Avenida Antônio Carlos, 6 227
Caixa Postal 253 – CEP 31270-010 – Belo Horizonte, MG
Tel.: (031) 3409-5338; (031) 3409-5337

Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática (Cempem)
Faculdade de Educação – Unicamp
Rua Bertrand Russell, 801, sala 1 103 – Barão Geraldo
Caixa Postal 6 120 – CEP 13083-970 – Campinas, SP
Tel.: (019) 3788-5587
Fax.: (019) 3289-1463

Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática IGCE – Unesp – Rio Claro
Avenida 24A, 1 515 – Bela Vista
Caixa Postal 178 – CEP 13500-230 – Rio Claro, SP
Telefax: (019) 3534-0123

Departamento de Teoria e Prática de Ensino (Dtpen) – Setor de Educação – UFPR
Rua General Carneiro, 460, Edifício D. Pedro I
CEP 80060-150 – Curitiba, PR
Tel.: (041) 3264-3574 (ramal 2 278)

Faculdade de Educação – Departamento de Metodologia – USP
Avenida da Universidade, 308, bloco B, térreo
CEP 05508-090 – São Paulo, SP
Telefax: (011) 3091-1688

Furb – Departamento de Matemática
Rua Antônio da Veiga, 140 – Victor Konder
Caixa Postal 1 507 – CEP 89010-971 – Blumenau, SC
Telefax: (047) 3321-0463

Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (Gepem)
Universidade Santa Úrsula
Rua Fernando Ferrari, 75, prédio VI, sala 1 105 – Botafogo
CEP 22231-040 – Rio de Janeiro, RJ
Telefax: (021) 2554-2500

Laboratório de Ensino de Matemática – Departamento de Matemática – Centro de Ciências Exatas e da Natureza (CCEN) – UFPE
Avenida Prof. Moares Rego, 1 235
CEP 50670-901 – Recife, PE
Tel.: (081) 2126-8006
Fax: (081) 2126-8118

Laboratório de Ensino de Matemática – Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação (Imecc) – Unicamp
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651 – Barão Geraldo
Caixa Postal 6 065 – CEP 13083-970 – Campinas, SP
Telefax: (019) 3521-5937

Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática – (Leacim) – Ufes – Campus de Goiabeiras
Avenida Fernando Ferrari, s.n. – Goiabeiras
CEP 29060-900 – Vitória, ES
Telefax: (027) 3335-2534

Mestrado em Educação Matemática – PUC-SP
Rua Marquês de Paranaguá, 111, prédio 1, 2º andar – Consolação
CEP 01303-050 – São Paulo, SP
Tel.: (011) 3124-7200 (ramal 7 210)
Fax: (011) 3159-0189

Projeto Fundão – Matemática – Instituto de Matemática – UFRJ
IM/UFRJ-CT, bloco C, sala 108
Caixa Postal 68 530 – CEP 21945-970 – Rio de Janeiro, RJ
Telefax: (021) 2562-7511

Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Sbem) – Departamento de Matemática – Centro de Ciências Exatas e da Natureza (CCEN) – UFPE
Rua Prof. Luiz Freire, s.n., sala 108
CEP 50740-540 – Recife, PE
Tel.: (081) 3272-7563

Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)
Estrada Dona Castorina, 110, sala 109
CEP 22460-320 – Rio de Janeiro, RJ
Tel.: (021) 2529-5073

4.2 – Alguns órgãos governamentais

Ministério da Educação e do Desporto (MEC) – Secretaria de Educação Média e Tecnológica
Esplanada dos Ministérios, bloco L, 3º andar, sala 300
CEP 70047-900 – Brasília, DF
Tel.: (061) 2104-8670
Fax: (061) 2104-9848

Secretaria de Educação a Distância
Esplanada dos Ministérios, bloco L, anexo 1, sala 327
CEP 70047-902 – Brasília, DF
Tel.: 0800-61-6161

Secretaria de Estado da Educação do Rio Grande do Sul – Centro de Ciências do Rio Grande do Sul
Av. Borges de Medeiros, 1 501 – Bairro Praia de Belas
CEP 90119-900 – Porto Alegre, RS
Tel. PABX: (51) 3288-4700

Secretaria de Estado da Educação de São Paulo – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (Cenp)
Praça da República, 53, sala 102 – Centro
CEP 01045-903 – São Paulo, SP
Tel.: (011) 3237-2115

Secretarias de educação estaduais e municipais, provavelmente a Secretaria de Educação do estado em que você mora e também a do seu município mantêm equipes pedagógicas e publicações, e oferecem cursos de Matemática a professores. Procure se informar e participar.

4.3 – Sites

- http://www.videocultura.com (*Arte e Matemática: uma série de 13 programas para a TV Cultura*. Fundação Padre Anchieta & TV Escola)
- http://www.somatematica.com.br/emedio.php
- http://www.matematica.com.br
- http://www.edulinks.com.br/Matematica
- http://www.ensinomedio.impa.br/materiais/index.htm
- http://www.brasilescola.com/matematica
- diadematematica.com/modules/xfsection/index.php?category=4
- pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/medio.htm
- http://www.edumatec.mat.ufrgs.br

5 – Comentários sobre cada capítulo

5.1 – Introdução à lógica

O nosso propósito com essa introdução à lógica é apresentar a linguagem e as notações adequadas para desenvolver os assuntos que serão estudados nessa coleção. Neste momento, o objetivo não é que o aluno associe lógica com conjuntos, assunto que será estudado separadamente e sempre que possível com a apresentação da lógica. Introduzida a noção de negação, dos qualificadores, da conjunção e da disjunção, procuramos dar ênfase aos termos como "necessário" e "suficiente" em toda a coleção.

5.2 – Conjuntos

Foi nossa intenção adotar a linguagem própria dos conjuntos, valorizando as operações entre eles, verificando sua validade e usando a lógica como "pano de fundo", com o propósito de construir o modelo matemático que leve o estudante à compreensão dos fatos sem a necessidade de decorar fórmulas e sim de entender os conceitos. Fazemos uso da construção dos diagramas de Euler-Venn, importante ferramenta nas aplicações dos conjuntos. Desenvolvemos a ideia da ampliação dos conjuntos numéricos dando ênfase à construção de eixo, para que o aluno localize nele os números inteiros e, por estimativa, localize os números racionais. Procuramos mostrar, algébrica e geometricamente, que $\sqrt{2}$ não é um número racional, permitindo que, a partir dessa demonstração, o aluno entenda e transfira essa construção para casos afins. Também buscamos estabelecer a construção da reta numérica com a devida ordenação dos números reais.

5.3 – Funções: propriedades e aplicações

Iniciamos esse capítulo com o conceito de par ordenado e, a seguir, o de produto cartesiano para apresentarmos o conceito de função, visto que se tivermos dois conjuntos A e B e uma regra que permita associar a cada elemento de A um único elemento de B, está aí a "chave da questão", o conceito fica definitivamente entendido. Por exemplo, ao chegar a um posto de gasolina para abastecer o carro, pode-se dizer: "Coloque R$ 50,00 de combustível." Pronto, está feita a associação entre dois conjuntos, assim, está sendo aplicado o conceito de função. Procuramos, nesse momento, dar ênfase à interpretação geométrica desse conceito por meio de gráficos, sempre que possível, com exemplos do cotidiano.

Apresentamos nesse momento a função como modelagem Matemática, relacionando variáveis com as grandezas do modelo e estudando a função como transformação. Ainda valorizamos a ideia de função composta como sendo uma função de uma função.

5.4 – Tipologia de funções

Nesse capítulo, apresentamos as funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Definimos a função par e a função ímpar, assim como estudamos a função inversa a partir da verificação que a função dada é bijetora.

5.5 – Função linear e função afim

Introduzimos a ideia de proporcionalidade, apresentando situações concretas, que ajudam os alunos a entender esse assunto, verificando a característica da função linear, inclusive com sua justificativa. Tais funções quando sofrem um acréscimo em x provocam um acréscimo igual em $f(x)$. Feito isso, tivemos oportunidade de rever aplicações da regra de três e o conceito de escala. Chamamos a atenção para o fato de que a função não tem grau, quem tem grau é o polinômio que formata a lei da função que está sendo estudada.

Com base na função afim, onde $f(x) = ax + b$, destacamos o conceito de taxa de variação, assim como estudamos a característica dessa função de forma a permitir que o estudante saiba fazer a diferença entre as leis que representam a função linear e a função afim. Procuramos estudar a raiz e os sinais da função afim usando a interpretação geométrica, verificando os pares ordenados que representam a referida função.

5.6 – Função modular e análise de gráficos

Este é um assunto pouco trabalhado no Ensino Médio. Está introduzido aqui pois entendemos que ele ajuda a aprimorar o conhecimento do módulo de um número real e suas propriedades. Também apresentamos as diversas formas geométricas desses gráficos assim como verificamos a translação deles. Analisamos as desigualdades e suas propriedades.

5.7 – Função quadrática ou trinômio do 2º grau

Apresentamos esse capítulo de forma intuitiva, buscando colocar os aspectos que diferem tal modelo dos modelos linear e afim. Desenvolvemos e apresentamos o modelo matemático da função quadrática que é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c pertencentes ao conjunto dos números reais tal que $a \neq 0$. Verificamos as propriedades características de tal função, construímos seu gráfico e analisamos as raízes ou zeros da função. Apresentamos a forma canônica e a forma fatorada, assim como verificamos o vértice da parábola a fim de concluir a curva que se obtém dessa lei matemática. Chamamos a atenção que tal curva apresenta um eixo de simetria e deve ser considerado na construção dos gráficos em questão. Também apresentamos o estudo em busca das raízes ou zeros da função, assim como estudamos a variação dos sinais, que dependem do intervalo das raízes ou que são facilmente verificados a partir da forma canônica que vem a validar a interpretação geométrica da função quadrática.

5.8 – Função exponencial

Procuramos apresentar esse assunto a partir da notação dos expoentes inteiros, seguidas dos expoentes racionais e dos expoentes reais com o propósito de provar a propriedade característica dessa função.

Essa função pode ser aplicada em diversos fenômenos naturais, assim, naturalmente, podemos estudar situações contextualizadas permitindo a interação com outras disciplinas. Resolvemos as equações e inequações exponenciais.

5.9 – Função logarítmica

Introduzimos a função logarítmica como a inversa da função exponencial, assim podemos afirmar que se $b = a^x$, então o expoente x chama-se logaritmo de b na base a. Definimos, dessa forma, o que vem a ser logaritmo de um número e apresentamos as propriedades operatórias dos logaritmos a partir da inversa da função exponencial, inclusive a mudança de base. Construímos o gráfico de tal função, e resolvemos equações e inequações logarítmicas.

5.10 – Trigonometria

Nesse capítulo, buscamos cuidadosamente construir o conceito das razões trigonométricas no triângulo retângulo usando sempre o conceito de semelhança, priorizando o conceito de razão. A seguir, definimos as razões inversas do seno, do cosseno e da tangente.

Apresentamos os triângulos retângulos de ângulos notáveis: de 30º e 60º e de 45º e 45º.

Procuramos fixar que, num triângulo retângulo, quando a medida de um ângulo agudo é o dobro da do outro, a medida da hipotenusa é o dobro da medida do menor cateto e a medida do outro cateto é a do menor multiplicada por $\sqrt{3}$.

5.11 – Linhas trigonométricas de um ângulo obtuso

O objetivo desse capítulo é levar ao estudante informações para que possa aplicar a lei dos senos e a lei dos cossenos. Espera-se que o aluno perceba que tendo três elementos de um triângulo, por exemplo, a medida dos três lados, é possível determinar a medida de qualquer um dos três ângulos do triângulo.

Nessa mesma linha, apresentamos a fórmula para o cálculo da área do triângulo conhecendo-se a medida de dois lados adjacentes e o ângulo formado entre eles.

5.12 – Círculo trigonométrico

Nesse capítulo, procuramos dar continuidade aos conceitos já adquiridos anteriormente, ampliando-os, pois agora se busca apresentar as linhas trigonométricas

no círculo e, para tal, preliminarmente, lembramos que o comprimento da circunferência vale $2{\neq}r$, onde $\neq$ é um número real de valor aproximado 3,14.

Apresentamos o ângulo central e os círculos concêntricos, com o propósito de verificar a proporcionalidade entre arcos e raios.

Para aprofundar, apresentamos os vários sistemas de medidas de um arco e a relação entre eles.

Definimos arcos côngruos, trabalhamos a redução de arcos ao 1º quadrante, e apresentamos os arcos complementares.

5.13 – Relações e identidades trigonométricas

Desenvolvemos nesse capítulo as linhas de um mesmo arco, ou seja, o seno de um ângulo é o cosseno de seu complemento e vice-versa.

Apresentamos um estudo completo das equações trigonométricas elementares, assim como desenvolvemos a adição e subtração de arcos. Apresentamos, nesse momento, o cálculo do arco duplo e do arco metade, e transformações de somas em produtos e vice-versa. Procuramos, sempre que possível, explorar esses conteúdos do ponto de vista geométrico.

5.14 – Funções trigonométricas

Desencadeamos o estudo das funções periódicas, visto que esse é o momento apropriado do curso para um estudo completo das funções trigonométricas. Nesse tratamento, o estudante poderá verificar qual é o máximo da função do tipo $f(x) = \text{sen } x + \cos x$, apresentando a solução gráfica e a algébrica.

6 – Resolução comentada de alguns exercícios

CAPÍTULO I

Exercícios de fixação, p. 40

8 a) A proposição é verdadeira (pressupondo que x é um número inteiro, caso contrário não faz muito sentido discutir se x é ímpar ou não). De fato:

i) Vamos mostrar que x é ímpar $\Rightarrow x^2$ é ímpar. Suponha que x é ímpar. Então $x = 2k + 1$, onde $k \in \mathbb{Z}$ (todo número ímpar pode ser escrito desta forma). Enfim:
$x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, sendo $2(2k^2 + 2k)$ um número par, mais 1, e, portanto, um número ímpar.

ii) Vamos mostrar que x^2 é ímpar $\Rightarrow x$ é ímpar. Para ser exato, mostremos a contrapositiva desta implicação (lembremos que a contrapositiva é equivalente à implicação dada), que diz que x é par $\Rightarrow x^2$ é par. Suponha que x é par. Então $x = 2k$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Assim: $x^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ que, sendo 2 vezes um número inteiro, é também par.

b) Como $7 > 4$ é V e $2 < 9$ é V, a proposição é verdadeira (na tabela verdade, note que $(V \Leftrightarrow V) = V$).

c) Brasília não fica na França, mas $6 > 5$. O lado esquerdo da equivalência é F e o direito é V. Assim, a equivalência é falsa.

d) A cidade do Rio de Janeiro é a capital do Estado do Rio de Janeiro; ao mesmo tempo, $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Como os dois lados da equivalência são V, a equivalência é verdadeira.

11 A proposição diz que "Se Felipe é um bom professor, então Felipe ensina bem a seus alunos". A **hipótese** é "Felipe é um bom professor", e a **tese** é "Felipe ensina bem a seus alunos". Assim:

a) A proposição recíproca é: "Se Felipe ensina bem a seus alunos, então Felipe é um bom professor". Note que esta recíproca não é necessariamente equivalente à proposição inicial!

b) A contrapositiva é: "Se Felipe **não** ensina bem a seus alunos, então Felipe **não** é um bom professor". Esta proposição é completamente equivalente à original: ou ambas são verdadeiras, ou ambas são falsas.

Exercícios de revisão, p. 41

3 A única consequência lógica de (I), (II) e (III) é "Alguns humanos pensam", alternativa (A). De fato, de (III) sabemos que alguns estudantes pensam; de (I) concluímos que estes estudantes têm de ser humanos. Logo, estes estudantes são humanos que pensam, garantindo (2).

(1) não é consequência lógica de (I), (II) e (III). A única informação que temos sobre um calouro é que ele tem de ser humano (por (I)), mas ele não tem de ser estudante. É *possível* que (1) seja verdade, mas não há *garantia* de que (1) valha. Aliás, vale a pena notar que (II) diz que "todos os estudantes são humanos", o que não é o mesmo que dizer que "todos os humanos são estudantes".

(3) não é consequência lógica de (I), (II) e (III). Novamente, a única informação que temos sobre calouros é que eles são humanos – nada é dito sobre se os calouros pensam ou não. Enquanto (3) *poderia* ser verdade, não é consequência das afirmações (I), (II) e (III).

(4) também não é consequência lógica de (I), (II) e (III). (4) diz que "existem humanos que pensam e não são estudantes". (III) e (II) juntas garantem que há humanos que pensam – mas estes *seriam* estudantes, e, portanto não servem como exemplos para (4). Nenhuma outra afirmação garante existência de qualquer outro ser; assim, (4) pode ser falsa ou verdadeira.

Outra maneira de pensar no problema é construir situações onde cada uma das afirmações (1), (3) e (4) sejam falsas. Seja C o conjunto de todos os calouros no universo do problema, seja H o universo dos humanos, E o universo dos estudantes e P o universo das pessoas que pensam. Com esta linguagem, as informações dadas são:

(I) $C \subseteq H$

(II) $E \subseteq H$

(III) $E \cap P$ tem pelo menos dois elementos.

Assim: é possível ter $E = \{a, b\}$, $P = \{a, b, c\}$, $C = \{c\}$ e $H = \{a, b, c\}$. Neste cenário, note que (I), (II) e (III) são todas verdadeiras. No entanto, c é um calouro que não é estudante (contrariando (1)), c é um calouro que pensa (contrariando (3)).

Por outro lado, se $E = \{a, b, c\}$, $P = \{a, b, c\}$, $C = \{c\}$ e $H = \{a, b, c\}$ (note que (I), (II) e (III) ainda são válidas), então não há humanos que pensam e não são estudantes, contrariando (4).

5 O jeito mais fácil de solucionar esta questão é trocar (II) pela sua contrapositiva (lembre mais uma vez que a contrapositiva é *equivalente* à implicação original). Teríamos assim:

(I) Alguns canhotos não fumam cigarros.

(II) Todos que não fumam cigarros não são homens.

Agora fica bem fácil encadear as duas afirmações: temos alguns canhotos que não fumam cigarros (por (I)), e estes não são homens (por (II)). Alternativa (B).

8 É só fazer a contrapositiva. Esquematicamente, a proposição original é:

((retângulo) ou (trapézio isósceles)) $\Rightarrow$ (diagonais iguais)

A contrapositiva é obtida negando a hipótese "retângulo ou trapézio isósceles", negando a tese "diagonais iguais" e trocando a ordem da implicação, tudo de uma vez:

(diagonais desiguais) $\Rightarrow$ ((não retângulo) e (não trapézio isósceles))

(lembre que $\overline{(p \textbf{ ou } q)} = (\overline{p} \textbf{ e } \overline{q})$ para colocar do lado direito). Alternativa (B).
Observação: a proposição da alternativa (C) é verdadeira, mas não é equivalente à original. As proposições em (A), (D) e (E) são, de fato, falsas.

9 Analisemos cada opção:

(A) é equivalente a $F \Rightarrow F$. Está correta, falso *implica* falso (veja a última linha da tabela que define a implicação lógica).

(B) é equivalente a F e F. É falso.

(C) é equivalente a $V \Rightarrow F$. Falso (segunda linha da tabela que define $\Rightarrow$).

(D) é equivalente a F ou F. É falso.

(E) é equivalente a V e F. Falso.

Alternativa (A).

10 Com a terminologia do problema:
Razão: "Todo sistema linear homogêneo admite solução".
A razão é verdadeira (se o sistema é linear e homogêneo, então tomar todas as variáveis iguais a 0 é uma solução).
Asserção: "Todo sistema linear de n equações com n incógnitas admite apenas uma solução."
A asserção é falsa (há sistemas lineares de n equações e n incógnitas que são indeterminados; outros são impossíveis; nem todos têm apenas uma solução).
Assim, a resposta é a alternativa (B).

11 Mais uma vez, o problema fica simples se trocarmos a proposição pela sua contrapositiva:
"Se a substância gonadotrofina crônica não está presente na urina, então a mulher não está grávida".
Assim, Mariana não está grávida. Note que nada se pode concluir sobre Fátima (ela pode ter a substância na urina por outro motivo).
Alternativa (B).

12 Mais uma questão que fica fácil via contrapositiva. Em resumo, a afirmação original é:

não choveu $\Rightarrow$ (todos os bares abertos)

A contrapositiva é portanto:

(nem todos os bares abertos) $\Rightarrow$ choveu

Agora lembre que "nem todos os bares abertos" é equivalente a "pelo menos um bar não aberto".
Alternativa (E).

13 Resumidamente, a afirmação é:

vogal $\Rightarrow$ par

A única maneira de uma implicação falhar é quando a hipótese é verdadeira **e** a tese é falsa, isto é, a implicação só falha se tivermos um cartão com vogal e sem um número par. Então, para a implicação estar errada, precisamos de "vogal com ímpar". Os cartões (II) e (IV) não podem ser este cartão, então não há necessidade de virá-los. Os cartões que podem "derrubar" a implicação são (I) e (III) e têm de ser verificados.

Outra maneira de pensar: substituindo as informações que temos na implicação acima para cada cartão, temos:

(I): ? $\Rightarrow$ F

(II): F $\Rightarrow$?

(III): V $\Rightarrow$?

