

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO

DIEGO DE CARVALHO MARTINS

**OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS REGULARIZADAS EMPREGANDO
INFORMAÇÕES DE GRUPOS DE ATIVOS PARA O MERCADO BRASILEIRO**

SÃO PAULO
2015

DIEGO DE CARVALHO MARTINS

**OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS REGULARIZADAS EMPREGANDO
INFORMAÇÕES DE GRUPOS DE ATIVOS PARA O MERCADO BRASILEIRO**

Dissertação apresentada à Escola de Economia de
São Paulo da Fundação Getúlio Vargas
(FGV/EESP) como requisito para a obtenção do
título de Mestre em Finanças e Economia

Campo de conhecimento: Finanças

Orientador: Professor Marcelo Fernandes

SÃO PAULO

2015

Martins, Diego de Carvalho.

Otimização de Carteiras Regularizadas Empregando Informações de Grupos de Ativos para o Mercado Brasileiro / Diego de Carvalho Martins. - 2014.
66 f.

Orientador: Marcelo Fernandes

Dissertação (MPFE) - Escola de Economia de São Paulo.

1. Investimentos - Brasil. 2. Mercado financeiro - Brasil. 3. Alocação de ativos. I. Fernandes, Marcelo. II. Dissertação (MPFE) - Escola de Economia de São Paulo. III. Título.

CDU 336.76(81)

DIEGO DE CARVALHO MARTINS

**OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS REGULARIZADAS EMPREGANDO
INFORMAÇÕES DE GRUPOS DE ATIVOS PARA O MERCADO BRASILEIRO**

Dissertação apresentada à Escola de Economia de
São Paulo da Fundação Getúlio Vargas
(FGV/EESP) como requisito para a obtenção do
título de Mestre em Finanças e Economia

Campo de conhecimento: Finanças

Data de aprovação:

Banca Examinadora:

Professor Marcelo Fernandes
(Orientador)
EESP/FGV

Professor Antonio Zoratto Sanvicente
EESP/FGV

Prof. Dr. Marcelo Cunha Medeiros
PUC-Rio

Dedico este trabalho à memória de meu pai, grande incentivador de meus estudos, e que certamente estaria feliz com a conclusão de mais esta etapa da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, em particular à minha mãe e irmãs, que mais uma vez entenderam os momentos de ausência, retribuindo com apoio incondicional.

Agradeço ao meu orientador, Professor Marcelo Fernandes, pelos aconselhamentos e sempre enriquecedoras discussões, e pelo zelo com o qual se dedicou à minha orientação e à construção desta dissertação.

Agradeço também à Pragma Patrimônio, seus sócios e colegas de profissão, pela motivação e apoio para que eu prosseguisse meu percurso acadêmico neste curso de mestrado.

RESUMO

Este trabalho se dedica a analisar o desempenho de modelos de otimização de carteiras regularizadas, empregando ativos financeiros do mercado brasileiro. Em particular, regularizamos as carteiras através do uso de restrições sobre a norma dos pesos dos ativos, assim como DeMiguel et al. (2009). Adicionalmente, também analisamos o desempenho de carteiras que levam em consideração informações sobre a estrutura de grupos de ativos com características semelhantes, conforme proposto por Fernandes, Rocha e Souza (2011). Enquanto a matriz de covariância empregada nas análises é a estimada através dos dados amostrais, os retornos esperados são obtidos através da otimização reversa da carteira de equilíbrio de mercado proposta por Black e Litterman (1992). A análise empírica fora da amostra para o período entre janeiro de 2010 e outubro de 2014 sinaliza-nos que, em linha com estudos anteriores, a penalização das normas dos pesos pode levar (dependendo da norma escolhida e da intensidade da restrição) a melhores performances em termos de Sharpe e retorno médio, em relação a carteiras obtidas via o modelo tradicional de Markowitz. Além disso, a inclusão de informações sobre os grupos de ativos também pode trazer benefícios ao cálculo de portfólios ótimos, tanto em relação aos métodos tradicionais quanto em relação aos casos sem uso da estrutura de grupos.

Palavras-chave: otimização de carteiras, alocação de ativos, carteiras regularizadas, média-variância, Black-Litterman, Markowitz, restrição sobre norma, informação de grupos.

ABSTRACT

This work aims to analyze the performance of regularized mean-variance portfolios, employing financial assets available in Brazilian markets. In particular, regularized portfolios are obtained by restricting the norm of the portfolio-weights vector, following DeMiguel et al. (2009). Additionally, we analyze the performance of portfolios that take into account information about the group structure of assets with similar characteristics, as proposed by Fernandes, Rocha and Souza (2011). While the covariance matrix employed is the sample one, the expected returns are obtained by reverse optimization of market equilibrium portfolio proposed by Black and Litterman (1992). The empirical analysis out of the sample for the period between January 2010 and October 2014 indicates that, in line with previous studies, penalizing the norm of weights can (depending on the chosen standard and intensity of the restriction) lead to portfolios having best performances in terms of return and Sharpe, when compared to portfolios obtained via Markowitz models. In addition, the inclusion of group information can also be beneficial in order to calculate optimal portfolios, when compared to both Markowitz portfolios or without using group information.

Keywords: portfolio optimization, asset allocation, regularized portfolios, mean-variance, Black-Litterman, Markowitz, norm restriction, group information.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Evolução da Carteira de Mercado de ativos arriscados – dez.2009 a set.2014.....	39
Gráfico 2 – Evolução do prêmio de risco dos ativos do grupo Renda Fixa Prefixada.....	40
Gráfico 3 - Evolução do prêmio de risco dos ativos do grupo Renda Fixa indexada IPCA	40
Gráfico 4 - Evolução do prêmio de risco dos ativos do grupo Renda Fixa Crédito Privado ...	40
Gráfico 5 - Evolução do prêmio de risco dos ativos do grupo Renda Variável	40
Gráfico 6 – Evolução do retorno anualizado do CDI (Futuro de DI de 30 dias).....	41
Gráfico 7 – Retorno acumulado dos portfólios calculados (dez/2009 – out/2014)	45
Gráfico 8 – Retorno acumulado dos portfólios calculado que superam o CDI (dez/2009 - out/2014).....	46
Gráfico 9 – Portfólio l2 MaxRet: Evolução da alocação por grupos de ativos	47
Gráfico 10 - Portfólio l2 MaxRet: Alocação mínima e máxima por ativo	47
Gráfico 11 - Portfólio l2 VCV: Evolução da alocação por grupos de ativos	47
Gráfico 12 - Portfólio l2 VCV: Alocação mínima e máxima por ativo	47
Gráfico 13 - Portfólio l2 VCS: Evolução da alocação por grupos de ativos	47
Gráfico 14 - Portfólio l2 VCS: Alocação mínima e máxima por ativo	47
Gráfico 15 – Portfólio l1-l2 MaxRet: Evolução da alocação por grupos de ativos	49
Gráfico 16 - Portfólio l1-l2 MaxRet: Alocação mínima e máxima por ativo	49
Gráfico 17 - Portfólio l1-l2 VCV: Evolução da alocação por grupos de ativos	49
Gráfico 18 - Portfólio l1-l2 VCV: Alocação mínima e máxima por ativo.....	49
Gráfico 19 - Portfólio l1-l2 VCS: Evolução da alocação por grupos de ativos	49
Gráfico 20 - Portfólio l1-l2 VCS: Alocação mínima e máxima por ativo	49
Gráfico 22 - Portfólio Markowitz com restrição a posições vendidas: Alocação mínima e máxima por ativo.....	57
Gráfico 23 - Portfólio Markowitz sem restrição a posições vendidas: Evolução da alocação por grupos de ativos.....	57

Gráfico 24 - Portfólio Markowitz sem restrição a posições vendidas: Alocação mínima e máxima por ativo	57
Gráfico 25 – Portfólio l1 MR: Evolução da alocação por grupos de ativos.....	58
Gráfico 26 - Portfólio l1 MR: Alocação mínima e máxima por ativo	58
Gráfico 27 - Portfólio l1 MRelax: Evolução da alocação por grupos de ativos.....	58
Gráfico 28 - Portfólio l1 MRelax: Alocação mínima e máxima por ativo.....	58
Gráfico 29 - Portfólio l1 MaxRet: Evolução da alocação por grupos de ativos.....	58
Gráfico 30 - Portfólio l1 MaxRet: Alocação mínima e máxima por ativo.....	58
Gráfico 31 – Portfólio l1 VCV: Evolução da alocação por grupos de ativos	59
Gráfico 32 - Portfólio l1 VCV: Alocação mínima e máxima por ativo	59
Gráfico 33 - Portfólio l1 VCS: Evolução da alocação por grupos de ativos.....	59
Gráfico 34 - Portfólio l1 VCS: Alocação mínima e máxima por ativo.....	59
Gráfico 35 - Portfólio l2 MR: Evolução da alocação por grupos de ativos	59
Gráfico 36 - Portfólio l2 MR: Alocação mínima e máxima por ativo	59
Gráfico 37 – Portfólio l2 MRelax: Evolução da alocação por grupos de ativos	60
Gráfico 38 - Portfólio l2 MRelax: Alocação mínima e máxima por ativo.....	60
Gráfico 39 - Portfólio l1-l2 MR: Evolução da alocação por grupos de ativos.....	60
Gráfico 40 - Portfólio l1-l2 MR: Alocação mínima e máxima por ativo.....	60
Gráfico 41 - Portfólio l1-l2 MRelax: Evolução da alocação por grupos de ativos	60
Gráfico 42 - Portfólio l1-l2 MRelax: Alocação mínima e máxima por ativo	60
Gráfico 43 – Portfólio l2-l1 MR: Evolução da alocação por grupos de ativos	61
Gráfico 44 - Portfólio l2-l1 MR: Alocação mínima e máxima por ativo.....	61
Gráfico 45 - Portfólio l2-l1 MRelax: Evolução da alocação por grupos de ativos	61
Gráfico 46 - Portfólio l2-l1 MRelax: Alocação mínima e máxima por ativo	61
Gráfico 47 - Portfólio l2-l1 MaxRet: Evolução da alocação por grupos de ativos	61
Gráfico 48 - Portfólio l2-l1 MaxRet: Alocação mínima e máxima por ativo	61
Gráfico 49 – Portfólio l2-l1 VCV: Evolução da alocação por grupos de ativos.....	62

Gráfico 50 - Portfólio I2-I1 VCV: Alocação mínima e máxima por ativo.....	62
Gráfico 51 - Portfólio I2-I1 VCS: Evolução da alocação por grupos de ativos	62
Gráfico 52 - Portfólio I2-I1 VCS: Alocação mínima e máxima por ativo	62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Estoque da Dívida Pública Federal Interna (em R\$ Bilhões).....	33
Tabela 2 – Família de índices IDkA.....	34
Tabela 3 – Família de índices IDA.....	35
Tabela 4 – Ativos e Índices elegíveis	36
Tabela 5 - Resultados - Janela de dados 02/01/2009 - 31/10/2014	44
Tabela 6 – Composição da carteira teórica do IBrX em 30/09/2014	55

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANBIMA	Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais
CDI	Certificado de Depósito Interbancário
IBrX 100	Índice Brasil 100 Bovespa
IDA	Índice de Debêntures ANBIMA
IDkA	Índice de Duração Constante ANBIMA
IMA	Índices de Mercado da ANBIMA
IPCA	Índice de Preços ao Consumidor Amplo
LFT	Letra Financeira do Tesouro
LTN	Letra do Tesouro Nacional
MarkoR	Portfólio de Markowitz com restrição à venda a descoberto
MarkoR	Portfólio de Markowitz sem restrição à venda a descoberto
MaxRet	Máximo Retorno
MR	Mais Restrito
MRelax	Mais Relaxado
MV	Média-Variância
NTN-F	Nota do Tesouro Nacional – Série F
NTN-B	Nota do Tesouro Nacional – Série B
VCV	Validação Cruzada da Variância
VCS	Validação Cruzada do Índice de Sharpe

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	13
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
2.1. Otimização média-variância	16
2.2. Prós e contras do modelo MV.....	18
2.3. Técnicas de regularização.....	19
2.4. Regularização dos pesos do portfólio	20
2.5. Incluindo informações sobre grupos de ativos.....	22
2.6. Retornos esperados de equilíbrio	24
3. METODOLOGIA E DADOS	26
3.1. Metodologia de análise	26
3.2. Portfólios estimados.....	27
3.3. Critérios de avaliação dos resultados.....	29
3.4. Descrição dos dados.....	31
3.4.1. Ativos de renda fixa.....	32
3.4.2. Ativos de renda variável	35
3.4.3. Resumo dos ativos	36
3.4.4. Carteira de mercado de ativos arriscados.....	37
4. IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS.....	38
4.1. Portfólios de mercado e prêmios de risco	38
4.2. Resultados obtidos para os portfólios otimizados.....	41
4.3. Portfólios com desempenho acima do CDI	45
5. CONCLUSÕES.....	50
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	52
APÊNDICE A	55
APÊNDICE B.....	57
ANEXO A.....	63

1. INTRODUÇÃO

A busca por portfólios ótimos de investimento é um problema que ronda o campo de pesquisa em finanças desde os trabalhos pioneiros de Harry Markowitz (1952). Com uma formulação elegante e direta, Markowitz propôs um modelo capaz de definir uma carteira ótima de investimentos segundo um critério de média-variância. Em linhas gerais, trata-se de um modelo desenhado para encontrar, para um dado nível de risco (medido pela variância), a combinação de ativos que leva o investidor a obter o maior retorno possível. Incorporando-se informações acerca das preferências do investidor (em específico, sua aversão ao risco), o modelo também é capaz de indicar a carteira ótima àquele investidor.

Um tanto quanto inovadora para a sua época, tal proposta suscitou críticas mesmo de Milton Friedman, presente na banca de defesa da tese de doutoramento de Markowitz pela Universidade de Chicago, que disse não considerar o trabalho apresentado como sendo parte da ciência econômica. Entretanto, de 1950 aos dias de hoje, juntaram-se a Markowitz diversos colaboradores no estudo de portfólios ótimos. Destacam-se os trabalhos de Merton (1969, 1971) na definição de modelos intertemporais e na incorporação das características de consumo do investidor, Samuelson (1969) com o estudo de modelos estocásticos dinâmicos, e Fama (1970) também incorporando preferências do investidor em suas decisões de investimento.

Mesmo em períodos mais recentes, a alocação ótima de ativos continua sendo um tema rico em pesquisas no campo financeiro. Podemos aqui elencar os trabalhos de Black e Litterman (1992) na definição de um modelo capaz de incorporar as opiniões do investidor sobre as expectativas de retorno para as classes de ativos, ou ainda os estudos de Campbell e Viceira (2002) na definição de portfólios ótimos para investidores de longo prazo.

Enfim, muito tem-se trabalhado na busca por portfólios ótimos de investimento. Ao longo dos últimos 60 anos, foram muitos os avanços na definição dos modelos de otimização para os mais diversos tipos de restrição ou perfis de investidores. Todavia, em sua maioria, estes modelos dependem de parâmetros de entrada não observáveis diretamente, e que precisam portanto ser estimados. Logo, a estimação dos parâmetros é um ponto crucial para a qualidade dos resultados dos modelos existentes.

Destarte, esta dissertação visa analisar o desempenho de métodos de regularização no cálculo de portfólios ótimos. O objetivo destes métodos é melhorar a qualidade de estimadores em

amostras finitas, o que, por conseguinte, levaria à obtenção de estimativas mais precisas do portfólio ótimo. Em particular, nos dedicamos à regularização através da imposição de penalizações às normas dos pesos de ativos, em linha com os modelos propostos por Jagannathan e Ma (2003) e DeMiguel et al. (2009).

Além disso, também levaremos em conta na análise, conforme proposto por Fernandes, Rocha e Souza (2011), informações acerca de grupos de ativos que, intuitivamente, se comportam de maneira parecida. A ideia é observar a capacidade da estrutura de grupos em aperfeiçoar a alocação de ativos. Entretanto, aqui exploramos a alocação ótima de ativos dentro de um arcabouço de média-variância, enquanto que Fernandes, Rocha e Souza (2011) estimam a carteira de variância mínima, abstraindo do cálculo o retorno esperado.

A estimação do retorno esperado dos ativos é uma tarefa reconhecidamente difícil (MERTON, 1980). Diversos autores enfatizam que erros na estimação da média levam a uma degradação sensível dos resultados do modelo de média variância (MICHAUD, 1989; JORION, 1991; CHOPRA, ZIEMBA, 1993). Por conseguinte, parte majoritária da literatura se dedica à construção de carteiras de mínima variância, como uma maneira de se evitar os erros de estimação do retorno esperado (JAGANNATHAN, MA, 2003; LEDOIT, WOLF, 2003; DEMIGUEL, GARLAPPO, UPPAL, 2009; DEMIGUEL *et al.*, 2009).

Já Stoyanov e Goltz (2011) argumentam que, ainda que portfólios de mínima variância possam ser interessantes para investidores que desejam ter carteiras de baixo risco, sua construção leva a duas desvantagens. A primeira delas é que tais portfólios não são ótimos por definição, ao ignorar o componente de retorno esperado – ele é dominado pelas combinações entre ativo livre de risco e portfólio tangente, a menos que as carteiras de mínimo risco e tangente coincidam. A segunda desvantagem está na baixa diversificação do portfólio, que tende a concentrar em ativos de baixa volatilidade.

Adicionalmente, Kritzman, Page e Turkington (2010) argumentam que a superioridade de portfólios naives em relação a portfólios otimizados se dá pela utilização de estimadores de retorno de má qualidade – notadamente a média amostral em um período curto de tempo. Eles inclusive argumentam que o uso de melhores estimadores leva a resultados superiores do modelo de média-variância. Para evitar uma estimação convencional das médias, estimamos neste estudo o retorno esperado dos ativos através da otimização reversa da carteira de mercado, proposta por Black e Litterman (1992), para se determinar os retornos de equilíbrio do mercado.

Ao vasculharmos a literatura brasileira no que tange a otimização de portfólios, notamos que ela se dedica em sua maioria à construção de carteiras ótimas de ações, como é o caso de Medeiros, Passos e Vasconcelos (2014), ou portfólios de mínima variância (RUBESAM, BELTRAME, 2013; NETO, LEAL, 2010). Neste trabalho, consideramos a busca de carteiras ótimas diversificadas em ativos de renda fixa e renda variável. A análise empírica do desempenho dos portfólios fora da amostra indica-nos que o uso de penalizações sobre a norma dos pesos (com destaque para a norma de grau 2) leva a resultados melhores em termos de Sharpe e retorno médio – em linha com os trabalhos de Brodie (2009), DeMiguel et al. (2009) e Fernandes, Rocha e Souza (2011). Ademais, o uso da informação de grupos de ativos também leva à construção de portfólios com melhor desempenho fora da amostra (assim como nos resultados obtidos por Fernandes, Rocha e Souza (2011)).

O restante deste trabalho organiza-se da seguinte forma: A seção 2 conduz uma revisão da literatura, enquanto na seção 3 abordamos a metodologia e a descrição dos dados empregados neste estudo. A seção 4 discute a implementação e os resultados obtidos. Por fim, na seção 5 trazemos as principais conclusões deste trabalho.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Ao longo dos últimos 60 anos, diversos autores trabalharam no desenvolvimento de modelos de otimização para a obtenção de portfólios ótimos de investimento. Os modelos mais simples consideram a maximização da relação retorno versus risco em um horizonte de um período apenas (modelo estático de média-variância). Entre os mais sofisticados, há modelos que incorporam as preferências de consumo do investidor e otimizam o portfólio para n períodos (modelos intertemporais), assim como modelos dinâmicos baseados em processos estocásticos em tempo discreto ou contínuo. Trataremos nesta revisão, em específico, do modelo de média-variância (MV) tal qual proposto por Markowitz (1952), pois serve de base para a análise empírica da seção 4.

