Um Estudo Empírico da Dinâmica da Correlação do Retorno das Ações do Brasil

(An Empirical Study of the Dynamic Correlation of Brazilian Stock Returns)

Hudson Chaves Costa*

Sabino da Silva Porto Junior**

Gabrielito Rauter Menezes***

Resumo

O presente artigo examina empiricamente o comportamento da correlação entre o retorno de ações listadas na BMF& BOVESPA no período de 2000 a 2015. Para tanto, utilizamos modelos GARCH multivariados introduzidos por Bollerslev (1990) para extrair a série temporal das matrizes de correlação condicional dos retornos das ações. Com a série temporal dos maiores autovalores das matrizes de correlação condicional estimadas, aplicamos testes estatísticos (raiz unitária, quebra estrutural e tendência) para verificar a existência de tendência estocástica ou determinística para a intensidade da correlação entre os retornos das ações. Nossos resultados confirmam que tanto em períodos de crises nacionais como turbulências internacionais, há intensificação da correlação entre as ações. Contudo, não encontramos tendência de longo prazo na série temporal dos maiores autovalores das matrizes de correlação condicional.

Keywords: Risco idiossincrático; Risco de mercado; Correlação condicional; GARCH multivariado; Autovalor

Códigos JEL: G11, G12.

Abstract

Submetido em 26 de setembro de 2017. Reformulado em 10 de setembro de 2018. Aceito em 27 de outubro de 2018. Publicado on-line em 19 de janeiro de 2019. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Márcio Laurini.

*IBMEC - MG, Belo Horizonte, MG, Brasil. E-mail: HUDSONCHAVS@GMAIL.COM.

**Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, RS, Brasil. E-mail: sabino@ppge.ufrgs.br

***Universidade Federal de Pelotas (UFPEL), Pelotas, RS, Brasil. E-mail: gabrielitorm@gmail.com

Rev. Bras. Finanças (Online), Rio de Janeiro, 16, No. 4, Oct. 2018, pp. 635-667

ISSN 1679-0731, ISSN online 1984-5146

©2018 Sociedade Brasileira de Finanças, under a Creative Commons Attribution 3.0 license - <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>

This article examines empirically the behavior of the correlation between the return of shares listed on the BMF& BOVESPA over the period from 2000 to 2015. To this end, we use multivariate GARCH models introduced by Bollerslev (1990) to remove the temporal series of arrays of conditional correlation of returns of stocks. With the temporal series of the largest eigenvalues of matrices of correlation estimated conditional, we apply statistical tests (unit root, structural breaks and trend) to verify the existence of stochastic trend or deterministic to the intensity of the correlation between the returns of the shares represented by eigenvalues. Our results confirm that both in times of crises at national and international turbulence, there is greater correlation between the actions. However, we did not find any long-term trend in time series of the largest eigenvalues of matrices of correlation conditional.

Keywords: Idiosyncratic risk; Market risk; Conditional correlation; Multivariate garch; Eigenvalue

1. Introdução

A correlação entre os retornos de ativos é um ponto importante para a mensuração de risco quantitativo e controle de investimento em uma carteira. Intuitivamente, o risco de um portfólio de ativos mensurado por uma certa medida de risco tal como *value at risk* (VaR), compreende os componentes variância e covariância o que atribui um papel crucial para a correlação em função de sua relação direta com a covariância.

A pioneira análise de Markowitz (1952) formalizou uma linha de pensamento que mostra a importância da otimização para a alocação de recursos em uma carteira de investimentos. Markowitz (1952), ressaltou que os preços dos ativos financeiros não se movem de modo perfeito, o que caracteriza correlação imperfeita entre os retornos. Nesta condição, a variância total de uma carteira é reduzida pelo fato de que a variação no preço individual de um ativo ser compensada por variações complementares nos demais.

A diversificação é uma maneira de diminuir a exposição dos investidores ao risco idiossincrático que está associado à volatilidade idiossincrática¹ de um determinado ativo e afeta decisões relativas à gestão de carteiras, conforme destacou Angelidis (2010). Porém, estu-

¹Uma forma de precificar a volatilidade idiossincrática é pela parcela da variabilidade total do rendimento atrelada a fatores peculiares do ativo

dos como Falkenstein (1996), Campbell et al. (2001), Xu and Malkiel (2003) já mostraram que nem sempre os investidores são capazes de diversificar completamente o risco idiossincrático.

Costa et al. (2016) encontraram tendência negativa para a volatilidade idiossincrática de ações brasileiras no período de 1996 a 2010. Se tudo o mais permanecer constante, a queda no risco idiossincrático aumentaria a correlação entre o retorno de ativos conforme apontado por Campbell et al. (2001), Xu and Malkiel (2003), Kearney and Potì (2006) e Angelidis (2010). Porém, a simples correlação de Pearson² utilizadas nestes estudos demanda cautela, pois ela é uma medida estatística sujeita a erros de estimação e que pode variar ao longo do tempo e em circunstâncias diferentes. A correlação é distorcida na presença de caudas pesadas na distribuição dos retornos, mostrando um grau de interdependência maior do que a existente, especialmente em períodos de crises onde muitos ativos tendem a ter maior volatilidade, como mostraram Isogai et al. (2015). Além disso, as séries temporais financeiras apresentam propriedades peculiares (conhecidas como fatos estilizados³) que podem afetar a estimação da correlação entre o retorno dos ativos como mostrado por Fama (1965), Mandelbrot (1963) e Mantegna and Stanley (1999).

Dada a importância da correlação entre ativos para a diversificação de carteiras, as imperfeições nas quais estão sujeitas as medidas lineares de correlação e as conclusões de Costa et al. (2016) sobre a tendência de queda do risco idiossincrático no mercado acionário brasileiro, o presente estudo tem como objetivo contribuir para a pesquisa brasileira na medida em que examina empiricamente o com-

²Neste contexto, correlação é uma medida de tendência dos retornos de um ativo mover em conjunto com os retornos de outro ativo. Em outras palavras, dois ativos que são não correlacionados deveriam não ter relação linear e sistemática entre seus retornos ao longo do tempo. Combinando ativos não correlacionados, os movimentos de um ativo podem mitigar, ao menos parcialmente, os movimentos do segundo ativo, reduzindo a volatilidade média de um portfólio.

³a) Estacionariedade: as propriedades da série são invariantes ao longo do tempo; b) fraca ou nenhuma dependência linear e uma dependência não linear: a série normalmente é pouco ou não autocorrelacionada, mas a série do quadrado das observações é autocorrelacionada; c) não-normalidade: as distribuições das séries financeiras geralmente apresentam caudas pesadas e presença de assimetria, distanciando da distribuição Normal; d) existência de conglomerados de volatilidade: a série financeira costuma alterar períodos de alta volatilidade e períodos de baixa volatilidade, ou seja, a variância condicional da série varia o longo do tempo.

portamento da correlação entre o retorno de ações listadas na BMF&BOVESPA no período de 2000 a 2015. Para tanto, utilizamos modelos GARCH Multivariado introduzidos por Bollerslev (1990) para extrair a série temporal das matrizes de correlação condicional dos retornos das ações.⁴

Com a série temporal dos maiores autovalores das matrizes de correlação condicional estimadas, aplicamos testes estatísticos (raiz unitária, quebra estrutural e tendência) para verificar a existência de tendência estocástica ou determinística para a intensidade da correlação entre os retornos das ações representadas pelos autovalores. Nossos resultados confirmam que tanto em períodos de crises nacionais como turbulências internacionais, há intensificação da correlação entre as ações.

Ao contrário de outros estudos onde a tendência no risco idiossincrático conduz movimentos na correlação entre os retornos dos ativos, não encontramos qualquer tendência de longo prazo na série temporal dos maiores autovalores das matrizes de correlação condicional. Tais resultados podem estar relacionados à metodologia utilizada por tais estudos para obter a série temporal das correlações como será mostrado no decorrer do presente estudo.

O restante do artigo é organizado como segue: enquanto a seção 2 discute a metodologia por meio da exposição da relação entre correlação e risco idiossincrático além de apresentar os modelos GARCH Multivariado, testes estatísticos utilizados e teoria de matrizes aleatórias e autovalores, a seção 3 aponta os resultados encontrados e a

⁴As tentativas iniciais de construção de modelos para as covariâncias condicionais, como por exemplo, o modelo Vech de Bollerslev et al. (1988) e o modelo Bekk de Engle and Kroner (1995), sofreram da chamada maldição da dimensionalidade. Nessas especificações, o número de parâmetros cresce rapidamente à medida que a dimensão do problema aumenta, criando dificuldades no processo de estimação e introduzindo erro de estimação nas matrizes de covariâncias estimadas. Nesse contexto, os modelos de correlações condicionais de Bollerslev (1990) emergem como alternativas mais parcimoniosas e que requerem uma quantidade menor de parâmetros a serem estimados. A principal atratividade destes modelos é a possibilidade de estimar separadamente variâncias univariadas e a matriz de correlações. Essa decomposição simplifica a estimação e torna o modelo mais flexível e mais atrativo em relação às especificações Garch multivariadas de Bollerslev et al. (1988) e Engle and Kroner (1995), especialmente no que se refere à possibilidade de sua utilização em problemas que envolvem um grande número de séries temporais.

seção 4 apresenta as considerações finais e propõe futuras pesquisas.

