Avaliação da Curva de Juros Empregando Extensões do Modelo de Diebold e & Li com Três Fatores

(Evaluating interest rate term-structure using extensions of the Diebold and Li three factors model)

Alberto Ronchi Neto*

Osvaldo Candido**

Resumo

Esse trabalho avalia métodos que utilizam o Filtro de Kalman para estimar extensões do modelo original de Diebold & Li (2006) em sua representação espaço-estado, empregando a equação de Nelson & Siegel (1987) como equação de medida e diferentes especificações para a equação de transição que governa a dinâmica dos fatores nível, inclinação e curvatura. Os modelos avaliados consideram as seguintes estruturas nas equações de transição: (1) especificação AR(1), impondo matriz de covariância diagonal para os resíduos; (2) especificação VAR(1), impondo matriz de covariância calculada com decomposição de Cholesky; (3) extensão da especificação VAR(1), incluindo variáveis associadas à Paridade Coberta da Taxa de Juros (PCTJ); (4) extensão da especificação VAR(1), introduzindo componentes de volatilidade estocástica. Destacam-se como principais resultados: (1) ao avaliar a dinâmica das variáveis latentes, a curvatura foi o fator mais sensível à incorporação da volatilidade condicional; (2) em termos gerais, embora o modelo que impõem uma estrutura de vetores autorregressivos simples para a equação de transição tenha sido o que apresentou melhor desempenho fora da amostra para a maioria de maturidades e horizontes de projeção, a extensão dessa especificação incluindo as variáveis associadas à PCTJ conseguiu se sobressair em alguns dos exercícios realizados.

Palavras-chave: Estrutura a termo da taxa de juros; modelos fatoriais..

Códigos JEL: G12; C58.

Submetido em 14 de janeiro de 2015. Reformulado em 22 de julho de 2015. Aceito em 31 de agosto de 2015. Publicado on-line em 5 de Novembro de 2015. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Márcio Laurini.

*Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Economia Universidade, Católica de Brasília - PPGE/UCB. E-mail: alberto.ronchi@hotmail.com

**Professor e pesquisador do Programa de Pós-Graduação em Economia, Universidade Católica de Brasília - PPGE/UCB. Este autor agradece o CNPq pelo suporte financeiro. E-mail: candido.f@gmail.com

Rev. Bras. Finanças (Online), Rio de Janeiro, 13, No. 2, April 2015, pp. 1-xx
ISSN 1679-0731, ISSN online 1984-5146

©2014 Sociedade Brasileira de Finanças, under a Creative Commons Attribution 3.0 license - <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>

Abstract

This paper evaluates methods that employ Kalman Filter to estimate Diebold & Li (2006) extensions in a state-space representation, applying the Nelson & Siegel (1987) function as measure equation and different specifications for the transition equation that determines level, slope and curvature dynamics. The models that were analyzed have the following structures in transition equation: (1) AR(1) specification, employing a diagonal covariance matrix for the residuals; (2) VAR(1) specification, employing a covariance matrix calculated with Cholesky decomposition; (3) VAR(1) extension, inserting variables related to the Covered Interest Rate Parity (CIRP); (4) VAR(1) extension, including stochastic volatility components. The major findings of this paper were: (1) evaluating the latent variables dynamics, the curvature was the factor that fitted better to the stochastic volatility component; (2) in a broad sense, even though the simplest VAR(1) model was the one that provided the best out-of-sample performance in the most part of maturities and forecasting horizons, the extension inserting variables related to the CIRP was able to overcome the former specification in some of these simulations.

Keywords: Term-structure of interest rates, multi-factor models.

1. Introdução

Entre as abordagens adotadas para a estimação da estrutura a termo da taxa de juros, a função paramétrica desenvolvida por Nelson & Siegel (1987) se evidenciou pela capacidade de capturar os movimentos usualmente registrados pela curva por meio de uma especificação parcimoniosa que combina termos exponenciais com três fatores, inicialmente associados a alterações de curto, médio e longo prazo. A partir do modelo desenvolvido por esses autores, vários trabalhos surgiram propondo extensões à especificação original. Svensson (1994), por exemplo, demonstra que a inclusão de um quarto fator na função garante maior flexibilidade e capacidade de aderência à estimação da curva de juros, principalmente nos vértices mais longos. Ambos os métodos se tornaram populares na estimação da curva de juros, sendo adotados por vários bancos centrais ao redor do mundo. No Brasil, o modelo de Svensson é amplamente utilizado por entidades do mercado financeiro.

Diebold & Li (2006) fazem uma reinterpretação de Nelson & Siegel (1987) em uma perspectiva dinâmica, demonstrando que a função com três fatores pode ser associada a técnicas econométricas de séries temporais em um procedimento de duas etapas para construir projeções da curva de juros. Na primeira etapa, uma série histórica dos fatores é ob-

tida estimando o modelo de Nelson & Siegel (1987) em cada ponto do tempo. Na segunda etapa, modelos autorregressivos são utilizados para gerar projeções dos fatores, que são posteriormente empregados para reconstituir a curva de juros em um procedimento fora da amostra. No exercício realizado em Diebold & Li (2006), o método proposto apresentou melhor desempenho preditivo comparativamente a um passeio aleatório. Além disso, os autores associam as séries temporais das três variáveis latentes aos fatores nível, inclinação e curvatura, destacados inicialmente por Litterman & Scheinkman (1991).

Em procedimento análogo aplicado à economia brasileira, Vicente & Tabak (2007) e Almeida *et al.* (2007) comparam a precisão de vários modelos dedicados à projeção da curva de juros no procedimento fora da amostra. O primeiro trabalho observa que o modelo de Diebold & Li (2006) também supera modelos de referência quando aplicado com esse objetivo no Brasil. Por sua vez, o segundo trabalho destaca uma extensão do modelo de Diebold & Li (2006), incluindo um quarto fator para representar um segundo termo de curvatura, de forma equivalente à função proposta por Svensson (1994). Demonstram que as projeções fora da amostra geradas por essa especificação são mais aderentes comparativamente ao modelo original com três fatores.

Dentro desse contexto, outros trabalhos procuraram aprimorar e avaliar a capacidade preditiva desse método. Diebold *et al.* (2006) introduzem um procedimento em um único estágio, onde a função de Nelson & Siegel (1987) e os modelos autorregressivos são estimados simultaneamente como uma representação espaço-estado por meio de um Filtro de Kalman, obtendo maior eficiência comparativamente ao método em duas etapas independentes apresentado por Diebold & Li (2006). Além dos termos autorregressivos, empregam variáveis macroeconômicas como regressores adicionais nos modelos de séries temporais, que por sua vez são utilizados para projetar os fatores. Outros trabalhos na literatura também se dedicam a avaliar as relações entre as variáveis latentes e as econômicas, apresentando resultados distintos para cada um dos fatores. Enquanto Diebold *et al.* (2006) relatam respostas não significativas da curvatura em relação às variáveis econômicas, Moench (2006) argumenta que movimentos na estrutura a termo da taxa de juros vinculados a esse fator podem decorrer de uma desaceleração da atividade. Conforme ressaltado por Hautsch & Yang (2010), Rudebusch & Wu (2008) relacionam o fator nível às expectativas de inflação e a inclinação a variações cíclicas na inflação e no hiato do PIB.

Matsumura & Moreira (2006) apresentam especificações de Diebold & Li (2006) que incluem variáveis econômicas nos modelos de séries temporais utilizados para projetar os fatores, de forma semelhante a Diebold *et al.* (2006), mas com dados da economia brasileira. A extensão proposta por esses autores é composta por dois fatores e um vetor de variáveis econômicas que inclui séries de expectativa de inflação implícita e taxa de câmbio. Os resultados obtidos corroboram os observados nos trabalhos anteriores aplicados ao Brasil, verificando-se melhor desempenho da projeção produzida pela especificação paramétrica.

Entretanto, em uma análise aplicada às curvas de juros do Brasil e dos EUA, bem como considerando uma quantidade mais ampla de modelos nas análises de aderência das previsões fora da amostra, Matsumura *et al.* (2010) encontram evidências que contrariam os indícios anteriores. Analisando modelos que estimam a curva de juros por meio de especificações construídas com base no princípio de ausência de arbitragem e nas funções paramétricas sumarizadas, incluindo ou não variáveis econômicas, demonstram que nenhuma das opções é capaz de superar um passeio aleatório. Além de séries associadas à inflação e à taxa de câmbio, uma terceira variável considerada diretamente foi o índice da bolsa de valores (Ibovespa). Apesar dos resultados desfavoráveis comparativamente ao passeio aleatório, as versões paramétricas mas parcimoniosas permaneceram entre os com maior capacidade de previsão fora da amostra.