(IV): ? $\Rightarrow$ V

(II) é sempre verdadeira (F implica qualquer coisa, linhas 3 e 4 da tabela verdade que define a implicação); (IV) é sempre verdadeira (linhas 1 e 3 da tabela). Porém, os valores de (I) e (III) dependem do outro lado desconhecido. Portanto, (I) e (III) têm de ser verificados. Alternativa (D).

16 Sabemos que Paula é professora. O que podemos tirar daqui? A única implicação que diz algo sobre isto é a segunda, mas a informação sobre Paula ser ou não professora está do lado errado da implicação! Conserte isto trocando-a pela contrapositiva:

"Se Paula é professora, então Ana não é advogada."

Agora é fácil encadear o raciocínio: sabemos, da implicação acima, que Paula é professora, então Ana não é advogada; da outra implicação, então Sandra é secretária. Alternativa (B).

17 Se esta pessoa gostasse de si mesma, como ela gosta APENAS de pessoas que não gostam de si mesmas, ela teria de ser uma destas que não gostam de si mesmas. Mas isto é uma contradição – como ela pode gostar e não gostar de si mesma ao mesmo tempo?

Por outro lado, se ela não gostasse de si mesma, como ela gosta de TODAS as pessoas que não gostam de si mesmas, ela teria de gostar de si mesma. De novo, isto é um absurdo.

Conclusão: esta pessoa não existe.

Alternativa (C).

Comentário: tecnicamente, como esta pessoa não existe, qualquer das conclusões é verdadeira. Afinal, uma pessoa que não existe chama-se Miguel, torce para o Íbis, é o Papa, tem 912 anos de idade (completados sexta-feira passada), mora em Júpiter, tirou 6 na prova de Química e é a mãe do meu primo. Logicamente, todas as respostas estão corretas, mas (C) é a mais clara e direta ao ponto, então é a nossa escolhida.

21 Note que:

i) (A) $\Rightarrow$ (C) (se tem duas soluções, tem mais de uma)

ii) (B) $\Rightarrow$ (C)

iii) (C) $\Rightarrow$ (D) (em particular, (A) $\Rightarrow$ (C) $\Rightarrow$ (D), e (B) $\Rightarrow$ (C) $\Rightarrow$ (D)

iv) (E) $\Rightarrow$ (D) (se tem uma, tem pelo menos uma)

Em suma, se a resposta for (A), (B), (C) ou (E), então (D) também será correta. Como a questão só tem uma opção correta, ela tem de ser (D).

Comentário: aliás, é possível descobrir mais: como (C) é incorreta, o "problema" não tem mais de uma solução. Mas (D) está correta, então há pelo menos uma solução. Conclusão: há exatamente uma solução.

Mais ainda: como (E) é incorreta, esta solução não pode ser positiva. Conclusão final: mesmo sem ter visto o problema, João poderia dizer que ele tem apenas uma solução, que é negativa ou zero.

23 Cuidado: a frase "*p*, somente se *q*" é a implicação "$p \Rightarrow q$" (enquanto "*p*, se *q*" significa "$q \Rightarrow p$"). Resumidamente, a frase em questão é:

TUKRO $\Rightarrow$ convidada

Alternativa (D).

26 Não é possível que duas das afirmações sejam verdadeiras ao mesmo tempo. Assim, há três ou quatro afirmações falsas no cartão. Mas isto indica que uma das afirmações, (III) ou (IV), é verdadeira, isto é, há uma afirmação verdadeira (que, a propósito, é a (III)). Assim, há três falsas. Alternativa (D).

34 Lembrando sempre que há apenas uma alternativa correta:

i) (A) $\Rightarrow$ (D) ou (E), então A não pode ser correta.

ii) (B) $\Rightarrow$ (D), então (B) não serve.

iii) (C) $\Rightarrow$ (D), então (C) também não serve.

iv) Enfim, (D) $\Rightarrow$ (B) ou (C), então (D) não serve (se você está lendo esta questão após o ano 2100, saiba que resolvemos esta questão no início do século XXI).

Resposta final: Alternativa (E) (e sabemos que o autor nasceu antes ou durante o século XVIII, para que as outras alternativas sejam incorretas).

Desafios

1 a) Sim. Afinal, se $n = 3k$ (com $k \in \mathbb{Z}$), então $n^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$.

b) Sim. Vamos mostrar a contrapositiva: se n não é divisível por 3, então n^2 não é divisível por 3.
De fato, se n não é divisível por 3, então n deixa resto 1 ou 2 na divisão por 3. No primeiro caso:
$n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$,
que também deixa resto 1 na divisão por 3.
No segundo caso:
$n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4 =$
$= 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$,
que também deixa resto 1 na divisão por 3.
Assim, se n não é divisível por 3, então n^2 também não é.

c) Sim. Afinal, se $n = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$), então $n^3 = 27k^3 = 3(9k^3)$ também é múltiplo de 3.

d) Sim. Novamente, vamos à contrapositiva:
$n = 3k + 1 \Rightarrow n^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 =$
$= 3(9k^3 + 9k^2 + 3k) + 1$

$n = 3k + 2 \Rightarrow n^3 = 27k^3 + 54k^2 + 18k + 8 =$
$= 3(9k^3 + 18k^2 + 6k + 2) + 2$

No primeiro caso, n^3 deixa resto 1 na divisão por 3 e, no segundo, deixa resto 2. De qualquer forma, mostramos que:

"se n não é múltiplo de 3, então n^3 também não é múltiplo de 3",

que é equivalente ao enunciado pedido.

Comentário: as contas ficam mais fáceis se você usar um número que deixa resto 2 na divisão por 3 que pode ser escrito na forma $n = 3k - 1$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

2 Seja x um número positivo. Queremos mostrar que:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Será que isto é verdade? Para provar, fazemos a seguinte série de equivalências:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$$

A primeira equivalência está válida, pois x é positivo, então podemos multiplicar ou dividir a desigualdade por x. Os outros dois passos são manipulações algébricas simples e um produto notável.

Em suma, vimos que a afirmação em questão é equivalente à afirmação $(x - 1)^2 \geq 0$; e esta é sempre verdadeira para qualquer x real (um número ao quadrado nunca é negativo). Assim, a afirmação original é verdadeira para qualquer x positivo.

Comentário: se o argumento fosse escrito da seguinte forma:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x - 1)^2 \geq 0,$$

chegando a uma afirmação verdadeira, não teríamos provado absolutamente nada. Cada implicação ao raciocínio acima está correta, e

é verdade que a última frase $(x-1)^2 \geq 0$ é irrefutavelmente correta, mas isto não indica absolutamente nada sobre a veracidade da primeira afirmação, $x + \frac{1}{x} \geq 2$. De fato, lembre que ambas as implicações $F \Rightarrow V$ e $V \Rightarrow V$ estão corretas. Mesmo que a conclusão de uma implicação seja verdadeira, a hipótese pode ser verdadeira ou falsa, sem que a implicação esteja incorreta! Para ser exato, a nossa demonstração com equivalências está correta porque nela está embutido o seguinte raciocínio:

$$(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

(isto é, a direção útil daquela série de equivalências lá de cima é da direita para a esquerda!). Agora sim, temos uma demonstração correta de que $x + \frac{1}{x} \geq 2$ para todo x positivo. É verdade que, escrita deste jeito, a demonstração parece "mágica" ("Professor, de onde o senhor tirou a ideia de começar com $(x-1)^2 \geq 0$?"), mas esta demonstração é direta e logicamente sólida, saindo de um fato reconhecidamente verdadeiro para chegar ao fato que queremos provar. Enfim, note também que, enquanto a afirmação $(x-1)^2 \geq 0$ também vale para x negativo ou zero, o passo:

$$x^2 + 1 \geq 2x \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

falha se $x = 0$ ou $x < 0$. Por este motivo, só mostramos que $x + \frac{1}{x} \geq 2$ para x positivo!

CAPÍTULO II

Exercícios de fixação, p. 60

3 Basta lembrar que:

$x \in A$ significa que x é um dos elementos de A
$\{x, y, z, \ldots\} \subseteq A$ significa que $x \in A$ e $y \in A$ e $z \in A$ e...

Por outro lado, para lidar com P(A), há duas opções: quando P(A) é pequeno, pode valer a pena escrevê-lo explicitamente. Por exemplo, neste caso:

$P(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

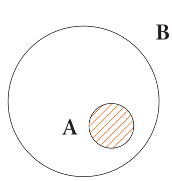
e agora usamos este conjunto para trabalhar. Outra opção é lembrar que:

$X \in P(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$

Vamos à questão em si:
a) Verdadeira, pois 0 é um elemento de A.
b) Falsa, pois $\varnothing$ não é um elemento de A (os únicos elementos de A são 0 e 1). Note que $\varnothing \subseteq A$, mas isto é outra história.
c) Verdadeira, $\{0\} \subseteq A$, pois $0 \in A$.
d) Verdadeira, como $0 \notin P(A)$, então $\{0\} \not\subseteq P(A)$.
e) Falsa. Nenhum dos elementos de P(A) é $\{\varnothing\}$.
f) Verdadeira (é a negação da anterior!).
g) Verdadeira, pois $\varnothing$ é um elemento de P(A).
h) Verdadeira, $\{0, 1\}$ é um dos elementos de P(A).

6 Considere o conjunto das cédulas $C = \{1, 2, 5, 10, 20, 50, 100\}$. Um pagamento que utiliza no máximo uma de cada cédula é simplesmente um subconjunto de C (por exemplo, o subconjunto $A = \{1, 10, 50\}$ seria um pagamento que usa estas três cédulas, dando um total de R$ 61,00). Como C tem 7 elementos, então C tem $2^7 = 128$ subconjuntos, isto é, há 128 diferentes pagamentos.
Vale a pena notar que um destes subconjuntos é o subconjunto vazio, que corresponde a não escolher cédula alguma. Se a opção "não pagar nada" não corresponde a um "pagamento" válido, temos de retirar esta opção, e ficamos com 127 pagamentos distintos.

9 Dizer que "todo carioca é inteligente" significaria que todo elemento de A é necessariamente elemento de B. Isto significaria que $A \subseteq B$. Num diagrama, teríamos:



Exercícios de fixação, p. 77

3 Calculemos x explicitamente:

$$3x - 1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{0{,}6}{100} = 0{,}0045 \Rightarrow 3x = 1 + 0{,}0045 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3} + 0{,}0015 = 0{,}3348333\ldots$$

Note que este número está abaixo de 0,35. A alternativa correta é (B). Aliás, curiosamente, todos os intervalos das respostas estão contidos em (–3, 2]; assim, se há uma única resposta, ela tem de ser (B), mesmo sem resolver a questão.

8 Antes de calcular, racionalizemos as expressões:

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = 2 + \sqrt{2}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} - 1$$

Agora fica mais fácil:

$a - b = 3$

$a + b = 2\sqrt{2} + 1$

Portanto,

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{3}{2\sqrt{2} + 1}$$

que claramente é positivo. Assim, a resposta é:

$$\left|\frac{a - b}{a + b}\right| = \frac{3}{2\sqrt{2} + 1},$$

ou, racionalizando:

$$\left|\frac{a - b}{a + b}\right| = \frac{3}{2\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{2\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2} - 1} = \frac{6\sqrt{2} - 3}{7}$$

10 Da primeira equação, podemos fatorar o termo $(x - 1)$, obtendo:

$(x - 1)\,(2x + y) = 4(x - 1)$.

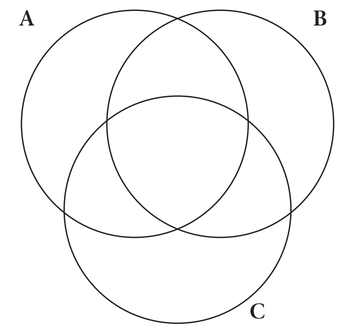
Então, $x - 1 = 0$ ou $2x + y = 4$ (**não se pode cortar** $x - 1$ dos dois lados sem verificar antes a hipótese $x - 1 = 0$).
No primeiro caso, $x = 1$, a segunda equação indica que $y = 6$. De fato (x, y) resolve o sistema.
No segundo caso, temos $y = 4 - 2x$. Substituindo na segunda equação:

$$x^2 + 4 - 2x = 7 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3,$$

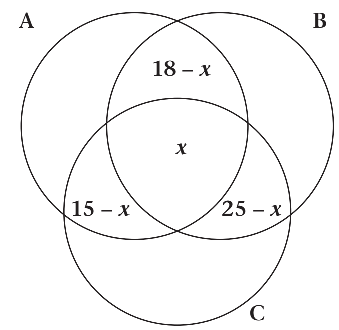
o que nos dá as soluções $(x, y) = (-1, 6)$, ou $(x, y) = (3, -2)$. Realmente, ambos estes pares também resolvem o sistema.
Assim, os valores possíveis para x são –1, 1 ou 3. Sua soma é 3, alternativa (C).

Exercícios de fixação, p. 89

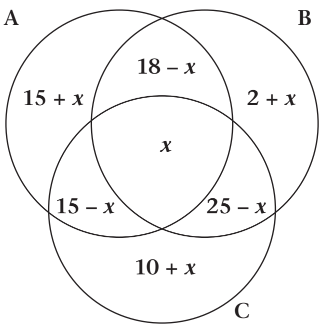
6 Faça um diagrama de Euler-Venn para auxiliar o raciocínio:



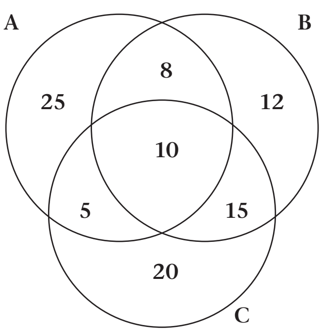
Cada uma das oito regiões da figura acima terá uma porcentagem; alunos que tenham uma afinidade maior com álgebra podem dar uma variável para cada região e escrever então oito equações dadas pelo problema (incluindo a equação que diz que a soma das oito variáveis é 100% = 1). No entanto, isto pode levar a uma grande confusão; sugerimos inventar variáveis sim, mas em menor número, sempre que possível. Por exemplo, se denotamos por x% a porcentagem de entrevistados que consomem as três marcas (que é exatamente a pergunta do item (a)), várias outras porcentagens ficam em função de x. Por exemplo, usando os números de A e B (18%), A e C (15%), e B e C (25%), já ficamos com (em porcentagens):



Agora, usando os totais para A (48%), B (45%) e C (50%), finalmente chegamos a:



Faça a conta: a soma destas sete regiões dá (85 + x)%, que tem de ser 95% dos entrevistados (já que 5% não consomem marca alguma). Assim, x = 10 e podemos completar o diagrama com as porcentagens de cada região:



(Vale a pena conferir a figura acima contra cada um dos dados do enunciado!). Agora vamos às respostas para os itens:

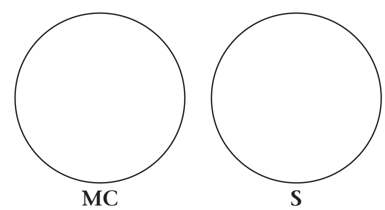
a) 10% dos entrevistados consomem as três marcas.
b) Os entrevistados que consomem apenas uma marca são 25% (apenas A), mais 12% (apenas B), mais 20% (apenas C), para um total de 57% dos entrevistados.

7 Dividamos os dias em "períodos" (cada manhã de um dia é um "período", cada tarde de um dia é outro "período"). O problema diz que houve 5 períodos chuvosos (pois, choveu 5 dias, e a cada dia apenas um período pode ter chuva) e 9 períodos sem chuva (6 manhãs e 3 tardes). Assim, o total é de 14 períodos, ou seja, 7 dias.

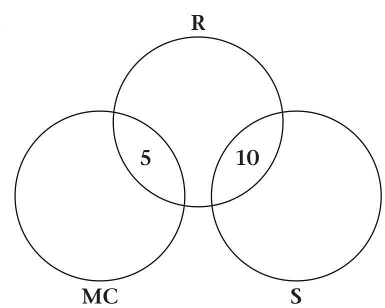
10 Novamente, a ideia é construir um diagrama de Euler-Venn, de dentro para fora. Sejam MC o conjunto dos que gostam de música clássica, R o conjunto dos que gostam de *rock* e S o conjunto dos fãs de música sertaneja. A construção segue as figuras abaixo:

i) Ninguém gosta de música clássica e sertaneja ao mesmo tempo;
ii) MC e R são 5%; R e S são 10%;
iii) MC tem 30%; R tem 25%; S tem 50%.

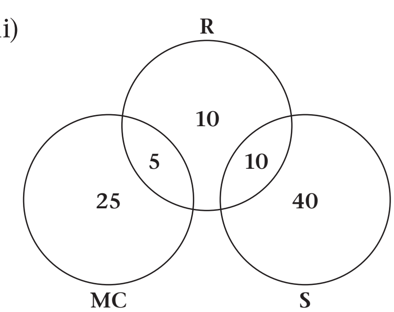
i)



ii)



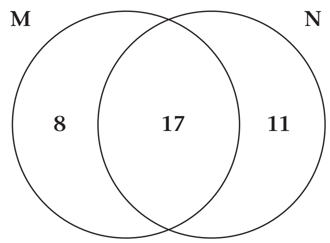
iii)



Então há um total de 90% dentro de algum dos conjuntos, e a resposta é que 10% dos habitantes não "curtem" nenhum dos gêneros, alternativa (A).

12 O "pulo do gato" desta questão é notar que todos os carros (para chegar a C) têm de passar por P, então esta informação pode ser ignorada! Assim, há apenas dois conjuntos a considerar: M (o conjunto dos carros que passaram por M) e N (o conjunto dos carros que passaram por N).

Agora, o diagrama de Euler-Venn é simples (construindo-o de dentro para fora):



Note, enfim, que todos os carros têm de passar por M ou N para sair da cidade A, então o diagrama acima contém todos os carros do enunciado. A resposta é 8 + 17 + 11 = 36 carros, alternativa (D).

Exercícios de revisão, p. 91

11 Há várias maneiras de "atacar" este problema. Uma é escrever explicitamente cada conjunto verdade. Temos:

$V_I = \{3, 4\}$
$V_{II} = \{6, 7, 8, 9, \ldots\}$
$V_{III} = \{0, 1\}$

A interseção destes conjuntos é claramente o conjunto vazio, resposta (A).
Outra maneira simples é observar que II equivale a $x > 5$, enquanto III equivale a $x < 2$. Daqui, já fica claro que nenhum x satisfaz II e III (quanto mais I, II e III).

38 (A) Falsa. Um contraexemplo é $x = -5$ e $y = 20$. Note que $x + y \in \mathbb{R}_+$, mas não vale $x, y \in \mathbb{R}_+$.
(B) Verdadeira. Afinal, se $xy \in \mathbb{R}_+$, então $xy \geq 0$. Se $xy > 0$, então eles são ambos positivos (então $x, y \in \mathbb{R}_+$) ou ambos negativos (então $x, y \in \mathbb{R}_-$). Por outro lado, se $xy = 0$, então um deles é 0 e o outro é um real qualquer. De qualquer forma, lembre que $0 \in \mathbb{R}_+$ e $0 \in \mathbb{R}_-$, então seja o outro número positivo, zero ou negativo, a afirmação $x, y \in \mathbb{R}_+$ ou $x, y \in \mathbb{R}_-$ ainda é válida.
(C) Verdadeira. De fato, vale até a equivalência: $x - y \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow x - y \geq 0 \Leftrightarrow x \geq y$.
(D) Falsa. Do jeito que está escrito, está errado: poderia ser $x > 0$ e $y < 0$, o que valida a hipótese $xy \in \mathbb{R}_-$ sem validar a tese: não se tem nem $x \in \mathbb{R}_+$ e $y \in \mathbb{R}_+$, nem $x \in \mathbb{R}_+$ e $y \in \mathbb{R}_-$.
(E) Falsa. Poderia ser $x < 0$ e $y = 0$. Teríamos $xy^2 = 0 \in \mathbb{R}_+$, mas não valeria $x \in \mathbb{R}_+$.

40 Sabemos que, ao multiplicar uma desigualdade por um número positivo, ela mantém a ordem. Assim, (I) e (III) são válidas. Por outro lado, ao multiplicar uma desigualdade por um número negativo ela se inverte – assim, (II) e (IV) também valem! Alternativa (E).

46 (I) é Falsa. Nem sempre vale que $x^2 > x$! Isto fica bem claro ao encontrar o conjunto verdade desta desigualdade:

$x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x(x - 1) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ou $x > 1$,

pois ou ambos os fatores são negativos (o que nos dá $x < 0$) ou ambos positivos (levando a $x > 1$). Assim, qualquer valor em [0, 1] é um contraexemplo para (I).
(II) é Verdadeira. Analogamente ao item (I), temos:

$x^2 \geq x \Leftrightarrow x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ ou $x \geq 1$,

e esta última condição é satisfeita para todos os números naturais.
(III) é Verdadeira, pois todos os números inteiros satisfazem $x \leq 0$ ou $x \geq 1$ (não há inteiros em (0, 1)).
(IV) é Falsa. Qualquer número racional em [0, 1] é contraexemplo, incluindo 0, 1 ou $\frac{1}{2}$.
Enfim, alternativa (C).