2. Metodologia

2.1 Risco de mercado, risco idiossincrático e correlação

Considere o seguinte modelo de mercado que pode ser escrito como um versão simplificada de Sharpe (1964) e Lintner (1965):

$$r_{i,t} = \beta_i r_{m,t} + \varepsilon_{i,t} = r_{m,t} + \eta_{i,t} \quad (1)$$

onde, $r_{i,t}$ é o excesso de retorno do ativo i em t sobre o ativo livre de risco, $r_{m,t}$ é o excesso de retorno da carteira de mercado, β_i é o coeficiente beta do ativo, $\varepsilon_{i,t}$ é o usual resíduo idiossincrático do CAPM e $\eta_{i,t}$ é o excesso de retorno ajustado de mercado do ativo i . Campbell et al. (1997) classificam 1 como um modelo de mercado ajustado caso seja assumido que β_i é igual a 1.

Considerando $w_{i,t}$ como o peso do ativo i na carteira de mercado em t e sua soma igual a 1, poder-se-á computar a variância média dos retornos de n ações como:

$$\sum_i^n w_{i,t} Var(r_{i,t}) = Var(r_{m,t}) + \sum_i^n w_{i,t} Var(\eta_{i,t}) + \sum_i^n w_{i,t} 2Cov(r_{m,t}, \eta_{i,t}) \quad (2)$$

Note que a eliminação de β_i em 1 faz com que $r_{m,t}$ e $\varepsilon_{i,t}$ sejam ortogonais. Sabendo que a média ponderada dos coeficientes β_i é igual a 1, o último termo do lado direito da equação 2 é igual a zero e tem-se a decomposição de variância proposta por Campbell et al. (2001), fazendo $VAR_t = \sum_i^n w_{i,t} Var(r_{i,t})$:

$$VAR_t = Var(r_{m,t}) + \sum_i^n w_{i,t} Var(\eta_{i,t}) = MKT_t + FIRM_t \quad (3)$$

Segundo Kearney and Potì (2006) apesar de ser intuitiva a conclusão de Campbell et al. (2001) de que uma tendência de alta no risco idiossincrático sem qualquer alteração no risco de mercado sugere uma queda na correlação média entre os ativos de uma carteira, não é trivial prever que o padrão na correlação média pode subir quando, por exemplo, o risco idiossincrático médio e o risco de mercado variam na mesma direção, mas em diferentes taxas. Para analisar todos

os conjuntos de possíveis configurações do risco de mercado e o risco idiossincrático, Kearney and Potì (2006) reescreveram o termo MKT em 3 convertendo-o na notação matricial abaixo:

$$MKT_t = w_t' H_t w_t \quad (4)$$

onde $H_t = D_t R_t D_t$ e $[H_t]_{i,j} = h_{i,j,t}$.

Em 4, R_t é uma matriz $n \times n$ de correlações, D_t é uma matriz diagonal $n \times n$ com os elementos de sua diagonal principal representando os desvios padrões do excesso de retorno e w_t é um vetor $n \times 1$ de pesos. De 4 podemos reescrever:

$$MKT_t = w_t' D_t R_t D_t w_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_t d_{i,i,t} d_{j,j,t} = \frac{r_t (i' D_t I D_t i)}{n} \quad (5)$$

onde: $r_t = \sum \sum w_{i,t} w_{j,t} r_{i,j,t}$. Em 5, I é uma matriz identidade $n \times n$, r_t é o coeficiente de correlação médio ponderado e i é um vetor unitário $n \times 1$. A variância da carteira, MKT_t , aumenta proporcionalmente com a correlação média, r_t , se a matriz de desvio padrão, D_t , permanece constante. Usando 5, pode-se reescrever 3 para a decomposição de variância como em 6:

$$VAR_t = \frac{r_t (i' D_t I D_t i)}{n} + FIRM_t \quad (6)$$

Portanto, conforme Kearney and Potì (2006), a equação 6 nos diz que pelo menos para uma carteira de mercado igualmente ponderada ($w_t = \frac{1}{n} i$), pode-se interpretar a correlação média como um parâmetro que para algum dado nível de risco total médio, divide este em risco de mercado e risco idiossincrático.

Campbell et al. (2001), Kearney and Potì (2006) e Costa et al. (2016) fizeram uso de dados diários ou semanais para obter estimativas mensais para MKT_t , $FIRM_t$ e r_t . Porém, Kearney and Potì (2006) salientam que tal abordagem pode ser um complicador dado que a agregação de dados diários ou semanais em dados mensais de menor frequência pode gerar problemas em caso de amostras pequenas.

Neste sentido, conforme Kearney and Potì (2006), o presente artigo aplica modelos GARCH multivariado em séries temporais de

retornos de ações listadas na BMF&BOVESPA no período de 2000 a 2015 para avaliar o comportamento da correlação condicional ao longo do tempo. Em busca de maior robustez nos resultados obtidos, várias especificações para esta abordagem econométrica são propostas dentre elas, o modelo com melhor ajuste é escolhido para o estudo da dinâmica da correlação condicional.

2.2 Modelo GARCH Multivariado

A capacidade de modelar a dinâmica da densidade multivariada tem implicações importantes para a gestão de risco e carteiras, além da tomada de decisão em política econômica. Contudo, os modelos GARCH multivariado revelaram-se muito desafiadores desde a extensão direta dos modelos GARCH univariados propostos por Bollerslev et al. (1988).

Considere o processo estocástico, $\mathbf{x}_t$ $\{t = 1, 2, \dots, T\}$ de retornos financeiros com dimensão $N \times 1$ e vetor de média μ_t ⁵, dado o conjunto de informações ζ_{t-1} :

$$\mathbf{x}_t | \zeta_{t-1} = \mu_t + \varepsilon_t, \quad (7)$$

onde os resíduos do processo são modelados como:

$$\varepsilon_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \mathbf{z}_t, \quad (8)$$

e $\mathbf{H}_t^{1/2}$ é uma matriz positiva definida $N \times N$ tal que $\mathbf{H}_t$ é a matriz de covariância condicional de $\mathbf{x}_t$, e $\mathbf{z}_t$ um vetor aleatório $N \times 1$ independente e identicamente distribuído (i.i.d.) com os dois primeiros momentos centralizados:

$$E[\mathbf{z}_t] = 0,$$

$$Var[\mathbf{z}_t] = \mathbf{I}_N, \quad (9)$$

com $\mathbf{I}_N$ denotando a matriz identidade de ordem N . Assim, a matriz de covariância condicional pode ser definida como:

⁵O vetor de média pode, por exemplo, ser derivado a partir de um modelo VAR ou pode simplesmente representar a média incondicional dos retornos.

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\mathbf{x}_t|\zeta_{t-1}) &= \text{Var}_{t-1}(\mathbf{x}_t) = \text{Var}_{t-1}(\varepsilon_t) \\
&= \mathbf{H}_t^{1/2} \text{Var}_{t-1}(\mathbf{z}_t) (\mathbf{H}_t^{1/2})' \\
&= \mathbf{H}_t.
\end{aligned} \tag{10}$$

A literatura sobre diferentes especificações de $\mathbf{H}_t$ pode ser amplamente dividida em extensões multivariadas diretas, modelos fatoriais e modelos de correlação condicional. O usual *trade-off* da parametrização do modelo e dimensionalidade aplica-se aqui claramente, com modelos completamente parametrizados oferecendo uma dinâmica mais rica ao custo de maior quantidade de parâmetros, tornando inviável a modelagem quando temos muitos ativos. Também existe um *trade-off*, não tão evidente, entre os modelos que permitem uma dinâmica univariada flexível (na dinâmica do movimento e distribuições) ao custo de alguma dinâmica multivariada. Nesta seção apresentaremos alguns destes modelos e os *trade-offs* entre eles. Uma revisão mais completa dos modelos GARCH multivariado é fornecida por Bauwens et al. (2006) assim como em Silvennoinen and Teräsvirta (2009).

Os modelos de correlação condicional são basicamente uma decomposição da matriz de covariância condicional em desvios-padrão e correlação condicional de modo que elas possam ser expressas de uma maneira que a dinâmica univariada e multivariada seja separada, facilitando o processo de estimação. Esta decomposição surge ao custo de alguma estrutura dinâmica bem como restrições rigorosas sobre o tipo de distribuição multivariada que pode usualmente ser decomposta da maneira proposta. No modelo *Constant Conditional Correlation* (CCC) de Bollerslev (1990), a matriz de covariância pode ser decomposta em:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R} \mathbf{D}_t = \rho_{ij} \sqrt{h_{iit} h_{jtt}}, \tag{11}$$

onde $\mathbf{D}_t = \text{diag}(\sqrt{h_{11,t}}, \dots, \sqrt{h_{nn,t}})$ e $\mathbf{R}$ é matriz de correlação condicional constante positiva definida. As variâncias condicionais, e $h_{ii,t}$, que podem ser estimadas separadamente, são escritas em forma vetorial baseadas em modelos GARCH(p,q):⁶

⁶Os modelos GARCH não são restritos a serem de uma forma particular, permitindo escolher diferentes modelos GARCH no estágio onde eles são estimados.

