

SWARCH e Volatilidade Implícita no Câmbio do Real/USD

Rafael Machado Santana*

Rodrigo De Losso da Silveira Bueno**

Resumo

Este artigo avalia empiricamente a previsão de volatilidade e o conteúdo informacional das variações do câmbio US\$/R\$, usando opções negociadas na Bolsa de Futuros brasileira. A comparação usa dois modelos de previsão alternativos. O primeiro modelo supõe mudanças markovianas de regime na variância condicional – SWARCH (Hamilton, 1994). No segundo, a volatilidade é implicitamente calculada usando o modelo de Garman e Kohlhagen (1983). Os resultados mostram que o desempenho do SWARCH é superior em termos de previsão e conteúdo informacional, contrastando com a literatura corrente em dois aspectos: primeiro porque utiliza um modelo com mudança de regimes ao invés de um sem mudanças, segundo porque o melhor modelo é o que usa dados passados em vez da volatilidade implícita.

Palavras-chave: SWARCH; mudanças de regime; persistência; volatilidade implícita.

Códigos JEL: G12; G13; C52.

Abstract

This paper evaluates empirically the volatility prediction and the informational content of the exchange rate variation. The comparison is built on two different models. The first is a markov switching model on the conditional variance – SWARCH (Hamilton, 1994). The second model is based on the Garman e Kohlhagen (1983) option pricing model, from which one extracts the implicit volatility. The results show that the SWARCH's performance is better in both dimensions and contrast with the literature in two aspects: first because the model with switching regime is not as usual as the ones without it, second because the best model is based on historical data rather than implicit volatility.

Keywords: SWARCH; regime switching; persistence; implicit volatility.

Submetido em Janeiro de 2008. Aceito em Julho de 2008. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além de ser avaliado pelos editores. Editor principal: Ricardo P. C. Leal. Este artigo é resultado da dissertação de mestrado do primeiro autor, orientada pelo segundo. O primeiro autor agradece o apoio financeiro do CNPq e o segundo, do GVpesquisa e FAPESP. Os autores agradecem os comentários feitos pelos participantes do V Encontro da Sociedade Brasileira de Finanças. Erros remanescentes são de responsabilidade exclusiva dos autores.

*Instituto de Pesquisas Econômicas IPE/USP. Endereço: Av. Professor Luciano Gualberto, 908 - Cidade Universitária, São Paulo - SP, CEP 05508-900, Brasil. Tel: (11) 3091-5886. E-mail: rafael.m.santana@gmail.com

**GVcepe/FGV. Departamento de Contabilidade, Finanças e Controle - CFC, Escola de Administração de Empresas de São Paulo - EAESP, Fundação Getulio Vargas - FGV. Endereço: R. Itapeva, 474 - 8º andar - Bela Vista, São Paulo - SP, CEP 01332-000, Brasil. Tel: (11) 3281-7859. E-mail: rodrigo.bueno@fgv.br

1. Introdução

Este artigo compara o poder de previsão de volatilidade usando duas técnicas alternativas: volatilidade implícita e volatilidade condicional com mudança de regime. O problema da previsão de volatilidade permeia diversas áreas em finanças, como, por exemplo na administração de risco ao se tentar calcular a probabilidade de uma determinada perda, na negociação de opções, ou na decisão de compra ou venda de um ativo (Engle e Patton, 2001).

As duas técnicas de previsão são distintas quanto às motivações teóricas que as originam e quanto à forma como computam a estimativa desejada. No caso condicional, a previsão da volatilidade é construída a partir da modelagem de séries temporais. Nesse sentido, pode-se chamar a previsão de *volatilidade histórica*. Dessa técnica, os modelos ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) e GARCH (*Generalized ARCH*) de Engle (1982) e Bollerslev (1986) são os representantes mais conhecidos. Uma segunda forma de previsão é obtida a partir da *volatilidade implícita* nos preços de opções. Nessa técnica, estabelece-se uma fórmula de apreçamento de opções e obtém-se a previsão como sendo o valor do parâmetro de volatilidade da fórmula. Dentro dessa abordagem, o modelo de Black e Scholes (1973) é o precursor.

A literatura debate qual é a melhor técnica, partindo da hipótese que a volatilidade implícita é o melhor previsor da volatilidade. Argumenta que, à medida que a volatilidade implícita é derivada dos preços de mercado das opções e mantém uma relação direta com esses mesmos preços, se houver um previsor melhor, então é possível conceber uma estratégia que produza lucros anormais, arbitrando entre contratos com preços desalinhados (Jorion, 1995, p. 507). Implícitos nessa idéia estão a hipótese de que os mercados de opções são eficientes e que o modelo de opções escolhido está correto.

A forma de comparar essas técnicas de previsão é avaliando a *capacidade de predição* e o *conteúdo informacional* da volatilidade histórica *vis-à-vis* ao da volatilidade implícita. Infere-se, então, quanto cada tipo de previsão explica uma *proxy* de volatilidade realizada e, se uma das estimativas subjuga a outra, quanto de informação que ela aporta para explicar aquela *proxy*, de tal forma a tornar essa outra estimativa insignificante como previsor da volatilidade realizada.

Jorion (1995), examinando a volatilidade do retorno de diversas taxas de câmbio com relação ao dólar e utilizando opções sobre futuros de taxas de câmbio, mostra que o conteúdo informacional da medida histórica não acrescenta nada em relação ao conteúdo informacional da volatilidade implícita. Utilizando opções sobre taxas de câmbio à vista, Xu e Taylor (1995) obtêm resultados semelhantes. Investigando a volatilidade do índice S&P 100, há os trabalhos de Fleming (1998), Christensen e Prabhala (1998), Blair (2001) e Day e Lewis (1992), muito embora neste último artigo as evidências sejam tênues.

Alternativamente, Kroner (1993), usando opções sobre *commodities*; Lamoureux e Lastrapes (1993) e Vasilellis e Meade (1996), trabalhando com opções sobre ações da CBOE (*Chicago Board Options Exchange*) e da bolsa de Londres, respectivamente; e Amin e Victor (1997), estudando a volatilidade da taxa de juros com opções de eurodólar negociadas na CME (*Chicago Mercantile Exchange*), mostram que a volatilidade histórica acrescenta informação com relação à volatilidade implícita, para explicar a volatilidade realizada.

No Brasil, há dois estudos feitos com o retorno da taxa de câmbio REAL/USD. Andrade e Tabak (2000) e Chang (2002) verificam que, quando as volatilidades implícita e histórica são colocadas em um mesmo modelo para explicar a volatilidade realizada, o papel da volatilidade histórica é estatisticamente insignificante, contrastando com o papel da volatilidade implícita. Mais recentemente, Gabe e Portugal (2004), utilizando ações e opções da Telemar, chegam a um resultado distinto, notando que as duas técnicas de previsões são significantes quando consideradas conjuntamente para explicar a volatilidade realizada.

Neste artigo, estendemos modelos anteriores ao permitir que uma série de retornos tenha distintos regimes de volatilidade ao longo do tempo. Particularmente, comparamos o desempenho dos previsores de volatilidade para o caso da taxa de câmbio entre o real e o dólar, mudando a especificação do modelo de série temporal utilizada nos artigos citados, de um GARCH (1,1) gaussiano para o *Switching ARCH* (SWARCH) de Hamilton (1994), no qual a variância¹ condicional possui um número finito de regimes, governados segundo uma cadeia de Markov.

Os estudos mencionados desconsideram a possibilidade de que as séries financeiras e suas volatilidades condicionais tenham padrões de comportamento distintos ao longo do tempo, embora existam evidências contrárias (Pereira, 1999). Desconsiderar a possibilidade de mudança de regime na volatilidade é um aspecto importante por dois motivos. Em primeiro lugar, como ilustra a seção 4, ignorar a ocorrência de tal descontinuidade, embora exista, implica que os modelos GARCH tendem a ter seus parâmetros superestimados, produzindo padrões de volatilidade inobservados e comprometendo seu poder preditivo. Assim, a utilização de uma especificação com mudança de regime contorna tais dificuldades e tende a produzir resultados melhores. De fato, Bollen (2000), trabalhando com as taxas de câmbio da Libra esterlina, do Iene e do Marco alemão, com relação ao US dólar, mostram que um modelo com mudança de regime na média e na variância produz um ajuste melhor aos dados e previsões mais precisas do que um modelo GARCH (1,1). Também Daouk e Guo (2004), analisando opções sobre um índice de volatilidade, obtêm melhor ajuste aos dados com uma especificação com distintos estados para a variância condicional. Ademais, para o caso brasileiro, Issler (1999) chega à conclusão de que o SWARCH é superior a vários outros modelos ARCH no que se refere à aderência aos dados e à capacidade de previsão.

¹Utilizaremos os termos variância e volatilidade indistintamente, apenas fazendo a diferenciação quando for necessária.

Em segundo lugar, o modelo com mudanças de regime permite ajustar melhor as expectativas de comportamento das variáveis ante a ocorrência de determinados eventos, cuja probabilidade de acontecer pode ser calculada. Além disso, o SWARCH é um caso particular de um modelo de mistura de densidades de probabilidade e, portanto, oferece maior flexibilidade para ajustar retornos que seguem uma distribuição desconhecida (McLachlan e Peel, 2000).

