

Assimetria e Prêmio de Risco na Estrutura a Termo de Juros Brasileira

(Asymmetry and Risk Premia in the Brazilian Term Structure of Interest Rates)

Marcelo Ganem*

Tara Keshar Nanda Baidya**

Resumo

A formação do prêmio de risco na curva de juros brasileira carrega a herança de uma série de particularidades que moldaram a evolução histórica e amadurecimento do mercado de renda fixa local. Uma das características mais significativas da dinâmica de juros no mercado doméstico é a assimetria de retornos, especialmente em eventos de cauda. Métricas de risco baseadas em média e variância desconsideram momentos de ordem superior que eventualmente têm participação no apreçamento da ETTJ ao longo de seus vários segmentos. Este artigo explora a influência da assimetria na formação do prêmio de risco no Brasil, analisando as condições de não arbitragem que provêem a forma funcional para a regressão do prêmio contra duas variáveis endógenas (desvio absoluto de corpo e assimetria de caudas). O trabalho é encerrado com uma discussão sobre a percepção de riscos no mercado de renda fixa brasileiro, e sua relação com a condução da política monetária nos anos de 2003 a 2009.

Palavras-chave: prêmio de risco; assimetria de retornos; estrutura a termo de juros; pesquisa de mercado.

Códigos JEL: C35; E43; G12.

Abstract

The risk premium in the Brazilian term structure of interest rates is partially driven by some specific defensive behavior following past monetary decisions. Until 2008, the Brazilian Central Bank has primarily dealt with domestic and external crises by raising the short term rate to restrain capital outflows, generating a well-known asymmetry in the market's response functions to risk aversion. Therefore, the traditional parameterization of risk based on mean and variance estimators fails to capture the market price of risk eventually assigned to higher order moments of bond returns across several maturities. In this paper we propose an arbitrage-free, discrete-time model that provides the form for a lagged endogenous regression which tests the significance and magnitude of the market price of asymmetry in the Brazilian fixed income market. The results are analyzed from a historical perspective, comparing the evolution of the price of asymmetry, the improvement of Brazil's sovereign risk and the monetary policy conduction from 2003 to 2009.

Submetido em junho de 2010. Aceito em janeiro de 2011. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Caio Ibsen de Almeida.

*PUC-RJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: marceloganem@iglobo.com

**PUC-RJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: baidya@puc-rio.br

Keywords: risk premium; asymmetry; term structure of interest rates.

1. Introdução

A determinação do prêmio de risco de estruturas a termo de juros continua sendo uma área de intensa pesquisa em finanças quantitativas, tanto no meio acadêmico quanto em pontas de mesa, por suas várias aplicações em gestão ativa, gestão de risco, apreçamento de derivativos e modelos de previsão. A idéia central de grande parte das modelagens se baseia na análise da forma da curva de juros a partir três elementos: expectativas em relação à trajetória da taxa de curtíssimo prazo, prêmio de aversão a risco e ajuste de convexidade (o último devido à relação não linear entre preços e taxas de juros). A natureza do prêmio depende diretamente dos fatores de risco associados, que podem se relacionar apenas à dinâmica da própria curva ou a elementos externos, como variáveis macroeconômicas e indicadores de mercado.

A abordagem mais direta de avaliação da ETTJ assume um prêmio de risco constante ou como função determinística apenas do tempo para vencimento dos diversos títulos que compõem a curva. Conhecida como Hipótese das Expectativas (HE), foi extensamente testada em economias centrais. Citando alguns estudos de uma vasta produção, Cook & Hahn (1990) a rejeitaram, bem como Campbell & Shiller (1991), Dai & Singleton (2002) e Cochrane & Piazzesi (2005). Em contraponto, Sola & Driffill (1994), e Gerlach & Smets (1997) encontraram evidências a seu favor. Cuthbertson (1996) chegou a resultados inconclusivos. De fato, é difícil encontrar na literatura relacionada até um consenso sobre a definição da HE, a forma funcional do prêmio e seus métodos de validação. Intuitivamente, é improvável – ao menos para o segmento curto/médio da curva – que o mercado não se baseie fortemente em expectativas sobre trajetória da taxa básica de juros no seu processo de decisão e mensuração de valor. Esta premissa é mais evidente no contexto local, que ainda apresenta uma ETTJ relativamente curta em termos de liquidez dos vértices negociados. Entretanto, assumir que a curva de juros dependa apenas das expectativas de política monetária e de um prêmio determinado unicamente pelo vencimento considerado parece uma abordagem incompleta. A discussão permanece em aberto.

No âmbito local, a formação do prêmio de risco tem sido discutida sob diversas premissas em artigos recentes, cobrindo fatores internos e exógenos em modelos preditivos – Almeida *et al.* (2007), Laurini & Hotta (2007), Vicente & Tabak (2008), Guillen & Tabak (2008), Leite *et al.* (2009). O presente artigo busca evidências de variáveis associadas apenas à dinâmica própria da curva que possam influenciar a evolução da estrutura de prêmios, focando particularmente a assimetria histórica de retornos extremos no mercado brasileiro. Além da assimetria, a dispersão de retornos (na forma de desvio absoluto) foi usada como elemento adicional na estimação do prêmio de risco. A relação entre volatilidade e prêmio de risco é um conceito chave na Teoria de Finanças moderna, passando por Markowitz (1952), Sharpe (1964), Black & Scholes (1973) e Merton (1973).

Restrita ao mercado de juros, sua importância se manifesta tanto em modelos em tempo discreto quanto contínuos, culminando com o modelo de não arbitragem proposto por Heath *et al.* (1990) para a evolução global da curva a termo. Já o uso do terceiro momento e outros de ordem superior tem sido pouco explorado na literatura corrente, em parte pela dificuldade de conciliar condições de não arbitragem em soluções fechadas de modelagem dinâmica e apreçamento de derivativos, e possivelmente porque não sejam especialmente relevantes em curvas mais maduras.

Um ponto considerado nesta pesquisa – que justifica a busca da assimetria como um dos elementos formadores do prêmio de risco – se refere à condução da política monetária e fiscal ao longo dos anos, e seu impacto na percepção de risco dos agentes financeiros. Choques positivos de juros foram usados de forma recorrente para combater crises, domésticas ou externas, com o intuito primário de conter o refluxo de investimentos estrangeiros. A assimetria gerada pelas decisões do Banco Central foi incorporada pelas funções de resposta do mercado, amplificando alterações no segmento curtíssimo da curva (observado por Brito *et al.* (2004)), ou precipitando movimentos de estresse a cada leva de informações adversas.

A instabilidade da taxa básica, conjugada ao horizonte curto de instrumentos negociados, também gerou um efeito indireto com implicações duradouras para a dinâmica da curva: a falta de um balizador de equilíbrio de longo prazo. A impossibilidade de estimação de uma taxa vegetativa longa levou a técnicas de extrapolação de curva baseadas em taxas à vista ou a termo constantes. Como resultado, a curva local apresentava até o fim da base estudada maior volatilidade de taxa nos vértices longos, em descompasso com a curva norte-americana (Vereda *et al.*, 2008) e de boa parte das economias desenvolvidas, que geralmente apresentam volatilidade decrescente nos segmentos mais longos da ETTJ.

Ainda contribuindo para os regimes frequentes de exceção, incrementos de prefixação da dívida pública sem mercados secundários líquidos, e a heterogeneidade de liquidez nos futuros de juros criaram situações em que a imunização de títulos só poderia ser feita via hedging dinâmico nos vértices mais negociados de futuros (movimento de maio de 2006, por exemplo), gerando distorções de curva bastante incomuns. Finalmente, a ainda presente fragilidade técnica do mercado de renda fixa, controlado por um número reduzido de agentes, facilitou efeitos de *stop-loss* (limitação de perdas via desarticulação de posições) em cascata, com descontinuidades características não vistas em outros mercados.

A postura cautelosa dos agentes financeiros em relação a eventos raros mas com grande potencial de destruição de valor se aproxima do comportamento de *peso problem* observado em diversos mercados. No contexto de renda fixa, a abordagem foi explorada por Bekaert *et al.* (2001), concluindo que algumas anomalias de ETTJs que eventualmente invalidem a Hipótese das Expectativas podem ser explicadas por posições preventivas contra transições raras de regimes inflacionários não capturadas por bases de dados relativamente curtas (o artigo tenta mitigar o

problema combinando informações das curvas de juros de várias economias centrais). No caso local, além das expectativas de movimentos inflacionários, todos os elementos citados acima contribuem para eventuais repiques positivos das taxas futuras, permitindo a captura da dinâmica peculiar de curva em uma única base diária segmentada em vértices fixos.