Um ponto em comum entre os trabalhos citados até aqui consiste na adoção da hipótese de homocedasticidade dos fatores. Trabalhos como Koopman *et al.* (2007), Hautsch & Ou (2009) e Hautsch & Yang (2010) flexibilizam esse pressuposto, construindo extensões do modelo de Diebold & Li (2006) que permitem que a variância varie no tempo. No primeiro trabalho, esse termo em sua forma dinâmica é considerado comum a todos os vértices. O segundo artigo incorpora a volatilidade estocástica diretamente nas equações de transição dos fatores associados ao nível, inclinação e curvatura do modelo original. No terceiro texto, a inferência Bayesiana é aplicada em uma extensão com o parâmetro variante no tempo. De uma forma geral, ao incluir volatilidade estocástica, os autores observam uma maior aderência dos modelos e redução da incerteza nas projeções realizadas.

Dentro desse contexto, em um trabalho aplicado ao Brasil, Caldeira *et al.* (2010b) empregam inferência Bayesiana em duas versões estendidas do modelo de Diebold & Li (2006) que consideram a hetero-

cedasticidade condicional por meio de duas especificações diferentes: (1) empregando a volatilidade estocástica através de fatores comuns a todos os vértices e (2) nos processos autorregressivos dos fatores latentes. Os resultados apresentados corroboram o fato estilizado onde os choques na volatilidade das taxas de juros são altamente persistentes, e também indicam que o uso de estruturas de volatilidade estocástica levam a melhores ajustes dentro da amostra para a curva de juros observada.

Por sua vez, Caldeira *et al.* (2010a) utilizam dados do mercado de DI's futuros para estimar a curva de juros em um único estágio por meio de um Filtro de Kalman. Nessa especificação, os autores permitem que o parâmetro de decaimento dos termos exponenciais, os coeficientes da equação de transição (que estabelece a dinâmica dos fatores nível, inclinação e curvatura) e as variâncias dos termos de erros (tanto da equação de medida quanto transição) variem ao longo do tempo. Após estimado o modelo, comparam as previsões fora da amostra da extensão desenvolvida por eles com o modelo original de Diebold & Li (2006) em dois estágios e com um passeio aleatório. Tanto em termos de ajuste quanto previsão, demonstram que a estimação do modelo através do Filtro de Kalman é a mais adequada, gerando melhores previsões para todas as maturidades quando é considerado horizontes de previsão de um mês, três meses e seis meses.

Mais recentemente, o modelo de Diebold & Li (2006) também tem sido analisado por meio de metodologias que consideram mudanças de regime. Bernadell *et al.* (2006), Elen (2010), Levant & Ma (2014) e Hevia *et al.* (2014) consistem em alguns trabalhos desenvolvidos com base em dados da economia dos EUA. No Brasil, Ribeiro & Pereira (2010) fazem uma estimação da curva de juros por meio de uma extensão do modelo paramétrico original considerando mudanças de regime associadas ao ciclo econômico. Entretanto, esse trabalho não avalia a capacidade de previsão dessa especificação. Outra aplicação de modelos com mudança de regime no contexto doméstico consiste no trabalho de Munclinger (2011). Entretanto, o autor concentra sua análise em modelos com ausência de arbitragem da classe afim, não em funções derivadas de Diebold & Li (2006). Nesse sentido, não foram identificados trabalhos que mensuram o grau de acerto de extensões do método paramétrico fora da amostra.

Nesse contexto, esse trabalho buscará avaliar alguns dos métodos destacados, utilizando uma base de dados de juros diários embutidos em contratos de DI Futuro, coletados para diversos prazos na BM&F entre 18/janeiro/2002 e 17/dezembro/2014. As análises empíricas foram concen-

tradas em métodos que utilizam o Filtro de Kalman para estimar extensões do modelo original de Diebold & Li (2006) em sua representação espaço-estado, empregando a equação de Nelson & Siegel (1987) como equação de medida e diferentes especificações para a equação de transição que governa a dinâmica dos fatores nível, inclinação e curvatura. As especificações testadas para a equação de transição foram as seguintes: (1) termos autorregressivos de primeira ordem (AR(1)), considerando uma matriz de variância diagonal para os resíduos; (2) termos de vetores autorregressivos de primeira ordem (VAR(1)), considerando uma matriz de covariância calculada a partir da decomposição de Cholesky, permitindo que os choques produzidos pela construção sejam parcialmente correlacionados; (3) extensão do modelo de vetores autorregressivos de primeira ordem (VAR(1)), incluindo variáveis econômicas e financeiras associadas a teoria da Paridade Coberta da Taxa de Juros (PCTJ); e (4) extensão do modelo de vetores autorregressivos de primeira ordem (VAR(1)), introduzindo volatilidade estocástica.

De uma forma geral, foi observado que os diferentes métodos geram resultados relativamente distintos. Como principais resultados, destacam-se: (1) ao avaliar a dinâmica das variáveis latentes, a curvatura foi o fator mais sensível à incorporação da volatilidade condicional; (2) em termos gerais, embora o modelo que impõem uma estrutura de vetores autorregressivos simples para a equação de transição tenha sido o que apresentou melhor desempenho fora da amostra para a maioria de maturidades e horizontes de projeção, a extensão dessa especificação incluindo as variáveis associadas à PCTJ conseguiu se sobressair em alguns dos exercícios realizados.

Além dessa seção inicial, dedicada à introdução e revisão de literatura, o presente artigo é dividido em mais quatro capítulos. O segundo capítulo detalha o modelo de três fatores de Nelson & Siegel (1987) e as principais extensões de interesse deste trabalho. O terceiro é dedicado à descrição da base de dados. A análise empírica é realizada no quarto item. A quinta seção conclui.

2. O modelo DLNS e suas principais extensões

Uma análise mais detalhada da construção que originou as especificações que serão avaliadas neste artigo contribui para um melhor entendimento do trabalho. O método desenvolvido por Nelson & Siegel (1987) consiste em uma forma exponencial com três componentes. A es-

estrutura simples e a parcimônia são as principais vantagens dessa construção. Diebold & Li (2006) tornaram essa construção dinâmica, denotada a partir daqui como DLNS, sendo que cada uma das taxas zero cupom que compõe a estrutura a termo pode ser obtida com a seguinte equação:

$$r_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + \beta_{3,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right). \quad (1)$$

Na equação, r_t representa a taxa zero cupom. Os fatores nível, inclinação e curvatura são expressos respectivamente por $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$. O parâmetro λ ilustra a velocidade de decaimento dos termos exponenciais. Ou seja, quanto maior (menor) esse parâmetro, mais rápido (lento) será o decaimento no ajuste dos vértices mais longos. A maturidade da taxa zero cupom é dada pelo termo τ . A equação 1 pode ser expressa matricialmente, da seguinte forma:

$$R_t = XB_t + E_t, \forall t = 1, \dots, T, \quad (2)$$

onde

$$R_t^{N \times 1} = \begin{bmatrix} r_t(\tau_1) \\ r_t(\tau_2) \\ \vdots \\ r_t(\tau_N) \end{bmatrix}, X^{N \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda\tau_1} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda\tau_1} - e^{-\lambda\tau_1} \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda\tau_2} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda\tau_2} - e^{-\lambda\tau_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_N}}{\lambda\tau_N} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_N}}{\lambda\tau_N} - e^{-\lambda\tau_N} \end{bmatrix}, B_t^{N \times 1} = \begin{bmatrix} \beta_{1,t} \\ \beta_{2,t} \\ \beta_{3,t} \end{bmatrix} \quad (3)$$

e o termo de erros aleatórios, E_t , tem as seguintes características:

$$E_t^{N \times 1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_t(\tau_1) \\ \varepsilon_t(\tau_2) \\ \vdots \\ \varepsilon_t(\tau_N) \end{bmatrix}; \mathbb{E}[E_t] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{e} \quad (4)$$

$$Var[E_t] = W^{N \times N} = diag[\sigma_\varepsilon^2(\tau_1), \sigma_\varepsilon^2(\tau_2), \dots, \sigma_\varepsilon^2(\tau_N)]$$

De acordo com Diebold & Li (2006), a modelagem dinâmica dos fatores nível ($\beta_{1,t}$), inclinação ($\beta_{2,t}$) e curvatura ($\beta_{3,t}$) pode ser realizada tanto por meio de especificações auto-regressivas (AR) quanto vetores autorregressivos (VAR). Na notação matricial, considerando inicialmente apenas uma defasagem, a construção pode ser denotada da seguinte forma:

$$B_t = AB_{t-1} + (I - A)u + \Psi_t \quad (5)$$

sendo

$$u^{3 \times 1} = \begin{bmatrix} \mu_{\beta_{1,t}} \\ \mu_{\beta_{2,t}} \\ \mu_{\beta_{3,t}} \end{bmatrix} \text{ e } \Psi_t^{N \times 1} = \begin{bmatrix} \psi_t(\beta_{1,t}) \\ \psi_t(\beta_{2,t}) \\ \psi_t(\beta_{3,t}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

O termo I se trata de uma matriz identidade 3×3 , enquanto B_t foi definido em 3. Assume-se que o vetor de erros Ψ_t é normalmente distribuído com média zero e covariância Q .