47 (I) é Verdadeira. É mais fácil ver isto pela contrapositiva: se $a - 1$ é racional, então a é racional. De fato, se $a - 1 = \frac{m}{n}$, com m e n inteiros ($n \neq 0$), temos:

$$a - 1 = \frac{m}{n} \Rightarrow a = \frac{m}{n} + 1 = \frac{m + n}{n}$$

e, como $m + n$ seria inteiro, assim como $n \neq 0$, então a seria mesmo racional.

(II) é Falsa. Basta tomar $y = 0$ e ver que a implicação "α é irracional ⇒ α é racional" é absurda.
(III) é Verdadeira. Um exemplo específico é $\alpha = \sqrt{2}$ e $\beta = 18 - \sqrt{2}$. Mais geralmente, tomando α irracional qualquer e $\beta = r - \alpha$ onde r é racional, não é difícil ver que β é irracional e $\alpha + \beta = r$ é racional.
(IV) é Falsa. Como vimos acima, podemos ter α e β irracionais com α + β racional mas não nulo.
Alternativa (E).

49 Vejamos cada desigualdade separadamente. Como a e b são positivos, temos:

$$a \geq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2a \geq a + b \Leftrightarrow a \geq b$$

$$\sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \Leftrightarrow a + b \leq 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \leq 0$$

$$\frac{1}{2}(a+b) \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \leq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (a-b)^2 \leq 0$$

$$\frac{2ab}{a+b} < b \Leftrightarrow \frac{2a}{a+b} < 1 \Leftrightarrow 2a < a + b \Leftrightarrow a < b$$

Ou seja, a primeira desigualdade está correta (desde que $a > b$), mas as outras são falsas. Em outras palavras, juntanto tudo cuidadosamente, acabamos de demonstrar o seguinte resultado:
se $a > b > 0$, valem as desigualdades:

$$b < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < a$$

e a alternativa correta é a (D).
Comentário: A expressão

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$$

é o inverso da média aritmética dos inversos de a e b, e é a chamada média harmônica dos números a e b. Em suma, mostramos que, dados dois positivos distintos, o menor deles é menor que a média harmônica, que é menor que a média geométrica, que é menor que a média aritmética, que é menor que o maior dos dois deles. Notemos aqui que esta propriedade ainda vale para médias entre n números, mas não demonstraremos este fato.

54 A maneira usual é dividir a resolução em três casos, um para $x > -1$, outro para $-2 \leq x \leq -1$ e um terceiro para $x < -2$; no entanto, neste caso específico, há uma maneira mais rápida de resolver o problema, usando $|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$:

$$|x + 2| = |x - 1| \Leftrightarrow x + 2 = x - 1 \text{ ou } x + 2 = -(x - 1)$$

No primeiro caso, temos $2 = -1$, o que é impossível. No segundo, obtemos $x = -\frac{3}{2}$, que é então a única solução. Alternativa (D).

55 Aqui é melhor separar em três casos para evitar erros. As raízes de $2x + 1$ e de x são $-\frac{1}{2}$ e 0, respectivamente. Então:

Caso 1: $x > 0$, então a equação torna-se:

$$2x + 1 > x \Leftrightarrow x > -1$$

Ou seja, o conjunto verdade do caso 1 é $V_1 = (0, +\infty) \cap (-1, +\infty) = (0, +\infty)$.

Caso 2: $-1 \leq x \leq 0$, então ficamos com:

$$2x + 1 > -x \Leftrightarrow x > \frac{-1}{3}$$

e este conjunto verdade é

$$V_2 = [-1, 0] \cap \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right) = \left(-\frac{1}{3}, 0\right].$$

Caso 3: $x < -1$, então:

$$-2x - 1 > -x \Leftrightarrow x < -1,$$

que dá $V_3 = (-\infty, -1)$.

Enfim, o conjunto pedido será $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$. Alternativa (E). Note-se que a alternativa (C) nem faz sentido!

66 Testemos a seguinte desigualdade:

$$\frac{a}{b} \overset{??}{<} \frac{a+1}{b+1}$$

Vejamos se podemos reduzi-la a algo mais familiar (lembrando sempre que a, $b > 0$):

$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1} \Leftrightarrow a\,(b+1) < b\,(a+1) \Leftrightarrow ab + b \Leftrightarrow a < b$,

ou seja, se $0 < a < b$, a desigualdade $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$ é válida! Analogamente, trocando a por $a - 1$ e b por $b - 1$, temos que:

$0 < a - 1 < b - 1 \Rightarrow \frac{a-1}{b-1} < \frac{a}{b}$,

ou seja, se $1 < a < b$, então:

$\frac{a-1}{b-1} < \frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$

(note que se a ou b não forem racionais, a desigualdade ainda é válida).

73 Sejam a e b números racionais e $\sqrt{c}$ um número irracional. Para mostrar a equivalência pedida, temos de mostrar que vale a ida e que vale a volta. Comecemos pela volta que é simples:

"Volta": Temos de mostrar que $a = b = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a + b\sqrt{c} = 0$. Esta parte é fácil (nem precisaremos da irraconalidade de $\sqrt{c}$)! Afinal, se $a = b = 0$, então $a + b\sqrt{c} = 0 + 0\sqrt{c} = 0$.

"Ida": Temos de mostrar que $a + b\sqrt{c} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = b = 0$. Esta parte é mais difícil. Vejamos o que conseguimos fazer saindo da hipótese:

$$a + b\sqrt{c} = 0 \Rightarrow b\sqrt{c} = -a \Rightarrow \sqrt{c} = -\frac{a}{b}.$$

Esta última implicação estaria errada se $b = 0$! Porém, se tivéssemos $b = 0$, seria $a + 0\sqrt{c} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 0$ e o teorema já estaria demonstrado! Em outras palavras, dividimos a demonstração da "ida" em dois casos:

i) Se $b = 0$, então $a + 0\sqrt{c} = 0 \Rightarrow a = 0$ e o teorema é válido.

ii) Se $b \neq 0$, então $\sqrt{c} = -\frac{a}{b}$. Mas como a e b são racionais (e $b \neq 0$), este número $-\frac{a}{b}$ seria racional! Isto seria um absurdo (pois $\sqrt{c}$ é irracional!). Ou seja, o caso $b \neq 0$ não existe! Portanto, a demonstração da "ida" está terminada.

CAPÍTULO III

Exercícios de fixação, p. 113

5 a) Da tabela, o preço de pintar 430 m² é R\$ 800,00.

b) Da tabela, com R\$ 800,00 podemos pintar a área máxima de 600 m².

c) A área pintada **não é** uma função do preço neste caso. Isto ocorre pois, dado um preço (por exemplo, R\$ 800,00), há várias áreas que tem aquele custo (todas de 401 m² a 600 m²). Como um valor de preço corresponde a vários valores de área, a área não é uma função do preço.

d) O preço **é** uma função da área pintada (se supusermos que o domínio da função inclui apenas as áreas tabeladas). De fato, dada uma área qualquer, há apenas um preço associado a esta área!

Exercícios de fixação, p. 119

7 Temos:

$f(k^2) - 2f(k) + f(2k) = (2k^2 - 1) - 2(2k - 1) +$ $+ (2(2k) - 1) = -2k^2 + 4k$

Então, a equação pedida é:

$-2k^2 - 4k = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 0$ ou $-2k + 4 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = 0$ ou $k = \frac{7}{4}$

Como a função é definida em $\mathbb{R}$, não há problema algum com o domínio — a resposta é mesmo $k = 0$ ou $k = \frac{7}{4}$.

Exercícios de fixação, p. 129

5 Supondo que a vazão da torneira é constante e que as paredes do recipiente são verticais,

então a altura da água aumentará a uma taxa constante, e a bolinha (que fica na superfície) também subirá a uma velocidade constante, que não dependerá nem do tempo nem da altura da bolinha. Alternativa (C).

6 Tipicamente, a posição "inverno" de um chuveiro mantém uma potência constante e mais alta do que a posição "verão" (pois na posição "inverno" o chuveiro esquenta mais a água). Alternativa (C).

7 a) De acordo com esta tabela, quem tem um rendimento de R\$ 26.500,00 paga alíquota de 15% menos a isenção de R\$ 2.095,20. Fazendo as contas, o imposto é (em reais):

$$(0{,}15)(26\,500) - 2\,095{,}20 = 1\,879{,}80$$

b) Quem teve rendimento de R\$ 13.000,00 está isento, e não paga imposto algum.

c) Vamos supor que este contribuinte está na faixa mais alta (depois verificaremos se este é o caso). Sendo x o seu rendimento, temos:

$$0{,}275x - 5\,584{,}20 = 6\,200 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0{,}275x = 11\,784{,}20 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{11\,784{,}20}{0{,}275} \simeq 42\,851{,}64$$

Note que este número está na faixa indicada, então este é o rendimento correto.

Exercícios de fixação, p. 137

9 A maneira mais organizada de resolver este tipo de exercício é fazer uma troca de variáveis. Façamos $y = 2x + 1$. Colocando x em função de y, vem $x = \frac{y-1}{2}$, isto é,

$$f(2x+1) = x \Leftrightarrow f(y) = \frac{y-1}{2},$$

ou seja, f é uma função que associa ao número y o número $\frac{y-1}{2}$. Em outras palavras,

$$f(x) = \frac{x-1}{2}$$

(onde, por assim dizer, "este x não é aquele x").

10 No instante t, temos a população de $p(t) = 10 + 0{,}1t^2$, enquanto a taxa de monóxido de carbono é $c = 0{,}5p + 1$. Como as unidades de p em ambas as expressões coincidem (milhares), basta substituir aquele p nesta expressão de c para obter c em função de t:

$$c(p(t)) = 0{,}5(10 + 0{,}1t^2) + 1 = 0{,}05t^2 + 6,$$

onde t é em anos a partir de agora, e c está em partes por milhão.

13 Há duas opções para este exercício: a primeira é tentar descobrir $f(x)$. Para tanto, fazemos:

$$f(g(x)) = f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Para determinar uma expressão para f, fazemos $y = x - \frac{1}{x}$. Agora podemos obter x em função de y para jogar na expressão à direita, ou então usar o seguinte truque:

$$y = x - \frac{1}{x} \Rightarrow y^2 = x^2 - 2x\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2,$$

ou seja,

$f(y) = y^2 + 2.$

E, enfim, $f(4) = 18$.

Uma segunda opção é tentar ir diretamente a $f(4)$. Assim, partimos da expressão que vale para todo x:

$$f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2},$$

e tentamos escolher x de maneira que a expressão à esquerda seja $f(4)$, isto é, procuramos algum x que resolva

$$x - \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$$

Tomemos por exemplo $x = 2 + \sqrt{5}$; então

$$f(4) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(2 + \sqrt{5}\right)^2 + \frac{1}{\left(2 + \sqrt{5}\right)^2} =$$
$$= \left(2 + \sqrt{5}\right)^2 + \left(2 - \sqrt{5}\right)^2 = 18.$$

Enquanto a primeira opção é mais rápida, tecnicamente ela tem um problema: ela mostra que $f(y) = y^2 + 2$ apenas para os valores de y que são da forma $x - \frac{1}{x}$ e nada diz sobre outros valores de y que porventura não possam ser escritos como $x - \frac{1}{x}$. A segunda opção demonstra claramente que $y = 4$ é um destes valores (para $x = 2 \pm \sqrt{5}$).

Exercícios de revisão, p. 138

8 O consumo de 32 m^3 tem de ser divido assim:

i) Os primeiros 12 m^3 custam R$ 15,00 cada, para uma parcial de $(12) \cdot (15) =$ R$ 180,00.

ii) Os próximos 8 m^3 custam R$ 50,00 cada, para uma parcial de $(8) \cdot (50) =$ R$ 400,00.

iii) Os próximos 10 m^3 custam R$ 90,00 cada, para uma parcial de $(10) \cdot (90) =$ R$ 900,00.

iv) Enfim, ainda há $32 - (12 + 8 + 10) = 2$ m^3 que custam R$ 100,00 cada para mais R$ 200,00.

Assim, o montante a ser pago é $180 + 400 + 900 + 200 =$ R$ 1.680,00.

11 Esta é uma questão interdisciplinar que só pode ser resolvida com algum conhecimento de Biologia. Não há nenhuma introdução de nutrientes pela casca de um ovo — todos os nutrientes necessários ao embrião estão contidos lá dentro. Porém, a casca é permeável à saída de gás carbônico gerado pelo desenvolvimento do pintinho, ou seja, o ovo perde massa à medida que o tempo passa. Alternativa (C).

23 I) Sabemos que $f(p + q) = f(p) \cdot f(q)$ para todo p e q inteiro (e que $f(2) = 2$). Tomando $p = 2$ e $q = 0$, vem:

$$f(2 + 0) = f(2) \cdot f(0) \Rightarrow 2 = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 1$$

Alternativa (B).

II) Agora tomemos $p = 2$ e $q = -2$. Ficamos com

$$f(2 - 2) = f(2) \cdot f(-2) \Rightarrow 1 = 2f(-2) \Rightarrow f(-2) = \frac{1}{2}.$$

Alternativa (B).

Comentário: de fato, é instrutivo tomar $q = 1$ e deixar p solto:

$$f(p + 1) = f(p) \cdot f(1),$$

ou seja, se $f(1) = r$, temos:

$$f(p + 1) = rf(p),$$

mostrando que a sequência $(\ldots, f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), \ldots)$ é uma P.G., de razão r. Mais ainda, como

$$f(1 + 1) = rf(1) \Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{2},$$

e, como $f(0) = 1$, ficamos com

$$f(n) = r^n.$$

Em suma, há apenas duas possíveis fórmulas para $f(n)$:

$$f(n) = \left(\sqrt{2}\right)^n \text{ ou } f(n) = \left(-\sqrt{2}\right)^n.$$

Não é difícil ver que, de fato, ambas satisfazem às condições do enunciado.

25 Desenhemos uma tabela que corresponde ao produto cartesiano do conjunto dos homens com o conjunto das profissões:

	Alpinista	Livreiro	Mecânico	Dentista	Marceneiro	Flautista
Alberto						
Bernardo						
Carlos						

O objetivo é escolher duas células em cada linha, uma por coluna, que serão as duas profissões de cada um dos três homens. Para tanto, use as dicas para marcar as células que **não** podem estar na relação que queremos determinar (marcamos as células com a letra que corresponde à dica que usamos para eliminá-la):

	Alpinista	Livreiro	Mecânico	Dentista	Marceneiro	Flautista
Alberto			B		B	
Bernardo				D	C	
Carlos				D		

Daqui já descobrimos que Alberto é o dentista e Carlos é o Marceneiro. Marquemos as células determinadas com a letra X:

	Alpinista	Livreiro	Mecânico	Dentista	Marceneiro	Flautista
Alberto			B	X	B	
Bernardo				D	C	
Carlos				D	X	

Agora vejamos o que mais as dicas nos informam: por exemplo, (f) diz que o dentista (que agora sabemos ser Alberto) não é o livreiro; marquemos estas dicas com a mesma convenção de antes:

	Alpinista	Livreiro	Mecânico	Dentista	Marceneiro	Flautista
Alberto	E	F	B	X	B	
Bernardo				D	C	
Carlos			B	D	X	

Então a segunda profissão de Alberto tem de ser flautista, e o mecânico é Bernardo. Os símbolos "–" indicam células eliminadas por já termos encontrado a correspondência da coluna:

	Alpinista	Livreiro	Mecânico	Dentista	Marceneiro	Flautista
Alberto	E	F	B	X	B	X
Bernardo			X	D	C	–
Carlos			B	D	X	–

Enfim, por (a), o alpinista não é o mecânico. Então:

	Alpinista	Livreiro	Mecânico	Dentista	Marceneiro	Flautista
Alberto	E	F	B	X	B	X
Bernardo	A	X	X	D	C	–
Carlos	X	–	B	D	X	–

e a resposta final é que Alberto é dentista e flautista, Bernardo é livreiro e mecânico, e Carlos é alpinista e marceneiro.

48 Temos:

$$g(f(x)) = 1 - f(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(g(f(x))) = \frac{1}{g(f(x))} = \frac{x}{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(f(g(f(x)))) = 1 - f(g(f(x))) = 1 - \frac{x}{x-1} =$$

$$= \frac{x-1-x}{x-1} = -\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} = f(g(x))$$

Alternativa (B).

64 O enunciado diz que:

$$g(f(x)) = f\left(\frac{x}{3} + 2\right).$$

Substituindo a fórmula dada para $f(x)$:

$$g(3x - 2) = 3\left(\frac{x}{3} + 2\right) - 2 = x + 4.$$

Uma opção é fazer $y = 3x - 2$ e encontrar a fórmula geral para $g(x)$. Outra opção é ir direto ao ponto: escolha x tal que $3x - 2 = 7$, isto é, tome $x = 3$. Então:

$$g(3x - 2) = g(7) = x + 4 = 7$$

Alternativa (D).

74 Se $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, então:

$$f(f(x)) = \frac{1 + \frac{1+x}{1-x}}{1 - \frac{1+x}{1-x}} = \frac{\frac{1-x+1+x}{1-x}}{\frac{1-x-(1+x)}{1-x}} = \frac{2}{-2x} = -\frac{1}{x},$$

para $x \neq 1$ e, agora, $x \neq 0$.

75 São três trapézios; o primeiro tem bases 1 e $1 + \dfrac{1^3}{10} = 1{,}1$ e altura 1. Então:

$$A_1 = \frac{1 + 1{,}1}{2} \cdot 1 = 1{,}05.$$

O segundo tem bases 1,1 e $1 + \dfrac{2^3}{10} = 1{,}8$ e altura 1. Assim:

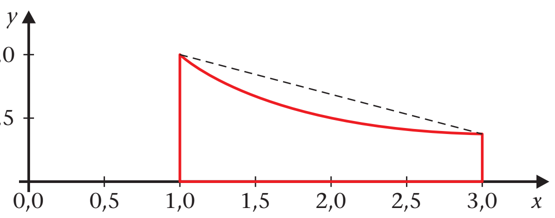
$$A_2 = \frac{1{,}1 + 1{,}8}{2} \cdot 1 = 1{,}45$$

Enfim, o terceiro tem bases 1,8 e $1 + \dfrac{3^3}{10} = 3{,}7$ e altura 1. Então:

$$A_3 = \frac{1{,}8 + 3{,}7}{2} \cdot 1 = 2{,}75.$$

Somando as três áreas, temos a estimativa:
$A \simeq 5{,}25$.
Alternativa (E).

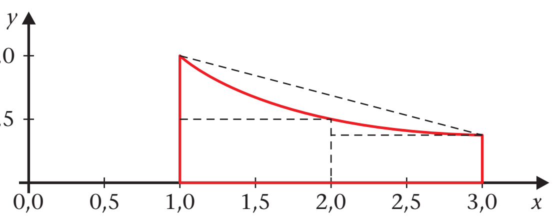
78 Faça um gráfico aproximado:



A área da figura é menor que a área do trapézio retângulo abaixo da linha tracejada. Assim:

$$A < \frac{1+\frac{1}{3}}{2} \cdot 2 = \frac{4}{3} = 1{,}333\ldots$$

Por outro lado, a área pedida é certamente maior que a soma dos dois retângulos indicados abaixo:



portanto,

$$A > 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots$$

Assim, mostramos que $0{,}8333\ldots < A < 1{,}333\ldots$
Em particular, $0{,}8 < A < 1{,}5$.
Alternativa (C).
Observação: para obter a área exata, é necessário usar Cálculo:

$$A = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\big|_1^3 = \ln 3 \cong 1{,}0986\ldots$$

80 Basta notar que a área pedida é a área A_1 entre $x = 0$ e $x = 4$, menos a área A_2 entre $x = 0$ e $x = 1$.
Mas, pelo dado do problema, $A_1 = \frac{4^3}{3}$ e $A_2 = \frac{1^3}{3}$.
Então, a área pedida é $A = A_1 - A_2 = \frac{64-1}{3} = 21$.
Alternativa (B).

81 Do gráfico, vemos que $f(3) > f(4)$, então a alternativa (A) está correta.
Como $f(2) = 5$, aproximadamente, temos $f(f(2)) = f(5) > 2 > 1{,}5$. A alternativa (B) está correta.
Todos os valores y do gráfico estão abaixo de 5, então (C) vale.
Traçando a reta horizontal $y = 1{,}6$, note que ela corta o gráfico em 3 pontos. Assim, a alternativa (D) é incorreta, e é a resposta.

CAPÍTULO IV

Exercícios de revisão, p. 170

2 É instrutivo aplicar a função a sucessivos números naturais apenas para “entender o que está acontecendo”:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	0	1	1	2	2	3	3	4	4

ou seja, a imagem desta função parece ser o conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Daqui, é fácil concluir que:

i) Como $f(1) = f(2) = 1$, a função não é injetora.
ii) Não há n tal que $f(n) = -1$. De fato, se $f(n) = -1$, teríamos $\frac{n}{2} = -1$ ou $\frac{n+1}{2} = -1$, isto é, $n = -2$ ou $n = -1$, e ambos estes valores não estão no domínio $\mathbb{N}$ da função. Como nenhum número “cai” em -1, a função não é sobrejetora.
Alternativa (C).

16 Poderíamos calcular explicitamente a fórmula da função inversa, mas é instrutivo apresentar uma alternativa, note que:

$f(0) = 3$ e $f(4) = 0$,

isto é, o gráfico de $y = f(x)$ passa pelos pontos $(0, 3)$ e $(4, 0)$. Mas então:

$f^{-1}(3) = 0$ e $f^{-1}(0) = 4$,

isto é, o gráfico da função inversa passa por $(3, 0)$ e $(0, 4)$. O único gráfico que satisfaz estas duas condições é o da alternativa (D).

