Um Modelo Unificado para a Previsão da Estrutura a Termo de Taxa de Juros

(A Unified Model for Forecasting the Term Structure of the Interest Rates)

Ailton Cassettari^{*}
José R. Chiappin^{**}

Resumo

O foco do artigo é apresentar uma nova metodologia para previsão da Estrutura a Termo de Taxas de Juros (ET TJ). O objetivo é responder à questão: dada a curva ET TJ numa data qualquer, qual a ET TJ numa data futura? Assim, busca-se construir uma expressão analítica para a previsão de uma curva inteira e não apenas para um determinado preço futuro de um ativo qualquer. Esse objetivo requer uma abordagem predominantemente analítica e teórica, ao invés de empírica ou econométrica. A característica dessa abordagem está no desenvolvimento de um modelo “híbrido”, descrevendo a evolução e dinâmica da curva ET TJ no tempo, combinando três elementos: uma particular versão do modelo HJM, a parametrização de Nelson-Siegel-Svensson, e uma modelagem independente da taxa de curto prazo, via modelo de Hull-White. Como resultados são obtidos expressões analíticas para quantidades de importância nos mercados de renda fixa. Não sendo o foco desse trabalho, a avaliação empírica aparece apenas como ilustração, sendo que uma mais rigorosa é deixada para outro artigo.

Palavras-Chave: Estrutura a Termo, Modelos de Taxas de Juros, Previsão.

JEL Codes: G17.

Submetido em 21 de março de 2016. Reformulado em 17 de agosto de 2016. Aceito em 25 de junho de 2018. Publicado online em 11 de julho de 2018. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato, além de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Márcio Laurini.

^{*} Caixa Econômica Federal e Departamento de Economia/FEA-USP. São Paulo, SP, Brasil. E-mail: ailton.c.junior@caixa.gov.br

^{**} Departamento de Economia/FEA-USP. São Paulo, SP, Brasil. E-mail: chiappin@usp.br

Rev. Bras. Finanças (Online), Rio de Janeiro, Vol. 16, No. 2, June 2018, pp. 337–369

ISSN 1679-0731, ISSN online 1984-5146

©2018 Sociedade Brasileira de Finanças, under a Creative Commons Attribution 3.0 license - <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>

Abstract

The focus of the paper is to present a new methodology for forecasting the Term Structure of Interest Rates (ETTJ). The objective is to answer the question: given the ETTJ curve at any given time, what is the ETTJ at a future date? Thus, we seek to construct an analytical expression for the prediction of an entire curve and not only for a given future price of any asset. This objective requires a predominantly analytical and theoretical approach rather than empirical or econometric. The characteristic of this approach is the development of a "hybrid" model, describing the evolution and dynamics of the ETTJ curve over time, combining three elements: a particular version of the HJM model, the Nelson-Siegel-Svensson parameterization, and an independent modeling of the short-term rate, via Hull-White model. As results are obtained analytical expressions for quantities of importance in the fixed income markets. Not being the focus of this work, the empirical evaluation appears only as an illustration, and a more rigorous empirical analysis is left for another article.

Keywords: Term Structure, Interest Rate Models, Forecast.

1. Introdução

Neste trabalho, é proposta uma nova metodologia para previsão da Estrutura a Termo de Taxas de Juros (ETTJ). Mais precisamente, nosso objetivo é responder à questão: dada a ETTJ numa data qualquer, qual a ETTJ numa data futura? Desse modo, diferentemente da previsão do preço futuro de um ativo qualquer (digamos, uma ação), aqui se trata de fazer a previsão de uma curva inteira, o que implica na necessidade de uma formulação teórica bastante mais elaborada. Para tanto, o ponto central da presente abordagem consiste na construção de um modelo “híbrido” para a dinâmica da ETTJ (em que por dinâmica entendemos a evolução da curva no tempo). Tal modelo “híbrido” é baseado na utilização de uma particular versão do modelo HJM, juntamente com a parametrização de Nelson-Siegel-Svensson e uma modelagem independente da taxa de curto prazo, via modelo de Hull-White.

Não é mister que se diga que o estudo da estrutura a termo de taxa de juros (ETTJ) é de capital importância pra qualquer país em qualquer época. Em primeiro lugar porque, em última análise, ela carrega informações sobre o caminho futuro a ser trilhado pela economia de um país. A ETTJ tem sido utilizada com sucesso não apenas para prever taxas

de curto prazo futuras como também na previsão da atividade econômica e da inflação. Essas variáveis são fundamentais como base para decisões de investimento, poupança, consumo, e de política para governos, consumidores e firmas.

Entretanto, essas informações não estão disponíveis a olho nu, é preciso de alguma forma extraí-las da ETTJ, o que não é uma tarefa trivial. Por exemplo, avaliar se em que medida o aumento das taxas de longo prazo é devido à expectativa de aumentos futuros na taxa de curto prazo ou do aumento do prêmio pelo risco de reter títulos de prazos mais longos. Responder a questões como essa requer um nível de sofisticação de análise raramente igualada em outros campos da Economia. É neste contexto que emergem os modelos de taxas de juros.

De forma geral, pode-se dizer que a construção de modelos de taxa de juros tem que enfrentar dois desafios. O primeiro diz respeito à correta consideração das características da evolução temporal das taxas de juros, notoriamente mais complexa que a de outros ativos, tais como ações ou taxa de câmbio: existência de uma taxa de equilíbrio, refletindo a hipótese de equilíbrio econômico do mercado, inexistência de valores negativos, reversão ao equilíbrio, variância das flutuações altamente dependente do nível da taxa e do tempo, caráter estatístico não-markoviano, dentre outras. O segundo está relacionado, em maior ou menor grau, à precificação de títulos de renda fixa. Neste caso, o modelo deve incluir, de alguma maneira, a “estrutura a termo” de taxas tal qual pode ser observada no mercado, de tal maneira que esses títulos sejam precificados com razoável realismo.

Não é de se admirar, portanto, que, enquanto os demais modelos estão bastante próximos da maturidade, os modelos de taxa de juros são ainda algo controversos. Isso é ainda mais dramático em se tratando de se fazer ‘previsões’ quanto ao comportamento da ETTJ. Em que pese não se discutir a importância de se poder estimar uma ETTJ ‘futura’, muito pouco se tem produzido na literatura acadêmica a esse respeito. Dignos de nota são os esforços de Diebold e Li (modelo DL) – (2006) e de Bowsher e Meeks (modelo BM) – (2008). No primeiro caso, é mostrado que uma variante dinâmica da parametrização de Nelson-Siegel pode ser útil para gerar estimativas da *yield curve*. Por sua vez, o modelo BM introduz o assim chamado “Functional Signal Plus Noise with an Equilibrium Correction Model (FSN-ECM), que se mostrou eficaz para previsões da *yield curve* no horizonte de tempo de até 1 mês. Além disso, os autores mostram que este modelo supera o DL no curto prazo.