No caso da especificação AR(1), o modelo pode ser considerado independente em termos de média e volatilidade, de forma que as matrizes de parâmetros (A) e de covariância (Q) são tomadas como diagonais:

$$A^{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, Q^{3 \times 3} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Por sua vez, na especificação VAR(1), o modelo é correlacionado em termos de média e volatilidade, resultado obtido com a imposição de uma matriz de parâmetros (A) completa e de uma matriz de covariância do termo de erros estocástico (Ψ_t calculada a partir da decomposição de Cholesky ($Q = qq'$):

$$A^{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, Q^{3 \times 3} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Inicialmente, Diebold & Li (2006) propõem a estimação dos parâmetros em dois estágios independentes. Em uma primeira etapa, séries temporais dos fatores nível ($\beta_{1,t}$), inclinação ($\beta_{2,t}$) e curvatura ($\beta_{3,t}$) são obtidas com a estimação desses parâmetros a partir das taxas apuradas para os vértices que compõem uma curva de juros zero cupom qualquer, em cada ponto do tempo. Na segunda etapa, os modelos de séries temporais (VAR e AR) são aplicados para a estimação dos parâmetros que determinam a dinâmica dos fatores (A e Q).

2.1 A representação espaço estado do modelo DLNS: aplicando filtro de Kalman para a estimação em um único estágio

Buscando um método mais eficiente do que o realizado em dois estágios, Diebold *et al.* (2006) propõem a estimação do modelo DNLS em um único estágio, utilizando o Filtro de Kalman, introduzido conforme Harvey (1989). Essa configuração pode ser entendida a partir de uma representação espaço-estado do modelo de Diebold & Li (2006), onde a equação 2 é tratada como a equação de medida e os fatores nível ($\beta_{1,t}$), inclinação ($\beta_{2,t}$) e curvatura ($\beta_{3,t}$) são tratados como variáveis de estado, seguindo a estrutura dos modelos de séries temporais representados pela equação 5 (equação de transição). Nessa construção, assume-se que a média condicional de B_t é conhecida até o período $t - 1$ ou t , podendo ser denotado como $B_{t|t-1}$ e $B_{t|t}$, respectivamente. Utilizando a equação de transição, a previsão *ex ante* do vetor de estados ($B_{t|t-1}$) e da matriz de covariância para o próximo período podem ser calculadas, respectivamente, da seguinte forma:

$$B_{t|t-1} = \mathbb{E}_{t-1} |B_t| = AB_{t-1} + (I - A)u \quad (9)$$

$$\Sigma_{t|t-1} = \mathbb{E}_{t-1} \left[(B_t - B_{t|t-1}) (B_t - B_{t|t-1})^T \right] = A\Sigma_{t-1}A^T + Q \quad (10)$$

Utilizado a equação de medida, essas estimativas podem ser aprimoradas utilizando a informação adicional fornecida por R_t , resultando na previsão *ex post* dos parâmetros destacados acima:

$$B_{t|t} = \mathbb{E}_t |B_t| = B_{t|t-1} - B_{t|t-1}X^T F_t^{-1} X \mathbf{v}_t \quad (11)$$

$$\Sigma_t = \mathbb{E}_t \left[(B_t - B_{t|t}) (B_t - B_{t|t})^T \right] = \Sigma_{t|t-1} - \Sigma_{t|t-1}X^T F_t^{-1} X \Sigma_{t|t-1} \quad (12)$$

Dentro desse sistema, o erro de previsão ($\mathbf{v}_t$) e a sua variância (F_t) respondem às seguintes dinâmicas:

$$\mathbf{v}_t = R_t - XB_{t|t-1} \quad (13)$$

$$\text{Var}(\mathbf{v}_t) = F_t = X \Sigma_{t|t-1} X^T + H \quad (14)$$

O processo iterativo do Filtro de Kalman pode ser iniciado assumindo uma distribuição incondicional para os estados, com média B_0 e matriz de covariância Σ_0 , bem como parâmetros gerais na composição dos termos X, A, u, H e Q . O método de máxima-verossimilhança pode ser aplicado para calcular os parâmetros finais, partindo da derivação da função de densidade probabilidade conjunta das equações 13 e 14. Seguindo Christensen (2012), denotando φ como o vetor dos parâmetros desconhecidos destacados previamente, a função de densidade probabilidade conjunta pode ser definida como:

$$f(R_1, \dots, R_T; \psi) = \prod_{t=1}^T f(R_t | \mathcal{F}_{t-1}; \varphi) \quad (15)$$

com $f(\cdot)$ denotando uma função densidade multivariada. Uma vez que se pressupõem normalidade para o erro de previsão, a função de densidade multivariada normal possui o seguinte formato:

$$f(R) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |F^{-1}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(v_t^T F^{-1} v_t)} \quad (16)$$

A partir da equação acima, obtêm-se a seguinte log-verossimilhança:

$$\ell(R_1, \dots, R_T; \varphi) = \sum_{t=1}^T \left(-\frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |F^{-1}| - \frac{1}{2} v_t^T F^{-1} v_t \right) \quad (17)$$

Utilizando a equação 17, a máxima-verossimilhança pode ser obtida resolvendo o seguinte problema de otimização:

$$\max_{\varphi} \ell(R_1, \dots, R_T; \varphi) \quad (18)$$

De forma próxima a Christensen (2012), o método de Date & Wang (2008) e o algoritmo de Nelder-Mead podem ser aplicados para a obter estimativas para os parâmetros dentro dessa perspectiva.

2.2 Relacionando o modelo DLNS com o ciclo econômico

Outras extensões do modelo de Diebold & Li (2006) que devem ser destacadas são as que incorporam a relação entre o ciclo econômico e os fatores nível ($\beta_{1,t}$), inclinação ($\beta_{2,t}$) e curvatura ($\beta_{3,t}$). Conforme destacado anteriormente, vários trabalhos na literatura se dedicam à avaliar essas relações, direta (através da inclusão de variáveis econômicas para explicar o comportamento dos fatores) ou indiretamente (por meio da distinção do comportamento da curva de juros de acordo com o regime que prevalece na economia).¹

No caso direto, as equações 2 e 5 devem ser reformuladas para permitir a inclusão dessas variáveis. Inicialmente, supondo que se deseja incluir j variáveis econômicas, o vetor B_t pode ser expandido da seguinte forma:

$$B_t^{N \times (3+j)} = \begin{bmatrix} \beta_{1,t} \\ \beta_{2,t} \\ \beta_{3,t} \\ Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \\ \vdots \\ Z_{j,t} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Nesse vetor, o termo $Z_{i,t}$ ($i = 1 \dots j$) representa a i -ésima variável econômica. Nessa nova construção, outros termos das equações de medida e de transição também passam a incluir mais parâmetros. No caso da equação de medida, para manter a configuração original do modelo de Nelson & Siegel, impõem-se como restrição que os parâmetros adicionais originados com a inserção das variáveis econômicas sejam iguais a zero. Por sua vez, na equação de transição os parâmetros adicionais originados com a inclusão das variáveis econômicas são mantidos irrestritos, devendo ser estimados por meio do modelo de vetores autorregressivos (VAR). Assim, considerando apenas os termos que são alterados nessa nova configuração:

¹Entre outros, podem ser destacados Diebold *et al.* (2006), Moench (2006) e Rudebusch & Wu (2008) no caso de aplicações a países externos. Domesticamente, Matsumura & Moreira (2006), Matsumura *et al.* (2010) e Ribeiro & Pereira (2010) são alguns dos trabalhos que podem ser citados nesse âmbito.

$$X^{N \times (3+j)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda\tau_1} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda\tau_1} - e^{-\lambda\tau_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda\tau_2} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda\tau_2} - e^{-\lambda\tau_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_N}}{\lambda\tau_N} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_N}}{\lambda\tau_N} - e^{-\lambda\tau_N} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, u^{3 \times 1} = \begin{bmatrix} \mu_{\beta_1,t} \\ \mu_{\beta_2,t} \\ \mu_{\beta_3,t} \\ \mu_{Z_{1,t}} \\ \mu_{Z_{2,t}} \\ \vdots \\ \mu_{Z_{j,t}} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_t^{N \times 1} = \begin{bmatrix} \psi_t(\beta_{1,t}) \\ \psi_t(\beta_{2,t}) \\ \psi_t(\beta_{3,t}) \\ \psi_t(Z_{1,t}) \\ \psi_t(Z_{2,t}) \\ \vdots \\ \psi_t(Z_{j,t}) \end{bmatrix}, A^{(3+j) \times (3+j)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(3+j)} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(3+j)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(3+j)1} & a_{(3+j)2} & \dots & a_{(3+j)(3+j)} \end{bmatrix},$$

