

# CAPM Condicional: Betas Variantes no Tempo no Mercado Brasileiro

(Conditional CAPM: Time-varying Betas in the Brazilian Market)

Frances Fischberg Blank\*

Carlos Patricio Samanez\*\*

Tara Keshar Nanda Baidya\*\*\*

Fernando Antonio Lucena Aiube\*\*\*\*

## Resumo

O CAPM condicional pressupõe a variação temporal do beta de mercado. À luz de modelos espaço-estado, a dinâmica de beta pode ser modelada como um processo estocástico combinado com variáveis condicionantes relativas ao ciclo econômico e estimada através do filtro de Kalman. Este artigo analisa modelagens alternativas no que se refere ao ajuste aos dados de carteiras ordenadas por valor de mercado e razão *book-to-market* no mercado brasileiro, bem como à capacidade de explicação dos erros de apreçamento em relação ao CAPM incondicional através de testes sob abordagens de séries temporais e *cross-sectional*. O modelo em que beta segue passeio aleatório combinado com variáveis condicionantes é o que apresenta melhor resultado ao reduzir erros de apreçamento, mas, apesar da redução, estes permanecem ainda significativos. Testes *cross-sectional* indicam que a variável *book-to-market* perde poder na explicação dos retornos, mas evidenciam uma influência de variável relativa a retornos passados.

**Palavras-chave:** CAPM condicional; betas variantes no tempo; anomalias financeiras; filtro de Kalman.

**Código JEL:** G12.

---

Submetido em 11 de dezembro de 2013. Reformulado em 21 de março de 2014. Aceito em 23 de junho de 2014. Publicado on-line em 6 de outubro de 2014. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Rodrigo de Losso Bueno.

\*Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), Rio de Janeiro, RJ.  
E-mail: frances.blank@gmail.com

\*\*Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), Rio de Janeiro, RJ.  
E-mail: cps@puc-rio.br

\*\*\*UNIGRANRIO, Rio de Janeiro, RJ. E-mail: tarabaidya@yahoo.com.br

\*\*\*\*Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio) & Petrobras, Rio de Janeiro, RJ. E-mail: aiube@puc-rio.br

## **Abstract**

The conditional CAPM is characterized by time-varying market beta. Based on state-space models approach, beta behavior can be modeled as a stochastic process dependent on conditioning variables related to business cycle and estimated using Kalman filter. This paper studies alternative models for portfolios sorted by size and book-to-market ratio in the Brazilian stock market and compares their adjustment to data. Asset pricing tests based on time-series and cross-sectional approaches are also implemented. A random walk process combined with conditioning variables is the preferred model, reducing pricing errors compared to unconditional CAPM, but the errors are still significant. Cross-sectional test shows that book-to-market ratio becomes less relevant, but past returns still capture cross-section variation.

**Keywords:** conditional CAPM; time-varying beta; stock market anomalies; Kalman filter.

## **1. Introdução**

Diversos estudos envolvendo modelos de fatores de risco contestam a validade do CAPM. Ao longo do tempo, para explicar as chamadas anomalias dos retornos das ações, os trabalhos se voltaram tanto para a busca de novos fatores de risco, no caso os modelos multifatores, bem como para o tratamento dinâmico do modelo em que as sensibilidades relacionadas aos fatores de risco sejam estimadas a partir de sua variação temporal, no caso os modelos condicionais de apreçamento de ativos. Considerando apenas o risco de mercado, o CAPM condicional explicita o valor esperado do retorno de um ativo de forma condicional a um conjunto de informação disponível no período anterior. O beta de mercado do ativo passa a ser um parâmetro estimado de forma condicional e sua variação temporal pode ser modelada de diversas maneiras, considerando tanto uma dependência em variáveis condicionantes defasadas, como modelos de volatilidade condicional ou na forma espaço-estado. Preservando a estrutura do modelo de um fator, a literatura acerca do CAPM condicional busca verificar se o modelo é capaz de melhor explicar os retornos dos ativos ao se considerar variação temporal nos momentos condicionais.

Neste contexto, a abordagem da dependência de beta em relação a variáveis condicionantes relativas ao ciclo econômico tem se permeado em estudos sobre o CAPM condicional. Diversos autores propõem a modelagem da função de distribuição condicional dos retornos como função explícita de variáveis condicionantes defasadas (Jagannathan & Wang, 1996, Lettau & Ludvigson, 2001, Avramov & Chordia, 2006). A covariân-

cia entre o retorno de mercado e os retornos de ações ou carteiras é especificada como função determinística das variáveis condicionantes, de forma que a especificação é estimada como um modelo multifator, no qual os fatores adicionais são resultado das interações entre o retorno de mercado e tais variáveis. Lewellen & Nagel (2006) questionam o sucesso empírico desta modelagem, pois, ainda que haja relevante variação temporal de beta, a covariação entre as séries estimadas de beta e o prêmio de risco de mercado não é suficiente para explicar erros de apreçamento observados a partir do CAPM incondicional.

Em contrapartida, modelos na forma espaço-estado, em que beta é descrito por processo estocástico e geralmente estimado utilizando filtro de Kalman, se destacam na literatura por apresentarem melhor ajuste aos dados bem como melhor desempenho em testes de apreçamento. Apesar de beta poder ser condicionado a variáveis relativas ao ciclo econômico, observadas pelo agente tomador de decisão, há variáveis que o agente não observa, de forma que uso de variáveis *proxy* de informação pode não ser suficiente para capturar toda a dinâmica de beta. O uso de técnicas como o filtro de Kalman permite estimar o coeficiente de forma mais acurada, considerando variáveis não observadas e ajustando beta otimamente a cada nova observação disponível dos retornos dos ativos envolvidos. Estudos realizados com carteiras de ações divididas por indústrias em diferentes mercados apontam para a superioridade destes modelos em relação ao modelo incondicional e outras modelagens alternativas (Faff *et al.*, 2000, Jostova & Philipov, 2005, Mergner & Bulla, 2008, Mergner, 2009). Buscando analisar se as anomalias financeiras como efeito tamanho e efeito valor poderiam ser explicadas ao se considerar a variação temporal de beta, Adrian & Franzoni (2009) propõem uma dinâmica para beta mais geral, baseada em um processo estocástico de reversão à média combinado com variáveis condicionantes defasadas. Levando em conta as críticas de Lewellen & Nagel (2006), ao ampliar a dinâmica de beta considerando não somente a dependência em variáveis condicionantes, mas uma combinação do processo estocástico com tais variáveis, Adrian & Franzoni (2009) verificam que os erros de apreçamento diminuem sensivelmente em relação ao CAPM incondicional.

Este artigo complementa estudos do CAPM condicional no Brasil a partir da modelagem alternativa da sensibilidade dos retornos do ativo ao fator de risco de mercado, em que beta é diretamente descrito por um processo estocástico podendo ser combinado ou não com variáveis condicio-

nantes, de forma a verificar a capacidade deste modelo em explicar erros de apreçamento e anomalias financeiras observadas a partir do CAPM incondicional. Flister *et al.* (2011) aplicam a metodologia proposta por Lewellen & Nagel (2006) no mercado brasileiro e observam os mesmos resultados do mercado norte-americano, de forma que o modelo apresenta ganho ínfimo em relação ao modelo incondicional. Aplicações do CAPM condicional no Brasil envolvem diferentes tipos de modelagens, mas poucas avaliam os modelos na forma espaço-estado no contexto de anomalias financeiras. O objetivo deste artigo é verificar se modelagens híbridas do CAPM condicional baseadas na proposta de Adrian & Franzoni (2009) podem também trazer ganhos no mercado brasileiro em termos de apreçamento e correção dos efeitos tamanho e valor como os observados pelos autores no mercado norte-americano. O modelo proposto por Adrian & Franzoni (2009), considerando a dinâmica de beta como processo estocástico de reversão à média combinado ou não com variáveis condicionantes, é estimado neste artigo no período de julho/1999 a maio/2013. Como contribuição deste artigo, uma variação do modelo considerando alternativamente o passeio aleatório como processo estocástico é também estimada. Adicionalmente, é realizada uma análise complementar acerca do ajuste dos modelos e testes de diagnóstico de resíduos. Os ativos estudados são carteiras construídas com base nas características *book-to-market* (BM) e valor de mercado, nas quais é possível identificar efeitos valor e tamanho, além do uso de carteiras construídas com base em setores da economia, expandindo a base de dados para realização de testes. A avaliação conjunta de testes nos formatos de séries temporais e *cross-sectional* é também uma contribuição deste estudo em relação ao trabalho de Adrian & Franzoni (2009). São realizados testes no formato de séries temporais para analisar os erros de apreçamento provenientes dos modelos como proposto pelos autores, e testes adicionais no formato *cross-sectional* com base no trabalho de Avramov & Chordia (2006) complementam os resultados identificando a que características os erros de apreçamento podem estar relacionados.

Os resultados mostram que os betas das carteiras avaliadas variam no tempo e que, dependendo da modelagem utilizada, podem reduzir erros de apreçamento em relação ao CAPM incondicional, apesar de permanecerem ainda significativos. Modelos em que a dinâmica temporal de beta é descrita por um processo estocástico se ajustam melhor aos dados do que o modelo incondicional. Testes na forma de séries temporais indicam que o modelo de passeio aleatório quando combinado com variáveis condicio-

nantes do ciclo econômico é capaz de reduzir erros de apreçamento, sendo o que apresenta melhor resultado dentre os modelos analisados. Entretanto, apesar da redução observada, os erros de apreçamento permanecem significativos, em linha com resultados reportados por Flister *et al.* (2011). Testes *cross-sectional* indicam que os modelos condicionais capturam a influência da variável BM, relacionada ao efeito valor, e identificam influência significativa de variável relativa a retornos passados. A influência destas duas variáveis pode estar relacionada a um mesmo fator de risco comum faltante no modelo, que, mesmo na forma condicional, não consegue explicar os erros de apreçamento na sua totalidade.

O artigo está assim dividido. A seção 2 apresenta brevemente o CAPM incondicional. A seção 3 faz uma revisão do CAPM condicional na literatura internacional e nacional. Na seção 4, é descrita a metodologia utilizada, abordando os principais conceitos relacionados ao filtro de Kalman, bem como os testes de apreçamento no formato de séries temporais e *cross-sectional*. Na seção 5, são apresentados os dados utilizados e os resultados obtidos. A seção 6 conclui o trabalho.

## 2. CAPM Incondicional

O CAPM nasce como a primeira estrutura formal de apreçamento de ativos de risco. Sharpe (1964) propõe uma relação entre preços dos ativos e seus atributos de risco de forma que, através da diversificação, é possível evitar parte do risco inerente a cada ativo. Contribuições nos anos subsequentes resultam no CAPM, paradigma dominante de modelo de expectativa de retornos até a década de 1980.

$$E[r_i] = r_f + \beta_i(E[r_m] - r_f) \quad (1)$$

$$\beta_i = (Cov[r_i, r_m]) / (Var[r_m]) \quad (2)$$

ou, em termos de excesso de retorno

$$E[R_i] = \beta_i(E[R_m]) \quad (3)$$

$$\beta_i = (Cov[R_i, R_m]) / (Var[R_m]) \quad (4)$$

onde:

$r_i$ ,  $r_m$  e  $r_f$  são os retornos do ativo  $i$ , da carteira de mercado e do ativo livre

de risco, respectivamente;  $R_i$  e  $R_m$  são os excessos de retorno do ativo  $i$  e da carteira de mercado em relação a  $r_f$ , respectivamente. O beta, chamado incondicional, é usualmente estimado por mínimos quadrados ordinários como o coeficiente de inclinação do modelo de mercado:

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{m,t} + \epsilon_{i,t} \quad \epsilon_{i,t} \sim N(0, \sigma_{\epsilon_i}^2) \quad t = 1 \text{ a } N \quad (5)$$

A partir da década de 1970, vários trabalhos surgem na tentativa de testar empiricamente as fortes premissas do CAPM. Os resultados de muitos destes testes questionam o CAPM no sentido de que o modelo de um fator não seria suficiente para explicar a variação *cross-sectional* dos retornos dos ativos. Alguns padrões observados nos retornos das ações são considerados anomalias por não serem explicados pelo modelo, tais como os efeitos tamanho e valor (Fama & French, 1992). Retornos futuros de empresas com menor valor de mercado tendem a ser maiores do que os previstos pelo CAPM. De forma contrária, retornos de empresas com maior razão BM tendem a ser maiores do que os previstos. Tendo em vista a evidência empírica de que outras fontes de risco podem ser apreçadas além do risco de mercado, a literatura sobre anomalias motiva o estudo de modelos de apreçamento alternativos.