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \varepsilon_{t-i} \odot \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^q \mathbf{B}_i h_{t-i} \quad (12)$$

onde $\omega \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}_i$ e $\mathbf{B}_i$ são matrizes diagonais $N \times N$ e $\odot$ denota o operador de Hadamard. As condições para a positividade da matriz de covariância $\mathbf{H}_t$ são que $\mathbf{R}$ é positiva definida e os elementos de ω e os elementos da diagonal das matrizes $\mathbf{A}_i$ e $\mathbf{B}_i$ sejam positivos. No modelo CCC estendido (E-CCC) de Jeanthéau (1998) a hipótese dos elementos na diagonal de $\mathbf{A}_i$ e $\mathbf{B}_i$ foi relaxada, permitindo as variâncias e erros quadráticos passados das séries afetarem a dinâmica das variâncias condicionais individuais e, assim, prover uma estrutura mais rica ainda que ao custo de mais parâmetros. A decomposição em 11, permite o logaritmo da verossimilhança em cada ponto do tempo (LL_t), no caso de uma normal multivariada, ser expresso como:

$$\begin{aligned} LL_t &= \frac{1}{2} (\log(2\pi) + \log |\mathbf{H}_t| + \varepsilon_t' \mathbf{H}_t^{-1} \varepsilon_t) \\ &= \frac{1}{2} (\log(2\pi) + \log |\mathbf{D}_t \mathbf{R} \mathbf{D}_t| + \varepsilon_t' \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D}_t^{-1} \varepsilon_t) \\ &= \frac{1}{2} (\log(2\pi) + 2 \log |\mathbf{D}_t| + \log |\mathbf{R}| + \mathbf{z}_t' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z}_t) \end{aligned} \quad (13)$$

onde $\mathbf{z}_t = \mathbf{D}_t^{-1} \varepsilon_t$. Isto pode ser descrito como um termo ($\mathbf{D}_t$) para a soma das verossimilhanças do modelo GARCH univariado, um termo para a correlação ($\mathbf{R}$) e um termo para a covariância que decorre da decomposição.

Em função da restrição de correlação condicional constante não ser realista na prática, surgiu uma classe de modelos denominados *Dynamic Conditional Correlation* (DCC) devido a Engle (2002) e Tse and Tsui (2002) onde é permitido que a matriz de correlação seja variante ao longo do tempo, tal que:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t. \quad (14)$$

Nesses modelos, além da matriz de correlação variar ao longo do tempo, ela deve ser invertível e positiva definida, tornando o cálculo muito mais lento. O modelo DCC de Engle (2002), incorpora essas restrições modelando um processo *proxy*, $\mathbf{Q}_t$ como:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_t &= \bar{\mathbf{Q}} + a(\mathbf{z}_{t-1}'\mathbf{z}_{t-1} - \bar{\mathbf{Q}}) + b(\mathbf{Q}_{t-1} - \bar{\mathbf{Q}}) \\ &= (1 - a - b)\bar{\mathbf{Q}} + a\mathbf{z}_{t-1}'\mathbf{z}_{t-1} + b\mathbf{Q}_{t-1}\end{aligned}\quad (15)$$

onde a e b são escalares não negativos, com a condição que $a + b < 1$, imposta para garantir que $\mathbf{Q}_t$ é estacionária e positiva definida. $\bar{\mathbf{Q}}$ é a matriz não condicional dos erros padronizados $\mathbf{z}_t$ que entra na equação via covariância $(1 - a - b)\bar{\mathbf{Q}}$, e $\mathbf{Q}_0$ é positiva definida. A matriz de correlação $\mathbf{R}_t$ é então obtida por meio do escalonamento de $\mathbf{Q}_t$ tal que,

$$\mathbf{R}_t = \text{diag}(\mathbf{Q}_t)^{-1/2} \mathbf{Q}_t \text{diag}(\mathbf{Q}_t)^{-1/2}. \quad (16)$$

A função do logaritmo da verossimilhança na equação 12 pode ser decomposta mais claramente em um componente de volatilidade e correlação adicionando e subtraindo $\varepsilon_t' \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{D}_t^{-1} \varepsilon_t = \mathbf{z}_t' \mathbf{z}_t$,

$$\begin{aligned}LL &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \left(N \log(2\pi) + 2 \log |\mathbf{D}_t| + \log |\mathbf{R}_t| + \mathbf{z}_t' \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{z}_t \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \left(N \log(2\pi) + 2 \log |\mathbf{D}_t| + \varepsilon_t' \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{D}_t^{-1} \varepsilon_t \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \left(\mathbf{z}_t' \mathbf{z}_t + \log |\mathbf{R}_t| + \mathbf{z}_t' \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{z}_t \right) \\ &= LL_V(\theta_1) + LL_R(\theta_1, \theta_2)\end{aligned}\quad (17)$$

onde $LL_V(\theta_1)$ é o componente de volatilidade com parâmetro θ_1 e $LL_R(\theta_1, \theta_2)$ o componente de correlação com parâmetros θ_1 e θ_2 . No caso de uma normal multivariada, onde não há parâmetros de assimetria e forma na densidade, o componente de volatilidade é a soma das verossimilhanças do GARCH univariado que pode ser maximizada conjuntamente por maximizar cada modelo univariado separadamente. Em outras distribuições, tal como uma Student multivariada, a existência de um parâmetro de forma significa que a estimação deve ser performada em um passo de modo que o parâmetro de forma é estimado conjuntamente com todos os modelos. A separação da verossimilhança em duas partes torna viável a estimação em grande escala. Junto com a utilização da variância segmentada, sistemas de grande escala podem ser estimados em uma questão de

segundos com o uso de computação paralela. Ainda, assim como um sistema se torna maior e maior, ele se torna questionável se os parâmetros escalares podem adequadamente capturar a dinâmica do processo subjacente. Como tal, Cappiello et al. (2006) generalizaram o modelo DCC com a introdução do AGDCC *Asymmetric Generalized DCC* onde a dinâmica de $\mathbf{Q}_t$ é:

$$\mathbf{Q}_t = (\bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{A}'\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{A} - \mathbf{B}'\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{B} - \mathbf{G}'\bar{\mathbf{Q}}^-\mathbf{G}) + \mathbf{A}'\mathbf{z}_{t-1}\mathbf{z}_{t-1}'\mathbf{A} + \mathbf{B}'\mathbf{Q}_{t-1}\mathbf{B} + \mathbf{G}'\mathbf{z}_t^-\mathbf{z}_t^-\mathbf{G} \quad (18)$$

onde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{G}$ são as matrizes $N \times N$ de parâmetros, $\mathbf{z}_t^-$ são os erros padronizados que são iguais à $\mathbf{z}_t$ quando menor que zero, $\bar{\mathbf{Q}}$ e $\bar{\mathbf{Q}}^-$ as matrizes incondicionais de $\mathbf{z}_t$ e $\mathbf{z}_t^-$ respectivamente. Em função da alta dimensionalidade do modelo AGDCC, usamos um modelo mais restrito onde $\mathbf{G} = \sqrt{g}$, $\mathbf{A} = \sqrt{a}$ e $\mathbf{B} = \sqrt{b}$. Tal modelo é conhecido como ADCC que permite que choques positivos e negativos com impactos diferentes.

2.3 Teoria de matrizes aleatórias e autovalores

A teoria de matrizes aleatórias fornece uma medida confiável para distinguir autovalores informativos de poucos informativos. A distribuição Marcenko-Pastur é uma boa aproximação da densidade de autovalores da matriz de correlação de retornos aleatorizados.⁷ Contudo, estamos interessados em qual dos autovalores são significativos examinando o maior autovalor da matriz de correlação dos retornos aleatorizados. Outro ponto importante é que precisamos saber qual o valor limite que o máximo autovalor da matriz de correlação dos retornos aleatorizados pode tomar. Se um autovalor de uma matriz de correlação é maior do que o valor limite, podemos satisfatoriamente dizer que ele é significativo.