O grande desafio no arcabouço de MV é claramente a obtenção dos parâmetros de entrada para os modelos de otimização. Brandt (2004) destaca duas abordagens econométricas na escolha de carteiras. O procedimento usual de *plug-in* substitui parâmetros desconhecidos por suas estimativas nas soluções numéricas ou analíticas de portfólios ótimos. Alternativamente, pode-se tomar uma visão mais alinhada com a teoria da decisão, buscando-se carteiras ótimas em relação a distribuições subjetivas de retornos definidas pelo investidor-econometrista.

Sendo o método *plug-in* o comumente empregado, trataremos na sequência apenas de procedimentos capazes de melhorar a qualidade das estimações a serem empregadas na otimização.

2.1. Otimização média-variância

Markowitz (1952) considera que os investidores, ao escolherem seus portfólios ótimos, se preocupam tão somente com seu retorno esperado e a sua volatilidade em certo horizonte de tempo. Em particular, eles desejam possuir a carteira com o maior retorno esperado para um dado nível de risco, ou o portfólio de menor risco esperado para um dado nível de retorno. O problema de otimização para uma carteira com n ativos distintos é portanto:

$$\max_w \sum_{i=1}^n w_i \mu_i,$$

sujeito a

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij};$$

ou

$$\min_w \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij},$$

sujeito a

$$E = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i,$$

em que w_i é o peso do i -ésimo ativo no portfólio, μ_i é o retorno esperado para o i -ésimo ativo, E é o retorno esperado exigido, V é a variância exigida do portfólio, e σ_{ij} é a covariância entre os ativos i e j .

Duas restrições adicionais são propostas por Markowitz: (1) $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ e (2) $w_i \geq 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$. A primeira é uma restrição que faz com que a soma de todas as alocações seja igual a 100%, garantindo que toda a riqueza do investidor será utilizada. A segunda restrição impede alocações negativas no portfólio, ou seja, posições vendidas nos ativos. A fronteira eficiente resultante é o conjunto de portfólios possíveis que maximizam o retorno para cada nível de risco.

Considerando a utilidade do investidor sob a ótica média-variância, podemos escrever o seguinte problema:

$$\max_w \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} - \frac{\gamma}{2} \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \quad (1)$$

em que \mathbf{w} é o vetor de pesos dos ativos investidos no portfólio ótimo, $\boldsymbol{\mu}$ é o vetor de retornos esperados dos ativos, γ é o parâmetro de aversão ao risco do investidor, e $\boldsymbol{\Sigma}$ é a matriz de covariância dos retornos dos ativos.

Intuitivamente, podemos observar que este modelo maximiza o retorno do portfólio procurado, penalizando-o por cada unidade de risco de acordo com o grau de aversão ao risco do investidor. Além disso, podemos notar que, para a resolução do modelo, é necessário estimar a matriz de covariância e as expectativas de retornos dos ativos.

2.2. Prós e contras do modelo MV

Em se tratando do modelo média-variância como pertencente ao grupo dos *plug-in*, a qualidade da estimação da alocação ótima de uma carteira está diretamente relacionada à qualidade dos estimadores empregados. Brandt (2004) mostra que a variância do estimador do vetor de pesos dos ativos no portfólio ótimo é diretamente proporcional à variância dos estimadores dos retornos esperados e da matriz de covariância.

Michaud (1989) faz uma abrangente análise dos prós e contras encontrados nos modelos de média-variância. Dentre os pontos positivos, ele lista a capacidade do modelo de: (1) encontrar soluções que atendam os objetivos e restrições do investidor (em termos de risco, concentrações e retorno); (2) ser utilizado como ferramenta de controle de exposição ao risco; (3) implementar visões de mercado e objetivos específicos do investidor (como a decisão de exposição ou não a certos fatores de risco, ou o universo de ativos elegíveis definido); (4) utilizar eficientemente as informações de investimento disponíveis (empregando-as num contexto da totalidade do portfólio, e não ativo por ativo); (5) possibilitar o recálculo do portfólio de maneira simples quando uma nova informação do mercado é incorporada ao modelo.

Dentre os pontos negativos, Michaud (1989) menciona que os modelos de otimização MV atuam como maximizadores dos erros de estimação dos parâmetros de entrada. Isso porque tanto o retorno esperado quanto o risco estão sujeitos a erros de estimação. O modelo, por sua vez, tende a alocar mais (menos) recursos em ativos cujos estimadores de retornos são superestimados (subestimados), que possuam correlações negativas (positivas) e pequena (grande) variância – ativos estes que são os mais suscetíveis a possuírem grandes erros de estimação.

Michaud ainda destaca o uso de estimadores ruins, como por exemplo o uso da média amostral histórica do retorno dos ativos como estimador de retorno, quando este estimador é

intuitivamente subótimo ao ignorar a natureza multivariada do problema. A ausência de fatores de risco relevantes, como liquidez ou capitalização de um determinado ativo, também enfraquece o poder do modelo. O autor também salienta que o modelo média-variância leva a soluções ótimas instáveis, uma vez que pequenas alterações nos parâmetros de entrada levam em geral a grandes variações na solução. Por fim, ainda que o modelo indique uma solução ótima única, as incertezas envolvidas nas estimações dos parâmetros de entrada levam à existência de um grande número de portfólios estatisticamente equivalentes ao ótimo.

Em linha com o argumento de Michaud sobre a má qualidade de estimadores amostrais, Elton (1999) exemplifica o impacto de desempenhos passados de ativos sobre modelos MV através do alcunhado “efeito McDonalds”: nas décadas de 50 e 60, portfólios eficientes que pudessem investir em ações do McDonalds apresentavam alocação preponderante neste papel, e indicavam altos retornos e baixo risco esperado. Este efeito era causado pelo forte desempenho desta ação em seus primeiros anos de negociação, uma vez que os investidores não eram capazes de antecipar os lucros que a empresa anunciaria. Assim, a cada novo anúncio, os papéis subiam fortemente. Entretanto, Elton argumenta que um portfólio com tal alocação majoritária não seria crível como carteira ótima.

Assim, os erros de estimação são um ponto crucial no emprego de modelos de otimização MV, ao passo que permeiam a maior parte dos pontos negativos anteriormente descritos. Portanto, a seguir, trataremos em específico de modelos propostos capazes de melhorar as propriedades das estimações empregadas nas entradas do modelo MV.

2.3. Técnicas de regularização

O princípio básico das técnicas de regularização é a redução da variância do estimador através de uma combinação convexa com um estimador possivelmente enviesado, mas de variância muito menor. O peso do estimador original deve, portanto, equilibrar a redução da variância do estimador com o aumento de viés (ver, por exemplo, James e Stein (1961)).

O princípio de regularização é particularmente útil na estimação da matriz de covariância. Ledoit e Wolf (2003) recomendam o uso de encolhimento na estimação da matriz de covariância no contexto de otimização de carteiras de ações. Eles propõem encolher a matriz

de covariância amostral em direção a uma matriz alvo de covariância: $\hat{\Sigma}_s = \delta \hat{S} + (1 - \delta) \hat{\Sigma}$, em que δ é o parâmetro de regularização, $\hat{\Sigma}$ a matriz de covariância amostral e \hat{S} a matriz alvo de covariância. Os autores testam o uso de diversos candidatos ao alvo \hat{S} , como a matriz identidade e a matriz de covariância obtida através do modelo de mercado de Sharpe (1963).

Ledoit e Wolf (2003) também destacam que a regularização da matriz de covariância traz uma solução elegante para problemas de estimação quando se tem poucas observações para uma grande quantidade de ativos – o que pode levar a uma matriz amostral singular. Neste caso, empregando-se uma matriz alvo positiva semidefinida, a solução regularizada também o será, resolvendo o problema de singularidade.

Por fim, Ledoit e Wolf (2003) mostram que o coeficiente ótimo de encolhimento δ é uma função crescente da variância da matriz de covariância amostral e decrescente do tamanho da amostra, do viés da matriz alvo, e das covariâncias entre a matriz de covariância amostral e a matriz de covariância alvo.

2.4. Regularização dos pesos do portfólio

Até aqui tratamos da literatura envolvendo a regularização da matriz de covariância - um dos parâmetros de entrada do modelo MV. No entanto, as técnicas mostradas não são as únicas alternativas possíveis para se obter resultados ótimos regularizados.

Jagannathan e Ma (2003) mostram que a imposição de restrições sobre os pesos dos portfólios ótimos (em particular, em carteiras de mínima variância) é equivalente à regularização da matriz de covariância amostral. Na mesma linha, DeMiguel *et al.* (2009) propõem um modelo para construção de portfólios ótimos empregando regularização sobre os pesos das carteiras, através do uso de restrições sobre a norma do vetor de alocações de um dado portfólio.

Vale ressaltar que tanto DeMiguel *et al.* (2009) quanto Jagannathan e Ma (2003) baseiam seus estudos na busca de portfólios de mínima variância. DeMiguel *et al.* justificam tal fato baseando-se em estudos da literatura (MERTON, 1980) que mostram ser muito mais difícil estimar a média do retorno de ativos do que suas covariâncias. Além disso, os modelos de média-variância são sabidamente muito mais sensíveis aos erros de estimação da média do que

erros de estimação das covariâncias. DeMiguel *et al.* (2009) propõe então estimar o portfólio de mínima variância w_{lp}^* a partir de uma penalização em ℓ_p :

$$\begin{aligned} w_{lp}^*(\hat{\Sigma}, \delta) &= \arg \min_w w' \hat{\Sigma} w \\ \text{s. a.} \quad w' \mathbf{1} &= 1 \\ \|w\|_p &\leq \delta, \end{aligned}$$

em que $\|w\|_p$ refere-se à norma ℓ_p do vetor de pesos, ou seja,

$$\|w\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |w_i|^p \right)^{1/p}. \quad (2)$$

DeMiguel *et al.* (2009) chamam a atenção, em particular, para duas normas para os pesos, a saber, ℓ_1 e ℓ_2 .

A restrição sobre a norma ℓ_1 se traduz em restringir a soma dos módulos dos pesos dos ativos no portfólio ótimo a um limite superior δ . Em outras palavras, adicionamos ao modelo a restrição:

$$\|w\|_1 = \sum_{i=1}^N |w_i| \leq \delta. \quad (3)$$

Para $\delta = 1$, a restrição é de ausência de posições vendidas todos dos ativos. Ao permitir $\delta > 1$, há uma flexibilização da restrição sobre posições vendidas, permitindo certo limite de posições vendidas ao portfólio. DeMiguel *et al.* (2009) mostram que a restrição (3) pode ser reescrita como

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(w)} w_i \leq \frac{\delta - 1}{2}, \quad (4)$$

em que $\mathcal{N}(w)$ é o conjunto de índices de ativos para os quais o peso é negativo, isto é, $\mathcal{N}(w) = \{i: w_i < 0\}$. Logo, o lado esquerdo da desigualdade (4) indica a proporção total vendida do portfólio, enquanto o lado direito nos indica o limite máximo possível de *posições vendidas* na carteira.

O segundo caso especial refere-se à restrição sobre a norma ℓ_2 dos pesos. Neste caso, a norma (2) pode ser reescrita como:

$$\|w\|_2 = \left(\sum_{i=1}^N |w_i|^2 \right)^{1/2} \leq \delta,$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^N \left(w_i - \frac{1}{N} \right)^2 \leq \left(\delta - \frac{1}{N} \right).$$

Ao impormos uma restrição sobre a norma ℓ_2 dos pesos, encolhemos a alocação de ativos para um portfólio de pesos uniformes à medida que δ diminui. No limite, quando $\delta = \frac{1}{N}$, o portfólio regularizado terá pesos iguais para todos os ativos.

Por fim, podemos também incorporar informações sobre grupos de ativos (ou seja, conjuntos de ativos financeiros com características e/ou comportamento semelhantes). Fernandes, Rocha e Souza (2011) trazem evidências de que tal procedimento pode trazer melhoras consideráveis no desempenho de portfólios ótimos em testes fora da amostra.

2.5. Incluindo informações sobre grupos de ativos

A busca por carteiras ótimas passa inicialmente pela seleção do universo de ativos elegíveis a serem investidos. Usualmente, ativos podem ser agrupados em classes que comungam características particulares, notadamente em termos de fatores de risco. Destarte, considerar as diferenças entre tais grupos ajuda na obtenção de carteiras mais diversificadas. Fernandes, Rocha e Souza (2011) propõem dois métodos para incorporar a estrutura de grupos de ativos no processo de otimização de carteiras.

O primeiro método é em dois passos, buscando-se inicialmente carteiras ótimas para cada classe. Em seguida, procura-se uma carteira ótima combinando os portfólios ótimos de cada classe. Este método possui duas vantagens. Primeiro, é particularmente interessante em termos computacionais, pois exige menos poder de cálculo. Segundo, permite encontrar soluções únicas mesmo quando o número de ativos é grande diante do tamanho da amostra.

O segundo método seleciona o portfólio ótimo de alocação considerando a estrutura de grupos em um único passo. Isso é possível através da introdução de restrições sobre os grupos de ativos. A penalização absoluta composta de Zhao, Rocha e Yu (2009) explora as diferentes propriedades das normas ℓ_p . Por exemplo, penalizações com $0 < p \leq 1$, induzem esparsidade – em outras palavras, resulta em muitas estimativas iguais a zero. Já para $2 \leq p \leq \infty$, a regularização induz similaridade – ou seja, com resultados que se concentram nas diagonais. Fernandes, Rocha e Souza (2011) propõem a utilização de uma penalização absoluta composta (CAP) no contexto de seleção de carteiras.

Suponha um universo de n ativos particionado em K grupos $\mathcal{G}_k \subset \{1, \dots, n\}$ de n_k ativos, em que $k = 1, \dots, K$. Definimos a penalização composta através de um vetor de parâmetros de norma $P = (p_0, p_1, \dots, p_K)$, onde p_0 define a norma inter-grupos e p_k a norma intra-grupo, para cada grupo $k = 1, \dots, K$:

$$l_P(w) := l_{p_0}(N_P(w)) = \left[\sum_{k=1}^K l_{p_k}(w_{\mathcal{G}_k})^{p_0} \right]^{\frac{1}{p_0}}.$$

Dessa maneira, os parâmetros p_k determinam o comportamento dos pesos dentro de um mesmo grupo de ativos.

Por fim, uma vez definida a restrição CAP, Fernandes, Rocha e Souza (2011) definem o problema de busca do portfólio de mínima variância da seguinte maneira:

$$w_{l_P}^*(\hat{\Sigma}, \delta) = \arg \min_w w' \hat{\Sigma} w \quad (5)$$

$$\text{s. a.} \quad w' \mathbf{1} = 1$$

$$l_P(w) \leq \delta.$$

Em particular, os autores destacam o emprego de $p_0 \in \{1, 2\}$ e $p_k \in \{1, 2\}$ para $k = 1, \dots, K$. Impor uma norma ℓ_1 tanto para a penalização intra-grupos como inter-grupos equivale a uma restrição sobre posições vendidas, do mesmo modo que usar uma norma ℓ_2 para ambas as penalizações encolhe a carteira ótima em direção a uma alocação uniforme com pesos $1/n$ (ver DeMiguel, Garlappi e Uppal, 2009). Normas ℓ_1 para a penalização inter-grupos e ℓ_2 para a penalização intra-grupos induzem a uma carteira ótima com pesos iguais a zero em alguns grupos, porém balanceados dentro de cada classe de ativos. Em contraste, uma penalização

inter-grupos em ℓ_2 combinada com uma penalização ℓ_1 intra-grupos leva a uma carteira ótima com pesos mais uniformes para cada classe de ativos, porém esparsos dentro de cada classe de ativos.

Por fim, vale destacar que, para $p_k \geq 1$, o problema de otimização descrito em (5) é convexo. Isso é importante, pois permite um cálculo relativamente mais eficiente através de métodos computacionais disponíveis.

2.6. Retornos esperados de equilíbrio

A definição dos retornos esperados em modelos de otimização média-variância não é uma tarefa fácil. No entanto, para a resolução de um problema MV, sua determinação é estritamente necessária.

Black e Litterman (1992) apresentam um modelo elegante para a definição dos retornos esperados para o problema de otimização de carteiras. Eles obtêm os retornos esperados de equilíbrio assumindo a existência de uma carteira de investimentos de equilíbrio de longo prazo que satisfaça o modelo de apreçamento de capital (CAPM). Neste caso, os retornos de equilíbrio são aqueles que neutralizariam a demanda e oferta por ativos no mercado, pressupondo que todos os investidores possuam o mesmo conjunto de informação.

A partir da carteira global de ativos do mercado, podemos por otimização reversa encontrar quais os retornos que levam ao equilíbrio. Assumindo ainda a existência de um ativo livre de risco, podemos obter, com base na carteira de mercado de ativos arriscados, os retornos em excesso de equilíbrio.

A solução do modelo de MV descrito em (1) que maximiza a função utilidade quadrática de um investidor é

$$\mathbf{w}^* = (\gamma \Sigma)^{-1} \Pi.$$

Isolando Π , temos

$$\Pi = \gamma \Sigma \mathbf{w}^*, \quad (6)$$

em que \mathbf{w}^* é o vetor de pesos dos ativos de risco, $\mathbf{\Sigma}$ é a matriz de covariância dos excessos de retorno dos ativos de risco, γ é o coeficiente de aversão ao risco global e $\mathbf{\Pi}$ é o vetor de excessos de retorno de equilíbrio de mercado para os ativos de risco. Logo, dado $\mathbf{\Pi}$, os retornos de mercado de equilíbrio μ podem ser diretamente obtidos adicionando-se o retorno do ativo livre de risco R_f :

$$\mu = \mathbf{\Pi} + R_f.$$

3. METODOLOGIA E DADOS

Na seção anterior, revisitamos os tópicos da literatura que embasam a utilização de métodos de regularização, com o objetivo de melhorar a estimação para a alocação ótima de MV. Neste estudo, buscamos analisar o comportamento de alguns destes procedimentos na construção de portfólios ótimos de MV para ativos financeiros negociados no Brasil.

Neste capítulo, detalhamos não apenas os procedimentos que avaliamos empiricamente, mas também a metodologia de comparação dos resultados e os dados empregados.

3.1. Metodologia de análise

O objetivo deste estudo é examinar o comportamento de mecanismos de regularização na construção de carteiras ótimas para ativos financeiros no mercado brasileiro de renda fixa e renda variável. Em particular, contemplamos apenas a construção de carteiras ótimas de média-variância com/sem restrição de vendas a descoberto.

Fixamos o coeficiente de aversão ao risco para o cálculo dos retornos de equilíbrio em 2,5 já que, segundo He e Litterman (1999), corresponde ao coeficiente representativo global. Para o cálculo dos portfólios otimizados, empregamos aversão ao risco de 5,0, como DeMiguel *et al.* (2009). Ademais, vale ressaltar que estes autores mostram que os resultados não se alteram qualitativamente desde que o grau de aversão ao risco seja razoável (mais especificamente, igual a 1, 2, 5 ou 10).

Para os retornos esperados, empregamos a otimização reversa proposta por Black e Litterman (1992) para obter excessos de retorno de equilíbrio para os ativos arriscados. Neste caso, consideramos o CDI como ativo livre de risco. Por sua vez, calculamos a carteira de mercado com base na capitalização de mercado de cada ativo arriscado, levando em conta somente o valor dos ativos disponíveis aos investidores (ou seja, títulos em poder do público no caso de ativos de renda fixa, e ações em circulação no caso de ativos de renda variável). Como estimador inicial da matriz de covariância, usamos a sua contrapartida amostral do retorno dos ativos de risco.