Trabalhos no Brasil também verificam que o CAPM na sua forma tradicional é superado por outros modelos de apreçamento quando considerados fatores adicionais. Apesar de resultados controversos que dependem da amostra, do período de análise e da metodologia utilizada, há evidências empíricas sobre anomalias detectadas quando do uso do CAPM no mercado brasileiro, além de diversos trabalhos avaliando modelos multifatores. Neves (2003) apresenta uma revisão bibliográfica bastante completa. No Brasil, alguns trabalhos empíricos identificam uma relação entre os retornos das ações e o tamanho das firmas no mesmo sentido dos resultados encontrados em vários trabalhos internacionais (Costa Jr. & Neves, 2000, Rogers & Securato, 2009), enquanto outros identificam no sentido oposto (Garcia & Bonomo, 2001, Braga & Leal, 2002). Quanto ao efeito valor, ligado a ações cuja caracterização baseia-se na razão BM ou índices similares, estudos empíricos indicam um melhor desempenho para carteiras compostas de ações de valor em relação a carteiras compostas por ações de crescimento, como observado no mercado norte-americano (Costa Jr. & Neves, 2000, Braga & Leal, 2002).

O questionamento do CAPM pode estar relacionado à presença de múltiplas fontes de risco, mas um dos pontos mais críticos pode ser atribuído à sua natureza estática. Segundo Jagannathan & Wang (1996), a premissa de que os betas dos ativos são constantes ao longo do tempo não é razoável, uma vez que o risco relativo do fluxo de caixa dos ativos tende a variar ao longo do ciclo econômico. Durante um período de recessão, por exemplo, a alavancagem financeira de firmas em uma situação desfavorável pode aumentar de forma mais acentuada do que de outras, fazendo com que o beta das ações suba. Espera-se, desta forma, que os betas e os retornos esperados dependam da natureza de informação disponível em determinado instante de tempo. A presença de anomalias poderia, assim, estar relacionada à dinâmica temporal de beta, tornando importante a avaliação da capacidade explicativa do modelo condicional de um fator em detrimento de modelos multifatores, como o de três fatores de Fama & French (1993).

Apesar da extensa literatura sobre modelos de apreçamento na busca da melhor descrição sobre como os investidores avaliam o risco dos ativos, o CAPM é ainda hoje o mais utilizado na prática, seja por seu apelo intuitivo, seja pela sua simplicidade. A variação temporal de beta poderia ser capaz de explicar erros de apreçamento antes que novos fatores de risco comuns fossem incluídos no modelo, de modo que este artigo segue a evolução da literatura sobre o tema e analisa o CAPM a partir de sua forma condicional abordada na seção seguinte.

### 3. CAPM Condicional

Partindo do modelo de um fator, o consenso geral é que o CAPM na sua forma estática não é capaz de explicar satisfatoriamente os retornos *cross-section* das ações. Segundo Jagannathan & Wang (1996), evidências mostradas por estudos empíricos apontam para uma significativa variabilidade temporal de beta, de forma que o uso do modelo na forma condicional poderia explicar melhor as fraquezas detectadas no modelo tradicional estático. O CAPM condicional permite incorporar betas e prêmios de risco que se modificam ao longo do tempo de acordo com o ciclo econômico, podendo ser escrito como:

$$E[R_{i,t+1}|I_t] = \beta_{i,t}E[R_{m,t+1}|I_t] \quad (6)$$

$$\beta_{i,t} = \frac{Cov[R_{i,t+1}, R_{m,t+1}|I_t]}{Var[R_{m,t+1}|I_t]} \quad (7)$$

onde:

$\beta_{i,t}$  é o beta condicional do ativo  $i$  e  $I_t$  representa o conjunto de informação no tempo  $t$ .

Diferentes abordagens são encontradas na literatura para o estudo do CAPM condicional. Considerando a dependência de beta em relação à natureza da informação em um dado instante, muitos estudos fazem uso de variáveis condicionantes relacionadas ao ciclo econômico como *proxy* da informação disponível aos investidores. A premissa é que o risco associado aos fluxos de caixa das empresas pode variar ao longo do ciclo econômico, como, por exemplo, em períodos de recessão ou expansão da economia. Jagannathan & Wang (1996) analisam para o mercado norte-americano o retorno *cross-sectional* de carteiras construídas com base em tamanho e beta, a partir do CAPM condicional, utilizando como variável condicionante o *default spread*, ou risco de crédito. Os autores verificam que o modelo proposto explica melhor os retornos do que o CAPM incondicional, reduzindo anomalias observadas. Ferson & Harvey (1999) e Avramov & Chordia (2006) também modelam beta como função determinística de variáveis condicionantes defasadas relativas ao ciclo econômico, com destaque, além do *default spread*, para o *term spread*, ou risco de prazo, dado pela diferença entre títulos do tesouro americano com maturidades diferentes; o rendimento de dividendos do índice da bolsa; e o retorno defasado de taxa de juros livre de risco de curto prazo. Variáveis capazes de explicar o prêmio de risco de mercado são também utilizadas neste contexto, melhorando o desempenho de modelos de apreçamento. Lettau & Ludvigson (2001), por exemplo, buscando analisar a capacidade do CAPM condicional (e variações do modelo<sup>1</sup>) em explicar o retorno *cross-section* das carteiras ordenadas por tamanho e BM no mercado norte-americano, utilizam como variável condicionante o chamado *cay*, uma versão proposta pelos autores para sintetizar a razão consumo-riqueza agregada; os resultados mostram que os modelos condicionais avaliados apresentam melhor desempenho em relação ao CAPM incondicional. A intuição por trás de modelos como os de Lettau & Ludvigson (2001) é que um modelo condicional de um fator pode ser escrito como um modelo incondicional de múltiplos fatores no qual os fatores adicionais são resultado das interações entre o retorno de mercado e variáveis condicionantes. Outras variáveis condicionantes são

<sup>1</sup>Os autores analisam, de forma mais ampla, o CAPM com base em modelos de apreçamentos intertemporais e também consideram variações no fator utilizado como retorno de mercado.

também propostas por Campbell & Vuolteenaho (2004), com destaque para o retorno da carteira de mercado ponderada por valor, além do *term spread*, do *value spread*, dado pela diferença de rentabilidade de carteiras de ações de alto BM e baixo BM, e da razão preço-lucro.

Em contrapartida, Lewellen & Nagel (2006) argumentam que, para que o CAPM condicional conseguisse explicar as anomalias, a covariância entre o beta condicional e o prêmio de mercado de risco deveria ser muito maior do que a estimada. Justificando que o uso de variáveis de informação sobre o ciclo econômico não é capaz de explicar toda a variação de beta, eles propõem uma metodologia de estimação baseada em séries temporais de curta duração, evitando o uso de variáveis de informação, e observam que a modelagem condicional não consegue explicar de forma satisfatória as anomalias de valor e momento. Apesar da variação temporal considerável de beta, a covariância entre o beta e o prêmio de risco de mercado não é suficiente para explicar os erros de apreçamento do CAPM incondicional, contrapondo resultados observados em trabalhos como o de Lettau & Ludvigson (2001).

Além do uso de variáveis condicionantes, outra abordagem encontrada no tratamento do CAPM condicional é a especificação da dinâmica de beta a partir de modelos de séries temporais. Neste caso, beta pode ser obtido indiretamente, a partir de modelos de volatilidade condicional (Bollerslev *et al.*, 1988); ou diretamente, a partir da evolução descrita por um processo estocástico. No estudo dos retornos de carteiras de setores da economia no mercado inglês e no mercado norte-americano, respectivamente, Faff *et al.* (2000) e Mergner & Bulla (2008) propõem a comparação de diferentes modelagens para descrição da dinâmica de beta. Modelos na forma espaço-estado, em que beta segue processo estocástico de passeio aleatório ou reversão à média, são comparados com abordagens alternativas e, em ambos os artigos, apresentam melhor ajuste aos dados. Jostova & Philipov (2005) modelam beta por um processo de reversão à média para análise de carteiras de setores também no mercado norte-americano e comparam seu desempenho com dinâmicas alternativas. Novamente, o modelo apresenta melhores resultados em termos de ajuste e de capacidade explicativa dos retornos.

Adrian & Franzoni (2009) combinam dois diferentes tratamentos e propõem um modelo híbrido no qual beta é descrito por um processo de reversão à média, caracterizando um processo de aprendizagem, combinado com variáveis condicionantes. Além do *cay* de Lettau & Ludvigson (2001),

são usadas como variáveis condicionantes o retorno da carteira de mercado  $R_m$  ponderada por valor, o *term spread* e o *value spread* na análise das séries de betas de carteiras ordenadas por tamanho e BM no mercado norte-americano. À luz das críticas de Lewellen & Nagel (2006), observa-se que, ao considerar o processo de reversão à média na evolução temporal de beta combinado com variáveis condicionantes, os erros de apreçamento diminuem consideravelmente em relação ao CAPM incondicional. Nos testes realizados, Adrian & Franzoni (2009) reportam que este tratamento híbrido tem performance bastante superior à dos modelos que consideram apenas o uso de variáveis condicionantes. Os autores comparam três casos: (i) em que apenas a variável *cay* é utilizada, sendo este análogo à metodologia proposta por Lettau & Ludvigson (2001); (ii) em que apenas as variáveis  $R_m$ , *term spread* e *value spread* são utilizadas; (iii) e em que todas as variáveis são utilizadas. Ao analisar os modelos sem o processo estocástico em que apenas as variáveis condicionantes são incluídas, observa-se que apenas a inclusão da variável *cay* melhora um pouco a performance em relação ao modelo incondicional, mesmo assim não de forma substancial. Por outro lado, ao analisar a performance dos modelos híbridos, os autores verificam que em todos os casos, independente de se incluir ou não o *cay* entre as variáveis escolhidas, a redução dos erros de apreçamento é bem mais relevante, de forma que este ganho estaria relacionado à dinâmica imposta pelo processo estocástico de reversão à média, ou o *learning* como chamado pelos autores.

Artigos sobre CAPM condicional no Brasil utilizam diferentes metodologias abordadas nos estudos internacionais. A partir de modelos de volatilidade condicional, Garcia & Bonomo (2001) assumem que os componentes de beta seguem um processo ARCH. São construídas três carteiras ordenadas por tamanho no período de 1976 a 1992 e, diferentemente da evidência para os EUA, os retornos médios possuem uma relação crescente com o tamanho. O CAPM condicional proposto tem aderência melhor aos dados do que o modelo tradicional, rejeitando a restrição de beta constante. Ribenboim (2002) também utiliza modelagem por volatilidade condicional e analisa quatorze carteiras construídas por setores da economia, no período de 1989 a 1998. O modelo é aceito para o grupo de ações nos setores de maior liquidez, mas rejeitado para o grupo de menor liquidez.