No cálculo da volatilidade implícita, usar-se-á o modelo de Garman e Kohlhagen (1983), doravante denominado GK, que é uma extensão do modelo de Black e Scholes (1973) para opções sobre taxas de câmbio. Trata-se de um modelo largamente empregado na literatura sobre apreçamento de opções na comparação com outros modelos, como Andrade e Tabak (2000) e Chang (2002), com quem defrontamos nossos resultados, à despeito de usarmos período distinto ao deles.

Este artigo está estruturado da seguinte forma: na Seção 2, expomos o modelo de mudança de regime na variância condicional, juntamente com outros dois modelos da família ARCH. A Seção 3 traz o modelo de apreçamento de opções usado para calcular as volatilidades implícitas. Na Seção 4, descrevemos o problema em estimar o modelo GARCH quando existe mudança de regime na variância da série. A seguir, a Seção 5 apresenta o arcabouço econométrico que estaremos utilizando para comparar as previsões da volatilidade. Na Seção 6, descrevem-se os dados e apresentam-se os resultados obtidos. A Seção 7 conclui o artigo.

2. Volatilidade Histórica

Ainda que o intuito seja averiguar o desempenho do modelo SWARCH relativamente à previsão feita pela volatilidade implícita, estimamos os modelos GARCH e TARCH, para contrastar o uso de especificações com e sem mudança de regime e, também, com a literatura nacional sobre o mesmo assunto.

2.1 O modelo SWARCH

O modelo de volatilidade histórica com mudança de regime é o modelo SWARCH – *Switching Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, de Hamilton (1994), baseado em Engle (1982), e especificado da seguinte forma:

$$y_t = E[y_t | \Omega_{t-1}] + \epsilon_t \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= u_t \sqrt{g_{st}} \\ u_t &= v_t \sqrt{h_t}, v_t \tilde{iid} \end{aligned} \quad (2)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i v_{t-i}^2 \quad (3)$$

em que:

y_t é o retorno da taxa de câmbio;

h_t é sua variância condicional;

v_t assume usualmente uma distribuição normal ou t-student;

$s_t = 1, 2, \dots, k (k \in N)$ é uma variável latente independente de y_r e v_m , para todo r e m , governada por uma cadeia de Markov com k estados descrita por

$$\begin{aligned} P(s_t = j \mid s_{t-1} = i, s_{t-2} = K, \dots, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) &= \\ &= P(s_t = j \mid s_{t-1} = i) \\ &= p_{ij}, i, j, K \in 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (4)$$

A variável s_t atua como um índice de g , em que $g \in R^+$. Dessa forma o termo aleatório v_t pode ter seu efeito sobre o retorno acentuado (ou reduzido) a depender da escala que se realize no instante t . E isso, por sua vez, faz com que a variância de y_t , condicionada ao conjunto de informação em $t-1$, Ω_{t-1} , e s_t , seja dada por $g_{s_t} h_t$. Logo, a mudança de regime se dá com uma alteração na escala da variância do modelo ARCH.²

2.2 O modelo ARCH generalizado – GARCH

Trata-se de uma generalização do modelo de ARCH, feita por Bollerslev (1986) na qual se adiciona à especificação da variância condicional a própria variância condicional defasada. Isto é, em um GARCH (p, q) temos a seguinte expressão:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i v_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} \quad (5)$$

A vantagem desse modelo em relação ao ARCH está em que ele permite captar a estrutura auto-regressiva da variância condicional com uma especificação mais parcimoniosa.

2.3 O modelo TARCH

No modelo TARCH (Threshold ARCH), introduzido independentemente por Glosten (1993) e Zakoïan (1994), modela-se a assimetria entre choques positivos e negativos na variância condicional, particularmente com dados financeiros. O modelo TARCH (p, q) pode ser representado da seguinte forma:

²O SWARCH permite modelar a incerteza a respeito da distribuição de probabilidade do retorno no instante t , condicionado ao conjunto de informação disponível até o instante $t-1$, Ω_{t-1} . Suponha que a distribuição de v seja normal, então, se no modelo ARCH anterior a distribuição de probabilidade de y_t passa a ser uma normal com média $E[y_t \mid \Omega_{t-1}]$ e variância h_t , no SWARCH o termo latente s_t impõe um retorno cuja distribuição de probabilidade passa a ser uma mistura de normais, flexibilizando a modelagem do retorno. Veja o primeiro apêndice em que se ilustra esse conceito.

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i v_{t-i}^2 + \delta v_{t-1}^2 d_{t-1} + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} \quad (6)$$

Na equação (6), $d_t = 1$ se $v_t < 0$, e $d_t = 0$ caso contrário. Se $\delta \neq 0$, então temos efeitos assimétricos nos choques. Particularmente para o caso do retorno da taxa de câmbio, cotada em termos de reais por dólar, o sinal esperado para δ é negativo, indicando que, se ocorrer uma apreciação do real, então a volatilidade do retorno tende a diminuir.

3. Volatilidade Implícita

Utilizaremos no cálculo da volatilidade implícita³ o modelo GK, referência sobre a qual se avaliam outros modelos de apreçamento de opções. Esse modelo pode ser derivado a partir de um modelo econômico de equilíbrio geral,⁴ de forma que a volatilidade representa a expectativa.

Seja C_t o preço da opção, T_t o número de dias até o vencimento, E_t o preço de exercício, i_t o CDI diário, F_t o preço de ajuste do contrato futuro de dólar,⁵ $N(\cdot)$ a função de distribuição acumulada normal padrão e σ_t a volatilidade. Nesses termos, o preço de uma opção de compra sobre taxa de câmbio no modelo de GK é dado por:

$$c_t = \frac{1}{(1 + i_t)^{T_t}} \left[F_t N(d_t) - E_t N(d_t - \sigma_t \sqrt{T_t}) \right] \quad (7)$$

$$d_t = \frac{\ln(F_t/E_t)}{\sigma_t \sqrt{T_t}} + \frac{1}{2} \sigma_t \sqrt{T_t}$$

O preço da opção é insumo para calcular a volatilidade implícita, porém em cada dia do mês há vários contratos distintos de opção sendo negociados. Assim, o preço a ser utilizado será o daquela opção mais próxima do dinheiro, isto é, a opção que tenha o preço de exercício mais próximo do dólar futuro, e cujo prazo de vencimento esteja num intervalo de dez a trinta dias úteis. As razões para utilizar esses critérios são duas.

³A volatilidade implícita derivada é a expectativa a respeito da volatilidade média do retorno do ativo subjacente à opção até o vencimento do contrato.

⁴Huang e Litzenberger (1988) apresentam uma derivação do modelo de Black e Scholes (1973) em equilíbrio geral. O modelo GK pode ser derivado no mesmo arcabouço teórico de uma opção de compra sobre uma ação que paga dividendos.

⁵Seguindo Andrade e Tabak (2000), usamos o preço de ajuste do dólar futuro em vez da cotação de fechamento do dólar à vista, para minimizar os problemas de assincronia entre as negociações no mercado de câmbio à vista e no mercado de opções. Maiores detalhes serão expostos na seção 5.3.

Em primeiro lugar, os contratos de maior liquidez são obtidos com opções que satisfaçam aqueles critérios. A existência da liquidez é importante no modelo GK para que os ganhos com arbitragem nos mercados de taxa de câmbio e opções sejam instantaneamente exauridos. Isto, por sua vez, requer que esses mercados sejam líquidos para que funcionem como “[...] mecanismo[s] eficiente[s] [...] para montar e desmontar posições de maneira rápida [...]” (Duffie, 1989, p. 7).

Em segundo lugar, as opções mais próximas do dinheiro minimizam o erro de especificação do modelo GK relacionado à sua hipótese de volatilidade constante no tempo. Como Fleming (1998) mostra, utilizando opções *at the money*⁶, é válido interpretar a volatilidade implícita como um previsor da volatilidade média do retorno durante a vigência do contrato.

Uma vez selecionadas as opções, calcula-se a volatilidade implícita para cada dia dentro de um intervalo de tempo no qual avaliam-se as previsões. Cada um dos valores gerados para cada dia dentro desse intervalo será a previsão da volatilidade média do retorno da taxa de câmbio para o período de vigência do contrato de opção. Tais valores serão obtidos resolvendo numericamente a equação (7) para o termo σ_t .

4. Mudança de Regime e Superestimação da Persistência

Esta seção mostra um exemplo empírico onde o modelo GARCH superestima os coeficientes da equação da variância, quando há mudança de regime. Comparamos o GARCH com o modelo SWARCH. Esse procedimento permite caracterizar os regimes de volatilidade do câmbio, associá-los a eventos econômicos de relevância e justificar a ênfase no uso do SWARCH em relação aos demais modelos.

4.1 Persistência no GARCH

No modelo GARCH, o efeito de um choque no instante $t - s$ sobre a variância condicional em t depende da magnitude dos seus coeficientes. Seguindo o trabalho de Lamoureux e Lastrapes (1990a), considere um GARCH (1, 1). A partir da expressão em (5) pode-se escrever a variância condicional da série da seguinte forma:

$$h_t = \alpha_0 + \lambda h_{t-1} + \alpha_1 e_{t-1}, \lambda = \alpha_1 + \beta_1, e_{t-1} = v_{t-1}^2 - h_{t-1} \quad (8)$$

Manipulando recursivamente a equação (8) temos:

$$\begin{aligned} h_t &= \sigma^2 + \alpha_1 [e_{t-1} + \lambda e_{t-2} + \lambda^2 e_{t-3} + \dots + \lambda^{s-1} e_{t-s} + \dots] \\ \sigma^2 &= \frac{\alpha_0}{(1 - \lambda)} \end{aligned} \quad (9)$$

⁶Opções *at the money* são aquelas cujo preço de exercício é igual ao preço do ativo subjacente.