(20)

$$Q^{(3+j) \times (3+j)} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ q_{(3+j-1)1} & q_{(3+j-1)2} & \dots & q_{(3+j-1)(3+j-1)} & 0 \\ q_{(3+j)1} & q_{(3+j)2} & \dots & q_{(3+j)(3+j-1)} & q_{(3+j)(3+j)} \end{bmatrix}$$

2.3 Modelo DLNS com volatilidade estocástica

Entre outras extensões do modelo de Diebold & Li (2006) propostas a partir da construção espaço-estado, destaca-se a flexibilização inserida para permitir volatilidade variante no tempo. Trabalhos como Caldeira *et al.* (2010a) relatam a melhora do desempenho do modelo de Diebold & Li (2006) ao inserir volatilidade estocástica. Essa flexibilização da representação espaço-estado, dentro do conceitual apresentado até aqui, pode ser entendida a partir de Hautsch & Yang (2010). Para manter a construção parcimoniosa, considere a especificação AR(1) apresentada anteriormente, onde o modelo de Diebold & Li (2006) pode ser considerado independente em termos de média e volatilidade, de forma que as matrizes de parâmetros (A) e de covariância (Q) são tomadas como diagonais. Uma forma simples de introduzir volatilidade estocástica é justamente permitir

que a variância dos termos de erro da equação de estado possa variar no tempo. Nesse sentido, a matriz Q apresentada em 7 pode ser reavaliada, da seguinte forma:

$$Q_t^{3 \times 3} = \begin{bmatrix} q_{11,t} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22,t} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33,t} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Ao assumir que a matriz de variância pode variar no tempo, a dinâmica para o termo de heterocedasticidade condicional é dada pela seguinte equação:

$$\begin{pmatrix} h_{1,t+1} - \mu_{1,h} \\ h_{2,t+1} - \mu_{2,h} \\ h_{3,t+1} - \mu_{3,h} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11,h} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22,h} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{33,h} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_{1,t} - \mu_{1,h} \\ h_{2,t} - \mu_{2,h} \\ h_{3,t} - \mu_{3,h} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 \epsilon_{1,t} \\ \sigma_2 \epsilon_{2,t} \\ \sigma_3 \epsilon_{3,t} \end{pmatrix} \quad (22)$$

onde

$$h_t = \text{diag} [\ln (Q_t)] = \begin{pmatrix} h_{1,t} \\ h_{2,t} \\ h_{3,t} \end{pmatrix} \quad (23)$$

Nessa construção, $\epsilon_{j,t} \sim N(0,1)$. Com isso, o termo de erros da equação de transição, expresso em 6, pode ser reescrito como se segue:

$$\Psi_t = \begin{bmatrix} \psi_t(\beta_{1,t}) \\ \psi_t(\beta_{2,t}) \\ \psi_t(\beta_{3,t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\frac{h_{1,t}}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{h_{2,t}}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{h_{3,t}}{2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{1,t} \\ \zeta_{2,t} \\ \zeta_{3,t} \end{pmatrix} \quad (24)$$

Dentro dessa configuração, considera-se que $\zeta_{j,t} \sim N(0,1)$, com $j = 1, 2, 3$. Assim, $h_{j,t}$ corresponde a um processo de volatilidade estocástica, podendo ser considerada como mais uma variável latente na configuração espaço-estado. Matricialmente, as equações 22 e 24 podem ser reescritas, respectivamente, da seguinte forma:

$$h_{t+1} - \mu_h = \delta_h (h_t - \mu_h) + \sigma \epsilon_t \quad (25)$$

$$\Psi_t = e^{\frac{h_t}{2}} \zeta_t \quad (26)$$

Os termos h_t e Ψ_t correspondem aos vetores destacados anteriormente. Em relação aos demais itens, temos:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}; \epsilon_t = \begin{pmatrix} \epsilon_{1,t} \\ \epsilon_{2,t} \\ \epsilon_{3,t} \end{pmatrix}; \delta_h = \begin{bmatrix} \delta_{11,h} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22,h} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{33,h} \end{bmatrix}; \mu_h = \begin{pmatrix} \mu_{1,h} \\ \mu_{2,h} \\ \mu_{3,h} \end{pmatrix};$$

$$e^{\frac{h_t}{2}} = \begin{bmatrix} e^{\frac{h_{1,t}}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{h_{2,t}}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{h_{3,t}}{2}} \end{bmatrix}; \zeta_t = \begin{pmatrix} \zeta_{1,t} \\ \zeta_{2,t} \\ \zeta_{3,t} \end{pmatrix} \quad (27)$$

Os componentes $h_{1,t}$, $h_{2,t}$ e $h_{3,t}$ devem ser interpretados como fatores de volatilidade variantes no tempo associados, respectivamente, com a incerteza atribuída ao nível, inclinação e curvatura da estrutura a termo da taxa de juros.

3. Dados

Os dados empregados nesse trabalho são observações diárias sobre as taxas de juros embutidas nos contratos de DI Futuro negociados na BM&F, coletados entre 18/janeiro/2002 e 17/dezembro/2014. Dessa forma, esse intervalo amostral não contempla quebras estruturais como as verificadas com a implantação do plano real em 1994 e a mudança do regime cambial em 1999.

Cada um desses contratos possui vencimentos distintos e uma taxa zero-cupom associada. Com objetivo de garantir um critério mínimo de liquidez, em cada ponto no tempo, foram considerados somente os contratos que tiveram pelo menos um negócio realizado no dia. A maturidade para a taxa de referência é dada pelo intervalo de tempo entre a negociação e o vencimento do papel. Os vértices selecionados para avaliação neste trabalho, expressos em dias úteis, foram os seguintes: 21, 42, 63, 84, 126, 189, 252, 315, 378, 504, 567, 609, 651 e 693 dias.

Inicialmente, para calcular as estatísticas descritivas das taxas de juros para essas maturidades, torna-se necessário empregar um método de interpolação, tendo como objetivo construir a série temporal dos rendimentos para o conjunto de vértices destacados. O método empregado foi a própria equação de Nelson & Siegel (1987), com parâmetro de decaimento

(λ) variável escolhido dentro de um intervalo pré-estabelecido.² A Tabela 1 traz as estatísticas descritivas para cada um dos vértices considerados na análise. Por sua vez, a Figura 1 apresenta um gráfico em três dimensões da curva de juros analisada, que permite avaliar a dinâmica da estrutura a termo ao longo do período amostral.

Tabela 1

Estatísticas descritivas, curva de juros DI Futuro diária interpolada pela equação de Nelson & Siegel (18/janeiro/2002 a 17/dezembro/2014)

Maturidade (dias úteis)	Média (% a.a.)	Desvio padrão	Mínimo	Máximo	$\hat{\rho}_{21}$	$\hat{\rho}_{63}$
21	13,64	4,80	6,93	27,24	0,99	0,93
42	13,66	4,81	6,94	27,57	0,98	0,93
63	13,68	4,83	6,93	28,00	0,98	0,93
84	13,70	4,86	6,93	28,44	0,98	0,93
126	13,76	4,94	6,89	30,37	0,98	0,92
189	13,87	5,11	6,83	33,25	0,97	0,91
252	13,99	5,29	6,83	35,70	0,96	0,90
315	14,11	5,47	6,87	37,79	0,96	0,89
378	14,24	5,65	6,94	39,58	0,95	0,88
504	14,48	6,00	7,12	42,45	0,95	0,87
567	14,60	6,15	7,22	43,60	0,95	0,87
609	14,67	6,25	7,29	44,29	0,94	0,87
651	14,74	6,35	7,36	44,92	0,94	0,87
693	14,81	6,44	7,43	45,49	0,94	0,86

Obs.: As duas últimas colunas apresentam as autocorrelações amostrais ($\hat{\rho}$) de 21 e 63 dias úteis, respectivamente.

A Figura 2 apresenta a dinâmica dos fatores obtidos a partir do processo de interpolação. Pode-se notar que a curva de juros registrou várias inversões e momentos de mudança de nível no período destacado, o que revela alterações constantes nos fatores associados à equação de Nelson & Siegel (1987). Entre outros pontos que influenciaram essa dinâmica, deve-se destacar a intercalação entre ciclos de aperto e afrouxamento da política monetária. As alterações nos juros básicos decorrentes das decisões de política monetária afetam diretamente os rendimentos de títulos públicos

²Esse intervalo foi limitado aos parâmetros que maximizam a curvatura entre as maturidades de 63 (7,2) e 753 (0,6) dias úteis.

Figura 1

Evolução da estrutura a termo da taxa de juros ao longo do tempo (DI Futuro), interpolada por meio da equação de Nelson & Siegel: 18/janeiro/2002 a 17/dezembro/2014

e privados negociados no mercado, resultando em distintos formatos da curva.