Alguns fatores explicativos do prêmio de risco são compartilhados por diversas curvas de juros no mundo. Outros dependem fundamentalmente das particularidades atuais e históricas de mercados locais. Este artigo se baseia na evolução do mercado de renda fixa brasileiro, e como a atuação defensiva dos investidores frente a distribuições não convencionais de retornos se refletiu nos prêmios exigidos. A inclusão da assimetria como fator de risco relevante procurou respeitar tanto condições de não arbitragem em tempo discreto quanto evidências de significância estatística em um modelo de regressão linear múltipla. Fechando o artigo, o preço de risco estimado foi segregado em períodos anuais de 2003 a 2009, sendo comparado o amadurecimento do mercado de juros com a melhora ambiente macroeconômico vigente.

2. Fatores de Risco Selecionados

Volatilidade e assimetria de diversos vértices de juros (seção 4) foram as variáveis escolhidas para análise de significância na geração do prêmio de risco. No entanto, o uso direto do segundo e terceiro momento das distribuições de retornos (de preços ou taxas) dificulta a inclusão de condições de não arbitragem sob um quadro unificado (vide seção 3). Por isso, aproximações usando momentos de ordem inferior (no caso, o primeiro momento parcial) foram utilizadas em substituição.

Para a volatilidade, em vez do desvio padrão foi usado o desvio absoluto, que atende a um duplo propósito: viabilizar condições equilíbrio e reduzir a alavancagem de pontos extremos.

$$DA = E[|X - E[X]|] \quad (1)$$

E o seu estimador correspondente, para uma distribuição com n observações e média μ_d :

$$\delta_d = \frac{\sum_{i=1}^n |(x_i - \mu_d)|}{n} \quad (2)$$

No caso da assimetria, o primeiro momento parcial não consegue capturar seu efeito, visto que para qualquer distribuição d temos:

$$E_d[|X - E_d[X]| | X \geq E_d[X]] = E_d[|X - E_d[X]| | X \leq E_d[X]] \quad (3)$$

Entretanto, se as caudas da distribuição forem segregadas do corpo, podemos obter uma estimativa de assimetria importante, focada na sua estrutura de

eventos extremos. Para isso foi usada uma medida semelhante ao VaR (*Value at Risk*) condicional, ou seja, a expectativa de perdas caso seja violado o envelope de confiança determinado pelo VaR com probabilidade $\alpha \in (0, 1)$. Valores usuais de confiança á para modelos de VaR giram entre 90% e 99%. É importante notar que o VaR se refere à cauda inferior da distribuição, portanto para uma avaliação bicaudal temos o percentual de observações correspondente ao corpo da distribuição igual a $(2\alpha - 1)$. Para a cauda superior e inferior o percentil correspondente é $(1 - \alpha)$. Neste artigo o modelo de VaR usado foi o histórico, que além de atender à medida de linearidade exigida pelas condições de não arbitragem, tem boa aderência a eventos de cauda. A definição de perdas esperadas em eventos de caudas superiores e inferiores é dada em valores absolutos por:

$$PE_\alpha = E[X | X > VaR_\alpha] \quad (4)$$

Podemos reescrever os estimadores de média e desvio absoluto dividindo a distribuição de retornos observados em quatro partes: extremo inferior (*ei*), corpo inferior (*ci*), corpo superior (*cs*) e extremo superior (*es*), com a relação entre número de observações de cauda e de corpo definida pelo parâmetro alfa. Para uma janela de n observações históricas ordenadas, teremos j observações $= ((2\alpha - 1)/2)n$ para cada segmento do corpo e k observações $= (1 - \alpha)n$ para os extremos (caudas) do vetor. Assumimos por simplicidade j e k inteiros, embora a condição possa ser relaxada com interpolações apropriadas no espaço de retornos. A média e o desvio absoluto de cada segmento são dados por:

$$\mu_{es} = \frac{\sum_{x \in es} x}{k}; \quad \mu_{ei} = \frac{\sum_{x \in ei} x}{k} \quad (5)$$

$$\mu_{cs} = \frac{\sum_{x \in cs} x}{j}; \quad \mu_{ci} = \frac{\sum_{x \in ci} x}{j} \quad (6)$$

$$\delta_{es} = \frac{\sum_{x \in es} (|x - \mu_d|)}{k}; \quad \delta_{ei} = \frac{\sum_{x \in ei} (|x - \mu_d|)}{k} \quad (7)$$

$$\delta_{cs} = \frac{\sum_{x \in cs} (|x - \mu_d|)}{j}; \quad \delta_{ci} = \frac{\sum_{x \in ci} (|x - \mu_d|)}{j} \quad (8)$$

Consolidando médias e desvios absolutos de extremos e corpo:

$$\mu_e = \frac{\mu_{es} + \mu_{ei}}{2}; \quad \mu_c = \frac{\mu_{cs} + \mu_{ci}}{2} \quad (9)$$

$$\delta_e = \frac{\delta_{es} + \delta_{ei}}{2}; \quad \delta_c = \frac{\delta_{cs} + \delta_{ci}}{2} \quad (10)$$

A média e o desvio absoluto da distribuição total podem ser recompostos diretamente:

$$\mu_d = \mu_e(2 - 2\alpha) + \mu_c(2\alpha - 1) \quad (11)$$

$$\delta_d = \delta_e(2 - 2\alpha) + \delta_c(2\alpha - 1) \quad (12)$$

Finalmente, podemos considerar como medida de assimetria a diferença entre a média de caudas e a média da distribuição:

$$\gamma_e = \mu_e - \mu_d \quad (13)$$

Determinados os fatores de risco podemos analisar as condições de equilíbrio do modelo, via condições de não arbitragem.

3. Condições de Não Arbitragem

As variáveis que regem a dinâmica da estrutura a termo de juros podem ser estimadas estatisticamente ou atendendo a condições de equilíbrio. No segundo caso incluem-se modelos de equilíbrio econômico e de não arbitragem. No presente artigo faremos uso apenas das implicações de arbitragem. O uso de premissas de não arbitragem remonta aos artigos originais de Black & Scholes (1973) e Merton (1973), evoluindo para um tratamento formal do tema em Harrison & Kreps (1979) e Harrison & Pliska (1981). Desde então a avaliação de condições de não arbitragem assumiu um papel preponderante em Finanças Quantitativas, por suas profundas implicações no apreçamento de derivativos e sua objetividade, se comparada a modelos de equilíbrio macroeconômico.

O problema principal da imposição de condições de não arbitragem é que ela eventualmente restringe a classe de modelos estudados e linhas de investigação particulares. Diversos fatores podem relaxar as premissas de arbitragem: atrito operacional (custos de transação e *spreads* de entrada e saída), comunicabilidade entre mercados, transições de regime de liquidez, incompletude de produtos financeiros, etc.. Entretanto, no caso de um modelo puramente endógeno (sem variáveis externas), é desejável a procura de uma medida neutra ao risco que eventualmente forneça a estrutura de regressão correta para as variáveis explicativas (ver Almeida & Vicente (2008)).

Vamos analisar um modelo discreto de um período, em que títulos para quaisquer vencimentos estejam sujeitos a apenas dois fatores de risco: eventos ordinários (corpo) e eventos extremos (cauda). Os dois fatores determinam quatro estados possíveis em $t + 1$: extremo inferior (*EI*), corpo inferior (*CI*), corpo superior (*CS*) e extremo superior (*ES*). Para uma taxa r_t conhecida em t e vigente até $t + 1$, e um título $B_{(t,T)}$ negociado em t e com vencimento em T , assumiremos que o espaço de preços possíveis em $t + 1$ respeita a seguinte condição:

$$B_{(t+1,T)}^{EI} < B_{(t+1,T)}^{CI} < B_{(t,T)}(1 + r_t) < B_{(t+1,T)}^{CS} < B_{(t+1,T)}^{ES} \quad (14)$$

As probabilidades observadas de cada estado são explicitadas por um parâmetro $\alpha \in (0, 1)$, sendo os eventos de cauda equiprováveis, assim como os eventos de corpo. A probabilidade associada a um evento extremo superior ou inferior é dada por $(1 - \alpha)$, enquanto eventos de corpo têm probabilidade $(2\alpha - 1)/2$ cada.