No que toca às economias de países emergentes, existem poucas chances de que esses modelos venham a se tornar efetivamente úteis,

principalmente, pela carência de dados e pela nítida predominância de prazos curtos dos títulos.

Em vista desse fato, parece-nos oportuno e justificável buscar uma alternativa de previsão da ETTJ. Neste sentido, neste trabalho, nosso objetivo é estabelecer uma metodologia unificada que permita uma previsão da ETTJ baseada na utilização de uma particular versão do modelo HJM, juntamente com a parametrização de Nelson-Siegel-Svensson e uma modelagem independente da taxa de curto prazo, via modelo de Hull-White. Como resultado, esperamos obter expressões analíticas para quantidades de suma importância no âmbito dos mercados de renda fixa. A título de exemplo, serão analisados os principais instrumentos do mercado brasileiro de índice. O texto está organizado em cinco seções, sendo a primeira esta que se conclui aqui. A seção 2 resume alguns conceitos e considerações fundamentais, imprescindíveis para um bom entendimento de nossa metodologia, que se acha exposta na seção 3. A seção seguinte contém os detalhes de uma particular implementação do método ao mercado brasileiro. Por fim a seção 5 é reservada às conclusões e aos comentários finais.

2. Conceitos e Considerações Fundamentais

Consideremos uma economia com 'continuous trading' com um infinito intervalo de negociação.

O contrato básico é um zero-coupon bond (default-free) com maturidade na data T que paga ao portador 1 unidade de caixa em T . Seja $P(t, T)$ denotar o preço desse bond no instante t , com $t < T$. Portanto, $P(T, T) = 1$, e exige-se que a seguinte relação seja verificada:

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s) \cdot ds\right), \forall T \geq t, \quad (1)$$

para alguma função localmente integrável $f(t, \cdot): [t, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (doravante denominada **curva forward no instante t**).

O número $f(t, T)$ é a **taxa de juros forward no instante t** para um título livre de risco com data de início $T > t$. No caso particular em que $T = t$, $f(t, t)$ coincide com a taxa de juros curto prazo.

O Método de Nelson-Siegel-Svensson.

Consideremos agora um bônus com uma série de cupons intermediários $C_1, C_2, \dots, C_J$ que são pagos respectivamente nos períodos $m_1, m_2, \dots, m_J$ no futuro. No cupom final inclui-se o principal. O preço desse bônus pode ser escrito como:

$$P = \sum_{j=1}^J C_j \exp(-m_j S_j) \quad (2)$$

em que S_j é a taxa 'spot' o correspondente prazo do cupom (intervalo de pagamento) m_j . Por definição, a estrutura a termo de taxas de juros é obtida fazendo-se S_j em função de m_j .

Outra relação usada frequentemente entre o preço e os cupons de um dado bônus é a chamada 'taxa interna de retorno' (TIR), definida como a taxa (y) para a qual se verifica a relação:

$$P = \sum_{j=1}^J C_j \exp(-m_j y) \quad (3)$$

A TIR pode ser interpretada como uma taxa média assumindo-se que todos os cupons são reinvestidos a mesma taxa durante o tempo de vida do bônus, ou, o que é o mesmo, para cada prazo do cupom a 'spot' é a mesma. Em outras palavras, a estrutura a termo é constante (ou, na linguagem de mercado, 'flat').

Como vimos, a TIR reflete apenas o comportamento médio da 'spot'. Além do mais, a estrutura a termo de taxas 'spot' atual (para o dia de hoje) tem implicações na taxa futura. Alguns autores argumentam que a taxa 'forward' é igual ao valor esperado da taxa 'spot' no futuro. Entretanto, essa colocação não leva em conta os prêmios pela liquidez, pela maturidade, entre outros. Desse modo, essa interpretação deve ser vista com cautela.

Parametrização de Nelson-Siegel

Do que foi discutido anteriormente, podemos inferir que a estrutura a termo não pode ser observada diretamente usando os preços dos bônus observados no mercado. Por simplificação, admitamos que a estrutura a termo é uma função contínua da maturidade. O primeiro problema com que se defronta é o fato de que, para a construção dessa curva, dispõe-se apenas de um número reduzido de pontos, que são consequência da existência de um número insuficiente de bônus no

mercado. Além do mais, como existem bônus que pagam cupons, não se pode usar diretamente a equação (2).

Para contornar essa dificuldade, Nelson e Siegel (1987) propuseram o uso de uma parametrização que relaciona as taxas 'spot' ao prazo do cupom. Os referidos parâmetros podem ser estimados dos cupons observados no mercado. De acordo com Nelson-Siegel,

$$S(m)_{\{\}} = \beta_o + \beta_1 \cdot \left(\frac{1 - \exp(-m/\tau_1)}{(m/\tau_1)} \right) + \beta_2 \cdot \left(\frac{1 - \exp(-m/\tau_1)}{(m/\tau_1)} - \exp(-m/\tau_1) \right) \quad (4)$$

é a expressão para a taxa 'spot'. Da definição de taxa forward, temos, imediatamente,

$$f(m)_{\{\}} = \beta_o + \beta_1 \cdot \exp(-m/\tau_1) + \beta_2 \cdot \left(\frac{m}{\tau_1} \right) \cdot \exp(-m/\tau_1) \quad (5)$$

em que $\{\} = \{\beta_o, \beta_1, \beta_2, \tau_1\}$ representa o conjunto de parâmetros que determinam a forma das curvas para r e f . É interessante observar que β_o e β_1 têm interpretações econômicas. O primeiro é a taxa de juros de longo prazo (o limite da taxa spot quando $m \rightarrow \infty$. Neste limite, forward e spot devem coincidir). O simétrico de β_1 pode ser interpretado como o 'spread' entre as taxas de curto e longo prazo (isso vem do fato de que, no limite em que $m \rightarrow 0$, a 'spot' converge para $\beta_o + \beta_1$). Infelizmente, β_2 e τ_1 não têm interpretação econômica direta, apenas dizem respeito à forma das curvas.

