Calibração do Modelo de Heston para o Mercado Brasileiro de Opções de Câmbio (FX)

Marcelo Nóbrega da Costa^{1*}

Joe Akira Yoshino^{1,†}

Resumo

Apesar dos recentes avanços na indústria de derivativos, o mercado de opções européias de câmbio ainda utiliza modelos simples como Black (1976) ou Garman e Kohlhagen (1983). Estes modelos "escondem" alguns efeitos quantitativos importantes que podem ser melhor explorados através de modelos mais robustos como o que incorpora a volatilidade estocástica. Entender e calibrar este tipo de modelo representa um desafio no "estado da arte" da engenharia financeira, especialmente em países emergentes caracterizados por fortes volatilidades, mudanças de regimes periódicas e que em muitos casos, apresentam mercados ilíquidos em épocas de crises. Neste contexto, este artigo mostra como implementar o modelo de Heston para o mercado brasileiro de opções européias de câmbio. A calibração do modelo é feita utilizando-se uma matriz de volatilidades implícitas de um grupo de Bancos que atuam de forma efetiva no mercado local. Embora o modelo de Heston apresente uma solução analítica fechada – que não requer uso de simulação numérica –, a forma final do modelo apresenta algumas complexidades matemáticas. Assim, o objetivo deste trabalho é implementar o modelo para o mercado brasileiro de opções européias de câmbio.

Abstract

Despite the relatively recent advance in the derivative industry, the European FX option market uses simple models such as Black (1976) or Garman and Kohlhagen (1983). This widespread practice "hides" very important quantitative effects that could be better explored by using alternative pricing models such as the one that incorporates the stochastic volatility features. Understanding and calibrating this type of pricing model represents a challenge in the current "state of art" in financial engineering, especially in emerging markets that are characterized by strong volatilities, periodic changing regimes and in most cases suffering of liquidity, especially during the crisis. In this sense, this paper shows how to implement the Heston's Model for the Brazilian FX option market. This approach uses the volatility matrix provided by a pool of domestic market players. Although the Heston's Model presents a formal analytical solution – it does not require simulation –, the closed form solutions show a mathematical complexity. Thus, the main objective of this work is to implement this model in the Brazilian FX market.

Palavras-chave: Heston's model; stochastic volatility; FX derivatives.

Códigos JEL: G13; C63; F34.

Submetido em Setembro de 2003. Revisado em Junho de 2004.

*Mestre em Modelagem Matemática em Finanças (FEA/IME-USP). Graduado em Engenharia Mecânica-Aeronáutica (ITA) e Gerente de Riscos de Mercado do Dresdner Bank do Brasil.

†Ph.D em Economia (Universidade de Chicago), Professor do Departamento de Economia da FEA-USP e do Mestrado Profissionalizante FEA-IME: Modelagem Matemática em Finanças.

1. Introdução

Os modelos mais populares para o apreçamento de opção de câmbio são Black (1976) e Garman e Kohlhagen (1983). Tratam-se de versões adaptadas do famoso modelo B-S (Black-Scholes) de ações para o mercado de FX (foreign exchange rate). Estes modelos assumem que a volatilidade do ativo objeto é constante. Contudo, as evidências empíricas mostram que tal hipótese não é corroborada na prática. Esta simplificação estimulou pesquisas adicionais que poderiam ser classificadas como:

- Modelos de difusão univariada. Esta abordagem manteve os fundamentos tanto da difusão como da não-arbitragem do modelo de B-S, mas relaxou a hipótese de movimento browniano geométrico. Como exemplos, tem-se o modelo de variância com elasticidade constante de Cox e Ross (1976), os modelos de alavancagem de Geske (1979), Rubinstein (1983). Estes modelos são também discutidos em Cox et alii (1985b); e os modelos de árvores binomiais e trinomiais implícitas;
- Modelos de volatilidade estocástica. Permitem que a volatilidade instantânea de retorno dos ativos mude estocasticamente no tempo – tipicamente como um processo de difusão –, mas possivelmente como uma mudança de regime tais como em Naik e Lee (1993) ou como processo de difusão com saltos como em Duffie et alii (2000). Uma outra vantagem dos modelos com volatilidade estocástica seria incorporar os efeitos do “sorriso” e da “assimetria”; e
- Os modelos de saltos. Merton (1973) relaxa a hipótese de difusão nos preços dos ativos.