Vamos considerar médias e desvios de corpo e de extremos da mesma forma tratada na seção 2, com as simplificações necessárias pelo número reduzido de estados possíveis:

$$\mu_c^{B(t+1,T)} = \frac{B_{(t+1,T)}^{CS} + B_{(t+1,T)}^{CI}}{2}; \quad \mu_e^{B(t+1,T)} = \frac{B_{(t+1,T)}^{ES} + B_{(t+1,T)}^{EI}}{2} \quad (15)$$

$$\delta_c^{B(t+1,T)} = \frac{B_{(t+1,T)}^{CS} - B_{(t+1,T)}^{CI}}{2}; \quad \delta_e^{B(t+1,T)} = \frac{B_{(t+1,T)}^{ES} - B_{(t+1,T)}^{EI}}{2} \quad (16)$$

Consolidando a média e o desvio total:

$$\mu_d^{B(t+1,T)} = \mu_e^{B(t+1,T)}(2 - 2\alpha) + \mu_c^{B(t+1,T)}(2\alpha - 1) \quad (17)$$

$$\delta_d^{B(t+1,T)} = \delta_e^{B(t+1,T)}(2 - 2\alpha) + \delta_c^{B(t+1,T)}(2\alpha - 1) \quad (18)$$

Usando a diferença de médias como medida de assimetria:

$$\gamma_e^{B(t+1,T)} = \mu_e^{B(t+1,T)} - \mu_d^{B(t+1,T)} \quad (19)$$

Conhecido o preço médio do título em $t + 1$, sua dinâmica no espaço de estados fica completamente determinada pelo desvio de corpo, desvio de cauda e assimetria de cauda. A expectativa de preço em $t + 1$ deve embutir um prêmio sobre o rendimento da taxa livre de risco r_t pelos fatores de risco considerados e percepção de mercado sobre estes fatores (preço de risco). A diferença entre as expectativas para a taxa livre de risco para diversos prazos e a taxa pedida pelo mercado para estes mesmos prazos pode ser definida como o prêmio de risco da ETTJ. A formação de prêmio para um período que atende às condições de não arbitragem é uma função linear do desvio absoluto do corpo da distribuição, desvio absoluto de caudas e assimetria de caudas:

$$E_R [B_{(t+1,T)} | \mathfrak{S}_t] = B_{(t,T)}(1 + r_t) + \lambda_1 \delta_c^{B(t+1,T)} + \lambda_2 \delta_e^{B(t+1,T)} + \lambda_3 \gamma_e^{B(t+1,T)} \quad (20)$$

onde cada lambda representa o preço de risco de mercado para o fator correspondente, e \mathfrak{S}_t é a filtragem de informações até o instante t (portanto com r_t conhecida).

A medida neutra ao risco de um modelo com quatro estados pode ser obtida pela combinação de três títulos com vencimentos diferentes e a taxa livre de risco, r_t . Considerando em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ B_{(t,T1)} \\ B_{(t,T2)} \\ B_{(t,T3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+r_t) & (1+r_t) & (1+r_t) & (1+r_t) \\ B_{(t+1,T1)}^{EI} & B_{(t+1,T1)}^{CI} & B_{(t+1,T1)}^{CS} & B_{(t+1,T1)}^{ES} \\ B_{(t+1,T2)}^{EI} & B_{(t+1,T2)}^{CI} & B_{(t+1,T2)}^{CS} & B_{(t+1,T2)}^{ES} \\ B_{(t+1,T3)}^{EI} & B_{(t+1,T3)}^{CI} & B_{(t+1,T3)}^{CS} & B_{(t+1,T3)}^{ES} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$$

Combinado a (20) – e assumindo como condição suficiente que os três lambdas sejam invariantes para quaisquer vértices da curva em uma mesma data – se o sistema acima for linearmente independente, o vetor Ψ obtido gera uma base única e irredutível. Multiplicando Ψ pelo escalar $(1+r_t)$ obtemos uma medida de apreçamento linear, que para se caracterizar como uma medida neutra ao risco deve obedecer à zona admissível a uma medida de probabilidade:

$$P_Q^i = \psi_i(1+r_t) \in (0,1) \quad (21)$$

Pela substituição da medida real (R), pela media neutra (Q), chegamos à relação buscada:

$$E_Q [B_{(t+1,T)} | \mathfrak{F}_t] = B_{(t,T)}(1+r_t) \quad (22)$$

O vetor de probabilidades reais é simétrico em relação às caudas e corpo da distribuição:

$$P'_R = [(1-\alpha) \quad (2\alpha-1)/2 \quad (2\alpha-1)/2 \quad (1-\alpha)] \quad (23)$$

Assim, a medida neutra ao risco tem uma relação direta e intuitiva com o preço de risco (lambdas) de (20). De fato, λ_1 pondera o prêmio pedido pelo desvio absoluto de corpo da distribuição, e portanto rege a relação entre P_Q^{CI} e P_Q^{CS} . De forma similar, λ_2 influencia a medida de risco do desvio de caudas da distribuição, P_Q^{EI} e P_Q^{ES} . Finalmente, λ_3 é o preço de risco da assimetria de caudas dos retornos, determinando a relação entre probabilidade média de cauda e de corpo a partir do parâmetro alfa originalmente proposto. Formalizando:

$$P_Q^{CI} - P_Q^{CS} = \lambda_1 \quad (24)$$

$$P_Q^{EI} - P_Q^{ES} = \lambda_2 \quad (25)$$

$$\frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{P_Q^{EI} + P_Q^{ES}}{2} \right) - \left(\frac{P_Q^{CI} + P_Q^{CS}}{2} \right) - (2-2\alpha)}{1-2\alpha} = \lambda_3 \quad (26)$$

Fixado o alfa, as relações (24) a (26) podem ser invertidas, com a região admissível pela medida neutra ao risco ditando os limites válidos para cada lambda

em função dos outros. Os preços de risco aceitáveis para a medida neutra, portanto, não são podem ser determinados de forma estanque, mas na sua dinâmica conjugada.

Determinada a estrutura do prêmio de risco, a influência da assimetria de caudas na sua formação foi analisada estatisticamente, através de uma regressão linear entre o prêmio estimado e os fatores de risco assumidos em (20).

4. Avaliação Estatística

A equação (20) pode ser reescrita dividindo-se ambos os lados por $B_{(t,T)}$:

$$\frac{E_R [B_{(t+1,T)} | \mathfrak{S}_t]}{B_{(t,T)}} - 1 = r_t + \frac{\lambda_1 \delta_c^{B_{(t+1,T)}}}{B_{(t,T)}} + \frac{\lambda_2 \delta_e^{B_{(t+1,T)}}}{B_{(t,T)}} + \frac{\lambda_3 \gamma_e^{B_{(t+1,T)}}}{B_{(t,T)}} \quad (27)$$

A interpretação imediata é que o retorno esperado (um período) de um título vencendo em T pode ser decomposto na taxa livre de risco para o período somada a fatores de risco relativos (padronizados pelo preço do título), ponderados pelos respectivos preços de risco. A estrutura obtida em (27) fornece os elementos necessários para uma regressão linear. O excesso de retorno esperado sobre a taxa livre de risco é o prêmio de risco da curva de juros (π); os regressores são os fatores relativos de risco, e os betas procurados representam o preço de risco de cada fator. Assim:

$$\tilde{\pi}_{(t,T)} = X_{(t,T)} B + \epsilon_{(t,T)}; t = 1, \dots, N; T = 1, \dots, V \quad (28)$$

Fugindo um pouco à notação tradicional, N representa o número de observações históricas da série, enquanto V responde pelo número de vértices ao longo da seção transversal (estrutura a termo) da curva. Os vetores da regressão são dados por:

$$X_{(t,T)} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\delta_c^{B_{(t+1,T)}}}{B_{(t,T)}} & \frac{\delta_e^{B_{(t+1,T)}}}{B_{(t,T)}} & \frac{\gamma_e^{B_{(t+1,T)}}}{B_{(t,T)}} \end{array} \right] \quad (29)$$

$$B' = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3] \quad (30)$$

O vetor beta em (28) pode ser representado eventualmente com o subscrito t ou T . Na avaliação estatística, foi comparada uma regressão restrita (beta constante ao longo da seção transversal, respeitando as condições de não arbitragem) com uma regressão livre. Além disso, a série histórica foi dividida em sub-bases, permitindo a observação da evolução do preço de risco ao longo dos anos.

Antes de entrarmos no processo de construção das bases de dados, a extrapolação do modelo para o caso multiperíodo deve ser mencionada. Embora aderente às condições de não arbitragem, a composição linear do excesso de retorno para horizontes mais longos não está levando em consideração nem a dinâmica conjugada do desvio absoluto, nem da assimetria. O primeiro, por exemplo, segue uma

evolução de longo prazo influenciada tanto pelo processo de difusão (proporcional à raiz do tempo, com a premissa simplificadora de retornos i.i.d.) quanto pelo de decaimento no tempo; estes efeitos são ainda mais complexos na assimetria, pelo componente de reversão à média local. O motivo da escolha de períodos curtos para estimar o preço de risco embutido no prêmio segue o princípio de que as funções de resposta do mercado são condicionadas por movimentos extremos de curto prazo, e seu potencial de dano em processos de desarticulação compulsória de posições (*stop-loss*).