Para determinar o limite, necessitamos saber a distribuição limitante do máximo autovalor da matriz de correlação dos retornos aleatorizados com o mesmo tamanho da matriz de correlação amostral. Johnstone (2001) mostrou que a distribuição assintótica

⁷Os maiores e menores autovalores de uma matriz Wishart apresenta convergência quase certa para os respectivos limites da distribuição de Marcenko-Pastur quando a verdadeira matriz de covariância é uma matrix identidade como pode ser visto em Marčenko and Pastur (1967)

do maior autovalor corretamente redimensionado da matriz de covariância populacional Wishart é a distribuição Tracy-Widom, que fornece a distribuição limitante do máximo autovalor, enquanto a distribuição Marcenko-Pastur sugere limites da distribuição dos autovalores. Para maiores detalhes matemáticos sobre autovalores e a distribuição Tracy-Widom veja Johnstone (2001) e Tracy and Widom (2009). A função de distribuição da distribuição Tracy-Widom $F_\beta(\cdot)$ tem três tipos de definição dependendo do valor de β (1,2,4).⁸. Definimos β como 1, que fornece o valor (a ser usado como um limite) quantílico mais conservador (maior) comparado com os outros. A função de distribuição $F_1(\cdot)$ é definida como:

$$F_1(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_x^\infty q(y)dy\right) (F_2(x))^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

$$F_2(x) = \exp\left(-\int_x^\infty (y-x)q^2(y)dy\right) \quad (20)$$

q é a solução única para a equação diferencial ordinária chamada de equação *Painlevé*.⁹

2.4 Teste de tendência linear

Uma abordagem padrão para testar a significância da tendência determinística de uma série temporal tem sido a de assumir um modelo linear simples, da forma:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t, t = 1, 2, 3, \dots, T, \quad (21)$$

onde y_t é a variável dependente e u_t é o erro estocástico do modelo de tendência. O parâmetro β_2 mede a mudança média de y_t por período de tempo. Uma vez que todas as séries estudadas são bastante persistentes, testes padrões não são válidos. Desta forma, testamos os seguintes testes unicaudais:

$$H_0 : \beta_2 \geq 0; H_1 : \beta_2 < 0 \quad (22)$$

$$H_0 : \beta_2 \leq 0; H_1 : \beta_2 > 0 \quad (23)$$

⁸O valor de β depende da hipótese da estrutura da matrix de correlação: $\beta = 1$ para *Gaussian orthogonal ensemble*, $\beta = 2$ para *Gaussian unitary ensemble* e $\beta = 4$ para *Gaussian symplectic ensemble*.

⁹Para uma definição mais completa, veja Tracy and Widom (1996).

utilizando a estatística $t - PS_T$ proposta por Vogelsang (1998), que é robusta para qualquer forma de correlação serial em u_t . O teste de tendência usado oferece várias vantagens sobre os testes convencionais. Em primeiro lugar, o teste é robusto para a possibilidade de uma raiz unitária no termo do erro, ou seja, é assintoticamente válido se os erros são estacionários ou se possuem raiz unitária. Vogelsang (1998) mostrou que em amostras finitas o teste tem o tamanho ótimo próximo do nível nominal de amostras tão pequenas quanto 100 observações. Em segundo lugar, o teste não requer uma estimativa de σ^2 , e desse modo, a escolha do truncamento da defasagem do erro pode ser totalmente evitada segundo Fomby and Vogelsang (2002). A estatística $t - PS_T$ é baseada na seguinte regressão que é obtida computando as somas parciais dos dados originais y_t .

$$z_t = \beta_1 t + \beta_2 \left[\frac{1}{2} (t^2 + t) \right] + S_t \quad (24)$$

onde $z_t = \sum_{j=1}^t y_j$ e $S_t = \sum_{j=1}^t u_j$. z_t e S_t são as somas parciais de y_t e u_t e os regressores são obtidos pelas fórmulas $t = \sum_{j=1}^t 1$ e $\frac{1}{2} (t^2 + t) = \sum_{j=1}^t j$. Suponha que a regressão 24 é estimada por MQO. Seja X_z a matriz $(T \times 2)$ dos regressores de 24 e t_z a estatística-t padrão de MQO para testar $\beta_2 = 0$. Ou seja,

$$t_z = \tilde{\beta}_2 / \left[S_Z^2 (X_Z' X_Z)^{-1} \right]^{1/2} \quad (25)$$

onde $\tilde{\beta}_2$ denota o estimador MQO de β_2 da equação 24, $S_Z^2 = (T - 2)^{-1} \sum_{t=1}^T \tilde{S}_t^2$ é a variância amostral dos resíduos de MQO. A estatística $t - PS_T$ proposta por Vogelsang (1998) é definida por $T^{1/2}$ multiplicada pela expressão 25:

$$t - PS_T = T^{-1/2} t_z \exp(-b J_T) \quad (26)$$

b é uma constante e $J_T = (RSS_y - RSS_J) / RSS_J$. RSS_y é a soma dos quadrados dos resíduos de MQO da regressão 24 e RSS_J é a soma dos quadrados dos resíduos de MQO da regressão:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \sum_{i=2}^9 \beta_{i+1} t^i + u_t \quad (27)$$

Note que T vezes J_T corresponde à estatística padrão de Wald para testar $\beta_3 = \beta_4 = \dots = \beta_{10} = 0$ na regressão 27. Vogelsang (1998)

recomendou que a ordem do polinômio da equação 27 seja igual a 9, pois o poder do teste $t - PS_T$ é uma função crescente da ordem do polinômio, mas o aumento do poder é desprezível para ordens polinomiais maiores que 9. Quando os erros têm uma raiz unitária, $\exp(-bJ_T)$ tem uma distribuição assintótica bem definida, porém quando os erros são estacionários, $\exp(-bJ_T) \rightarrow 1$, já que $J_T \rightarrow 0$. Assim, quando os erros são estacionários, $t - PS_T$ e $T^{-1/2}t_z$ possuem as mesmas distribuições assintóticas porque $\exp(-bJ_T) \rightarrow 1$. Mas, quando os erros têm uma raiz unitária, $t - PS_T$ e $T^{-1/2}t_z$ possuem distribuições assintóticas diferentes. Mais importante, note que para $b > 0$, $\exp(-bJ_T)$ assume valores pequenos porque J_T assume grandes valores positivos. Portanto, b pode ser escolhido de forma a diminuir a distribuição assintótica de $t - PS_T$ quando os erros têm uma raiz unitária sem afetar a distribuição assintótica de $t - PS_T$ quando os erros são estacionários.

Não é possível escolher b de modo que a distribuição de $t - PS_T$ seja a mesma se os erros são estacionários ou se têm uma raiz unitária. Mas, para um dado nível de significância, b pode ser escolhido de forma que os valores críticos são os mesmos, seja para erros estacionários ou para erros com raiz unitária. Vogelsang (1998) derivou a distribuição assintótica de $t - PS_T$ e calculou os valores críticos assintóticos e os valores correspondentes de b utilizando métodos de simulação de Monte Carlo. Para pontos percentuais 1%, 5% e 10%, os valores críticos assintóticos e os b 's (em parênteses) são 2.647 (1.501), 1.720 (0.716) e 1.331 (0.494). Esses valores críticos são apropriados para a hipótese unicaudal que estamos considerando.

2.5 Dados

Para a composição da amostra deste estudo, não houve restrição sobre o tipo de empresa listada, mas apenas liquidez. Desta forma, todas as ações negociadas na BM&F BOVESPA em cada mês do período amostral (2000-2015) são candidatas a participar da amostra. O critério adotado na escolha das ações é a análise do índice de liquidez em bolsa¹⁰, em termos mensais. Ações que não possuíssem valor

¹⁰ $liquidezembolsa = 100 * p/P * \sqrt{n/N * v/V}$, onde p é o número de dias em que houve pelo menos um negócio com a ação dentro do período escolhido; P é o número total de dias do período escolhido; n é o número de negócios com a ação dentro do período escolhido; N é o número de negócios com todas as

superior a 0.68 para este índice, que representa aproximadamente 15 dias de negociação dentro de cada mês, não foram consideradas. Este critério foi adotado para minimizar os problemas de retornos espúrios causados pela falta de preços de fechamento, tal como Ricca (2010) e Costa et al. (2016), já que o mercado acionário brasileiro é menor, mais recente e menos consolidado do que os mercados europeus e dos EUA. Abertura ou fechamento de capital, falências e falta de liquidez são as causas de tais dados faltantes. Tanto o índice de liquidez em bolsa quanto os preços de fechamentos utilizados para estimar a correlação condicional foram obtidos no sistema Economática. Todos os retornos foram calculados de forma contínua, isto é, usou-se o logaritmo natural da razão entre os fechamentos (ajustados aos proventos) em t e $t - 1$, onde t pode ser de qualquer periodicidade (diário, semanal, mensal e anual). Após a aplicação dos critérios anteriormente apresentados, a amostra final é compreendida por 42 ações com 4173 observações cada.

Tabela 1

Quantidade de ações selecionadas por setor

Setor	Quantidade
Indústria Manufatureira	19
Empresa de eletricidade, gás e água	11
Informação	5
Administração de empresas e empreendimentos	1
Comércio Varejista	2
Mineração	2
Serviços financeiros e seguros	2
Total	42

Fonte: Elaborado pelos autores.

A tabela 1 apresenta a quantidade de ações selecionadas por setor.¹¹ Os setores de Indústria Manufatureira e Empresa de eletricidade, gás e água são os mais representativos. Detalhes sobre cada ações dentro do período escolhido; v é o volume em dinheiro com a ação dentro do período escolhido; V é o volume em dinheiro com todas as ações dentro do período escolhido.

¹¹Neste estudo, a definição de setor é semelhante à disponibilizada pelo Economática. A única diferença é a agregação dos setores Loja de Mercadorias Variadas com o Comércio Varejista para formar o setor Comércio Varejista

ação selecionada dentro dos setores podem ser encontrados na tabela 11 do anexo.