3.2. Portfólios estimados

Assim como sugerido em Fernandes, Rocha e Souza (2011), comparamos o desempenho de quatro estimadores regularizados do portfólio ótimo:

a. Norma ℓ_1

$$w_{\ell_1}^*(\widehat{\Sigma}, \delta) = \arg \max_w w' \mu - \frac{\gamma}{2} w' \widehat{\Sigma} w$$

$$s.a. \quad w' \mathbf{i} = 1$$

$$\|w\|_1 \leq \delta$$

b. Norma ℓ_2

$$w_{\ell_2}^*(\widehat{\Sigma}, \delta) = \arg \max_w w' \mu - \frac{\gamma}{2} w' \widehat{\Sigma} w$$

$$s.a. \quad w' \mathbf{i} = 1$$

$$\|w\|_2 \leq \delta$$

c. Composição de normas $\ell_1 - \ell_2$

$$w_{\ell_{1,2}}^*(\widehat{\Sigma}, \delta) = \arg \max_w w' \mu - \frac{\gamma}{2} w' \widehat{\Sigma} w$$

$$s.a. \quad w' \mathbf{i} = 1$$

$$\|N_2^{\mathcal{G}}(w)\|_1 \leq \delta$$

em que \mathcal{G} é uma dada estrutura de grupo envolvendo K classes de ativos e $N_2^{\mathcal{G}}(w) = [\|w_{\mathcal{G}_1}\|_2 \ \|w_{\mathcal{G}_2}\|_2 \ \dots \ \|w_{\mathcal{G}_K}\|_2]$ é um vetor de dimensão K contendo a norma ℓ_2 dos pesos intra-grupos, com $w_{\mathcal{G}_k}$ denotando os pesos dos ativos pertencentes ao grupo k .

d. Composição de normas $\ell_2 - \ell_1$

$$w_{\ell_{2,1}}^*(\widehat{\Sigma}, \delta) = \arg \max_w \frac{\gamma}{2} w' \widehat{\Sigma} w - w' \mu$$

$$s.t. \quad w' \mathbf{i} = 1$$

$$\|N_1^{\mathcal{G}}(w)\|_2 \leq \delta$$

em que

$N_1^{\mathcal{G}}(w) = [\|w_{\mathcal{G}_1}\|_1 \ \|w_{\mathcal{G}_2}\|_1 \ \dots \ \|w_{\mathcal{G}_K}\|_1]$ é um vetor de dimensão K contendo a norma ℓ_1 dos pesos intra-grupos.

Cabe ressaltar que não há necessidade de se calcular as carteiras ótimas combinando a mesma norma para os pesos inter- e intra-grupos ($\ell_1 - \ell_1$ ou $\ell_2 - \ell_2$), pois equivalem aos portfólios ótimos usando apenas uma norma (ℓ_1 ou ℓ_2 , respectivamente).

Para escolher o valor do parâmetro δ de regularização, usamos cinco critérios alternativos:

Portfólio mais restrito (MR) Escolhe-se o menor valor de δ que satisfaça a restrição orçamentária. Assim, no caso de portfólios penalizados em ℓ_2 , o modelo ignora completamente os dados de entrada e leva o portfólio para a alocação de pesos uniformes ($1/n$). Já no caso de portfólios penalizados em ℓ_1 , o portfólio mais restrito corresponde à carteira ótima de média-variância com restrição a posições vendidas.

Portfólio com K validações cruzadas variância mínima (VCV) Divide-se inicialmente o conjunto de observações em K subamostras e estima-se o peso ótimo $w(\delta)$ para o k -ésimo subconjunto a partir de uma grade de valores de δ , usando as observações não contidas na k -ésima subamostra. Calcula-se então a variância fora da amostra da carteira com peso $w(\delta)$ usando as observações da k -ésima subamostra, para $k=1, \dots, K$. Por fim, escolhe-se o valor de δ que minimiza a variância média fora da amostra. Em estudos anteriores, DeMiguel et al. (2009) empregaram K igual ao tamanho da amostra, numa estratégia conhecida como *jackknife*; Fernandes, Rocha e Souza (2011) empregaram $K = 5$. Em nossa análise, usamos $K = 4$ subamostras.

Portfólio com K validações cruzadas máximo Sharpe (VCS) Divide-se inicialmente o conjunto de observações em K subamostras e estima-se o peso ótimo $w(\delta)$ para o k -ésimo subconjunto a partir de uma grade de valores de δ , usando as observações não contidas na k -ésima subamostra. Calcula-se então o Sharpe fora da amostra da carteira com peso $w(\delta)$ usando as observações da k -ésima subamostra, para $k=1, \dots, K$. Por fim, escolhe-se o valor de δ que maximiza o Sharpe médio fora da amostra. Em nossa análise, usamos $K = 4$ subamostras.

Portfólio de Máximo Retorno (MaxRet) Escolhe-se o valor de δ que apresenta o maior retorno no mês anterior. Campbell *et al.* (1997) enunciam que, apesar dos retornos individuais dos ativos serem fracos e negativamente autocorrelacionados, os retornos de portfólios são fortes e positivamente autocorrelacionados.

Portfólio Mais Relaxado (MRelax) Escolhe-se o valor de δ a partir do qual a penalização deixa de existir.

Para o cálculo dos portfólios ótimos e a obtenção de seus respectivos desempenhos fora da amostra, adotamos a seguinte metodologia. No instante t , calculamos cada estimador da carteira ótima usando a matriz de covariância amostral entre $t-i$ e t (sendo i o tamanho da janela de estimação) e uma grade de valores para δ . Em seguida, aplicamos os critérios de seleção acima para obter o valor de δ . Dessa maneira, para cada método de penalização, em cada instante t , encontramos 5 estimadores diferentes do portfólio ótimo. Avaliamos cada um desses portfólios na amostra de dados entre $t+1$ e $t+j$ (sendo j o número de observações da janela de avaliação fora da amostra). Repetimos esse processo calculando novamente os portfólios para cada método e critério em $t+j$. A aplicação consecutiva do processo acima descrito gera uma trajetória de desempenho fora da amostra para cada estimador do portfólio ótimo.

3.3. Critérios de avaliação dos resultados

Consideramos como portfólios de referência as carteiras ótimas de média-variância de Markowitz sem e com restrição a vendas a descoberto (**MarkI** e **MarkR**, respectivamente), usando a matriz de covariância amostral e os retornos esperados de equilíbrio.

A comparação dos portfólios dá-se através de dois critérios:

- i. **Retorno médio:** a média da trajetória de retorno dos portfólios é calculada como segue:

$$\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T w_t^T R_t.$$

- ii. **Variância:** a variância da trajetória de retorno dos portfólios é calculada como segue:

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (w_t^T R_t - \bar{r})^2$$

- iii. **Índice de Sharpe:** Aqui, o índice é calculado empregando-se o retorno médio ao invés do excesso de retorno sobre o ativo livre de risco, de maneira a não inviabilizar a comparação de carteiras cujo excesso de retorno médio seja negativo.

$$S = \frac{\bar{r}}{\sigma_r}$$

A significância estatística dos retornos médios dos portfólios penalizados em relação ao portfólio benchmark é calculada utilizando o teste t para dados emparelhados. Testamos aqui a hipótese nula de igualdade do retorno médio entre dois portfólios i e j , $H_0: \bar{r}_i = \bar{r}_j$.

A significância estatística da comparação entre variâncias é calculada empregando o teste de hipótese robusto proposto por Ledoit e Wolf (2011)¹, para testes quando os retornos são correlacionados e possuem caudas pesadas. Trata-se de um método baseado em intervalos de confiança studentizados através de um algoritmo de bootstrap em bloco para a razão de duas variâncias. Para tanto, utilizamos $B=1.000$ amostras de bootstrap com blocos circulares de 5 observações. Assim, testamos a igualdade das variâncias de dois portfólios i e j conforme a hipótese nula:

$$H_0: \frac{\sigma_i}{\sigma_j} = 1.$$

Já os índices de Sharpe foram comparados utilizando-se intervalos de confiança baseados no procedimento de bootstrap proposto por Ledoit e Wolf (2008)². Utilizamos $B=1.000$ amostras de bootstrap com blocos circulares de 5 observações. A hipótese nula correspondente é $H_0: S_i = S_j$.

^{1,2} Para implementação dos testes, utilizamos os códigos em Matlab disponíveis no *site* dos autores: < <http://www.econ.uzh.ch/faculty/wolf/publications/RobustVarMatlab.zip> > e < <http://www.econ.uzh.ch/faculty/wolf/publications/RobustSharpeMatlab.zip> >. Acesso em: 10 out. 2014.

3.4. Descrição dos dados

A estimação dos parâmetros de entrada para utilização em modelos MV é ainda mais desafiadora no mercado brasileiro, porque o mercado local carece de séries de dados consistentes e/ou suficientemente longas. Comparado aos mercados desenvolvidos, o mercado brasileiro tem histórico curto. O mercado acionário brasileiro passou a se consolidar e ter profundidade apenas após a década de 90. Na renda fixa, podemos tomar como exemplos alguns títulos públicos atrelados à inflação (NTN-B) emitidos apenas após o ano 2002 e o incipiente mercado de crédito corporativo local, caracterizado por um mercado secundário altamente restrito. Além disso, mesmo nos casos em que se pode obter séries longas de retornos, as mudanças de regime (da hiperinflação da década de 80 à estabilidade alcançada nos anos 90, passando pela maxidesvalorização cambial e por choques de taxas de juros) acabam dificultando sua utilização. Assim, vemo-nos restritos a utilizar séries históricas de retornos de ativos financeiros que dificilmente superam uma década de negociação com liquidez suficiente. Logo, a identificação de modelos mais eficientes na estimação de médias, variâncias e covariâncias para ativos financeiros brasileiros torna-se ainda mais relevante.

Outro ponto de motivação para a realização deste estudo envolve a escolha das séries de retornos empregadas no modelo de otimização. Tradicionalmente, quando se busca definir a alocação ótima de um investidor com relação a um conjunto de classes de ativos, escolhe-se como *proxy* para cada classe um índice financeiro que possa ser tomado como referência representativa desta classe. Dessa maneira, reduz-se a dimensão dos parâmetros de entrada dos modelos.

Contudo, caso o investidor possua restrições específicas para determinadas classes de ativos, o emprego de índices de referência pode não ser a alternativa mais adequada. Neste caso, deve-se considerar todos os ativos elegíveis ao investimento por parte do investidor, e ainda considerar as restrições impostas pelo investidor na estimação da alocação ótima. Isso pode aumentar sobremaneira a quantidade de séries de retornos para as quais deve-se estimar os parâmetros de entrada (a saber, médias, variâncias e covariâncias). Ora, no caso brasileiro, encontramos aqui numa situação delicada, pois precisamos estimar um número significativo de parâmetros a partir de amostras relativamente pequenas.

Detalhamos a seguir as séries de dados que usamos para cada classe de ativos, destacando suas principais características e limitações.

3.4.1. Ativos de renda fixa

Separamos os ativos de renda fixa em dois grandes grupos, a saber, títulos da dívida pública mobiliária federal e títulos de crédito privado. Em particular, consideramos os títulos mais representativos (de maior estoque disponível ao público e sendo ainda emitidos) da Dívida Pública Federal Interna, emitida localmente e em reais. Trata-se portanto dos seguintes títulos (SILVA, CARVALHO, MEDEIROS, 2009):

LFTs Letras Financeiras do Tesouro são títulos pós-fixados, remunerados diariamente segundo a taxa média ponderada das operações compromissadas por um dia, lastreadas em títulos públicos federais, e apuradas pelo Sistema Especial de Liquidação e Custódia (SELIC).

LTNs Letras do Tesouro Nacional são títulos pré-fixados, que não pagam cupom periódico, sendo portanto negociados com deságio em relação ao seu preço no vencimento. O vencimento destes papéis não supera 5 anos.

NTN-Fs Notas do Tesouro Nacional da série F são títulos pré-fixados, emitidos para prazos mais longos (até 11 anos), remunerando segundo a taxa de juros paga no ato de sua compra. Além disso, estes papéis pagam cupom semestral de 10% ao ano, calculados sobre o valor nominal de R\$ 1.000,00 por papel, com principal devolvido no vencimento. Estes papéis começaram a ser emitidos em 2003, com intuito de alongar a dívida pré-fixada.

NTN-Bs Notas do Tesouro Nacional da série B são títulos remunerados a juros reais, ou seja, pagam os juros acordados no ato da compra, corrigidos pela inflação corrente medida pelo Índice de Preços ao Consumidor – Amplo (IPCA). Pagam cupom semestral de 6% ao ano, corrigidos pelo IPCA, além do principal no vencimento.

Tabela 1 - Estoque da Dívida Pública Federal Interna (em R\$ Bilhões)

Títulos	Dez/13	Ago/14	Set/14	
LFT	395,06	428,47	390,66	18,79%
LTN	645,14	640,51	667,78	32,12%
NTN-B	649,72	671,18	681,14	32,76%
NTN-F	232,98	229,86	232,44	11,18%
NTN-C ³	69,33	69,03	69,74	3,35%
Demais	35,68	36,27	37,27	1,80%
Total	2.028,13	2.075,11	2.079,02	100,00%

Fonte: Relatório Mensal da Dívida Pública – Setembro/2014 (Tesouro Nacional)

Como podemos notar na Tabela 1, as letras e notas do Tesouro Nacional somavam em setembro de 2014 94,85% da Dívida Pública Federal Interna.

Entretanto, a utilização direta dos preços dos títulos públicos no modelo de otimização é impraticável. Como estes papéis possuem maturidades definidas, sua natureza muda ao longo do tempo, não apenas pelo declínio de sua duração, mas também pelas descontinuidades nas séries.

Uma alternativa seria a consideração dos índices financeiros da família IMA (Índices de Mercado ANBIMA), que congregam títulos públicos federais de mesma característica (pré-fixados, pós-fixados ou indexados à inflação), e são construídos sob o princípio da ponderação pela capitalização de mercado de cada título. Assim, a família IMA acaba por espelhar, de maneira geral, o perfil da dívida mobiliária federal, sendo portanto impactada pelas evoluções no tempo desta última. Nessa linha, o alongamento do prazo médio da dívida ao longo dos últimos 15 anos teve um impacto significativo na duração de índices com componentes pré-fixados. Por exemplo, a duração média do IMA-B (índice agregando NTN-Bs) aumentou de 4,2 anos em 02 de janeiro de 2006 para 7,6 anos em 30 de setembro de 2014. A utilização de índices da família IMA não evitaria, portanto, o problema de duração variando no tempo.

Felizmente, a ANBIMA calcula uma outra família de índices mais adequada para nossa análise. Tratam-se dos Índices de Duração Constante ANBIMA (IDkAs), que são criados a partir de

³ Notas do Tesouro Nacional da série C (NTN-Cs) são títulos remunerados a juros reais, ou seja, pagam os juros acordados no ato da compra, corrigidos pela inflação corrente medida pelo Índice Geral de Preços – Mercado (IGP-M). Pagam cupom semestral de 6% ao ano, corrigidos pelo IGP-M, além do principal no vencimento.

vértices das curvas de juros nominal e real brasileiras. As taxas de juros nominais são calculadas a partir das taxas implícitas nos títulos públicos pré-fixados (LTNs e NTN-Fs), enquanto que as taxas reais refletem os títulos indexados à inflação (NTN-Bs). Estes índices são portanto sintéticos, e não diretamente negociáveis. A Tabela 2 lista os índices IDkA publicados pela ANBIMA desde em 2009, apesar de retroativamente calculados até o início de 2006.

Tabela 2 – Família de índices IDkA

Índice	Vértice (em dias úteis)	Curva
<i>Segmento Pré-fixado</i>		
IDkA Pré 3M	63	Nominal
IDkA Pré 1A	252	
IDkA Pré 2A	504	
IDkA Pré 3A	756	
IDkA Pré 5A	1.260	
<i>Segmento IPCA</i>		
IDkA IPCA 2A	504	Real
IDkA IPCA 3A	756	
IDkA IPCA 5A	1260	
IDkA IPCA 10A	2520	
IDkA IPCA 15A	3780	
IDkA IPCA 20A	5040	
IDkA IPCA 30A	7560	

Fonte: ANBIMA (2013)

Como *proxy* para os títulos pós-fixados (e ativo livre de risco, quando aplicável), empregamos a série histórica do Certificado de Depósito Interbancário (CDI). Trata-se da média apurada diariamente das taxas de juros dos empréstimos realizados entre instituições financeiras, com o prazo de um dia, calculada e divulgada pela CETIP.

Já quanto aos ativos de crédito privado, a falta de um mercado secundário expressivo de títulos dessa categoria dificulta a marcação a mercado e, por conseguinte, a criação de índices representativos. Num esforço para se ter um indicador válido para esta classe de ativos, a ANBIMA criou em janeiro de 2009 a família de Índices de Debêntures (IDA), cuja composição listamos na Tabela 3.

Tabela 3 – Família de índices IDA

Índice	Composição
IDA-Geral	debêntures da amostra da ANBIMA
IDA-DI	debêntures Percentual do DI e DI + <i>Spread</i>
IDA-IPCA	debêntures IPCA + <i>Spread</i>
IDA-IGPM	debêntures IGP-M + <i>Spread</i>

Fonte: ANBIMA (2014)

Suas carteiras teóricas são revisadas mensalmente, com a participação de cada papel na carteira ponderada por seu estoque financeiro em mercado. ANBIMA (2014) documenta que os critérios para a elegibilidade de títulos são:

- Ser precificado pela ANBIMA;
- Ter volume emitido igual ou superior a R\$ 100 milhões;
- Apresentar prazo para vencimento superior a um mês na data de rebalanceamento da carteira;
- Ter classificação de risco mínima BBB (*investment grade*);
- Estar em dia com os pagamentos das parcelas integrantes do fluxo de caixa;
- Fazer parte da amostra de precificação de debêntures pelo menos dois dias úteis antes da data de rebalanceamento.

Tais critérios acabam por restringir sensivelmente a abrangência do estoque de títulos empregados nos índices, em relação ao estoque geral de debêntures em mercado. A família IDA abrangia em setembro de 2014 um total de R\$ 51,4 bilhões, enquanto o volume total de debêntures em mercado somava R\$ 649,7 bilhões. Apesar de corresponder a uma parcela pequena do mercado de crédito privado, os índices da família IDA são os únicos disponíveis para o mercado brasileiro. Na análise empírica da seção 4 utilizamos os índices IDA-DI, IDA-IPCA e IDA-IGPM.

3.4.2. Ativos de renda variável

Na classe de ativos de renda variável, consideramos apenas as ações constituintes da carteira do Índice Brasil 100 (IBrX100) da BM&FBovespa em 30 de setembro de 2014. Trata-se de um índice representativo do mercado acionário brasileiro, composto pelos 100 papéis mais

negociados na BM&FBovespa. No Anexo A listamos o código de cada ação, seguido do nome da empresa, seu peso na carteira do IBrX100, e a data de início de sua série histórica.

3.4.3. Resumo dos ativos

Em suma, listamos na Tabela 4 os ativos e índices elegíveis a serem empregados na análise dos portfólios ótimos.