Pela equação (9) percebe-se o papel dos coeficientes α_1 e β_1 na persistência de um choque sobre h_t . Quanto maior for λ , mais duradoura será a influência desse choque sobre a variância. Uma forma de apreciar a magnitude dessa persistência é calculando a meia-vida do choque, que é o tempo necessário para que seu efeito se reduza à metade. Pela equação (9) e assumindo o dia como unidade de tempo, pode-se mostrar que a meia vida – MH – do choque sobre a variância condicional é:

$$MH = 1 - \frac{\ln 2}{\ln \lambda} \quad (10)$$

Pela expressão (10) fica nítido o papel de λ sobre a persistência do choque.

Por meio de simulações de Monte Carlo e de uma análise empírica com retornos diários de ações, Lamoureux e Lastrapes (1990a) mostram que, se ocorrerem mudanças de regime na variância não-condicional, λ é superestimado no GARCH, alcançando valores acima de 0,97, correspondentes a meias-vidas maiores que 23 dias. Essa superestimação é mais comum acontecer quando se aplica o modelo a séries financeiras com frequência diária e com horizontes de tempo relativamente longos, pois uma série longa tende a conter mais mudanças de regime que uma série curta. De fato, em um outro estudo, Lamoureux e Lastrapes (1990a) estimam o modelo GARCH (1, 1) sobre os retornos de 20 ações, com apenas 300 observações cada, e obtêm-se um λ médio de 0,728, representando meias-vidas em torno 3 dias.

4.2 Mudança de regime e a superestimação da persistência

Para ilustrar problema de persistência que pode existir ao estimar o modelo GARCH para a série de taxa de câmbio, realizamos o seguinte exercício à semelhança de Lamoureux e Lastrapes (1990b,a): Tomamos a série de retorno da taxa de câmbio e estimamos o SWARCH; em seguida, empregamos o modelo estimado para identificar os distintos regimes de volatilidade ao longo do tempo e separar a amostra de acordo com cada regime. Em cada um desses intervalos, estima-se um GARCH e computa-se sua meia-vida. Os valores obtidos são comparados com a meia-vida obtida na estimação do GARCH usando toda a amostra.

Inferência a respeito dos regimes de volatilidade

A série de taxa de câmbio possui frequência diária, tomada de 3/03/99 a 16/04/04, totalizando 1283 observações. Para identificar os regimes de volatilidade ao longo do tempo, estimamos o SWARCH e obtivemos como melhor especificação um AR(1)-ARCH(3) de dois regimes com distribuição t-Student. Com esse modelo calculamos as “probabilidades suavizadas”:

$$p(s_t = r \mid y_T, y_{T-1}, \dots, y_0), r = 1, \dots, k \quad (11)$$

Essas probabilidades permitem inferir qual regime estava a variância no instante t , associando a esse instante aquele regime de maior probabilidade. Mais detalhes a respeito do algoritmo de cálculo está em Hamilton (1994).

A tabela 1 apresenta algumas estatísticas do retorno da taxa de câmbio. Por sua vez, a figura 5 traz as séries de taxa de câmbio e de seu retorno para o período em questão, assim como o índice EMBI+ e as probabilidades suavizadas.

Tabela 1

Retorno da taxa de câmbio

Média (%)	0,023	Jarque-Bera	4180,8
Desvio-padrão (%)	1,026	P-valor	0

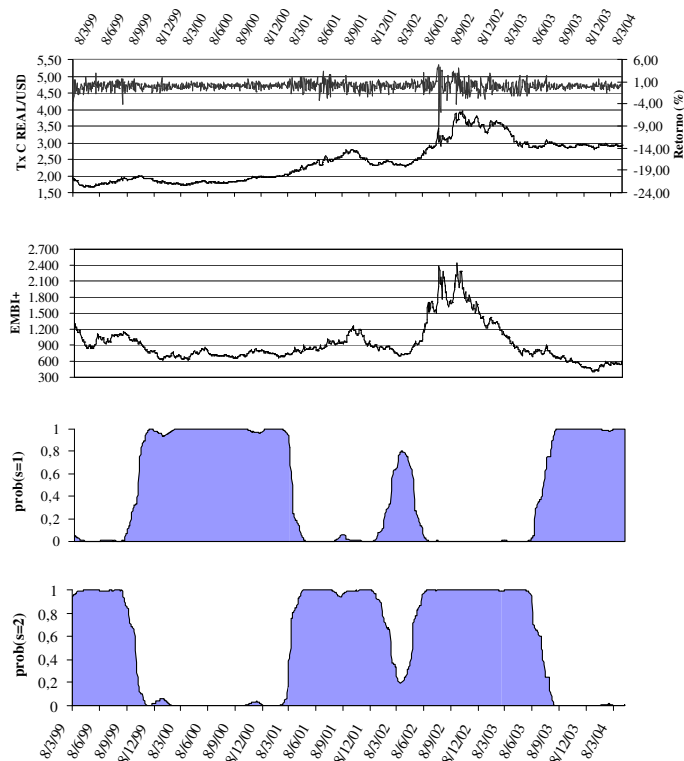


Figura 1

Taxa de câmbio, retorno diário do REAL/USD, EMBI+ Brasil e probabilidades suavizadas (SWARCH)
 Fonte (taxa de câmbio; EMBI +): BANCO CENTRAL DO BRASIL; BLOOMBERG.

O regime de menor variância ou de tranquilidade mais duradouro na amostra, em que $s = 1$, ocorreu aproximadamente entre novembro de 1999 a março de 2001. Durante esse período, a volatilidade do retorno do câmbio foi de 0,50% ao dia, passando a 1,11% durante o período maior variância ou estresse cambial.

Esse comportamento do mercado de câmbio pode ser atribuído, em parte, a uma conjunção de fatores internos capazes de melhorar as expectativas dos agentes com relação às variáveis macroeconômicas fundamentais brasileiras, principalmente inflação. A implementação do regime de metas, somada à execução de uma política fiscal austera,⁷ permitiu que o país mantivesse a inflação sob controle, dados a desvalorização cambial de janeiro de 1999 e o reajuste dos preços administrados, por volta de junho (Fachada, 2001, Minella, 2003).

No período que se estende de abril de 2001 até janeiro de 2002, o retorno da taxa de câmbio entra no regime de elevada volatilidade, com um desvio-padrão de 1,11%. Nesse estado, suportamos a crise energética brasileira, o desaquecimento da economia mundial, a crise argentina e os atentados terroristas de 11 de setembro como fatores a influenciar a volatilidade do câmbio.

Nessas transições de regimes, o comportamento do risco-país medido pelo índice EMBI+ serve como um “bom indicador de crises financeiras” (Minella et alii, 2003, p. 1036). Verifica-se que os momentos de estresse e de tranquilidade no mercado de dívida externa, e que se refletem no nível da série do EMBI+, correspondem aos mesmos momentos no mercado de câmbio. E isso, por sua vez, sugere que a inferência dos regimes de volatilidade cambial talvez possa servir para identificar diferentes estados para o risco soberano. Porém, essa é uma questão fora do escopo deste artigo.⁸

Superestimação da persistência

Resumindo as evidências apresentadas, houve uma mudança de regime por volta de março/abril de 2001, sendo o período precedente, iniciado em novembro de 1999, caracterizado por um regime de baixa volatilidade e o período subsequente, até janeiro de 2002, governado por um estado de elevada variância. Com essas informações estimamos quatro modelos GARCH (1, 1) gaussianos:

1. No primeiro, usamos dados do período de baixa volatilidade, com 351 observações;

⁷O resultado consolidado do setor público passou de zero em 1998 para 3,3% do PIB em 1999 e 3,5% em 2000.

⁸Entre setembro e dezembro de 1999, a mudança para o regime de baixa volatilidade é acompanhada de um declínio do risco país, de um patamar de 1000 pontos-base para 750. Por volta de março de 2001, ocorre reversão, e o índice volta a oscilar entre os 900 e 1200 pontos. Em seguida, durante um pequeno intervalo de tempo entre março e maio de 2002, quando a variância retorna para seu regime de baixa, a série volta a oscilar entre 600 e 900 pontos, até se elevar fortemente a partir de junho acompanhada de uma nova mudança de regime, mantendo-se em patamares elevados até maio de 2003.