Alguns autores como Stein e Stein (1991), Heston (1993), Bates (1996) e Bakshi et alii (1997) – sugeriram o uso de transformada de Fourier para a obter a função densidade de probabilidade do retorno do ativo objeto. Na época, já existiam modelos para apreçar opções sob processos de volatilidade estocástica que recorriam ao uso da simulação Monte Carlo como em Scott (1987), ou a abordagem de diferença-finita de Wiggins (1987), Hull e White (1987, 1988). Na prática, a transformada de Fourier é substancialmente mais eficiente e pode ser aplicada para múltiplos tipos de riscos, tais como, volatilidade estocástica, saltos, taxas de juros e taxas de câmbio estocásticas etc. Uma excelente pesquisa sobre árvores binomiais estocásticas pode ser encontrado em Skiadopoulos e Hodges (2000). Melino e Turnbull (1991) defendem que o modelo com volatilidade estocástica é bem-sucedido para explicar o preço das opções de câmbio para alguns mercados do G-7. No caso brasileiro, Cunha Jr. e Lemgruber (2003) testam o modelo de apreçamento de opções de câmbio sob hipótese de juro estocástico.

Os trabalhos citados acima apresentam uma grande desvantagem por não apresentarem uma solução analítica e requererem assim o uso de técnicas de métodos

numéricos para a resolução de equações diferenciais parciais bidimensionais. Stein e Stein (1991) e Heston (1993) foram os responsáveis por tratar este problema de forma analítica.

Este trabalho tem como objetivo apresentar um modelo de volatilidade estocástica generalizado que foi proposto inicialmente por Heston (1993) e realizar uma calibração deste modelo para sua utilização ao mercado de opções européias de câmbio R\$/USD. O trabalho utiliza o modelo de Garman-Kohlhagen como o modelo de referência para se extrair os preços de mercado que estão implícitos na matriz de volatilidade da Reuters.¹ O processo de calibração consiste na minimização dos erros quadráticos entre os preços de mercado e os preços extraídos com o uso da fórmula de Heston.

O modelo de Heston foi escolhido dentre os vários modelos de apreçamento com volatilidade estocástica devido à sua relativa simplicidade em termos de implementação e por apresentar uma forma analítica. Isto dispensa o uso de métodos numéricos mais sofisticados para a solução das equações diferenciais parciais.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção 2 é feita uma breve apresentação do modelo de Heston. Na Seção 3 é feita uma descrição dos dados de mercado utilizados. Nas Seções 4 e 5 são abordados os passos seguidos no processo de calibração do modelo. Finalmente, nas Seções 6 e 7 são apresentados os resultados da calibração do modelo de Heston e feitas as conclusões do trabalho. No Apêndice I, é feita uma abordagem sobre o prêmio para a estocasticidade da volatilidade do modelo de Heston. Finalmente, no Apêndice II são descritos os efeitos de curtose devido a volatilidade da volatilidade (σ) e de assimetria devido a correlação entre os retornos do ativo objeto e sua variância (ρ) sobre a FDP (função densidade de probabilidade) dos retornos do ativo-objeto.

2. O Modelo de Heston Generalizado Para Opções de Câmbio

O Modelo de Heston para opções de câmbio assume que o preço do ativo-objeto (S) no tempo t segue o processo de difusão dado por ²

$$dS(t) = (r_d - r_f) S dt + \sqrt{v(t)} S dz_1(t) \quad (1)$$

onde $z_1(t)$ é um processo de Wiener; $v(t)$ é a variância; r_d é a taxa de juros livre de risco em Reais; e r_f é a taxa de juros livre de risco em USD. Estas taxas são consideradas não-estocásticas. A volatilidade segue o chamado processo de O-U (Ornstein-Uhlenbeck), conforme Heston (1993:328), Equação 2. Esta equação pode ser reescrita de uma forma mais familiar do processo da raiz quadrada;³

$$dv(t) = k [\theta - v(t)] dt + \sigma \sqrt{v(t)} dz_2(t) \quad (2)$$

¹Para descrição detalhada da Matriz de Volatilidade da Reuters vide Seção 3.1.

²Heston (1993) inicialmente aborda o modelo de forma genérica e depois ele generaliza para o mercado de opções de câmbio e títulos.