Conforme destacado anteriormente, nessa construção, vários parâmetros de decaimento (λ) foram testados, selecionados a partir de um intervalo pré-estabelecido. Em cada ponto do tempo, o parâmetro final selecionado foi o que proporcionou a melhor aderência (menor erro quadrático médio) da curva estimada em relação aos vértices observados, procedimento semelhante ao adotado por Almeida *et al.* (2007). Na análise empírica, realizada na próxima seção, a moda calculada a partir da série temporal do parâmetro de decaimento ($\lambda = 0,6$) foi introduzida no vetor de parâmetros iniciais do Filtro de Kalman. Conforme denotado pela Figura 3, assumindo esse valor para o parâmetro de decaimento, a maturidade que maximiza a curvatura é aproximadamente 753 dias.

Figura 2
Fatores da curva de juros: modelo de Nelson & Siegel

Figura 3
Curvatura $\times$ Maturidade: dados obtidos para $\lambda = 0,6$

4. Análise empírica

A análise empírica foi concentrada em métodos que utilizam Filtro de Kalman para estimar extensões do modelo de Diebold & Li (2006) em sua representação espaço-estado, empregando a equação de Nelson & Siegel (1987) como equação de medida e diferentes especificações para a equação de transição que governa a dinâmica dos fatores nível, inclinação e curvatura.

As especificações testadas para a equação de transição foram as seguintes: (1) termos autorregressivos de primeira ordem (AR(1)), considerando uma matriz de variância diagonal para os resíduos; (2) termos de vetores autorregressivos de primeira ordem (VAR(1)), considerando uma matriz de covariância calculada a partir da decomposição de Cholesky, permitindo que os choques produzidos pela construção sejam parcialmente correlacionados; (3) extensão que emprega o modelo de vetores autorregressivos de primeira ordem (VAR(1)), incluindo variáveis econômicas associadas a teoria da Paridade Coberta da Taxa de Juros (PCTJ); e (4) extensão que emprega o modelo de vetores autorregressivos de primeira ordem (VAR(1)), introduzindo volatilidade estocástica.

Basicamente, o objetivo dessa seção é comparar entre as especificações listadas tanto a evolução das variáveis latentes quanto a aderência das curvas de juros dentro e fora da amostra. Para a realização desses exercícios, existiam as opções de trabalhar com os dados interpolados ou primários. A interpolação prévia dos dados permitiria um número maior de testes dentro e fora da amostra, uma vez que disponibilizaria as taxas para uma mesma maturidade em todos os pontos do tempo. Entretanto, esse procedimento adicional poderia incluir ruído significativo nos modelos, prejudicando as análises. Dessa forma, embora a utilização dos dados primários limite o número de testes dentro e fora da amostra, a eventual distorção que poderia ser causada pela interpolação prévia da curva de juros é evitada.

Por fim, deve-se destacar que, para a apresentação dos resultados, as primeiras 300 observações foram desconsideradas devido ao ruído gerado pelo processo de ajuste do Filtro de Kalman. Desse modo, embora a amostra tenha início em 18/janeiro/2002, todos os resultados apresentados nesta seção se referem a dados a partir de 02/abril/2003.

4.1 Estimação dos fatores nível, inclinação e curvatura

Conforme comentado anteriormente, Diebold & Li (2006) colocam a equação de três fatores de Nelson & Siegel (1987) em uma perspectiva dinâmica. Dentro desse contexto, os elementos associados ao nível, à inclinação e à curvatura da estrutura a termo da taxa de juros podem ser estimados a partir das taxas observadas para as diferentes maturidades disponíveis em cada ponto do tempo. Diebold *et al.* (2006) introduzem uma representação espaço-estado que permite a estimação dos fatores (nível, inclinação e curvatura) e de sua dinâmica em um único estágio. Nessa representação, a função de Nelson & Siegel (1987) é encadeada com modelos de séries temporais, sendo os parâmetros obtidos por meio de um Filtro de Kalman. As Tabelas 2 e 3 apresentam os parâmetros estimados para a especificação autorregressiva e sua matriz de covariância. Por sua vez, as Tabelas 4 e 5 apresentam os parâmetros estimados para a especificação com vetores autorregressivos e sua matriz de covariância. A Figura 4 traz a dinâmica dos fatores encontrados com a aplicação do Filtro de Kalman, com a utilização de especificações autorregressiva e de vetores autorregressivos, respectivamente. Visualmente, não é possível identificar distinção na dinâmica das variáveis latentes produzidas pelas especificações.

Tabela 2

Coeficientes da especificação AR(1)

A	$\beta_{1,t-1}$	$\beta_{2,t-1}$	$\beta_{3,t-1}$
$\beta_{1,t}$	0,990*** (0,0023)		
$\beta_{2,t}$		0,990*** (0,0031)	
$\beta_{3,t}$			0,990*** (0,0042)

Nota: Erro padrão robusto entre parênteses. *, ** e *** significativo a 10%, 5% e 1%, respectivamente.

Outra contribuição importante em Diebold *et al.* (2006) foi a inclusão de variáveis macroeconômicas entre os elementos que explicam as dinâmicas dos fatores, representados na equação de estado. De uma forma geral, na literatura, as variáveis usualmente empregadas para explicar os movimentos da curva de juros são associadas ao nível de atividade e à inflação. Entretanto, a utilização de uma base de dados diária limita a escolha das variáveis econômicas às disponibilizadas nessa mesma peri-

Tabela 3

Matriz de covariância da especificação AR(1)

Q	$\beta_{1,t-1}$	$\beta_{2,t-1}$	$\beta_{3,t-1}$
$\beta_{1,t}$	0,0031*** (0,0002)		
$\beta_{2,t}$		0,0032*** (0,0002)	
$\beta_{3,t}$			0,0058*** (0,0004)

Nota: Erro padrão robusto entre parênteses. *, ** e *** significativo a 10%, 5% e 1%, respectivamente.

Tabela 4

Coeficientes da especificação VAR(1)

A	$\beta_{1,t-1}$	$\beta_{2,t-1}$	$\beta_{3,t-1}$
$\beta_{1,t}$	0,9900*** (0,0046)	0,0042 (0,0070)	-0,0067*** (0,0031)
$\beta_{2,t}$	0,0091*** (0,0042)	0,9900*** (0,0065)	0,0100*** (0,0026)
$\beta_{3,t}$	-0,0014 (0,0043)	-0,0048 (0,0031)	0,9900*** (0,0075)

Nota: Erro padrão robusto entre parênteses. *, ** e *** significativo a 10%, 5% e 1%, respectivamente.

Tabela 5

Matriz de covariância da especificação VAR(1)

Q	$\beta_{1,t-1}$	$\beta_{2,t-1}$	$\beta_{3,t-1}$
$\beta_{1,t}$	0,0040*** (0,0003)		
$\beta_{2,t}$	-0,0039*** (0,0003)	-0,0025*** (0,0005)	
$\beta_{3,t}$	0,0009*** (0,0001)	-0,0003 (0,0007)	0,0060*** (0,0004)

Nota: Erro padrão robusto entre parênteses. *, ** e *** significativo a 10%, 5% e 1%, respectivamente.

Figura 4

Fatores da curva de juros estimados em um único estágio por meio de um Filtro de Kalman (VAR e AR)

odacidade. Dentro desse contexto, neste trabalho, optou-se por empregar variáveis derivadas a partir da Paridade Coberta da Taxa de Juros (PCTJ). De acordo com essa teoria, fluxos de capitais equalizam as taxas de juros entre os países quando determinadas na mesma moeda.

No caso de países emergentes, como o Brasil, essa condição implica que a taxa de juros doméstica é igual a soma de três componentes: taxa de juros externa, prêmio para o risco país e prêmio para o risco cambial. Essas variáveis representam vetores importantes na determinação da dinâmica da curva de juros. Por exemplo, o ambiente de taxas de juros externas próximas a zero (*zero bound*) nos países desenvolvidos, que vigora desde a eclosão da crise financeira internacional de 2008, parece ter atuado de forma importante nos ciclos de redução de juros mais recentes. Por sua vez, os prêmios de risco resumem percepções e expectativas dos investidores em relação aos fundamentos e ciclos da economia, podendo afetar diretamente a liquidez e a demanda no mercado de títulos. Assim, de acordo com a PCTJ, essas variáveis possuem relação direta na formação das taxas de juros. Além disso, indiretamente, elas carregam informações expectativas que costumam estar relacionadas de forma próxima às variáveis econômicas usualmente exploradas na literatura.