Parametrização de Svensson

Na mesma linha de Nelson-Siegel, Svensson (1994) propôs o uso de uma parametrização um pouco mais flexível. São agora necessários mais dois parâmetros, de tal forma que as equações são alteradas, respectivamente, para:

$$S(m)_{\{\}} = \beta_o + \beta_1 \cdot \left(\frac{1 - \exp(-m/\tau_1)}{(m/\tau_1)} \right) + \beta_2 \cdot \left(\frac{1 - \exp(-m/\tau_1)}{(m/\tau_1)} - \exp(-m/\tau_1) \right) + \beta_3 \cdot \left(\frac{1 - \exp(-m/\tau_2)}{(m/\tau_2)} - \exp(-m/\tau_2) \right) \quad (6)$$

e

$$f(m)_{\{\}} = \beta_o + \beta_1 \cdot \exp(-m/\tau_1) + \beta_2 \cdot \left(\frac{m}{\tau_1} \right) \cdot \exp(-m/\tau_1) + \beta_3 \cdot \left(\frac{m}{\tau_2} \right) \cdot \exp(-m/\tau_2) \quad (7)$$

Nas expressões anteriores, os parâmetros são definidos como antes, i.é., $\beta = \{\beta_o, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2\}$ em que somente os dois primeiros têm significado econômico.

Estimação dos Parâmetros

A essência do processo de estimação dos parâmetros consiste em que pode-se definir um 'preço teórico' para o título em questão da seguinte forma:

$$\hat{P} = \sum_{j=1}^J C_j \exp(-m_j \cdot S(m_j)_{\{ \}}) \quad (8)$$

, na qual $S(m_j)_{\{ \}}$ é a 'spot' (dada por (4) ou (6)) para os prazos m_j (ou cupons devido a m_j períodos no futuro).

A técnica mais comum é estimar os parâmetros resolvendo o seguinte problema de otimização:

$$\left\{ \sum_{i=1}^N (P_i - \hat{P}_i)^2 \right\} \quad (9)$$

em que P_i é o preço (observado) do i -ésimo título, $\hat{P}_i$ é o preço (teórico) do mesmo título, dado por (8), e N é o número total de títulos sob consideração.

Entretanto, esse procedimento tem o inconveniente de gerar erros não desprezíveis quando os prazos são pequenos, como pode-se facilmente notar. Para evitar esse inconveniente, pode-se usar a TIR e resolver mais uma otimização:

$$\left\{ \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 \right\} \quad (10)$$

em que y é a TIR (observada) dos títulos, ou seja, é obtida por meio da equação:

$$P = \sum_{j=1}^J C_j \exp(-m_j \cdot y) \quad (11)$$

e $\hat{y}$ é a TIR (teórica) dos títulos, calculada através da equação:

$$\hat{P} = \sum_{j=1}^J C_j \exp(-m_j \cdot \hat{y}) \quad (12)$$

Os problemas indicados por (9) e (10) podem ser resolvidos por meio de métodos bastante conhecidos, e.g., Mínimos Quadrados

Ordinários, Mínimos Quadrados Não-Lineares, Método Generalizado dos Momentos ou Máxima Verossimilhança. A convergência, na ampla maioria das situações, é rapidamente conseguida.

O modelo Hull-White

O bem conhecido “Modelo Hull-White” (Hull & White, 1990) emergiu para incorporar a dependência temporal dos parâmetros (taxa de juros de equilíbrio, taxa de reversão ao equilíbrio, variância (volatilidade) da taxa) e teve sucesso em permitir que a ‘yield curve’ pudesse ser assim considerada. Entretanto, suas desvantagens são que 1) somente ‘deslocamentos paralelos’ da yield curve são permitidos, o que implica que os preços dos Bonds de todas as maturidades são perfeitamente correlacionados e 2) as taxas de juros são normalmente distribuídas, o que pode levar a valores negativos desta última.

A equação fundamental do modelo Hull-White é:

$$dr(t) = [\theta(t) - \beta(t) \cdot r(t)] \cdot dt + \sigma(t) \cdot dW(t) \quad (13)$$

na qual $r(t)$ é a taxa de juros de curto prazo, $\sigma(t), \theta(t), \beta(t)$ são função não-aleatórias de t .

Um caso de bastante interesse é aquele para o qual $\sigma(t)$ e $\beta(t)$ são constantes. Nesta situação, pode ser provado que $\theta(t)$ é relacionado à estrutura a termo inicial observada (em $t=0$) através da relação:

$$\theta(t) = \frac{\partial f}{\partial T}(0, t) + \beta \cdot f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t}) \quad (14)$$

Entretanto, para propósitos efetivamente práticos, a expressão anterior não é muito conveniente, pois contém um termo de derivada que aumenta muito os erros observacionais. Para contornar essa dificuldade, tenta-se uma representação da forma¹:

$$r(t) = \gamma(t) + z(t) \quad (15)$$

com $\gamma(t)$ determinístico e $z(t)$ satisfazendo:

$$\begin{cases} dz = (-\beta \cdot z) dt + \sigma \cdot dw \\ z(0) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

¹ Peter Carr – Interest Rate Models: Hull-White (Notas da conferência do Courant Institute – 30 de março de 2005 (disponível com os autores).

Omitindo os detalhes do cálculo, a solução para $\gamma(t)$ é:

$$\gamma(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} (1 - e^{-2\beta t})^2 \quad (17)$$

O Modelo Heath-Jarrow-Morton (HJM)

No conhecido modelo Heath-Jarrow-Morton (HJM) (1992), cada processo para a taxa forward $f(t, T)_{t \in [0, T]}$ é representado como um processo de Itô, baseado num movimento browniano com dimensão fixa e finita, dW . Para uma arbitrária, mas fixa, maturidade $T \in \mathbb{R}_+$, a evolução de temporal de $f(t, T)$ é dada por:

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) \cdot ds + \int_0^t \nu(s, T) \cdot dW_s, t \in [0, T] \quad (18)$$

ou, em versão diferencial,

$$df(t, T) = \alpha(t, T) \cdot dt + \nu(t, T) \cdot dW, t \in [0, T] \quad (19)$$

Existe portanto uma equação diferencial estocástica para cada maturidade fixa T .

É bem conhecido que a condição de não-arbitragem leva à existência de uma medida martingal local equivalente Q , que produz uma representação para o Q -drift de $f(t, T)$, em termos de ν :

$$\alpha(t, T) = \nu(t, T) \cdot \int_t^T \nu(t, s) \cdot ds \quad (20)$$

Pode ser provado² que se a equação para a taxa forward é (19) então a equação para o preço do título é:

$$dp(t, T) = p(t, T) \cdot \left\{ r(t) + A(t, T) + \frac{1}{2} \|\Omega(t, T)\|^2 \right\} \cdot dt + p(t, T) \cdot \|\Omega(t, T)\| \cdot dW \quad (21)$$

com:

$$\begin{aligned} A(t, T) &= - \int_t^T \alpha(t, s) ds \\ \Omega(t, T) &= - \int_t^T \nu(t, s) ds \end{aligned} \quad (22)$$

É importante notar que (21) fornece uma descrição genérica de uma evolução livre de arbitragem ao invés do que simplesmente um modelo para taxas de juros. Por causa desse resultado é conveniente e comum descrever a evolução de $f(t, T)$ sob a medida neutra ao risco Q , que envolve somente ν e a Transformada de Girsanov $\mathcal{W}$ de W .