³Esta equação de difusão foi utilizada por Cox et alii (1985a). Para um estudo mais detalhado dos parâmetros da equação vide Fouque et alii (2000).

onde o processo estocástico do ativo-objeto $z_2(t)$ apresenta uma correlação ρ com o processo estocástico da sua variância $z_1(t)$. Na Equação 2 pode-se notar que este processo de difusão da volatilidade de curto-prazo apresenta o parâmetro θ que define a variância de longo prazo. O parâmetro k descreve a velocidade de reversão à média da variância de curto-prazo (v) em direção da variância de longo prazo (θ). Ademais, σ explica a volatilidade da volatilidade.

O modelo de Heston procura fazer com que o processo estocástico que descreve a evolução do preço do ativo seja estacionário. Dada a hipótese de que as taxas de juros não são estocásticas, os preços no tempo t de uma unidade de uma dívida "livre de risco" descontado nas respectivas moedas doméstica (Real) e estrangeira (USD) e que tem vencimento em $t + \tau$ são dados por

$$P(t, t + \tau) = e^{-r_d \tau}$$

$$F(t, t + \tau) = e^{-r_f \tau}$$

As hipóteses utilizadas até aqui ainda são insuficientes para apreçar o derivativo porque ainda não foram tomadas as hipóteses que abordam o prêmio de risco da volatilidade.⁴ Seguindo os argumentos de não-arbitragem de Black e Scholes (1973) e Merton (1973) demonstra-se que o valor do derivativo $U(s, v, t)$ deve satisfazer a equação diferencial parcial abaixo:⁵

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho \delta v S \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \delta^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + (r_d - r_f) S \frac{\partial U}{\partial S} \\ + \{k[\theta - v(t)] - \lambda(S, v, t)\} \frac{\partial U}{\partial v} - r_d U + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

O termo acima $\lambda(S, v, t)$ representa o prêmio de risco da volatilidade e que deve ser independente do ativo-objeto considerado.⁶ Uma opção européia de compra com preço de exercício K e vencimento em T satisfaz a EDP anterior sujeita às condições de contorno.⁷ Por analogia ao modelo de Garman-Kohlhagen (G-K), sugere-se a solução na forma

$$C(s, v, t) = S.F(t, T).P_1 - K.P(t, T).P_2 \quad (4)$$

⁴O Apêndice I apresenta uma abordagem sobre a modelagem o prêmio de risco da volatilidade e deduz a Equação 3.

⁵Observe que tomando-se $v(t) = \sigma^2$ constante encontra-se a equação diferencial de Garman e Kohlhagen (1983).

⁶Lamoureux e Lastrapes (1993) apresentam evidências de que esse termo não é zero para opções de câmbio.

⁷As condições de contorno são dadas por: $U(S, v, T) = \max(0, S - K)$, $U(0, v, t) = 0$, $\frac{\partial U}{\partial S}(\infty, v, t) = e^{-r_f \tau}$, $U(S, \infty, t) = S e^{-r_f \tau} (r_d - r_f) S \frac{\partial U}{\partial S}(S, 0, t) + k \theta \frac{\partial U}{\partial v} - r_d U(S, 0, t) + U_t(S, 0, t) = r_d U(S, 0, t)$

onde o primeiro termo significa o valor presente do ativo-objeto no exercício, e o segundo termo é o valor presente do pagamento do preço de exercício. Ambos os termos devem satisfazer a EDP original que é dada pela Equação 3.

O Modelo de Heston também assume a log-normalidade do preço do ativo-objeto de tal forma que é conveniente transformá-lo em uma variável normal x , onde

$$x = \ln \frac{S \cdot F(t; T)}{P(t; T)} = \ln \left(S e^{(r_f - r_d)\tau} \right) \quad (5)$$

Substituindo-se a solução proposta (Equação 4) na EDP (Equação 3) e isolando-se os termos em K , mostra-se que P_1 e P_2 devem satisfazer a EDP abaixo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v \frac{\delta^2 P_j}{\delta x^2} + \rho \delta v \frac{\delta^2 P_j}{\delta x \delta v} + \frac{1}{2} \delta^2 v \frac{\delta^2 P_j}{\delta v^2} + (r + u_j v) \frac{\delta P_j}{\delta x} \\ + (a_j - b_j v) \frac{\delta P_j}{\sigma v} + \frac{\delta P_j}{\delta t} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

onde para $j = 1, 2$ valem as seguintes identidades

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}, a = k\theta, b_1 = k + \lambda - \rho\sigma, b_2 = k + \lambda$$