Para a regressão de (28) é preciso estimar o prêmio de risco da curva à vista de juros e os fatores de risco representados pelo desvio absoluto (corpo e cauda) e assimetria de caudas da distribuição de retornos desejada. As premissas usadas na montagem das bases de dados e métricas de risco serão detalhadas a seguir.

4.1 Bases de dados

A base inicial de parametrização foi composta por observações diárias da curva à vista e da curva de expectativas entre 02/01/2002 e 30/12/2009 (1995 observações temporais), segregada em dez vértices de vencimentos fixos, representados por dias úteis para maturação (10 observações espaciais):

$$v \equiv [63 \quad 126 \quad 189 \quad 252 \quad 378 \quad 504 \quad 630 \quad 756 \quad 882 \quad 1008] \quad (31)$$

Para a curva à vista de juros, o mercado escolhido como balizador foi o de futuros de DI, atualmente o mais líquido em termos de volume e horizonte de vencimentos negociados (exceto no caso das NTN-Fs – títulos prefixados com pagamento de cupom – que tem seu próprio habitat de apreçamento em horizontes mais longos). As alternativas possíveis, como o mercado de *swaps* ou títulos zero da dívida pública (LTNs), nos últimos anos têm calibrado suas taxas pela própria curva de futuros de DI, tornando redundante qualquer composição intermercados. No início da base de observações (2002), porém, os vértices de quatro anos dos futuros de DI ainda apresentavam baixa liquidez, corrigida com eventuais extrapolações de curva usando taxas a termos constantes (obtidas do segmento líquido mais próximo). Outra preocupação recorrente refere-se a lacunas de liquidez entre alguns vencimentos. Em geral as distorções são minimizadas no ajuste de fechamento do dia (usado como padrão de base para este artigo). Entretanto, vencimentos com ajustes de fechamento sem negociação são precificados pela oferta de compra/venda mais próxima da última cotação, reduzindo a representatividade da observação. Vencimentos com taxas de ajuste sem negócios foram excluídos da base.

A interpolação da curva diária observada para o vetor de vértices fixos de (31) procurou não antecipar nenhuma premissa particular sobre o processo gerador da estrutura a termo, além da informação disponível. Por isso a técnica usada foi a de taxas a termo constantes. Usando a convenção local (capitalização composta; dias úteis), para dois vencimentos de futuros de DI (T1, T2) e suas respectivas taxas

anualizadas ($r_{(t,T1)}$, $r_{(t,T2)}$), podemos calcular a taxa a termo implícita entre $T1$ e $T2$ ($fra_{(t,T1,T2)}$) como:

$$fra_{(t,T1,T2)} = \left(\frac{(1 + r_{(t,T2)})^{\frac{T2}{252}}}{(1 + r_{(t,T1)})^{\frac{T1}{252}}} \right)^{\frac{252}{(T2-T1)}} - 1 \quad (32)$$

E para a interpolação de uma taxa na data t não observada ($r_{(t,Ti)}^{spot}$) com vencimento Ti entre $T1$ e $T2$:

$$r_{(t,Ti)}^{spot} = \left((1 + r_{(t,T1)})^{\frac{T1}{252}} (1 + fra_{(t,T1,T2)})^{\frac{(Ti-T1)}{252}} \right)^{\frac{252}{Ti}} - 1 \quad (33)$$

Interpoladas as taxas diárias para os vértices fixos, os retornos diários foram calculados sobre preços, não sobre taxas. Retornos de preços atendem diretamente a equação (27), flanqueando o problema da convexidade nos diversos vencimentos da ETTJ (relação não linear entre preços de títulos e respectivas taxas). Como a convexidade também representa assimetria, ela foi incorporada implicitamente na flutuação de preços, com o método de avaliação plena substituindo qualquer aproximação de correção. Para um dado vértice fixo T e sua respectiva taxa anualizada na data t (representada por $r_{(t,T)}$), a variação diária de preços pode ser expressa da forma:

$$\Delta r_{(t,T)}^p = \left(\frac{(1 + r_{(t-1,T)})}{(1 + r_{(t,T)})} \right)^{\frac{T}{252}} - 1 \quad (34)$$

Note-se que o fator de decaimento no tempo foi suprimido (o que equivale a considerar apenas flutuações intradiárias) e por extensão o custo de carregamento em cada vértice.

O prêmio de risco da estrutura a termo de juros não é observável diretamente. Para estimá-lo, podemos recorrer a métodos estatísticos ou a pesquisas de mercado cobrindo expectativas em relação à trajetória da taxa básica. Seguindo Leite *et al.* (2009), usamos a pesquisa Focus, divulgada semanalmente pelo Banco Central do Brasil através da Gerin (Gerência-Executiva de Relacionamento com Investidores), para extrair as expectativas sob diversos horizontes para a Selic (taxa média que regula as operações compromissadas de um dia registradas no Sistema Especial de Liquidação e Custódia), representando a taxa de curtíssimo prazo do mercado local. Combinando as expectativas para a Selic com a curva de juros à vista podemos extrair – com algumas correções – o prêmio de cada segmento da curva em uma determinada data.

A coleta da Focus compreende tanto expectativas para a taxa Selic terminal de períodos mensais e anuais como para a taxa média vigente durante os mesmos períodos. As duas fontes carregam a mesma estrutura de informação, e foram comparadas para a exclusão de dados conflitantes. Empiricamente, um cuidado que se mostrou necessário foi truncar início e fim de algumas séries de apuração (três a cinco observações) que se mostraram irregulares, provavelmente por terem

uma base amostral reduzida. Obtidas as taxas implícitas para cada segmento da curva, a interpolação para vértices fixos usou a mesma técnica de (33), extraindo uma curva hipoteticamente sem prêmios ($r_{(t,T)}^{Focus}$).

Como ajuste final, a curva de futuros de DI (usada tanto para cálculo do prêmio como para estimação dos fatores de risco) é balizada pelos DIs de um dia (taxa overnight registrada na CETIP – Central de Custódia e Liquidação Financeira de Títulos), enquanto a pesquisa da Focus refere-se à Selic.

As duas taxas de curtíssimo prazo têm uma dinâmica muito próxima, mas operam com uma diferença entre elas (normalmente a Selic é mais alta do que o DI de um dia, embora sob certas condições de mercado essa relação possa se inverter). A diferença registrada no dia de apuração de cada curva foi incorporada para todos os vértices selecionados. Desta forma, o prêmio de risco para um vencimento T na data t foi dado por:

$$\pi_{(t,T)} = r_{(t,T)}^{Spot} - r_{(t,T)}^{Focus} + (DI1_t - Selic_t) \quad (35)$$

Para os fatores de risco foi usado um modelo de VaR histórico, com janela de 504 dias úteis e intervalo de confiança $\alpha = 0,99$. As expectativas de retorno e desvio absoluto de cauda e corpo (superiores e inferiores) foram dadas pelas relações (5) a (13), bem como a estimativa de assimetria de caudas. Como a estatística foi calculada sobre retornos de preços intradiários, os fatores de risco atendem a formulação dada em (27), e a forma da regressão a ser validada segue:

$$\tilde{\pi}_{(t,T)} = \lambda_1 \delta_{c(t,T)}^* + \lambda_2 \delta_{e(t,T)}^* + \lambda_3 \gamma_{e(t,T)}^* + \epsilon_{(t,T)} \quad (36)$$

A implantação da regressão linear acima, bem como suas variantes, será debatida na próxima sessão.