² Thomas Børk - `Interest Rate theory - An introduction` (disponível com os autores).

À exceção de alguns poucos casos, todo o trabalho de implementação do HJM é feito numericamente. Pode-se construir uma particular versão do modelo – que se provou bastante útil em algumas situações práticas – com intervalos de tempo discretos e com um número finito de estados, no qual a esperança estatística é obtida construindo um grande número de trajetórias para f , a partir de uma versão discreta de (19).

De acordo com as equações (19) e (20), em princípio, o conhecimento da volatilidade da taxa forward, $v(t, \theta)$, somente, é suficiente para o cálculo de toda evolução temporal da mesma.

Apesar dessa relativa simplicidade, o problema pode se tornar bastante difícil, pois, para estruturas de volatilidade bastante gerais a dinâmica da estrutura a termo pode ser dependente da trajetória, resultando na impossibilidade de uma representação markoviana finita. Como consequência, atenção tem sido dada à identificação de restrições sobre a estrutura da volatilidade que abolissem tais dificuldades. Ademais, essas estruturas devem ser consistentes com a observação empírica.

Surpreendentemente, existem formas funcionais simples para a volatilidade da taxa forward que garantem a facilidade do tratamento matemático. Considerando as seguintes estruturas para a volatilidade:

$$v(t, T) = b_0 + (a'_0 + a'_1 \cdot (T - t)) \cdot h(r(t)) e^{-k \cdot (T - t)} \quad (23)$$

(b_0, a'_0, a'_1 e k são constantes e $h(r(t))$ é uma função da taxa de curto prazo), Bhar e outros (2000) mostraram que uma representação markoviana finita para a estrutura a termo é possível se o coeficiente do termo amortecido exponencialmente é um polinômio de grau finito na maturidade T .

3. A Metodologia

Embora os modelos descritos na seção anterior sejam aparentemente independentes, é de se esperar que, por tratarem basicamente do mesmo assunto, haja alguma estreita relação entre eles. De fato, a equação (21) já nos dá uma pista importante ao incluir explicitamente a taxa de curto prazo na dinâmica do preço de um título obtido pelo modelo HJM. Resta-nos tentar obter a conexão com a parametrização de Nelson-Siegel.

Como vimos, a abordagem de Nelson-Siegel não é apenas uma tarefa simples de ajuste de parâmetros. Ela contempla importantes conceitos, entre os quais, o “spread” entre as taxas de curto e longo prazo, a própria taxa de longo prazo e a consideração explícita dos títulos com

cupons intermediários. Portanto, uma vez corretamente determinados os parâmetros, certamente muita informação está disponível nas curvas forward e spot definidas pelas equações (4) e (5). Seria de suma importância incluir de alguma forma essas informações nas equações dos modelos de taxa de juros. No que segue, procuraremos derivar uma maneira possível de se fazer isso.

A Equação Fundamental da Dinâmica da Taxa ‘Spot’

Seja, pois, a equação:

$$dp(t,T) = p(t,T) \cdot \left\{ r(t) + A(t,T) + \frac{1}{2} \|\Omega(t,T)\|^2 \right\} \cdot dt + p(t,T) \cdot \|\Omega(t,T)\| \cdot dW \quad (24)$$

na qual vamos admitir que $r(t)$ é uma variável aleatória descrita pela equação:

$$dr(t) = [\theta(t) - \beta \cdot r(t)] \cdot dt + \sigma \cdot dW_1 \quad (25)$$

que representa a evolução temporal da taxa de curto prazo de acordo com o modelo Hull-White com volatilidade e taxa de reversão constantes, por simplificação.

De (21) temos imediatamente que

$$d[\ln p(t,T)] = \{r(t) + A(t,T)\} dt + \Omega(t,T) dW \quad (26)$$

Calculemos agora a média dessa última expressão:

$$d[\overline{\ln p(t,T)}] = \{ \overline{r(t)} + \overline{A(t,T)} \} dt \quad (27)$$

na qual a notação $\bar{x}$ representa a média de x .

A partir desse ponto, faremos uma importante simplificação, qual seja, admitir que a integral:

$$\int_t^T v(t,s) \cdot ds$$

possa ser avaliada como uma integral determinística (não-estocástica). De forma geral, isso é conseguido se se considera que a dependência temporal da volatilidade pode ser escrita na forma:

$$v(0, T-t) = b_0 + (a'_0 + a'_1 \cdot (T-t)) \cdot h[r(t=0)] e^{-k \cdot (T-t)}$$

(isto é, não há dependência explícita de t , mas sim do ‘tempo para a maturidade’ $(T-t)$). Equivalentemente, estamos, na prática, lidando com um HJM ‘gaussiano’. Sobre as implicações desse fato, falaremos um pouco

mais na última secção. Desse modo, a função $A(t,T)$ é determinística e, portanto,

$$\overline{A(t,T)} = A(t,T)$$

Integrando, pois, ambos os lados de (27) entre o instante inicial $t=0$ e o instante $t=t$, levando-se em conta a simplificação anterior,

$$\left(\overline{\ln p(t,T)} \right)_t - \left(\overline{\ln p(t,T)} \right)_0 = \int_0^t \{ \overline{r(t)} + A(t,T) \} dt \quad (28)$$

Por definição, os termos do lado esquerdo dessa equação são:

$$\left(\overline{\ln p(t,T)} \right)_t \equiv -(T-t) \cdot \overline{S(t,T)} \quad (29)$$

$$\left(\overline{\ln p(t,T)} \right)_0 \equiv -T \cdot \overline{S(0,T)} \quad (30)$$

nas quais $\overline{S(t,T)}$ é a taxa spot média de maturidade T observada no instante $t=t$ e $\overline{S(0,T)}$ é a taxa spot média de maturidade T observada no instante $t=0$.

Substituindo (29) e (30) em (28),

$$-(T-t) \cdot \overline{S(t,T)} - (-T \cdot \overline{S(0,T)}) = \int_0^t \{ \overline{r(t)} + A(t,T) \} dt \quad (31)$$

Isolando $\overline{S(t,T)}$, temos³:

$$\overline{S(t,T)} = \left(\frac{T}{T-t} \right) \cdot \overline{S(0,T)} + \left(-\frac{1}{T-t} \right) \cdot \int_0^t \{ \overline{r(t)} + A(t,T) \} dt \quad (32)$$

Na equação anterior, a taxa média de curto prazo será calculada de maneira *análoga* à descrita para o modelo Hull-White⁴. Assim, das equações (16), $\overline{r(t)}$ é:

$$\overline{r(t)} = \gamma(t) + \overline{z(t)} \quad (33)$$

3 Deve ser notado que estamos supondo sempre $T > t$. No limite $T \rightarrow t$, temos simplesmente que a taxa da equação (33) se reduz à taxa de curto prazo.