Reescrevendo a condição de contorno terminal em T sobre $C(S, v, t)$ (Equação 4), em termos das condições de contorno de P_1 e P_2 , obtém-se uma condição de contorno terminal para as funções de probabilidade:

$$P_j(x, v, T) = 1_{\{x \geq \ln[K]\}} \quad (7)$$

Esta equação pode ser reescrita na forma de uma probabilidade condicional onde a opção expira "in-the-money"

$$P_j(x, v, T; \ln[K]) = \Pr[x(T) \geq \ln[K] | x(t) = x, v(t) = v] \quad (8)$$

As probabilidades acima não estão disponíveis imediatamente numa fórmula fechada e por isso é necessário o uso de funções características para determiná-las.

Heston demonstra que as *funções características*, $f_1(x, v, T; \phi)$ e $f_2(x, v, T; \phi)$ respectivamente satisfazem a mesma EDP (Equação 6), sujeitas à seguinte condição terminal.⁸

$$f_j(x, v, T; \phi) = e^{i\phi x} \quad (9)$$

A solução da função característica é dada por

$$f_j(x, v, T; \phi) = e^{C(T-t; \phi) + D(T-t; \phi)v + i\phi x} \quad (10)$$

⁸ A demonstração utiliza-se do lema de Itô para f_j e assume-se também que é um Martingale (método das esperanças iteradas).

onde $C(\tau; \phi) = r_d \phi i \tau + \frac{a}{\sigma^2} \left((b_j - \rho \sigma \phi i + d) \tau - 2 \ln \left[\frac{1 - g e^{d\tau}}{1 - g} \right] \right)$

$$D(\tau; \phi) = \frac{b_j - \rho \sigma \phi i + d}{\sigma^2} \left[\frac{1 - e^{d\tau}}{1 - g e^{d\tau}} \right] \quad (11)$$

$$g = \frac{b_j - \rho \delta \phi i + d}{b_j - \rho \delta \phi i - d}$$

$$d = \sqrt{(\rho \delta \phi i - b_j)^2 - \delta^2 (2u_j \phi i - \phi^2)}$$

Pode-se inverter as funções características utilizando a transformada inversa de Fourier para se obter as probabilidades desejadas:

$$P_j(x, v, T; \ln[K]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln[K]} f_j(x, v, T; \phi)}{i\phi} \right] d\phi \quad (12)$$

Assim, com as Equações 12, 10 e 8, pode-se determinar o preço de uma opção europeia de compra. Para as opções de venda, o desenvolvimento é análogo mudando-se somente as condições de contorno da EDP inicial do problema.

O Apêndice II ilustra os efeitos da correlação ρ e da volatilidade da volatilidade σ na FDP (função de densidade de probabilidade) dos retornos do ativo-objeto, no caso o dólar à vista.

3. Descrição dos Dados

Os dados foram coletados para as cotações de fechamento entre as datas de 02/09/2002 e 05/03/2003. Foram utilizadas várias séries temporais que são descritas a seguir.

3.1. Volatilidade implícita das opções de câmbio R\$/USD

A matriz de volatilidade da Reuters é publicada diariamente como uma referência das volatilidades implícitas no fechamento do mercado de opções de câmbio R\$/USD. O pool é formado pelas instituições financeiras que participam efetivamente deste mercado. Os dados refletem o mercado doméstico para as opções de câmbio. A matriz está formatada para diferentes prazos: 1M, 2M, 3M, ..., 12M. Onde 1M significa o próximo vencimento dos contratos futuros de R\$/USD da BM&F, 2M representa o segundo vencimento e assim por diante até o 12º vencimento. Assim, existem "vértices" mensais até o horizonte de um ano. A matriz também é dividida por diferentes valores de "deltas forward" ou para os valores de 10%, 25%, 37%, 50%, 63%, 75% e 90%.⁹

⁹O delta para opções de câmbio é dado por $\Delta = \frac{\delta C}{\delta S} = e^{-r_f \tau} N(d_1)$ onde $N(d_1)$ é o delta forward. Para os prazos e os "deltas-forward" acima, a matriz está particionada em volatilidades para valores de BID (compra) e ASK (venda). Na calibração considerou-se somente os preços médios dos valores de compra e venda.