A Figura 5 traz a média mensal das trajetórias das aproximações dos componentes da PCTJ construídas a partir de séries temporais de variáveis financeiras e econômicas. O *Treasury* de 1 ano foi utilizado para representar a taxa de juros externa. O prêmio de risco cambial é a expectativa de desvalorização entre o câmbio presente e o futuro de 1 ano derivado na curva de *swap* cambial da BM&F. Por fim, o risco país é medido pelo EMBI+Br. Nota-se que existe uma correlação entre a soma desses três componentes e o juro doméstico de 1 ano, medido pela média mensal do DI de 252 dias úteis, que resultou do processo de interpolação realizado na seção anterior.³ Para explorar essa relação, esses componentes foram inseridos como variáveis endógenas na equação de estado associada ao modelo VAR. As Tabelas 6 e 7 apresentam os parâmetros estimados para a especificação com vetores autorregressivos com as variáveis da PCTJ e sua matriz de covariância. A Figura 6 apresenta a dinâmica dos fatores resultante da especificação com as variáveis econômicas. A Figura 7 permite visualizar as trajetórias preditas e observadas dos componentes.

A última especificação construída foi a que flexibiliza a representação

³Na estimação do VAR(1), a *Treasury* de 1 ano foi substituída pela de 10 anos. A taxa mais longa é uma medida mais usual em processos de modelagem

Figura 5

Paridade Coberta da Taxa de Juros: aproximações construídas para os prêmios de risco país (EMBI+Br), prêmio de risco cambial (*swap* Cambial) e juros externo (*treasury* de 1 ano)

Tabela 6

Coefficientes da especificação VAR(1) com variáveis da PCTJ

A	$\beta_{1,t-1}$	$\beta_{2,t-1}$	$\beta_{3,t-1}$	$\beta_{4,t-1}$	$\beta_{5,t-1}$	$\beta_{6,t-1}$
$\beta_{1,t}$	0,9001*** (1,19E-05)	-0,0333*** (2,12E-06)	0,0355*** (8,80E-07)	0,0140*** (7,51E-07)	0,0587*** (9,48E-07)	0,0404*** (7,60E-07)
$\beta_{2,t}$	0,0189*** (1,10E-06)	0,9442*** (5,48E-05)	-0,2368*** (4,93E-06)	-0,0054*** (1,04E-08)	0,0177*** (2,02E-07)	0,0346*** (1,75E-06)
$\beta_{3,t}$	-0,1272*** (4,21E-07)	-0,1228*** (1,26E-06)	0,7018*** (3,23E-05)	-0,1026*** (3,57E-06)	-0,1038*** (1,91E-06)	-0,0255*** (6,79E-07)
$\beta_{4,t}$	0,0384*** (1,20E-06)	0,0127*** (3,13E-07)	0,0232*** (7,56E-07)	0,8010*** (6,08E-06)	-0,0140*** (7,88E-07)	0,0071*** (7,84E-08)
$\beta_{5,t}$	0,0159*** (5,80E-07)	0,0070*** (8,42E-09)	0,0274*** (5,37E-07)	0,0339*** (5,07E-07)	0,7997*** (4,60E-06)	0,0129*** (3,62E-07)
$\beta_{6,t}$	0,0263*** (9,37E-07)	0,0344*** (1,88E-07)	-0,0239*** (3,07E-07)	0,0048*** (1,27E-06)	0,0068*** (3,08E-08)	0,7948*** (3,09E-05)

Nota: Erro padrão robusto entre parênteses. *, ** e *** significativo a 10%, 5% e 1%, respectivamente.

Tabela 7

Matriz de covariância da especificação VAR(1) com variáveis da PCTJ

Q	$\beta_{1,t-1}$	$\beta_{2,t-1}$	$\beta_{3,t-1}$	$\beta_{4,t-1}$	$\beta_{5,t-1}$	$\beta_{6,t-1}$
$\beta_{1,t}$	0,9686*** (1,67E-05)					
$\beta_{2,t}$	0,6393*** (4,08E-06)	0,0469*** (1,45E-06)				
$\beta_{3,t}$	0,3651*** (8,92E-06)	0,0285*** (1,65E-06)	0,0518*** (1,22E-06)			
$\beta_{4,t}$	0,2655*** (1,03E-05)	0,0565*** (6,09E-07)	0,0208*** (9,38E-07)	0,0391*** (9,89E-07)		
$\beta_{5,t}$	0,2127*** (1,02E-05)	0,0122*** (3,25E-07)	-0,0308*** (1,86E-06)	0,0308*** (4,28E-07)	0,0181*** (3,14E-07)	
$\beta_{6,t}$	0,0648*** (8,44E-07)	0,0622*** (6,98E-07)	0,0078*** (1,15E-07)	0,0136*** (5,43E-07)	-0,0049*** (6,71E-07)	0,0051*** (1,91E-07)

Nota: Erro padrão robusto entre parênteses. *, ** e *** significativo a 10%, 5% e 1%, respectivamente.

Figura 6

Fatores da curva de juros estimados em um único estágio por meio de um Filtro de Kalman (VAR), incluindo variáveis econômicas

Figura 7
Variáveis econômicas: predito × observado

Tabela 8
Coeficientes da especificação VAR(1) com volatilidade estocástica

A	$\beta_{1,t-1}$	$\beta_{2,t-1}$	$\beta_{3,t-1}$
$\beta_{1,t}$	0,9500*** (0,0085)	0,0064*** (0,0031)	0,0185*** (0,0018)
$\beta_{2,t}$	-0,0431*** (0,0080)	0,9200*** (0,0178)	0,0363*** (0,0069)
$\beta_{3,t}$	0,1034*** (0,0060)	0,0474*** (0,0139)	0,8498*** (0,0161)

Nota: Erro padrão robusto entre parênteses. *, ** e *** significativo a 10%, 5% e 1%, respectivamente.

Tabela 9

Matriz de covariância da especificação VAR(1) com volatilidade estocástica

Q	$\beta_{1,t-1}$	$\beta_{2,t-1}$	$\beta_{3,t-1}$
$\beta_{1,t}$	0,0637*** (0,0012)		
$\beta_{2,t}$	-0,0668*** (0,0013)	0,1106*** (0,0050)	
$\beta_{3,t}$	0,0558*** (0,0009)	-0,0558*** (0,0006)	0,0600*** (0,0199)

Nota: Erro padrão robusto entre parênteses. *, ** e *** significativo a 10%, 5% e 1%, respectivamente.

Tabela 10

Coeficientes do componente de volatilidade estocástica

	μ_h	$h_{1,t-1}$	$h_{2,t-1}$	$h_{3,t-1}$
$h_{1,t}$	0,9861*** (0,0876)	0,9005*** (0,0159)		
$h_{2,t}$	0,9875*** (0,0777)		0,9004*** (0,0102)	
$h_{3,t}$	0,9855*** (0,1349)			0,9003*** (0,0347)

Nota: Erro padrão robusto entre parênteses. *, ** e *** significativo a 10%, 5% e 1%, respectivamente.

Figura 8

Fatores da curva de juros estimados em um único estágio por meio de um Filtro de Kalman, incluindo volatilidade estocástica

espaço-estado, permitindo a inclusão de um termo de volatilidade condicional para cada um dos fatores nível, inclinação e curvatura. As Tabelas 8 e 9 apresentam os parâmetros estimados para a especificação com vetores autorregressivos inserindo o componente de volatilidade estocástica e sua matriz de covariância. A Tabela 10 traz os coeficientes estimados da estrutura autorregressiva imposta para a volatilidade. A Figura 8 apresenta a trajetória dos fatores e das respectivas volatilidades estimadas a partir da especificação. Comparativamente às séries temporais das variáveis latentes produzidas pelos modelos anteriores, pode-se notar que a curvatura foi o fator que registrou maior alteração da sua dinâmica com a inclusão da volatilidade condicional.

A Tabela 11 traz as estatísticas descritivas referentes aos fatores estimados por cada uma das técnicas destacadas nesta seção. De uma forma geral, as especificações que impõe estrutura autorregressiva para a equação de estado (DLNS/FK/AR) e consideram vetores autorregressivos para a equação de estado sem volatilidade condicional (DLNS/FK/VAR e DLNS/FK/VAR/Macro) apresentaram estatísticas descritivas muito próximas. No caso da especificação que inclui volatilidade estocástica (DLNS/FK/VAR/VS), verifica-se que a série temporal dos fatores apresentou amplitude e desvio padrão inferior à registrada pelos demais modelos. Adicionalmente, ao avaliar especificamente o desvio padrão das variáveis latentes, nota-se que a curvatura foi o fator em que essa flexibilização mais contribuiu para