4.2 Regressão

A regressão foi efetuada diretamente contra níveis de prêmio, não em relação a diferenças – minimizando o problema de bases reduzidas citado por Bekaert *et al.* (2001) – com a inclusão de uma constante em (36) (note-se que a inclusão do intercepto, desde que seja o mesmo para todos os vértices, não invalida a relação de não arbitragem (22), apenas desloca o espaço admissível de preços de risco). A base de dados total foi segregada em sub-bases anuais, reduzindo problemas de não estacionariedade e heterocedasticidade temporais. Como temos uma dimensão espacial para a ETTJ, a análise de estacionariedade foi efetuada parametrizando o prêmio de risco em cada data t através de polinômios de Legendre, seguindo a forma funcional proposta por Almeida *et al.* (1998). A combinação dos três primeiros polinômios resulta na seguinte função para o prêmio:

$$\pi_t = a_0 + a_1 z + a_2 \frac{1}{2}(3z^2 - 1) + \epsilon_t \quad (37)$$

A variação dos coeficientes a_i (estimados a cada data por MQO) representa mudanças de nível, inclinação e torção da curva. A variável z é um mapeamento

de cada vencimento da estrutura a termo para o intervalo compacto $[-1, 1]$, através da transformação $z = \frac{2T}{T_f} - 1$. (T representa o vértice fixo selecionado e T_f o vértice terminal, de 1008 dias). A evolução dos coeficientes em cada sub-base foi submetida a um teste de raiz unitária, sumarizado na tabela abaixo:

Tabela 1
Teste de raiz unitária

Ano	N obs	P-values		
		a_0	a_1	a_2
2002	252	0,723	0,818	0,432
2003	250	0,016	0,004	0,059
2004	248	0,408	0,403	0,300
2005	249	0,416	0,309	0,342
2006	249	0,385	0,526	0,040
2007	250	0,800	0,859	0,356
2008	250	0,303	0,397	0,036
2009	247	0,448	0,719	0,118

Nota: Teste de Dickey-Fuller sobre um modelo AR sem tendência.

O teste indica não estacionariedade para os dois primeiros coeficientes no ano de 2003, em que o prêmio de risco sofreu uma forte queda passado o estresse de transição política. Também em 2006 e 2008 a estacionariedade do componente de torção da curva foi rejeitada pelo teste de raiz unitária.

Um problema adicional para a estimação de (36) foi a alta colinearidade encontrada entre o desvio absoluto de corpo e de cauda, que resultou em não significância do último para todos os períodos analisados, e sua exclusão da regressão.

Os lambdas (preços de risco que representam o vetor beta da regressão) a princípio não dependem nem de sua localização espacial (em função das condições de não arbitragem) nem temporal (pela suposta invariância de apreçamento de risco no tempo). Essas condições foram relaxadas em casos particulares, para uma avaliação mais detalhada da evolução da percepção de risco ao longo das duas dimensões citadas.

Cada sub-base anual teve o prêmio e o vetor de desvio e assimetria calculados diariamente para cada vértice, e posteriormente reduzidos a observações semanais (ainda para todos os vértices), selecionadas pontualmente. Lembrando que estamos realizando uma regressão endógena, a apuração do prêmio em cada semana foi realizada um dia após a atualização do desvio absoluto e da assimetria de caudas, evitando que as inovações fossem apropriadas contemporaneamente pelos regressores. A fórmula (36) na versão semanal (incluindo a constante para o ano i) toma a forma:

$$\tilde{\pi}_{(t,T)} = x'_{(t(d-1),T)} \beta_{(t,T)} + \epsilon_{(t,T)} \quad (38)$$

$$\beta'_{(t,T)} = [c_i \quad \lambda_{1(t,T)} \quad \lambda_{3(t,T)}] \quad (39)$$

$$x'_{(t(d-1),T)} = [1 \quad \delta_{c(t(d-1),T)}^* \quad \gamma_{e(t(d-1),T)}^*] \quad (40)$$

Com o subscrito t como indicador semanal, e $d - 1$ representando a diferença de um dia para dados observados em uma mesma semana.

O desvio e a assimetria foram atualizados até o fechamento de sexta feira (data imediatamente anterior à divulgação da pesquisa Focus), e a apuração do prêmio no fechamento do dia útil seguinte (segundas). Espaçamentos maiores poderiam capturar ruídos indesejados, principalmente se reuniões do Copom separassem as duas datas. Naturalmente, não só a pesquisa Focus altera a dinâmica da curva, mas a relação inversa também é verdadeira. O distanciamento de apenas um dia na apuração das métricas de risco e do prêmio minimiza o efeito de choques eventuais de curva sobre a percepção de mercado para a trajetória da taxa básica, mas requer testes adicionais de frequência de violações de cauda (Kupiec, 1998), e condicionalidade de violações (Christoffersen, 1998) – este último especialmente importante para a não contaminação da medida de assimetria. Os testes foram efetuados sobre a base total, com os seguintes resultados para cada razão de verossimilhança (LR não condicional, LR condicional e LR conjugada, soma das duas primeiras), usando a janela e intervalo de confiança escolhidos (99%, 504 dias):

Tabela 2
Validação das métricas de risco

N observações 990	Vértices									
	63	126	189	252	378	504	630	756	882	1008
Kupiec (LR nc)										
Cauda Inferior	1,16	5,32	2,79	0,27	1,16	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27
Cauda Superior	0,27	0,27	1,16	1,16	2,79	1,16	0,63	0,63	1,87	0,63
Christoffersen (LR c)										
Cauda Inferior	0,00	0,00	4,14	2,71	3,34	2,71	2,71	2,71	2,71	2,71
Cauda Superior	6,38	2,71	3,34	3,34	4,14	3,34	3,01	3,01	3,72	3,01
Conjugado (LR nc + LR c)										
Cauda Inferior	1,16	5,32	6,93	2,98	4,50	2,98	2,98	2,98	2,98	2,98
Cauda Superior	6,65	2,98	4,50	4,50	6,93	4,50	3,64	3,64	5,59	3,64

Nota: valor da distribuição qui-quadrada para significância de 5%: 1 GL = 3,84; 2 GL = 5,99

Em poucos vértices (particularmente no segmento curto da curva e para a cauda inferior de retornos) a hipótese de não condicionalidade das violações foi rejeitada, mas com valores aceitáveis dentro da especificação proposta para a regressão. A questão remanescente de correlação defasada entre as variáveis explicativas e as inovações do prêmio foi tratada com um processo iterativo de correção (vide Apêndice I).

Os fatores definidos em (40) apresentam correlação e heterocedasticidade espaciais e correlação temporal (autocorrelação). Para efetuarmos uma regressão da forma (38) precisamos corrigir o viés potencial dos estimadores. Algumas soluções apresentadas na literatura recente incluem a redução dos vértices fixos via parametrização de curva, trabalhando diretamente os coeficientes da forma

funcional escolhida (Diebold & Li, 2006). Essa aproximação foi descartada neste artigo, pois ao assumir uma função para a curva estaremos invariavelmente fixando alguns dos parâmetros que queremos exatamente estimar. Uma abordagem paralela (que pode ser combinada com a parametrização, ver Diebold *et al.* (2006)) seria a estimação dos regressores através de um processo evolutivo de espaço de estado. A aplicação de técnicas de VAR (vetores autoregressivos) usando vértices puros pode ser encontrada em Evans & Marshall (1998) e no âmbito local em Vereda *et al.* (2008). Essa abordagem também não foi usada no presente trabalho, por dois motivos: primeiro, o número de parâmetros a serem estimados eventualmente torna o modelo intratável, se não assumirmos algumas restrições que desejamos evitar. Segundo, a influência cruzada não contemporânea dos fatores de risco está fora do escopo desta pesquisa.

A correção do modelo acima foi efetuada usando a técnica de Generalização de Mínimos Quadrados, com estimação da matriz de covariância dos resíduos feita a posteriori por um algoritmo iterativo. Uma matriz de covariância de resíduos estimada a priori também poderia ser usada – por exemplo, corrigindo a série temporal por um modelo AR(1) e a série espacial sendo tratada com correlações dependendo da distância entre vértices e variâncias proporcionais aos respectivos vencimentos. No entanto, a idéia de assumir antecipadamente o menor número de premissas para a regressão prevaleceu, e o método de correção por observação de resíduos/estimação de covariância foi escolhido para a geração da estatística.

O sistema de equações de regressão de (38) foi organizado aproveitando a estrutura bidimensional dos dados, e aplicando técnicas de correção de *panel data*. Seguimos o modelo proposto por Parks (1967), combinado ao processo iterativo de Cochrane & Orcutt (1949). O modelo baseia-se em regressões por MQO para cada série histórica (no caso, cada vértice da curva), correção da evolução temporal através de um modelo AR(1) e obtenção dos resíduos para estimação da estrutura de covariância contemporânea. Os betas encontrados podem eventualmente realimentar uma nova regressão por MQO, com os resíduos sendo novamente usados para refinar a matriz de covariância total, em um processo iterativo de convergência. O detalhamento do algoritmo usado é apresentado no Apêndice I.