3.2. Taxas de juros pré-fixadas em Reais (PRÉ)

Com base nos prazos definidos na matriz de volatilidade foram consideradas as respectivas taxas de juros pré-fixadas em reais (moeda doméstica). Para isto, foram utilizados os preços de ajuste dos contratos de DI futuro da BM&F e a taxa CDI publicada pela CETIP.¹⁰

3.3. Taxas de juros doméstica pré-fixadas em USD (cupom cambial)

De forma análoga à descrita acima são definidas as taxas de juros para a moeda estrangeira como a taxa de juros doméstica e pré-fixada em USD que é chamada de cupom cambial. Neste caso, existe um passo a mais no processo de construção da curva que seria a limpeza no cupom cambial "sujo". Para maiores detalhes sobre cupons limpo e sujo, vide Lemgruber (1999).

3.4. Preço de fechamento spot de câmbio R\$/USD

Este preço será utilizado como o preço do ativo-objeto das opções na calibração do modelo. Daí a importância de se trabalhar com as taxas de cupom cambial "limpas" conforme descrito acima. A fonte de dados utilizados no fechamento do spot de câmbio R\$/USD é a BM&F.

4. Determinação dos valores iniciais para os parâmetros do modelo de Heston utilizando o estimador econométrico GMM.

Na equação de difusão da variância do Modelo de Heston conforme a Equação 2, três dos cinco parâmetros estão explícitos: velocidade de reversão à média (k), variância de longo prazo (θ) e a volatilidade da volatilidade (σ). Os valores iniciais destes parâmetros foram obtidos com base nos resultados do estimador econométrico GMM (método dos momentos generalizados).

Na implementação do GMM foi utilizada a seguinte discretização da equação de difusão:

$$v_{t+1} - v_t = \theta k - k v_t + \varepsilon_{t+1} \quad (13)$$

com os seguintes momentos

$$E[\varepsilon_{t+1}] = 0;$$

$$E[\varepsilon_{t+1}^2] = \sigma^2 v_t;$$

Depois é montado o vetor $h(\phi_t, v_t)$ que é o produto Kronecker entre o vetor de erros $[\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 v_t]^T$ e o vetor de variáveis instrumentais $[1, v_t]^T$.

¹⁰Para maiores detalhes sobre os métodos de interpolação das taxas de juros utilizados, vide Costa (2003).

$$h_t(v_t, \phi) = \begin{bmatrix} \epsilon_{t+1} \\ \epsilon_{t+1}v_t \\ \epsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 v_t \\ (\epsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 v_t)v_t \end{bmatrix}$$

onde $\phi_t = [\theta K \sigma]$ é o vetor de parâmetros a ser estimado pelo método GMM.¹¹

A definição dos períodos utilizados para a estimação é abordada na próxima seção.

5. Parâmetros Ótimos do Modelo de Heston no Mercado de FX no Brasil

Para a calibração do modelo de Heston utilizou-se o método da minimização da soma dos erros ao quadrado das diferenças entre os preços teóricos com base no modelo de Heston e os preços de mercado com base no modelo de Garman-Kohlhagen. De modo a ficar claro os passos seguidos na calibração do modelo de Heston, consultar o fluxograma do Apêndice III.

A função a ser minimizada é definida como

$$\min \psi_1 = \sum_{\text{parâmetros}}^{\text{parâmetros*}} \sum_{j=1}^N w_i (\text{Preco}_{GK}(j) - \text{Preco}_{Heston}(j; \theta, k, \rho, \sigma))^2 \quad (14)$$

onde w_i é o peso dado a cada uma das diferenças, Preco_{GK} é o preço de Mercado e Preco_{Heston} é o preço de Heston.¹² Os parâmetros a serem estimados via minimização acima são: 1) Variância de longo prazo (θ); 2) Velocidade de reversão à média k ; 3) correlação do processo estocástico da evolução da taxa de câmbio com o processo estocástico da sua volatilidade (ρ); e 4) vol. da vol. (σ).¹³

Para se entender os dados no período considerado, construiu-se a Figura 1, que mostra os valores médios das volatilidades implícitas para diferentes valores de Deltas-Forward entre as datas 02/09/2002 e 28/02/2003.