Tabela 4 – Ativos e Índices elegíveis

Classe	Ativos	Histórico
Renda Fixa Pós-Fixado	CDI	Anterior a 02/01/2006
Renda Fixa Crédito Privado	IDA-DI	05/01/2009
	IDA-IGPM	05/01/2009
	IDA-IPCA	05/01/2009
Renda Fixa Prefixada	IDkA Pré 3M	02/01/2006
	IDkA Pré 1A	02/01/2006
	IDkA Pré 2A	02/01/2006
	IDkA Pré 3A	02/01/2006
	IDkA Pré 5A	02/01/2006
Renda Fixa indexada IPCA	IDkA IPCA 2A	02/01/2006
	IDkA IPCA 3A	02/01/2006
	IDkA IPCA 5A	02/01/2006
	IDkA IPCA 10A	02/01/2006
	IDkA IPCA 15A	02/01/2006
	IDkA IPCA 20A	02/01/2006
	IDkA IPCA 30A	02/01/2006
Renda Variável	Ações do IBrX	
	51 ações (76,5% do índice)	Anterior a 02/01/2006
	84 ações (90,2% do índice)	Anterior a 05/01/2009

3.4.4. Carteira de mercado de ativos arriscados

Para que possamos calcular os retornos de equilíbrio à la Black e Litterman (1992), é necessário construir a carteira de mercado de ativos de risco e definir o ativo livre de risco. Como *proxy* para o último, utilizamos o CDI. Já para a carteira de mercado ponderamos a participação de cada ativo pela sua capitalização, a preços de mercado, na respectiva data de cálculo. Assim, para o mercado acionário, multiplicamos a quantidade de ações disponíveis para negociação pelo preço de mercado de fechamento (fonte: Bloomberg). Para os índices de Renda Fixa Crédito Privado, empregamos a capitalização de mercado da família IDA divulgada diariamente pela ANBIMA. Os índices IDkA são sintéticos e, portanto, não possuem valor de mercado. No entanto, a partir dos estoques de títulos da Dívida Pública Federal Interna (NTN-Bs, NTN-Fs e LTNs), é possível calcular o valor de mercado disponível ao público para cada vértice mapeado pelos índices da família IDkA. De maneira geral, mapeamos o fluxo de pagamento de cada título público e distribuímos proporcionalmente entre os dois vértices dos índices mais próximos (ver, para maiores detalhes, o Apêndice A).

Como o Tesouro Nacional divulga os estoques da Dívida Pública Federal Interna apenas no último dia útil de cada mês, restringimo-nos ao cálculo de carteiras de mercado mensais. Além disso, os históricos de estoques por tipo de título e vencimento estão disponíveis somente a partir de janeiro de 2010.

4. IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS

Nesta seção, descrevemos inicialmente o processo de implementação da análise de desempenho. Na sequência, discutimos os resultados empíricos.

Realizamos a implementação a partir de uma janela de dados que permitisse o uso do maior número de ativos e/ou índices dentre os elegíveis para investimento. Portanto, trata-se da coleção de retornos diários entre 05 de janeiro de 2009 e 31 de outubro de 2014. Para este intervalo, somos capazes de considerar 100 ativos diferentes, sendo 84 ações individuais e 16 índices de renda fixa.

A definição dos grupos de ativos foi feita respeitando-se as respectivas classes de ativos, conforme descrito na Tabela 4. Logo, empregamos na análise 5 grupos de ativos distintos.

4.1. Portfólios de mercado e prêmios de risco

Calculamos a composição do portfólio de mercado de ativos arriscados para o último dia útil de cada mês, a partir de 31/12/2009 e até 30/09/2014. O Gráfico 1 mostra a evolução desta carteira ao longo da janela estudada, agrupada segundo os grupos de ativos definidos. A alocação em renda variável exibe a maior variação, tendo o seu ponto máximo no início da série (65,9% da carteira), e atingindo um mínimo de 49,5% em junho de 2013.

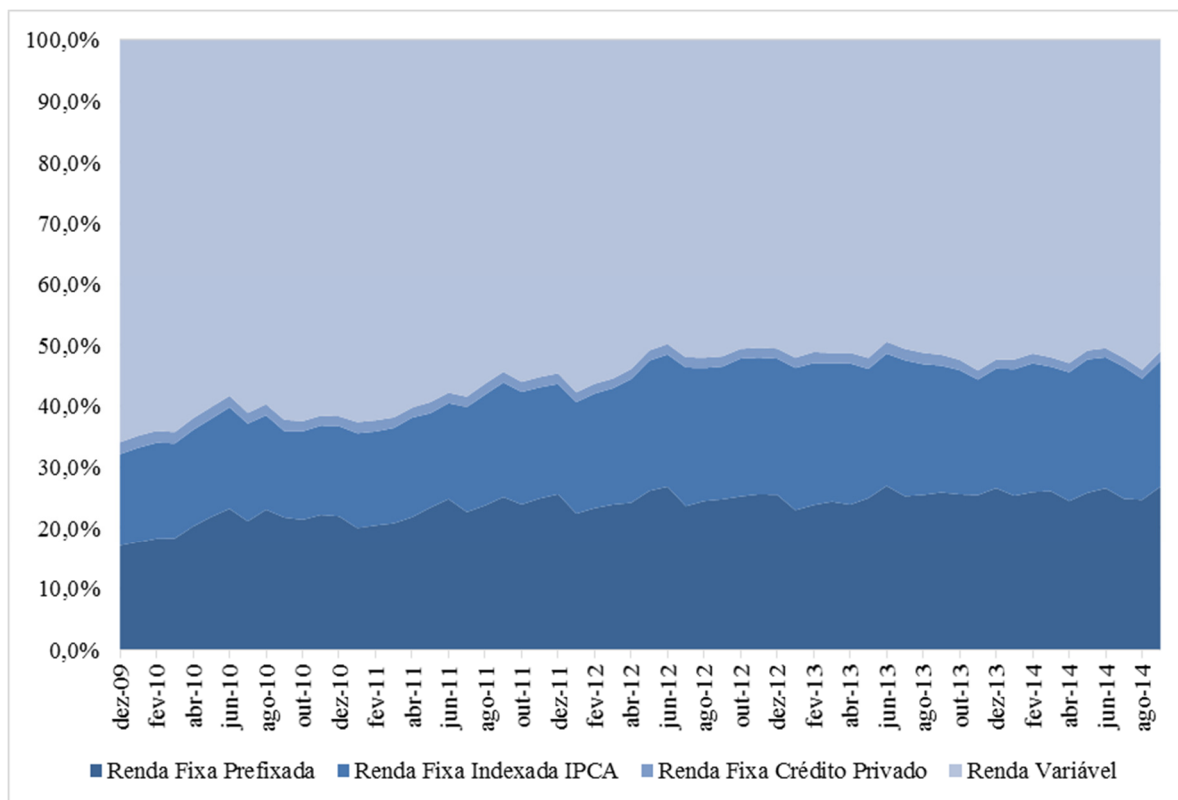


Gráfico 1 – Evolução da Carteira de Mercado de ativos arriscados – dez.2009 a set.2014

A alocação nos vértices de renda fixa prefixada e indexada ao IPCA apresenta contínuo aumento. O grupo prefixado inicia a série compondo 17,1% do portfólio de mercado (seu ponto mínimo), e finaliza com uma alocação de 26,8% - tendo como máximo 26,9% em junho de 2013. Já o grupo indexado ao IPCA inicia a série representando 15,1% da carteira, atinge seu mínimo de 14,1% em setembro de 2010, mas finaliza em 20,6% após chegar a representar 23,3% do portfólio de risco em janeiro de 2013.

O grupo Renda Fixa Crédito Privado tem a menor variação ao longo da janela. Inicia correspondendo a 2,0% da alocação (coincidindo com seu ponto máximo), atinge uma alocação mínima de 1,5% em julho de 2014, e termina a série correspondendo a 1,6% do portfólio.

Com base nas alocações de mercado, calculamos segundo a equação (6) os prêmios de risco para cada ativo. Tais prêmios foram obtidos utilizando-se um coeficiente de aversão ao risco de 2,5 e a matriz de covariância amostral dos últimos 252 dias.

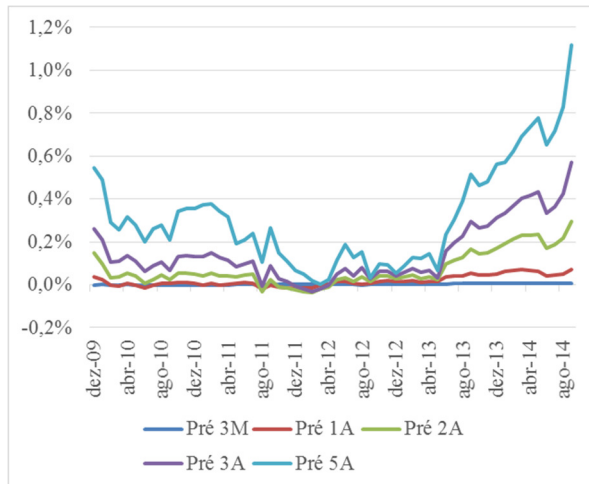


Gráfico 2 – Evolução do prêmio de risco dos ativos do grupo Renda Fixa Prefixada

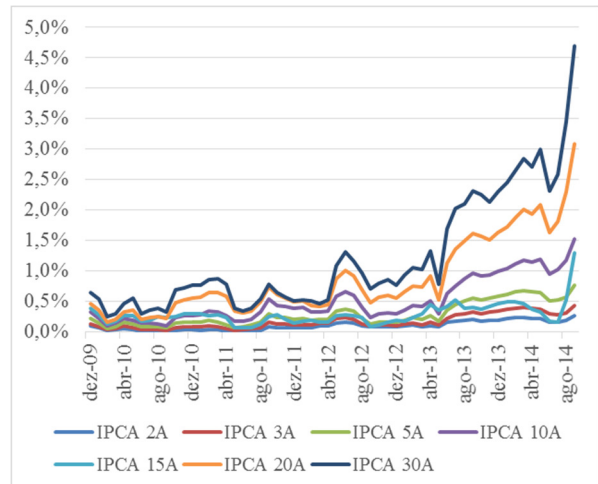


Gráfico 3 - Evolução do prêmio de risco dos ativos do grupo Renda Fixa indexada IPCA

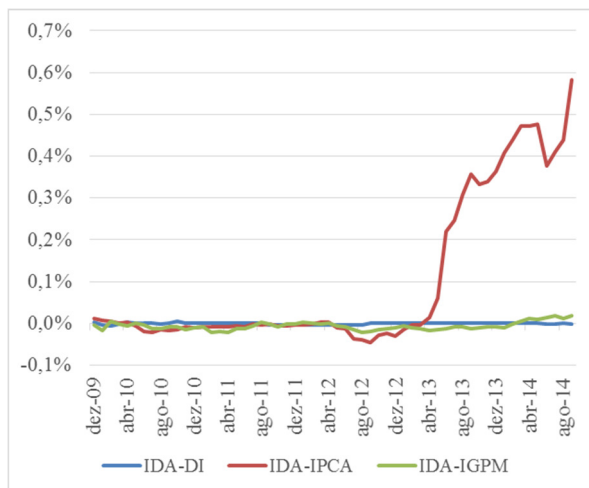


Gráfico 4 - Evolução do prêmio de risco dos ativos do grupo Renda Fixa Crédito Privado

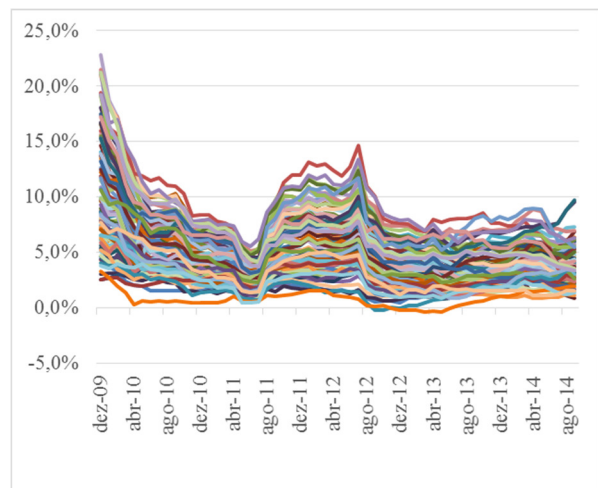


Gráfico 5 - Evolução do prêmio de risco dos ativos do grupo Renda Variável

Entre os ativos dos grupos de renda fixa, podemos notar um aumento dos prêmios de risco anualizados a partir de maio de 2013. Trata-se de um reflexo do aumento de volatilidade destes ativos a partir de tal data, devido a fortes movimentos de abertura da taxa de juros brasileira. Por conseguinte, o modelo de equilíbrio de Black e Litterman (1992) passa a associar maiores prêmios de risco aos ativos com maior sensibilidade ao risco de juros (ou seja, os ativos com maior duração).

Os ativos de renda variável, por sua vez, apresentam prêmio de risco médio ao longo da janela de observações de 4,8% ao ano. Individualmente, estes ativos atingem prêmio máximo de 22,8% ao ano e mínimo de -0,4% ao ano. Também podemos observar que estes ativos exibem prêmios máximos no primeiro ponto da amostra (dezembro de 2009), refletindo a alta

volatilidade da classe neste período devido à recuperação do mercado acionário depois das fortes perdas durante a crise de 2008. À medida que as observações de 2009 deixam de figurar na amostra, os retornos em excesso voltam para níveis entre 0% e 15% ao ano.

Para encontrar os retornos de equilíbrio dos ativos, somamos aos prêmios o retorno diário projetado pelo Futuro de DI de um mês, que também usamos como retorno esperado para o CDI.

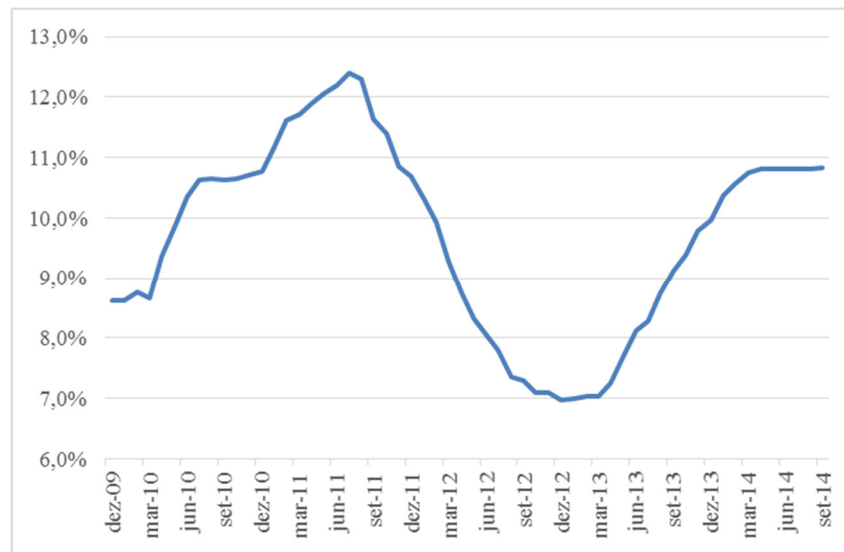


Gráfico 6 – Evolução do retorno anualizado do CDI (Futuro de DI de 30 dias)

4.2. Resultados obtidos para os portfólios otimizados

Uma vez obtidos os retornos de equilíbrio para cada ativo, calculamos os portfólios otimizados. Ao final de cada mês, construímos cinco portfólios penalizados, segundo os diferentes critérios de escolha do parâmetro de regularização.

Como utilizamos apenas restrições sobre as normas dos tipos ℓ_1 e ℓ_2 , as carteiras são calculadas segundo um problema de otimização convexo. Assim como em Fernandes, Rocha e Souza (2011), para calcular um caminho de portfólios para uma dada penalização e *grid* de δ , calculamos inicialmente o valor mínimo que a restrição pode assumir sobre o hiperplano $w^T i = 1$. A partir deste ponto, aumentamos o valor de δ progressivamente, até que o multiplicador de Lagrange referente à restrição aplicada seja numericamente igual a zero. Para o cálculo do valor

inicial de δ e o caminho de portfólios no *grid*, empregamos o pacote de otimização convexa CVX para Matlab (GRANT, BOYD, 2008, 2014).

Cada portfólio calculado ao final de um dado mês é aplicado ao longo do mês subsequente, ao final do qual calculamos uma nova carteira para o mês seguinte. Assim, para cada portfólio penalizado e critério de seleção de δ , temos uma trajetória de retornos diários, cuja carteira é rebalanceada mensalmente.

Portanto, podemos finalmente calcular, para cada trajetória, a sua variância diária e seu índice de Sharpe. Para servirem como *benchmark* em relação os portfólios penalizados, calculamos portfólios média-variância de Markowitz, com e sem restrição a posições vendidas (**MarkR** e **MarkI**, respectivamente).

A Tabela 5 reporta retorno médio, variância e índice de Sharpe de cada carteira otimizada. Dentre os dois portfólios de referência, a carteira de média-variância de Markowitz com restrição a posições vendidas possui o maior índice de Sharpe: logo, empregamo-la como referência para a comparação com as demais carteiras.

Começamos pela análise dos resultados dos portfólios penalizados do tipo ℓ_1 . Para nenhum dos critérios empregados para a escolha de δ , esta penalização é capaz de superar a performance do portfólio **MarkR**. No entanto, tais portfólios apresentam resultados muito próximos aos do *benchmark*, sendo que a carteira mais restrita **MR** coincide com o próprio *benchmark* – em outras palavras, o portfólio **MarkR** é um caso particular do portfólio penalizado do tipo ℓ_1 , para o qual a penalização é máxima. Ademais, a carteira mais relaxada **MRelax** coincide com o portfólio **MarkI** – sendo este também o caso particular no qual a restrição sobre a norma ℓ_1 inexistente.

Prosseguindo a análise, os portfólios penalizados do tipo ℓ_2 obtêm retornos médios superiores a **MarkR**, a menos do portfólio mais restrito. Ademais, no caso dos critérios **MRelax**, **VCV** e **VCS**, os retornos médios superiores são estatisticamente diferentes dos do portfólio de referência. Se observarmos o Sharpe das carteiras, vemos que o mais relaxado (**MRelax**) é superior ao benchmark, e estatisticamente significativo. Além dele, os índices de Sharpe dos portfólios **VCV** e **VCS** também são superiores ao do benchmark, porém sem significância estatística.

Até aqui, analisamos os resultados de portfólios otimizados sem o emprego da informação de grupos de ativos. Passemos então à análise daqueles que empregaram tal informação, a começar pelos portfólios penalizados do tipo $\ell_1 - \ell_2$. Trata-se aqui de carteiras sob as quais foi imposta a restrição sobre a norma ℓ_1 inter-grupos de ativos, e restrição sobre a norma ℓ_2 intra-grupos de ativos. Neste caso, temos que, a menos do portfólio mais restrito, todos os demais apresentam retornos superiores ao do benchmark. Além disso, tais retornos também são superiores, quando comparados aos respectivos portfólios calculados segundo penalização ℓ_2 . Por fim, a carteira calculada segundo o critério mais relaxado obteve Sharpe superior ao **MarkR**, e estatisticamente diferente. Ademais, o portfólio **VCV**, calculado sob o critério de validação cruzada da variância mínima, também obteve Sharpe superior, porém com baixa significância estatística.

Por fim, analisemos o caso de penalização do tipo $\ell_2 - \ell_1$. Nestes portfólios, aplica-se a restrição sobre a norma ℓ_2 inter-grupos de ativos, enquanto a penalização ℓ_1 foi aplicada intra-grupos de ativos. Em termos de retorno médio, estes portfólios apresentam resultados levemente superiores ao do portfólio **MarkR**, mas com baixa significância estatística (a menos do caso mais relaxado, cujo retorno foi inferior). Por sua vez, em termos de Sharpe, todos os portfólios calculados, a menos do **MRelax**, obtiveram Sharpe maior do que o benchmark, e estatisticamente significante para um nível de 10%.