2. No segundo, usamos os dados subsequentes do regime de estresse, até janeiro de 2002, com 208 observações;
3. O terceiro modelo é estimado com amostra completa, os dados de entre novembro de 1999 a janeiro de 2002;
4. O quarto modelo é estimado com amostra completa, mas foi adicionada uma variável *dummy* de intercepto na equação da variância, refletindo o momento em que a amostra passa do regime de baixa para o de alta volatilidade, representando o instante em que a variância não-condicional muda.⁹

Observa-se que a persistência do GARCH é afetada (no sentido de ser menor que a do terceiro modelo) quando fazemos com que o intercepto da equação se altere ao longo do tempo,¹⁰ conforme indica a tabela a seguir:

Tabela 2
Persistência no GARCH

	$Q(1)^p$	$ARCH - LM^p$	α_1	β_1	<i>dummy</i>	λ	<i>MH</i>
Modelo 1, $s = 1$	0,001	0,001	0,127** (0,063)	0,730* (0,137)		0,857	5,487
Modelo 2, $s = 2$	0,009	0,01	0,170*** (0,101)	0,708* (0,154)		0,878	6,32
Modelo 3, amostra completa	0	0	0,160* (0,037)	0,815* (0,043)		0,975	28,681
Modelo 4, amostra completa	0	0	0,149* (0,055)	0,714* (0,101)	0,129** (0,062)	0,863	5,704
Desvio-padrão entre parênteses.			*	**	***		
<i>p</i> – valor	<i>Q-Ljung-Box</i>	Significância	1%	5%	10%		

Nas três amostras utilizadas, há correlação nos quadrados dos resíduos, e o teste ARCH LM rejeitou a hipótese nula de ausência de efeitos ARCH. Logo, a utilização de amostras menores não resultou em perda dos efeitos ARCH nos erros da série. Por outro lado, nos dois primeiros modelos, os λ 's encontrados foram de 0,86 e 0,88, correspondendo a meias-vidas de 5,49 e 6,33 dias. No terceiro modelo, o λ ficou em torno de 0,97, produzindo 28,38 dias de meia-vida. Isto é, quando estimamos o GARCH em uma série que apresenta possível mudança de regime, a persistência aumenta consideravelmente com relação a outra série em que não ocorreu a mudança, corroborando a hipótese de superestimação dos parâmetros. Essa hipótese é reforçada pelos resultados do modelo 4, em que o coeficiente da variável *dummy* no intercepto da equação da variância é significativo e a persistência se reduz, de sorte que a meia-vida passa a ser de 5,70 dias.

⁹O dia escolhido para a ocorrência da mudança de regime foi 14 de março de 2001, dia em que a probabilidade do regime de baixa variância ter ocorrido fica menor que a de alta. Contudo, dias alternativos foram considerados sem que houvesse mudanças significativas nos resultados.

¹⁰Essa maneira de captar a mudança de regime no GARCH, por meio de variáveis *dummy*, é utilizada por Lamoureux e Lastrapes (1990a). Ela também é empregada por Almeida e Pereira (1999).

5. Comparação das Estimativas de Volatilidade

Na comparação das previsões, avaliamos primeiramente a capacidade de previsão de cada uma em relação a uma medida *ex post* de volatilidade, fazendo uso das seguintes regressões:

$$\sigma_t = a_i + b_i \sigma_t^i + \epsilon_t^i \quad (12)$$

$$\sigma_t = a_h + b_h \sigma_t^h + \epsilon_t^h \quad (13)$$

Nas equações acima σ_t é a volatilidade realizada e σ_t^i e σ_t^h são as volatilidades implícita e histórica, respectivamente. Se seus coeficientes forem estatisticamente diferentes de zero, os R^2 de (12) e (13) serão um possível medida do poder explicativo da volatilidade realizada.

Em segundo lugar, avaliamos o conteúdo informacional das previsões usando o seguinte modelo de regressão:

$$\sigma_t = a + b_i \sigma_t^i + b_h \sigma_t^h + \epsilon_t \quad (14)$$

Na equação anterior, se um dos coeficientes “b” for estatisticamente zero, então a estimativa de volatilidade associada a esse coeficiente não estará acrescentando informação para explicar a volatilidade realizada que já não esteja presente na outra estimativa.

5.1 Volatilidade realizada

Como *proxy* da volatilidade realizada serão empregadas duas medidas. Uma é o desvio-padrão do retorno da taxa de câmbio, SD_t , calculado no instante t para o intervalo de tempo de vigência da opção, T_t . Sendo S_t a taxa de câmbio à vista de fechamento no dia t , temos:

$$SD_t = \sqrt{\frac{1}{T_t - t} \sum_{k=t+1}^{T_t} (r_k - \bar{r}_t)^2} \quad (15)$$

$$\bar{r}_t = \frac{1}{T_t - t} \sum_{k=t+1}^{T_t} r_k \text{ e } r_k = \ln \frac{S_k}{S_{k-1}}$$

A outra medida de volatilidade é o estimador de valor extremo de Parkinson (1980), PK_t , o qual é mais eficiente que o desvio-padrão sob a hipótese de que $\ln(S_t)$ segue um movimento browniano. Esse estimador faz uso das cotações máxima e mínima ocorridas durante o pregão:

$$PK_t = \sqrt{\frac{1}{4(T_t - t) \ln(2)} \sum_{k=t+1}^{T_t} (H_k - L_k)^2} \quad (16)$$

onde H_k e L_k são os logaritmos naturais das cotações máxima e mínima no dia k .

Comparações empíricas entre esses dois estimadores são oferecidas em Beckers (1983) e Wiggins (1991, 1992). Mesmo sendo um modelo derivado assumindo um processo estocástico contínuo, os dados discretos são igualmente eficientes.

5.2 Volatilidade histórica

Como dados diários, as previsões de volatilidade feitas pelos modelos GARCH, TARCH e SWARCH referem-se à variância condicional. Para obter medidas compatíveis com o sentido da volatilidade implícita, que fornece a previsão da volatilidade média até a maturidade, seguimos Jorion (1995). Assim, a cada dia geramos as previsões (“fora da amostra”) da variância para os dias subseqüentes até o vencimento da opção e tomamos a média dessas previsões. Feito isso, extraímos a raiz quadrada. Algebricamente, sendo $h_{t,i}^e$ a expectativa para a variância condicional do instante $t + i$ calculada em t , a volatilidade histórica em t para o período de vigência da opção que vence no T -ésimo dia é dada por:

$$\sigma_t^h = \sqrt{\frac{1}{T-t} \sum_{i=t+1}^T h_{t,i}^e} \quad (17)$$

5.3 Regressores estimados

Para estimar as regressões, empregamos variáveis estimadas. Isso traz duas complicações que precisam ser levadas em conta.

A primeira delas refere-se aos erros de medida da volatilidade implícita, evidenciados por Day e Lewis (1992), Fleming (1998), Christensen e Prabhala (1998), Blair (2001) e Chang (2002), entre outros. Tais erros podem tornar as estimativas dos parâmetros inconsistentes e, para contornar esse problema, recorremos a variáveis instrumentais, conforme Christensen e Prabhala (1998). Em síntese, podemos enumerar duas razões causadoras desses erros:

- (a) *Assincronia das cotações*: a fórmula de GK supõe que a inexistência de ganhos de arbitragem entre os valores da opção, do ativo subjacente e da taxa de juros livre de risco em um determinado instante do tempo. Logo, para um dado nível de volatilidade e taxa de juros, os valores do ativo objeto e da opção ficam associados um ao outro. Dessa forma, a medida da volatilidade prevista pelo mercado assume na fórmula de GK o preço da opção, a taxa de câmbio e o valor da taxa de juros coletados simultaneamente. Contudo, no caso de utilização dados de fechamento ou médio, as cotações dos diversos mercados são produzidas em momentos distintos; conseqüentemente, podem não refletir a relação de não-arbitragem entre esses mercados. Se esse “desalinhamento” de preços estiver de fato ocorrendo, ele se transmitirá ao valor da volatilidade implícita, produzindo uma expectativa com ruídos em relação à verdadeira expectativa do mercado;

- (b) *Erro de especificação do modelo*: se o modelo de GK não for o modelo adequado para o apreçamento das opções de câmbio, a volatilidade implícita produzida não será exatamente a expectativa do mercado para a volatilidade futura

Para mitigar os efeitos decorrentes do problema descrito em (a), seguimos Andrade e Tabak (2000) e Chang (2002) e tomamos o preço de ajuste do dólar futuro descontado pelo custo de carregamento (cost of carry) no lugar da cotação de fechamento do dólar à vista. Em relação ao uso da cotação de fechamento da opção, considerando que o preço de ajuste uma média ponderada das cotações do dólar futuro nos últimos quinze minutos de pregão, o erro tende a ser menor.

Quanto ao item (b), é a inadequação de algumas hipóteses do modelo que produz os erros de especificação. Na fórmula de GK, a hipótese que mais sugere a possível utilização de uma especificação incorreta é a de que a volatilidade do retorno é constante, em razão das evidências do contrário, a começar pela própria concepção do modelo GARCH. Contudo, Cox e Rubinstein (1985) e Lamoureux e Lastrapes (1993) mostram, que, sob certas condições e com volatilidade variante no tempo, o cálculo desse parâmetro é aproximadamente igual à volatilidade média esperada pelo mercado para o retorno da taxa de câmbio durante a vigência do contrato, em opções *at the money* (Christensen e Prabhala, 1998).¹¹ Logo, mesmo havendo erro de especificação, continua sendo válido empregar a volatilidade implícita como uma previsão da volatilidade média futura, ainda que sendo uma aproximação.

Um candidato natural a instrumento é a volatilidade implícita defasada σ_{t-1}^i . É pouco provável que ela esteja correlacionada com o erro de medida em σ_t^i . Considerando os argumentos de (a), não há razão para acreditar que exista uma correlação entre o erro em um instante e o erro no instante seguinte. A diferença, devida à assincronia entre a cotação fornecida pelo modelo de GK para um dado preço do ativo objeto e o preço da opção que é obtido nos dados, não deve apresentar um padrão de comportamento sistemático ao longo do tempo. Por outro lado, os erros de medida associados ao item (b) são, em grande medida, minimizados pela forma de escolha dos contratos, buscando as opções mais próximas do dinheiro.