3. Resultados

A pioneira análise do comportamento de medidas de volatilidade desagregadas proposta por Campbell et al. (2001) desencadeou uma série de estudos (Xu and Malkiel (2003), Kearney and Potì (2008), Sousa and Serra (2008), Brandt et al. (2010)) sobre a dinâmica do risco idiossincrático. Uma das principais conclusões de Campbell et al. (2001) é que o componente específico das ações apresentou tendência de alta no período de 1962 a 1997 para o mercado acionário dos EUA. Como consequência deste comportamento, houve uma queda na correlação média entre as ações dos EUA fazendo com que a quantidade de ações necessárias para alcançar um determinado nível de diversificação aumentasse. Estas evidências também foram documentadas em mercado de ações de outros países desenvolvidos e economias emergentes (Morck et al. (2000), Li et al. (2004), Kearney and Potì (2008)). Para o caso brasileiro, Costa et al. (2016), utilizando a abordagem de Campbell et al. (2001), encontraram uma tendência de queda na volatilidade idiossincrática no período de 1996 a 2010 enquanto que a correlação média incondicional aumentou no mesmo período.

Porém, a análise baseada apenas na computação de variâncias e covariâncias seguidas pela estimação de séries temporais conforme apresentado na metodologia, tem suas deficiências e pode impactar nas conclusões obtidas. Nesta perspectiva, o presente trabalho buscou a partir da estimação de modelos GARCH multivariado avaliar o comportamento da correlação condicional do retorno das ações do mercado acionário brasileiro no período de 2000 a 2015 e verificar empiricamente se este se assemelha ao documentado na teoria de finanças.

Com o objetivo de validar a presença de heterocedasticidade condicional na amostra de dados utilizada neste estudo, realizamos testes por meio da estatística de Ljung-Box (mais detalhes sobre os testes em Tsay (2013)). A tabela 2 apresenta os resultados e, como esperado, as estatísticas dos testes rejeitam a hipótese nula de não heterocedasticidade condicional¹².

¹²Sabemos que a maioria das séries temporais financeiras têm heterocedastici-

Tabela 2

Teste de heterocedasticidade condicional

Teste	Estatística do Teste	p-valor
$Q(m)$ das séries ao quadrado	1773.18	0.00
Teste baseado no <i>rank</i>	2440.07	0.00
$Q_k(m)$	75728.54	0.00
Teste Robusto (5%)	67133.47	0.00

Fonte: Elaborado pelos autores.

3.1 Dinâmica da Correlação Condicional

A escolha entre correlação dinâmica e estática é uma questão empírica que depende dos dados observados. Neste contexto, executamos o teste proposto por Engle and Sheppard (2001) para verificar se a hipótese de correlação dinâmica é viável para os dados deste estudo. O modelo GARCH (1,1), que é assumido ser um modelo GARCH típico, é primeiro ajustado aos retornos individuais para obter os resíduos padronizados. A correlação constante é então calculada a partir dos resíduos padronizados. A hipótese nula (H_0) é $R_t = \bar{R}$ (ou seja, correlação condicional constante). O teste é baseado em uma regressão artificial dos produtos externos dos resíduos sobre uma constante e produtos externos defasados para explorar se existe qualquer dependência temporal entre R_t e $R_{t-1}, \dots, R_{t-i}$.

A tabela 3 mostra os resultados do teste. Em ambos os casos, podemos rejeitar a hipótese nula em favor do modelo de correlação dinâmica ao invés da correlação estática ao nível de significância de 5%. Este resultado motiva a estimação do modelo DCC-GARCH.¹³

3.2 Análise do comportamento da correlação condicional

Como mencionado na metodologia, modelos de correlação condicional baseiam-se na decomposição da matriz de variância condicional em dois componentes: desvio padrão e correlação (ambos condicionais). Isto é realizado de forma que seja possível a separação das

dade condicional e que um dos principais objetivos dos modelos multivariado de volatilidade é modelar a dependência da covariância condicional.

¹³Engle and Sheppard (2001) discutiram as dificuldades técnicas associadas com testar a hipótese nula de correlação constante contra a alternativa de correlação dinâmica.

Tabela 3

Teste de correlação constante

Defasagens	Estatística	P-valor
1	6.2859	0.043
5	14.800	0.022

Fonte: Elaborado pelos autores. Estatística do teste proposto por Engle and Sheppard (2001).

dinâmicas univariadas e multivariadas e, por conseguinte, facilita o processo de estimação. Esta decomposição traz o custo de assumir alguma estrutura dinâmica assim como restrições sobre o tipo de distribuição multivariada que podem ser decompostas desta maneira.

Como propõe o teste de Engle and Sheppard (2001), optamos pelo uso da estrutura dinâmica da correlação condicional. As estimações dos modelos foram realizadas nas seguintes etapas: *a)* no primeiro estágio, para cada ação, são estimadas todas as combinações possíveis entre ARMA-GARCH(0,0)(0,0) e ARMA-GARCH(2,2)(2,2) usando o modelo GJR-GARCH¹⁴ com constante e assumindo uma distribuição *t* de Student assimétrica; *b)* escolhe-se, para cada ação, dentre os modelos estimados no primeiro estágio, o modelo que apresenta menor BIC¹⁵; *c)* no segundo estágio, usando as estimativas selecionadas anteriormente, estimamos todas as combinações possíveis tanto para DCC-GARCH(1,1) e DCC-GARCH(2,2) quanto ADCC-GARCH(1,1) e ADCC-GARCH(2,2) alternando a hipótese da distri-

¹⁴ Assumindo que uma série temporal é escrita como $r_t = \mu + a_t$ sendo $a_t = \sigma_t \varepsilon_t$, onde $\mu_t = (r_t | F_{t-1})$ é a média condicional da série temporal r_t dado o conjunto de informações F_{t-1} , $\sigma_t^2 = Var(r_t | F_{t-1})$ é a variância condicional e ε_t é o termo de erro iid com média zero e variância igual a 1. O modelo GJR-GARCH de Glosten et al. (1993) modela choques positivos e negativos sobre a variância condicional assimetricamente por meio do uso da função indicadora I :

$$\sigma_t^2 = (\omega + \sum_{j=1}^m \zeta_j v_{jt}) + \sum_{j=1}^q (\alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \gamma_j I_{t-j} \varepsilon_{t-j}^2) + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (28)$$

onde γ_j representa o termo de alavancagem. A função indicadora I toma o valor 1 para $\varepsilon \leq 0$ e 0, caso contrário. Em função da presença desta função, a persistência do modelo depende da assimetria da distribuição condicional utilizada.

¹⁵ Como principais alternativas temos o *Akaike Information Criterion* (AIC), *Bayesian Information Criterion* (BIC) e *Hannan Quinn Information Criterion* (HQIC). Optamos pelo BIC em função de sua performance em amostras maiores, que é o nosso caso, conforme Emiliano et al. (2010) e pela capacidade de escolher modelos mais simples como mostrado por Zou et al. (2007)

buição multivariada entre Normal e t de Student; d) por fim, selecionamos dentre os modelos estimados no passo anterior, o modelo com menor BIC.

Tabela 4

Ordens ARMA(P,Q)-GARCH(p,q) selecionadas para cada ação

Ação	(P,Q)	(p,q)	Ação	(P,Q)	(p,q)	Ação	(P,Q)	(p,q)
1	(1,0)	(2,1)	15	(1,0)	(1,2)	29	(0,0)	(2,1)
2	(2,1)	(2,1)	16	(0,1)	(1,2)	30	(1,1)	(1,1)
3	(0,0)	(1,2)	17	(0,2)	(2,0)	31	(0,1)	(1,2)
4	(1,0)	(2,1)	18	(0,2)	(2,0)	32	(2,2)	(2,0)
5	(0,1)	(2,1)	19	(0,0)	(2,1)	33	(0,1)	(2,0)
6	(0,0)	(2,0)	20	(0,0)	(1,1)	34	(0,1)	(1,2)
7	(1,0)	(2,2)	21	(0,1)	(2,0)	35	(0,1)	(1,1)
8	(0,0)	(2,1)	22	(0,0)	(1,1)	36	(1,0)	(2,2)
9	(2,2)	(2,2)	23	(0,1)	(1,1)	37	(0,2)	(2,2)
10	(0,1)	(2,1)	24	(0,0)	(1,1)	38	(2,0)	(2,1)
11	(2,0)	(1,1)	25	(0,1)	(2,2)	39	(0,0)	(2,1)
12	(1,0)	(1,1)	26	(1,1)	(1,2)	40	(2,0)	(2,2)
13	(0,1)	(2,1)	27	(1,0)	(1,1)	41	(2,2)	(2,1)
14	(0,0)	(2,1)	28	(2,1)	(2,1)	42	(0,2)	(2,2)

Fonte: Elaborado pelos autores.

Os resultados para cada modelo ARMA-GARCH univariado são omitidos em função de limitação de espaço, mas as especificações selecionadas para cada ação são mostradas na tabela 4. No que tange aos parâmetros estimados para o modelo GARCH Multivariado, a tabela 6 apresenta os resultados do modelo ADCC-GARCH(1,1) com distribuição multivariada t de Student que foi o escolhido dentre todas as combinações estimadas (menor BIC conforme a tabela 9, mas observe que também seria o modelo escolhido nos demais critérios).