Tabela 5 - Resultados - Janela de dados 02/01/2009 - 31/10/2014

	Retorno Médio	Variância (x1000)	Sharpe
Portfólios Benchmark			
MarkR	0,0310%	0,0129	0,0861
MarkI	0,0306%	0,0129	0,0852
<i>p-valor</i>	(0,00)	(1,00)	(0,00)
Portfólios Penalizados			
ℓ_1			
MR	0,0310%	0,0129	0,0861
	(1,00)	(1,00)	(1,00)
MRelax	0,0306%	0,0129	0,0852
	(0,00)	(1,00)	(0,00)
MaxRet	0,0310%	0,0129	0,0861
	(0,28)	(0,52)	(0,46)
VCV	0,0310%	0,0129	0,0861
	(0,32)	(0,56)	(0,71)
VCS	0,0310%	0,0129	0,0861
	(0,01)	(1,00)	(0,05)
ℓ_2			
MR	0,0275%	0,0951	0,0283
	(0,86)	(1,00)	(0,00)
MRelax	0,0338%	0,0130	0,0938
	(0,00)	(0,04)	(0,00)
MaxRet	0,0432%	0,0373	0,0708
	(0,22)	(1,00)	(0,31)
VCV	0,0472%	0,0269	0,0910
	(0,01)	(1,00)	(0,65)
VCS	0,0457%	0,0272	0,0878
	(0,02)	(1,00)	(0,88)
$\ell_1 - \ell_2$			
MR	0,0236%	0,1311	0,0206
	(0,76)	(1,00)	(0,00)
MRelax	0,0348%	0,0130	0,0963
	(0,00)	(0,05)	(0,00)
MaxRet	0,0457%	0,0505	0,0643
	(0,26)	(1,00)	(0,21)
VCV	0,0508%	0,0289	0,0945
	(0,01)	(1,00)	(0,52)
VCS	0,0460%	0,0394	0,0733
	(0,13)	(1,00)	(0,37)
$\ell_2 - \ell_1$			
MR	0,0316%	0,0103	0,0985
	(0,75)	(1,00)	(0,03)
MRelax	0,0306%	0,0129	0,0852
	(0,00)	(1,00)	(0,00)
MaxRet	0,0319%	0,0114	0,0944
	(0,52)	(1,00)	(0,08)
VCV	0,0315%	0,0112	0,0940
	(0,75)	(1,00)	(0,07)
VCS	0,0317%	0,0115	0,0936
	(0,61)	(1,00)	(0,06)

Notas: A Tabela 5 apresenta os resultados de retorno médio, variância (multiplicada por 1000) e índice de Sharpe para os portfólios estudados. MarkR é o portfólio de Markowitz com restrição a posições vendidas, MarkI é o portfólio de Markowitz Irrestrito, MR refere-se aos portfólios “Mais Restritos”, MRelax refere-se aos “Mais Relaxados”, MaxRet corresponde a “Máximo Retorno no período anterior”, VCV corresponde a “Validação Cruzada da Variância” e VCS refere-se à “Validação Cruzada do índice de Sharpe”. Os portfólios ℓ_i são obtidos penalizando as normas de grau i (sem emprego da estrutura de grupos de ativos), enquanto $\ell_i - \ell_j$ refere-se, em geral, a portfólios com penalização ℓ_i entre grupos e penalização ℓ_j intra-grupos. Abaixo de cada estimativa está o respectivo p-valor em parênteses, calculado sob a hipótese de igualdade da medida calculada em relação ao portfólio benchmark (MarkR).

No Gráfico 7, apresentamos o desempenho acumulado de cada um dos portfólios calculados, no período definido entre 04/01/2010 e 31/10/2014. A legenda encontra-se ordenada pelo retorno acumulado.

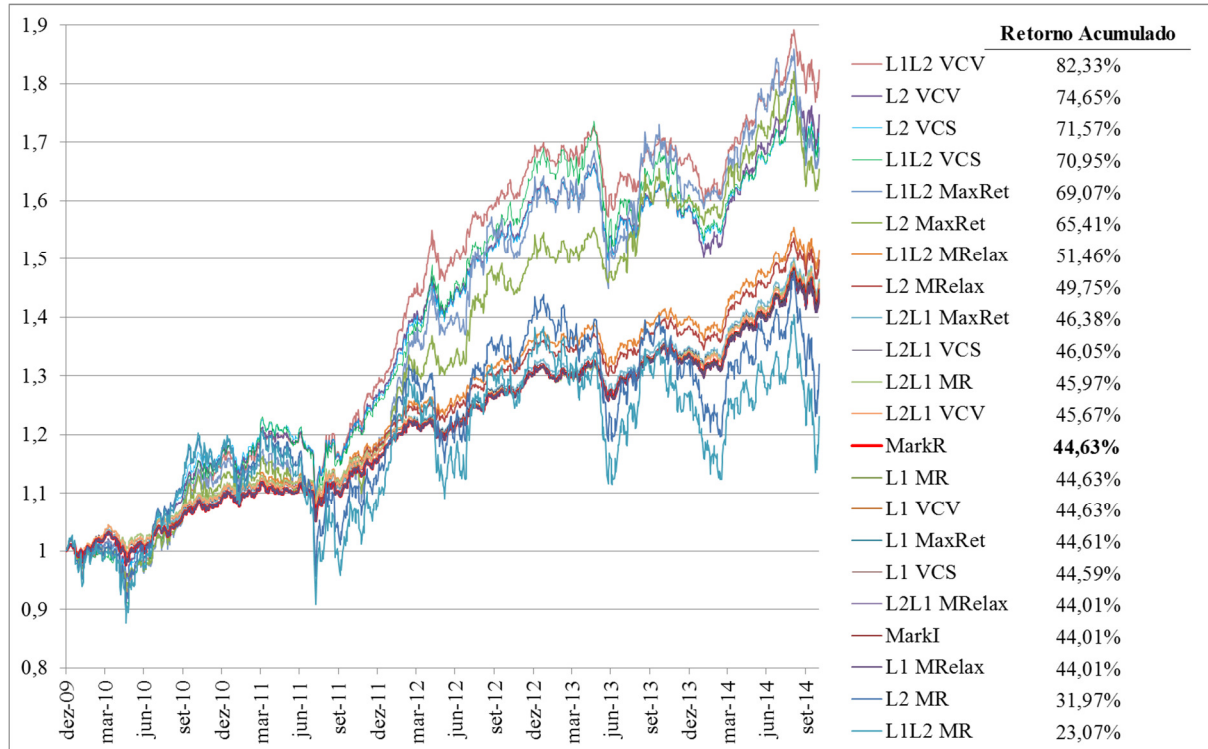


Gráfico 7 – Retorno acumulado dos portfólios calculados (dez/2009 – out/2014)

Podemos notar que a inclusão de informações de grupos de ativos leva a melhores resultados aos portfólios penalizados em relação ao portfólio benchmark. Além disso, os portfólios penalizados segundo a norma ℓ_2 também, em geral, mostraram-se superiores à carteira **MarkR**.

4.3. Portfólios com desempenho acima do CDI

Na gestão de carteiras diversificadas em classes de ativos no mercado brasileiro (seja na administração de portfólios de indivíduos e investidores institucionais, ou mesmo na indústria local de fundos multimercados), é habitual a comparação do desempenho de um portfólio em relação ao CDI. Apresentamos então, na análise que segue, o desempenho do conjunto de carteiras que exibem performance acima do CDI na janela estudada. Destacamos ainda que, no escopo deste estudo, não incluímos nas análises os possíveis custos de transação incorridos.

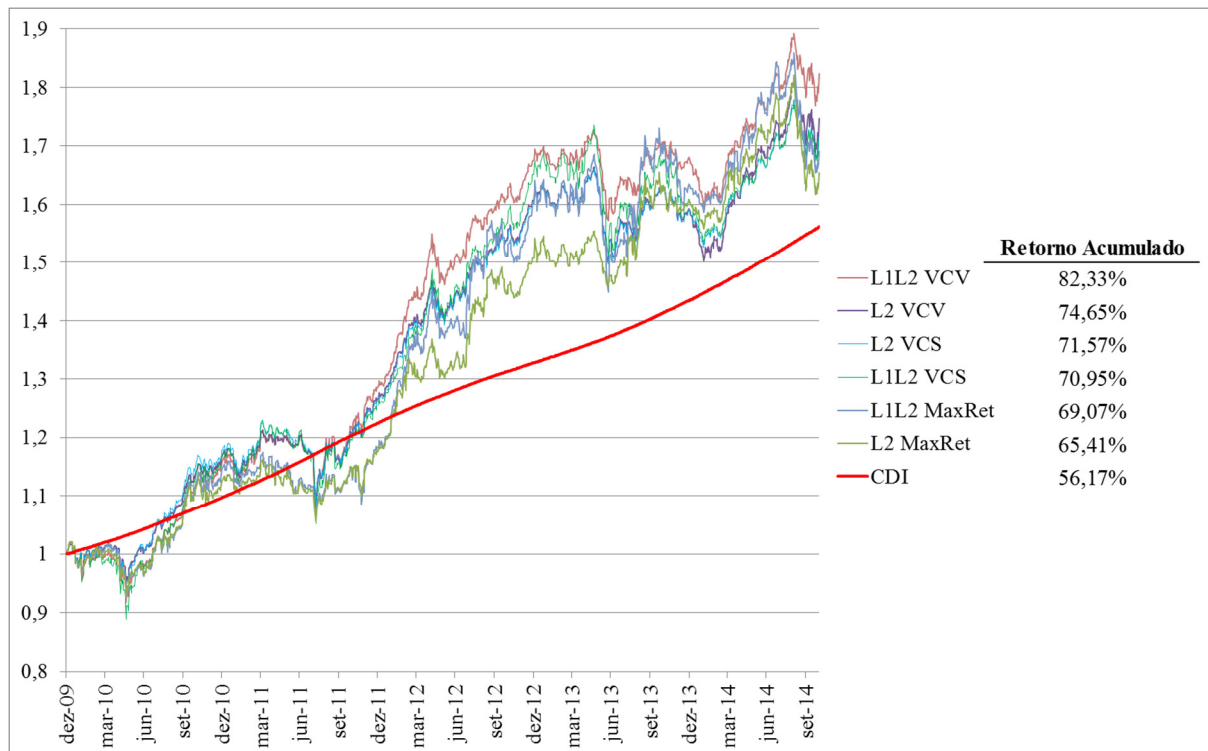


Gráfico 8 – Retorno acumulado dos portfólios calculado que superam o CDI (dez/2009 - out/2014)

Como podemos observar no Gráfico 8, temos evidências de portfólios penalizados capazes de superar o CDI no período entre dezembro de 2009 e outubro de 2014. Estas carteiras foram obtidas através de penalizações do tipo ℓ_2 e $\ell_1 - \ell_2$, e empregando os critérios de escolha do parâmetro de regularização de Máximo Retorno, Validação Cruzada da Variância e Validação Cruzada do Sharpe. Ou seja, para tais carteiras penalizadas, apenas os critérios extremos – Mais Restrito e Mais Relaxado – não resultam em desempenhos superiores ao CDI.

As carteiras com restrição à norma ℓ_2 dos pesos dos ativos são aquelas que tendem a um portfólio igualmente diversificado ($1/n$), e não utilizam ativamente a informação dos grupos de ativos. Para elas, a escolha de um grau de encolhimento ótimo do resultado, seja considerando retorno (**MaxRet**), risco (**VCV**), ou a combinação dos dois (**VCS**), dá evidências de resultados superiores ao CDI.

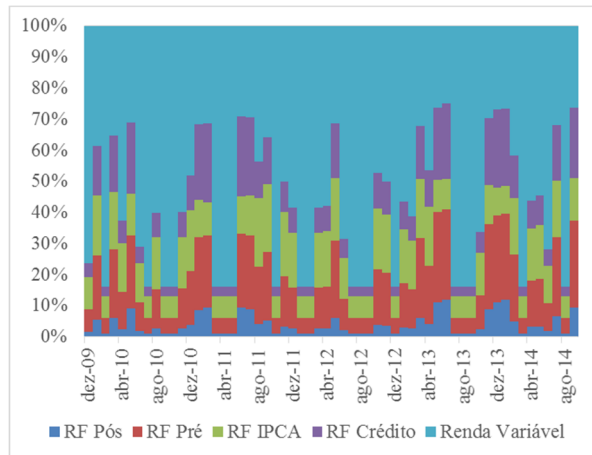


Gráfico 9 – Portfólio ℓ_2 MaxRet: Evolução da alocação por grupos de ativos

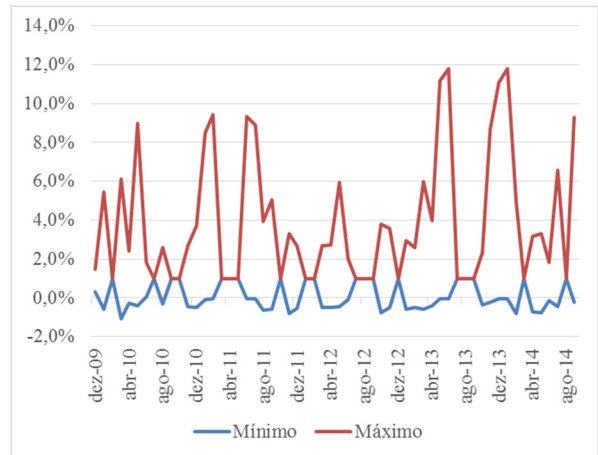


Gráfico 10 - Portfólio ℓ_2 MaxRet: Alocação mínima e máxima por ativo

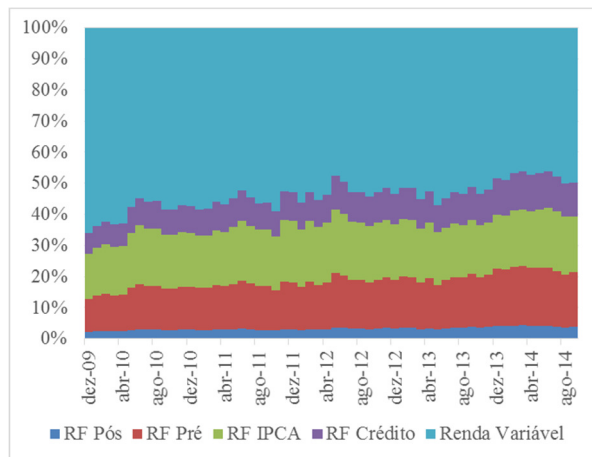


Gráfico 11 - Portfólio ℓ_2 VCV: Evolução da alocação por grupos de ativos

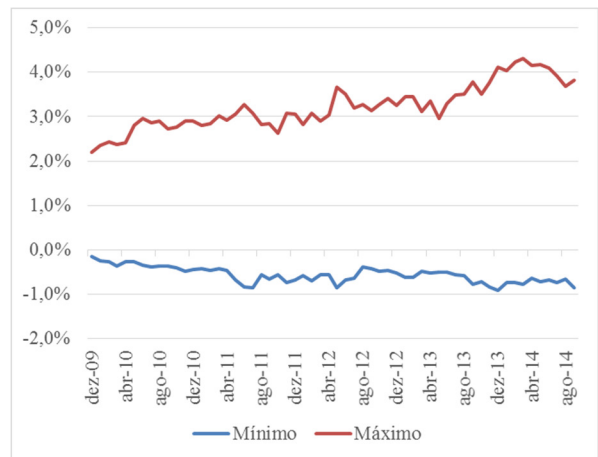


Gráfico 12 - Portfólio ℓ_2 VCV: Alocação mínima e máxima por ativo

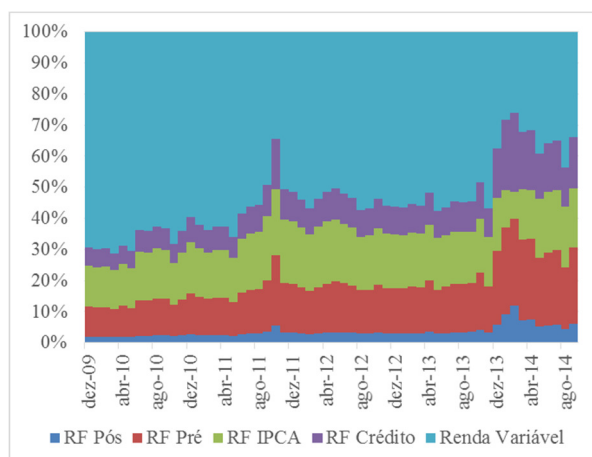


Gráfico 13 - Portfólio ℓ_2 VCS: Evolução da alocação por grupos de ativos

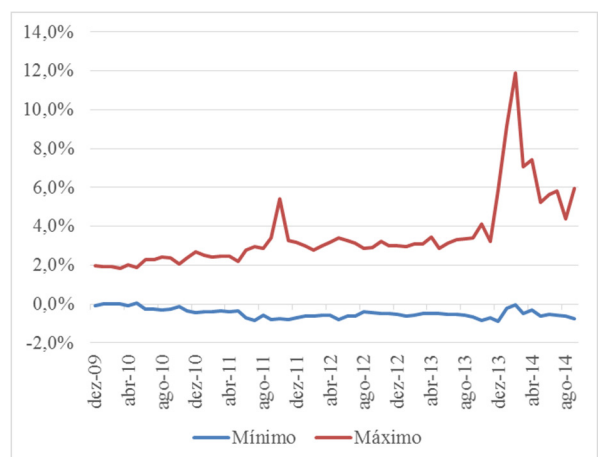


Gráfico 14 - Portfólio ℓ_2 VCS: Alocação mínima e máxima por ativo

Observando nos Gráficos 9 a 14 o comportamento da evolução da alocação de ativos dos portfólios, podemos notar que, no nível dos grupos de ativos, nenhum deles tem posições vendidas. Entretanto, no nível dos ativos, as carteiras tem posições vendidas, que em geral não passam de -1,0% por ativo. Em termos de variações na alocação, o portfólio obtido segundo critério de máximo retorno (**MaxRet**) é o que possui maiores oscilações ao longo do tempo.

Na análise comparada ao CDI, as carteiras otimizadas segundo penalizações do tipo $\ell_1 - \ell_2$ também se destacam. Neste caso, a informação de grupos é utilizada ativamente. Tratam-se de carteiras nas quais restringem-se as normas ℓ_2 intra-grupos e a norma ℓ_1 inter-grupos de ativos. Destarte, os portfólios resultantes tendem a possuir diversificação dentro dos grupos de ativos, enquanto a alocação entre os grupos tende a se concentrar em alguns deles.

Também no caso da penalização $\ell_1 - \ell_2$ todos os critérios de escolha do grau de encolhimento dos pesos, com exceção dos critérios extremos, levam a carteiras capazes de superar o CDI no período analisado. Além disso, como podemos observar nos Gráficos 15, 17 e 19, conforme esperado, há uma concentração da alocação em poucos grupos de ativos – além de não haver posições vendidas no nível dos grupos. Ademais, os pesos inter-grupos variam significativamente ao longo do horizonte analisado. Por fim, os Gráficos 16, 18 e 20 mostram-nos que, no nível dos ativos, há posições vendidas nos portfólios, ainda que de pequenas magnitudes, enquanto a alocação máxima em um único ativo pode superar 15,0% em alguns casos (critérios **MaxRet** e **VCS**).