A segunda complicação diz respeito à validade dos testes sobre os coeficientes das regressões em (13) e (14), pois as previsões da volatilidade histórica são produzidas com estimativas a partir dos modelos de variância condicional.

Sob certas condições bastante gerais, se os parâmetros são estimados de maneira consistente, o uso de regressores gerados produz coeficientes consistentes nas regressões por OLS ou 2SLS, embora seja necessário corrigir a variância desses estimadores. Entretanto, se a hipótese nula for de que os coeficientes da regressão são iguais a zero, as distribuições dos coeficientes estimados nos modelos (13) e

¹¹No seu artigo, Christensen e Prabhala fazem essa afirmação com relação ao modelo de Black e Scholes e não de GK. Contudo, pode-se mostrar que a afirmação também é válida para este último modelo. Uma demonstração sucinta desse resultado para a fórmula de Black e Scholes pode ser encontrada em Fleming (1998).

(14) independem das distribuições dos regressores estimados (Wooldridge, 2002, p. 117-118), Os testes deste artigo tratam exatamente desse caso, pois estima-se o modelo por mínimos quadrados a dois estágios.

5.4 Sobreposição de dados e autocorrelação

Na construção das volatilidades realizadas e históricas ocorre sobreposição de dados devido à necessidade de produzir estimativas e previsores para a volatilidade média do ativo em certo período e essa sobreposição gera autocorrelação nos resíduos, pois causa inércia nos dados.

No caso da volatilidade implícita, Jorion (1995) e Fleming (1998) notam que o ciclo de vencimento dos contratos também tende a causar autocorrelação nos resíduos.

Por essas razões, vamos usar a matriz de variância-covariância de Newey e West (1987) no cálculo de todos os desvios-padrão.

6. Descrição dos Dados e Resultados

6.1 Dados

Câmbio e juros foram baixadas do sítio do Banco Central do Brasil. A série de câmbio se estende de 3 de março de 1999 a 16 de abril de 2004, PTAX800, com um de 1.283 observações. A taxa de juros ao dia útil, CDI, para o período de primeiro de julho de 2003 a 16 de abril de 2004.

Junto à BM&F, obtiveram-se os preços de ajuste dos contratos futuros do dólar e os preços de fechamento de opções de compra. Na Reuters, coletaram-se as cotações máxima e mínima do dólar comercial. Cada uma dessas séries possui 197 observações.

Para computar a volatilidade histórica dividimos os retorno em duas partes. A primeira partindo de 3 de março de 1999 a primeiro de julho de 2003 (1087 observações). Com essa parte da amostra estimamos os modelos para a variância condicional, usando a segunda parte da amostra, com 197 observações, para realizar as previsões, feitas para “fora da amostra”.¹²

6.2 Estimação dos modelos de volatilidade histórica

Estimamos¹³ o SWARCH com diferentes equações para a média, para a variância condicional e com distintas distribuições para o termo aleatório v_t . Também alteramos o número de estados que o processo poderia ter. Baseando-se nos

¹²Muito embora fazemos previsões para “fora da amostra”, atualizamos os dados à medida que avançamos ao longo dos 197 dias. Assim, para a previsão no dia primeiro de julho para os próximos n dias, usamos os dados disponíveis até o dia primeiro e fizemos n previsões para fora da amostra. Para a previsão feita no dia dois, fizemos a mesma coisa mas com os dados disponíveis até esse dia. Assim se seguiu até 16 de abril.

¹³O SWARCH foi estimado com o programa Ox, v. 3.4 (www.doornik.com e Doornik (2002)) e com o pacote M@ximize v. 1.0 (Laurent e Urbain, 2003). A rotina em GAUSS foi fornecida por James Hamilton.

critérios de informação de Akaike e de Schwartz e analisando os correlogramas dos resíduos e dos quadrados dos resíduos optamos pela especificação AR(1)-ARCH(3) com distribuição $t - Student$.

Por sua vez, na estimação dos modelos GARCH e TARCH, continuamos a empregar os critérios de escolha mencionados acima, obtendo um termo auto-regressivo para as equações do nível. Para as especificações das variâncias, as estimações indicaram o uso de um termo auto-regressivo e um termo de média móvel. Assim, os resultados são um GARCH (1, 1) e um TARCH (1, 1). A tabela 3 expõe os modelos estimados.

Tabela 3
Coeficientes estimados

	GARCH	TARCH	SWARCH
γ	0,012 (0,025)	0,040 (0,026)	0,015 (0,020)
ϕ_1	0,082* (0,031)	0,090* (0,032)	0,099* (0,033)
α_0	0,023* (0,005)	0,020* (0,005)	0,158* (0,025)
α_1	0,202* (0,023)	0,254* (0,032)	0,134* (0,043)
α_2			0,242* (0,057)
α_3			0,143* (0,051)
β_1	0,789* (0,022)	0,809* (0,022)	
δ		-0,137* (0,032)	
g_2			4,448* (0,696)
η			14,646** (5,934)
AIC	2,562	2,548	2,535
SBC	2,585	2,576	2,581
$Log - like$	-1386	-1377,8	-1362,66
Obs.	1086	1086	1083

Desvios-padrão entre parênteses

*Significante a 1%; **, a 5%.

O critério de informação de Akaike aponta o SWARCH como o modelo de melhor aderência. Pelo critério de Schwartz, o TARCH é quem se destaca. A indicação inequívoca dos modelos é a especificações não-linear da variância condicional. De fato, o termo de assimetria do TARCH, δ , mostra-se negativo e estatisticamente diferente de zero, como esperado. Isso indica que movimentos de apreciação do real frente ao dólar tendem a produzir volatilidades menores do que movimentos de depreciação de mesma magnitude. No que se refere à mudança de regime, o coeficiente multiplicador da variância, g_2 , é estatisticamente diferente de um aos níveis de significância usuais, sugerindo a existência de um segundo regime de volatilidade.

Além disso, os resultados da tabela mostram que os coeficientes do GARCH e do TARCH somam 0,99 e 0,93, respectivamente, indicando a presença de possível mudança de regime, à luz da discussão feita na seção 4 e por Issler (1999) e Hamilton (1994). De fato, não conseguimos rejeitar a hipótese de que esses coeficientes somam um, usando o teste de Wald.¹⁴

Tabela 4
Testes de raiz unitária

	Hipótese nula	P-valor
GARCH	$\alpha_1 + \beta_1 = 1$	0,409
TARCH	$\alpha_1 + \delta/2 + \beta_1 = 1$	0,599

6.3 Avaliação dos previsores de volatilidade

Esta seção apresenta a avaliação empírica da previsão de volatilidade e o conteúdo informacional dessas variáveis. Inicia-se apresentando a figura das séries de volatilidade histórica, implícita e realizadas, a seguir.

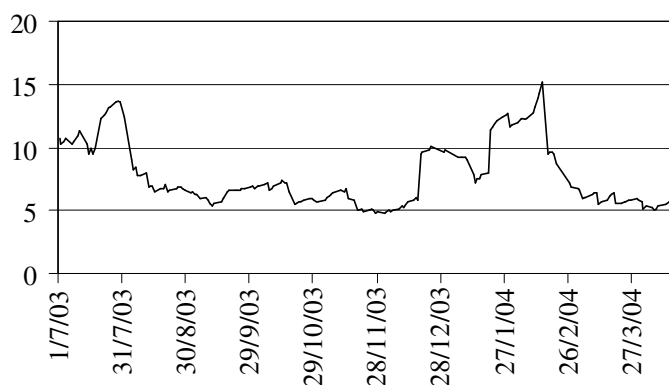


Figura 2
Volatilidade realizada (%a.a.): desvio-padrão

¹⁴Uma discussão sobre a aplicação do teste de raiz unitárias sobre as séries é deixada ao apêndice.

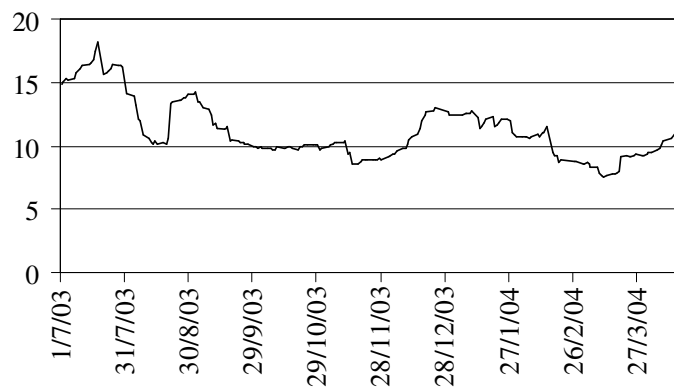


Figura 3
Volatilidade realizada (%a.a.): Parkinson

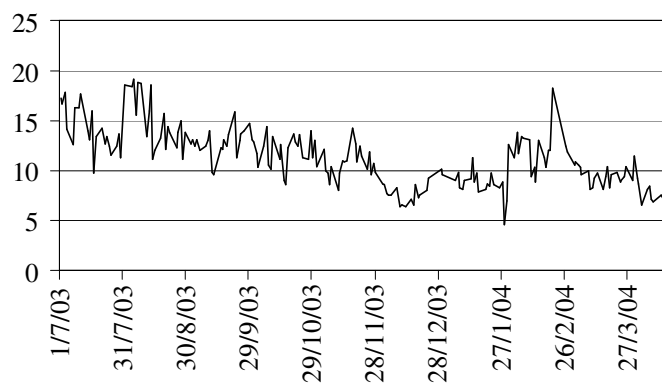


Figura 4
Volatilidade implícita (%a.a.)