Considerando o uso de variáveis condicionantes, Tambosi *et al.* (2010) testam o modelo de Jagannathan & Wang (1996) nos mercados brasileiro, chileno e argentino. No caso brasileiro, são analisadas carteiras entre 1994

e 2002 e, como previsor das variações do ciclo econômico, a variável escolhida é o *spread* entre a taxa de CDI e a taxa de juros Selic. Comparando o modelo dinâmico com o CAPM incondicional, os autores observam que o poder de explicação aumenta, apesar de os resultados serem menos significativos do que no mercado norte-americano. Galeno (2010) aplica uma metodologia não paramétrica para estimação do CAPM condicional no mercado brasileiro no período de 2002 a 2009, usando como variáveis de informação a variação da produção industrial brasileira, variação da inflação, variação do monetário agregado M4<sup>2</sup> e variação da taxa de câmbio, com destaque para a influência das duas últimas. Além das variáveis mencionadas, outras se destacam também como instrumentos *proxy* da informação disponível aos investidores relacionadas a variações do ciclo econômico no mercado brasileiro (Schor *et al.*, 2002, Neves, 2003), dentre elas risco de crédito, taxa de juros, risco Brasil e rendimento de dividendos.

O ajuste de modelos em que os betas variam no tempo é geralmente melhor do que o observado a partir do CAPM incondicional. Por outro lado, Flister *et al.* (2011) adotam a metodologia de Lewellen & Nagel (2006) de forma a verificar se o CAPM condicional é capaz de explicar as anomalias de momento, tamanho e BM no mercado brasileiro entre 1995 e 2008, para carteiras ordenadas pelas mesmas características. Analogamente aos resultados do estudo norte-americano, o ganho do CAPM condicional segundo esta modelagem é pequeno frente ao modelo tradicional. É possível observar que os betas calculados variam no tempo, porém não de forma suficiente para explicar o intercepto do modelo incondicional.

Poucos trabalhos utilizam a abordagem com base nos modelos na forma espaço-estado no mercado brasileiro. Em linha com o presente artigo, Mazzeu *et al.* (2013) aplicam a metodologia de Adrian & Franzoni (2009) para ações individuais de maior liquidez e verificam pequeno ganho em termos de apreçamento, principalmente comparado aos resultados no mercado norte-americano. Entretanto, não são analisadas carteiras de forma a relacionar erros de apreçamento a anomalias financeiras. Além disso, o processo estocástico e as variáveis condicionantes utilizadas se restringem aos mesmos do trabalho de Adrian & Franzoni (2009).

---

<sup>2</sup>Total de títulos e moeda emitidos pelo sistema financeiro nacional

#### 4. Metodologia

A metodologia proposta neste estudo se baseia em três diferentes trabalhos (Avramov & Chordia, 2006, Mergner, 2009, Adrian & Franzoni, 2009), envolvendo a análise de ajuste dos modelos considerando diferentes processos estocásticos para evolução de beta, bem como os testes de apreçamento para carteiras de ações construídas com base em tamanho e BM. O modelo proposto na sua forma mais geral é dado por (Adrian & Franzoni, 2009):

$$R_{i,t} = \beta_{i,t}R_{m,t} + \epsilon_{i,t} \quad \epsilon_{i,t} \sim N(0, \sigma_{\epsilon_i}^2) \quad (8)$$

$$\beta_{i,t+1} = B_i + \delta_i(\beta_{i,t} - B_i) + \phi_i'Z_t + \eta_{i,t} \quad \eta_{i,t} \sim N(0, \sigma_{\eta_i}^2) \quad (9)$$

onde  $B_i$  é a média de longo prazo de  $\beta_{i,t}$ ,  $\delta_i$  é o parâmetro de persistência da dinâmica de beta, que revela a força de reversão à média do processo para sua média incondicional,  $Z_t$  é o vetor de variáveis explicativas defasadas relacionadas ao ciclo econômico e  $\phi_i$  é o vetor de coeficientes que relaciona  $\beta_{i,t+1}$  com  $Z_t$ .

A dinâmica de beta é dada por uma combinação entre um processo estocástico de reversão à média e a dependência em relação a variáveis condicionantes defasadas. Sem perda de generalidade, as variáveis  $Z_t$  são ajustadas pela média, ou seja,  $E[Z_t] = \mathbf{0}$ . Outros modelos presentes na literatura podem ser vistos como casos particulares deste. Para apenas um fator, se os coeficientes  $\phi_i$  forem nulos, beta segue processo de reversão à média, análogos a modelos analisados por Jostova & Philipov (2005) e Mergner (2009); e, ainda se  $\delta_i = 1$ , beta segue processo de passeio aleatório que, segundo a análise de Mergner (2009) é o que melhor se ajusta aos dados das carteiras setoriais por ele analisadas. Se  $\delta_i = 0$  e  $\sigma_{\eta_i}^2 = 0$ , têm-se os modelos em que o beta é função linear de variáveis condicionantes, análogos a modelos utilizados por Lettau & Ludvigson (2001) e Avramov & Chordia (2006).

Tendo em vista os casos particulares acima mencionados, considerando o caso em que  $\phi_i = \mathbf{0}$  na equação (9), beta é descrito apenas por processo estocástico e estimado através do filtro de Kalman. Especificações alternativas podem ser derivadas formulando diferentes premissas sobre  $\delta_i$  e sobre o comportamento da média de longo prazo  $B_i$ . Neste estudo, serão analisados os dois processos estocásticos para modelagem de beta.

(i) Beta como passeio aleatório (PA)

$$\beta_{i,t+1} = \beta_{i,t} + \eta_{i,t+1} \quad \eta_{i,t} \sim N(0, \sigma_{\eta_i}^2) \quad (10)$$

(ii) Beta como reversão à média (RM)

$$\beta_{i,t+1} = B_i + \delta_i(\beta_{i,t} - B_i) + \eta_{i,t+1} \quad \eta_{i,t} \sim N(0, \sigma_{\eta_i}^2) \quad (11)$$

Alternativamente, considerando o caso em que  $\delta_i = 0$  e  $\sigma_{\eta_i}^2 = 0$  na equação (9), o modelo recai na abordagem tradicional do CAPM condicional em que o beta é descrito como função determinística de variáveis condicionantes. Neste caso, a dinâmica é escrita como

$$\beta_{i,t+1} = f(\mathbf{Z}_t) = \phi_{0i} + \phi_i' \mathbf{Z}_t \quad (12)$$

caracterizando um modelo de múltiplos fatores no qual o primeiro fator é o prêmio de risco de mercado  $R_{m,t}$  e os seguintes são dados pela multiplicação de cada variável que compõe o vetor  $\mathbf{Z}_t$  e o prêmio de risco de mercado, de modo que pode ser estimado por mínimos quadrados

$$\begin{aligned} R_{i,t} &= (\phi_{0i} + \phi_i' \mathbf{Z}_t) R_{m,t} + \epsilon_{i,t} \\ R_{i,t} &= \phi_{0i} R_{m,t} + \phi_i' \mathbf{Z}_t R_{m,t} + \epsilon_{i,t} \end{aligned} \quad (13)$$

Neste artigo serão analisados e comparados modelos em que beta é descrito por um dos dois processos estocásticos (passeio aleatório ou reversão à média) com e sem a dependência em variáveis condicionantes defasadas.

#### 4.1 Filtro de Kalman

A estimação dos modelos é feita sob o tratamento de regressão com coeficientes variantes no tempo (Durbin & Koopman, 2001). Um modelo univariado na forma espaço-estado é escrito a partir de suas equações de observação e de estado como

$$R_{i,t} = \mathbf{S}_t \boldsymbol{\gamma}_{i,t} + \mathbf{d}_{i,t} + \epsilon_{i,t} \quad \epsilon_{i,t} \sim N(0, \sigma_{\epsilon_i}^2) \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{i,t+1} = \mathbf{T}_{i,t} \boldsymbol{\gamma}_{i,t} + \mathbf{c}_{i,t} + \mathbf{U}_i \boldsymbol{\eta}_{i,t} \quad \boldsymbol{\eta}_{i,t} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_i) \quad (15)$$

onde  $\gamma_{i,1} \sim N(\mathbf{a}_{i,1}, \mathbf{P}_{i,1})$ ;  $E[\epsilon_{i,t} \boldsymbol{\eta}'_{i,s}] = 0$ ;  $E[\boldsymbol{\eta}'_{i,t} \gamma_{i,1}] = E[\epsilon'_{i,t} \gamma_{i,1}] = 0$ ;  $E[\epsilon_{i,t} \epsilon'_{i,s}] = 0$ ; e  $E[\boldsymbol{\eta}_{i,t} \boldsymbol{\eta}'_{i,s}] = 0$  para todo  $t, s$ .

O modelo mais geral, dado pelas equações (8)–(9), pode ser escrito considerando a média de longo prazo como uma variável de estado a ser estimada a cada nova observação. Neste artigo, a média de longo prazo é tratada como desconhecida pelos investidores, de forma que, apesar de considerada constante na definição do processo, é modelada como uma variável de estado e sua estimação atualizada a cada nova observação. Na forma matricial, temos

$$R_{i,t} = (R_{m,t} \ 0) \begin{pmatrix} \beta_{i,t} \\ B_{i,t} \end{pmatrix} + \epsilon_{i,t} \quad \epsilon_{i,t} \sim N(0, \sigma_{\epsilon_i}^2) \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} \beta_{i,t+1} \\ B_{i,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_i & (1 - \delta_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{i,t} \\ B_{i,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi'_i \mathbf{Z}_t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{i,t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \eta_{i,t} \sim N(0, \sigma_{\eta_i}^2) \quad (17)$$

Para adequação das equações (14)-(15) à forma matricial, definimos:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_t &= (R_{m,t} \ 0); \quad \boldsymbol{\gamma}_{i,t} = \begin{pmatrix} \beta_{i,t} \\ B_{i,t} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{d}_{i,t} = 0; \\ \mathbf{T}_{i,t} &= \mathbf{T}_i = \begin{pmatrix} \delta_i & (1 - \delta_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{c}_{i,t} &= \begin{pmatrix} \phi'_i \mathbf{Z}_t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi'_i \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{Z}_t = \boldsymbol{\Phi}'_i \mathbf{Z}_t; \\ \mathbf{U}_i &= \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q}_i = \sigma_{\eta_i}^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Sejam

$$\mathbf{b}_{i,t+1} = \mathbf{b}_{i,t+1|t} = E[\boldsymbol{\gamma}_{i,t+1} | \mathbf{R}_{i,t}] \quad (19)$$

$$\mathbf{P}_{i,t+1} = \mathbf{P}_{i,t+1|t} = \text{var}[\boldsymbol{\gamma}_{i,t+1} | \mathbf{R}_{i,t}] \quad (20)$$

onde  $\mathbf{R}_{i,t} = \{R_{i,1}, \dots, R_{i,t}\}$ . Através das equações do filtro de Kalman, pode-se estimar recursivamente o vetor de estado, combinando o passo de atualização e previsão do filtro.

$$\mathbf{b}_{i,t+1} = \mathbf{T}_i \mathbf{b}_{i,t} + \Phi_i' \mathbf{Z}_t + \mathbf{k}_{i,t} \mathbf{v}_{i,t} \quad (21)$$

$$\mathbf{P}_{i,t+1} = \mathbf{T}_i \mathbf{P}_{i,t} \mathbf{L}_{i,t}' + \mathbf{U}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{U}_i' \quad (22)$$

onde:  $\mathbf{v}_{i,t} = R_{i,t} - \mathbf{S}_t \mathbf{b}_{i,t}$

$$\mathbf{k}_{i,t} = \mathbf{T}_i \mathbf{M}_{i,t} \mathbf{F}_{i,t}^{-1}$$

$$\mathbf{M}_{i,t} = \mathbf{P}_{i,t} \mathbf{S}_t'$$

$$\mathbf{F}_{i,t} = \mathbf{S}_t' \mathbf{P}_{i,t} \mathbf{S}_t + \sigma_{\epsilon_i}^2$$

$$\mathbf{L}_{i,t} = \mathbf{T}_i - \mathbf{k}_{i,t} \mathbf{S}_t$$

O conjunto de hiperparâmetros  $\psi_i$  para cada ativo  $i$  é dado pelos parâmetros  $\delta_i$ ,  $\Phi_i$ ,  $\sigma_{\epsilon_i}^2$  e  $\sigma_{\eta_i}^2$ , estimados por máxima verossimilhança. A função de log-verossimilhança é dada por

$$\log L(\psi_i; \mathbf{R}_i) = -\frac{N}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \log F_{i,t} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \frac{(R_{i,t} - \mathbf{S}_t \mathbf{b}_{i,t})^2}{F_{i,t}} \quad (23)$$

onde  $\mathbf{R}_i = \{R_{i,1}, \dots, R_{i,N}\}$ . Nas aplicações em que alguns elementos do vetor de estado inicial são desconhecidos, ou difusos, uma alternativa para tratamento do filtro de Kalman é o uso da inicialização difusa, sendo recomendada a inicialização exata por conta de sua maior estabilidade, de forma que as devidas adaptações devem ser realizadas nas equações do filtro e na função de verossimilhança (detalhes em Durbin & Koopman (2001)).