23 Para que esta função seja par, devemos ter, para todo x, $f(x) = f(-x)$, isto é

$$\frac{ax + b}{x + c} = \frac{-ax + b}{-x + c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ax + b)(-x + c) = (-ax + b)(x + c) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -ax^2 - bx + acx + bc = -ax^2 + bx - acx - bc \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (ac - b)x = 0.$$

Como esta igualdade tem de valer para todo x, concluímos que $ac = b$. Em outras palavras,
$f(x) = \dfrac{ax + b}{x + c} = \dfrac{ax + ac}{x + c} = a$

Alternativa (E).

CAPÍTULO V

Exercícios de fixação, p. 182

5 Uma boa maneira de resolver é colocar $y = 1$ e deixar x livre. Temos então:

$$f(x + 1) = f(x) + f(1) = f(x) + 3.$$

Assim, podemos ir calculando os valores de $f(x)$ passo a passo:

$$f(2) = f(1) + 3 = 3 + 3 = 6$$
$$f(3) = f(2) + 3 = 6 + 3 = 9.$$

De fato, a partir de $f(n + 1) = f(n) + 3$, não é difícil provar por indução que $f(n) = 3n$ para todo n inteiro; também é possível mostrar, com um pouco mais de trabalho, que $f(q) = 3q$ para todo q racional. A ideia é tomar $q = \dfrac{m}{n}$ com m e n inteiros. Então:

$$f(m) = f(nq) = f((n - 1)q + q) = f((n - 1)q) + f(q) =$$
$$= f((n - 2)q) + f(q) + f(q) = \dots f(0) + nf(q)$$

Como m e 0 são inteiros, já sabemos que $f(m) = 3m$ e $f(0) = 0$ e então:

$$nf(q) = 3m \Rightarrow f(q) = \frac{3m}{n} = 3q.$$

Enfim, um comentário interessante: apesar de conseguirmos mostrar que $f(q) = 3q$ para todo q racional, não dá para mostrar que $f(x) = 3x$ para todo x real!

Exercícios de fixação, p. 199

6 De acordo com o enunciado, a função imposto é

$$I(R) = \begin{cases} 0, \text{ se } R \leq 24\,000 \\ 0{,}15R - P, \text{ se } R \geq 24\,000 \end{cases}$$

O problema é que esta função deve ser “contínua”, isto é, não pode apresentar salto brusco ao se passar de uma forma de cálculo para a outra. Em outras palavras, o contribuinte que tem renda exatamente igual a 24 000 deve pagar a mesma quantidade de imposto (isto é, ser isento), seja ele considerado na primeira ou na segunda faixa de rendimento. Traduzindo para a matemática:

$$0{,}15(24\,000) - P = 0 \Rightarrow P = 3\,600,$$

então a dedução da faixa “rendimento acima de 24 000” deve ser 3 600.

Exercícios de revisão, p. 200

5 a) Seja Q a quantidade inicial de mercadoria que o vendedor carregava. Como ele vendeu 10% de suas mercadorias no primeiro lugar, ele ficou com 90% delas, isto é, 0,9Q. Na segunda parada ele ficou com 80% do que sobrou, isto é (0,8)(0,9)Q. Enfim, após passar pelo terceiro lugar, ele ficou com (0,5)(0,8)(0,9)Q = 0,36Q.
Como o mercador acabou ficando com 36% da mercadoria inicial, ele vendeu 64% do que tinha inicialmente. A resposta é 64%.

b) Como ele recebeu R$ 57.600,00 a R$ 9,00 por unidade, ele vendeu $\dfrac{57\,600}{9} = 6\,400$ unidades. Como vimos acima, isto é 64% do seu estoque inicial, então o estoque inicial era de 10 000 unidades. Agora ele tem mais 3 600 unidades para vender. Para que a receita total da parte restante sejam outros R$ 57.600,00, o novo preço unitário deve ser

$$\frac{\text{R\$ } 57.600{,}00}{3\,600} = \text{R\$ } 16{,}00 \text{ por unidade.}$$

11 Das h horas que o operário trabalha, 40 são pagas à taxa de R$ 3,00 por hora, e as outras

$h - 40$ são pagas a (1,5)R$ 3,00 = R$ 4,50 por hora. Então, o salário bruto semanal em reais é

$S = (40)(3) + (h - 40)(4{,}50) = 4{,}50h - 60.$

Vale a pena repetir que esta fórmula só é válida para $h \geq 40$ horas semanais!

CAPÍTULO VI

Exercícios de fixação, p. 219

1 b) Temos:

$|x^2 - 5x| \geq 6 \Rightarrow x^2 - 5x \geq 6$ ou $x^2 - 5x \leq -6.$

No primeiro caso, vem:

$x^2 - 5x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ou $x \geq 6.$

No segundo caso:

$x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3.$

Como é o primeiro **ou** o segundo caso, o conjunto solução é:

$S = (-\infty\ , -1] \cup [2, 3] \cup [6, +\infty).$

4 Como há duas operações de valor absoluto na desigualdade, é melhor separar tudo em três casos.
Caso 1: Se $x \geq 0$, ambos os valores absolutos somem, e ficamos com:

$(x + 1) - x \leq x + 2 \Leftrightarrow x \geq -1,$

ou seja, neste caso, o conjunto solução é $S_1 = [0, +\infty).$
Caso 2: Se $-1 \leq x \leq 0$, um valor absoluto "troca de sinal", e temos:

$(x + 1) - (-x) \leq x + 2 \Leftrightarrow x \leq 1,$

ou seja, o conjunto solução aqui é $S_2 = [-1, 0].$
Caso 3: Se $x \leq -1$, ambos os valores absolutos "trocam de sinal":

$-(x + 1) - (-x) \leq x + 2 \Leftrightarrow x \geq -3,$

ou seja, aqui temos o conjunto $S_3 = [-3, -1].$

Enfim, como é caso 1, **ou** caso 2, **ou** caso 3, basta fazer a união dos conjuntos encontrados em cada caso. Em suma, o conjunto solução é:

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \Rightarrow S = [-3, +\infty),$

que está descrito na alternativa (C).

5 Resolvendo o módulo "de fora", vem:

$-5 \leq x + |x + 1| \leq 5.$

Agora, é melhor separar em casos de acordo com o sinal do que está dentro do módulo restante:

Caso 1: Se $x + 1 \geq 0$, então temos:

$-5 \leq x + (x + 1) \leq 5 \Leftrightarrow -6 \leq 2x \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 2,$

então o conjunto solução deste caso é $S_1 = [-1, 2].$

Caso 2: Se $x + 1 \leq 0$, então temos:

$-5 \leq x - (x + 1) \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq -1 \leq 5,$

que é sempre verdadeiro. Assim, $S_2 = (-\infty, -1].$
Juntando tudo, encontramos o conjunto solução pedido:

$S = S_1 \cup S_2 \Rightarrow S = (-\infty, 2]$

6 c) Mais uma vez, é melhor separar tudo em casos limitados pelas raízes das expressões dentro dos módulos (neste caso, a saber, 0, 2 e 3). De fato, note que:
$x^2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ ou $x \geq 3$
$3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2.$

Assim:
Caso $x \leq 0$:

$(x^2 - 3x) + (-3x + 6) < x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 < x < 6$

Então $S_1 = \varnothing.$
Caso $0 \leq x \leq 2$:

$(-x^2 + 3x) + (-3x + 6) < x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x < -3$ ou $x > 2$

Então $S_2 = \varnothing$ também!

Caso $2 \leq x \leq 3$:

$(-x^2 + 3x) + (3x - 6) < x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x < 2$ ou $x > 3$

Assim, $S_3 = \varnothing$!

Caso $x \geq 3$:

$(x^2 - 3x) + (3x - 6) < x \Leftrightarrow x^2 - x - 6 < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2 < x < 3$

E $S_4 = \varnothing$.

Portanto, nenhum dos casos apresenta solução. A resposta é $S = \varnothing$.

Exercícios de revisão, p. 228

4 a) Basta usar a definição da função modular. Afinal:

- se $x \geq 0$, então $f(x) = |x| + x = x + x = 2x$;
- se $x < 0$, então $f(x) = |x| + x = -x + x = 0$.

b) Vamos usar o item anterior para acelerar a solução. Assim, vamos dividir o problema em dois casos:

- se $x + 2 \geq 0$, temos $f(x + 2) = 2(x + 2) = 2x + 4$. Neste caso, a equação se torna

$(2x + 4) - x = 3 \Rightarrow x = -1$,

que serve, pois satisfaz à condição $x + 2 \geq 0$,

- se $x + 2 \leq 0$, temos $f(x + 2) = 0$.

Neste caso:

$0 - x = 3 \Rightarrow x = -3$,

que também serve.

Em suma, $S = \{-3, -1\}$.

33 A única alternativa correta é (B). De fato, verifiquemos primeiro que os outros itens são falsos:

(A) Tomando $x = y = 1$, vem $|x + y| = 2 > \dfrac{|x| + |y|}{2} = \dfrac{1}{2}$.

(C) Tomando $x = y = 0$, vem $|x| + |y| = 0 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(D) De fato, vale que $|xy| = |x|\,|y|$ para todo x e y reais.

(E) Tomando $x = y = 1$, por exemplo, vem $|x| + |y| = 2 \neq 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{2}$.

Agora, vamos demonstrar (B). Lembre que, para todos x e y reais, vale a seguinte versão da desigualdade triangular (vide p. 213):

$|x + y| \geq |x| - |y|$.

Analogamente, trocando x por y e vice-versa, vem:

$|x + y| \geq |y| - |x| \Rightarrow -|x + y| \leq |x| - |y|$,

ou seja, juntando as duas desigualdades:

$-|x + y| \leq |x| - |y| \leq |x + y|$.

Agora lembre que $-a \leq b \leq a$ é equivalente a $|b| \leq a$ quando a é positivo. Assim, a expressão anterior pode ser reescrita como:

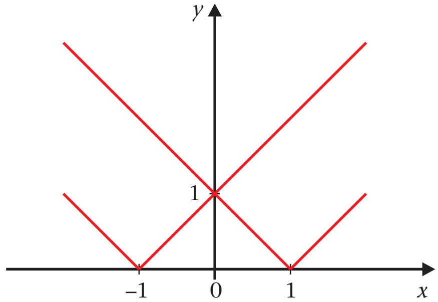
$||x| - |y|| \leq |x + y|$.

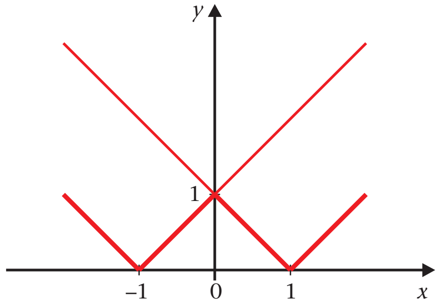
Enfim, como as expressões de ambos os lados são positivas:

$|x + y| \geq ||x| - |y|| \geq \dfrac{||x| - |y||}{2}$

(pois todo número não negativo é maior ou igual à sua metade).

42 Talvez a maneira mais simples de resolver esta questão seja considerar separadamente as funções $g(x) = |x - 1|$ (a distância de x até $a = 1$) e $h(x) = |x + 1|$ (a distância até $b = -1$). Desenhando ambos os gráficos, temos:





Agora, para tomar o mínimo dessas duas funções, é só tomar, para cada x, sempre a curva de baixo. Assim, o gráfico da função $f(x)$ é o marcado em negrito na figura acima.
Alternativa (C).

45 Uma maneira de resolver é usar a técnica apresentada no texto. Como o gráfico é uma linha poligonal com um único vértice em $x = a$ (que, pela figura, é positivo), ele corresponde a uma função da forma:

$f(x) = px + q + r|x - a|,$

onde p, q e r devem ser determinadas. Agora:

$f(0) = 0 \Rightarrow q + ra = 0$
$f(a) = a \Rightarrow pa + q = a$
$f(2a) = 0 \Rightarrow 2pa + q + ra = 0.$

Agora é só resolver este sistema de 3 equações e 3 incógnitas, encontrando $p = 0$, $p = a$ e $r = -1$. Então:

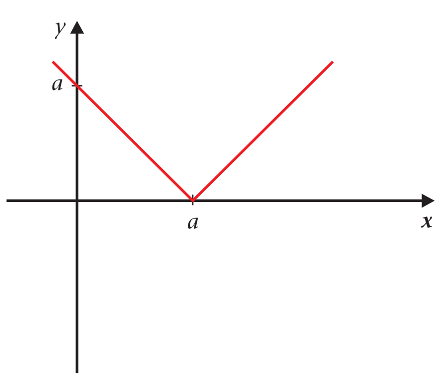
$f(x) = a - |x - a|,$

que é a alternativa (A).

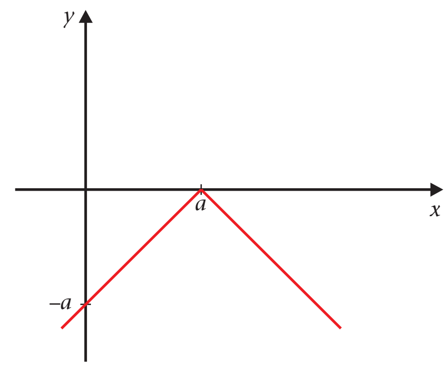
Outra maneira de resolver o exercício, menos "formulaica", é começar notando que o gráfico de $|x - a|$ é um "v" com o vértice em $(a, 0)$. Para inverter o "v", multiplicamos a função por -1, mas o vértice continua em $(a, 0)$. Agora, somamos a à função para chegar ao gráfico pedido. Em suma, a função é:

$f(x) = -|x - a| + a.$

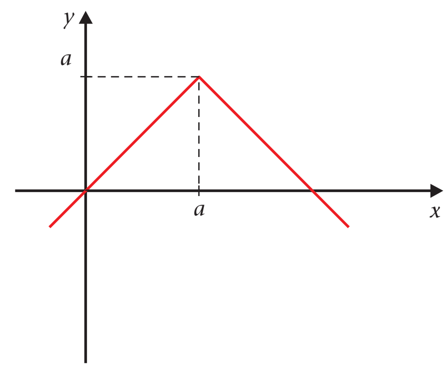
Graficamente:



$|x - a|$

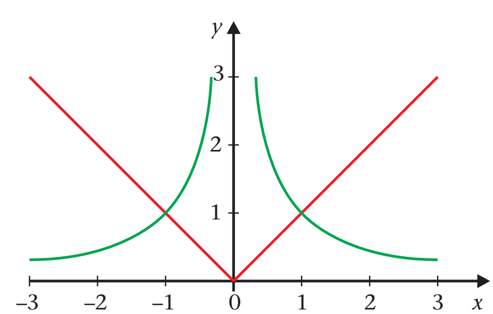


$-|x - a|$



$-|x - a| + a$

59 A ideia é tentar entender esta função como o mínimo entre duas outras. Imaginamos duas funções do seguinte tipo:

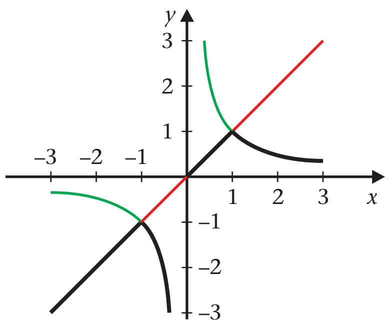


O mínimo destas duas seria a função pedida. Mas uma delas pode ser descrita por $|x|$, e a outra se parece com $\frac{1}{|x|}$. Assim, uma possível descrição da função pedida é:

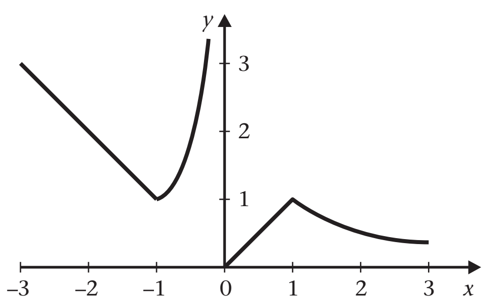
$f(x) = \min\left\{|x|, \frac{1}{|x|}\right\}.$

Alternativa (D).

Observação: note como isto é diferente do que está na alternativa (C). Lá, primeiro toma-se o mínimo entre x e $\frac{1}{x}$, e depois toma-se o módulo:



$\min\left(x, \frac{1}{x}\right)$ em preto



$\left|\min\left(x, \frac{1}{x}\right)\right|$

62 Há várias maneiras de analisar esta questão. Talvez seja mais simples separar os casos $x > 0$ e $x < 0$.

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x + |x|}{|x|} = \frac{x + x}{x} = 2$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x + |x|}{|x|} = \frac{x - x}{-x} = 0$$

Assim, a função tem por imagem $\{0, 2\}$.
Alternativa (E).

63 Separe em casos:

$$x \geq 3 \Rightarrow f(x) = 2(x - 3) + x - 1 =$$
$$= 3x - 7 \geq 3 \cdot 3 - 7 = 2$$

$$x < 3 \Rightarrow f(x) = 2(3 - x) + x - 1 = -x + 5 \geq -3 + 5 = 2$$

Assim, a imagem de $f(x)$ é $y \geq 2$.
Alternativa (A).

CAPÍTULO VII

Exercícios de fixação, p. 243

4 a) Seja $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ a equação da parábola dada. Do gráfico, temos os seguintes dados:

$$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$
$$f(5) = 25 \Rightarrow 25a + 5b + c = 25$$
$$f(15) = 45 \Rightarrow 225a + 15b + c = 45.$$

Para resolver esse sistema, podemos fazer a última equação menos 3 vezes a segunda, obtendo $150a = -30$, isto é, $a = -0,2$, e então $b = 6$ e $c = 0$. Assim, a equação da parábola é:

$$y = f(x) = -0,2x^2 + 6x.$$

Observação: note que, resolvendo deste modo, não há como **garantir** que (15, 45) seja exatamente o vértice da parábola! Mais tarde, veremos que o vértice tem coordenadas $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, que neste caso dá sim (15, 45).

b) Para encontrar os únicos pontos onde a interceptação pode ocorrer, procuraremos os pontos onde as parábolas se intersectam. Em outras palavras, precisamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} y = -0,2x^2 + 6x \\ y = -0,25x^2 + 9x - 45 \end{cases}$$

Juntando ambas as equações:

$$-0,2x^2 + 6x = -0,25x^2 + 9x - 45 \Rightarrow 0,05x^2 - 3x +$$
$$+ 45 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\,(0,05)\,(45)}}{2 \cdot 0,05} = \frac{3 \pm 0}{0,1} = 30$$

Para encontrar a coordenada y do ponto de interseção, substituímos em qualquer um dos trinômios:

$$y = f(30) = -0,2 \cdot 30^2 + 6 \cdot 30 = 0,$$

ou seja, o projétil de defesa interceptaria o projétil de ataque no ponto (30, 0) que é exatamente em cima do alvo. Diríamos que o alvo não está a salvo!

Observação: mesmo que as trajetórias de dois projéteis se intersectem, isto não é garantia de que um intercepta o outro! Afinal, para que haja a interceptação, eles têm de chegar ao ponto de interseção **ao mesmo tempo**! Neste problema, supomos que a interceptação acontece apenas porque o enunciado diz isso explicitamente.

5 Como a diferença dos números é 10, denominemo-los x e $x + 10$. O produto correto é $x(x + 10)$; o aluno erroneamente calculou $P = x(x + 10) - 40 = x^2 + 10x - 40$ (o "–40" corresponde a subtrair 4 do algarismo das dezenas). Enfim, dizer que este produto, dividido pelo menor dos números (que é x), dá 39 como quociente e resto 22, significa que:
$P = 39x + 22$, isto é,

$x^2 + 10x - 40 = 39x + 22.$

Agora é só resolver esta quadrática. Temos:

$$\Rightarrow x^2 - 29x - 62 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{29 \pm \sqrt{29^2 + 4 \cdot 62}}{2} \Rightarrow x = 31 \text{ ou } x = -2$$

Como o enunciado diz que x é inteiro positivo, descartamos a segunda resposta. Como a princípio nada garante que o problema **tem** alguma solução, temos também de conferir a outra: os números seriam 31 e 41; o produto correto seria $31 \cdot 41 = 1\,271$; o aluno teria encontrado erroneamente 1 231. Enfim, dividindo 1 231 por 31, encontramos 39 com resto 22. Funciona!
Resposta: os dois números são 31 e 41.

Exercícios de fixação, p. 252

5 Seja x o número pedido. Queremos:

$x^2 - 3x \leq 4$

(supondo que "seu" triplo seja o triplo do número original, não do quadrado), então:

$x^2 - 3x - 4 \leq 0.$

Como $a > 0$ e $\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$, a equação será satisfeita entre as raízes, isto é:

$$\frac{3-5}{2} \leq x \leq \frac{3-5}{2} \Rightarrow -1 \leq x \leq 4.$$

Agora, como o enunciado pede apenas números inteiros, a reposta é {–1, 0, 1, 2, 3, 4}.