4 O grifo é de suma importância, pois, em última análise, não estamos utilizando este modelo aqui. Devemos lembrar que a modelagem da taxa de curto prazo está intrinsecamente ligada à metodologia como um todo, como será visto na sequência.

O segundo termo à direita deve ser obtido a partir da média da primeira das equações (16):

$$dz = (-\beta \cdot z)dt + \sigma \cdot dw \quad (34)$$

Dessa equação, é bastante plausível admitir para $\overline{z(t)}$ uma representação da forma:

$$\overline{z(t)} = M + Ne^{-\beta \cdot t} \quad (M, N : \text{constantes}) \quad (35)$$

com a condição de que $\overline{z(t \rightarrow \infty)}$ seja finita e $\overline{z(0)} = 0$.

Tendo em vista as equações (17) e (35),

$$\overline{r(t)} = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} (1 - e^{-2\beta t})^2 + M + Ne^{-\beta \cdot t} \quad (36)$$

e, portanto (32) fica:

$$\begin{aligned} \overline{S(t, T)} &= \left(\frac{T}{T-t} \right) \cdot \overline{S(0, T)} + \\ &+ \left(-\frac{1}{T-t} \right) \cdot \int_0^t \left(f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} (1 - e^{-2\beta t})^2 + M + Ne^{-\beta \cdot t} \right) dt + \left(-\frac{1}{T-t} \right) \int_0^t A(t, T) \cdot dt \end{aligned} \quad (37)$$

Resta-nos agora ajustar essa expressão para que ela seja simultaneamente consistente com os três modelos utilizados (Nelson-Siegel, Hull-White e HJM).

Antes façamos as seguintes abreviações:

$$\begin{aligned} I_1(t) &\equiv \int_0^t f(0, t) dt \\ I_2(t) &\equiv \int_0^t \left(\frac{\sigma^2}{2\beta^2} (1 - e^{-2\beta t})^2 \right) dt \\ I_3(t) &\equiv \int_0^t (M + Ne^{-\beta \cdot t}) dt \\ I_4(t, T) &= \int_0^t A(t, T) \cdot dt \end{aligned} \quad (38)$$

E lembrando ainda que

$$A(t, T) = - \int_t^T \alpha(t, s) ds$$

com

$$\alpha(t, T) = v(t, T) \cdot \int_t^T v(t, s) \cdot ds$$

É natural, então, escolhermos⁵:

$$\bullet \overline{S(0, T)} = \beta_o + \beta_1 \cdot \left(\frac{1 - \exp(-T/\tau_1)}{(T/\tau_1)} \right) + \beta_2 \cdot \left(\frac{1 - \exp(-T/\tau_1)}{(T/\tau_1)} - \exp(-T/\tau_1) \right) \quad (39)$$

$$\bullet f(0, t) = \beta_o + \beta_1 \cdot \exp(-t/\tau_1) + \beta_2 \cdot \left(\frac{t}{\tau_1} \right) \cdot \exp(-t/\tau_1) \quad (40)$$

As condições de contorno para o problema serão assumidas nos limites de $t \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow 0$.

Nesses dois limites, vamos admitir como plausíveis as seguintes condições:

$$\begin{cases} \overline{r(t \rightarrow \infty)} = f(0, t \rightarrow \infty) \\ \overline{r(t \rightarrow 0)} = f(0, t \rightarrow 0) \end{cases}$$

Da equação (36),

$$\begin{cases} \overline{r(t \rightarrow \infty)} = f(0, t \rightarrow \infty) + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} (1)^2 + M \\ \overline{r(t \rightarrow 0)} = f(0, t \rightarrow 0) + M + N \end{cases}$$

do que devemos ter as seguintes equações simultâneas:

$$\begin{cases} -\frac{\sigma^2}{2\beta^2} = M \\ M = -N \end{cases}$$

⁵ Preferimos a parametrização de Nelson-Siegel, mas, como é óbvio, poderíamos também ter usado a de Svensson.

Portanto,

$$\bullet M = -\frac{\sigma^2}{2\beta^2} \quad (41)$$

$$\bullet N = \frac{\sigma^2}{2\beta^2} \quad (42)$$

É importante também notarmos que, sob essas condições, a condição de contorno antes imposta sobre $\overline{z(0)}$ é satisfeita consistentemente, pois:

$$\overline{z(t)} = M + Ne^{-\beta \cdot t} \Rightarrow \overline{z(0)} = M + Ne^{-\beta \cdot 0} \Rightarrow \overline{z(0)} = -\frac{\sigma^2}{2\beta^2} + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} = 0$$

Com essas escolhas, a equação (38) é escrita:

$$\overline{s(t,T)} = \left(\frac{T}{T-t}\right) \cdot \overline{s(0,T)} + \left(-\frac{1}{T-t}\right) \cdot [I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t,T)] \quad (43)$$

que é a *equação fundamental para a dinâmica da taxa 'spot'*, ou seja, a equação que determina a estrutura a termo em qualquer instante, dadas, no instante inicial, a estrutura a termo e a estrutura a termo da volatilidade. Mais precisamente, poderíamos dizer que essa equação é a expressão da taxa 'spot' média que reflete as “expectativas do mercado”, uma vez que ela contempla todos os títulos e prazos disponíveis (através da parametrização de Nelson-Siegel).

4. Exemplos de Aplicação ao Mercado Brasileiro

A título de exemplo, nesta parte, serão mostrados alguns resultados da implementação da metodologia, exclusivamente para mercado nacional de renda fixa. Ela está dividida como segue. Em primeiro lugar, obteremos os parâmetros de Nelson-Siegel-Svensson. Na sequência, a dinâmica da taxa 'spot' será avaliada em alguns horizontes de tempo, para os principais instrumentos do mercado de índice nacional (cupom de IGPM, pré, cupom cambial, cupom de TR e cupom de IPCA).

4.1. A Parametrização de Nelson-Siegel-Svensson

Tomando como exemplo os títulos em negociação em março de 2002 (resumidos no Apêndice 3), inicialmente, consideremos a parametrização de Nelson-Siegel.

Dado um conjunto de valores iniciais dos parâmetros calcula-se os preços dos títulos por meio de (7). A seguir, faz-se a minimização (8), encontrando-se uma primeira solução. Como vimos, essa solução não é

satisfatória. Passamos então à solução de (11), ou seja, o cálculo da TIR 'teórica'.