#### 4.2 Ajuste do modelo e diagnósticos

Modelos alternativos podem ser comparados através dos critérios AIC (*Akaike Information Criteria*) e BIC (*Bayesian Information Criteria*). Para modelos de espaço-estado, utilizando inicialização difusa, as medidas são dadas por

$$AIC = \frac{1}{N} \left[ -2 \log L(\mathbf{R}_i | \hat{\Psi}_i) + 2(q + w) \right] \quad (24)$$

$$BIC = \frac{1}{N} \left[ -2 \log L(\mathbf{R}_i | \hat{\Psi}_i) + (q + w) \log N \right] \quad (25)$$

onde  $N$  é o tamanho da série,  $w$  é o número de hiperparâmetros a serem estimados e  $q$  é o número de elementos difusos no vetor de estado.

Para análise de diagnósticos, a premissa do modelo é que os distúrbios  $\epsilon_{i,t}$  e  $\eta_{i,t}$  são normalmente distribuídos e serialmente independentes com variâncias constantes. Sob estas hipóteses, os erros de previsão um-passo-a-frente padronizados dados por

$$u_{i,t} = \frac{v_{i,t}}{F_{i,t}} \quad t = 1 \text{ a } N \quad (26)$$

(ou  $t = q$  a  $N$  no caso de inicialização difusa) são normalmente distribuídos e serialmente independentes com variância unitária, onde  $v_{i,t} = R_{i,t} - \beta_{i,t|t-1}R_{m,t}$  e  $F_{i,t} = Var[v_{i,t}]$ . Estas propriedades podem ser verificadas através dos testes de Jarque-Bera para normalidade, de Ljung-Box para autocorrelação e ARCH de Engle para heterocedasticidade.

Finalmente, os modelos podem ser comparados quanto à sua capacidade preditiva in-sample através das medidas agregadas de RMSE e MAE, seguindo a análise de Mergner (2009).

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [(R_{i,t} - \hat{R}_{i,t})^2]} \quad (27)$$

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |R_{i,t} - \hat{R}_{i,t}| \quad (28)$$

onde  $\hat{R}_{i,t}$  é o valor estimado de  $R_{i,t}$ .

### 4.3 Testes de apreçamento

De forma a analisar se o modelo proposto é capaz de diminuir erros de apreçamento estimados no CAPM incondicional, são realizados testes seguindo abordagens de séries temporais e *cross-sectional*. Assim, se um modelo produz erros de apreçamento significativos identificados a partir das estimações por séries temporais, os testes *cross-sectional* podem ser capazes de revelar a que característica o erro de apreçamento estaria relacionado.

#### Teste sob a abordagem de séries temporais

É possível verificar o impacto no erro de apreçamento pela modelagem proposta, decompondo o alfa obtido a partir da estimação por mínimos quadrados para o CAPM incondicional (Adrian & Franzoni, 2009):

$$\alpha_{i,MQO} = E[\beta_{i,t+1} - \beta_{i,MQO}]E[R_{m,t+1}] + Cov[\beta_{i,t+1}, R_{m,t+1}] \quad (29)$$

A primeira parcela de alfa estaria relacionada à variação de beta estimado a partir do processo estocástico, enquanto a segunda englobaria também a influência de variáveis condicionantes através da covariação de beta com o prêmio de risco de mercado. Para realização dos testes de apreçamento sob a abordagem de séries temporais, estima-se o alfa condicional a cada instante de tempo a partir das estimativas resultantes do filtro de Kalman para o coeficiente beta, seguindo a metodologia de Adrian & Franzoni (2009), da seguinte forma

$$\hat{\alpha}_{i,t+1} = R_{i,t+1} - \hat{\beta}_{i,t+1|t} R_{m,t+1} \quad (30)$$

onde  $\hat{\beta}_{i,t+1|t}$  é a previsão um-passo-a-frente de beta no tempo  $t$ . Sob a hipótese de que o modelo apreça satisfatoriamente o risco sistemático,

$$E[\hat{\alpha}_i] = 0 \quad (31)$$

de forma que a estimativa final utilizada para  $\hat{\alpha}_i$  é a média da série temporal de  $\hat{\alpha}_{i,t+1}$ , sendo o erro padrão também calculado como o erro padrão da média. Como proposto por Adrian & Franzoni (2009), são calculadas ainda duas medidas agregadas para avaliar conjuntamente os erros de apreçamento. A primeira estatística é a raiz do erro médio quadrático considerando todos os ativos (*REMQ*) e a segunda, extraída do trabalho de Campbell & Vuolteenaho (2004), é o *composite pricing error (CPE)*, como  $\hat{\alpha}' \hat{\Omega}^{-1} \hat{\alpha}$ , onde  $\hat{\alpha}$  é um vetor composto pelos erros de apreçamento  $\hat{\alpha}_i$  dos  $p$  ativos calculados e  $\hat{\Omega}$  é a matriz diagonal de variâncias estimadas dos retornos dos  $p$  ativos. Esta segunda medida atribui menos peso aos valores de  $\hat{\alpha}_i$  dos ativos de maior volatilidade.

### Teste sob a abordagem *cross-sectional*

Seguindo a metodologia de Brennan *et al.* (1998) e Avramov & Chordia (2006), estima-se inicialmente a série de excesso de retorno ajustado ao risco para cada ativo  $i$ , dado por  $R_{i,t+1}^*$ .

Neste artigo, o excesso de retorno ajustado ao risco equivale à série estimada  $\hat{\alpha}_{i,t+1}$ .

$$R_{i,t+1}^* = R_{i,t+1} - \hat{\beta}_{i,t+1|t} R_{m,t+1} \text{ para cada ativo } i; t = 1 \text{ a } N \quad (32)$$

Roda-se então uma regressão *cross-sectional* considerando os  $p$  ativos a cada período  $t$ :

$$R_{i,t+1}^* = c_{0,t} + \sum_{m=1}^M c_{m,t} X_{mi,t} + e_{i,t} \text{ para cada } t; i = 1 \text{ a } p \quad (33)$$

onde  $X_{mi,t}$  é o valor da característica  $m$  do ativo  $i$  no tempo  $t$  e  $M$  é o número total de características. As características da firma devem ser insignificantes na especificação da da equação acima, ou seja,  $H_0 : E[c_{m,t}] = 0$ . O vetor de coeficientes é estimado para cada período  $t$  por

$$\hat{c}_t = (\mathbf{X}'_{t-1} \mathbf{X}_{t-1})^{-1} \mathbf{X}'_{t-1} \mathbf{R}_t^* \quad (34)$$

onde  $\hat{c}_t$  é o vetor de coeficientes da regressão *cross-sectional* no tempo  $t$ ,  $\mathbf{X}_{t-1}$  é a matriz com os dados das  $m$  características dos  $p$  ativos e  $\mathbf{R}_t^*$  é o vetor de retornos ajustados ao risco dos  $p$  ativos. Neste estudo são utilizadas como características o tamanho (valor de mercado) das carteiras analisadas, a razão BM e informações sobre retornos passados para avaliar a influência destas variáveis no excesso de retorno ajustado ao risco a partir dos modelos analisados. Tradicionalmente, os estimadores avaliados são as médias das séries temporais dos  $\hat{c}_t$  e os desvios-padrão obtidos a partir das estimativas mensais das séries temporais.

## 5. Resultados

### 5.1 Desempenho das carteiras

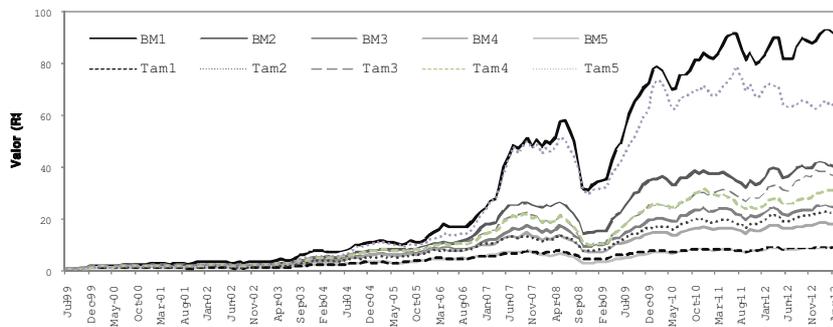
A base de dados é composta por carteiras ordenadas por tamanho e BM no período de julho de 1999 a maio de 2013. As ações, selecionadas a partir da base de dados Economática<sup>®</sup>, devem apresentar informação de valor de mercado em junho de cada ano  $t$ , começando em junho de 1999, e informação de BM em dezembro do ano  $t - 1$ , começando em dezembro de 1998. Além disso, o patrimônio líquido da empresa não pode apresentar valores negativos ao longo do período analisado. Estes dois critérios são amplamente utilizados para construção de carteiras ordenadas por critérios de tamanho e BM (Fama & French, 1992). As ações devem apresentar ainda retornos mensais por 24 meses consecutivos, sendo 12 meses anteriores à data de formação das carteiras e 12 meses posteriores. Caso a empresa tenha mais de uma ação negociada, é mantida apenas a de maior volume negociado no ano em questão para o cálculo dos retornos, porém o

patrimônio líquido é consolidado. As ações são então ordenadas de forma decrescente por tamanho com base no valor de mercado em junho do ano  $t$  e divididas em cinco quintis, sendo o primeiro composto pelas ações de maior tamanho e o quinto pelas ações de menor tamanho (Tam1, Tam2, Tam3, Tam4 e Tam5). Do mesmo modo, as ações são ordenadas com base na razão BM em dezembro do ano  $t - 1$  e divididas em cinco quintis, sendo o primeiro composto pelas ações de maior BM e o quinto pelas ações de menor BM (BM1, BM2, BM3, BM4 e BM5). O valor da razão BM é utilizado com seis meses de antecedência à construção das carteiras para garantir que dados do balanço patrimonial relativos ao ano fiscal anterior já tenham sido oficialmente divulgados, evitando o *look-ahead bias*. As carteiras são rebalanceadas anualmente, ao final de cada mês de junho, sendo construídas com igual ponderação das ações que as compõem. Os retornos mensais são calculados na forma aritmética. Como carteira de mercado, foram realizadas análises utilizando o Ibovespa, o MSCI Brasil e a carteira ponderada por valor considerando o universo de ativos utilizado. Optou-se por utilizar a última como carteira de mercado uma vez que, nas análises do CAPM incondicional, os alfas estimados para as carteiras ordenadas por BM e tamanho, associados a anomalias financeiras, foram menos significativos. Como ativo livre de risco, foram realizadas análises utilizando o CDI e o retorno dos contratos de *swap* de taxa de juros de 30 dias.<sup>3</sup> Não houve diferença nos resultados para o CAPM incondicional, de forma que se optou pelo uso do CDI.