¹¹ Lembrar que a variância de longo prazo é representada por θ , a reversão à média da variância por k e volatilidade da volatilidade por σ .

¹² Relembrando que os preços de mercado são obtidos da matriz de volatilidades implícitas, através do modelo de Garman-Kohlhagen.

¹³ A lógica por trás desses pesos é que se inicie a ponderação dos erros com valores bem simples como e a partir de uma investigação sobre os erros observados, novos pesos sejam definidos de forma a se obter uma menor margem de erro nas novas tentativas de calibração. Esta calibração procurará minimizar o erro quadrático dos preços para uma mesma data de referência, ou seja, a calibração considera opções com diferentes vencimentos, moneyness e consequentemente diferentes preços. De forma a se evitar distorções nos preços utilizados na calibração, assumiu-se que a liquidez desse mercado é bem maior naqueles prazos em que há liquidez para os contratos de Dólar Futuro na BM&F. Considerou-se então somente as opções com prazos inferiores ao terceiro vencimento dos contratos da BM&F. Outra premissa que é assumida na modelagem é que os preços das opções extraídos da matriz de volatilidade são preços onde negócios são realizados. Como o mercado de opção é bem mais líquido para as opções no dinheiro, devemos observar erros menores para esses tipos de opções e maiores para as opções fora do dinheiro.

Figura 1

Gráfico da evolução das volatilidades implícitas para o período em estudo para opções R\$/USD

Devido a aproximação da eleição presidencial e o aumento das chances de uma vitória dos partidos de esquerda, observa-se uma enorme variação dessas volatilidades principalmente no mês de setembro (quebra do regime) que antecede o primeiro turno das eleições. Após a vitória do Presidente Lula e a definição dos seus assessores, inicia-se um período de redução das volatilidades, havendo uma estabilização a partir do início de fevereiro de 2003 (início de um novo regime). Conforme descrito acima, as opções fora do dinheiro apresentam uma falta de liquidez superior às opções no dinheiro e isto gera uma maior variação dessa volatilidade implícita para essas opções do que as que estão próximas e dentro do dinheiro. Isto também é evidenciado na Figura 1. Assim, foram escolhidas as seguintes datas abaixo para a calibração de maneira a se considerar diferentes condições de mercado:

- 21/02/2003 e 28/02/2003 - Representando um período de volatilidades implícitas estáveis (novo regime estável para o Câmbio e as volatilidades implícitas).
- 02/01/2003 - Representando o início do governo do Presidente Lula (período de incertezas ainda caracterizado por um período de alta volatilidade).
- 02/09/2002 - Representando o instante que antecede o aumento das volatilidades (período anterior ao stress observado nas volatilidades implícitas).

Para se obter os valores iniciais dos parâmetros do modelo de Heston pelo método generalizado dos momentos (GMM), optou-se por tomar uma série histórica das variâncias entre as datas de 19/03/2001 e 20/02/2003. As variâncias foram calculadas com janelas móveis no período acima para retornos log-normais

diários da cotação R\$/USD (cada série com 60 dias úteis – aproximadamente 100 dias corridos).

Os valores obtidos para os parâmetros podem ser vistos na Figura 2, onde $C(1)$, $C(2)$ e $C(3)$ são respectivamente, θ , k e σ .¹⁴ Conforme a Figura 2, foram obtidos os seguintes valores para a velocidade de reversão à média ($k = 0.018$ e t -student = 4.82), a variância de longo prazo ($\theta = 0.0638$ e t -student=1.44, e a vol. da vol. ($\sigma = -0.037$ e t -student=1.44). Notar que σ é negativa. Isto não deve ser visto como uma volatilidade negativa, mas como a inversão de sinal do termo estocástico da equação de difusão da variância. Vide novamente a Equação 2. Assim, segundo os dados no período da amostra utilizada para a estimação dos parâmetros não se encontraram valores estatisticamente significativos tanto para a variância de longo prazo (θ) como para a vol. da vol. (σ). Apenas a velocidade de reversão à média foi significativa. Assim, a calibração abaixo foi realizada ajustando-se os três parâmetros: ρ , σ e θ . O parâmetro foi fixado pelo valor estimado acima por GMM.