Como é evidente, essa TIR é função dos parâmetros da taxa 'spot'. Deve-se notar também que os valores que acabamos de obter para ela são funções do conjunto de parâmetros conseguidos na resolução da primeira otimização. Esse resultado deve ser refinado. Para tanto, passa-se à otimização dada por (9), ou seja,

$$\min_{\{\beta\}} \left\{ \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 \right\}$$

cujas soluções fornece, finalmente, o conjunto de parâmetros $\{\beta\} = \{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1\}$ que, em princípio, é a solução do problema. Os resultados da computação acham-se resumidos na tabela IV. De maneira exatamente análoga ao caso supra especificado, obtivemos as curvas para o caso da parametrização de Svensson. Os resultados são resumidos na tabela II. A figura 2 mostra a comparação entre as diferentes curvas.

Tabela 1 - Parametrização de Nelson-Siegel

Valores Iniciais	Valores Finais
$\beta_0 = 0.12$	$\beta_0 = 0,1216$
$\beta_1 = -0.09$	$\beta_1 = -0,0714$
$\beta_2 = -0.1$	$\beta_2 = -0,1843$
$\tau_1 = 100$	$\tau_1 = 100,05$

A figura 1 mostra os resultados finais.

Figura 1 – Parametrização de Nelson-Siegel (tabela 1) **Tabela 2 - Parametrização de Svensson**

Valores Iniciais	Valores Finais
$\beta_0 = 0.12$	$\beta_0 = 0.1260$
$\beta_1 = -0.09$	$\beta_1 = -0.0759$
$\beta_2 = -0.1$	$\beta_2 = 0.8645$
$\beta_2 = -0.1$	$\beta_3 = -1.0359$
$\tau_1 = 150$	$\tau_1 = 132,18$
$\tau_2 = 100$	$\tau_2 = 127,62$

Figura 2 – Parametrização de Svensson (Tabela 2)

4.2. A Estrutura da Volatilidade da taxa Forward

Como vimos, de acordo com (23) a estrutura da volatilidade depende da especificação do funcional $h(r(t))$. Por razões de simplificação, vamos tomar o mais simples deles, isto é, um funcional linear:

$$h(r(t)) = \mu_1 r(t) + \mu_2 \quad \mu_1, \mu_2 \rightarrow \text{ctes}$$

Com essa especificação, (23) se escreve:

$$v(0, T - t) = b_o + (a'_o + a'_1 \cdot (T - t)) \cdot [\mu_1 r(t=0) + \mu_2] e^{-k \cdot (T - t)}$$

De (15), (16), (17) e (41) temos, para $t=0$ (instante de avaliação da volatilidade),

$$r(0) = \gamma(0) = f(0, 0) = \beta_o + \beta_1$$

e, portanto,

$$v(0, T) = b_o + (a'_o + a'_1 \cdot T) \cdot [\mu_1 (\beta_o + \beta_1) + \mu_2] e^{-k \cdot T}$$

De posse dos dados do Apêndice 3, a estrutura a termo da volatilidade da taxa forward (volatilidade da taxa com respeito aos vértice

da ETTJ (1,21,42,63,84,105,126,252 e 504) foi estimada como o desvio-padrão dos retornos diários observados das respectivas taxas (no período analisado (dez/1997 a maio/2001). A seguir, através de um ajuste por mínimos quadrados ordinários, foram obtidos os parâmetros da equação para $v(0,T)$. Os resultados são mostrados na tabela III ⁶.

4.3. A dinâmica da taxa 'spot'

Sem dúvida, a equação (43) é a equação fundamental da metodologia desenvolvida. A utilização prática dessa equação pressupõe a avaliação de no mínimo 12 parâmetros: 4 da parametrização de Nelson-Siegel $\{\beta_o, \beta_1, \beta_2, \tau_1\}$, 2 da modelagem da taxa de curto prazo $\{\sigma, \beta\}$ e 6 da versão utilizada do modelo HJM $\{a'_o, a'_1, b_o, k, \mu_1, \mu_2\}$.

Supondo, por simplificação, que *nenhum novo título tenha sido emitido no prazo analisado*, as tabelas seguintes resumem os valores típicos dos parâmetros para cada parametrização (determinados na data $t=0$).

a) Parametrização de Nelson-Siegel:

Tabela 3 – NBC-E e NTN-D (tempo em anos)

Parâmetro	Valor Final	Parâmetro	Valor Final
$\beta_o(*)$	0,1216	a'_o	-0,00715
$\beta_1(*)$	-0,0714	a'_1	0,46271
$\beta_2(*)$	-0,1843	b_o	0,01061
$\tau_1(*)$	0,3970	k	19,57
$\sigma(**)$	0,1465	μ_1	0,03733
$\beta(**)$	1,2955	μ_2	0,64910

(*) Extraídos de Franklin Jr. et al (2011).

(**) Extraídos de Almeida, Yoshino, & Shirmer (2003).

⁶ Nas demais tabelas, esses mesmos parâmetros são meras estimativas plausíveis dos valores efetivos (que não foram calculados nestes casos).

Tabela 4 – Cupom de TR (tempo em anos)

Parâmetro	Valor Final	Parâmetro	Valor Final
$\beta_o(*)$	0,08946	a'_o	-0,003575
$\beta_1(*)$	0,00389	a'_1	0,2313
$\beta_2(*)$	0,01949	b_o	0,0054
$\tau_1(*)$	1,0129	k	27,75
$\sigma(**)$	0,1465	μ_1	0,03733
$\beta(**)$	1,2955	μ_2	0,64910

Tabela 5 – Cupom Cambial (tempo em anos)

Parâmetro	Valor Final	Parâmetro	Valor Final
$\beta_o(*)$	0,06882	a'_o	-0,003575
$\beta_1(*)$	-0,04635	a'_1	0,2313
$\beta_2(*)$	-0,04866	b_o	0,0054
$\tau_1(*)$	1,3965	k	27,75
$\sigma(**)$	0,1465	μ_1	0,03733
$\beta(**)$	1,2955	μ_2	0,64910

(*) Extraídos de Franklin Jr. et al (2011).