8 I. Se $x > 4$, então $x^2 > 16$; se $y < 2$, então $-2y > -4$. Somando as duas, vem: $x^2 - 2y > 12$. Verdadeira.

II. Como $x > 4$ **ou** $y < 2$, não há como fazer o raciocínio acima. De fato, poderia ser $x = 5$ e $y = 1\,000$, e então teríamos: $x^2 - 2y < 12$. Esta é falsa!

III. Como o enunciado diz que x e y são positivos, $y^2 > 2$ significa que $y > \sqrt{2}$ (o caso $y < -\sqrt{2}$ deve ser descartado). Como $x^2 < 1$, teremos $x^2 - 2y < 1 - 2\sqrt{2} < 0$. Esta é verdadeira!

Enfim, juntando tudo, a resposta certa é alternativa (D).

Exercícios de fixação, p. 258

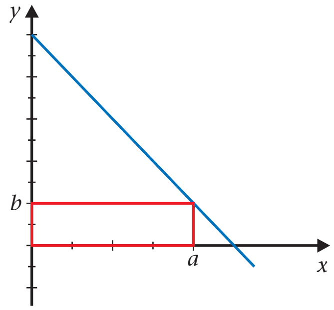
1 Como $a = -1 < 0$, o vértice da parábola será seu ponto mais alto. Calculando-o, temos $x = -\frac{b}{2a} = 2{,}5$ e $y = -\frac{\Delta}{4a} = 5{,}25$. Note que este valor de x está no intervalo [0, 6], então (2,5; 5,25) é, de fato, o máximo de $f(x)$.
Agora, o mínimo desta função deve estar em um dos extremos, $x = 0$ ou $x = 6$. Como $f(0) = -1 > f(6) = -7$, vemos que o ponto (6, –7) é o ponto onde $f(x)$ alcança seu mínimo.
Resposta: os valores máximo e mínimo que $f(x)$ pode assumir são 5,25 e –7, respectivamente.

3 Sejam x e y os lados do retângulo, em cm. Temos $x + y + x + y = 40$, isto é, $y = 20 - x$. A área será então:

$A = xy = x(20 - x) = -x^2 + 20x.$

Para encontrar a área máxima, procuramos o vértice desta parábola, que ocorre para $x = \frac{20}{2 \cdot (-1)} = 10$. Assim, a área máxima é $A = 100$ cm², que ocorre exatamente quando o retângulo é um quadrado.

6 Faça uma figura como esta:



onde os lados do retângulo são a (horizontal) e b (vertical). Note que o ponto (a, b) está exatamente sobre a reta $y = -4x + 5$, isto é, $b = -4a + 5$. A área do retângulo é:

$$A = ab = a(-4a + 5) = -4a^2 + 5a.$$

O valor de a que maximiza esta área é $a = \frac{5}{2 \cdot 4} = \frac{5}{8}$, de onde vem $b = -4a + 5 = \frac{5}{2}$.

Assim, o retângulo de área máxima é o de lados $\frac{5}{8} = 0{,}625$ e $\frac{5}{2} = 2{,}5$ $\left(\text{cuja área é } \frac{25}{16} = 1{,}5625\right)$.

Observação: note que os catetos do triângulo delimitado pela reta $y = -4x + 5$ e pelos eixos são 1,25 e 5. Assim, os vértices do retângulo são exatamente a origem e os 3 pontos médios dos 3 lados!

7 Uma opção é colocar eixos cartesianos no triângulo e resolver tudo como acima. Outra é denotar os lados do retângulo por x (horizontal) e y (vertical). Por semelhança de triângulos, note que:

$$\frac{y}{8 - x} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = 6 - \frac{3}{4}x$$

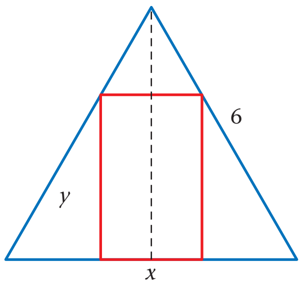
Assim, a área do retângulo é:

$$A = xy = x\left(6 - \frac{3}{4}x\right) = -\frac{3}{4}x^2 + 6x$$

Agora é só encontrar o valor máximo desta quadrática, que ocorre para $x = \frac{6}{2 \cdot \frac{3}{4}} = 4$ e $y = 6 - 3 = 3$. Ou seja, o retângulo tem lados 4 (na horizontal) e 3 (na vertical).

Observação: outra vez, os vértices do retângulo são os médios dos lados, mais a origem!

8 Desenhe uma figura:



Lembre que a altura do triângulo é $\frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Então, por semelhança de triângulos, temos

$$\frac{y}{3\sqrt{3}} = \frac{3 - \frac{x}{2}}{3} \Rightarrow y = 3\sqrt{3} - x\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A área do retângulo pode ser colocada em função de x como:

$$A = xy = x\left(3\sqrt{3} - \frac{x\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\left(-\frac{x^2}{2} + 3x\right).$$

O valor de x que maximiza a quadrática dentro dos parênteses é:

$$x = \frac{3}{1} = 3.$$

E, portanto, $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Assim, o retângulo de área máxima tem lados 3 (sobre a base) e $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Observação: desta vez, dois dos vértices são médios dos lados! Isto não é tão surpreendente — se você olhar para a metade esquerda do triângulo equilátero, verá um problema análogo aos anteriores, onde apoia-se um retângulo sobre os lados de um triângulo retângulo e pede-se a área máxima.

17 a) Elevando a equação $x + \frac{1}{x} = b$ ao quadrado, vem:

$$x^2 + 2x\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = b^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = b^2 - 2.$$

b) O truque aqui é fazer a substituição $x + \frac{1}{x} = b$.

Portanto, pelo item anterior, vem $x^2 + \frac{1}{x^2} =$ $= b^2 - 2$. Assim:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b^2 - 2) - 5b + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 - 5b + 6 = 0 \Rightarrow b = 2 \text{ ou } b = 3.$$

Agora voltamos à definição de b. Temos duas possibilidades:

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 + 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

ou

$$x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^2 + 1 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Em suma, o conjunto solução é $\left\{1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.

18 a) A relação afim entre y (quantidade) e x (preço unitário) é dada por:

$$\frac{y - 90}{80 - 90} = \frac{x - 12}{14 - 12} \Rightarrow y = -5x + 150.$$

Assim, a receita diária é quantidade vezes preço unitário, isto é:

$$R = yx = x\,(-5x + 150) = -5x^2 + 150x,$$

para maximizar a receita, procuramos o máximo deste trinômio. Ele ocorre quando:

$$x = \frac{150}{2 \cdot 5} = 15 \Rightarrow y = -5 \cdot 15 + 150 = 75.$$

Resposta: o preço deve ser de R$ 15,00.

b) Se fosse $y = -4x + 160$, a receita seria:

$$R = yx = x(-4x + 160) = -4x^2 + 160x.$$

Agora, como o custo por pizza é de R$ 8,00, a despesa total é $8x$. O lucro é receita menos despesa:

$$L = R - D = (-4x^2 + 160x) - 8x = -4x^2 + 152x.$$

Para maximizar o lucro, encontramos o máximo, que ocorre para:

$$x = \frac{152}{2 \cdot 4} = 19.$$

Ou seja, o preço ótimo neste caso é de R$ 19,00.

Exercícios de fixação, p. 266

7 Em primeiro lugar, descubra explicitamente quais são as interseções do gráfico de $f(x)$ com os eixos:

$f(x) = 2\sqrt{2}x - 8$

$f(0) = -8 \Rightarrow$ o gráfico passa por $(0, -8)$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{2} \Rightarrow$ o gráfico passa por $(2\sqrt{2}, 0)$

As raízes de $g(x)$ são, portanto, $x = \pm 2\sqrt{2}$ (pois, sendo o vértice em $x = 0$, as raízes serão simétricas). Assim:

$$g(x) = a\left(x - 2\sqrt{2}\right)\left(x + 2\sqrt{2}\right) = a(x^2 - 8).$$

Falta descobrir o valor de a. Como $g(0) = -8$, vem $a = 1$, isto é:

$$g(x) = x^2 - 8.$$

Enfim, a resposta é $g(-8) = 64 - 8 = 56$.

Alternativa (E).

17 a) Desta vez, a equação da parábola é dada como $y = x^2 - 1$. No primeiro ponto de interseção, vemos que $y = 0$, então $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \pm 1$. Como da figura vê-se que $x < 0$, o primeiro ponto de interseção é $(-1, 0)$.
No segundo ponto, vemos que $x = 2$. Então $y = 2^2 - 1 = 3$, isto é, o segundo ponto é $(2, 3)$.

b) Agora é só encontrar a equação da reta que passa por estes dois pontos, a saber, $(-1, 0)$ e $(2, 3)$. O coeficiente angular é:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 0}{2 - (-1)} = 1.$$

Assim, a reta é da forma $y = x + b$. Enfim, como $(2, 3)$ está na reta, temos $3 = 2 + b$, isto é, $b = 1$. Assim, a reta pedida é:

$$y = x + 1.$$

Exercícios de fixação, p. 277

4 O método é o mesmo usado na seção 7.5 para funções quadráticas. Substituindo as coordenadas dos 4 pontos na equação da cúbica, ficamos com um sistema de 4 equações e 4 incógnitas:

$f(-1) = 1 \Rightarrow -a + b - c + d = 1$

$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

$f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + d = 1$

$f(2) = 0 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 0.$

Somando a primeira e a terceira equações (e lembrando que $d = 0$), obtemos $2b + 2d = 2$, isto é, $b = 1$. Substituindo nas duas últimas equações os valores de b e d, vem:

$a + c = 0$

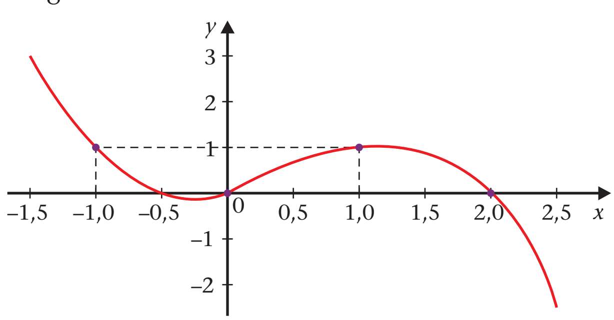
$8a + 2c = -4.$

Então $a = \frac{-2}{3}$ e $c = \frac{2}{3}$. Assim, a cúbica pedida é:

$$f(x) = -\frac{2x^3}{3} + x^2 + \frac{2x}{3} = -\frac{2x}{3}\left(x^2 - \frac{3x}{2} - 1\right),$$

cujas raízes são 0, 2 e $-\frac{1}{2}$.

Curiosidade: caso os alunos queiram saber, o gráfico desta "cúbica" é assim:



5 a) No passo 4 adicionamos 8 a 53, obtendo 61. Mais 10, vem 71. Mais 12, vem 83. Assim, os próximos 3 números da sequência são 61, 71 e 83.

b) A sequência de números obtida é:

41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, …,

cujas diferenças sucessivas são:

2, 4, 6, 8, 10, 12, …,

pelo próprio processo de construção. Então as *segundas diferenças* são todas iguais a 2 . Esta é a propriedade característica das funções quadráticas! Assim, a função f que associa ao passo n o número $f(n)$ nele obtido é da forma:

$f(n) = an^2 + bn + c.$

Para descobrir os valores de a, b, e c, usamos 3 pontos da parábola. Por exemplo:

$f(0) = 41 \Rightarrow c = 41$

$f(1) = 43 \Rightarrow a + b + c = 43 \Rightarrow a + b = 2$

$f(2) = 47 \Rightarrow 4a + 2b + c = 47 \Rightarrow 4a + 2b = 6.$

Dessas duas últimas equações, vem $a = b = 1$. Assim, o número obtido após o passo n é:

$f(n) = n^2 + n + 41.$

c) O número obtido após o passo 40 é:

$f(40) = 40^2 + 40 + 41.$

Ao invés de fazer a conta, note que:

$f(40) = 40(40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = (40 + 1) \cdot 41 = 41^2$, que, portanto, não é primo.

Curiosidade: esta sequência é notável pois seus 40 primeiros termos (isto é, $f(0)$, $f(1)$, …, $f(39)$, são todos números primos (o que pode ser verificado "no braço" mesmo, calculando cada um deles). Isto poderia levar à conjectura de que "para todo n natural, $f(n)$ é primo" — conjectura que é falsa, como mostra o item (c) acima. Em suma: não podemos afirmar que uma propriedade é verdadeira para todo n natural apenas constatando uns primeiros tantos casos — mesmo que sejam muitos! Veja o Apêndice do Volume 3 (Indução Finita) para encontrar uma técnica que, em determinados casos, permite demonstrar sem sombra de dúvida afirmações como "para todo n natural, vale a afirmação p".

Exercícios de revisão, p. 281

1 Note que $f(0) = g(0) = p$, portanto ambos os gráficos devem se cortar em $(0, p)$, que fica em algum lugar do eixo y. Assim, os gráficos das alternativas (D) e (E) são eliminados.
Além disso, note que o coeficiente angular da reta é m, idêntico ao termo em x^2 de $f(x)$. Assim, ou m é positivo (indicando que g é crescente e f é côncava para cima) ou m é negativo (reta decrescente, parábola côncava para baixo). Isto elimina as alternativas (A) e (C).

Assim, o único gráfico possível é o da alternativa (B).

3 a) Para obter p em função de q, basta resolver a equação:

$p^2 + 2p - (3 + 5q) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 4(3 + 5q)}}{2} =$

$= -1 \pm \sqrt{4 + 5q}$.

Como p é sempre positivo, a raiz negativa deve ser eliminada. Assim:

$p = \sqrt{4 + 5q} - 1$.

b) Ao invés de fazer uma tabela de valores, note que q é uma função quadrática de p, a saber:

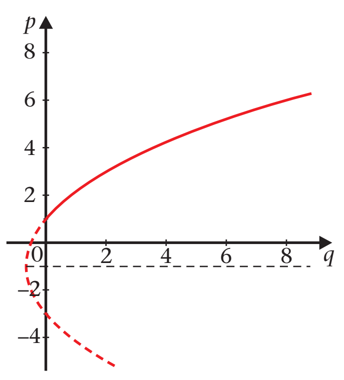
$q = \dfrac{1}{5}p^2 + \dfrac{2}{5}p - \dfrac{3}{5}$.

Assim, o gráfico será uma parábola — mas, como p é o eixo vertical, esta parábola está "girada", isto é, seu eixo será horizontal. Para desenhar esta parábola, vejamos alguns de seus pontos "interessantes" — o vértice está em $p = -\dfrac{b}{2a} = -1$ e $q = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{5} = -1$ (fora do gráfico).

Como o termo em p^2 é positivo, ela é côncava "para a direita" (o sentido positivo de q). Enfim, os pontos onde $q = 0$ são:

$p^2 + 2p - 3 = 0 \Rightarrow p = 1$ ou $p = -3$.

Também vale a pena ver onde o gráfico "termina" — quando $q = 9$, vem $p = \sqrt{4 + 5 \cdot 9} - 1 = 6$. Portanto, um bom esboço é:



4 Sejam x e $8 - x$ as massas dos dois pedaços. O valor das novas pedras, em reais, é:

$f(x) = x^2 + (8 - x)^2 = 2x^2 - 16x + 64$.

Como o prejuízo foi o maior possível (e o valor original era fixo e igual a R$ 64,00), esta função $f(x)$ deve assumir o menor valor possível. Como o gráfico de $f(x)$ é uma parábola com concavidade para cima, estamos procurando o vértice desta parábola, que ocorre para:

$x = -\dfrac{b}{2a} = 4$ e $f(4) = 2 \cdot 16 - 16 \cdot 4 + 64 = 32$.

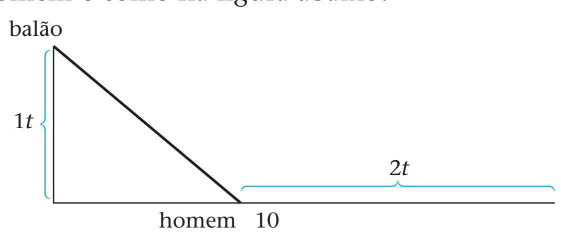
Isto é, o valor, que era de R$ 64,00 agora é de R$ 32,00 — uma perda de 50%.
Alternativa (C).

5 Dizer que a imagem é $[0, +\infty)$ equivale a dizer que o mínimo desta função é 0. Como a função é quadrática, isto significa que:

$\dfrac{\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot p = 0 \Rightarrow p = \dfrac{4}{3}$.

Alternativa (D).

9 Após t segundos, a posição relativa do balão e o homem é como na figura abaixo:



Usando o Teorema de Pitágoras, a distância entre eles é:

$d = \sqrt{t^2 + (10 - 2t)^2}$,

que será mínima quando a função quadrática dentro da raiz for mínima, isto é, quando:

$f(t) = 5t^2 - 40t + 100$ for mínima. Isto ocorre para $t = \dfrac{-40}{2 \cdot 5} = 4$, quando $f(t) = f(4) = 20$. Assim, a distância mínima será $d = \sqrt{20}$. Alternativa (E).

13 a) O tempo de ida é $\frac{d}{300+v}$, e o tempo de volta é $\frac{d}{300-v}$. Como o tempo total de voo é de 4 horas, temos:

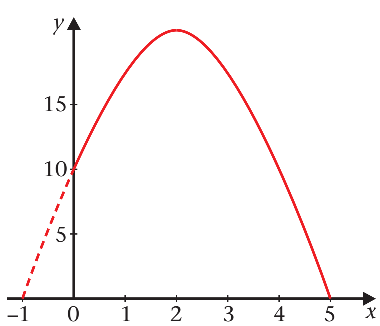
$$\frac{d}{300+v}+\frac{d}{300-v}=4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{(300+v+300-v)\,d}{90\,000-v^2}=4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d=\frac{4\,(90\,000-v^2)}{600}=600-\frac{v^2}{150}$$

b) Como $d = 600 - \frac{v^2}{150}$, a distância será máxima quando $v = 0$ (ou seja, quando não há vento). Neste caso, a distância é de 600 km.

17 a) Em função de t, a área desmatada é:

$$A=b\cdot h=(5t+5)\left(-\frac{2}{5}t+2\right)=(t+1)\,(-2t+10)=$$
$$=-2t^2+8t+10$$

Como A(t) é uma função quadrática (com raízes $t = -1$ e $t = 5$), seu gráfico é aproximadamente:



(note que só a parte em que $0 \leq t \leq 5$ faz sentido).

b) A área será máxima quando:

$t = \frac{-8}{-4} = 2$ anos, e medirá:

A = (2 + 1)(–4 + 10) = 18 km².

18 Suponha que p é o preço de cada bala. Ao comprar x balas, o preço antes do desconto é px. Agora, se $x \leq 60$, ganhamos x% de desconto, e a quantia total a ser paga será:

$$y=px\left(1-\frac{x}{100}\right)=p\left(-\frac{x^2}{100}+x\right).$$

Se $x > 60$, o desconto é de 60%, e a quantia a ser paga é:

$y = px(0{,}4) = 0{,}4px.$

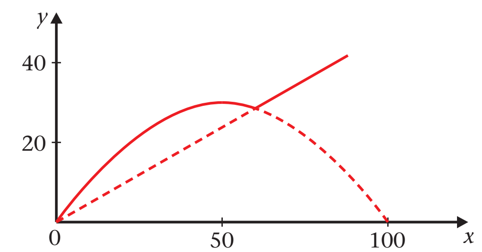
Em suma:

$$y=\begin{cases} p\left(-\frac{x^2}{100}+x\right), \text{ se } 0 \leq x \leq 60 \\ p(0{,}4\,x), \text{ se } x \geq 60. \end{cases}$$

Fixado p, a relação entre y e x é quadrática para $x \leq 60$, com vértice em:

$$x=-\frac{1}{2\cdot -\frac{1}{100}}=50.$$

A partir de $x = 60$, o gráfico é linear, ou seja, o gráfico é algo da seguinte forma (usamos, apenas a título de ilustração, $p = 1$ neste gráfico):



Note que, a partir de $x = 50$, comprar mais balas **diminui o custo total a pagar**, até 60 balas. Como a parábola é simétrica com relação à reta $x = 50$ que passa pelo seu vértice, comprar 40 balas dá o mesmo preço total de comprar 60. Mais exatamente, qualquer quantidade de balas entre 40 e 50 é uma bobagem, pois, com o mesmo orçamento, há um ponto do lado direito da parábola, entre 40 e 50, que dá mais balas! Em particular, quem comprou 45 poderia ter comprado 55 pelo mesmo custo total. Assim, Daniel bobeou. Alternativa (D).

Comentário: comprando 45 balas, Daniel gastou um total de $p(45)(0{,}55) = 24{,}75p$ reais. Como vimos acima, Daniel poderia ter comprado 55 balas pelo mesmo preço (o gasto total é agora $p(55)(0{,}45) = 24{,}75p$ reais). Mas será que Daniel pode fazer melhor ainda com seus $24{,}75p$ reais? De fato, experimente desenhar no gráfico acima a reta $y = 24{,}75$. Ela corta a parábola em $x = 45$ e

$x = 55$, mas ela corta a reta à direita num outro valor de x maior ainda! Este valor satisfaz:

$0{,}4xp = 24{,}75p \Rightarrow x = 61{,}875$.