A defasagem m escolhida para a na equação 15 é 1. Tal parâmetro indica o grau da resposta de $\mathbf{Q}_t$ às covariâncias passadas dos erros padronizados na equação 15. O resultado de que $m = 1$ significa que o efeito de choques passados sobre $\mathbf{Q}_t$ e assim, sobre a correlação $\mathbf{R}_t$, persistem pouco. A ordem da defasagem n para b também é 1. Tal parâmetro indica o grau de persistência de $\mathbf{Q}_t$ assim como $\mathbf{R}_t$. Esta ordem corresponde ao parâmetro $b1$ na tabela 6.

Tabela 5

Critérios de Informação dos modelos GARCH multivariado estimados

Modelo	Ordem (m,n)	Distribuição	Parâmetros	AIC	BIC	HQIC
DCC	1,1	Normal	1272	1970.5624	1972.4938	1971.2455
DCC	1,1	t de Student	1273	-106.5483	-104.6154	-105.8646
ADCC	1,1	Normal	1273	1970.7713	1972.7043	1971.4550
ADCC	1,1	t de Student	1274	-106.8315	-104.8970	-106.1472
DCC	1,2	Normal	1273	1970.7713	1972.7043	1971.4550
DCC	1,2	t de Student	1274	-106.5478	-104.6134	-105.8636
ADCC	1,2	Normal	1274	1970.5635	1972.4980	1971.2478
ADCC	1,2	t de Student	1275	-106.5665	-104.6305	-105.8817
DCC	2,1	Normal	1273	1970.5611	1972.4941	1971.2448
DCC	2,1	t de Student	1274	-106.5486	-104.6142	-105.8644
ADCC	2,1	Normal	1275	1970.5621	1972.4981	1971.2469
ADCC	2,1	t de Student	1276	-106.8305	-104.8930	-106.1452
DCC	2,2	Normal	1274	1970.5633	1972.4978	1971.2476
DCC	2,2	t de Student	1275	-106.5548	-104.6188	-105.8700
ADCC	2,2	Normal	1276	1970.5588	1972.4963	1971.2441
ADCC	2,2	t de Student	1277	-106.5801	-104.6410	-105.8942

Fonte: Elaborado pelos autores.

Os parâmetros $a1$ e $b1$ são diferentes de zero, positivos e estatisticamente significativos ao nível de 5% de significância, mas $a1$ é muito pequeno (< 0.01). Por outro lado, o parâmetro $g1$ não é estatisticamente significativa ao nível de 5% de significância. Ao calcularmos a soma dos parâmetros estimados encontramos o valor 0.7198 o que nos permite dizer que DCC é mais realista para amostra de dados do que CCC dado que este assume que $a = b = 0$ na equação 15.

O parâmetro de forma (*mshape*) da distribuição t de Student é relativamente alto significando que a dependência nas caudas dos resíduos padronizados parece estar limitada, se houver.

Tabela 6

Parâmetros estimados do modelo ADCC-GARCH (1,1)

	Estimativa	erro padrão	valor t	p-valor
a1	0.009320	0.002004	4.649677	0.000003
b1	0.698003	0.091779	7.605267	0.000000
g1	0.012574	0.008023	1.567251	0.117056
mshape	10.844010	3.632409	9.000713	0.000000

Fonte: Elaborado pelos autores.

Conduzimos testes para avaliar a qualidade do ajuste do mo-

delo ADCC-GARCH(1,1) de forma que seja possível garantir que as hipóteses do modelo são mantidas. Especificamente, a seleção da distribuição de probabilidade dos resíduos padronizados deveria ser confirmada. A ausência de autocorrelação serial dos resíduos padronizados também deveria ser garantida, uma vez que a condição de independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) é assumida na equação 8. Para tanto, executamos o teste de Anderson-Darling¹⁶ para a qualidade de ajuste da distribuição selecionada e o teste de Ljung-Box¹⁷ para autocorrelação. Estes dois testes são conhecidos como *portmanteau test* em que apenas a hipótese nula é bem especificada.

Como mostra a tabela 7, o resultado do teste de Anderson-Darling com alto p-valor demonstra que a hipótese nula não pode ser rejeitada ao nível de significância de 10%. Podemos dizer que não existe má especificação significativa no que diz respeito à distribuição dos resíduos padronizados. Quanto aos resultados do teste de Ljung-Box, a hipótese nula de não existência de autocorrelação serial não pode ser rejeitada ao nível de 10% de significância. Estes resultados sugerem que as hipóteses do modelo estão satisfeitas.

Tabela 7

Testes de qualidade do ajuste do ADCC-GARCH(1,1)

Anderson-Darling		Ljung-Box	
AD	P-value	LB	P-value
0.510	0.737	8.472	0.293

Fonte: Elaborado pelos autores.

3.3 Uma medida de intensidade da correlação

Anteriormente, obtivemos os parâmetros do modelo ADCC-GARCH (1,1). Agora, calculamos a matriz $\mathbf{R}_t$ apresentada na equação 16. Em

¹⁶O teste de Anderson and Darling (1952, 1954) avalia a hipótese de que uma dada amostra tenha sido retirada de uma determinada população. Neste estudo, avaliamos para a distribuição t de Student. Maiores detalhes podem ser encontrados em Anderson and Darling (1952, 1954).

¹⁷O teste de Box and Pierce (1970) é baseado nas autocorrelações dos resíduos onde examina a autocorrelação dos resíduos. Se as autocorrelações forem muito pequenas, concluímos que o modelo não exibe falha significativa de ajuste. Maiores detalhes deste teste podem ser encontrado em Box and Pierce (1970).

função de $\mathbf{R}_t$ existir em cada período temporal, o número total de matrizes de correlação é o mesmo do tamanho da amostra (isto é, 4173 matrizes). Além disso, a dimensão de $\mathbf{R}_t$ é 42×42 o que torna difícil observar a dinâmica da série temporal de $\mathbf{R}_t$, nos obrigando a reduzir sua dimensão.

É sabido que os autovalores de uma matriz de correlação podem ser usados como uma proxy para a intensidade da correlação. Um autovalor grande indica forte correlação sendo que o máximo autovalor positivo de $\mathbf{R}_t$ a medida de intensidade da correlação. Isto indica o montante máximo de variância das variáveis que pode ser explicada por um único fator subjacente (Friedman and Weisberg (1981)). Se o maior autovalor é grande o suficiente, os outros autovalores podem ter influência limitada sobre a intensidade da correlação de $\mathbf{R}_t$. Desta forma, a série temporal do maior autovalor aproxima bem a dinâmica da intensidade da correlação entre os retornos das ações.

Tabela 8

Autovalores da matriz de correlação condicional

	AV1	AV2	AV3
Min	2.128	1.188	1.139
Max	5.618	2.230	1.507
TW(99)		1.280	
MP(99)		1.229	

Fonte: Elaborado pelos autores.

Apesar das mudanças em uma matriz de correlação serem oriundas de dois componentes, intensidade da correlação (autovalores) e direção (autovetores), focamos sobre o componente intensidade para observar qualquer mudança na dinâmica, assumindo que esse tem uma maior influência sobre o risco de uma carteira. Para tanto, coletamos a série temporal dos maiores autovalores de $\mathbf{R}_t$ a partir das matrizes $\mathbf{R}_t$ obtidas por meio do modelo ADCC-GARCH(1,1).

A tabela 8 resume três maiores autovalores de $\mathbf{R}_t$ (AV1, AV2, AV3).¹⁸ *Min* e *Max* representam os valores mínimos e máximos da série temporal dos autovalores de $\mathbf{R}_t$. O maior autovalor (AV1) é muito maior do que o segundo e o terceiro (AV2 e AV3) sugerindo que AV1 determina, principalmente, a intensidade da correlação. Se

¹⁸Uma matriz positiva definida e simétrica tem autovetores ortonormais.

assim for, podemos focar sobre o comportamento da série dos maiores autovalores como proxy para a intensidade da correlação.

Por conseguinte, também apresentamos na tabela 8 o percentil 99 ($\beta = 1$) da distribuição Tracy-Widom (TW) para identificar os autovalores não aleatórios que estão além deste valor. O valor do percentil 99 da distribuição Marcenko-Pastur (MP) também é calculado para referência. É possível observar que o valor mínimo do máximo autovalor (AV1) de R_t durante o período amostral é maior do que o percentil 99 da distribuição Tracy-Widom. Esta conclusão significa que esses máximos autovalores são todos significativos o suficiente.

Além disso, encontramos que o mínimo valor de AV2 é menor do que o percentil 99 da distribuição Tracy-Widom enquanto seu valor máximo é maior. Estes resultados significam que AV2 é apenas significativo em certos pontos do tempo durante o período amostral. O mesmo prevalece para AV3 indicando que este autovalor não transmite informação significativa. Desta forma, podemos assumir o maior autovalor para cada matriz R_t como proxy da intensidade da correlação entre os retornos das ações e a figura 1 apresenta o comportamento da série temporal do maior autovalor das matrizes de correlação condicional com sua respectiva média móvel.

Figura 1

Máximo autovalor para as matrizes de correlação condicional do modelo ADCC-GARCH(1,1)

Fonte: Elaborado pelos autores.