Para avaliar a evolução do valor de cada carteira ao longo do período analisado, partimos de uma carteira de referência com valor de R\$ 1 em junho/1999. Considerando os cinco quintis de BM e tamanho, a Figura 1 apresenta o comportamento valores de julho/1999 a maio/2013. Linhas sólidas e tracejadas representam carteiras ordenadas por BM e tamanho, respectivamente.

---

<sup>3</sup>A correlação entre a carteira ponderada e o Ibovespa e o MSCI Brasil foi de 0,9765 e 0,9721, respectivamente. A correlação entre as séries é do CDI e do *swap* de taxa de juros de 30 dias foi de 0,9960.



**Figura 1**  
Evolução dos valores das carteiras

Para carteiras ordenadas por BM, a de maior BM (BM1) tem retorno bem superior às outras, enquanto a de menor BM (BM5) tem retorno inferior. Os quintis intermediários apresentam retornos maiores quanto maior o BM das ações que os compõem. Para carteiras ordenadas por tamanho, a de menor tamanho (Tam5) tem retorno superior às outras, enquanto a de maior tamanho (Tam1) tem retorno inferior. Estes resultados estão de acordo com os observados em alguns trabalhos brasileiros, com destaque para Flister *et al.* (2011). A Tabela 1 apresenta estatísticas das carteiras, bem como os resultados do CAPM incondicional.

**Tabela 1**  
Estatísticas descritivas e CAPM incondicional (julho de 1999 a maio de 2013)

	Média	Desvio Padrão	Índice Sharpe	alfa(%)	estat. t	beta	estat. t	R2 ajustado
<b>BM1</b>	3,02%	7,82%	0,24	1,38**	3,10	0,85**	11,97	0,51
<b>BM2</b>	2,42%	6,27%	0,20	0,84**	2,56	0,74**	12,41	0,62
<b>BM3</b>	2,11%	6,30%	0,15	0,48	1,88	0,83**	22,83	0,76
<b>BM4</b>	1,96%	6,33%	0,13	0,32	1,25	0,85**	20,03	0,80
<b>BM5</b>	1,56%	6,78%	0,06	-0,10	-0,35	0,89**	14,03	0,75
<b>Tam1</b>	1,56%	6,73%	0,06	-0,15	-1,62	0,98**	36,24	0,93
<b>Tam2</b>	2,09%	6,58%	0,15	0,44	1,85	0,88**	18,76	0,79
<b>Tam3</b>	2,40%	7,00%	0,18	0,76*	2,04	0,85**	11,38	0,66
<b>Tam4</b>	2,27%	6,27%	0,18	0,73	1,72	0,69**	8,28	0,54
<b>Tam5</b>	2,78%	7,43%	0,22	1,20*	2,23	0,75**	12,27	0,45

Estatísticas t calculadas com correção para autocorrelação e heteroscedasticidade através da matriz de Newey-West (lag 1). (\*) e (\*\*) indicam significância ao nível de 5% e 1%, respectivamente.

A superioridade das carteiras BM1 e Tam5 é ratificada pelos altos índices Sharpe. O intercepto alfa significativo alerta para a presença de ano-

malia, ou seja, a existência de retorno não explicado pelo risco sistemático. Para carteiras ordenadas por BM, identifica-se a existência do efeito valor, uma vez que as duas carteiras com ações de maior BM, do primeiro e segundo quintis, apresentam intercepto significativo ao nível de 1%. Também em termos absolutos, o alfa da carteira de maior BM é bastante alto, sendo o maior dentre todas as carteiras. Para as carteiras ordenadas por tamanho, a de menor tamanho apresenta intercepto significativo ao nível de 5% no período, destacando-se das demais também em termos absolutos.

## 5.2 Estimação dos modelos de CAPM Condicional

### Betas como processos estocásticos

Inicialmente, a modelagem de beta considerada envolve a dinâmica dada por apenas um dos processos estocásticos, de passeio aleatório ou reversão à média, conforme as equações (10) e (11). Os modelos foram estimados a partir do filtro de Kalman, utilizando inicialização difusa exata em todos os casos. O programa utilizado foi o Matlab<sup>®</sup> com funções adaptadas do *toolbox* SSM (Peng & Aston, 2011). A Tabela 2 apresenta os resultados para quatro das dez carteiras analisadas, referentes aos quintis de maior e menor BM e de maior e menor tamanho.<sup>4</sup>

**Tabela 2**  
Estimação do modelo condicional

		$\sigma_{\epsilon}^2 \times 10^4$	$\sigma_{\eta}^2 \times 10^2$	$\delta$	AIC	BIC	JB	Q(12)	LM(6)
<b>BM1</b>	PA	31,17**	0,0038		-2,87	-2,81	45,67**	12,81	1,89
	RM	25,57**	12,2969**	0,11	-2,88	-2,79	95,50**	13,13	1,52
<b>BM5</b>	PA	9,64**	0,3509**		-3,94	-3,89	22,47**	10,83	2,53
	RM	7,12**	8,9018**	0,10	-3,97	-3,88	5,77	11,17	3,54
<b>Tam1</b>	PA	2,80**	0,0367**		-5,22	-5,16	11,88**	21,93*	28,35**
	RM	2,23**	1,6355**	0,42	-5,21	-5,11	7,72*	21,42*	25,33**
<b>Tam5</b>	PA	31,29 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>+</sup>		-2,87	-2,81	151,56**	16,53	0,43
	RM	30,89 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>+</sup>	0,08	-2,75	-2,65	160,20**	16,74	0,36

Estimação no período de jul/1999 a mai/2013. JB é a estatística de Jarque-Bera. Q(12) é a estatística de Ljung-Box, cuja hipótese nula é de não autocorrelação até lag de ordem 12. LM(6) é a estatística do teste ARCH de Engle, cuja hipótese nula é de não efeito ARCH até ordem 6. (\*\*) e (\*) representam valores significativos ao nível de 1% e 5%, respectivamente. (+) indica que a significância dos parâmetros não foi calculada devido ao baixo valor da variância  $\sigma_{\eta_i}^2$ . PA: passeio aleatório e RM: reversão à média.

A variância estimada da equação de observação ( $\sigma_{\epsilon_i}^2$ ) é maior para carteiras de ações de maior BM e vai decrescendo para as de menor BM para

<sup>4</sup>Os resultados de todos os modelos analisados para as outras carteiras estão disponíveis junto aos autores.

as duas especificações. De forma contrária,  $\sigma_{\epsilon_i}^2$  é menor para carteiras de maior tamanho e vai crescendo para as de menor tamanho. Mesmo considerando que a variação de beta influencia a variação do retorno das carteiras, nos casos extremos em que se observa de forma proeminente o efeito valor e o efeito tamanho (BM1 e Tam5, respectivamente), a variação do retorno deve-se em grande parte também a  $\sigma_{\epsilon_i}^2$ , independentemente da variação de beta no tempo. Para nove das dez carteiras analisadas, além da variância  $\sigma_{\epsilon_i}^2$ , as variâncias  $\sigma_{\eta_i}^2$  são estatisticamente significativas em pelo menos um dos modelos, indicando comportamento estocástico dos betas. As variâncias  $\sigma_{\eta_i}^2$  são maiores no caso do modelo de reversão à média, como também observado por Mergner (2009). Para esta modelagem, a variação de beta é caracterizada pelos parâmetros de variância e persistência, sendo o valor da persistência baixo para todas as carteiras, menor do que 0,50, indicando alta força de reversão à média de longo prazo.

Para comparar o ajuste dos diferentes modelos espaço-estado, podem ser analisados o AIC e o BIC. Os valores são próximos para as duas especificações, mas, considerando todas as carteiras, as medidas tendem a ser menores para a dinâmica descrita por passeio aleatório. Em quatro das dez carteiras, a hipótese de normalidade não é rejeitada ao nível de significância de 5% por algum dos modelos.<sup>5</sup> Para nove das dez carteiras, os resultados dos testes de autocorrelação e heterocedasticidade são satisfatórios, não rejeitando as hipóteses nulas. A análise dos resíduos padronizados indica que um tratamento de *outliers* poderia melhorar o resultado do teste de normalidade.<sup>6</sup>

### Betas como combinação de processos estocásticos e variáveis condicionantes

A dinâmica de beta foi novamente modelada a partir dos dois processos estocásticos, agora combinados com variáveis condicionantes, conforme equação (9) na forma mais geral. Seguindo a literatura nacional e internacional sobre o uso de variáveis condicionantes para estimação de beta, propomos a utilização de quatro variáveis relacionadas ao ciclo econômico:

<sup>5</sup>Ao nível de significância de 1%, a normalidade não é rejeitada para sete das dez carteiras.

<sup>6</sup>Ainda que os resultados dos testes de diagnóstico de resíduos não indiquem normalidade, o estimador da variável de estado a partir do Filtro de Kalman é o estimador linear ótimo que minimiza o erro quadrático médio com base nas observações passadas (Harvey, 1989). Assim, o uso do Filtro de Kalman e a estimação pontual não são invalidados, mas deve-se considerar que a inferência dos parâmetros pode ficar prejudicada.

o retorno da carteira de mercado (Campbell & Vuolteenaho, 2004, Adrian & Franzoni, 2009); uma variável correspondente ao *term spread*, calculada como a diferença entre o retorno dos contratos de *swap* de juros de 360 dias e 30 dias (Ferson & Harvey, 1999, Campbell & Vuolteenaho, 2004, Adrian & Franzoni, 2009); e duas variáveis macroeconômicas relacionadas diretamente à economia brasileira, sendo elas a variação da taxa de câmbio, dada pela variação dos valores da PTAX de fechamento entre dois meses consecutivos, e uma variável relacionada à inflação, dada pela variação do IPCA (Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo).<sup>7</sup>

Antes da estimação do modelo que combina o processo estocástico com as variáveis, foi realizada a estimação do modelo dado pela equação (13), ou seja, considerando beta apenas como função de variáveis condicionantes. Para nove das dez carteiras analisadas, ao menos o coeficiente de uma das variáveis utilizadas foi estatisticamente significativo, indicando a influência das variáveis escolhidas na variação temporal dos betas. Desta forma, foram mantidas as quatro variáveis para estimação dos modelos resultantes da combinação de um processo estocástico com as variáveis condicionantes. Os resultados são apresentados na Tabela 3.

**Tabela 3**

Estimação do modelo combinando processo estocástico e variáveis condicionantes

		$\sigma_{\epsilon}^2 \times 10^4$	$\sigma_{\eta}^2 \times 10^2$	$\delta$	$\phi_{rm}$	$\phi_{term}$	$\phi_{ipca}$	$\phi_{ptax}$	AIC	BIC	JB	Q(12)	LM(6)
<b>BMI</b>	PA	30,44 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>+</sup>		-0,78	-13,39	4,90	-0,05	-2,85	-2,72	57,10**	12,92	1,19
	RM	28,10 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>+</sup>	-0,83	2,31	63,50	-18,37	0,83	-2,90	-2,73	88,03**	15,10	1,42
<b>BM5</b>	PA	9,71**	0,2512**		-0,04	1,14	0,20	-0,46	-3,90	-3,77	23,24**	10,07	1,84
	RM	7,18**	7,8345**	-0,07	1,28	12,87	-7,49	0,01	-3,95	-3,78	8,44*	12,74	3,46
<b>Tam1</b>	PA	2,85 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>+</sup>		0,02	3,52	-1,70	0,10	-5,20	-5,07	11,29**	22,74*	28,69**
	RM	2,09**	1,8473**	0,41	0,58	9,70	0,28	-0,08	-5,18	-5,02	4,52	23,22*	23,24**
<b>Tam5</b>	PA	30,78 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>+</sup>		0,02	-15,98	2,08	0,83	-2,83	-2,7	172,63**	18,19	0,54
	RM	29,45 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>+</sup>	-0,80	2,26	44,23	-14,01	1,00	-2,85	-2,68	204,50**	20,68	0,57

Estimação no período de jul/1999 a mai/2013. JB é a estatística de Jarque-Bera. Q(12) é a estatística de Ljung-Box, cuja hipótese nula é de não autocorrelação até lag de ordem 12. LM(6) é a estatística do teste ARCH de Engle, cuja hipótese nula é de não efeito ARCH até ordem 6. (\*\*) e (\*) representam valores significativos ao nível de 1% e 5%, respectivamente. (†) indica que a significância dos parâmetros não foi calculada devido ao baixo valor da variância  $\sigma_{\eta}^2$ . PA: passeio aleatório e RM: reversão à média.