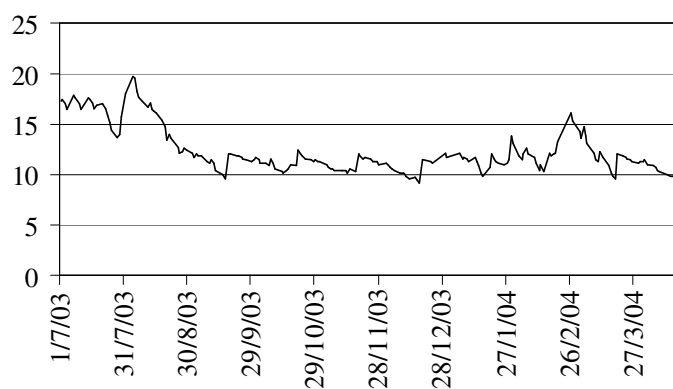


Figura 5
Volatilidade SWARCH (%a.a.)

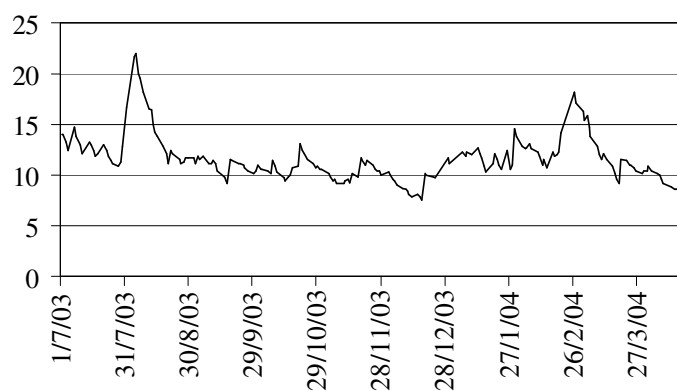


Figura 6
Volatilidade GARCH (% a.a.)

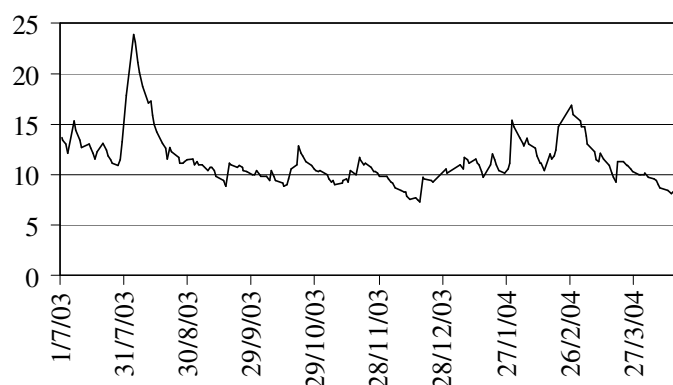


Figura 7
Volatilidade TARCH (% a.a.)

A tabela 5 apresenta os resultados da estimação do modelo (12) com o desvio-padrão e a medida de volatilidade de Parkinson. A volatilidade implícita defasada é o instrumento.

Tabela 5
Regressões da vol. realizada contra a volatilidade implícita

Vol. realiz.	α_i	b_i	R^2
Desv. pad.	5,534*	0,191	0,041
	(1,548)	(0,129)	
Parkinson	7,193*	0,348*	0,109
	(1,368)	(0,129)	

Desvio-padrão entre parênteses

*Significante a 1%

Na primeira regressão do desvio-padrão, o coeficiente de inclinação não é estatisticamente diferente de zero, e o R^2 do modelo foi de 4,1%. O estimador de Parkinson parece ser mais eficiente, captando melhor a dispersão do câmbio pela amplitude, pois o coeficiente da volatilidade implícita é significativo, e o R^2 aumenta para 10,9%.

Na análise, é importante observar o R^2 em termos relativos, pois numa estimação por variáveis instrumentais, a análise via R^2 (e mesmo relativa) fica prejudicada. Mais importante de ver na regressão é a significância dos coeficientes e seus respectivos sinais.

Para os modelos de volatilidade histórica também estimamos a regressão referente ao modelo (13). Os resultados são apresentados na tabela 6, a seguir.

Tabela 6

Regressões da volatilidade realizada contra as volatilidades históricas

Vol. realiz.		a_h	b_h	R^2
Desv. pad.	GARCH	3,943* (1,351)	0,324* (0,119)	0,085
	TARCH	4,081* (1,293)	0,318* (0,117)	0,099
	SWARCH	2,374 (1,469)	0,433* (0,115)	0,156
Parkinson	GARCH	8,837* (1,183)	0,198** (0,113)	0,039
	TARCH	8,957* (0,936)	0,191** (0,091)	0,045
	SWARCH	4,538* (1,642)	0,536* (0,143)	0,298

Desvios-padrão entre parênteses

* significante a 1%; **, a 5%.

Todas as medidas de volatilidade histórica apresentam coeficientes significantes para explicar o desvio-padrão. Além disso, considerando os resultados das tabelas 5 e 6, o modelo SWARCH obteve o maior R^2 , para ambas as medidas de volatilidade realizada. Os coeficientes dos modelos GARCH e TARCH não mudam muito, porém há bastante alteração na magnitude da inclinação e da constante no SWARCH. Enquanto que a constante reduz-se à metade, a inclinação multiplica-se várias vezes em relação aos modelos sem mudança de regime.

Quanto ao conteúdo informacional das previsões implícita e histórica, a tabela 7 traz o modelo (14) com o desvio-padrão sendo a *proxy* e a tabela 8 faz o mesmo, mas empregando o estimador de Parkinson. Como estimamos por mínimos quadrados a dois estágios, as volatilidades históricas contemporâneas são instrumentos para elas mesmas.

Tabela 7

Avaliando o conteúdo informacional – desvio-padrão

a	$b_i - vimp$	$b_h - GARCH$	$b_h - TARCH$	$b_h - SWARCH$	R^2
4,082* (1,500)	-0,033 (0,213)	0,344*** (0,195)			0,079
4,362* (1,565)	-0,077 (0,212)		0,369** (0,180)		0,091
2,778*** (1,520)	-0,314 (0,215)			0,687* (0,206)	0,117

Desvios-padrão entre parênteses

* significante a 1%; **, a 5%; ***, a 10%

Tabela 8

Avaliando o conteúdo informacional – Parkinson

a	$b_i - vimp$	$b_h - GARCH$	$b_h - TARCH$	$b_h - SWARCH$	R^2
7,752* (1,205)	0,434** (0,201)	-0,132 (0,162)			0,094
7,611* (1,200)	0,443** (0,206)		-0,131 (0,151)		0,093
4,717* (1,642)	-0,106 (0,184)			0,617* (0,218)	0,282

Desvios-padrão entre parênteses

* significante a 1%; **, a 5%; ***, a 10%

Na tabela 7, todos os coeficientes das previsões de volatilidade histórica se mostraram significantes, a um nível de 10%. O contrário aconteceu com os da volatilidade implícita. De fato, esse era um resultado esperado dado que nas regressões de capacidade de predição obtivemos um coeficiente não significativo para ela. Além disso, de novo, a constante reduz-se à metade e a inclinação sobra no SWARCH em relação aos demais modelos.

Na tabela 8, a *proxy* de Parkinson é utilizada. A volatilidade implícita passa a subjugar os modelos GARCH e TARCH, quanto ao conteúdo informacional que ela aporta para explicar a volatilidade realizada. Contudo, comparando volatilidade implícita e SWARCH, o resultado se inverte. Além disso, essa última regressão produz o maior R2 dentre os modelos.

O exercício empírico forneceu evidências de que mudanças de regime devem ter ocorrido, e os resultados podem ser bastante comprometedores se essa hipótese não for considerada. Os resultados referentes à volatilidade implícita contra os modelos GARCH e TARCH são ambíguos. Com a *proxy* desvio-padrão, as previsões históricas se sobressaem. Levando em conta a medida de Parkinson, o resultado se altera em favor da volatilidade implícita. Quanto ao conteúdo informacional, as significâncias dos coeficientes também se invertem alterando-se a *proxy* de volatilidade realizada. Com a medida de Parkinson, nossas estimações corroboram os resultados de Chang (2002).

Por outro lado, as estimações feitas com o SWARCH, independentemente da *proxies* de volatilidade, são bem melhores em relação à volatilidade implícita. Em particular, a volatilidade implícita não acrescenta conteúdo informacional relativamente ao modelo SWARCH.

7. Conclusão

Este artigo tratou do problema de previsão da volatilidade do retorno de um ativo financeiro, avaliando empiricamente duas metodologias alternativas para obter essa previsão. A primeira é associada ao uso de séries temporais na inferência do processo gerador do retorno, denominadas volatilidades históricas. A segunda é baseada num modelo de apreçamento de opções e produz a volatilidade implícita. O artigo produziu evidências de que as previsões geradas pelo modelo SWARCH, de volatilidade histórica, apresentam um desempenho sensivelmente melhor para explicar isoladamente as *proxies* da volatilidade realizada relativamente à volatilidade implícita.