System: GMM_V_CIR				
Estimation Method: Generalized Method of Moments				
Date: 08/01/02 Time: 22:15				
Sample: 2 499				
Included observations: 498				
Total system (balanced) observations 996				
Instruments: C V(-1)				
No prewhitening				
Bandwidth: Fixed (5)				
Kernel: Bartlett				
Simultaneous weighting matrix & coefficient iteration				
Convergence achieved after: 4 weight matrices, 5 total coef iterations				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	0.063885	0.033882	1.885511	0.0597
C(2)	0.018074	0.012522	1.443458	0.1492
C(3)	-0.037858	0.007850	-4.822756	0.0000
Determinant residual covariance	1.15E-11			
J-statistic	0.000878			
Equation: V-V(-1)-(C(1)*C(2)-C(2)*V(-1))				
Observations: 498				
S.E. of regression	0.009251	Sum squared resid	0.042450	
Durbin-Watson stat	1.667501			
Equation: (V-V(-1)-(C(1)*C(2)-C(2)*V(-1)))^2-(C(3)^2)*V(-1)				
Observations: 498				
S.E. of regression	0.000692	Sum squared resid	0.000237	
Durbin-Watson stat	1.941892			

Figura 2

Dados estimados para os valores iniciais dos parâmetros do modelo de Heston para a calibração do modelo

Na calibração com base na Equação (14), foram utilizados três pesos diferentes:

¹⁴Lembrar que (θ) representa a variância de longo prazo, (k) a velocidade de reversão à média da variância e (σ) vol. da vol.

- **Peso 1:** $w_i = 1$ - Trata-se da primeira tentativa de calibração do modelo.
- **Peso 2:** $w_i = \text{vega}_i$ - Conforme mostrado adiante os erros aumentam para as opções fora do dinheiro, de forma que Vega tentará “punir” estes efeitos.
- **Peso 3:** $w_i = (\text{vega}_i) \cdot (\text{Moneyness})$ - Este peso foi utilizado para se punir ainda mais os erros encontrados para as opções fora do dinheiro.

Conforme será visto na análise dos resultados da calibração abaixo, existe uma justificativa para a escolha dos pesos acima. Inicialmente ao se utilizar o peso 1 (igual peso para todos os tipos de opções ATM, OTM e ITM), observam-se que os erros são maiores para as opções fora do dinheiro (OTM). Como o Vega é bem menor para estas opções, optou-se por utilizá-lo como um peso adicional na tentativa de se minimizar os erros das opções fora do dinheiro. Para alguns casos os erros ainda se mostraram altos e optou-se por utilizar um terceiro peso também na tentativa de punir os erros das opções fora do dinheiro.

O algoritmo de otimização utilizado para a calibração foi a função “lsqnonlin” do MATLAB que permite a minimização dos erros conforme a Equação (14) e a determinação dos parâmetros ótimos do modelo. Para esta função de otimização se define os valores iniciais e as condições de fronteira para os máximos e mínimos para os parâmetros do modelo.

6. Apresentação dos Resultados

Conforme as Figuras 3, 4, 5 e 6, podemos notar que os resultados da calibração do modelo de Heston nos dias 28/02/2003 e 21/02/2003 se mostraram bastante satisfatórios.

Figura 3

Erros relativos para a calibração em 28/02/2003. Nota: P1 representa a calibração com peso 1

Figura 4
Erros relativos para a calibração em 21/02/2003

Em todas as calibrações houve a convergência dos parâmetros do modelo e os erros relativos apresentaram-se na média em torno de 2-4%. Os erros relativos foram maiores para as opções fora do dinheiro – conforme já era esperado – a despeito do peso utilizado.

Figura 5
Parâmetros ajustados na calibração em 28/02/2003

Figura 6
Parâmetros ajustados na calibração em 21/02/2003

A utilização do peso 3 resultou na melhor redução dos erros relativos dos preços das opções.

Com base nas Figuras 5 e 6, pode-se notar que os parâmetros ótimos do modelo em todas as calibrações para estas datas se mostraram bastante plausíveis. Os parâmetros de correlação ρ e vol. da vol σ se mostraram estáveis assim como a volatilidade de longo-prazo θ que se apresentou relativamente menor a medida que se aplicou os pesos 2 e 3. Os valores ótimos de θ foram maiores que o valor calculado exogenamente ao modelo de Heston pelo estimador GMM. O valor obtido por GMM foi utilizado como valor inicial deste parâmetro na calibração.