<sup>7</sup>Os dados de *swap* foram obtidos no Bloomberg; o IPCA foi obtido no site do IBGE (<http://www.ibge.gov.br>, último acesso de 24/06/2014) e os dados da PTAX foram extraídos do Banco Central do Brasil.

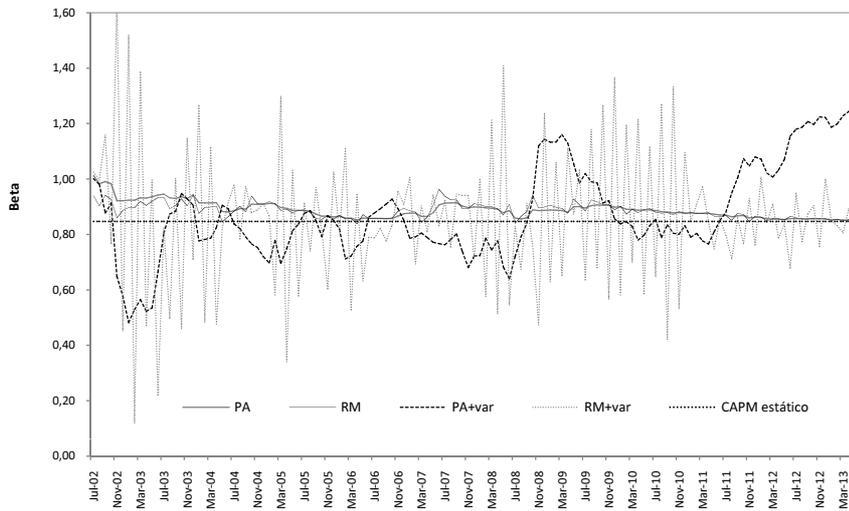
Os valores estimados da variância  $\sigma_{\epsilon_i}^2$  praticamente não se alteram com a inclusão de variáveis condicionantes<sup>8</sup> no modelo. Por outro lado, em algumas carteiras, observa-se que a dependência nestas variáveis faz com que a variância estimada  $\sigma_{\eta_i}^2$  se torne próxima de zero, de modo que variação dos valores de beta seja consequência apenas da variação dos valores das variáveis escolhidas e dos próprios valores passados de beta. Nas carteiras avaliadas, em termos de ajuste do modelo considerando os testes de normalidade, autocorrelação e heterocedasticidade, a inclusão de variáveis não traz ganhos relevantes em relação aos casos em que beta é tratado apenas como processo estocástico.

A Figura 2 apresenta a evolução de beta estimado por filtro de Kalman para os dois processos estocásticos com e sem inclusão das variáveis condicionantes para a carteira BM1.

A variação de beta no tempo pode ser bastante diferente dependendo da modelagem e de cada ativo analisado. Para a carteira BM1, por exemplo, a dinâmica imposta pelo passeio aleatório e de reversão à média são mais parecidas entre si, sendo a variabilidade imposta pela reversão à média ligeiramente mais ruidosa. A introdução de variáveis condicionantes altera substancialmente o comportamento da dinâmica de beta. A variação considerando um processo de reversão à média fica bem mais acentuada quando combinado com variáveis condicionantes.

---

<sup>8</sup>Para quatro das dez carteiras, pelo menos um dos coeficientes relativos às variáveis condicionantes é significativo em um dos modelos. Para outras quatro carteiras, a medição da significância fica prejudicada por causa do baixo valor da variância  $\sigma_{\eta_i}^2$ . A inclusão de variáveis condicionantes foi mantida para avaliação do erro de apreçamento apresentado na seção 5.3.



PA: passeio aleatório; RM: reversão à média; PA+var: passeio aleatório e variáveis condicionantes; e RM+var: reversão à média e variáveis condicionantes

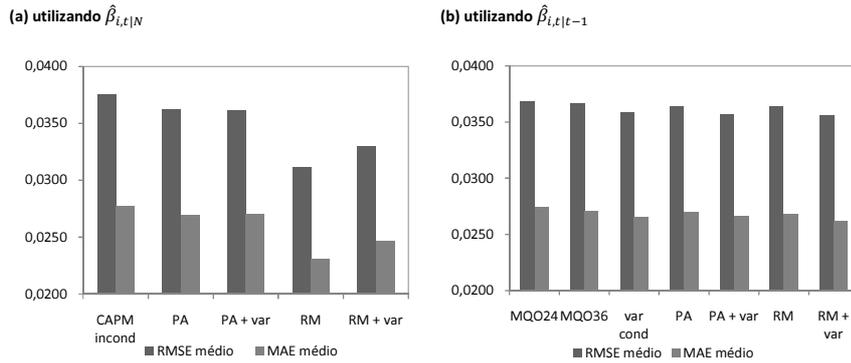
**Figura 2**  
Betas estimados

Para comparação conjunta de todos os modelos, utilizamos o MAE e o RMSE, conforme equações (27) e (28). Os resultados foram obtidos para os seguintes modelos: betas seguindo apenas processos estocásticos (passeio aleatório, PA, e reversão à média, RM); betas como função determinística das quatro variáveis condicionantes; e betas como combinação dos processos estocásticos com as quatro variáveis (PA+variáveis e RM+variáveis). Para fins comparativos, dois resultados são apresentados. A Figura 3(a) apresenta uma comparação das medidas para os modelos na forma espaço-estado com o CAPM incondicional e, para tanto, as séries de betas foram obtidas a partir do suavizador de Kalman<sup>9</sup>, utilizando toda a série disponível ( $\hat{\beta}_{i,t|N}$ ). A Figura 3(b) apresenta as medidas para os modelos na forma espaço-estado a partir das séries de betas estimadas pelo filtro de Kalman um-passo-a-frente ( $\hat{\beta}_{i,t|t-1}$ )<sup>10</sup>, sendo comparadas com os casos de betas estimados por mínimos quadrados com janelas móveis (24 e 36 me-

<sup>9</sup>Detalhes sobre suavizador de Kalman em Durbin & Koopman (2001).

<sup>10</sup>Utilizando as séries a partir de  $t = 37$  (jul/2002) para comparação com mínimos quadrados com janelas móveis.

ses). Os valores apresentados correspondem à média das dez carteiras.



**Figura 3**  
RMSE e MAE

Quando beta varia no tempo como passeio aleatório ou reversão à média, os resultados de previsão dentro da amostra são melhores comparados aos do CAPM incondicional, tendo o processo de reversão à média melhor performance. Considerando beta previsto um-passo-a-frente, observa-se que a modelagens que utilizam variáveis condicionantes apresentam ligeira superioridade, apesar de a diferença entre os modelos ser pequena.

### 5.3 Testes de apreçamento

#### Sob abordagem de séries temporais

A análise dos modelos indica que há variação temporal de beta, de forma que os modelos condicionais se ajustam melhor aos dados do que o caso em que beta é considerado constante. Ao considerar esta variação, pode-se verificar se o CAPM condicional é capaz de reduzir erros de apreçamento em comparação com o modelo incondicional. O primeiro tipo de teste baseado na abordagem de séries temporais tem como objetivo verificar os erros de apreçamento medidos pelo alfa de cada carteira, como no trabalho de Adrian & Franzoni (2009), e, para tanto, serão considerados os modelos estimados a partir do filtro de Kalman analisados na seção anterior. Os alfas  $\hat{\alpha}_i$  são calculados como médias das séries temporais de acordo com a equação (30). Adrian & Franzoni (2009) argumentam que o modelo proposto deve ser estimado para uma amostra mais longa do que

aquela em que os erros de apreçamento são avaliados, de forma que os investidores possam formar suas expectativas sobre as médias de longo prazo dos betas no caso do processo de reversão à média. Considerando o período total de julho/1999 a maio/2013 para o qual os modelos foram estimados, a Tabela 4 apresenta os erros de apreçamento calculados para a amostra para o período de julho/2002 a maio/2013, no qual se observam também alfas significativos referentes ao efeito valor.<sup>11</sup>

Tabela 4

Alfas médios para o período de jul/2002 a mai/2013

	CAPM incondicional		CAPM condicional		
		PA	PA+variáveis	RM	RM+variáveis
<b>BM1</b>	1,15%	1,04%	0,97%	1,06%	1,09%
	(2,14)	(2,13)	(2,01)	(2,18)	(2,35)
<b>BM2</b>	0,83%	0,88%	0,75%	0,91%	0,90%
	(2,12)	(2,55)	(2,26)	(2,67)	(2,64)
<b>BM3</b>	0,42%	0,48%	0,38%	0,49%	0,40%
	(1,42)	(1,78)	(1,44)	(1,80)	(1,56)
<b>BM4</b>	0,30%	0,35%	0,22%	0,36%	0,36%
	(1,05)	(1,44)	(0,91)	(1,46)	(1,49)
<b>BM5</b>	0,05%	0,13%	0,15%	0,02%	-0,06%
	(0,13)	(0,45)	(0,52)	(0,06)	(-0,20)
<b>Tam1</b>	-0,08%	-0,17%	-0,12%	-0,15%	-0,15%
	(-0,76)	(-1,13)	(-0,84)	(-1,00)	(-1,03)
<b>Tam2</b>	0,51%	0,52%	0,44%	0,53%	0,43%
	(1,77)	(1,94)	(1,72)	(2,00)	(1,66)
<b>Tam3</b>	0,57%	0,64%	0,56%	0,64%	0,63%
	(1,32)	(1,77)	(1,60)	(1,80)	(1,85)
<b>Tam4</b>	0,61%	0,69%	0,62%	0,76%	0,71%
	(1,23)	(1,84)	(1,70)	(2,04)	(1,98)
<b>Tam5</b>	1,20%	1,13%	1,01%	1,12%	1,13%
	(1,78)	(2,30)	(2,07)	(2,29)	(2,37)
<b>REMQ</b>	<b>0,0068</b>	<b>0,0068</b>	<b>0,0060</b>	<b>0,0070</b>	<b>0,0068</b>
<b>CPE</b>	<b>0,1080</b>	<b>0,1105</b>	<b>0,0855</b>	<b>0,1147</b>	<b>0,1096</b>

Estatísticas  $t$  entre parêntesis. Para CAPM incondicional,  $t$ -stat calculada com correção para autocorrelação e heteroscedasticidade pela matriz de Newey-West (lag1). Para modelos condicionais,  $t$ -stat calculada a partir do alfa médio  $\hat{\alpha}_i$  e do desvio-padrão  $(1/N)\sqrt{\sum_t Var(\hat{\alpha}_{i,t+1})}$ , onde  $var(\hat{\alpha}_{i,t+1}) = F_{i,t+1}$ , das equações de recursão do filtro de Kalman.