Tabela 11

Estatísticas descritivas dos fatores por modelo

Fator	Média	Desvio padrão	Mínimo	Máximo	$\hat{\rho}_{21}$	$\hat{\rho}_{63}$
Nível (DLNS/FK/AR)	13,90	3,34	9,51	30,87	0,8751	0,7502
Nível (DLNS/FK/VAR)	13,89	3,33	9,50	30,93	0,8740	0,7499
Nível (DLNS/FK/VAR/Macro)	13,96	3,53	9,56	32,60	0,8754	0,7493
Nível (DLNS/FK/VAR/VS)	13,82	3,00	8,92	28,62	0,8767	0,7584
Inclinação (DLNS/FK/AR)	-1,16	2,55	-8,68	6,20	0,8844	0,6867
Inclinação (DLNS/FK/VAR)	-1,16	2,55	-8,73	6,71	0,8831	0,6854
Inclinação (DLNS/FK/VAR/Macro)	-1,25	2,64	-9,06	6,74	0,8833	0,7047
Inclinação (DLNS/FK/VAR/VS)	-1,07	2,48	-8,26	7,98	0,8793	0,6541
Curvatura (DLNS/FK/AR)	-1,10	3,79	-13,62	7,18	0,9032	0,7135
Curvatura (DLNS/FK/VAR)	-1,09	3,81	-13,96	7,35	0,9025	0,7131
Curvatura (DLNS/FK/VAR/Macro)	-0,90	4,06	-16,35	7,88	0,8932	0,6934
Curvatura (DLNS/FK/VAR/VS)	-1,01	0,67	-3,53	0,82	0,8721	0,6664

Nota: As duas últimas colunas apresentam as autocorrelações amostrais ($\hat{\rho}$) de 21 e 63 dias úteis, respectivamente.

reduzir a dispersão ao longo do tempo. Assim, enquanto a redução da amplitude observada em todas as variáveis latentes sinaliza que a volatilidade estocástica desempenha algum papel na dinâmica desses fatores, a diminuição mais significativa do desvio padrão da curvatura indica que essa flexibilização atuou de forma mais significativa sobre esse componente.

4.2 Análise de aderência dentro da amostra

Para avaliar a aderência dentro da amostra dos métodos em relação aos dados observados, foram calculadas as raízes dos erros quadráticos médios (REQM) para as taxas de juros de cada uma das maturidades consideradas neste trabalho. A Tabela 12 resume essas informações. O número de testes informado para cada vértice se refere à quantidade de vezes que cada um deles foi observado ao longo do período amostral. Em negrito são destacados, para cada um dos vértices, os modelos que apresentaram o melhor desempenho (ou seja, menor REQM).

Verifica-se que as especificações que consideram vetores autorregressivos para a equação de estado com (DLNS/FK/VAR/Macro) e sem variáveis econômicas (DLNS/FK/VAR) foram as que apresentaram

menor REQM na maioria dos vértices. Por sua vez, enquanto a especificação que impõe uma estrutura autorregressiva para a equação de estado e uma matriz de variância diagonal para os resíduos (DLNS/FK/AR) registrou o melhor desempenho em apenas um vértice (84 dias), a especificação que inclui volatilidade estocástica (DLNS/FK/VAR/VS) não se destacou em nenhuma das maturidades selecionadas.

Tabela 12

REQM "dentro da amostra" (pontos base).

Maturidade (dias úteis)	Número de testes	DLNS/FK/ AR	DLNS/FK/ VAR	DLNS/FK/VAR/ VAR/Macro	DLNS/FK/ VAR/VS
21	160	15,43677	14,40705	17,24312	35,41207
42	155	7,18681	7,07985	7,80222	20,54160
63	157	11,66404	11,56064	10,96633	13,68211
84	94	12,29581	13,11838	12,69410	14,03475
126	56	16,71032	16,57902	17,43595	22,06360
189	57	15,02837	14,79838	17,31860	32,69059
252	57	14,26595	13,33527	14,86473	36,50853
315	52	8,27998	8,26539	9,50296	32,70457
378	53	7,74329	7,75191	7,74219	28,09451
504	53	13,42848	13,66676	13,33102	23,68997
567	45	11,09272	10,99122	10,65930	18,97026
609	47	8,29236	7,95092	7,56694	20,66707
651	46	11,43733	11,31638	11,55725	30,73072
693	42	11,64973	11,03341	11,26514	22,72229

As figuras de 9 a 12 expressam as trajetórias das curvas de juros estimadas por cada um dos métodos, em gráficos de três dimensões.

4.3 Análise de aderência fora da amostra

Para avaliar a aderência fora da amostra dos métodos em relação aos dados observados, foram calculadas as raízes dos erros quadráticos médios (REQM) para cada uma das maturidades consideradas neste trabalho, em quatro horizontes de projeção distintos: 1 (um) dia, 1 (um) mês, 3 (três) meses e 6 (seis) meses. Devido à não interpolação das séries, não foi possível calcular o passeio aleatório, referência usualmente utilizada nos exercícios de projeção fora da amostra. Dessa forma, o objetivo dessa

Figura 9

Curva de juros e de resíduos calculada com os fatores estimados pelo modelo DLNS com Filtro de Kalman. Especificação AR para equação dos fatores

Figura 10

Curva de juros e de resíduos calculada com os fatores estimados pelo modelo DLNS com Filtro de Kalman. Especificação VAR para equação dos fatores

Figura 11

Curva de juros e de resíduos calculada com os fatores estimados pelo modelo DLNS com Filtro de Kalman e variáveis econômicas. Especificação VAR para equação dos fatores

Figura 12

Curva de juros e de resíduos calculada com os fatores estimados pelo modelo DLNS com Filtro de Kalman e volatilidade estocástica. Especificação VAR para equação dos fatores

seção se resume em comparar o desempenho preditivo entre os quatro modelos estimados. As Tabelas de 13 a 16 trazem os resultados. Em negrito são destacadas as especificações que apresentaram o melhor desempenho, para cada um dos vértices.

De uma forma geral, observa-se que o modelo que se mostrou mais assertivo para o maior número de horizontes e maturidades foi a especificação que considera vetores autorregressivos para a equação de estado sem variáveis econômicas e sem volatilidade condicional (DLNS/FK/VAR). Na sequência, destaca-se a especificação que impõe uma estrutura autorregressiva para a equação de estado e uma matriz de variância diagonal para os resíduos (DLNS/FK/AR). A especificação que considera as variáveis associadas à PCTJ no modelo de vetores autorregressivos (DLNS/FK/VAR/Macro) conseguiu superar as demais em alguns vértices nos horizontes mais curtos (1 dia, 1 mês e 3 meses). Por fim, a especificação que inclui volatilidade estocástica (DLNS/FK/VAR/VS) se mostrou mais aderente apenas na projeção 1 mês a frente do vértice de 609 dias úteis.

Tabela 13

REQM para projeções fora da amostra: 1 (um) dia a frente (pontos base). Período de 01/09/2010 e 17/12/2014.

Maturidade (dias úteis)	Número de testes	DLNS/FK/ AR	DLNS/FK/ VAR	DLNS/FK/VAR/ VAR/Macro	DLNS/FK/ VAR/VS
21	50	9,74945	9,77561	10,20153	14,94071
42	48	4,57814	4,54339	4,89491	9,93748
63	51	6,09704	6,22106	5,99517	10,83976
84	29	7,41340	7,37671	8,08100	11,27596
126	17	11,97284	12,01344	12,75730	17,08418
189	17	12,95682	12,88402	14,41325	18,13256
252	17	11,05271	10,94680	13,01984	17,73273
315	18	12,27688	12,08331	13,75837	20,96750
378	18	9,96810	9,87542	10,67755	17,98313
504	18	11,11420	11,27989	10,60553	17,64246
567	15	10,79866	10,88356	10,78364	17,05259
609	16	9,46433	9,40969	9,77380	14,78127
651	17	10,57665	10,49474	10,88908	14,57063
693	18	14,06694	14,05542	14,30043	19,02522

Tabela 14

REQM para projeções fora da amostra: 1 (um) mês a frente (pontos base). Período de 01/09/2010 e 17/12/2014.

Maturidade (dias úteis)	Número de testes	DLNS/FK/ AR	DLNS/FK/ VAR	DLNS/FK/VAR/ VAR/Macro	DLNS/FK/ VAR/VS
21	50	28,46265	25,44685	26,97745	42,70863
42	49	29,07235	26,56695	28,69510	36,05007
63	51	30,92246	28,82604	31,56980	35,50225
84	29	34,40087	32,81928	35,02377	35,49013
126	17	37,82608	36,78100	39,67028	41,26680
189	17	43,73232	43,19818	45,13860	52,15437
252	17	45,72654	45,57310	46,95537	57,06419
315	17	41,29964	41,34351	42,06986	55,27601
378	17	49,06740	49,15626	49,37228	59,53476
504	17	59,05748	59,03433	59,76044	66,55801
567	14	66,10812	66,17256	67,06037	72,02745
609	17	35,56222	35,65433	34,70747	32,58664
651	17	53,50605	53,55885	52,93060	54,23425
693	17	45,92457	45,53469	46,37039	47,69877

5. Considerações Finais

O principal objetivo desse trabalho foi avaliar a dinâmica dos fatores nível, inclinação e curvatura produzidos por um conjunto de extensões do modelo DLNS estimados com Filtro de Kalman, bem como a aderência das curvas de juros obtidas a partir dessas variáveis latentes, tanto dentro quanto fora da amostra. As extensões avaliadas empregam a equação de Nelson & Siegel (1987) como equação de medida, distinguindo-se de acordo com a especificação de séries temporais adotada como equação de transição na estimação dos fatores.