A regressão múltipla foi feita tanto assumindo betas constantes ao longo de toda a seção transversal (regressão restrita) como betas livres (regressão irrestrita). Os resultados da regressão irrestrita não foram reportados, servindo apenas para validar ou rejeitar a hipótese nula requerida pelas condições de não arbitragem. Seguem os resultados:

Tabela 3
Resultados da regressão

Ano	N obs. (N*V)	Médias		Coeficientes			Análise de resíduos				Hipótese n.a.*
		δ_e	γ_e	β_0 (const)	β_1 (λ_1)	β_2 (λ_3)	$D - W$	$K - S$	White	R^2 ajust	F-teste
2004	490	0,46%	-0,52%	0,31 (0,00)	3,57 (0,00)	-0,07 (0,46)	2,32	0 (0,04)	0 (0,83)	0,05	28,06 (0,00)
2005	510	0,24%	-0,41%	2,58 (0,00)	1,65 (0,00)	-0,23 (0,00)	2,15	0 0,54	0 0,73	0,76	5,73 (0,00)
2006	490	0,17%	-0,21%	0,59 (0,00)	6,12 (0,00)	-0,43 (0,05)	2,15	0 (0,85)	0 (0,87)	0,62	10,80 (0,00)
2007	500	0,12%	-0,22%	0,42 (0,00)	5,66 (0,00)	-1,14 (0,00)	2,07	1 (0,02)	0 (0,46)	0,32	5,53 (0,00)
2008	510	0,12%	-0,20%	-0,67 (0,53)	8,45 (0,00)	-2,68 (0,00)	1,98	0 (0,08)	1 (0,02)	0,29	22,49 (0,00)
2009	490	0,14%	-0,28%	0,39 (0,00)	7,15 (0,00)	1,13 (0,00)	1,95	0 (0,84)	0 (0,77)	0,72	14,43 (0,00)

Nota: * hipótese nula: $Beta1(t, T1) = Beta1(t, T2) = \dots = Beta1(t, Tv)$;
 $Beta2(t, T1) = Beta2(t, T2) = \dots = Beta2(t, Tv)$.

Alguns cuidados devem ser tomados na interpretação dos dados. O vetor final de resíduos na forma sugerida por Parks alinha e série temporal e a espacial em uma única dimensão. Para a validação de certas hipóteses, os resíduos devem ser reconduzidos a sua dimensão original. É o caso do teste de Durbin-Watson, que foi executado tanto para a seção cruzada quanto para a série histórica (incluída na tabela), indicando nesta última uma ligeira autocorrelação serial negativa de primeira ordem de 2004 a 2006. Os outros testes reportados foram o de White (em que a hipótese nula de homocedasticidade foi rejeitada apenas para o ano de 2007), e o de Kolmogorov-Smirnov, que rejeitou a hipótese de normalidade dos resíduos em 2008. Entretanto, a significância do teste e o tamanho da base tornaram imateriais os ajustes feitos nas estatísticas t e F dos estimadores. A estatística F reportada assumiu a hipótese nula de invariância dos betas 1,2 ao longo dos vencimentos da ETTJ (correspondendo à restrição a ser seguida pelas implicações de não arbitragem, com preços de risco constantes para cada fator), sendo rejeitada para todos os anos. Seria difícil esperar um resultado diferente, já que diversos elementos entram na composição do prêmio de risco, além dos estudados nesta pesquisa. Na regressão irrestrita, os preços de risco do desvio absoluto tiveram um peso acentuado nos vértices curtos, evoluindo para um regime mais estável no segmento médio/longo da curva. O preço de risco da assimetria se manteve relativamente estável ao longo de todos os vencimentos, exceto o primeiro (que está sob influência mais direta da condução monetária), em que teve seu valor significativamente reduzido.

Avaliando o poder explicativo da regressão, devemos lembrar que os fatores de desvio e assimetria de cauda foram calculados por um modelo de VaR histórico de 504 dias úteis, portanto sob uma janela com atraso médio de um ano em relação aos prêmios apurados. Seguindo a acentuada elevação dos juros em 2002, o processo de relaxamento monetário foi também surpreendentemente rápido, com o Banco Central em frequente desalinhamento com as expectativas dos agentes econômicos, realimentando a descontinuidade característica gerada por decisões não antecipadas pelo mercado (a hipótese de estacionariedade do prêmio foi rejeitada para 2003,

vide Tabela 1). A migração para um regime mais estável, a partir de 2004, coincide com o aumento do poder explicativo da regressão, evidenciado a partir de 2005. Um ponto a ser notado é a redução do R-quadrado ajustado em 2007 e 2008, possivelmente pela baixa frequência de movimentos extremos no ajuste de prêmio dos mercados frente à crise de crédito, resultando em uma evolução mais lenta dos fatores de risco atualizados pelo modelo histórico.

Os preços de risco para o desvio absoluto de corpo e assimetria de caudas mostraram-se significantes a partir de 2005, com uma evolução relativamente estável para o desvio absoluto, porém mais dinâmica para a assimetria. O preço da assimetria foi aumentando em uma proporção maior do que a redução do fator de risco correspondente, com seu valor máximo sendo atingido em 2008, ano crítico em que os agentes financeiros se posicionaram na expectativa de um choque defensivo de juros que não se materializou. Finalmente, em 2009 obtivemos um resultado inesperado: um preço de risco de assimetria significativa e positivo. Interpretar o seu significado requer cautela, mas podemos avaliar algumas possibilidades segregando a dimensão espacial da temporal na base estudada. Em 2009 as inovações na assimetria foram geradas primariamente por decisões de relaxamento monetário do Banco Central, muito mais do que por eventos de estresse na curva de juros. Em consequência, observamos o alongamento dos vértices negociados na ETTJ e um prêmio muito baixo no seu segmento médio (dois a três anos). Inspeccionando a figura 2, verificamos uma estrutura de prêmios ao longo dos vértices em alguns momentos invertida no segmento médio – formato comum para a curva à vista, mas bastante raro para a dinâmica de prêmios, e não capturado totalmente pelo modelo de estimação dos fatores de risco, dada a sua inércia natural já mencionada. Além disso, a evolução temporal do prêmio evidenciou uma mudança de foco dos investidores, em que os temores com um possível aperto monetário defensivo foram substituídos pela preocupação com os efeitos inflacionários de um processo de estímulo que levou a taxa básica a níveis potencialmente mais baixos do que os considerados macroeconomicamente “neutros” pelo mercado. Essa mudança de percepção marca uma transição importante na relação dos agentes econômicos com o Banco Central, e sua leitura do modo operacional da Autoridade Monetária.

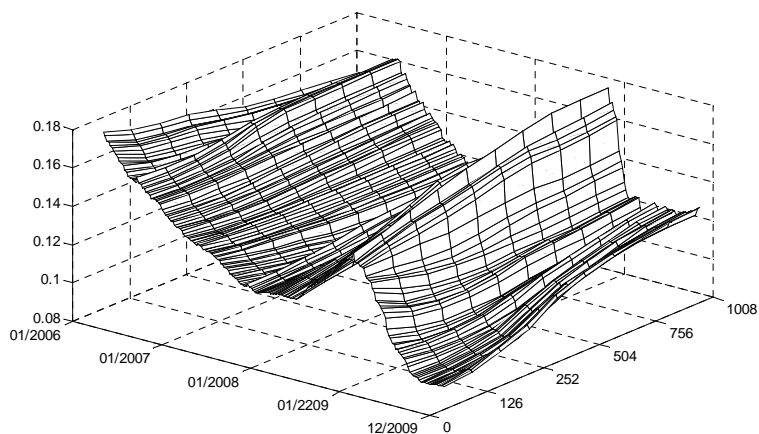


Figura 1
Evolução da curva à vista

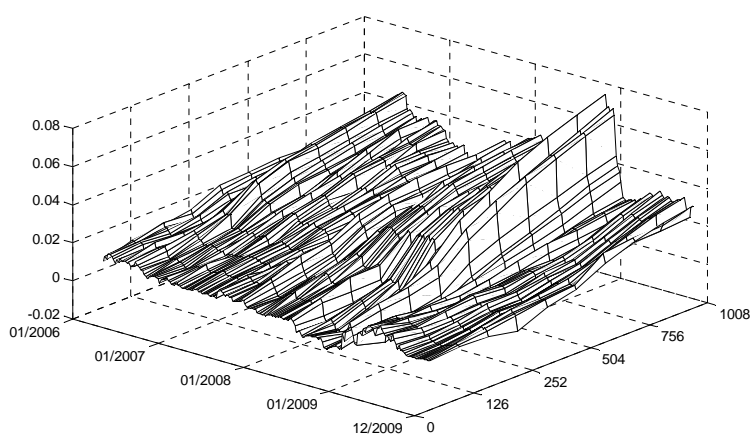


Figura 2
Evolução do prêmio de risco

5. Conclusões

O prêmio de risco de uma curva em processo de amadurecimento depende fundamentalmente da percepção dos agentes financeiros em relação à condução da política monetária e de particularidades do mercado local, como condições de liquidez e posicionamento dos investidores. Historicamente, até 2002 o Banco Central brasileiro combateu crises de confiança com elevação das taxas de juros,