3.4 Comportamento da intensidade da correlação condicional

Na figura 1 é possível observar o comportamento da intensidade da correlação condicional durante o período estudado. Analisando a série original bem como sua média movel de ordem 252, podemos observar que a série apresenta um padrão de variações amenas, mas com alguns momentos de grandes oscilações. A intensidade da matriz de correlação condicional foi maior em períodos de crise, tanto internacionais quanto nacionais. Tais fatores contribuíram para uma maior correlação nestes períodos, sugerindo que a correlação entre as ações aumenta em momentos de crise.

Visualmente, não é possível definir se a intensidade da correlação condicional apresenta qualquer tendência ao longo do período estudado. Uma importante questão neste ponto é se, em caso de existência, há tendência estocástica ou determinística. Para tanto, testes de raiz unitária precisam ser realizados na série temporal. É sabido que se deve tomar cuidado na realização de testes de raiz unitária em uma série temporal caso exista suspeita de mudanças estruturais. Se a presença destas é confirmada, as várias estatísticas dos testes tradicionais como o Augmented Dickey-Fuller (ADF) e Phillips-Perron (PP) apresentados por Dickey and Fuller (1981) e Phillips and Perron (1988), respectivamente, são enviesadas em direção a não rejeição de raiz unitária, mesmo sendo a série estacionária dentro de cada um dos subperíodos. Um condicionante favorável à presença de quebras é que durante o período estudado (2000-2015) ocorreram mudanças estruturais econômicas que poderiam alterar o comportamento de longo prazo das séries.

Assim, em busca de não incorrer em respostas errôneas para os testes de raiz unitária aplicados na série estudada, foi realizado o teste de quebra estrutural proposto por Bai and Perron (1998, 2003) que considera a possibilidade de quebras múltiplas ocorrendo em datas desconhecidas em modelos de regressão linear estimados por MQO. Além disso, a possibilidade de identificar quando a quebra ocorreu através destes procedimentos, fornece subsídios para analisar se a mudança de comportamento de uma variável está associada à política de governo, crise econômica ou outros fatores.

Utilizamos uma configuração do teste de Bai and Perron (1998, 2003) que possibilita o teste de existência de quebra estrutural apenas

na constante. Analisando os resultados da tabela 9, podemos ver que o teste U_{dmax}¹⁹ não rejeita a hipótese nula de nenhuma quebra em favor da hipótese alternativa de um número qualquer de quebras ao nível de significância de 10%.

Tabela 9

Teste de quebra estrutural de Bai and Perron (1998, 2003)

$y_t = \delta_{0,j} + \varepsilon_t$					
m	U _{dmax}	Valor Crítico 1%	Valor Crítico 2.5%	Valor Crítico 5%	Valor Crítico 10%
3	17.10	12.37	10.39	8.88	7.46

Fonte: Elaborado pelos autores.

O objetivo de utilizar o procedimento de Bai and Perron (1998, 2003) foi identificar de forma endógena a quantidade de quebras estruturais da variável estudada, pois o tipo de teste de raiz unitária a ser usado na presença de quebras estruturais varia em função da quantidade destas e da forma como são identificadas. Como o teste de Bai and Perron (1998, 2003) não identificou quebra estrutural, utilizamos os testes de raiz unitária ADF e PP para avaliação da estacionariedade da série temporal dos maiores autovalores das matrizes de correlação condicional oriundas do modelo ADCC-GARCH(1,1). Como resultado, encontramos -12.06 e -887.90 para as estatísticas dos testes ADF e PP, respectivamente (ambas com o p-valor de 0.01). Assim, concluímos que a série de interesse é estacionária dado que a hipótese nula de ambos os testes é de existência de raiz unitária.

Dada a estacionariedade da série, buscou-se verificar a possibilidade de uma tendência determinística linear utilizando a série tem-

¹⁹Resumidamente, os passos sugeridos por Bai and Perron (2003) para obter o número de quebras são: primeiro, utilizar o teste U_{dmax} e verificar se pelo menos uma quebra está presente; a partir disso, o número de quebras pode ser decidido baseado na análise do teste $SupF^{\frac{l+1}{l}}$ como forma de verificar se há alguma quebra adicional na série. U_{dmax} testa a não existência de quebras contra um número desconhecido de quebras dado um limite superior M . Já o teste $SupF^{\frac{l+1}{l}}$ é aplicado de forma sequencial por aumenta4r l até que o teste falhe em rejeitar a hipótese nula de não existir quebra adicional. O teste analisa a soma dos quadrados dos resíduos obtida com l quebras e a soma dos quadrados dos resíduos que é obtida com $l + 1$ quebras. A hipótese nula é rejeitada se o valor mínimo da soma dos quadrados dos resíduos (sobre todos os segmentos onde uma quebra adicional está incluída) é suficientemente menor que a soma dos quadrados dos resíduos do modelo com l quebras. Assim, a data de quebra selecionada é associada com esse mínimo total

poral em nível ao invés de em diferenças. Uma vez que a série estudada é bastante persistente, testes de tendências tradicionais não são válidos. Desta forma, utilizamos o teste proposto por Vogelsang (1998) que produz a estatística $t - PS_T$ que é robusta para qualquer forma de correlação serial no termo de erro para a execução de testes unicaudais. Detalhes sobre este teste foram apresentados na metodologia. Para tanto, estimou-se os modelos de tendência (equação 21) para todo o período amostral (2000-2015). A tabela 10 mostra os resultados para o teste de tendência.

Tabela 10

Resultados do teste de tendência para a correlação condicional média.

Série	$\tilde{\beta}_2$	$t - PS_T 5\%$	$t - PS_T 2.5\%$	$t - PS_T 1\%$
AV1	0.0000	-1.2510	-1.2401	-1.2312
Valores Críticos				
À esquerda		À direita		
0.950	-1.720	0.950	1.720	
0.975	-2.152	0.975	2.152	
0.990	-2.647	0.990	2.647	

Fonte: Elaborado pelos autores.

É possível observar a partir da tabela 10 que a série temporal dos maiores autovalores das matrizes de correlação condicional oriundas do modelo ADCC-GARCH(1,1) não apresenta tendência significativa, representada pelo valor de $\tilde{\beta}_2$. Note que além do parâmetro estimado ser nulo, a estatística $t - PS_T$ calculada é menor que seu valor crítico em todos os níveis de significância. Assim, não podemos rejeitar a hipótese nula de não existência de tendência. Este resultado significa que apesar de se mostrar relativamente alta em momentos de crise, a intensidade da matriz de correlação das ações avaliadas neste estudo e período temporal não apresenta qualquer comportamento tendencial de longo prazo.

Considerações Finais

A correlação dos retornos de ativos é um problema crucial para mensuração do risco quantitativo e controle de investimento em uma carteira. Neste estudo empírico, observamos as mudanças na dinâmica

das matrizes de correlação dos retornos de ações listadas na BM&F BOVESPA usando modelos GARCH multivariado, neste caso DCC-GARCH e suas derivações. A partir do modelo selecionado, ADCC-GARCH(1,1), as matrizes de correlação condicional foram calculadas para todo o período temporal. Então, a série temporal dos maiores autovalores destas matrizes de correlação condicional foi obtida para observar mudanças na dinâmica da intensidade da correlação. As conclusões confirmam que tanto em períodos de crises nacionais como turbulências internacionais, há intensificação da correlação entre as ações. Contudo, não encontramos qualquer tendência temporal na série temporal dos maiores autovalores das matrizes de correlação condicional.

Essas conclusões empíricas sugerem um número de pontos de discussão. O primeiro deles é as limitações técnicas encontradas quando modelamos correlação. Embora a abordagem DCC-GARCH possa modelar a dinâmica da correlação, permanece difícil avaliar as mudanças na matriz de correlação estimada. Neste estudo, adotamos o máximo autovalor de uma matriz de correlação como uma medida proxy para a intensidade da correlação. O máximo autovalor revela as mudanças na dinâmica na intensidade da correlação como um indicador escalar, que nos ajuda a avaliar o padrão destas mudanças ao longo do tempo. Mesmo assim, o maior autovalor não diretamente está ligado ao cálculo do risco de uma carteira. Mais estritamente, as mudanças no autovetor de uma matriz de correlação podem também influenciar o risco de uma carteira, demandando uma simulação do impacto quantitativo de mudanças na correlação sobre o risco da carteira.

Os resultados encontrados sugerem duas possíveis direções para pesquisas futuras. Primeiro, nossas conclusões empíricas dependem da hipótese de não existência de *spillovers*. Um modelo multivariado mais generalizado poderia ser aplicado. Ainda, estudos futuros podem utilizar outras formulações dos modelos GARCH multivariado (DCC-GARCH Cópula, EDCC-GARCH, cDCC-GARCH e GO-GARCH) em busca de confirmações sobre os resultados obtidos e incorporar a heterogeneidade das distribuições dos retornos individuais mais eficientemente. Por fim, um estudo mais detalhado da relação entre autovalores e risco de uma carteira poderiam ser um tópico de interesse. Finalmente, uma aplicação prática da estimação

da dinâmica da mudança na correlação sobre gerenciamento do risco de uma carteira poderia ser explorado.