Como um valor fracionário de x não faz sentido, Daniel poderia ter comprado 61 balas, a um custo total de $p(61)(0{,}4) = 24p$, e ainda economizaria uns trocados (a saber $0{,}75p$ reais).

22 Pelos eixos colocados na figura, temos $y = 9$ quando $x = 0$, isto é, $c = 9$. Assim, a parábola é:

$$y = \frac{x^2}{36} + 9.$$

Vejamos se a bola entra no gol. Quando $x = 16$, tem-se:

$$y = \frac{-16^2}{36} + 9 = -\frac{64}{9} + 9 = \frac{17}{9},$$

que é menor do que 2 metros. Como a altura do gol é 2,3 metros, concluímos que a bola cai dentro do gol. Alternativa (C).

23 a) Como o feirante comprou n frangos por um total de d reais, o custo de cada frango (para o feirante) é $c = \frac{d}{n}$. Agora, o feirante vendeu $n - 2$ frangos a $c + 8$ reais cada, e vendeu outros 2 frangos por $\frac{c}{2}$ reais cada. Assim, a receita total do feirante é:

$$R = (n-2)\,(c+8) + 2\frac{c}{2} = (n-2)\left(\frac{d}{n} + 8\right) + \frac{d}{n} =$$

$$= d + 8n - \frac{d}{n} - 16.$$

O lucro é receita menos despesa, e é dado como 72 reais. Então:

$$R - d = 8n - \frac{d}{n} - 16 = 72.$$

Daqui sai uma lei relacionando d e n:

$$8n - \frac{d}{n} = 88,$$

ou, colocando d explicitamente em função de n:

$$8n^2 - d = 88n \Rightarrow d = 8n^2 - 88n = 8n(n - 11).$$

b) A função $d = f(n)$ é uma função quadrática com concavidade para cima, cujas raízes são $n = 0$ e $n = 11$. Como d tem de ser positivo, devemos ter $n < 0$ ou $n > 11$. Como n deve ser inteiro positivo, o menor valor possível de n é 12, o que resulta $d = 8n(n - 11) = 8 \cdot 12 \cdot 1 = 96$.

Conferindo: o custo de cada frango seria $c = \frac{96}{12} = 8$. O feirante teria vendido 10 frangos a 16 reais cada e 2 frangos a 4 reais cada;

sua receita total seria: $10 \cdot 16 + 2 \cdot 4 = 168$, o que corresponde a um lucro de 72 reais sobre os 96 que havia pago.
Confere!

36 Seja n o número total de alunos na turma e d o número de doces que cada um receberia se todos estivessem presentes. Então $nd = 144$, ou seja, $d = \frac{144}{n}$.

Faltando 12 alunos, cada um recebeu um doce a mais, isto é:

$$(n - 12)\,(d + 1) = 144 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n - 12)\left(\frac{144}{n} + 1\right) = 144 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n - 12)\,(144 + n) = 144n \Rightarrow$$

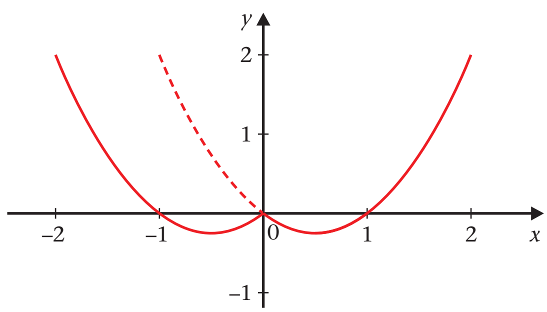
$$\Rightarrow n^2 - 12n - 1\,728 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = -36 \text{ ou } n = 48.$$

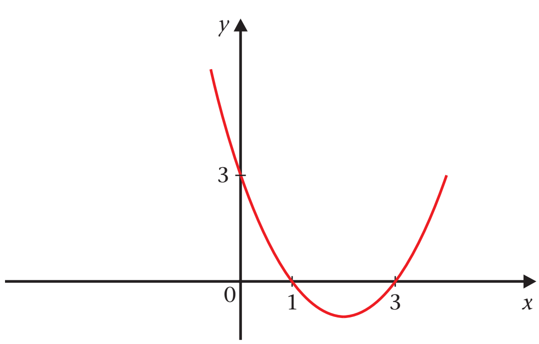
Como $n = -36$ não faz sentido, o número normal de alunos na turma é 48. Portanto, o número de alunos presentes no dia da distribuição é $48 - 12 = 36$. Alternativa (A).

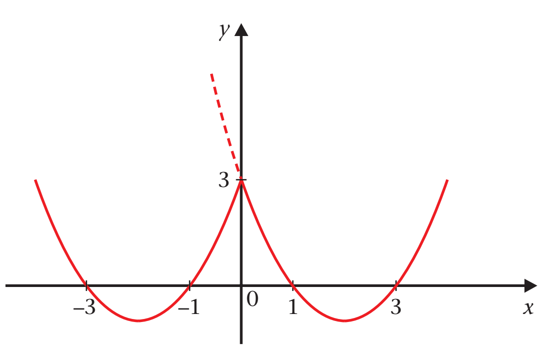
40 Façamos $y = |x|$. Então $y^2 + y - 6 = 0$, isto é, $y = 2$ ou $y = -3$. No primeiro caso, $x = \pm 2$, enquanto no segundo, $|x| = -3$ é impossível. Assim, o conjunto solução é $S = \{-2, 2\}$. Alternativa (B).

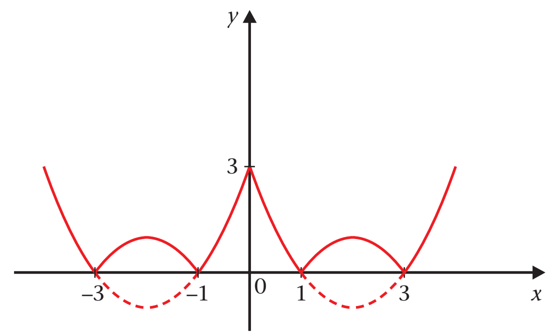
48 Comece pensando na função $f(x) = x^2 - x$, cujo gráfico está abaixo (parábola tracejada). Trocando x por $|x|$, obtemos $f(|x|) = |x|^2 - |x| = x^2 - |x|$, que é a função pedida. Assim, basta tomar a parte do gráfico de $f(x)$ que está à direita do eixo y e refleti-la, como abaixo.
Alternativa (A).



52 Novamente, comece com $f(x) = x^2 - 4x + 3$ (raízes 1 e 3, parábola). Trocando x por $|x|$, obtemos $f(|x|) = x^2 - 4|x| + 3$, que corresponde a tomar o gráfico à direita do eixo y e refleti-lo. Agora tomamos o módulo disto, $|f(|x|)| = |x^2 - 4|x| + 3|$, que graficamente significa rebater as partes negativas de $f(|x|)$ para cima.







Alternativa (E).

56 Uma análise de sinal é suficiente:

- Para $x > 1$, ambos, numerador e denominador, são positivos, portanto $y > 0$.
- Para $-2 < x < 1$, o numerador é positivo e o denominador é negativo, então $y < 0$.
- Para $x < -2$, ambos, numerador e denominador, são negativos, então $y > 0$.
- Para $x = -2$, $y = 0$.
  Com estas informações é possível eliminar todas as alternativas, exceto a alternativa (D), que é a resposta.

57 A quadrática do denominador é sempre positiva, então $f(x) > 0$ para todo x. Além disso, a função é par (pois trocar x por $-x$ não altera o valor de $y = f(x)$). A única opção que tem essas características é a alternativa (B).

CAPÍTULO VIII

Exercícios de fixação, p. 299

4 Devemos ter: $P(t) = \frac{P(0)}{4}$, logo, $\frac{P(0)}{4} = P_0 \cdot 2^{-0,25t}$, que, simplificando P(0), vem: $2^{-0,25t} = \frac{1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{-0,25t} = 2^{-2}$, que dá $-0,25t = -2 \Rightarrow t = 8$ anos.
Alternativa (B).

5 Devemos ter $m = 0$, logo, $-3^{2t} - 3^{t+1} + 108 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{2t} + 3^t \cdot 108 = 0.$

Fazendo $3^t = y$, vem: $3^{2t} = y^2$, logo,
$y^2 + 3y - 108 = 0 \Rightarrow y = 9$ ou $y = -12$.
Como 3^t é sempre positivo, $3^t = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^t = 3^2 \Rightarrow t = 2$ h. Alternativa (E).

Exercícios de fixação, p. 305

4 k) $1^x + 5^x + 25^x = 3 \Rightarrow 1^x + 5^x + (5^2)^x = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5^{2x} + 5^x - 2 = 0$

Fazendo $5^x = y$, vem: $y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -2$ ou $y = 1$.

Como 5^x é sempre positivo, vem $5^x = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5^x = 5^0 \Rightarrow x = 0$.

l) $\dfrac{4^{\frac{x}{2}}}{2} - \dfrac{2^{x-1}}{3} = \dfrac{4}{3}$

Eliminando os denominadores, vem:

$$3 \cdot \left(2^2\right)^{\frac{x}{2}} - 2 \cdot 2^{x-1} = 8 \Rightarrow 3 \cdot 2^x - 2 \cdot \frac{2^x}{2} = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2^x = 8$$

$$2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2.$$

m) $9^{x-\frac{1}{2}} - \dfrac{4}{3^{1-x}} = -1 \Rightarrow \left(3^2\right)^{x-\frac{1}{2}} - \dfrac{4}{3^{1-x}} = -1$

$$3^{2x-1} - \frac{4}{3^{1-x}} = -1 \Rightarrow 3^{2x-1+1-x} - 4 = -3^{1-x}$$

$$3^x - 4 = -\frac{3^1}{3^x} \Rightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$

Fazendo $3^x = y \Rightarrow 3^{2x} = y^2$, logo: $y^2 - 4y + 3 = 0$, que dá $y = 3$ ou $y = 1$. Daí: $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$
$3^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

Exercícios de fixação, p. 307

3 $f(x) = 3^x$
Se $f(x + 1) + f(-x + 4) = 36$, então

$3^x \cdot 3 + \dfrac{3^4}{3^x} = 36 \Rightarrow 3 \cdot 3^{2x} + 81 = 36 \cdot 3^x$, ou ainda $3 \cdot 3^{2x} - 36 \cdot 3^x + 81 = 0$. Fazendo $3^x = y \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{2x} = y^2$, logo:

$3y^2 - 36y + 81 = 0 \Rightarrow y^2 - 12y + 27 = 0 \Rightarrow y = 3$ ou $y = 9$.

Assim, $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$ e $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$.

6 $P = 64\,000(1 - 2^{-0,1t}) > 63\,000 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 - 2^{-0,1t} > \frac{63\,000}{64\,000}$$

$$-2^{-0,1t} > \frac{63}{64} - 1 \Leftrightarrow 2^{-0,1t} < \frac{1}{64} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{0,1t}} < \frac{1}{64}$$

Invertendo ambos os membros da inequação:

$2^{0,1t} > 2^6 \Leftrightarrow 0,1t > 6 \Leftrightarrow t > 60$

Alternativa (D).

Exercícios de revisão, p. 315

9 $y = \dfrac{2^{3+x} - 2^{x-3}}{2^x + 2^{x-3}} = \dfrac{2^3 \cdot 2^x - 2^x \cdot 2^{-3}}{2^x + 2^x \cdot 2^{-3}}$

Dividindo ambos os termos da fração por 2^x, vem:

$$y = \frac{2^3 - 2^{-3}}{1 + 2^{-3}} = \frac{8 - \frac{1}{8}}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{\frac{63}{8}}{\frac{9}{8}} = 7$$

Alternativa (D).

28 Sendo $f(x) = e^{4x} - e^{2x} - e^{2(x+1)} + e^2$, devemos ter:
$e^{4x} - e^{2x} - e^{2x+2} + e^2 = 0 \Rightarrow e^{4x} - e^{2x} - e^{2x} \cdot e^2 + e^2 = 0$
$e^{4x} - (e^2 + 1)\,e^{2x} + e^2 = 0$, cujas raízes são e^2 e 1.
Temos então:
$e^{2x} = e^2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$, ou
$e^{2x} = 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$.
A soma das abscissas será $1 + 0 = 1$.
Alternativa (B).

29 Como 5 dias são 120 horas, devemos ter:

$B(120) = 2^{\frac{120}{12}} = 2^{10} = 1024$ bactérias.

30 $f(g(x)) = (g(x))^2 = \left(\dfrac{3^x + 3^{-x}}{2}\right)^2 =$

$$= \frac{3^{2x} + 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} + 3^{-2x}}{4} = \frac{3^{2x} + 2 + 3^{-2x}}{4}$$

$$f(h(x)) = (h(x))^2 = \left(\frac{3^x - 3^{-x}}{2}\right)^2 =$$

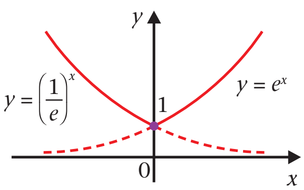
$$= \frac{3^{2x} - 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} + 3^{-2x}}{4} = \frac{3^{2x} - 2 + 3^{-2x}}{4}$$

$$f(g(x)) - f(h(x)) = \frac{3^{2x} + 2 + 3^{-2x}}{4} - \frac{3^x - 2 + 3^{-2x}}{4} =$$

$= \dfrac{4}{4} = 1$. Alternativa (E).

33 $f(x) = e^{|x|}, \begin{cases} \text{se } x \geq 0 \Rightarrow y = e^x \\ \text{se } x < 0 \Rightarrow y = e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x \end{cases}$

Logo, o gráfico é constituído da união de dois ramos de exponenciais, como indica a figura.



Alternativa (D).

CAPÍTULO IX

Exercícios de fixação, p. 334

9 $\text{pH} = \log_{10} \frac{1}{[\text{H}^+]} \Rightarrow \text{pH} = \log_{10} \frac{1}{1{,}0 \cdot 10^{-8}} =$

$= -\log_{10} 1{,}0 \cdot 10^{-8}$

$\text{pH} = -(\log_{10} 1{,}0 + \log_{10} 10^{-8}) = -(-8) = +8$

10 $\frac{1}{2} = \text{e}^{-kt} \Rightarrow$ aplicando logaritmos na base e, vem:

$\ln 1 - \ln 2 = -kt \ln e \Rightarrow -0{,}7 = -4{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot t \cdot 1$, logo:

$t = \frac{0{,}7}{4{,}4 \cdot 10^{-4}} = \frac{7000}{4{,}4} \simeq 1\,590$ anos

12 $\text{N} = 3^{15} \cdot 2^{12} \cdot 6^{23} = 3^{15} \cdot 2^{12} \cdot 3^{23} \cdot 2^{23} = 3^{38} \cdot 2^{35}$

Aplicando logaritmos decimais, vem:

$\log \text{N} = \log 3^{38} \cdot 2^{35} = 38 \log 3 + 35 \log 2 = 38 \cdot 0{,}4771 + 35 \cdot 0{,}3010$

$\log \text{N} = 18{,}1298 + 10{,}5350 = 28{,}6648 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{N} = 10^{28{,}6648}$

$10^{28} < \text{N} < 10^{29}$, logo, N tem 29 algarismos.

Alternativa (E).

15 Em $f(x) = x^2 - 2x + 2$, o ponto mais próximo é o vértice do gráfico, logo, $\text{V} = (1, 1)$. Temos então, $a = 1$ e $b = 1$, onde $ab = 1$ e $\log ab = \log 1 = 0$.
Alternativa (E).

16 $\text{P} = \text{P}_0(1 + i)^n$, ou seja, $2\text{P}_0 = \text{P}_0 \cdot 1{,}2^n \Rightarrow 1{,}2^n = 2$
Como $1{,}2^4 = 2{,}073$, $n = 4$ (aproximadamente).
Alternativa (D).

17 $\text{R}_1 = 6$ e $\text{R}_2 = 4 \Rightarrow \text{R}_1 - \text{R}_2 = \log_{10}\left(\frac{\text{M}_2}{\text{M}_1}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 - 4 = \log_{10} \frac{\text{M}_2}{\text{M}_1}$

$\frac{\text{M}_2}{\text{M}_1} = 10^2 \Rightarrow \frac{\text{M}_2}{\text{M}_1} = 100$

Exercícios de fixação, p. 341

11

$$\begin{cases} 27^x < 9^{x+3} \Rightarrow \left(3^3\right)^x < \left(3^2\right)^{x+3} \Rightarrow 3^{3x} < 3^{2x+6} \Rightarrow \\ \Rightarrow 3x < 2x + 6 \Rightarrow x < 6 \\ \log_{\frac{1}{2}} 2x < 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 2x < \log_{\frac{1}{2}} 1 \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Devemos ter $\frac{1}{2} < x < 6$, logo, $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Exercícios de revisão, p. 342

3 $h = \log 10^{0,7} \cdot \sqrt{i}$

$h = \log 10^{0,7} \cdot \sqrt{10} = \log 10^{0,7} + \log \sqrt{10} =$

$= 0{,}7 + 0{,}5 = 1{,}2 \text{ m} = 120 \text{ cm}$

Alternativa (A).

4 $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

Temos $f(x) = \log_2 64x^3$, então $x = 1\,024 = 2^{10}$.

$x \mapsto \log_2 64x^3$

$f(1024) = f\left(2^{10}\right) = \log_2 2^3 \cdot \left(2^{10}\right)^3 = \log_2 2^3 \cdot 2^{30} =$

$= \log_2 2^3 \cdot 2^{30} = \log_2 2^{33} = 33 \log_2 2 = 33$

Alternativa (C).

5 $42\,000\,000\,000 = 42 \cdot 10^9$

$\log 42 \cdot 10^9 = \log 42 + \log 10^9 = 1{,}\ldots + 9 = 10{,}\ldots$

$\log 10{,}\ldots = 1{,}\ldots$

$\log 1{,}\ldots = 0{,}\ldots$

$\log 0{,}\ldots = -\ldots$

$\log(-\ldots) =$ ERRO

A palavra erro aparecerá na 5ª vez em que se apertar a tecla log.

Alternativa (D).

14 $r_1 - r_2 = \log_{10} \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow 5{,}9 - 5{,}8 = \log_{10} \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}1 = \log_{10} \frac{m_1}{m_2}$

$\frac{m_1}{m_2} = 10^{0,1}$

Alternativa (B).

36 Devemos ter: $2009 - 2002 = 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(7) = 400 \cdot 1{,}05^7$

$2010 - 2002 = 8 \Rightarrow P(8) = 400 \cdot 1{,}05^8$

$P(8) - P(7) = 400 \cdot 1{,}05^8 - 400 \cdot 1{,}05^7 =$

$= 400 \cdot 1{,}05^7(1{,}05 - 1) = 400 \cdot 1{,}05^7 \cdot 0{,}05$

a) crescimento $= 20 \cdot 1{,}05^7$

b) $400 \cdot 1{,}05^t > 800 \cdot 10^9 \Rightarrow 1{,}05^t > 2 \cdot 10^9$

Aplicando logaritmos decimais:

$$t \log 1{,}05 > \log 2 + 9 \Rightarrow t > \frac{\log 2 + 9}{\log 1{,}05}$$

39 Devemos ter:

$$\frac{1}{65}B = \frac{B}{1 + C \cdot e^0} \Rightarrow 1 + C = 65 \Rightarrow C = 64$$

Então:

$$\frac{1}{9}\cancel{B} = \frac{\cancel{B}}{1 + 64e^{-3k}} \Rightarrow 1 + 64 \cdot e^{-3k} = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64 \cdot e^{-3k} = 8 \Rightarrow e^{-3k} = \frac{1}{8}$$

$$\left(e^{-k}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow e^{-k} = \frac{1}{2}$$

Por outro lado: $\frac{1}{5}B = \frac{B}{1 + 64 \cdot e^{-kt}}$. Invertendo ambos os membros desta igualdade, vem:

$$1 + 64e^{-kt} = 5 \Rightarrow 64 \cdot e^{-kt} = 4 \Rightarrow e^{-kt} = \frac{4}{64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(e^{-k}\right)^t = \frac{1}{16}.$$

Como $e^{-k} = \frac{1}{2}$, vem: $\left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{1}{16} \Rightarrow t = 4$ horas.

40 Devemos ter: $\frac{M_0}{2} = M_0 e^{-kT} \Rightarrow e^{-kT} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{kT} = 2.$

Aplicando logaritmos na base e, vem:

$$kT = \ln 2 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{T}.$$

64 a) $p(t) = F \cdot \left(1 - \frac{19}{100}\right)^t \Rightarrow p(t) = F \cdot 0{,}81^t$

b) $p(t) < \frac{5}{100}F \Rightarrow \cancel{F} \cdot 0{,}81^t < \frac{1}{20}\cancel{F} \Rightarrow$

$$\left(\frac{81}{100}\right)^t < \frac{1}{20} \Rightarrow t \log \frac{81}{100} < \log \frac{1}{20} \Rightarrow$$

$$t \log \frac{3^4}{10^2} < \log 1 - \log 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(4 \log 3 - 2 \log 10) < -\log 2 \cdot 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(4 \cdot 0{,}477 - 2) < -(\log 2 + \log 10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot (1{,}908 - 2) < -(0{,}301 + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot (-0{,}092) < -1{,}301 \Rightarrow t > \frac{1{,}301}{0{,}092} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t > 14{,}141$$

$t = 15$ anos

67 $\begin{cases} \log x = 0 \\ \log y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 100 \end{cases}$ $\quad$ $\log y = 2\log x + 2$

$\log y = \log x^2 + \log 10^2$

$\begin{cases} \log x = 2 \\ \log y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 10^6 \end{cases}$ $\quad$ $\log y = \log 100x^2$

$y = 100x^2$

104 1 ano = 4 trimestres

$$C = C_0\left(1 + i\right)^4$$

$$C = 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^4$$

$$C = 50\,000 \cdot (1{,}1)^4$$

$$C = 50\,000 \cdot 1{,}4641$$

$$C = 73\,205{,}00$$

$j = 73\,205 - 50\,000$

$j = 23\,205 \cong 23\,000$

Alternativa (E).