As especificações testadas para a equação de transição foram as seguintes: (1) termos autorregressivos de primeira ordem (AR(1)), considerando uma matriz de variância diagonal para os resíduos; (2) termos de vetores autorregressivos de primeira ordem (VAR(1)), considerando uma matriz de covariância calculada a partir da decomposição de Cholesky, permitindo que os choques produzidos pela construção sejam parcialmente correlacionados; (3) extensão que emprega o modelo de vetores autorregressivos de primeira ordem (VAR(1)), incluindo variáveis econômicas e fi-

Tabela 15

REQM para projeções fora da amostra: 3 (três) meses a frente (pontos base). Período de 01/09/2010 e 17/12/2014.

Maturidade (dias úteis)	Número de testes	DLNS/FK/ AR	DLNS/FK/ VAR	DLNS/FK/VAR/ VAR/Macro	DLNS/FK/ VAR/VS
21	50	78,90001	69,61129	77,29094	74,99924
42	49	82,72488	75,18696	82,27862	77,29385
63	51	83,25762	77,25451	84,24947	79,86474
84	29	85,37466	80,54826	86,41511	81,52012
126	18	93,97201	91,23844	96,40641	96,55083
189	18	93,16314	91,92005	96,41092	102,07084
252	19	95,93519	95,62824	99,47656	110,06038
315	18	93,58825	93,67151	96,53424	109,29673
378	17	94,31246	94,90837	95,27541	105,98744
504	18	94,43378	95,06523	94,98609	102,95399
567	15	92,93879	93,50806	93,81218	100,70530
609	16	88,61883	88,12931	87,54685	89,20064
651	17	90,73616	89,70471	89,24910	91,58839
693	18	83,55180	83,82191	81,91298	83,34982

nanceiras associadas a teoria da Paridade Coberta da Taxa de Juros (PCTJ); e (4) extensão que emprega o modelo de vetores autorregressivos de primeira ordem (VAR(1)), introduzindo volatilidade estocástica.

Esses métodos geraram resultados relativamente distintos. No caso da análise da dinâmica dos fatores estimados, embora os exercícios realizados tenham indicado que a volatilidade condicional é estatisticamente significativa para todas as variáveis latentes, o principal resultado foi a constatação da curvatura como o componente mais sensível a essa flexibilização, apresentando redução significativa do desvio padrão e da amplitude comparativamente às demais variáveis latentes.

Entretanto, nas análises de aderência dentro e fora da amostra, as projeções e valores preditos produzidos por essa especificação foram os que apresentaram o pior desempenho entre os modelos considerados. A especificação que revelou o maior grau de acerto nesses exercícios, tanto dentro quanto fora da amostra, foi a que considerou uma estrutura de vetores autorregressivos simples para a equação de estado. Em relação às demais especificações, embora o modelo que considera termos autorregressivos tenha apresentado desempenho dentro da amostra inferior ao que es-

Tabela 16

REQM para projeções fora da amostra: 6 (seis) meses a frente (pontos base). Período de 01/09/2010 e 17/12/2014.

Maturidade (dias úteis)	Número de testes	DLNS/FK/ AR	DLNS/FK/ VAR	DLNS/FK/VAR/ VAR/Macro	DLNS/FK/ VAR/VS
21	50	152,22594	138,59150	153,40188	140,12768
42	50	155,30810	144,38231	156,46605	145,77237
63	51	158,93456	150,39738	160,65277	151,77203
84	31	159,77930	151,71891	161,27577	152,67199
126	20	169,27197	163,81046	173,67162	169,23751
189	21	168,49041	164,98965	177,34107	177,27643
252	21	167,82942	165,78051	178,00349	181,93167
315	17	156,78903	156,67751	160,63913	167,25638
378	18	151,36098	151,62470	154,57455	162,59839
504	18	154,98091	154,69334	156,15201	163,52863
567	15	157,19548	156,11162	158,67711	164,03693
609	15	150,19130	147,56418	148,40451	150,71125
651	17	149,85950	146,62216	148,29324	151,75544
693	18	137,37064	135,47675	135,52217	138,96704

tende a estrutura de vetores autorregressivas com variáveis econômicas, nos exercícios de projeção fora da amostra essa condição foi invertida. Mais especificamente sobre o desempenho da extensão que considera as variáveis que compõem a PCTJ, embora o modelo que impõem uma estrutura de vetores autorregressivos simples para a equação de transição tenha sido o que apresentou melhor desempenho fora da amostra para a maioria de maturidades e horizontes de projeção, a especificação que incluiu as variáveis econômicas conseguiu se sobressair em alguns dos exercícios realizados.

Referências

- Almeida, Caio, Gomes, Romeu, Leite, André, Simonsen, Axel, & Vicente, José. 2007. Does Curvature Enhance Forecasting? *Working paper series*, **155**.
- Bernadell, C, Coche, J, & Nyholm, K. 2006. Yield Curve Prediction for the Strategic Investor. *European Central Bank. Working paper*.
- Caldeira, João, Moura, Guilherme, & Portugal, Marcelo. 2010a. Efficient

- Yield Curve Estimation and Forecasting in Brazil. *Revista Economia*, **11**, 27–51.
- Caldeira, João, Laurini, Márcio, & Portugal, Marcelo. 2010b. Inferência Bayesiana Aplicada ao Modelo Dinâmico de Nelson-Siegel com Volatilidade Estocástica nos Fatores. *Working Paper*.
- Christensen, J.M. 2012. Nelson Siegel and Affine Processes - and Their Use in Term Structure Modeling. *Msc. Finance Thesis - Department of Business Studies - Aarhus University*, 2012.
- Date, P., & Wang, I. C. 2008. *Linear Gaussian Affine Term Structure Models with Unobservable Factors: Calibration and Yield Forecasting*. Tech. rept. Brunel University Research Archive (BURA).
- Diebold, Francis, & Li, Canlin. 2006. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics*, **130**, 337–364.
- Diebold, Francis, Rudebusch, Glenn, & Aruoba, Boragan. 2006. The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach. *Journal of Econometrics*, **131**, 309–338.
- Elen, Emile. 2010. Dynamic term structure modeling under macroeconomic-driven regime shifts. *Tilburg School of Economics and Management*.
- Harvey, A.C. 1989. *Forecasting structural time series models and the kalman filter*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Hautsch, Nikolaus, & Ou, Yangguoyi. 2009. Analyzing interest rate risk: Stochastic volatility in the term structure of government bond yields. *CFS working paper*, **3**.
- Hautsch, Nikolaus, & Yang, Fuyu. 2010. Bayesian inference in a Stochastic Volatility Nelson Siegel model. *Computational Statistics and Data Analysis*.
- Hevia, Constantino, Gonzalez-Rozada, Martin, Sola, Martin, & Spagnolo, Fabio. 2014. Estimating and forecasting the yield curve using a Markov switching dynamic Nelson and Siegel model. *Birkbeck Centre for Applied Macroeconomics*.

- Koopman, Siem, Mallee, Max, & Wel, Michel. 2007. Analyzing the Term Structure of Interest Rates using the Dynamic Nelson-Siegel Model with Time-Varying Parameters. *Tinbergen Institute Discussion Paper*.
- Levant, Jared, & Ma, Jun. 2014. A Dynamic Nelson-Siegel Yield Curve Model with Markov Switching. *Discussion Paper*.
- Litterman, Robert, & Scheinkman, José. 1991. Common factors affecting bond returns. *The journal of fixed income*, 54–61.
- Matsumura, Marco, & Moreira, Ajax. 2006. Macro Shocks and the Brazilian Yield Curve with Macro Finance Models. *Texto para discussão IPEA*, **1210**.
- Matsumura, Marco, Moreira, Ajax, & Vicente, José. 2010. Forecasting the yield curve with linear factor models. *Working paper series*, **223**.
- Moench, E. 2006. Term structure surprises: the predictive content of curvature, level, and slope. *Working Paper. Humboldt-Universität zu Berlin*.
- Munclinger, Richard. 2011. Exploration of the Brazilian Term Structure in a Hidden Markov Framework. *Working paper*.
- Nelson, Charles, & Siegel, Andrew. 1987. Parsimonious Modeling of Yield Curves. *The Journal of Business*, **60**, 473–489.
- Ribeiro, Priscila Fernandes, & Pereira, Pedro Luiz Valls. 2010. Economic cycles and term structure: application to Brazil. *Textos para discussão*, **259**.
- Rudebusch, G. D, & Wu, T. 2008. A macro-finance model of the term structure, monetary policy and the economy. *The Economic Journal*, 906–926.
- Svensson, Lars. 1994. Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994. *Institute for interational economic studies*.
- Vicente, José, & Tabak, Benjamin. 2007. Forecasting bond yields in the brazilian fixed income market. *Working paper series 141*.