Referências

- Anderson, T. W. and Darling, D. A. (1952). Asymptotic theory of certain "goodness of fit" criteria based on stochastic processes. *The annals of mathematical statistics*, pages 193–212.
- Anderson, T. W. and Darling, D. A. (1954). A test of goodness of fit. *Journal of the American statistical association*, 49(268):765–769.
- Angelidis, T. (2010). Idiosyncratic risk in emerging markets. *Financial Review*, 45(4):1053–1078.
- Bai, J. and Perron, P. (1998). Estimating and testing linear models with multiple structural changes. *Econometrica*, pages 47–78.
- Bai, J. and Perron, P. (2003). Computation and analysis of multiple structural change models. *Journal of applied econometrics*, 18(1):1–22.
- Bauwens, L., Laurent, S., and Rombouts, J. V. (2006). Multivariate garch models: a survey. *Journal of applied econometrics*, 21(1):79–109.
- Bollerslev, T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized arch model. *The review of economics and statistics*, pages 498–505.
- Bollerslev, T., Engle, R. F., and Wooldridge, J. M. (1988). A capital asset pricing model with time-varying covariances. *The Journal of Political Economy*, pages 116–131.
- Box, G. E. and Pierce, D. A. (1970). Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models. *Journal of the American statistical Association*, 65(332):1509–1526.
- Brandt, M., Brav, A., Graham, J., and Kumar, A. (2010). The idiosyncratic volatility puzzle: Time trend or speculative episodes? *Review of Financial Studies*, 23(2):863–899.

- Campbell, J., Lettau, M., Malkiel, B., and Xu, Y. (2001). Have individual stocks become more volatile? an empirical exploration of idiosyncratic risk. *The Journal of Finance*, 56(1):1–43.
- Campbell, J. Y., Lo, A. W., MacKinlay, A. C., and Whitelaw, R. F. (1997). *The econometrics of financial markets*. Princeton University press.
- Cappiello, L., Engle, R. F., and Sheppard, K. (2006). Asymmetric dynamics in the correlations of global equity and bond returns. *Journal of Financial econometrics*, 4(4):537–572.
- Costa, H. C., Mazzeu, J. H. G., and Costa Jr, N. C. A. (2016). O comportamento dos componentes da volatilidade das ações no brasil. *Revista Brasileira de Finanças*, 14(2):225–268.
- Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 1057–1072.
- Emiliano, P. C., Veiga, E. P., Vivanco, M. J., and Menezes, F. S. (2010). Critérios de informação de akaike versus bayesiano: análise comparativa. *19^o Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística*.
- Engle, R. (2002). Dynamic conditional correlation. *Journal of Business and Economic Statistics*, 20(3):339–350.
- Engle, R. F. and Kroner, K. F. (1995). Multivariate simultaneous generalized arch. *Econometric theory*, 11(01):122–150.
- Engle, R. F. and Sheppard, K. (2001). Theoretical and empirical properties of dynamic conditional correlation multivariate garch. Technical report, National Bureau of Economic Research, Cambridge.
- Falkenstein, E. (1996). Preferences for stock characteristics as revealed by mutual fund portfolio holdings. *Journal of finance*, pages 111–135.
- Fama, E. F. (1965). The behavior of stock-market prices. *The journal of Business*, 38(1):34–105.

- Fomby, T. B. and Vogelsang, T. J. (2002). The application of size-robust trend statistics to global-warming temperature series. *Journal of Climate*, 15(1):117–123.
- Friedman, S. and Weisberg, H. F. (1981). Interpreting the first eigenvalue of a correlation matrix. *Educational and Psychological Measurement*, 41(1):11–21.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R., and Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The journal of finance*, 48(5):1779–1801.
- Isogai, T. et al. (2015). An empirical study of the dynamic correlation of japanese stock returns. Technical report, Bank of Japan, Tokyo.
- Jeantheau, T. (1998). Strong consistency of estimators for multivariate arch models. *Econometric theory*, 14(01):70–86.
- Johnstone, I. M. (2001). On the distribution of the largest eigenvalue in principal components analysis. *Annals of statistics*, pages 295–327.
- Kearney, C. and Potì, V. (2006). Correlation dynamics in european equity markets. *Research in International Business and Finance*, 20(3):305–321.
- Kearney, C. and Potì, V. (2008). Have european stocks become more volatile? an empirical investigation of idiosyncratic and market risk in the euro area. *European Financial Management*, 14(3):419–444.
- Li, K., Morck, R., Yang, F., and Yeung, B. (2004). Firm-specific variation and openness in emerging markets. *Review of Economics and Statistics*, 86(3):658–669.
- Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The review of economics and statistics*, 47(1):13–37.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 36(4):394–419.

- Mantegna, R. N. and Stanley, H. E. (1999). *Introduction to econophysics: correlations and complexity in finance*. Cambridge university press.
- Marčenko, V. A. and Pastur, L. A. (1967). Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1(4):457.
- Markowitz, M. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1):77–91.
- Morck, R., Yeung, B., and Yu, W. (2000). The information content of stock markets: why do emerging markets have synchronous stock price movements? *Journal of Financial Economics*, 58(1-2):215–260.
- Phillips, P. C. and Perron, P. (1988). Testing for a unit root in time series regression. *Biometrika*, 75(2):335–346.
- Ricca, B. d. O. G. (2010). Apreçamento da assimetria idiossincrática no mercado brasileiro de ações.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The journal of finance*, 19(3):425–442.
- Silvennoinen, A. and Teräsvirta, T. (2009). Multivariate garch models. In *Handbook of financial time series*, pages 201–229. Springer.
- Sousa, S. and Serra, A. (2008). What drives idiosyncratic volatility over time? *Portuguese Economic Journal*, 7(3):155–181.
- Tracy, C. A. and Widom, H. (1996). On orthogonal and symplectic matrix ensembles. *Communications in Mathematical Physics*, 177(3):727–754.
- Tracy, C. A. and Widom, H. (2009). The distributions of random matrix theory and their applications. In *New Trends in Mathematical Physics*, pages 753–765. Springer.
- Tsay, R. S. (2013). *Multivariate time series analysis: with R and financial applications*. John Wiley & Sons.

- Tse, Y. K. and Tsui, A. K. C. (2002). A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3):351–362.
- Vogelsang, T. J. (1998). Trend function hypothesis testing in the presence of serial correlation. *Econometrica*, pages 123–148.
- Xu, Y. and Malkiel, B. (2003). Investigating the behavior of idiosyncratic volatility*. *The Journal of Business*, 76(4):613–645.
- Zou, H., Hastie, T., Tibshirani, R., et al. (2007). On the “degrees of freedom” of the lasso. *The Annals of Statistics*, 35(5):2173–2192.

Apêndice

Tabela 11

Ações utilizadas por setor

Empresa	Ação	Setor
Braskem	BRKM5	Indústria Manufatureira
Celesc	CLSC4	Empresa de eletricidade, gás e água
Cemig	CMIG4	Empresa de eletricidade, gás e água
Coelce	COCE5	Empresa de eletricidade, gás e água
Comgas	CGAS5	Empresa de eletricidade, gás e água
Copel	CPL6	Empresa de eletricidade, gás e água
Coteminas	CTNM4	Indústria Manufatureira
Eletrobras	ELET6	Empresa de eletricidade, gás e água
Emae	EMAE4	Empresa de eletricidade, gás e água
Embraer	EMBR3	Indústria Manufatureira
Embratel Part.	EBTP4	Informação
Eternit	ETER3	Indústria Manufatureira
Ferbasa	FESA4	Indústria Manufatureira
Forja Taurus	FJTA4	Indústria Manufatureira
Gerdau	GGBR4	Indústria Manufatureira
Gerdau Met	GOAU4	Indústria Manufatureira
Inepar	INEP4	Indústria Manufatureira
Itausa	ITSA4	Serviços financeiros e seguros
Klabin S/A	KLBN4	Indústria Manufatureira
Light S/A	LIGT3	Empresa de eletricidade, gás e água
Lojas Americanas	LAME4	Comércio Varejista
M G Poliest	RHDS3	Indústria Manufatureira
Marcopolo	POMO4	Indústria Manufatureira
Net	NETC4	Informação
Oi	OIBR4	Informação
Pão de Açúcar	PCAR4	Comércio Varejista
Petrobras	PETR4	Mineração
Randon Part	RAPT4	Indústria Manufatureira
Sabesp	SBSP3	Empresa de eletricidade, gás e água
Sid Nacional	CSNA3	Indústria Manufatureira
Souza Cruz	CRUZ3	Indústria Manufatureira
Suzano Papel	SUZB5	Indústria Manufatureira
Tectoy	TOYB4	Indústria Manufatureira
Telebras	TELB4	Informação
Telef Brasil	VIVT4	Informação
Tim Part S/A	TIMP3	Informação
Tractebel	TBLE3	Empresa de eletricidade, gás e água
Tran Paulist	TRPL4	Empresa de eletricidade, gás e água
Unipar	UNIP6	Indústria Manufatureira
Usiminas	USIM5	Indústria Manufatureira
Vale	VALE5	Mineração
Bradesco	BBDC4	Serviços financeiros e seguros
Itaú Unibanco	ITUB4	Serviços financeiros e seguros

Fonte: Elaborado pelos autores.