105 $m = \frac{m_0}{2^x} \Rightarrow 2^{-111} = \frac{16}{2^x} \Rightarrow 2^x = \frac{2^4}{2^{-111}} \Rightarrow 2^x = 2^{115}$

Então $x = 115$, mas

$$x = \frac{n}{5} \Rightarrow 115 = \frac{n}{5} \Rightarrow n = 575 \text{ anos.}$$

Alternativa (D).

106 $V = 2000 \cdot (0{,}75)^t$

$t = 0 \Rightarrow V_0 = 2000$

$t = t \Rightarrow V = \dfrac{V_0}{2} = 1000 \Rightarrow 1000 = 2000(0{,}75)^t \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}5 = (0{,}75)^t$

$\log 0{,}5 = \log (0{,}75)^t \Rightarrow \log \dfrac{1}{2} = \log \left(\dfrac{75}{100}\right)^t \Rightarrow$

$\Rightarrow -\log 2 = t \log \dfrac{3}{4}$

$-\log 2 = t\left(\log 3 - \log 2^2\right) \Rightarrow -0{,}3 = t(0{,}48 - 0{,}6)$

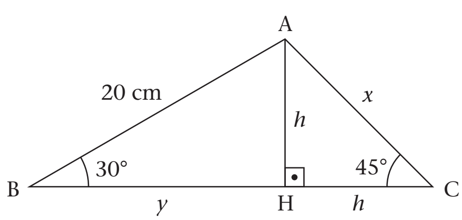
$-0{,}3 = t \cdot (-0{,}12) \Rightarrow t = \dfrac{0{,}30}{0{,}12} = 2{,}5$ anos

Alternativa (B).

CAPÍTULO X

Exercícios de fixação, p. 360

6



a) $\overline{AH} = h \Rightarrow \text{sen } 30° = \dfrac{h}{20}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{h}{20} \Rightarrow h = 10$ cm

b) $\triangle$AHC é retângulo isósceles

$\overline{AH} = \overline{HC} = 10$ cm

$\text{sen } 45° = \dfrac{10}{x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\sqrt{2} = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{20}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{20\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \overline{AC} = 10\sqrt{2}$ cm

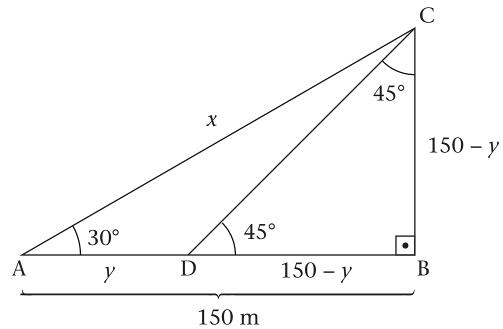
c) $\cos 30° = \dfrac{y}{20} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$y = 10\sqrt{3}$

$\overline{BC} = 10\sqrt{3} + 10$

$\overline{BC} = 10\left(\sqrt{3} + 1\right)$ cm

9



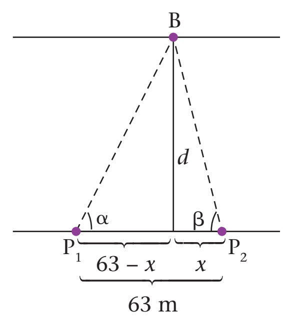
$\cos 30° = \dfrac{150}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{300}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$x = 100\sqrt{3}$ m

$\text{tg}\, 30° = \dfrac{150 - y}{\cancel{150}_{50}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{3}} \Rightarrow y = 50\left(3 - \sqrt{3}\right)$ m

Exercícios de revisão, p. 371

4



$\text{tg}\, \alpha = 2 \qquad \text{tg}\, \alpha = \dfrac{d}{63 - x} = 2 \Rightarrow d = 126 - 2x$

$\text{tg}\, \beta = 4 \qquad \text{tg}\, \beta = \dfrac{d}{x} = 4 \Rightarrow d = 4x$

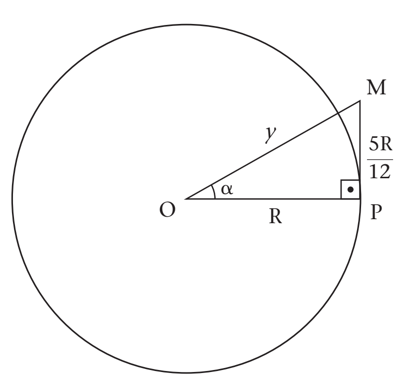
$4x = 126 - 2x$

$6x = 126$

$x = 21$

Então, $d = 4 \cdot 21 = 84$ m.

8



$$y^2 = \left(\frac{5R}{12}\right)^2 + R^2 \qquad \text{sen}\,\alpha = \frac{\frac{5R}{12}}{\frac{13R}{12}}$$

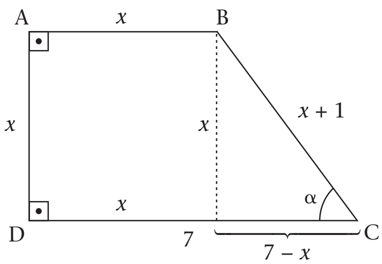
$$y^2 = \frac{25R^2}{144} + R^2 \qquad \text{sen}\,\alpha = \frac{5}{13}$$

$$y^2 = \frac{169R^2}{144}$$

$$y = \frac{13R}{12}$$

Alternativa (E).

9



$(x + 1)^2 = x^2 + (7 - x)^2$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 49 - 14x + x^2$

$x^2 - 16x + 48 = 0$

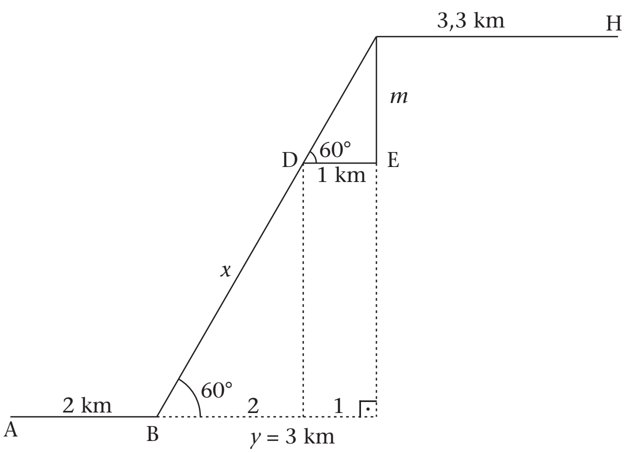
$x' = 12$ (não serve)

$x'' = 4$

$\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{3}{5} \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{4}{3}$

Alternativa (E).

17



a) $\cos 60° = \frac{2}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 4$ km

$\text{tg}\,60° = \frac{m}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow m = \sqrt{3}$ km

$\overline{BD} = 4$ km

$\overline{FE} = \sqrt{3}$ km

b) $y = 4 + 0{,}8x$

$x = 2 + 4 + 1 + 1{,}7 + 3{,}3$

$x = 12$ km

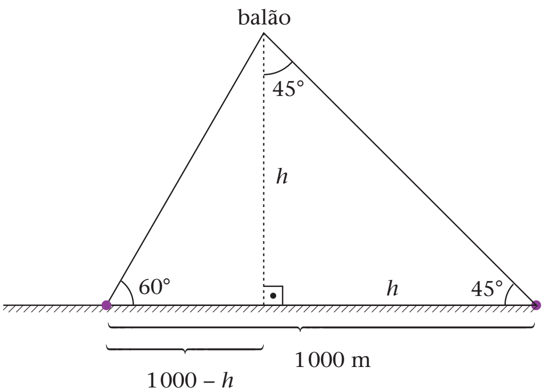
$y = 4 + 0{,}8 \cdot 12$

$y = 4 + 9{,}60$

$y = 13{,}60$

R$ 13,60

18



$$\text{tg}\,60° = \frac{h}{1000 - h} = \sqrt{3}$$

$$1000\sqrt{3} - h\sqrt{3} = h$$

$$h + h\sqrt{3} = 1000\sqrt{3}$$

$$h\left(1 + \sqrt{3}\right) = 1000\sqrt{3}$$

$$h = \frac{1000\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

$$h = \frac{1000\sqrt{3} - 3000}{1 - 3} =$$

$$= \frac{-1000\left(-\sqrt{3} + 3\right)}{-2} = 500\left(3 - \sqrt{3}\right) \text{ m}$$

Alternativa (E).

19 a) $\text{sen}\ \theta = \dfrac{\overline{BC}}{R} \Rightarrow \overline{BC} = R \cdot \text{sen}\ \theta$

$$\cos\theta = \frac{\overline{OC}}{R} \Rightarrow \overline{OC} = R \cdot \cos\theta \Rightarrow \overline{CD} = 2 \cdot \overline{OC}$$

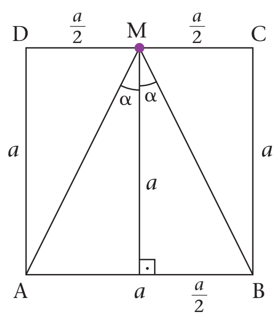
$$\overline{CD} = 2R\cos\theta$$

b) $\text{área} = (R \cdot \text{sen}\ \theta) \cdot (2R \cdot \cos\theta)$

$$\text{área} = R^2 \cdot \underbrace{2\text{sen}\ \theta \cdot \cos\theta}_{\text{sen}\ 2\theta}$$

$\text{área} = R^2 \cdot \text{sen}\ 2\theta$ será máxima quando $\text{sen}\ 2\theta$ for máximo, ou seja, for igual a 1. Isso se dá quando $\theta = 45°$.

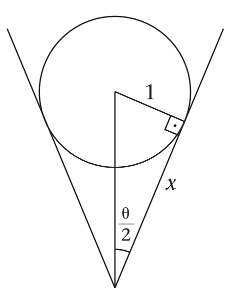
21



$$\tan\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

Alternativa (E).

30



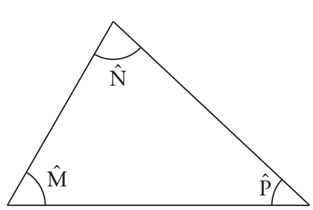
a) Falsa, pois $\text{tg}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = \dfrac{1}{\text{tg}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$.

b) Verdadeira.

c) Falsa, pois $x = \dfrac{1}{\text{tg}\ 45°} = 1$ cm.

d) Verdadeira, pois θ e x são inversamente proporcionais.

38



$$\hat{P} + \hat{M} + \hat{N} = 180°$$

$$\hat{M} + \hat{N} = 180 - \hat{P}$$

$$\text{tg}(\hat{M} + \hat{N}) = \text{tg}(180° - \hat{P})$$

$$\frac{\text{tg}\ \hat{M} + \text{tg}\ \hat{N}}{1 - \text{tg}\ \hat{M} \cdot \text{tg}\ \hat{N}} = \frac{\text{tg}\ 180° - \text{tg}\ \hat{P}}{1 - \text{tg}\ 180° \cdot \text{tg}\ \hat{P}}$$

$$\frac{\text{tg}\ \hat{M} + \text{tg}\ \hat{N}}{1 - \text{tg}\ \hat{M} \cdot \text{tg}\ \hat{N}} = \frac{0 - \text{tg}\ \hat{P}}{1}$$

$$\text{tg}\ \hat{M} + \text{tg}\ \hat{N} = \text{tg}\ \hat{M} \cdot \text{tg}\ \hat{N} \cdot \text{tg}\ \hat{P} - \text{tg}\ \hat{P}$$

$$\text{tg}\ \hat{M} + \text{tg}\ \hat{N} + \text{tg}\ \hat{P} = \text{tg}\ \hat{M} \cdot \text{tg}\ \hat{N} \cdot \text{tg}\ \hat{P}$$

Alternativa (D).

46 $\text{sen}\ x = \sqrt{p - 2}$ $\qquad$ $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos x = p - 1$ $\qquad$ $\left(\sqrt{p-2}\right)^2 + (p-1)^2 = 1$

$$p - 2 + p^2 - 2p + 1 = 1$$

$$p^2 - p - 2 = 0 \quad \begin{cases} p = 2 \\ p = -1 \end{cases}$$

Logo: $p = 2$

49 No enunciado, $p^2 + q^2 = 2$, consideremos:
$p^2 = \text{sen}^2 x + 2\text{sen}\ x \cdot \cos x + \cos^2 x = 1 + \text{sen}\ 2x$
$q^2 = \text{sen}^2 x - 2\text{sen}\ x \cdot \cos x + \cos^2 x = 1 - \text{sen}\ 2x$
Somando membro a membro, temos:
$p^2 + q^2 = 1 + \text{sen}\ 2x + 1 - \text{sen}\ 2x = 2$

50 $\text{tg}\ x + \text{cotg}\ x = 2$

$$\frac{\text{sen}\ x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen}\ x} = 2$$

$$\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}\ x \cos x} = 2$$

$$\frac{1}{\text{sen}\ x \cos x} = 2$$

$$\text{sen}\ x \cos x = \frac{1}{2}$$

52 $\cos x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3},\ 0 < x < 90°$

$$A = \frac{\text{sen}\ x \cdot \cos x - \dfrac{\text{sen}\ x}{\cos x}}{1 - \dfrac{1}{\text{sen}\ x}} = \frac{\dfrac{\text{sen}\ x \cdot \cos^2 x - \text{sen}\ x}{\cos x}}{\dfrac{\text{sen}\ x - 1}{\text{sen}\ x}}$$

$$A = \frac{\text{sen}\, x \cdot \overbrace{\left(\cos^2 x - 1\right)}^{-\text{sen}^2 x}}{\cos x} \cdot \frac{\text{sen}\, x}{\text{sen}\, x - 1}$$

$$A = \frac{-\text{sen}^4 x}{\cos x\left(\text{sen}\, x - 1\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-\left(\frac{1}{3}\right)^4}{\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - 1\right)} = \frac{-\frac{1}{81}}{\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{1}{81} \cdot \left(-\frac{9}{4\sqrt{2}}\right)$$

$$A = \frac{1}{36\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{72}$$

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \text{sen}^2 x = 1$$

$$\text{sen}^2 x = 1 - \frac{8}{9} \Rightarrow \text{sen}\, x = \frac{1}{3}$$

59 $D\hat{A}C = 30° \Leftrightarrow AD = CD$, por outro lado, $DB = AD \cdot \text{sen } 30° = \frac{AD}{2}$, logo $AD = 2DB$.

Assim, podemos concluir que: $AD = DC = 2DB$.

63 $\overline{AB} = R_1 \cdot \sqrt{2}$

$\overline{AB} = R_2$

$R_1 \cdot \sqrt{2} = R_2$

$$\frac{R_1\sqrt{2}}{2} + \frac{R_2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + 1$$

$$R_1\sqrt{2} + R_1\sqrt{6} = 2\left(\sqrt{3} + 1\right)$$

$$R_1 \cdot \sqrt{2}\,\cancel{\left(\sqrt{3} + 1\right)} = 2\,\cancel{\left(\sqrt{3} + 1\right)}$$

$$R_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow R_1 = \sqrt{2}$$

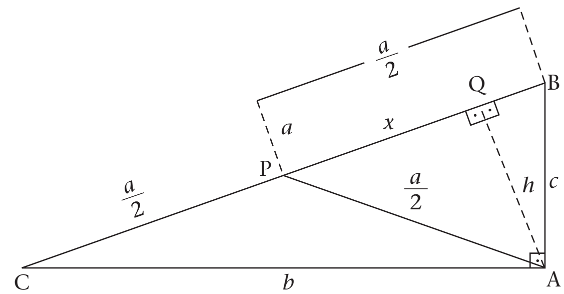
Como $R_1 \cdot \sqrt{2} = R_2$, então: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = R_2 \Rightarrow R_2 = 2$

64 Veja a demonstração que já está no texto na página 454 do Livro do Aluno.

65 a) Temos que $BE = BC = 1$, assim a medida de $B\hat{E}C = B\hat{C}E = 75°$, porque a medida do ângulo B é 30°, logo $\alpha = 90° - 75° = 15°$.

b) sen $D\hat{E}C = 150° = \frac{1}{2}$

72 Considerando o desenho, temos:



$CP = PB = PA$

$bc = ah$

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{bc}{a}}{\frac{a}{2}} = \frac{bc}{\frac{a^2}{2}} = \frac{2bc}{a^2} = 2 \cdot \frac{AB \cdot AC}{BC^2}$$

$$\frac{a^2}{4} = x^2 + h^2$$

$$\frac{QP}{BP} = \frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{a^2}{4} - h^2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{a^2 - 4h^2}{4}}{\frac{a^2}{4}}} = \sqrt{\frac{\cancel{4}\left(a^2 - 4h^2\right)}{\cancel{4}a^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(a^2 - 4h^2\right) \cdot a^2}{a^2 \cdot a^2}} = \sqrt{\frac{a^4 - 4a^2h^2}{a^4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(a^2 - 2ah\right)\left(a^2 + 2ah\right)}{a^4}} = \sqrt{\frac{\left(a^2 - 2bc\right)\left(a^2 + 2bc\right)}{a^4}} =$$

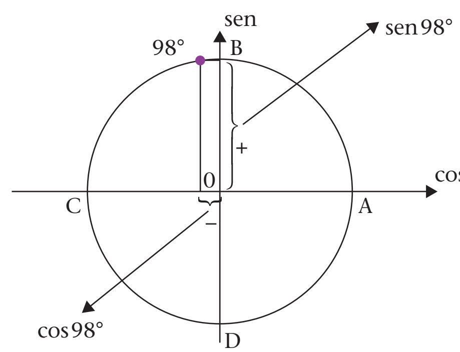
$$= \sqrt{\frac{\left(b^2 + c^2 - 2bc\right)\left(b^2 + c^2 + 2bc\right)}{a^4}} = \sqrt{\left[\frac{(b - c)(b + c)}{a^2}\right]^2} =$$

$$= \frac{(b - c)(b + c)}{a^2} = \frac{b^2 - c^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 - \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$$

CAPÍTULO XI

Exercícios de fixação, p. 383

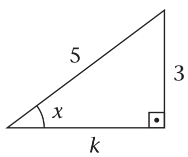
2



Como o valor do sen 98° é positivo e em módulo maior do que o cos 98°, o resultado é positivo. Alternativa (A).

3 sen $x = \frac{3}{5}$ e $x \in 2^{\underline{o}}$ quadrante.

Podemos construir o triângulo retângulo, cujo cateto oposto é 3 e a hipotenusa é 5. Assim, podemos calcular o outro cateto aplicando o Teorema de Pitágoras.



$5^2 = 3^2 + k^2 \Rightarrow k = 4$

Logo:

a) $\cos x = -\frac{4}{5}$, pois $x \in 2^{\underline{o}}$ quadrante;

b) $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$, pois $x \in 2^{\underline{o}}$ quadrante;

c) $\operatorname{cotg} x = -\frac{4}{3}$, pois $x \in 2^{\underline{o}}$ quadrante.