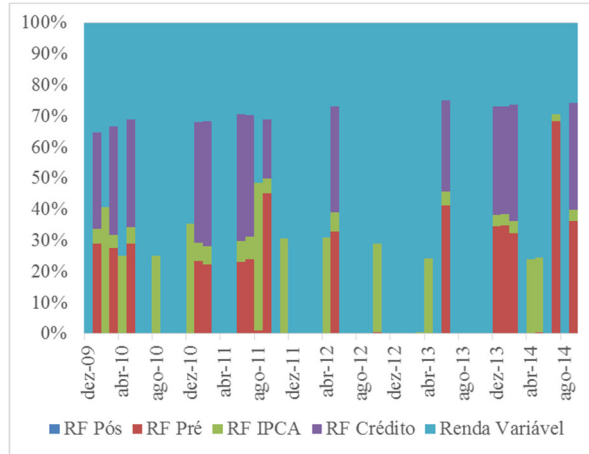


Gráfico 15 – Portfólio $\ell_1 - \ell_2$ MaxRet: Evolução da alocação por grupos de ativos

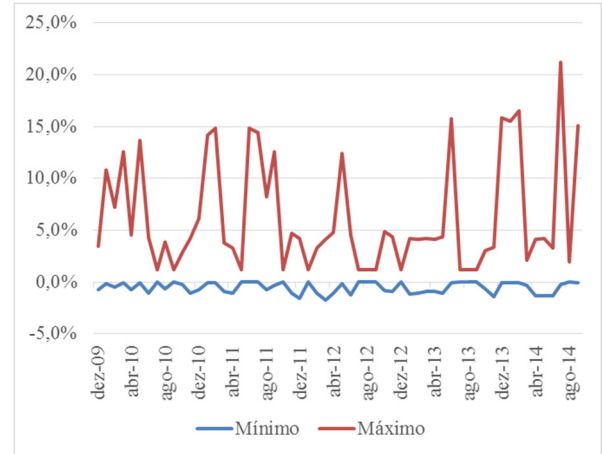


Gráfico 16 - Portfólio $\ell_1 - \ell_2$ MaxRet: Alocação mínima e máxima por ativo

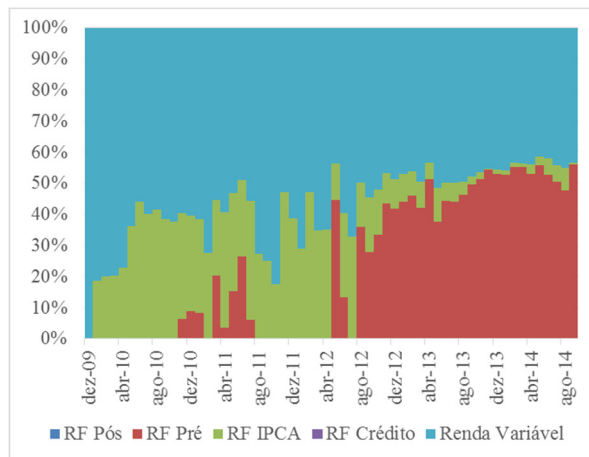


Gráfico 17 - Portfólio $\ell_1 - \ell_2$ VCV: Evolução da alocação por grupos de ativos

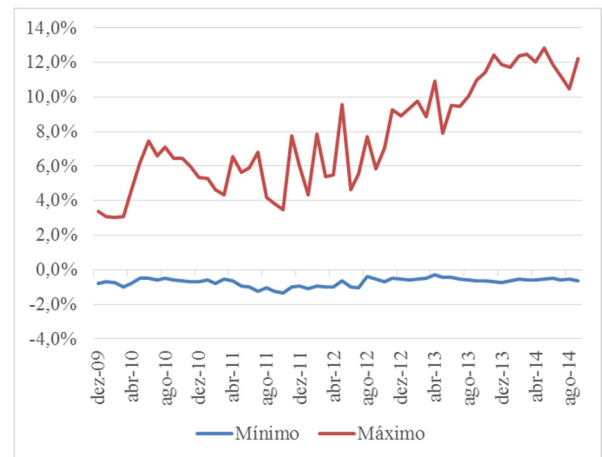


Gráfico 18 - Portfólio $\ell_1 - \ell_2$ VCV: Alocação mínima e máxima por ativo

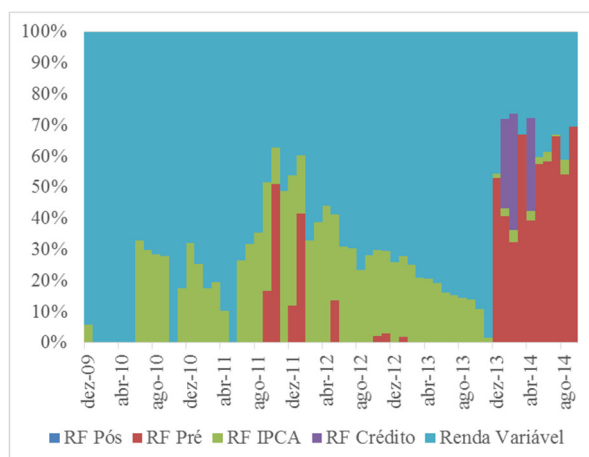


Gráfico 19 - Portfólio $\ell_1 - \ell_2$ VCS: Evolução da alocação por grupos de ativos

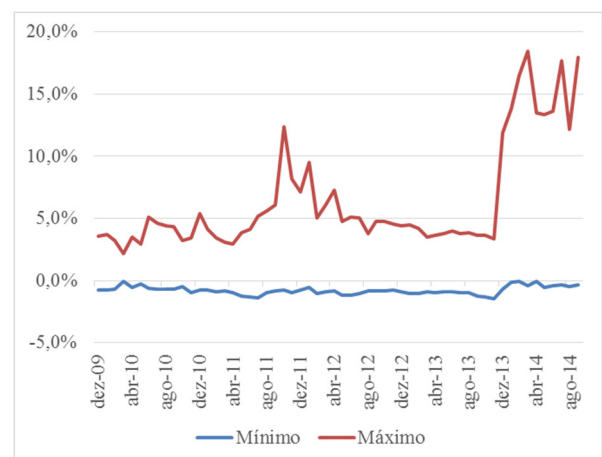


Gráfico 20 - Portfólio $\ell_1 - \ell_2$ VCS: Alocação mínima e máxima por ativo

5. CONCLUSÕES

Peça-chave da criação da Teoria Moderna de Carteiras, o modelo de média-variância de Markowitz (1952) tem sido alvo de diversas críticas em relação às suas limitações na otimização de portfólios. Neste trabalho, enfrentamos os problemas relacionados aos erros de estimação devido ao emprego de amostras finitas para portfólios de ativos brasileiros. Para tanto, utilizamos técnicas de encolhimento sobre as normas dos pesos dos ativos, assim como DeMiguel (2009), Brodie (2009) e Fernandes, Rocha e Souza (2011), ao invés de fazê-lo sobre a matriz de covariância dos ativos. Além disso, diferentemente dos casos mais abordados na literatura, que selecionam portfólios de ações de mínima variância, construímos carteiras ótimas diversificadas em renda fixa e renda variável. Para a obtenção dos retornos esperados, utilizamos o modelo de retornos de equilíbrio proposto em Black e Litterman (1992).

Adicionalmente, também consideramos informações acerca dos grupos de ativos utilizados, assim como proposto por Fernandes, Rocha e Souza (2011). No caso, os ativos de renda fixa foram segregados em quatro grupos: pós-fixado, prefixado, indexado à inflação e crédito. As ações foram agrupadas num único grupo de renda variável.

Os resultados obtidos indicam-nos que o uso de penalizações sobre a norma dos pesos trazem benefícios à otimização de portfólios, em linha com os resultados de Brodie (2009), DeMiguel et al. (2009) e Fernandes, Rocha e Souza (2011). Tal método pode levar à obtenção de carteiras melhores, tanto em termos de retorno médio quanto Sharpe, em relação a portfólios tradicionais de Markowitz – utilizados neste estudo como *benchmarks*. Em geral, apenas carteiras com penalização sobre a norma ℓ_1 não apresentam performance superior a Markowitz com restrição a posições vendidas. Já os portfólios restritos do tipo ℓ_2 são capazes de superar a carteira *benchmark*.

Além disso, assim como em Fernandes, Rocha e Souza (2011) também encontramos evidências de que o uso de informações de grupos de ativos pode levar à seleção de portfólios superiores – no caso deste estudo, quanto aos critérios de retorno médio e índice de Sharpe, em relação às carteiras de referência de Markowitz. Enquanto as carteiras penalizadas do tipo $\ell_1 - \ell_2$ apresentam superioridade em relação à razão retorno/risco (ainda que com retornos médios muito próximos ao do *benchmark*), os portfólios com penalização $\ell_2 - \ell_1$ levaram a retornos médios e Sharpe superiores.

Em particular, comparando o desempenho das carteiras penalizadas em relação ao CDI, encontramos portfólios capazes de superá-lo no horizonte de dezembro de 2009 a outubro de 2014, desconsiderando-se custos de transação. É o caso de carteiras penalizadas do tipo ℓ_2 e $\ell_1 - \ell_2$, empregando critérios de escolha do grau de encolhimento de Máximo Retorno, Validação Cruzada da Variância e Validação Cruzada do Sharpe.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANBIMA. *Estrutura e Termo das Taxas de Juros Estimada e Inflação Implícita Metodologia*. [S.I.], 2010. 11 p. Disponível em: < http://portal.anbima.com.br/informacoes-tecnicas/precos/ettj/Documents/est-termo_metodologia.pdf>. Acesso em: 10 set. 2014.
- ANBIMA. *Índices de Renda Fixa. IDkA Índice de Duração Constante Anbima. Metodologia*. [S.I.], 2013. 7 p. Disponível em: < <http://portal.anbima.com.br/informacoes-tecnicas/indices/idka/Documents/metodologia-idka.pdf>>. Acesso em: 10 set. 2014.
- ANBIMA. *Metodologia IDA*. [S.I.], 2014. 7 p. Disponível em: < http://portal.anbima.com.br/informacoes-tecnicas/indices/ida/Documents/Metodologia_IDA.pdf>. Acesso em: 01 dez. 2014.
- BLACK, Fischer; LITTERMAN, Robert. Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, v. 48, n. 5, p. 28-43. Set/out 1992.
- BRANDT, Michael W. Portfolio choice problems. In: AIT-SAHALIA, Yacine; HANSEN, Lars P. *Handbook of Financial Econometrics, Volume 1: Tools and Techniques*. Amsterdam: Elsevier Science, 2004. Cap. 5, p. 269-336.
- BRODIE, Joshua et al. Sparse and stable Markowitz portfolios. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 106, n. 30, p. 12267-12272. 2009.
- CAMPBELL, John Y.; VICEIRA, Luis M. *Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long Term Investors*. New York: Oxford University Press, 2002. 257 p.
- CAMPBELL, John Y.; LO, Andrew W.; MACKINLAY, A. Craig. *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton: Princeton University Press, 1997. 611 p.
- CHOPRA, Vijay K.; ZIEMBA, William T. The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. *Journal of Portfolio Management*, v. 19, n. 2, p. 6-11. 1993.
- DEMIGUEL, Victor; GARLAPPI, Lorenzo; NOGALES, Francisco J.; UPPAL, Raman.. A generalized approach to portfolio optimization: Improving performance by constraining portfolio norms. *Management Science*, v. 55, n. 5, p. 798-812. Maio 2009.
- DEMIGUEL, Victor; GARLAPPI, Lorenzo; UPPAL, Raman. Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? *Review of Financial Studies*, v 22, n. 5, p. 1915-1953. 2009.
- ELTON, Edwin J. Expected Return, Realized Return, and Asset Pricing Tests. *The Journal of Finance*, v. 54, n. 4, p. 1199-1220. 1999.
- FAMA, Eugene F. Multiperiod consumption-investment decisions. *American Economic Review*, v. 60, n. 1, p. 163-174. 1970.

- FERNANDES, Marcelo; ROCHA, Guilherme; SOUZA, Thiago. *Regularized minimum-variance portfolios using asset group information*. [S.I.], Outubro 2011. Disponível em: < <http://webspace.gmul.ac.uk/tsouza/Fernandes,%20Rocha,%20Souza%202011.pdf> > Acesso em: 30 abr. 2014.
- GRANT, Michael; BOYD, Stephen. Graph implementations for nonsmooth convex programs. In: *Lecture Notes in Control and Information Sciences - Recent Advances in Learning and Control (a tribute to M. Vidyasagar)*. Berlim: Springer, 2008. p. 95-110.
- GRANT, Michael; BOYD, Stephen. *CVX: Matlab software for disciplined convex programming*, version 2.1. 2014. Disponível em: < <http://cvxr.com/cvx> >. Acesso em: 03 nov. 2014.
- HE, Guangliang; LITTERMAN, Robert. The intuition behind Black-Litterman model portfolios. *Technical Report*. New York: Goldman Sachs Investment Management Series, Fixed Income Research, 25 p. 1999.
- JAGANNATHAN, Ravi; MA, Tongshu. Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps. *Journal of Finance*, v. 58, n. 4, p. 1651-1684. Agosto 2003.
- JAMES, Willard; STEIN, Charles. Estimation with quadratic loss. In: *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1: Contributions to the Theory of Statistics*. Berkeley: University of California Press, 1961. p. 361-379.
- JORION, Phillipe. Bayesian and CAPM estimators of the means: Implications for portfolio selection. *Journal of Banking & Finance*, v. 15, n. 3, p. 717-727. Junho 1991.
- KRITZMAN, Mark; PAGE, Sébastien; TURKINGTON, David. In defense of optimization: The fallacy of 1/N. *Financial Analysts Journal*, v. 66, n. 2, p. 31-39. 2010.
- LEDOIT, Olivier; WOLF, Michael. Improved estimation of the covariance matrix of returns with an application to portfolio selection. *Journal of Empirical Finance*, v. 10, n. 5, p. 603-621. 2003.
- LEDOIT, Olivier; WOLF, Michael. Robust performance hypothesis testing with the Sharpe ratio. *Journal of Empirical Finance*, v. 15, n. 5, p. 850-859. 2008.
- LEDOIT, Olivier; WOLF, Michael. Robust performances hypothesis testing with the variance. *Wilmott*, v. 2011, n. 55, p. 86-89. 2011.
- MARKOWITZ, Harry M. Portfolio selection. *Journal of Finance*, v. 7, n. 1, p. 77-91. 1952.
- MEDEIROS, Marcelo C.; PASSOS, Artur M.; VASCONCELOS, Gabriel F. R. Parametric portfolio selection: Evaluating and comparing to Markowitz portfolios. *Revista Brasileira de Finanças*, v. 12, n. 2, p. 257-284. 2014.
- MERTON, Robert C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous time case. *Review of Economics and Statistics*, v. 51, p. 247-257. 1969.
- MERTON, Robert C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, v. 3, n. 4, 373-413. 1971.

- MERTON, Robert C. On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. *Journal of Financial Economics*, v. 8, n. 4, p. 323-361. 1980.
- MICHAUD, Richard. The Markowitz optimization enigma: is 'optimized' optimal?. *Financial Analysts Journal*, v. 45, n. 1, p. 31-42. 1989.
- NETO, Cesar T.; LEAL, Ricardo P. C. *Um índice de mínima variância de ações brasileiras*. Rio de Janeiro: UFRJ / COPPEAD, 2010. 27 p. (Relatórios COPPEAD, n. 396).
- RUBESAM, Alexandre; BELTRAME, André L. Carteiras de variância mínima no Brasil. *Revista Brasileira de Finanças*, v. 11, n. 1, p. 81-118. 2013.
- SAMUELSON, Paul A. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. *Review of Economics and Statistics*, v. 51, n. 3, p. 239-246. 1969.
- SHARPE, William. A Simplified model for portfolio analysis. *Management Science*, v. 9, n. 2, p. 277-93. 1963.
- SILVA, Anderson; CARVALHO, Lena O.; MEDEIROS, Otavio L. Dívida Pública: a experiência brasileira. Brasília: Secretaria do Tesouro Nacional e Banco Mundial, 2009. 502 p.
- STOYANOV, Stoyan; GOLTZ, Felix. Advantages and shortcomings of minimum variance portfolios. *EDHEC-Risk Institute – Industry Analysis*, 15 nov. 2011. Disponível em: http://www.edhec-risk.com/latest_news/featured_analysis/RISKArticle.2011-11-15.4803?newsletter=yes. Acesso em: 09 dez. 2014.
- SVENSSON, Lars E. Estimating and interpreting forward interest rates; Sweden 1992-1994. Washington, DC: International Monetary Fund. 1994. (IMF Working Papers, n. 94/114).
- TESOURO NACIONAL. *Relatório Mensal da Dívida Pública Federal*. Brasília, setembro de 2014. Disponível em: <http://www.tesouro.fazenda.gov.br/documents/10180/113505/Texto_RMD_Setembro_14.pdf/4da99e67-a271-4e0a-8a8d-fb6820bfe378>. Acesso em: 10 nov. 2014.
- ZHAO, P., ROCHA, G., YU, B. The composite absolute penalties family for grouped and hierarchical variable selection. *Annals of Statistics*, v. 37, p. 3468 – 3497. 2009.

APÊNDICE A

Cálculo dos valores de mercado dos índices IDkA

Os índices da família IDkA são indicadores sintéticos que medem o comportamento de uma carteira de títulos públicos hipotética com *duração* constante (ANBIMA, 2013). Logo, não são índices diretamente investíveis, não havendo portanto divulgação do valor de mercado de cada índice da família.

O cálculo dos índices, por sua vez, é feito com base em determinados vértices da Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ET TJ) Prefixada e indexada ao IPCA, calculadas diariamente pela ANBIMA. Para o cálculo dessas curvas, a instituição se utiliza das taxas indicativas das LTNs e NTN-Fs (ET TJ Prefixada) e das NTN-Bs (ET TJ indexada ao IPCA).

Com base nessas taxas, as estruturas a termo são obtidas segundo o modelo proposto por Svensson (1994), em que a taxa de juros na data t para o prazo τ , em anos, é dada pela equação (ANBIMA, 2010):

$$r_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau} \right) + \beta_{3t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau} - e^{-\lambda_{1t}\tau} \right) + \beta_{4t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_{2t}\tau}}{\lambda_{2t}\tau} - e^{-\lambda_{2t}\tau} \right).$$

Os parâmetros β_{1t} , β_{2t} , β_{3t} , β_{4t} , λ_{1t} e λ_{2t} são calculados e divulgados diariamente pela ANBIMA.

Para obtermos os valores de mercado de cada vértice de uma dada família de IDkAs, mapeamos o fluxo de pagamentos futuros dos títulos utilizados para a reconstrução da respectiva curva ET TJ. Assim, um dado fluxo de pagamento futuro VF_f de prazo τ é inicialmente trazido a valor presente (VP) na data t segundo a taxa $r_t(\tau)$, calculada a partir dos parâmetros divulgados pela ANBIMA para a data t :

$$VP_f = \frac{VF_f}{(1 + r_t(\tau))^\tau}$$

Em seguida, seu valor é linearmente distribuído entre os dois vértices mais próximos v_i e v_{i+1} , sendo que $v_i \leq \tau \leq v_{i+1}$:

$$VP_{fv_i} = \frac{VP_f * (\tau - v_i)}{(v_{i+1} - v_i)},$$

$$VP_{fv_{i+1}} = \frac{VP_f * (v_{i+1} - \tau)}{(v_{i+1} - v_i)}.$$

Por fim, podemos calcular o valor de mercado do vértice v_i através do somatório de todos os fluxos proporcionalmente atribuídos a ele:

$$VP_{v_i} = \sum_f VP_{fv_i}.$$

No caso de um determinado fluxo VF_f cujo prazo τ seja inferior ao vértice mais curto, ou superior ao vértice mais longo, seu valor presente é somado, respectivamente, ao vértice mais curto ou ao mais longo.

APÊNDICE B

Evolução da alocação por grupos de ativos dos portfólios calculados

Apresentamos abaixo os gráficos que representam a evolução da alocação de cada carteira calculada, segundo os 5 grupos de ativos definidos. Além deles, também apresentamos a evolução da alocação mínima e máxima por ativo investido para cada portfólio. Destacamos que os gráficos elencados aqui são aqueles que não constam do corpo do texto desta dissertação.