gerando uma assimetria conhecida na determinação da taxa básica, apropriada parcialmente nas funções de resposta do mercado de renda fixa. Assim, ciclos de aversão a risco foram recebidos com movimentos característicos de elevação dos futuros de juros, espelhando a dinâmica decisória esperada em relação à autoridade monetária. Esses movimentos foram eventualmente amplificados por condições de liquidez heterogêneas e fragilidade técnica dos investidores, gerando processos de *stop-loss* em cadeia. Com a gradativa melhora dos indicadores de solvência do país (e a menor necessidade de elevação de juros para retenção de fluxo estrangeiro), o mercado local aparentemente entrou em uma variante do “*peso problem*”, em que o desconforto em relação a posições vendidas em juros permaneceu, apesar das condições mais benignas para implantação da política monetária. Uma quebra de paradigma aconteceu em 2008/2009, com o Banco Central respondendo ao risco recessivo com medidas de relaxamento monetário, em vez da esperada contração em momentos de aversão a risco. A evolução da assimetria de resposta a cenários divergentes deveria se refletir de alguma forma na formação de prêmios da ETTJ, e o objetivo desta pesquisa foi buscar evidências estatísticas que respeitassem as condições de arbitragem impostas pela dinâmica conjugada da curva.

A incorporação da assimetria e momentos de ordem superior na composição do prêmio de risco pode ser útil tanto na gestão de riscos quanto em processos de alocação ativa e parametrização de curva. Como exemplo, podemos tomar as figuras 3 e 4, que mostram a evolução da volatilidade de taxas e o comportamento da assimetria padronizada pelo desvio de cauda (com sinal trocado, para facilitar a comparação com a dinâmica de taxas), representada por $\gamma_n = -\gamma_e/\delta_e$. O gráfico de assimetria foi suavizado por uma média móvel atrasada de 252 dias. As figuras indicam que a volatilidade de taxas é uma função crescente ao longo dos vencimentos considerados, enquanto a assimetria normalizada apresenta um ponto de máximo local entre os vencimentos de um e dois anos. Modelos de ajuste de curva que usem funções com decaimento para médias de longo prazo - exemplo clássico, Nelson & Siegel (1985) – geralmente são de difícil estimação quando transpostos para o contexto local, tanto pela volatilidade crescente da curva quanto pela ausência de uma taxa histórica de equilíbrio que guie a migração de longo prazo. Com alguma liberdade de interpretação, a locação do decaimento no modelo de Nelson e Siegel segrega a curva em duas zonas de influência: o segmento ligado à condução imediata de política monetária, e o segmento ditado por condições de equilíbrio macroeconômico de longo prazo. O estudo dinâmico da curva – por exemplo, através de Análise de Componentes Principais, mapeamento de liquidez, ou explorando momentos de ordem superior (nosso caso) – pode fornecer resultados úteis na busca do horizonte de visibilidade do mercado. Considerando a significância da assimetria na formação do prêmio de risco brasileiro, seu ponto de inflexão poderia ser usado como auxiliar na indicação do parâmetro de locação e decaimento para modelos da classe N-S aplicados à curva local.

Finalmente, o estudo realizado não foi direcionado para modelos preditivos de curva. A dinâmica do preço de risco da assimetria foi analisada historicamente, e

seu peso deve continuar a se modificar junto com a evolução do mercado de renda fixa brasileiro. Entender as origens de algumas funções de resposta específicas dos agentes locais pode facilitar a abordagem de problemas eventualmente não compartilhados por outras economias, que reduzem a eficiência do sistema financeiro e elevam o custo país.

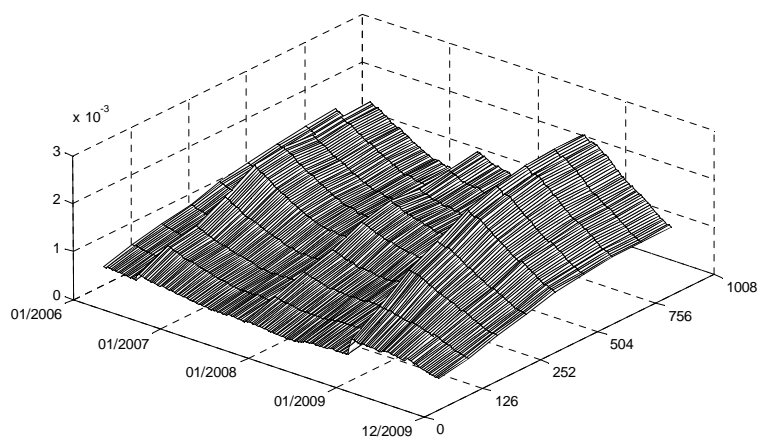


Figura 3
Evolução da volatilidade de taxas

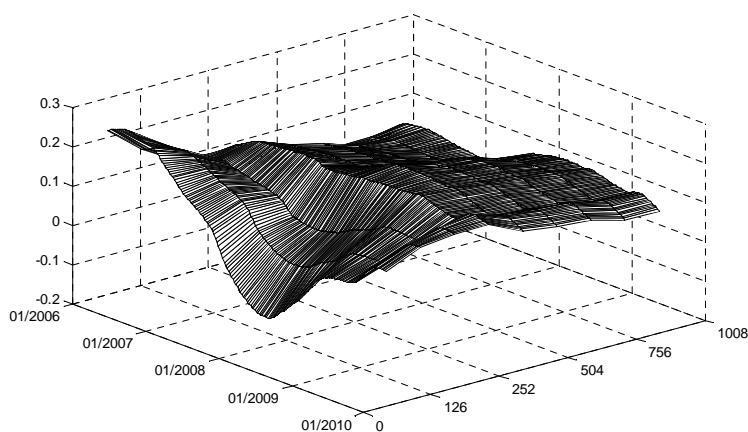


Figura 4
Evolução da assimetria padronizada

Apêndice I

Especificação da Regressão

Considerando um sistema de V equações de regressão (sendo V o número de vértices fixos escolhidos da ETTJ) com $t = 1 \dots N$ observações temporais, podemos representar a i -ésima equação na forma:

$$y_i = X_i \beta_i + u_i \quad (\text{A.1})$$

onde y_i é um vetor $N \times 1$ de observações da i -ésima variável dependente, X_i é uma matriz $N \times k_i$ observações de k_i variáveis independentes (no caso presente três: constante, desvio de corpo e assimetria de caudas), β_i é um vetor $k_i \times 1$ de coeficientes de regressão desconhecidos e u_i é um vetor de ruído (média zero) com dimensão $N \times 1$.

Podemos descrever o sistema completo de V equações por $y = X\beta + u$, ou:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_V \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Assumindo que u_i na equação (A.1) siga uma processo autoregressivo estacionário de primeira ordem:

$$u_{it} = \rho_i u_{it-1} + \epsilon_{it} \quad (\text{A.3})$$

E especificando o valor inicial de u_i :

$$u_{i1} = (1 - \rho_i^2)^{-\frac{1}{2}} \epsilon_i \quad (\text{A.4})$$

Podemos reescrever (A.1) como:

$$y_i = X_i \beta_i + P_i \epsilon_i \quad (\text{A.5})$$

onde $E[\epsilon_i] = 0$; $E[\epsilon_i \epsilon_i'] = \sigma_{ii} I$ e P_i é dada por:

$$P_i = \begin{bmatrix} (1 - \rho_i^2)^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \rho_i (1 - \rho_i^2)^{-\frac{1}{2}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \rho_i^2 (1 - \rho_i^2)^{-\frac{1}{2}} & \rho_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ \rho_i^{N-1} (1 - \rho_i^2)^{-\frac{1}{2}} & \rho_i^{N-2} & \rho_i^{N-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

O sistema (A.2) fica:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_V \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Regredindo por MQO (A.1) e (A.3), podemos encontrar o estimador $\hat{\rho}_i$, que fornece a estrutura para cada matriz \hat{P}_i . Tratado o problema de autocorrelação temporal, a matriz de covariância contemporânea Σ_c pode ser estimada através da regressão transformada:

$$\hat{P}_i^{-1} y_i = \hat{P}_i^{-1} X_i \beta_i + \hat{P}_i^{-1} P_i \epsilon_i \quad (\text{A.8})$$

Equivalente a:

$$y_i^* = X_i^* \beta_i + \epsilon_i^* \quad (\text{A.9})$$

Encontrados os resíduos por MQO de (A.9), cada elemento s_{ij} de $\hat{\Sigma}_c$ é dado por:

$$s_{ij} = \frac{(y_i^* - X_i^* \hat{\beta}_i)' (y_j^* - X_j^* \hat{\beta}_j)}{(N - k_i)^{\frac{1}{2}} (N - k_j)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{A.10})$$

E a matriz de covariância total, corrigida temporal e espacialmente, é estimada pela relação (usando \otimes como operador do produto de Kronecker):

$$\hat{\Omega} = \hat{P} (\hat{\Sigma}_c \otimes I) \hat{P}' \quad (\text{A.11})$$

onde \hat{P} é a matriz diagonal em blocos de \hat{P}_i , com dimensão $VN \times VN$.