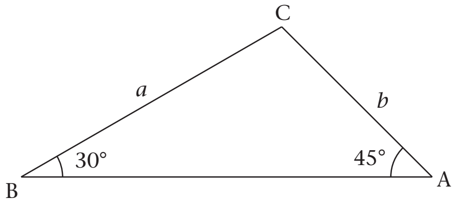
Exercícios de fixação, p. 388

1 Aplicando a lei dos senos, temos:

a) $$\frac{x}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{6\sqrt{3}}{\operatorname{sen} 120°} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \frac{6\cancel{\sqrt{3}}}{\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}}} \Rightarrow x = 6$$

b) $$\frac{x}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 45°} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \frac{2\cancel{\sqrt{2}}}{\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}} \Rightarrow x = 2$$

4



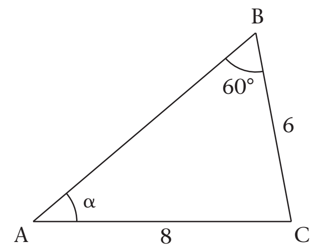
$a + b = 1 + \sqrt{2}$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{b}{\operatorname{sen} 30°} \Rightarrow \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}} = \frac{b}{\frac{1}{\cancel{2}}} \Rightarrow a = \sqrt{2} \cdot b$$

$$a + b = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow b\sqrt{2} + b = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow b\left(1 + \sqrt{2}\right) = 1 + \sqrt{2}$$

$b = 1$ e $a = \sqrt{2} \cdot 1 \Rightarrow a = \sqrt{2}$

7



$$\frac{6}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{8}{\operatorname{sen} 60°}$$

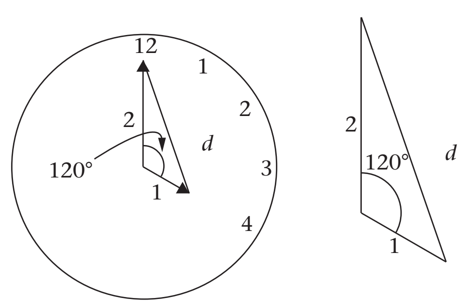
$$\frac{\cancel{6}^{3}}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\cancel{8}^{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$4 \cdot \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Exercícios de fixação, p. 393

4



Pela lei dos cossenos:

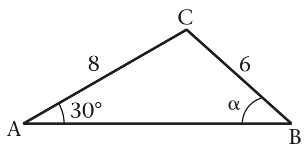
$$d^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 120°$$

$$d^2 = 1 + 4 - \cancel{4}^{2} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}^{1}}\right)$$

$d = \sqrt{5 + 2} \Rightarrow d = \sqrt{7}$ metros

Exercícios de revisão, p. 399

1



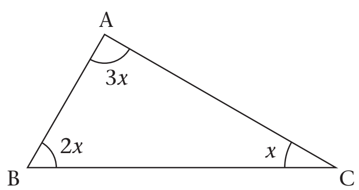
Pela lei dos senos: $\dfrac{6}{\operatorname{sen} 30°} = \dfrac{8}{\operatorname{sen} \hat{B}}$

Assim: $\dfrac{6}{\frac{1}{2}} = \dfrac{8}{\operatorname{sen} \hat{B}} \Rightarrow 6 \operatorname{sen} \hat{B} = 4$

$\operatorname{sen} \hat{B} = \dfrac{4}{6} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{B} = \dfrac{2}{3}$

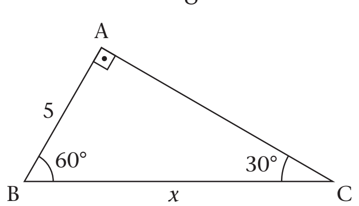
Alternativa (B).

2



Sabe-se que $x + 2x + 3x = 180°$.
Assim, $6x = 180° \Rightarrow x = 30°$.
Logo, no $\triangle ABC$ acima, temos: $\begin{cases} \hat{A} = 90° \\ \hat{B} = 60° \\ \hat{C} = 30° \end{cases}$

Sabe-se que o menor lado está oposto ao menor ângulo, logo no triângulo dado $\overline{AB} = 5$. Analogamente, o maior lado será $\overline{BC}$, pois está oposto ao maior ângulo.

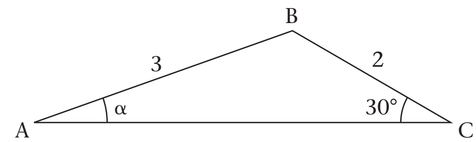


$\Rightarrow \operatorname{sen} 30° = \dfrac{5}{x} \Rightarrow \dfrac{5}{x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 10 \Rightarrow \overline{BC} = 10$

Alternativa (B).

3



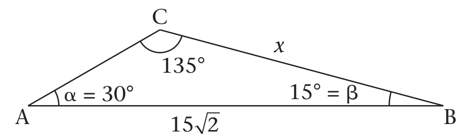
Pela lei dos senos: $\dfrac{3}{\operatorname{sen} 30°} = \dfrac{2}{\operatorname{sen} \alpha}$

Assim: $\dfrac{3}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{\operatorname{sen} \alpha} \Rightarrow 3 \operatorname{sen} \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{1}{3}$.

Como cossec $\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$, temos: cossec $\alpha = 3$

Alternativa (E).

4



Se: $\alpha = \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{180°}{6} \Rightarrow \alpha = 30°$

$\beta = \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{180°}{12} \Rightarrow \beta = 15°$

Logo: $\alpha + \beta + \hat{B} = 180° \Rightarrow \hat{B} = 135°$

Pela lei dos senos:

$\dfrac{x}{\operatorname{sen} 30°} = \dfrac{15\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 135°} \Rightarrow \operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen} 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Assim: $\dfrac{x}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \dfrac{15\cancel{\sqrt{2}}}{\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}} \Rightarrow x = 15$

Alternativa (C).

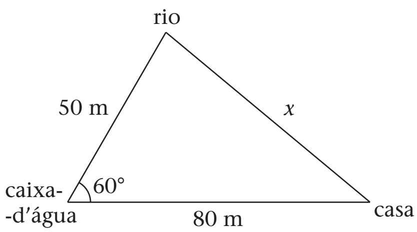
5 Alternativa (B) não é correta. A função tangente só está definida em:

$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\text{Dom} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$,

logo, como a função não está definida para ângulo da forma $\left(x = k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right)$, ela não será crescente em qualquer ponto x (função descontínua).

6



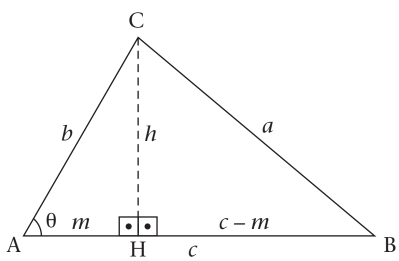
Pela lei dos cossenos:

$x^2 = 50^2 + 80^2 - 2 \cdot 50 \cdot 80 \cdot \cos 60°$

$x^2 = 2\,500 + 6\,400 - \cancel{2} \cdot 50 \cdot 80 \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$

$x^2 = 8\,900 - 4\,000 \Rightarrow x^2 = 4\,900 \Rightarrow x = 70$ m

7



Traçando uma altura h, relativa ao vértice C, construímos o segmento $\overline{CH} = h$, e definimos o segmento $\overline{AH} = m$. Assim, podemos expressar $\overline{BH} = c - m$.

No $\triangle$ACH, temos: $\begin{cases} b^2 = h^2 + m^2 \\ \cos\theta = \dfrac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos\theta \end{cases}$

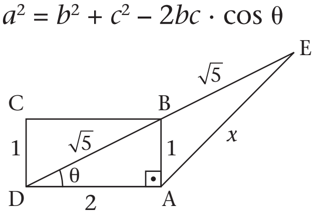
No $\triangle$BCH, temos: $a^2 = (c - m)^2 + h^2$

$a^2 = c^2 - 2cm + \underbrace{m^2 + h^2}_{b^2}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot \underbrace{m}_{b^2 \cdot \cos\theta}$

Logo, se $m = b \cdot \cos\theta$, temos:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\theta$

8



Se $\overline{DC} = 1$, então $\overline{AB} = 1$.

Pelo Teorema de Pitágoras: $\left(\overline{BD}\right)^2 = 2^2 + 1^2$

$\overline{BD} = \sqrt{5}$

Assim: $\overline{BD} = \overline{BE} = \sqrt{5}$ e $\overline{DE} = 2\sqrt{5}$

Pela lei dos cossenos no $\triangle$ADE:

$x^2 = 2^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \cos\theta$

Mas note que no $\triangle$ADB temos: $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Logo:

$x^2 = 4 + 20 - 2 \cdot 2 \cdot 2\cancel{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{2}{\cancel{\sqrt{5}}} \Rightarrow x^2 = 24 - 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$

$\overline{AE} = 2\sqrt{2}$

9 Pela lei dos cossenos:

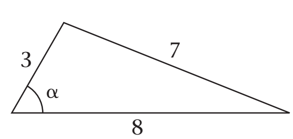
$5^2 = 11^2 + 12^2 - 2 \cdot 11 \cdot 12 \cdot \cos\alpha$

$25 = 121 + 144 - 264\cos\alpha \Rightarrow 264\cos\alpha = 240 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{240}{264} = \dfrac{10}{11}$

Assim: $\cos\alpha = \dfrac{10}{11}$

10



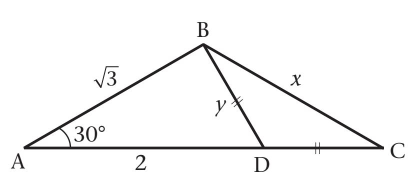
Pela lei dos cossenos: $7^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos\alpha$.

Assim, $49 = 9 + 64 - 48\cos\alpha \Rightarrow 48\cos\alpha = 24$

$\cos\alpha = \dfrac{24}{48} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$

Alternativa (B).

11



Aplicando a lei dos cossenos no $\triangle$ABD, temos:

$$y^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 30°$$

$$y^2 = 3 + 4 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = 7 - 6 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = 1.$$

Como $\overline{BD} = \overline{DC}$, temos $\overline{DC} = 1$.

Pela lei dos cossenos no $\triangle ABC$

$$x^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 3^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \cos 30°$$

$$x^2 = 3 + 9 - \cancel{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$x^2 = 12 - 9 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \overline{BC} = \sqrt{3}\,\text{cm}$$

Alternativa (A).

CAPÍTULO XII

Exercícios de revisão, 439

23 $$\operatorname{tg}\left(90° + x\right) = \frac{\operatorname{sen} 90° + x}{\cos 90° + x} =$$

$$= \frac{\cos x}{-\operatorname{sen} x} = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\cot x$$

Alternativa (D).

24 $$\left.\begin{array}{l} \cos(5\pi - x) = \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \cos(3\pi + x) = \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{array}\right\}$$

$$A = \frac{7\left(-\cos x\right) - 3\left(-\cos x\right)}{8 \cos x}$$

$$= \frac{-7\cos x + 3\cos x}{8 \cos x} = \frac{-4\cancel{\cos x}}{8\cancel{\cos x}} = -\frac{1}{2}$$

Logo: $2A + 1 = 0$

Alternativa (C).

25 $$\operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}\left(-750°\right) = \operatorname{tg} 330° = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 1200° = \sec 120° = \frac{1}{\cos 120°} = \frac{1}{-\cos 60°} = -2$$

$$\operatorname{cossec} \frac{9\pi}{4} = \operatorname{cossec}\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{cossec} \frac{\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{5\pi}{6} = \operatorname{cotg} 150° = \frac{1}{\operatorname{tg} 150°} = \frac{1}{-\operatorname{tg} 30°} = -\frac{3}{\sqrt{3}}$$

Substituindo os valores encontrados:

$$\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}}{(-2) \cdot \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right) - \left(\dfrac{3}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\dfrac{3\sqrt{2} - 3 - 2}{6}}{\dfrac{-4}{\sqrt{2}} + 3} = \frac{\dfrac{3\sqrt{2} - 5}{6}}{\dfrac{-4 + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{2} - 5}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{-\left(4 - 3\sqrt{2}\right)} = \frac{6 - 5\sqrt{2}}{-24 + 18\sqrt{2}} \cdot \frac{\left(18\sqrt{2} + 24\right)}{\left(18\sqrt{2} + 24\right)} =$$

$$= \frac{108\sqrt{2} + 144 - 180 - 120\sqrt{2}}{648 - 576} = \frac{-\left(12\sqrt{2} + 36\right)}{72} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{12}\left(-\sqrt{2} + 3\right)}{\cancel{72}^{\,6}} = \frac{3 - \sqrt{2}}{6}$$

Alternativa (C).

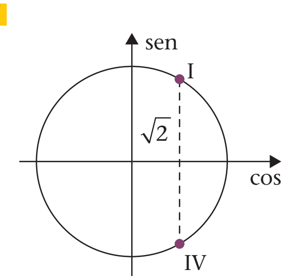
26 $$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \ldots\right) \Rightarrow \lim S = \frac{a}{1 - q} =$$

$$= \frac{\dfrac{\pi}{3}}{1 - \dfrac{1}{2}} = \frac{\dfrac{\pi}{3}}{\dfrac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3}$$

Logo, $\cos \dfrac{2\pi}{3} = \cos 120° = -\dfrac{1}{2}$

Alternativa (B).

27



1º e 4º quadrantes

Alternativa (A).

29 $y = \cos 2\pi + \text{sen}\,\pi + \text{tg}\,\pi - \sec 4\pi$

$y = 1 + 0 + 0 - 1 = 0$

Alternativa (D).

30 $\frac{2}{3} \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{6} - \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2} =$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - (-1) \,.\, 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

Alternativa (E).

31 $\text{sen}^2\, 80° + \cos^2 80° = 1 \Rightarrow 1 - 1 = 0$

Alternativa (B).

34 $\sec x = -\frac{5}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{2}{5} \Rightarrow \text{sen}^2\, x + \frac{4}{25} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2\, x = \frac{21}{25} \Rightarrow \text{sen}\, x = \pm\frac{\sqrt{21}}{5}$

Como $x \in$ 3º quadrante:

$$\text{sen}\, x = -\frac{\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{21}}{\cancel{5}}}{-\frac{2}{\cancel{5}}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

Alternativa (A).

35 $\cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow \text{sen}^2\, x + \frac{16}{25} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2\, x = \frac{9}{25} \Rightarrow \text{sen}\, x = \frac{3}{5}$

Como $\text{tg}\, x < 0$,

$$\text{sen}\, x = -\frac{3}{5};\ \text{sen}\, x = \pm\frac{3}{5} \Rightarrow \text{tg}\, x = \frac{-\frac{3}{\cancel{5}}}{\frac{4}{\cancel{5}}} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{sen}\, x - \text{cotg}\, x = -\frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{3}{5} + \frac{4}{3} =$$

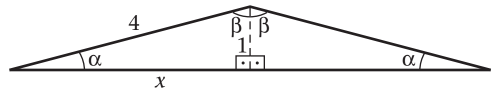
$$= \left(\frac{-9+20}{15}\right) = \frac{11}{15}$$

Alternativa (D).

CAPÍTULO XIII

Exercícios de revisão, p. 472

34



$x^2 + 1^2 = 4^2$

$x^2 = 15 \Rightarrow x = \sqrt{15}$

$$\text{tg}\, 2\beta = \frac{2\,\text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}^2\,\beta}$$

$$\text{tg}\, 2\beta = \frac{2 \cdot \sqrt{15}}{1 - 15} = \frac{2\sqrt{15}}{-14} = -\frac{\sqrt{15}}{7}$$

Alternativa (E).

37 $\text{sen}\, x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{sen}\, 2x = 2\,\text{sen}\, x \cdot \cos x = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

38 $\cos x = 0{,}8 \Rightarrow \cos x = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow$

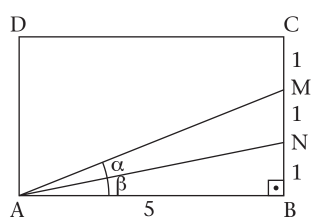
$\Rightarrow \text{sen}\, x = \frac{3}{5}$

Assim, $\text{sen}\, 2x = 2\,\text{sen}\, x \cdot \cos x \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24^{(\cdot 4)}}{25_{(\cdot 4)}} = \frac{96}{100} = 0{,}96.$$

Alternativa (C).

40



$$\text{tg}\,\alpha = ? \Rightarrow \underbrace{\text{tg}(\alpha + \beta)}_{\downarrow} = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{\text{tg}\,\alpha + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}\text{tg}\,\alpha}$$

$$5\,\text{tg}\,\alpha + 1 = 2 - \frac{2}{5}\,\text{tg}\,\alpha$$

$$5\,\text{tg}\,\alpha + \frac{2}{5}\,\text{tg}\,\alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25\,\text{tg}\,\alpha + 2\,\text{tg}\,\alpha = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27\,\text{tg}\,\alpha = 5 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{5}{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\ \text{M\hat{A}N} = \frac{5}{27}$$

43 $4^{-\text{sen}\,x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{-2\,\text{sen}\,x} = 2^{-1} \Rightarrow -2\,\text{sen}\,x = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{sen}\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

Alternativa (E).

46 $\text{sen}\,x - \cos x = \frac{1}{2}$

$$(\text{sen}\,x - \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

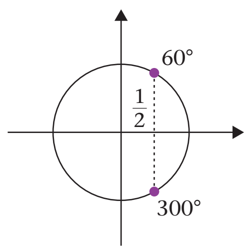
$$\Rightarrow \underbrace{\text{sen}^2\,x - 2\ \text{sen}\ x \cdot \cos\ x + \cos^2\,x}_{1} = \frac{1}{4}$$

$$1 - 2\,\text{sen}\ x \cdot \cos\ x = \frac{1}{4}$$

$$2\ \text{sen}\ x \cdot \cos\ x = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}\ x \cdot \cos\ x = \frac{3}{8}$$

Alternativa (C).

52 $\cos\,2x = \frac{1}{2}$, onde $x \in [0,\ 2\pi]$



Logo, $2x = 60°$ ou $2x = 300°$.

$$\underbrace{x = 30° \qquad x = 150°}_{\{30°,\ 150°\}}$$

Alternativa (C).

53 $\text{sen}\ x \cdot \cos\ y + \text{sen}\ y \cdot \cos\ x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\ x \cdot \cos\ y = -\text{sen}\ y \cdot \cos\ x \qquad$ (I)

$\text{sen}\ x \cdot \cos\ y - \text{sen}\ y \cdot \cos\ x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\ x \cdot \cos\ y = \text{sen}\ y \cdot \cos\ x \qquad$ (II)

I) $\frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \frac{-\text{sen}\,y}{\cos y} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tg}\,x = -\text{tg}\,y \Rightarrow 0 \le x,\ y \in \pi \Rightarrow x + y = 180°$

$x + y = \pi$

II) $\frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \frac{\text{sen}\,y}{\cos y} \Rightarrow \text{tg}\,x = \text{tg}\,y \Rightarrow 0 \le x,\ y \in \pi \rightarrow x = y$

54 $\cos 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow 2\cos^2 x = \frac{5}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{5}{8} \Rightarrow \cos x = \sqrt{\frac{5}{8}}$$

$$\text{sen}^2 x + \frac{5}{8} = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{3}{8} \Rightarrow \text{sen}\,x = \sqrt{\frac{3}{8}}$$

$$\text{tg}^2 x = \left(\frac{\sqrt{\frac{3}{8}}}{\sqrt{\frac{5}{8}}}\right)^2 \Rightarrow \text{tg}^2 x = \frac{\frac{3}{\cancel{8}}}{\frac{5}{\cancel{8}}} = \frac{3}{5}$$

Alternativa (A).

55 $\text{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)}_{1}(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} \text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = \frac{1}{4} \\ \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

$$2\,\text{sen}^2\alpha = \frac{5}{4}$$

$$\text{sen}^2\alpha = \frac{5}{8} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{5}{8}}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{3}{8} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{8}}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{\cancel{\sqrt{8}}}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{8}}}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

Alternativa (B).

CAPÍTULO XIV

Exercícios de revisão, p. 510

9 $f(x) = 2k + p \cdot \cos(px + k)$

$\text{Im} f = [-2,\ 8]$

$$-1 \cdot p + 2k = -2 \Rightarrow 2k \cancel{-p} = -2$$

$$1 \cdot p + 2k = 8 \Rightarrow 2k \cancel{+p} = 8$$

$$4k = 6$$

$$k = \frac{3}{2} \text{ e } p = 5$$

Logo, $p = \dfrac{2\pi}{|\,p\,|} = \dfrac{2\pi}{5}$.

Alternativa (E).

10
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = k \cdot \cos(tx) \\ \text{Im} f = [-2, 2], \text{ logo, } k = 2 \\ p = 4\pi \Rightarrow \dfrac{2\pi}{t} = 4\pi \Rightarrow t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\rangle k - t = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Alternativa (D).

11 $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} t\right) = -1 \Rightarrow \cos \pi = -1$

Logo, $\dfrac{\cancel{\pi}}{6} \cdot t = \cancel{\pi} \Rightarrow t = 6$

Alternativa (C).

12 $\text{Im} f = [-1, 0]$

Período: $\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos kx \Rightarrow p = \dfrac{2\cancel{\pi}}{k} = \dfrac{\cancel{\pi}}{2} \Rightarrow k = 4$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \\ f(\pi) = 0 \\ f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0 \end{array}\right\rangle |\cos 2x| - 1$$

Alternativa (D).

13 $p = 4\pi \Rightarrow \dfrac{2\pi}{t} = 4\pi \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$

A imagem é: $\text{Im} f = [-2, 2] \Rightarrow k = 2$

Quando $x = \pi$, $f(x) = -2$. Então:

$$f(x) = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

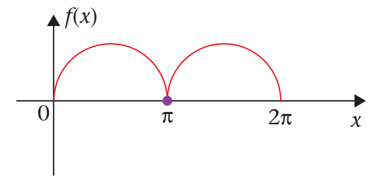
Alternativa (D).

14 $f(x) = 2 \operatorname{sen} x \Rightarrow \text{Im} f = [-2,\ 2]$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = \operatorname{sen} 2x \Rightarrow \text{Im} f = [-1,\ 1] \\ h(x) = 2 + \operatorname{sen} x \Rightarrow \text{Im} f = [1,\ 3] \end{array}\right\} h(x) \geq g(x)$$

Alternativa (B).

15 $f(x) = |\operatorname{sen} x|$



$\Rightarrow p = \pi \Rightarrow f(x) = f(x + \pi)$

Alternativa (C).

19 $L(x) = V(x) - C(x)$

$$V(3) = 3\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{12}\right) = 3\sqrt{2} \cdot \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$$

$$C(3) = 2 - \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) = 2 - \cos\frac{\pi}{2} = 2 - 0 = 2$$

$L(3) = V(3) - C(3)$

$L(3) = 3 - 2 = 1 \Rightarrow$ o lucro é de 1000 reais.

Alternativa (C).