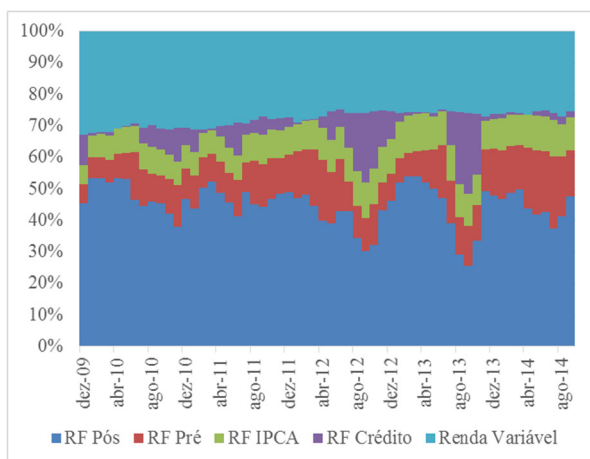


Gráfico 21 – Portfólio Markowitz com restrição a posições vendidas: Evolução da alocação por grupos de ativos

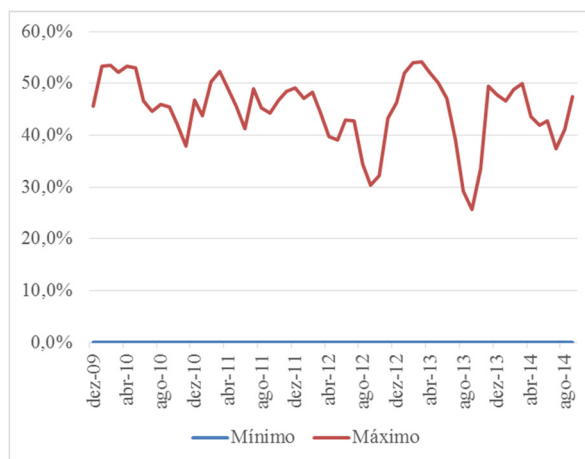


Gráfico 22 - Portfólio Markowitz com restrição a posições vendidas: Alocação mínima e máxima por ativo

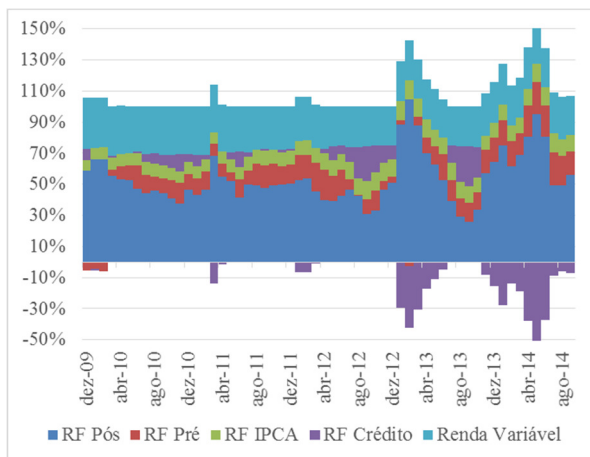


Gráfico 23 - Portfólio Markowitz sem restrição a posições vendidas: Evolução da alocação por grupos de ativos

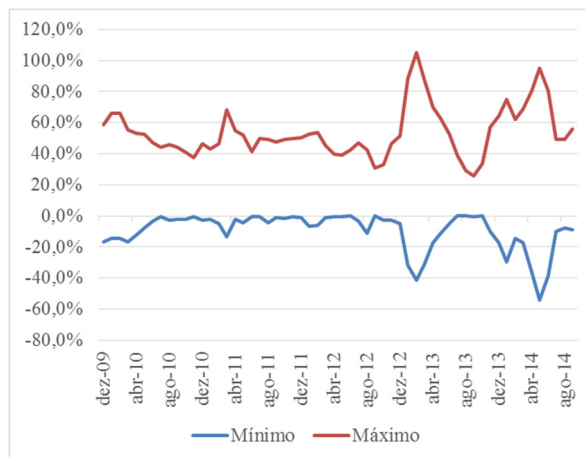


Gráfico 24 - Portfólio Markowitz sem restrição a posições vendidas: Alocação mínima e máxima por ativo

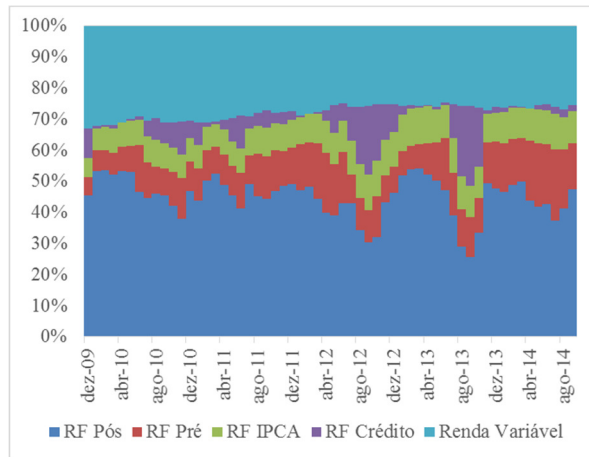


Gráfico 25 – Portfólio ℓ_1 MR: Evolução da alocação por grupos de ativos

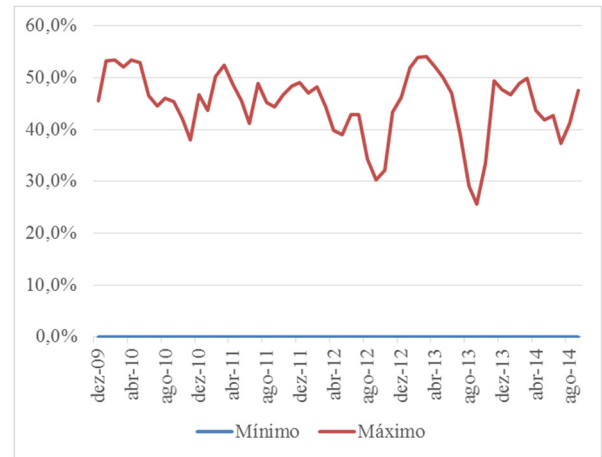


Gráfico 26 – Portfólio ℓ_1 MR: Alocação mínima e máxima por ativo

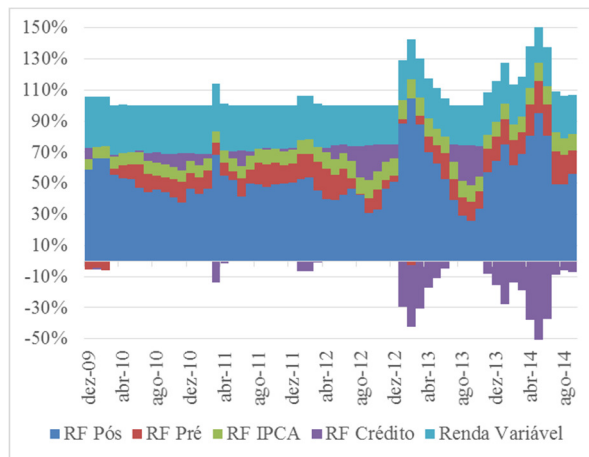


Gráfico 27 – Portfólio ℓ_1 MRelax: Evolução da alocação por grupos de ativos

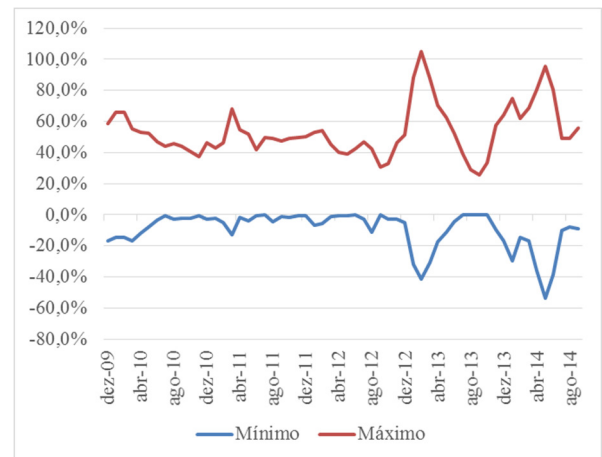


Gráfico 28 – Portfólio ℓ_1 MRelax: Alocação mínima e máxima por ativo

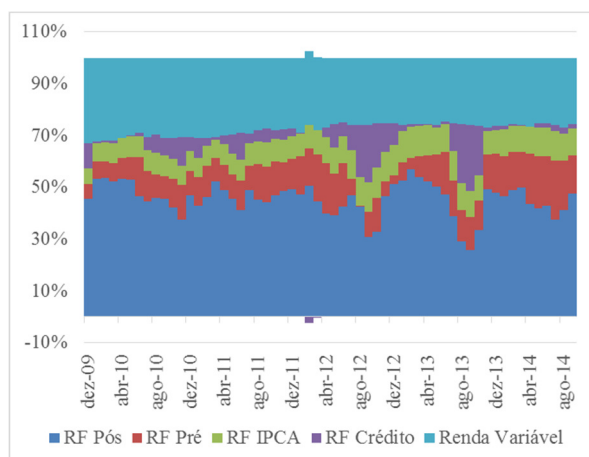


Gráfico 29 – Portfólio ℓ_1 MaxRet: Evolução da alocação por grupos de ativos

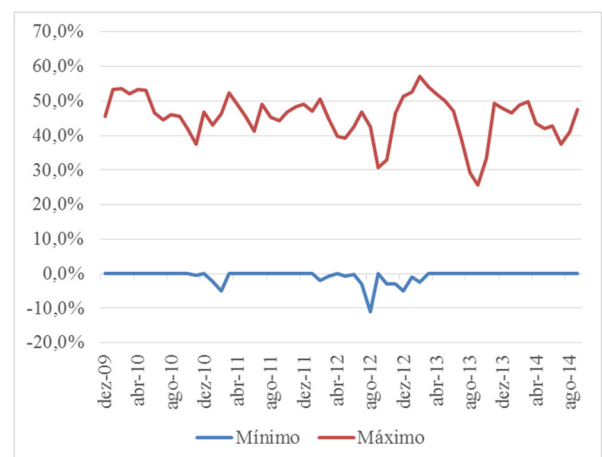


Gráfico 30 – Portfólio ℓ_1 MaxRet: Alocação mínima e máxima por ativo

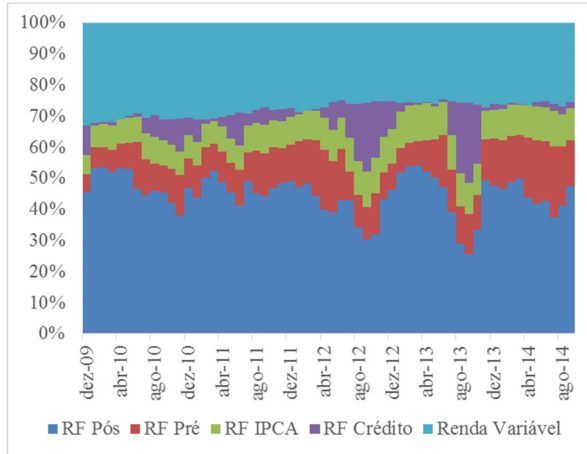


Gráfico 31 – Portfólio ℓ_1 VCV: Evolução da alocação por grupos de ativos

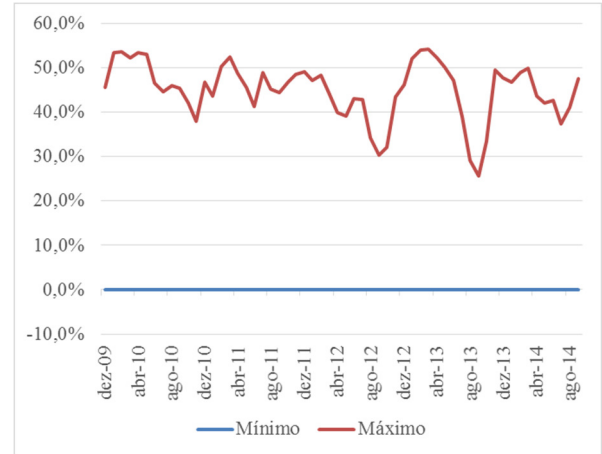


Gráfico 32 - Portfólio ℓ_1 VCV: Alocação mínima e máxima por ativo

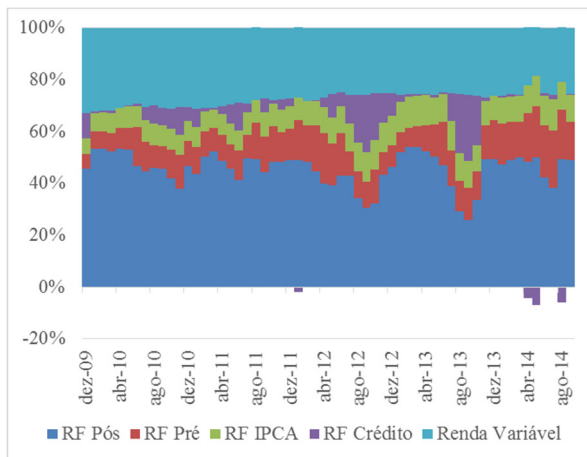


Gráfico 33 - Portfólio ℓ_1 VCS: Evolução da alocação por grupos de ativos

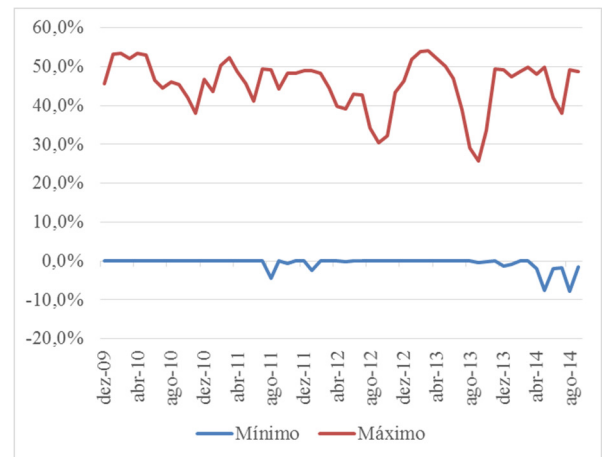


Gráfico 34 - Portfólio ℓ_1 VCS: Alocação mínima e máxima por ativo

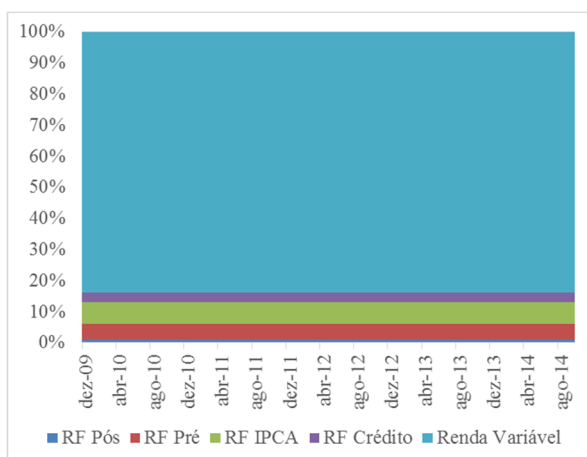


Gráfico 35 - Portfólio ℓ_2 MR: Evolução da alocação por grupos de ativos

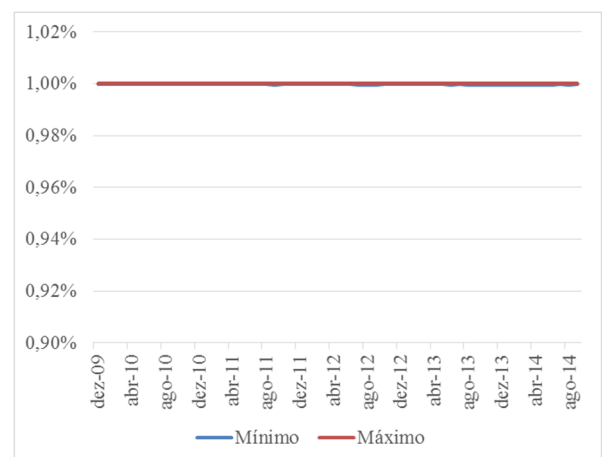


Gráfico 36 - Portfólio ℓ_2 MR: Alocação mínima e máxima por ativo

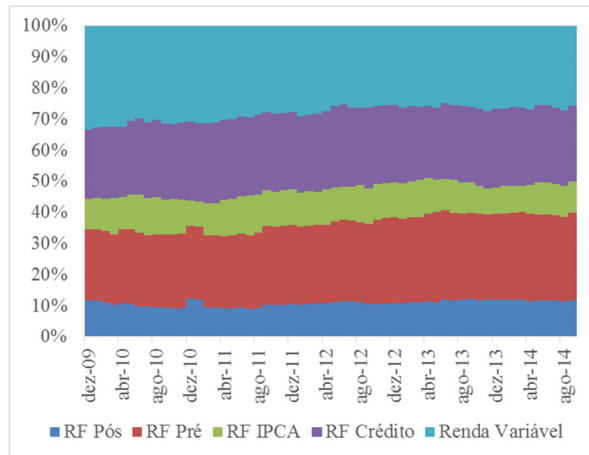


Gráfico 37 – Portfólio ℓ_2 MRelax: Evolução da alocação por grupos de ativos

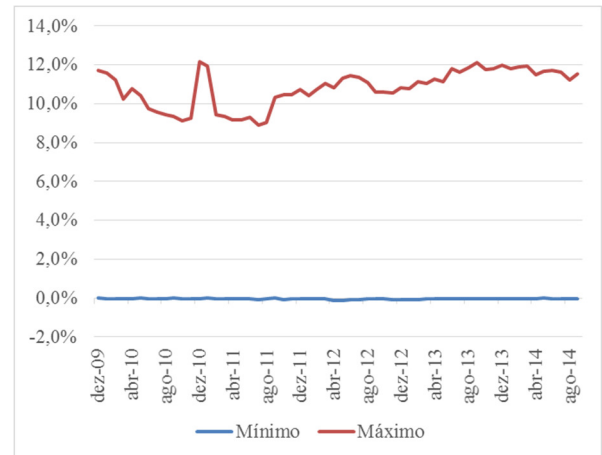


Gráfico 38 - Portfólio ℓ_2 MRelax: Alocação mínima e máxima por ativo

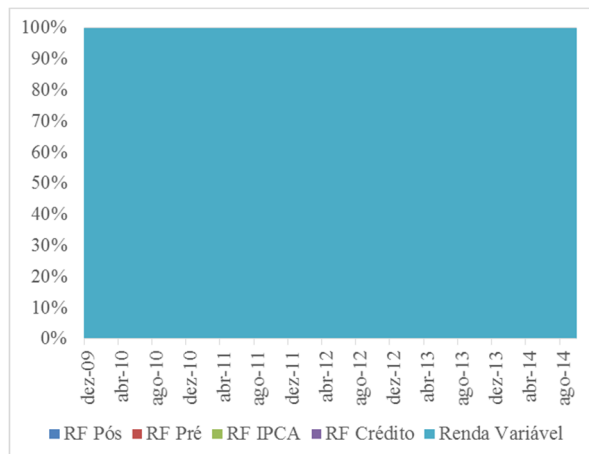


Gráfico 39 - Portfólio $\ell_1 - \ell_2$ MR: Evolução da alocação por grupos de ativos

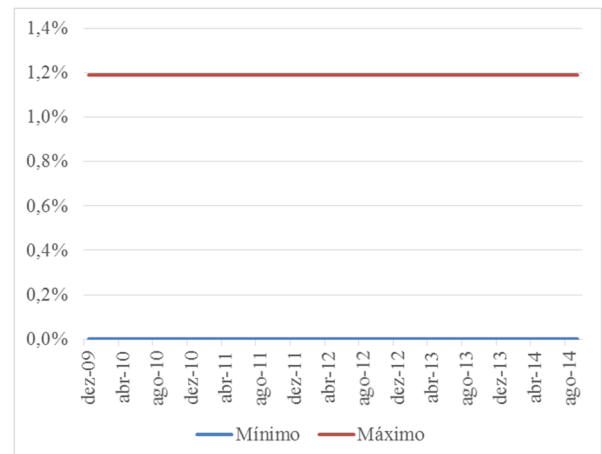


Gráfico 40 - Portfólio $\ell_1 - \ell_2$ MR: Alocação mínima e máxima por ativo

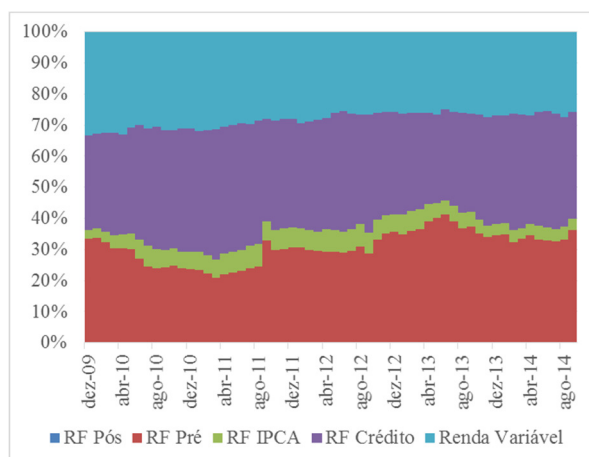


Gráfico 41 - Portfólio $\ell_1 - \ell_2$ MRelax: Evolução da alocação por grupos de ativos