O modelo de passeio aleatório combinado com variáveis condicionantes é capaz de diminuir os erros de apreçamento em relação aos valores do CAPM incondicional. Apesar de ser pequena, a redução é observada em sete carteiras, sendo um pouco maior para as carteiras compostas por ações de alto BM e de pequeno tamanho (BM1 e Tam5, respectivamente), nas

<sup>11</sup>Neste período, observa-se alfa significativo ao nível de 10% referente ao efeito tamanho.

quais se observam os efeitos valor e tamanho. Para este modelo, comparado ao CAPM incondicional, observa-se uma redução das medidas agregadas REMQ e CPE de 11% e 21%, respectivamente, no período analisado. Avaliando outros períodos, este modelo também apresenta consistentemente melhor performance.<sup>12</sup> Os modelos cuja evolução dos betas se baseia em processo de reversão à média apresentam resultados menos relevantes, proporcionando uma redução menor do erro de apreçamento nas carteiras BM1 e Tam5 e não refletindo redução nas medidas REMQ e CPE, diferentemente dos resultados obtidos para o mercado norte-americano (Adrian & Franzoni, 2009). Para os modelos de reversão à média avaliando retornos de ações individuais no mercado brasileiro, Mazzeu *et al.* (2013) observaram apenas uma tímida redução dos erros de apreçamento. Ainda, para complementar a comparação no período analisado, foram avaliados aqui também os erros de apreçamento do modelo em que apenas as variáveis condicionantes são incluídas, sem a dinâmica híbrida com o processo estocástico, mas a performance em relação ao CAPM incondicional não apresenta ganho; destaca-se que, neste caso, os erros de apreçamento para as carteiras BM1 e Tam5 não são reduzidos. Este resultado está em linha com os observados por Adrian & Franzoni (2009) nos casos em que apenas variáveis condicionantes são consideradas, para os quais a redução dos erros de apreçamento não é substancial, em especial quando a variável *cay* não é incluída.

De acordo com a equação (29), podemos analisar a origem da redução dos erros de apreçamento, decompondo-o em duas parcelas: a primeira dada pela diferença entre o valor de beta dinâmico e o valor de beta calculado por mínimos quadrados ordinários e a segunda parcela pela covariação entre o beta e o prêmio de risco de mercado. Calculamos os betas médios de cada modelo para compará-los com os estimados no modelo incondicional, bem como a covariância entre as séries estimadas  $\beta_{i,t+1}$  e o prêmio de risco de mercado  $R_{m,t+1}$ , conforme Tabela 5.

<sup>12</sup>Para jul/2000-mai/2013, jul/2001-mai/2013 e jul/2004-mai/2013, o modelo PA+variáveis também foi o mais relevante, reduzindo o erro de apreçamento para 9 das 10 carteiras. Para o período de out/1999-mai/2013, todos os modelos diminuem os erros de apreçamento em relação ao CAPM para algumas carteiras, mas os resultados são muito sensíveis à instabilidade inicial dos valores de beta estimados pelo filtro de Kalman. Neste caso, o modelo RM+variáveis foi o mais relevante.

**Tabela 5**Betas médios e  $Cov(\beta_{i,t+1}, R_{m,t+1})$  no período de jul/2002 a mai/2013

	Betas médios					$Cov(\beta_{i,t+1}, R_{m,t+1})$			
	CAPM incond.	PA	PA+ variáveis	RM	RM+ variáveis	PA	PA+ Variáveis	RM	RM+ variáveis
<b>BM1</b>	0,78	0,89	0,88	0,89	0,86	0,02	0,10	0,01	-0,01
<b>BM2</b>	0,76	0,75	0,74	0,70	0,70	-0,03	0,10	-0,03	-0,02
<b>BM3</b>	0,84	0,82	0,86	0,80	0,84	-0,04	0,03	-0,03	0,03
<b>BM4</b>	0,89	0,87	0,86	0,84	0,87	-0,04	0,10	-0,02	-0,05
<b>BM5</b>	0,81	0,78	0,80	0,86	0,86	-0,06	-0,09	-0,01	0,07
<b>Tam1</b>	0,95	0,95	0,96	1,00	0,99	0,08	0,03	0,03	0,04
<b>Tam2</b>	0,86	0,87	0,90	0,86	0,89	-0,01	0,04	-0,02	0,06
<b>Tam3</b>	0,84	0,82	0,89	0,8	0,79	-0,05	-0,03	-0,04	-0,02
<b>Tam4</b>	0,73	0,71	0,72	0,63	0,70	-0,06	0,00	-0,07	-0,08
<b>Tam5</b>	0,70	0,79	0,78	0,80	0,75	0,00	0,13	0,00	0,03

Adrian & Franzoni (2009) observam que, no mercado americano, os betas médios estimados pelo CAPM condicional são bem maiores do que os estimados por mínimos quadrados ordinários, principalmente para as carteiras de ações de valor (alto BM), sendo determinante para que o modelo proposto pelos autores produza erros de apreçamento bem menores do que o CAPM incondicional. Da mesma forma, para as carteiras de maior BM e menor tamanho, observa-se aqui que os betas médios estimados a partir de todos os modelos condicionais são maiores do que o beta incondicional correspondente, explicando uma parcela do erro de apreçamento observado no CAPM incondicional. Para as outras carteiras isso não ocorre de forma tão evidente, havendo apenas alguns casos isolados em que o beta médio estimado é maior do que o valor incondicional. A outra parcela responsável pela diminuição dos erros de apreçamento se relaciona com a covariância entre as séries de beta estimado e a de excesso de retorno de mercado. No modelo de passeio aleatório com variáveis condicionantes, nas carteiras nas quais se observam maiores erros de apreçamento a partir do CAPM incondicional (BM1, BM2 e Tam5), o valor da covariância é especialmente alto, explicando também uma parcela responsável pela diminuição dos erros de apreçamento. Neste modelo, a presença de variáveis condicionantes no processo de evolução temporal de beta mostra-se relevante para gerar covariância positiva com o prêmio de risco de mercado.

Há que se considerar, entretanto, que, apesar da redução, os erros de apreçamento das carteiras de alto BM e menor tamanho são ainda significativos, sendo a hipótese nula  $\hat{\alpha}_i = E[\hat{\alpha}_{i,t+1}] = 0$  rejeitada. A variação temporal de beta imposta pelo modelo de passeio aleatório com variáveis condicionantes é capaz de reduzir os erros de apreçamento, mas ainda resta

parcela significativa não explicada pelo risco sistemático. Esta conclusão corrobora resultados encontrados por Lewellen & Nagel (2006) e Flister *et al.* (2011). Nos dois casos, verifica-se, para o mercado norte-americano e para o mercado brasileiro, respectivamente, que a covariância entre beta e o prêmio de risco de mercado deveria ser ainda maior para que o modelo condicional fosse capaz de explicar as anomalias financeiras.

### **Sob abordagem *cross-sectional***

Seguindo a abordagem de testes no formato *cross-sectional*, como em Avramov & Chordia (2006), pode-se analisar adicionalmente a que características os erros de apreçamento estariam relacionados. As características utilizadas foram calculadas em base mensal da seguinte forma:

- TAM: valor de mercado médio de cada carteira, em base logarítmica, atualizado mensalmente.
- BM: razão BM de cada carteira, em base logarítmica, atualizando o valor patrimonial com informações trimestrais e valor de mercado de forma mensal.
- RET2-3, RET4-6, RET7-12: retorno acumulado de cada carteira no segundo e no terceiro meses, do quarto ao sexto mês e do sétimo ao décimo segundo mês, respectivamente, anteriores a cada mês  $t$ .

As duas primeiras variáveis foram ainda normalizadas e expressas como desvios de suas médias *cross-sectional*, defasadas de dois períodos para a regressão a cada instante  $t$  (Brennan *et al.*, 1998). Para compor a base de ativos do teste, além das dez carteiras analisadas, foram construídas dez carteiras de acordo com setores da economia brasileira (Alimentos e Bebidas; Comércio; Energia Elétrica; Finanças e Seguros; Petróleo e Gás; Química; Siderurgia e Metalurgia; Telecomunicações; Têxtil; Veículos e Peças) a partir da mesma base de dados. Lewellen *et al.* (2010) recomendam expandir a base no teste *cross-sectional* utilizando ativos não construídos a partir de características como tamanho e BM, de forma a obter resultados mais relevantes.

Rodamos inicialmente o procedimento para o excesso de retorno bruto das carteiras, bem como para o retorno ajustado ao risco pelo CAPM incondicional. Em seguida, o procedimento foi realizado para o retorno ajustado ao risco proveniente dos modelos em que beta varia como passeio aleatório

e reversão à média, com e sem influência de variáveis condicionantes. O período utilizado foi de julho/2002 a maio/2013, o mesmo anterior. A Tabela 6 apresenta os resultados para o valor médio dos coeficientes  $\hat{c}_t$  dados pela equação (34) e a estatística  $t$  correspondente.

Considerando o excesso de retorno bruto e ajustado ao risco pelo CAPM incondicional, a variável BM mostra-se estatisticamente significativa. Nos dois casos, quando a variável tamanho é considerada juntamente com a variável BM, seu poder explicativo desaparece; além disso, nenhuma das variáveis relativas a retornos passados se mostra significativa. Já nos casos de CAPM condicional propostos, a variável BM perde poder explicativo, deixando de ser significativa em três dos modelos; porém, em contrapartida, quando são analisadas as variáveis de retornos passados, destaca-se a significância de RET7-12. Para o período analisado, ao se considerar a variação temporal de beta, os modelos propostos são capazes de capturar a influência das variáveis BM e tamanho, mas explicitam uma dependência em variáveis de retorno passado, de forma que nenhuma das modelagens analisadas é capaz de explicar de forma satisfatória o impacto da variável RET7-12 na análise *cross-sectional* dos retornos médios, sendo a significância maior para os modelos cujos beta é descrito por processo de passeio aleatório.

**Tabela 6**

Regressão *cross-sectional* para excesso de retorno e retornos ajustados pelos modelos

	Excesso retorno	CAPM incondicional		CAPM condicional		
		PA	PA+variáveis	RM	RM+variáveis	
Intercepto	0,02 (0,04)	-0,38 (-0,99)	-0,23 (-0,63)	-0,21 (-0,57)	-0,34 (-0,91)	-0,33 (-0,86)
BM	0,52 (2,24)	0,43 (1,84)	0,29 (1,27)	0,35 (1,51)	0,36 (1,57)	0,39 (1,71)
TAM	0,01 (0,08)	-0,08 (-0,75)	-0,13 (-1,24)	-0,08 (-0,79)	-0,11 (-1,06)	-0,1 (-0,94)
RET2-3	1,94 (0,84)	2,09 (0,93)	1,18 (0,54)	1,47 (0,64)	2,13 (0,93)	1,74 (0,78)
RET4-6	2,54 (1,23)	2,58 (1,35)	3,63 (1,80)	3,07 (1,56)	3,06 (1,57)	2,74 (1,44)
RET7-12	1,85 (1,60)	1,62 (1,44)	2,66 (2,33)	2,42 (2,21)	2,08 (1,87)	2,09 (1,87)

Coefficientes  $\hat{c}_t$  e estatísticas  $t$  correspondentes entre parêntesis, calculadas a partir do valor médio da série temporal de cada coeficiente  $\hat{c}_t$  e do desvio-padrão correspondente.