Os resultados sugerem a necessidade de se incorporar essas estruturas não-lineares do tipo *Markov-switching* na própria construção de modelos de apreçamento de opções. Isso já vem sendo feito, com resultados positivos, em trabalhos como Bollen (2000) e Daouk e Guo (2004).

Informalmente, estabelecemos uma relação direta entre a volatilidade no mercado cambial e o risco soberano do país, medido pelo EMBI+. A associação sugere que os regimes de variância do retorno da taxa de câmbio correspondem a distintos regimes para o nível do risco país e indicam que a volatilidade do mercado cambial pode ser uma função (não-linear) dos determinantes do risco soberano.

Referências

- Almeida, N. C. G. d. & Pereira, P. L. V. (1999). Mudança de regime em volatilidade: Os modelos SWGARCH. In *XXI Emcpmtrp Brasileiro de Econometria*. Anais, Belém: Sociedade Brasileira de Econometria.
- Amin, K. & Victor, N. G. (1997). Inferring future volatility from the information in implied volatility in Eurodollar options: A new approach. *The Review of Financial Studies*, 10(2):333–367.
- Andrade, S. & Tabak, B. (2000). Is it worth tracking Dollar/Real implied volatility? In *XXII Encontro Brasileiro de Econometria*. Anais, Campinas: Sociedade Brasileira de Econometria.
- Beckers, S. (1983). Variances of security price returns based on high, low, and closing prices. *Journal of Business*, 56:97–112.
- Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:637–659.
- Blair, B. (2001). Forecasting S&P 100 volatility: The incremental information content of implied volatilities and high-frequency index returns. *Journal of Econometrics*, 105:5–26.
- Bollen, N. (2000). Regime switching in foreign exchange rates: Evidence from currency option prices. *Journal of Econometrics*, 94:239–276.

- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31:307–327.
- Chang, E. J. (2002). Forecasting exchange rate volatility. In *XXIV Encontro Brasileiro de Econometria*. Anais, Nova Friburgo: Sociedade Brasileira de Econometria.
- Christensen, B. J. & Prabhala, N. R. (1998). The relation between implied and realized volatility. *Journal of Financial Economics*, 50:125–150.
- Cox, J. & Rubinstein, M. (1985). *Options Markets*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Daouk, H. & Guo, J. Q. (2004). Switching asymmetric GARCH and options on a volatility index. *Journal of Futures Markets*, 24(3):251–282.
- Day, T. & Lewis, C. (1992). Stock market volatility and the information content of stock index options. *Journal of Econometrics*, 52:267–287.
- Dickey, D. & Fuller, W. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74:427–431.
- Doornik, J. (2002). *Object-Oriented Matrix Programming Using Ox*. Timberlake Consultants Press, London, 3rd edition.
- Dufrénot, G. & Mignon, V. (2002). *Recent Developments in Nonlinear Cointegration with Applications to Macroeconomics and Finance*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Engle, R. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50:987–1007.
- Engle, R. & Patton, A. (2001). What good is a volatility model? *Quantitative Finance*, 1:237–245.
- Fachada, P. (2001). Inflation targeting in Brazil: Reviewing two years of monetary policy 1999/00. Working Paper Series. Brasília, DF: Banco Central do Brasil, n. 25, 2001. Disponível em <http://www.bcb.gov.br/?TRABDISC>. Acesso em 07/03/2005.
- Fleming, J. (1998). The quality of market volatility forecasts implied by S&P 100 index option prices. *Journal of Empirical Finance*, 5:317–345.
- Gabe, J. & Portugal, M. S. (2004). Volatilidade implícita versus volatilidade estatística: Um exercício usando opções e ações da Telemar S.A. *Revista Brasileira de Finanças*, 2(1):47–73.

- Garman, M. & Kohlhagen, S. (1983). Foreign currency option values. *Journal of International Money and Finance*, 2:231–237.
- Glosten, L. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the normal excess return on stocks. *Journal of Finance*, 48:1779–1801.
- Granger, C. & Newbold, P. (1974). Spurious regressions in econometrics. *Journal of Econometrics*, 2:111–120.
- Hamilton, J. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press, Princeton.
- Hamilton, J. & Susmel, R. (1994). Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime. *Journal of Econometrics*, 64:307–333.
- Huang, C.-F. & Litzenberger, R. (1988). *Foundation of Financial Economics*. Prentice Hall, New Jersey.
- Issler, J. V. (1999). Estimating and forecasting the volatility of Brazilian finance series using ARCH models. *Revista de Econometria*, 19(1):5–56.
- Jorion, P. (1995). Predicting volatility in the foreign exchange market. *Journal of Finance*, 50(2):507–528.
- Kroner, K. (1993). Forecasting volatility in commodity markets. *World Bank Policy Research Working Paper*, (1226).
- Lamoureux, C. & Lastrapes, W. (1990a). Heteroskedasticity in stock return data: Volume versus GARCH effects. *Journal of Finance*, 45:221–229.
- Lamoureux, C. & Lastrapes, W. (1990b). Persistence in variance, structural change and the GARCH model. *Journal of Business and Economic Statistics*, 8:225–234.
- Lamoureux, C. & Lastrapes, W. (1993). Forecasting stock return variance: Towards understanding stochastic implied volatility. *The Review of Financial Studies*, 6:293–326.
- Laurent, S. & Urbain, J.-P. (2003). Bridging the gap between Ox and Gauss using OxGauss. First OxMetrics User Conference, 2003, London. Disponível em <http://www.core.ucl.ac.be/~laurent/M@ximize/index.html>. Acesso em 25/02/2005.
- McLachlan, G. & Peel, D. (2000). *Finite Mixture Models*. John Wiley & Sons, New York.
- Minella, A. (2003). Inflation targeting in Brazil: Constructing credibility under exchange rate volatility. *Journal of International Money and Finance*, 22(7):1015–1040.

- Nelson, C. R. (2001). Markov regime switching and unit root tests. *Journal of Business and Economic Statistics*, 19(4):404–415.
- Nelson, D. B. (1990). Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model. *Econometric Theory*, 6:318–334.
- Newey, W. & West, K. (1987). A simple positive semi-definite, heteroscedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica*, 55(3):703–708.
- Parkinson, M. (1980). The extreme value method for estimating the variance of the rate of return. *Journal of Business*, 53(1):61–65.
- Pereira, P. V. (1999). Alternative models to extract asset volatility: A comparative study. *Revista de Econometria*, 19(1):57–109.
- Perron, P. (1989). The great crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis. *Econometrica*, 57(6):1361–1401.
- Phillips, P. (1986). Understanding spurious regressions. *Journal of Econometrics*, 33:311–340.
- Phillips, P. & Perron, P. (1988). Testing for unit root in time series regression. *Biometrika*, 75:335–346.
- Vasilellis, G. A. & Meade, N. (1996). Forecasting volatility for portfolio selection. *Journal of Business Finance and Accounting*, 23:125–143.
- Wiggins, J. B. (1991). Empirical tests of the bias and efficiency of the extreme-value variance estimator for common stocks. *Journal of Business*, 64(3):417–432.
- Wiggins, J. B. (1992). Estimating the volatility of s&p 500 futures prices using the extreme-value method. *Journal of Futures Markets*, 12(3):265–273.
- Wooldridge, J. (2002). *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data*. MIT Press, Cambridge.
- Xu, X. & Taylor, S. J. (1995). Conditional volatility and the informational efficiency of PHLX currency options market. *Journal of Banking and Finance*, 19:803–821.
- Zakoïan, J.-M. (1994). Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18:931–955.

Apêndice 1

Mistura de Normais

Para ilustrar isso, assumamos que $E[y_t | \Omega_{t-1}] = \gamma$, com $\gamma \in R$, e seja $Y_{t-1} = (y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_0)$ e $S_{t-1} = (s_{t-1}, s_{t-2}, \dots, s_{t-0})$. Então temos, para $k = 2$,

$$\begin{aligned} E(y_t | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t) &= \gamma + E(v_t \sqrt{h_t} \sqrt{g_{s_t}} | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t) \\ &= \gamma \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} V(y_t | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t) &= E \left\{ [y_t - E(y_t | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t)]^2 | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t \right\} \\ &= E(\epsilon_t^2 | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t) \\ &= g_{s_t} h_t \gamma \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Seja $f(x|y)$ a função densidade de probabilidade normal de x condicionado em y . Logo, temos que:

$$\begin{aligned} y_t | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t &\sim N(\gamma, g_{s_t} h_t) \\ \Downarrow \\ f(y_t | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t) &= \frac{f^*(y_t, s_t | Y_{t-1}, S_{t-1})}{P(s_t | Y_{t-1}, S_{t-1})} = \frac{f^*(y_t, s_t | Y_{t-1}, S_{t-1})}{P(s_t | s_{t-1})} \\ \Downarrow \\ f^*(y_t, s_t | Y_{t-1}, S_{t-1}) &= P(s_t | s_{t-1}) \times f(y_t | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t) \quad (\text{A.3}) \\ \Downarrow \\ F(y_t | Y_{t-1}, S_{t-1}) &= \sum_{i=1}^2 P(s_t = i | s_{t-1}) \times f(y_t | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t = i) \\ F(y_t | Y_{t-1}, S_{t-1}) &= \sum_{s_t=1}^2 P(s_t | s_{t-1}) \frac{1}{\sqrt{2\pi g_{s_t} h_t}} \exp \left\{ \frac{-(y_t - \gamma)^2}{2g_{s_t} h_t} \right\} \end{aligned}$$

Pela equação (A.3), verifica-se que o SWARCH possibilita que o retorno do período seguinte pertença a um regime de alta ou baixa volatilidade, para os quais existem distribuições de probabilidade distintas. Nesse sentido, SWARCH pode ser encarado como um modelo de volatilidade estocástica, pois a variância no instante t não está completamente definida pelo conjunto de informação Ω_{t-1} . Ainda resta o termo aleatório dado por s_t , que determinará o regime naquele instante. Essa mistura de distribuições de probabilidade é ilustrada a seguir.