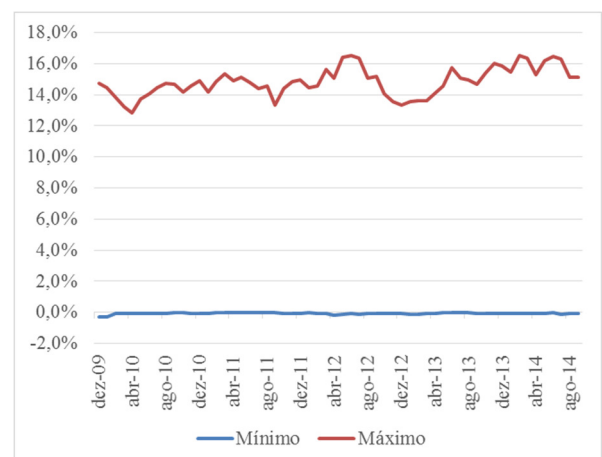


Gráfico 42 - Portfólio $\ell_1 - \ell_2$ MRelax: Alocação mínima e máxima por ativo

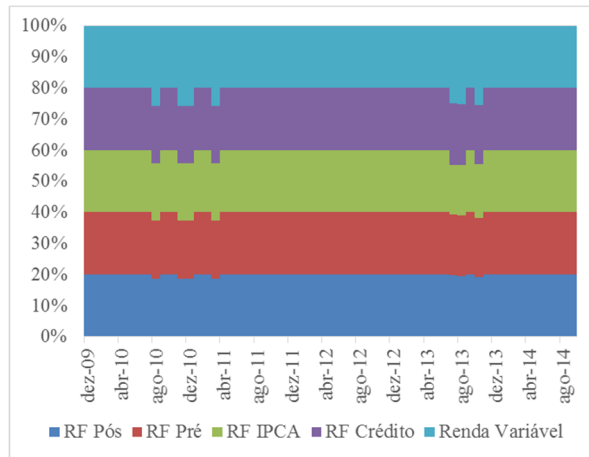


Gráfico 43 – Portfólio $\ell_2 - \ell_1$ MR: Evolução da alocação por grupos de ativos

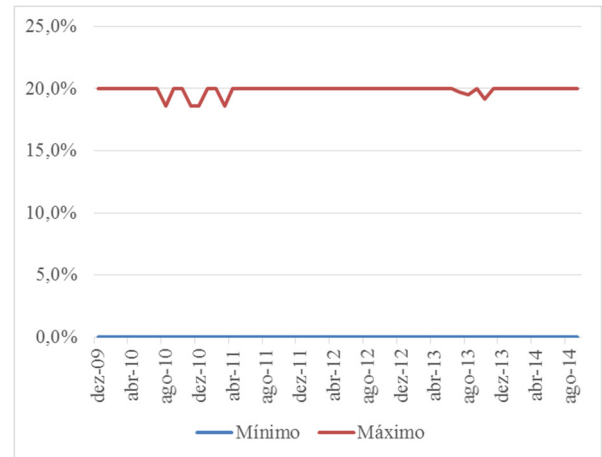


Gráfico 44 - Portfólio $\ell_2 - \ell_1$ MR: Alocação mínima e máxima por ativo

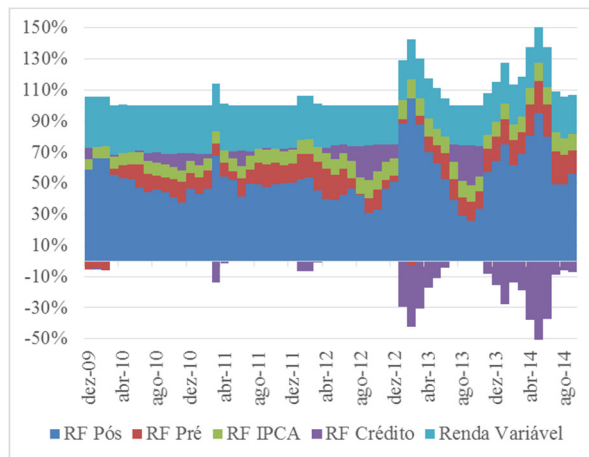


Gráfico 45 - Portfólio $\ell_2 - \ell_1$ MRelax: Evolução da alocação por grupos de ativos

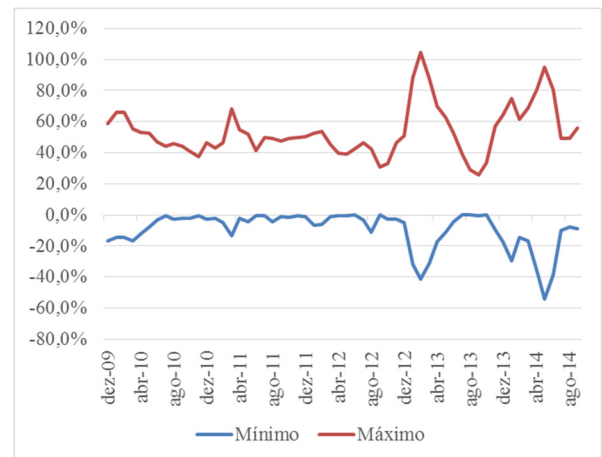


Gráfico 46 - Portfólio $\ell_2 - \ell_1$ MRelax: Alocação mínima e máxima por ativo

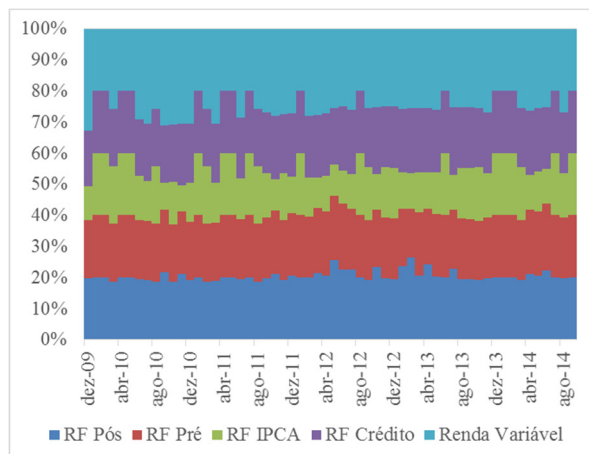


Gráfico 47 - Portfólio $\ell_2 - \ell_1$ MaxRet: Evolução da alocação por grupos de ativos

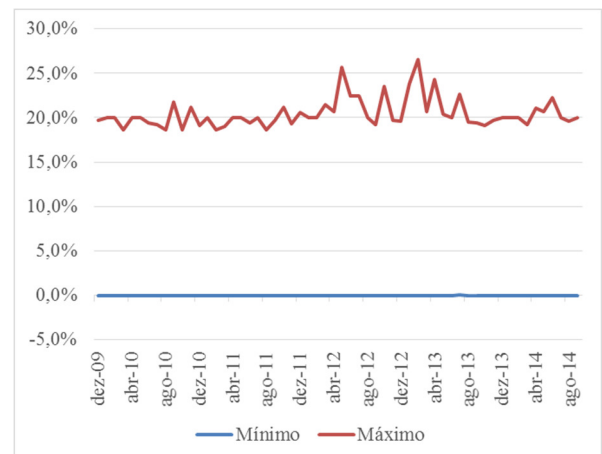


Gráfico 48 - Portfólio $\ell_2 - \ell_1$ MaxRet: Alocação mínima e máxima por ativo

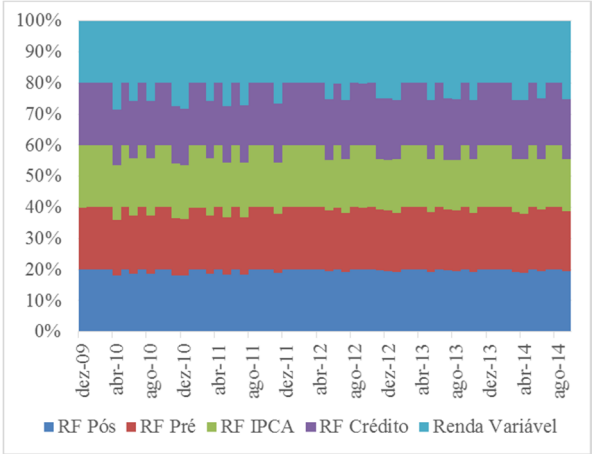


Gráfico 49 – Portfólio $\ell_2 - \ell_1$ VCV: Evolução da alocação por grupos de ativos

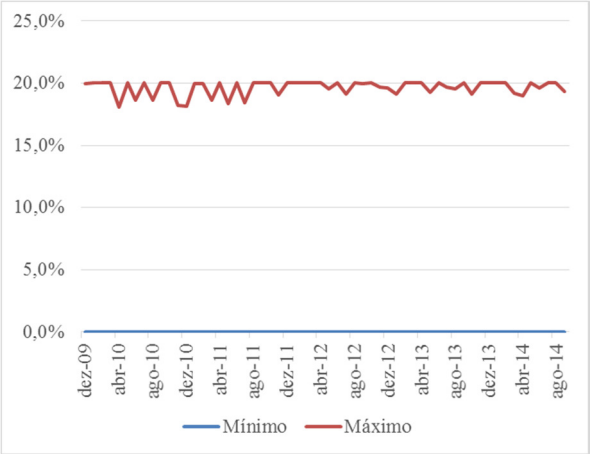


Gráfico 50 - Portfólio $\ell_2 - \ell_1$ VCV: Alocação mínima e máxima por ativo

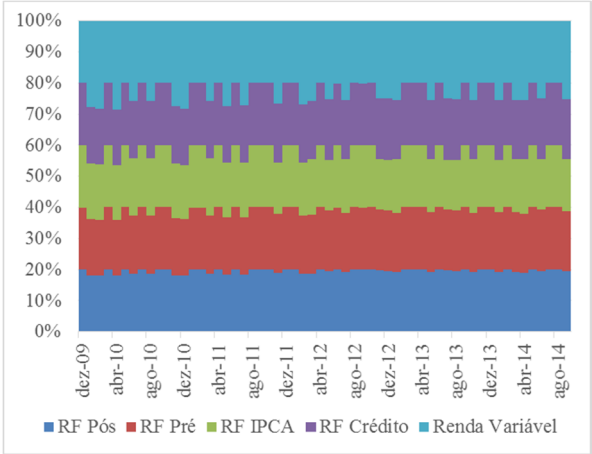


Gráfico 51 - Portfólio $\ell_2 - \ell_1$ VCS: Evolução da alocação por grupos de ativos

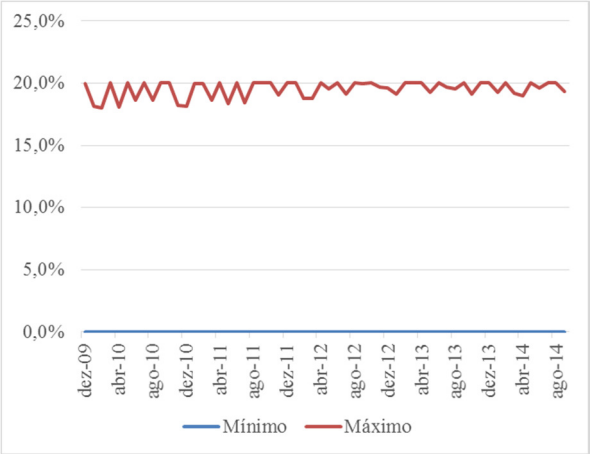


Gráfico 52 - Portfólio $\ell_2 - \ell_1$ VCS: Alocação mínima e máxima por ativo

ANEXO A

Tabela 6 – Composição da carteira teórica do IBrX em 30/09/2014

Código	Nome	Peso (%)	Início do histórico
GETI4	AES Tietê SA	0,26	Anterior a 29/12/2005
ALLL3	América Latina Logística SA	0,27	Anterior a 29/12/2005
ABEV3	AMBEV SA	6,78	Anterior a 29/12/2005
ARTR3	Arteris SA	0,16	Anterior a 29/12/2005
BTOW3	B2W Cia Digital	0,18	Anterior a 29/12/2005
BBDC3	Banco Bradesco SA	1,86	Anterior a 29/12/2005
BBDC4	Banco Bradesco SA	6,77	Anterior a 29/12/2005
BBAS3	Banco do Brasil SA	2,01	Anterior a 29/12/2005
BRSR6	Banco do Estado do Rio Grande do Sul SA	0,25	Anterior a 29/12/2005
SANB11	Banco Santander Brasil SA/Brazil	1,40	Anterior a 29/12/2005
BBSE3	BB Seguridade Participações SA	2,08	Anterior a 29/12/2005
BVMF3	BM&FBovespa SA	1,97	Anterior a 29/12/2005
BRML3	BR Malls Participações SA	0,85	Anterior a 29/12/2005
BRPR3	BR Properties SA	0,37	Anterior a 29/12/2005
BRAP4	Bradespar SA	0,38	Anterior a 29/12/2005
BRKM5	Braskem SA	0,41	Anterior a 29/12/2005
BRFS3	BRF SA	4,68	Anterior a 29/12/2005
BISA3	Brookfield Incorporações SA	0,04	Anterior a 29/12/2005
CCRO3	CCR SA	1,38	Anterior a 29/12/2005
ELET3	Centrais Elétricas Brasileiras SA	0,14	Anterior a 29/12/2005
ELET6	Centrais Elétricas Brasileiras SA	0,21	Anterior a 29/12/2005
CTIP3	CETIP SA - Mercados Organizados	0,74	Anterior a 29/12/2005
PCAR4	Cia Brasileira de Distribuição	1,59	Anterior a 29/12/2005
SBSP3	Cia de Saneamento Básico do Estado de Sa	0,64	Anterior a 29/12/2005
CMIG4	Cia Energética de Minas Gerais	1,09	Anterior a 29/12/2005
CESP6	Cia Energética de São Paulo	0,46	Anterior a 29/12/2005
HGTX3	Cia Hering	0,30	Anterior a 29/12/2005
CPLE6	Cia Paranaense de Energia	0,32	Anterior a 29/12/2005
CSNA3	Cia Siderúrgica Nacional SA	0,59	Anterior a 29/12/2005
CIEL3	Cielo SA	2,55	Anterior a 29/12/2005
CSAN3	Cosan SA Industria e Comercio	0,41	Anterior a 29/12/2005
CPFE3	CPFL Energia SA	0,54	Anterior a 29/12/2005
CYRE3	Cyrela Brazil Realty SA Empreendimentos	0,30	Anterior a 29/12/2005
DTEX3	Duratex SA	0,23	Anterior a 29/12/2005

ECOR3	EcoRodovias Infraestrutura e Logística S	0,23	Anterior a 29/12/2005
Código	Nome	Peso (%)	Início do histórico
ENBR3	EDP - Energias do Brasil SA	0,22	Anterior a 29/12/2005
ELPL4	Eletropaulo Metropolitana Eletricidade d	0,08	Anterior a 29/12/2005
EMBR3	Embraer SA	1,70	Anterior a 29/12/2005
ENEV3	Eneva SA	0,01	Anterior a 29/12/2005
EQTL3	Equatorial Energia SA	0,36	Anterior a 29/12/2005
ESTC3	Estácio Participações SA	0,76	Anterior a 29/12/2005
EVEN3	Even Construtora e Incorporadora SA	0,11	Anterior a 29/12/2005
EZTC3	Ez Tec Empreendimentos e Participações S	0,10	Anterior a 29/12/2005
FIBR3	Fibria Celulose SA	0,57	Anterior a 29/12/2005
GFSA3	Gafisa SA	0,11	Anterior a 29/12/2005
GGBR4	Gerdau SA	0,99	Anterior a 29/12/2005
GOLL4	Gol Linhas Aéreas Inteligentes SA	0,12	Anterior a 29/12/2005
H RTP3	HRT Participações em Petróleo SA	0,03	Anterior a 29/12/2005
HYPE3	Hypermarcas SA	0,63	Anterior a 29/12/2005
IGTA3	Iguatemi Empresa de Shopping Centers SA	0,20	Anterior a 29/12/2005
ITUB4	Itaú Unibanco Holding SA	8,70	Anterior a 29/12/2005
ITSA4	Itaúsa - Investimentos Itaú SA	2,77	04/01/2006
JBSS3	JBS SA	1,45	17/02/2006
KLBN11	Klabin SA	0,43	22/02/2006
KROT3	Kroton Educacional SA	2,38	09/03/2006
LIGT3	Light SA	0,19	29/03/2006
RENT3	Localiza Rent a Car SA	0,51	27/04/2006
LAME4	Lojas Americanas SA	0,57	24/07/2006
LREN3	Lojas Renner SA	0,85	31/07/2006
MDIA3	M Dias Branco SA	0,27	31/08/2006
MGLU3	Magazine Luiza SA	0,04	18/10/2006
POMO4	Marcopolo SA	0,21	23/10/2006
MRFG3	Marfrig Global Foods SA	0,22	27/10/2006
GOAU4	Metalúrgica Gerdau SA	0,36	01/12/2006
MILS3	Mills Estruturas e Serviços de Engenharia	0,14	25/01/2007
BEEF3	Minerva SA/Brazil	0,12	06/02/2007
MMXM3	MMX Mineração e Metálicos SA	0,00	28/03/2007
MRVE3	MRV Engenharia e Participações SA	0,22	30/03/2007
MULT3	Multiplan Empreendimentos Imobiliários S	0,36	05/04/2007
MPLU3	Multiplus SA	0,12	21/06/2007
NATU3	Natura Cosméticos SA	0,60	28/06/2007
ODPV3	Odontoprev SA	0,22	19/07/2007
OIBR3	Oi SA	0,21	20/07/2007

OIBR4	Oi SA	0,54	20/07/2007
Código	Nome	Peso (%)	Início do histórico
PDGR3	PDG Realty SA Empreendimentos e Particip.	0,14	24/07/2007
PETR3	Petróleo Brasileiro SA	4,48	26/07/2007
PETR4	Petróleo Brasileiro SA	7,00	20/09/2007
PSSA3	Porto Seguro SA	0,26	04/10/2007
PRML3	Prumo Logística SA	0,07	13/12/2007
QGEP3	QGEP Participações SA	0,06	07/04/2008
QUAL3	Qualicorp SA	0,50	18/04/2008
RADL3	Raia Drogasil SA	0,39	11/07/2008
RAPT4	Randon Participações SA	0,09	28/07/2008
RSID3	Rossi Residencial SA	0,04	20/08/2008
SMLE3	Smiles SA	0,21	29/06/2009
CRUZ3	Souza Cruz SA	0,71	12/08/2009
SULA11	Sul América SA	0,35	07/10/2009
SUZB5	Suzano Papel e Celulose SA	0,43	28/10/2009
VIVT4	Telefonica Brasil SA	1,21	05/02/2010
TIMP3	Tim Participações SA	0,99	08/03/2010
TOTS3	Totvs SA	0,48	01/04/2010
TBLE3	Tractebel Energia SA	0,67	16/04/2010
TAEE11	Transmissora Aliança de Energia Elétrica	0,18	25/10/2010
UGPA3	Ultrapar Participações SA	2,70	09/02/2011
USIM5	Usinas Siderúrgicas de Minas Gerais SA	0,29	02/05/2011
VALE3	Vale SA	3,25	29/06/2011
VALE5	Vale SA	4,28	29/04/2013
VLID3	Valid Soluções e Serviços de Segurança	0,20	29/04/2013
VVAR11	Via Varejo SA	0,31	01/07/2013
WEGE3	WEG SA	0,78	23/01/2014

Fonte: Bloomberg