A influência da variável relativa a retornos passados na análise *cross-sectional* dos retornos médios deve ser analisada com cautela. Ao mesmo tempo em que pode sugerir a existência de um efeito momento, ela só é evi-

denciada no retorno ajustado dos modelos de CAPM condicional, uma vez que, no incondicional, a influência que predomina é da variável relativa ao BM. A presença do efeito momento é controversa na literatura, mas resultados empíricos de trabalhos mais recentes não suportam evidências de sua existência no Brasil. Flister *et al.* (2011), ao avaliar carteiras construídas com base no critério de momento, não identificam presença de anomalia relativa a efeito momento, considerando tanto a análise dos retornos médios dos retornos médios como a baixa significância dos interceptos do ajuste do CAPM incondicional no período de 1995 a 2008. Improta (2012) analisa um grande número de estratégias de investimento de forma a estudar os efeitos momento e contrário no período de 1999 a 2012 no mercado brasileiro. O autor observa um tímido e frágil efeito momento no curto prazo, apenas para uma das estratégias avaliadas e que consegue ser capturado com sucesso a partir do modelo estático de três fatores de Fama & French (1993). De forma geral, Improta (2012) verifica que a exposição aos fatores de risco do referido modelo é capaz de explicar os retornos das estratégias estudadas. Na análise das sensibilidades aos fatores para quatro estratégias específicas, o autor observa ainda que a exposição ao fator HML (*High minus Low*)<sup>13</sup> de Fama & French (1993), relacionado à característica de BM das ações, é significativa em todos os casos. Os retornos das estratégias de momento propostas por Improta (2012) são possivelmente explicados pela alta exposição ao prêmio de risco associado ao excesso de retorno das ações de valor (alto BM) em relação às ações de crescimento (baixo BM), o que pode também ter relação com os resultados aqui observados. Na análise das duas primeiras colunas da Tabela 6, observa-se que a variável BM é significativa na explicação dos retornos *cross-section* das carteiras ordenadas por tamanho e BM. Por outro lado, nos retornos ajustados ao risco a partir das modelagens propostas para o CAPM condicional, a significância da variável BM diminui e explicita a significância de variável relativa a retornos passados. A influência destas duas variáveis pode estar relacionada a um mesmo fator de risco comum que deveria estar presente no modelo, possivelmente o risco relacionado ao fator HML, cuja relevância é destacada nas estratégias de momento analisadas por Improta (2012). Como já observado, o modelo de um fator condicional proposto, apesar de reduzir os erros

<sup>13</sup>O fator HML do modelo de três fatores de Fama & French (1993) é construído para replicar o fator de risco nos retornos relacionados à característica de BM das ações, sendo definido como a diferença entre a média dos retornos de carteiras de ações com alto BM e a média dos retornos de carteiras com baixo BM, já desconsiderando a influência da característica de tamanho.

de apreçamento, não é capaz de explicá-los em sua totalidade, sugerindo realmente a necessidade de se considerar um fator comum de risco adicional. Uma extensão do estudo, neste caso, poderia envolver a expansão da base de ativos analisados, considerando também carteiras construídas com base em retornos passados das ações, bem como uma extensão do CAPM condicional para um modelo multifator.

## 6. Conclusões

São poucas as aplicações do CAPM condicional cujo beta é tratado de forma estocástica e estimado a partir de modelos na forma espaço-estado no mercado brasileiro. Os resultados encontrados a partir das análises deste estudo mostram que esta modelagem pode apresentar resultados satisfatórios em termos de ajuste aos dados, indicando uma variação temporal dos betas. Porém os ganhos na explicação dos erros de apreçamento identificados a partir do CAPM incondicional são limitados.

A variação temporal de beta é consenso na literatura e, se modelada adequadamente, pode ser capaz de explicar melhor o comportamento dos retornos das ações, mesmo sem incluir novos fatores de risco no modelo. Partindo da estimação do CAPM incondicional, identificamos a presença de um retorno anormal para carteiras de ações de maior BM e menor tamanho. Os modelos em que a dinâmica de beta segue processo estocástico apresentam melhor ajuste e capacidade preditiva dentro da amostra do que o modelo incondicional. Considerando os testes de apreçamento, o modelo de passeio aleatório quando combinado com variáveis condicionantes é capaz de explicar parte dos alfas estimados das carteiras analisadas a partir do CAPM incondicional. Por outro lado, esta redução é relativamente pequena, de forma que os erros de apreçamento permanecem significativos nas carteiras de maior BM e menor tamanho. Apesar de evidências da variação temporal de beta, os modelos analisados não são capazes de explicar o intercepto do CAPM incondicional na sua totalidade. A covariância do beta dinâmico com retorno de mercado não é suficiente para explicar os erros de apreçamento por completo, corroborando resultados de Flister *et al.* (2011).

Com objetivo de analisar que variáveis explicam este retorno anormal, testes sob a abordagem de regressão *cross-sectional* mostram que a modelagem adequada da variação temporal de beta é capaz de diminuir a influência da variável BM na explicação dos retornos, mas evidencia que variáveis relacionadas a retornos passados apresentam alto poder explicativo neste

sentido. As modelagens utilizadas não explicam de forma satisfatória o impacto da variável RET7-12, sugerindo a necessidade de incorporar outro fator de risco comum faltante no modelo.

Uma extensão deste trabalho envolveria a comparação do desempenho de modelos multifatores condicionais e estáticos para uma base maior de ativos de forma a analisar a presença de anomalias financeiras relacionadas aos efeitos valor, tamanho e momento. Trabalhos futuros podem envolver ainda o tratamento de *outliers* para redução da não normalidade dos resíduos, ou ainda, uma especificação diferente para a distribuição dos erros do modelo. Além disso, o estudo sobre as variáveis condicionantes a serem utilizadas não se esgota nesta pesquisa. Uma análise mais detalhada sobre as melhores variáveis condicionantes a serem utilizadas pode ser também realizada para aprofundar a análise sobre a capacidade explicativa do modelo condicional.

## Referências

- Adrian, Tobias, & Franzoni, Francesco. 2009. Learning About Beta: Time-Varying Factor Loadings, Expected Returns, and the Conditional CAPM. *Journal of Empirical Finance*, **16**, 537–556.
- Avramov, Doron, & Chordia, Tarun. 2006. Asset Pricing Models and Financial Market Anomalies. *The Review of Financial Studies*, **19**, 1001–1040.
- Bollerslev, Tim, Engle, Robert F., & Wooldridge, Jeffrey M. 1988. A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances. *The Journal of Political Economy*, **96**, 116–131.
- Braga, Cláudio M., & Leal, Ricardo P. C. 2002. Ações de Valor e de Crescimento Nos Anos 1990. *Pages 235–248 of: Bonomo, M. A. (ed), Finanças Aplicadas Ao Brasil*. Rio de Janeiro: Editora FGV.
- Brennan, Michael J., Chordia, Tarun, & Subrahmanyam, Avanidhar. 1998. Alternative Factor Specifications, Security Characteristics, and the Cross-Section of Expected Stock Returns. *Journal of Financial Economics*, **49**, 345–373.
- Campbell, John Y., & Vuolteenaho, Tuomo. 2004. Bad Beta, Good Beta. *The American Economic Review*, **94**, 1249–1275.

- Costa Jr., Newton C. A., & Neves, Myrian B. E. 2000. Variáveis Fundamentalistas e Os Retornos de Ações. *Revista Brasileira de Economia*, **54**, 123–137.
- Durbin, James, & Koopman, Siem J. 2001. *Time Series Analysis by State Space Methods*. Oxford: Oxford University Press. Oxford Statistical Science Series.
- Faff, Robert W., Hillier, David, & Hillier, Joseph. 2000. Time Varying Beta Risk: An Analysis of Alternative Modelling Techniques. *Journal of Business Finance and Accounting*, **27**, 523–554.
- Fama, Eugene F., & French, Kenneth R. 1992. The Cross-Section of Expected Stock Returns. *The Journal of Finance*, **47**, 427–465.
- Fama, Eugene F., & French, Kenneth R. 1993. Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds. *Journal of Financial Economics*, **3–56**, 33.
- Ferson, Wayne E., & Harvey, Campbell R. 1999. Conditioning Variables and the Cross Section of Stock Returns. *The Journal of Finance*, **54**, 1325–1360.
- Flister, Frederico V., Bressan, Aureliano A., & Amaral, Hudson F. 2011. CAPM Condicional No Mercado Brasileiro: Um Estudo Dos Efeitos Momento, Tamanho e Book-to-Market Entre 1995 e 2008. *Revista Brasileira de Finanças*, **9**, 105–129.
- Galeno, Marcela M. 2010. *Aplicação Do CAPM (Capital Asset-Pricing Model) Condicional Por Meio de Métodos Não-Paramétricos Para a Economia Brasileira: Um Estudo Empírico Do Período 2002–2009*. FEA-USP, São Paulo. Dissertação de Mestrado. Disponível em <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/12/12139/tde-04112010-180310/pt-br.php> (último acesso em 24 de junho de 2014).
- Garcia, René, & Bonomo, Marco Antonio. 2001. Tests of Conditional Asset Pricing Models in the Brazilian Stock Market. *Journal of International Money and Finance*, **20**, 71–90.
- Harvey, Andrew C. 1989. *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge: Cambridge University Press. 554 p.

- Improta, João P. B. 2012. *Momentum and Reversal Effects in Brazil*. FEA-USP, São Paulo. Dissertação de Mestrado. Disponível em <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/12/12138/tde-15032013-165910/pt-br.php> (último acesso em 24 de junho de 2014).
- Jagannathan, Ravi, & Wang, Zhenyu. 1996. The Conditional CAPM and the Cross-Section of Expected Returns. *The Journal of Finance*, **51**, 3–53.
- Jostova, Gergana, & Philipov, Alexander. 2005. Bayesian Analysis of Stochastic Betas. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **40**, 747–778.
- Lettau, Martin, & Ludvigson, Sydney. 2001. Resurrecting the (C)CAPM: A Cross-Sectional Test When Risk Premia are Time-Varying. *Journal of Political Economy*, **109**, 1238–1287.
- Lewellen, Jonathan, & Nagel, Stefan. 2006. The Conditional CAPM Does Not Explain Asset-Pricing Anomalies. *Journal of Financial Economics*, **82**, 289–314.
- Lewellen, Jonathan, Nagel, Stefan, & Shanken, Jay. 2010. A Skeptical Appraisal of Asset-Pricing Tests. *Journal of Financial Economics*, **96**, 175–194.
- Mazzeu, João Henrique G., Costa Jr., Newton C. A., & Santos, André A. P. 2013. CAPM Condicional Com Aprendizagem Aplicado Ao Mercado Brasileiro de Ações. *Revista de Administração Mackenzie*, **14**, 143–175.
- Mergner, Sascha. 2009. *Applications of State Space Models in Finance: An Empirical Analysis of the Time-Varying Relationship Between Macroeconomics, Fundamentals and Pan-European Industry Portfolios*. Universitätsverlag Göttingen, Göttingen. 202 p.
- Mergner, Sascha, & Bulla, Jan. 2008. Time-Varying Beta Risk of Pan-European Industry Portfolios: A Comparison of Alternative Modeling Techniques. *The European Journal of Finance*, **14**, 771–802.
- Neves, Myrian B. 2003. *Três Ensaios Em Modelos de Apreçamento de Ativos*. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. Tese de Doutorado.

- Peng, Jyh-Ying, & Aston, John A. D. 2011. The State Space Models Toolbox for MATLAB. *Journal of Statistical Software*, **41**, 1–26.
- Ribenboim, Guilherme. 2002. Testes de Versões Do Modelo CAPM No Brasil. *Pages 17–40 of: Bonomo, M. A. (ed), Finanças Aplicadas Ao Brasil*. Rio de Janeiro: Editora FGV.
- Rogers, Pablo, & Securato, José Roberto. 2009. Estudo Comparativo No Mercado Brasileiro Do Capital Asset Pricing Model (CAPM), Modelo de 3-Fatores de Fama e French e Reward Beta Approach. *RAC-Eletrônica*, **3**, 159–179.
- Schor, Adriana, Bonomo, Marco Antonio, & Pereira, Pedro L. V. 2002. APT e Variáveis Macroeconômicas: Um Estudo Empírico Sobre O Mercado Acionário Brasileiro. *Pages 55–77 of: Bonomo, M. A. (ed), Finanças Aplicadas Ao Brasil*. Rio de Janeiro: Editora FGV.
- Sharpe, William F. 1964. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *The Journal of Finance*, **19**, 425–442.
- Tambosi, Elmo, Garcia, Fábio G., Imoniana, Joshua O., & Moreiras, Luiz Maurício F. 2010. Teste Do CAPM Condicional Dos Retornos de Carteiras Dos Mercados Brasileiro, Argentino e Chileno, Comparando-Os Com O Mercado Norte-Americano. *Revista de Administração de Empresas*, **50**, 60–74.