Finalmente, o vetor de betas de (A.2) é dado por:

$$\hat{\beta} = (X' \hat{\Omega}^{-1} X)^{-1} X' \hat{\Omega}^{-1} y \quad (\text{A.12})$$

No caso da regressão restrita, para atender às condições de não arbitragem foram feitas as simplificações necessárias ao modelo acima, impondo $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_V$. Os resíduos da regressão final restrita e irrestrita geraram a estatística F para o teste de hipótese da tabela 3.

O modelo de Parks foi questionado por Beck & Katz (1995), sob o argumento de que a correção em dois tempos leva a uma propagação de erros que pode comprometer a estatística dos estimadores. As objeções levantadas valem particularmente para quadros em que a dimensão espacial das observações se aproxima da dimensão temporal (comum em panels geopolíticos, por exemplo). No caso da curva de juros, a relação entre N e V nas sub-bases usadas é de 5/1 aproximadamente, uma razão que sustenta a eficiência da estimação.

O problema da correlação defasada entre fatores de risco e inovações do prêmio foi abordado através de um algoritmo iterativo, seguindo o processo sugerido por Cochrane & Orcutt (1949) para o caso unidimensional. A regressão final usando o vetor beta encontrado em (A.12) gera novos resíduos que podem realimentar as etapas de estimação da matriz de covariância total a partir de (A.3), em um processo numérico de refinamento. Betancourt e Kelejian (1981) observam que o algoritmo utilizado, mesmo na presença de endogeneidade defasada, converge para um valor de máximo local da função de verossimilhança dos estimadores. Testando diferentes parâmetros iniciais de correlação temporal, podemos obter o máximo global de verossimilhança, estimador consistente dos betas. Na implementação prática, o processo de parametrização inicial (A.1 a A.4) se mostrou suficiente para a convergência global dos estimadores (usando a invariância da segunda casa decimal como sinalizador de saída), obtida geralmente após seis a dez iterações. O estimador dos betas, embora consistente, não possui as mesmas propriedades assintóticas de um modelo puramente exógeno, e particularmente no caso de estruturas de panel data, suas métricas de eficiência ainda constituem uma frente aberta de pesquisa na literatura corrente.

Referências

- Almeida, Caio, & Vicente, José. 2008. The Role of No-Arbitrage on Forecasting: Lessons from a Parametric Term Structure Model. *Journal of Banking & Finance*, **32**, 2695–2705.
- Almeida, Caio, Duarte, Antonio, & Fernandes, Cristiano. 1998. Decomposing and Simulating the Movements of Term Structures in Emerging Eurobonds Markets. *Journal of Fixed Income*, **8**, 21–31.
- Almeida, Caio, Gomes, Romeu, Leite, André, & Vicente, José. 2007. *Does Curvature Enhance Forecasting?* Banco Central do Brasil, Working Paper 155.
- Beck, Nathaniel, & Katz, Jonathan N. 1995. What to Do (and Not to Do) with Time-Series Cross-Section Data. *American Political Science Review*, **89**, 634–647.
- Bekaert, Geert, Hodrick, Robert, & Marshall, David A. 2001. Peso Problem Explanations for Term Structure Anomalies. *Journal of Monetary Economics*, **48**, 241–270.
- Black, Fischer, & Scholes, Myron. 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, **81**, 637–654.
- Brito, Ricardo, Duarte, Angelo, & Guillén, Osmani. 2004. Overreaction of Yield Spreads and Movements of Brazilian Interest Rates. *Brazilian Review of Economics*, **24**, 1–55.

- Campbell, John Y., & Shiller, Robert J. 1991. Yield Spreads and Interest Rate Movements: A Bird's Eye View. *Review of Economic Studies*, **58**, 495–514.
- Christoffersen, Peter F. 1998. Evaluating Interval Forecasts. *International Economic Review*, **39**, 841–862.
- Cochrane, Donald, & Orcutt, Guy H. 1949. Application of Least Squares Regression to Relationships Containing Autocorrelated Error Terms. *Journal of the American Statistical Association*, **44**, 32–61.
- Cochrane, John, & Piazzesi, Monika. 2005. Bond Risk Premia. *American Economic Review*, **95**, 138–160.
- Cook, Timothy, & Hahn, Thomas. 1990. Interest Rate Expectations and the Slope of the Money Market Yield Curve. *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Review*, **76**, 3–26.
- Cuthbertson, Keith. 1996. The Expectations Hypothesis of the Term Structure: The UK Interbank Market. *Economic Journal*, **106**, 578–592.
- Dai, Qiang, & Singleton, Kenneth. 2002. Expectations Puzzles, Time-Varying Risk Premia and Affine Models of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, **63**, 415–441.
- Diebold, Francis X., & Li, Canlin. 2006. Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields. *Journal of Econometrics*, **130**, 337–364.
- Diebold, Francis X., Rudebusch, Glenn D., & Aruoba, Boragan A. 2006. The Macroeconomy and the Yield Curve: A Dynamic Latent Factor Approach. *Journal of Econometrics*, **131**, 309–338.
- Evans, Charles L., & Marshall, David A. 1998. Monetary Policy and the Term Structure of Nominal Interest Rates: Evidence and Theory. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, **49**, 53–111.
- Gerlach, Stefan, & Smets, Frank. 1997. The Term Structure of Euro-Rates: Some Evidence in Support of the Expectations Hypothesis. *Journal of International Money and Finance*, **16**, 305–321.
- Guillen, Osmani, & Tabak, Benjamin. 2008. *Characterizing the Brazilian Term Structure of Interest Rates*. Banco Central do Brasil, Working Paper 158.
- Harrison, Michael, & Kreps, David M. 1979. Martingales and Arbitrage in Multi-period Securities Markets. *Journal of Economic Theory*, **20**, 381–408.
- Harrison, Michael, & Pliska, Stanley R. 1981. Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. *Stochastic Processes and their Applications*, **11**, 215–260.

- Heat, David, Jarrow, Robert, & Morton, Andrew. 1990. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **25**, 419–440.
- Kupiec, Paul. 1998. Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models. *Journal of Derivatives*, **2**, 73–84.
- Laurini, Marcio, & Hotta, Luiz. 2007. *Extensões Bayesianas Do Modelo de Estrutura a Termo de Diebold e Li*. IBMEC, Working Paper 40.
- Leite, André, Gomes, Romeu, & Vicente, José. 2009. *Previsão Da Curva de Juros: Um Modelo Estatístico Com Variáveis Macroeconômicas*. Banco Central do Brasil, Working Paper 186.
- Markowitz, Harry. 1952. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, **7**, 77–91.
- Merton, Robert C. 1973. Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, 141–183.
- Nelson, Charles R., & Siegel, Andrew F. 1985. Parsimonious Modeling of Yield Curves. *Journal of Business*, **60**, 473–489.
- Parks, Richard. 1967. Efficient Estimation of a System of Regression Equations When Disturbances are Both Serially and Contemporaneously Correlated. *Journal of the American Statistical Association*, **62**, 500–509.
- Sharpe, William. 1964. Capital Asset Prices - a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *Journal of Finance*, **XIX**, 425–42.
- Sola, Martin, & Driffill, John. 1994. Testing the Term Structure of Interest Rates Using a Stationary Vector Autoregression with Regime Switching. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 601–628.
- Vereda, Luciano, Lopes, Hélio, & Fukuda, Regina. 2008. Estimating VAR Models for the Term Structure of Interest Rates. *Insurance: Mathematics and Economics*, **42**, 548–559.
- Vicente, José, & Tabak, Benjamin. 2008. *Forecasting Bond Yields in the Brazilian Fixed Income Market*. Banco Central do Brasil, Working Paper 141.