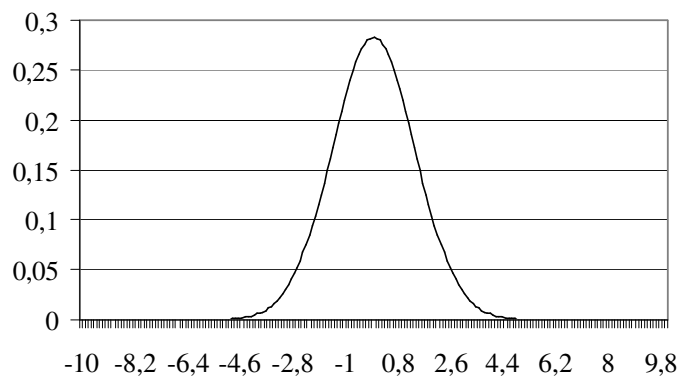


Figura A.1
Distribuição normal $g_1 = 1, h_t = 2, \gamma = 0$

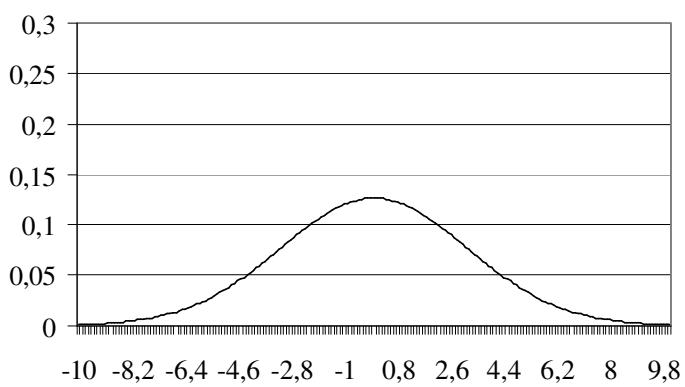
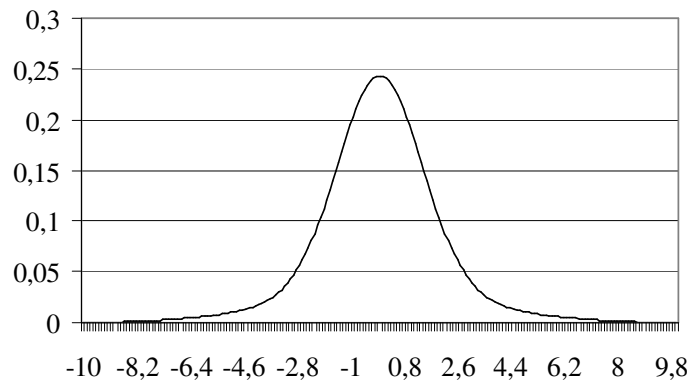
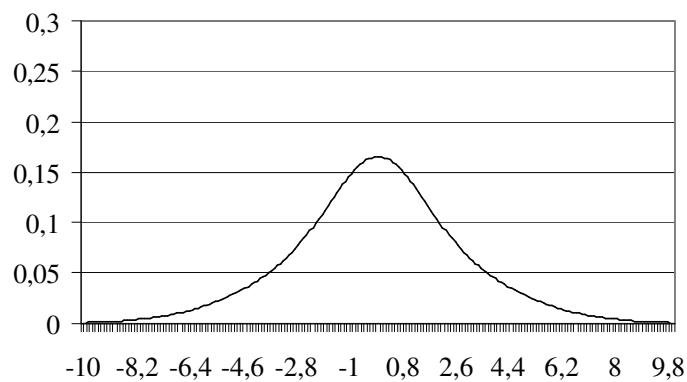


Figura A.2
Distribuição normal $g_2 = 5, h_t = 2, \gamma = 0$

**Figura A.3**Mistura de normais $p(s_t = 1 | s_{t-1}) = 0,75$ **Figura A.4**Mistura de normais $p(s_t = 1 | s_{t-1}) = 0,2$

Nas figuras A.1 e A.2 desenhamos as funções densidade de duas distribuições normais, uma para cada regime de variância, sendo que a única diferença entre elas é a escala, g . No instante t , condicionado ao conjunto de informação Ω_{t-1} , o retorno do ativo financeiro poderá ter uma dessas distribuições de probabilidade. Contudo, como temos ainda o termo s_t , o retorno será uma mistura dessas duas distribuições. As figuras A.3 e A.4 ilustram algumas possibilidades.

Apêndice 2

Raiz Unitária e Não-linearidade

As regressões em (12), (13) e (14) são válidas se as séries utilizadas forem estacionárias, hipótese que assumimos neste artigo, com base nas considerações que seguem.

Testes de raiz unitária para séries estimadas de volatilidade ainda não foram desenvolvidos e usar os valores críticos dos testes tradicionais de Dickey-Fuller ou Phillips-Perron carece de significado. Nada obstante, os testes apresentados na tabela 4 poder-nos-iam levar a crer que as volatilidades associadas aos modelos GARCH e TARCH apresentam raiz unitária.

Em segundo lugar, a interpretação de volatilidade integrada é distinta do caso da equação da média. Para ver isso, considere o modelo GARCH (1, 1) dado pela seguinte equação:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 v_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad (\text{A.4})$$

Tomando a esperança condicional ao conjunto de informação disponível em $t - 1$ e assumindo que $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, temos o seguinte:

$$E_{t-1}(h_t) = \alpha_0 + h_{t-1} \quad (\text{A.5})$$

Logo, a variância condicional toma a forma de um *random walk* com *drift*. Porém, como mostra Nelson (1990), a analogia com os processos ARIMA não é procedente. Manipulando recursivamente a equação (A.4) com $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, temos que:

$$h_t = \frac{\alpha_0}{1 - \beta_1} + (1 - \beta_1) \sum_{i=0}^{\infty} \beta_1^i v_{t-i-1}^2 \quad (\text{A.6})$$

Pela equação (A.6), os efeitos dos choques se dissipam ao longo do tempo, ao contrário do que ocorre em um processo não-estacionário. Como mostra Nelson (1990), o IGARCH é de fato estacionário e essa propriedade é o que pode estar produzindo os resultados nos testes de raiz unitária sobre as volatilidades históricas associadas ao GARCH e ao TARCH.

Apesar disso, Andrade e Tabak (2000), Chang (2002) e Gabe e Portugal (2004) fizeram o teste, buscando sinais se as séries seriam integradas ou não. Para fins de comparação com os autores com quem este artigo dialoga, procedemos da mesma forma, enfatizando que sabemos não ter significado um teste de raiz unitária nessas condições.

O teste ADF de Dickey e Fuller (1979) e o teste de Phillips e Perron (1988) rejeitaram a hipótese de raiz unitária para as séries estimadas de volatilidade implícita e histórica, exceto o teste o caso do SWARCH para volatilidade histórica e teste de Phillips-Perron. Já com relação às *proxies* da volatilidade realizada, ambos os testes apontaram para a existência da raiz unitária, tanto para a série de desvio-padrão como para a estimada por Parkinson (1980).

Tabela A.1

Testes de raiz unitária

		ADF	PP
Vol. implícita		-3,249**	-5,348*
Vol. histórica	GARCH	-3,451**	-3,300**
	TARCH	-3,507*	-3,124**
	SWARCH	-2,770***	-2,503
Vol. realizada	Desvio-padrão	-2,218	-2,325
	Parkinson	-2,276	-2,074

* Significante a 1%; **, a 5%; ***, a 10%

À luz desses resultados, algumas considerações precisam ser feitas sobre aplicação dos testes de raiz unitária às séries em questão e aí está a terceira razão para considerar as séries estacionárias.

Neste artigo, testamos a hipótese de que a variância do retorno da taxa de câmbio pode apresentar mudanças de regime ao longo do tempo, ou seja, pode possuir um comportamento não-linear. Num contexto não-linear, o emprego desses testes de raiz unitária convencional, com mudança estrutural, perde poder (ver Perron (1989). De fato, Nelson (2001) que constatam que o teste ADF perde potência quando a hipótese alternativa (verdadeira) é de um processo estacionário com mudança de regime na tendência via Markov-switching. Em contraposição, Dufrénot e Mignon (2002) concluem, para alguns modelos não-lineares, que o teste ADF possui dificuldades em identificar a raiz unitária quando o modelo não-linear não é estacionário, tendendo a rejeitar a hipótese nula com mais frequência do que deveria. Diante dessa inconclusão e das considerações anteriores assumimos que as volatilidades calculadas são estacionárias.