(**) Extraídos de Almeida, Yoshino, & Shirmer (2003).

b) Parametrização de Svensson:

Tabela 6 – Cupom de IPCA (tempo em anos)

Parâmetro	Valor Final	Parâmetro	Valor Final
$\beta_o(^*)$	0,04829	$\beta(^{**})$	1,2955
$\beta_1(^*)$	-0,03660	a'_o	-0,003575
$\beta_2(^*)$	0,07895	a'_1	0,2313
$\beta_3(^*)$	0,02163	b_o	0,0054
$\tau_1(^*)$	0,5329	k	27,75
$\tau_2(^*)$	5,1891	μ_1	0,03733
$\sigma(^{**})$	0,1465	μ_2	0,64910

Tabela 7 – Pré (tempo em anos)

Parâmetro	Valor Final	Parâmetro	Valor Final
$\beta_o(^*)$	0,11054	$\beta(^{**})$	1,2955
$\beta_1(^*)$	-0,00967	a'_o	-0,003575
$\beta_2(^*)$	-0,66457	a'_1	0,2313
$\beta_3(^*)$	0,68617	b_o	0,0054
$\tau_1(^*)$	0,4265	k	27,75
$\tau_2(^*)$	0,4374	μ_1	0,03733
$\sigma(^{**})$	0,1465	μ_2	0,64910

(*) Extraídos de Franklin Jr. et al (2011).

(**) Extraídos de Almeida, Yoshino, & Shirmer (2003).

Tabela 8 – Cupom de IGPM (tempo em anos)

Parâmetro	Valor Final	Parâmetro	Valor Final
$\beta_o(*)$	0,005530	$\beta(**)$	1,2955
$\beta_1(*)$	-0,00900	a'_o	-0,003575
$\beta_2(*)$	-0,07376	a'_1	0,2313
$\beta_3(*)$	0,03288	b_o	0,0054
$\tau_1(*)$	0,09261	k	27,75
$\tau_2(*)$	0,6062	μ_1	0,03733
$\sigma(**)$	0,1465	μ_2	0,64910

(*) Extraídos de Franklin Jr. et al (2011).

(**) Extraídos de Almeida, Yoshino, & Shirmer (2003).

De posse desses parâmetros, a equação (43) foi avaliada em alguns intervalos de tempo para os diversos índices. Os resultados estão mostrados no Apêndice 1.

c) A dinâmica “real” da ETTJ

A Figura 3 foi extraída de um jornal especializado de grande circulação e mostra um exemplo “real” da evolução temporal da ETTJ. Como dissemos no início, não é escopo deste trabalho fazer uma avaliação empírica detalhada da evolução da ETTJ, já que é evidente que esta importante questão merece um trabalho exclusivo, a ser feito num futuro próximo. Contudo, é nossa opinião que essa figura atesta a plausibilidade e efetividade da presente abordagem, como pode-se facilmente verificar cotejando-a diretamente com as curvas “teóricas” do Apêndice. I.

Figura 3 – Um exemplo da evolução temporal “real” da ETTJ (jornal *Valor Econômico*, maio de 2015)

5. Conclusões e Comentários

Como a experiência indica, os modelos de taxa de juros, na ampla maioria das vezes, diferentemente dos de ações, enfrentam graves entraves no âmbito de sua aplicação efetivamente prática. Grosso modo, cada um deles é razoável para aplicações práticas somente em algum aspecto. Assim, por exemplo, a parametrização de Nelson-Siegel-Svensson traz muita informação do mercado como um todo por contemplar explicitamente todos os títulos em negociação. Por outro lado, tem a séria desvantagem de não considerar nenhuma dinâmica. O modelo Hull-White, por sua vez, trata bem a dinâmica, mas apenas da taxa de curto prazo. O modelo HJM foi sem dúvida um grande avanço, mas sua implementação, além de difícil, pressupõe informações adicionais sobre a estrutura a termo.

Frente à realidade de que, pelo menos por enquanto, é pouco provável que um único arcabouço teórico possa abarcar, com bastante efetividade, todas as situações encontradas no dia-a-dia dos mercados, a abordagem desenvolvida aqui, embora não desfrute do *status* de uma teoria propriamente dita, pode ser útil, uma vez que tira proveito, pelo menos em tese, do que há de mais efetivo em cada um dos modelos em particular.

Na sequência, teceremos pequenos comentários adicionais a respeito das aplicações realizadas, na ordem em que foram apresentadas.

Em primeiro lugar, os detalhes da parametrização de Nelson-Siegel-Svensson parecem evidentes por si mesmos. Devemos notar que, para a grande maioria das situações, a parametrização de Nelson-Siegel é suficiente, fato porque foi a que utilizamos, reduzindo o número de parâmetros.

Uma questão importante a se mencionar diz respeito a importância da modelagem da taxa de curto prazo para a implementação final do modelo. Essa modelagem depende de dois parâmetros que podem ser tomados de uma implementação do modelo Hull-White sem grande erro, tal como fizemos. Evidentemente, é o conhecimento da volatilidade da estrutura a termo a chave para que o modelo faça um bom trabalho em estimar as curvas futuras. É bom lembrar que aqui advogamos o uso de uma volatilidade não-estocástica. Mas, é evidente que um modelo com volatilidade estocástica traria mais realismo às aplicações, embora não sem um trabalho numérico maior, típico das implementações do HJM.

Para finalizar, devemos reiterar que as evidências empíricas apontadas aqui devem ser vista tão-somente como indicativas da plausibilidade da presente abordagem. Uma mais completa avaliação empírica foi deixada para um futuro trabalho.

Referências

- Almeida, L., Yoshino, J. e Shirmer, P. (2003). Derivativos de taxas de juros no Brasil: Modelo Hull-White. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, 33 (2): 299-333.
- Bhar, R., Chiarella, C., El-Hassan, N. e Zheng, X. (2000). Reduction of forward rate dependent HJM models to Markovian form: Pricing European bond options. *Journal of Computational Finance*, 3: 47-72.
- Bowsher, C. G. e Meeks, R. (2008). The Dynamics of Economic Functions: Modeling and Forecasting the Yield Curve. *Journal of American Statistical Association*, 103: 1419-1433.

- Diebold, F. X. e Li, C. (2006). Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics*, 127 (2): 337–364.
- Franklin Jr. et al. (2011). *A estrutura a termo de taxas de juros no Brasil: modelos, estimação, interpolação, extrapolação e testes*. Disponível em: http://www.susep.gov.br/setores-susep/cgsoa/coris/dicem/arquivos ettj/1artigo_ETTJ_CORIS_14042011.pdf
- Froot, K. A. (1989). New Hope for the Expectations Hypothesis of the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, 44: 283-304.
- Heath, D., Jarrow, R. e Morton, A. (1992). Bond Pricing and the Term Structure of the Interest Rates: A New Methodology. *Econometrica*, 60 (1): 77-105.
- Hull, J.C. e White, A. (1990). Pricing Interest Rate Derivatives Securities. *Review of Financial Studies*, 3: 573-592.
- Nelson, C. R. e Siegel, A. (1987). Parsimonious Modeling of Yield Curves. *Journal of Business*, 60 (4): 473-489.
- Svensson, L. E. O. (1994). Estimating and Interpreting Forward Interest Rates Sweden 1992-1994. *Working Paper*, n. **WP/94/114** IMF, Washington, D.C.

Apêndice 1

Figura A1 - Resultados das Simulações da Equação (43)

PRÉ

NBC-E / NTN-D

Figura A1 (continuação) - Resultados das Simulações da Equação (43)

Cupom de TR

Cupom de IGPM

Figura A1 (continuação) - Resultados das Simulações da Equação (43)

Cupom Cambial

Cupom de IPCA

Apêndice 2**Cálculo das integrais I1, I2, I3 e I4****I1:**

$$I_1(t) \equiv \int_0^t f(0,t) \cdot dt$$

$$I_1(t) = \int_0^t \left[\beta_o + \beta_1 \cdot e^{(-t/\tau_1)} + \beta_2 \left(\frac{t}{\tau_1} \right) e^{(-t/\tau_1)} \right] dt$$

$$\Rightarrow I_1(t) = (\beta_1 + \beta_2) \cdot \tau_1 + \beta_o \cdot t - e^{(-t/\tau_1)} [(\beta_1 + \beta_2) \cdot \tau_1 + \beta_2 t]$$

I2:

$$I_2(t) \equiv \int_0^t \left(\frac{\sigma^2}{2\beta^2} (1 - e^{-2\beta t})^2 \right) dt$$

$$\Rightarrow I_2(t) = \frac{\sigma^2}{4\beta^3} e^{-2\beta t} \left(2\beta t e^{2\beta t} - 2 \cdot e^{-2\beta t} - \frac{3}{2} e^{2\beta t} + 2 \right)$$

I3:

$$I_3(t) \equiv \int_0^t \frac{\sigma^2}{2\beta^2} (e^{-\beta \cdot t} - 1) dt$$

$$\Rightarrow I_3(t) = \frac{\sigma^2}{2\beta^3} [1 - e^{-\beta t} - \beta \cdot t]$$

I4:

$$I_4(t,T) = \int_0^t A(t,T) \cdot dt$$

com

$$A(t,T) = - \int_t^T \alpha(t,s) ds$$

$$\alpha(t,T) = v(t,T) \cdot \int_t^T v(t,s) \cdot ds$$

$$a_o \equiv a'_o(\mu_1(\beta_1 + \beta_2) + \mu_2)$$

$$a_1 \equiv a'_1(\mu_1(\beta_1 + \beta_2) + \mu_2)$$

$$v(0, T-t) = b_o + (a_o + a_1 \cdot (T-t)) \cdot e^{-k \cdot (T-t)}$$

$$\int_t^T v(0, T-t) dT = \frac{a_1 + a_o k}{k^2} + b_o (T-t) - \frac{(a_1 + a_o k + a_1 k \cdot (T-t)) \cdot e^{-k \cdot (T-t)}}{k^2}$$

$$\alpha(t, T) = \left\{ b_o + (a_o + a_1 \cdot (T-t)) \cdot e^{-k \cdot (T-t)} \right\}.$$

$$\cdot \left\{ \frac{a_1 + a_o k}{k^2} + b_o (T-t) - \frac{(a_1 + a_o k + a_1 k \cdot (T-t)) \cdot e^{-k \cdot (T-t)}}{k^2} \right\}$$

$$A(t, T) = - \int_t^T \alpha(t, s) ds$$

$$\begin{aligned} A(t, T) &= - \frac{1}{2} \left(\frac{(a_1 + a_o k + b_o k^2 \cdot (T-t)) - (a_1 + a_o k + a_1 k \cdot (T-t)) \cdot e^{-k \cdot (T-t)}}{k^2} \right)^2 \\ I_4(t, T) &\equiv \int_0^t A(t, T) \cdot dt = \\ &- \frac{1}{2k^4} \left\{ \frac{1}{3} b_o^2 k^4 t^3 + \frac{1}{4k} e^{-2k(T-t)} (2a_o^2 k^2 + a_1^2 (5 + 6k(T-t) + 2k^2(T-t)^2) + 2a_1 a_o k (3 + 2k(T-t))) \right\} \\ &\quad - b_o k^2 (a_1 + k(a_o + b_o k T)) t^2 + (a_1 + k(a_o + b_o k T))^2 t - \\ &\quad - \frac{1}{4k} e^{-2kT} (2a_o^2 k^2 + 2a_1 a_o k (3 + 2kT) + a_1^2 (5 + 6kT + 2k^2 T^2)) + \\ &\quad + \frac{1}{k} 2e^{-kT} (a_1^2 (2 + kT) + a_o k^2 (a_o + b_o + b_o k T) + a_1 k (a_o (3 + kT) + b_o (3 + 3kT + k^2 T^2))) - \\ &\quad - \frac{2}{k} e^{-k(T-t)} (a_o k^2 (a_o + b_o - b_o k (T-t)) + a_1^2 (2 + k(T-t)) + \\ &\quad + (a_1 k (b_o (3 + 3k(T-t) + k^2 (T-t)^2) + a_o (3 + k(T-t)))) \end{aligned}$$

Apêndice 3 - Dados Empíricos

Tabela A1 – NTN-D

Título	Vencimento
NTN-D	01/10/2002
NTN-D	19/06/2002
NTN-D	01/07/2002
NTN-D	07/08/2002
NTN-D	17/10/2002
NTN-D	19/03/2003
NTN-D	17/07/2003
NTN-D	10/03/2004
NTN-D	15/07/2004
NTN-D	13/10/2004
NTN-D	10/11/2004
NTN-D	20/01/2005
NTN-D	13/10/2005
NTN-D	15/03/2006
NTN-D	20/09/2006
NTN-D	07/05/2003
NTN-D	16/07/2008

Tabela A2 – NBC-E

Título	Vencimento
NBC-E	12/12/2002
NBC-E	17/07/2003
NBC-E	14/10/2004
NBC-E	11/04/2002
NBC-E	16/01/2003
NBC-E	08/05/2002
NBC-E	14/03/2002
NBC-E	25/07/2002
NBC-E	11/07/2002
NBC-E	18/12/2003
NBC-E	12/08/2004
NBC-E	15/12/2004
NBC-E	16/05/2002
NBC-E	13/06/2002
NBC-E	18/04/2002
NBC-E	15/08/2002
NBC-E	14/11/2002
NBC-E	15/04/2004
NBC-E	18/07/2002
NBC-E	11/302/2003
NBC-E	08/05/2002
NBC-E	12/06/2003
NBC-E	15/05/2003
NBC-E	17/04/2003
NBC-E	14/08/2003