Os erros quadráticos também se apresentaram bem menores nas ponderações 2 e 3, o que leva-se a crer que os mesmos conseguem “punir” os efeitos observados nas opções OTM, conforme esperado.

O dia 02/01/2003 se caracteriza pela incerteza sobre as medidas do novo governo. Assim, verificou-se que os erros relativos foram bem maiores do que para os dias calmos do mês de Fevereiro/2003. Observa-se também um erro maior para as opções fora do dinheiro e para algumas opções isoladamente. Neste último caso, as diferenças podem ser causadas por falta de liquidez para as respectivas opções (por exemplo, opções bastante dentro do dinheiro) neste dia. A aplicação dos pesos 2 e 3 apresentou uma redução nos erros relativos, porém não tão eficiente como nas calibrações para os dias 28/02/2003 e 21/02/2000 (Vide as Figuras 7 e 8).

Figura 7
Erros relativos para a calibração em 02/01/2003

Figura 8
Parâmetros ajustados na calibração em 02/01/2003

Apesar dos erros relativos serem maiores para esta data, observou-se que os parâmetros encontrados apresentaram-se estáveis para a maioria das minimizações, com exceção da calibração 2 com pesos 1 e 3 onde os valores de correlação ρ se desviaram do seu valor histórico.¹⁵ Os menores erros relativos e quadráticos ocorreram na calibração com pesos 2 e 3.

O dia 02/09/2002 representou um momento de grande incerteza sobre o próximo governo, mas ainda não tão volátil como na virada no ano. Neste dia, foram observados erros relativos maiores que os observados nos meses de Fevereiro e menores do que em Janeiro. As opções fora do dinheiro apresentaram os maiores erros relativos. Para o primeiro vencimento no dia 01/10/2003, os erros se mostraram bem inferiores relativamente aos demais vencimentos. Para este primeiro vencimento, as volatilidades implícitas estão também inferiores com relação aos demais prazos pois a eleição ocorreria em Outubro daquele ano. De todas as calibrações, as calibrações com peso 1 convergiram para valores fora do esperado e requerendo um número de interações bem superior às demais (de 20 a 24 interações). A calibração com peso 3 apresentou o menor erro relativo e o menor erro quadrático (na ordem de 10^{-4}), produzindo uma boa eficiência na redução dos erros (vide as Figuras 9 e 10).

Figura 9
Erros relativos para a calibração em 02/09/2002

¹⁵Vale salientar que nestes casos, o número de interações do algoritmo foi bem maior que para as demais simulações, o que se leva a crer que o modelo não se comportou adequadamente aos pesos aplicados a função de minimização para a presente massa de dados nesse dia.

Figura 10
Parâmetros ajustados na calibração em 02/09/2002

7. Conclusões

Neste trabalho foi descrito o modelo de Heston e foi feita uma análise detalhada de seus parâmetros visando a sua implementação para o mercado brasileiro de opções de câmbio R\$/USD.

Com base nos resultados da calibração, observou-se que o modelo de Heston se mostrou aceitável para o mercado brasileiro de moeda estrangeira. Este modelo rendeu parâmetros estáveis nos períodos de menores volatilidades no mercado cambial e com alguma instabilidade nos períodos de maior volatilidade (antes da definição da equipe econômica do Presidente Lula).

Os parâmetros do modelo de Heston nas diversas calibrações se mostraram estáveis nos períodos com menor incerteza no mercado de câmbio. Os parâmetros obtidos foram corroborados pelos métodos alternativos, e.g., estimador econométrico GMM ou por dados históricos.

No processo de obtenção dos parâmetros do modelo de Heston foram utilizados pesos alternativos na minimização dos erros quadráticos, tais como, Vega e moneyness. Estes pesos de ponderações para as opções fora do dinheiro foram eficientes nos períodos estáveis e ineficientes para os períodos voláteis.

Na realidade, modelos simples tais como Black ou Garman-Kohlhagen para opções de câmbio funcionam bem para as opções ATM (*moneyness* igual a unidade no sorriso de volatilidade).¹⁶ Talvez este fato justifica sua popularidade mesmo nos mercados desenvolvidos. Mas, para opções muito fora deste ponto – muito fora do dinheiro –, mesmo o modelo de Heston com sua sofisticação ao incorporar a

¹⁶O mesmo ocorre com o modelo Black-Scholes para o mercado de opção da BOVESPA. Para maiores detalhes, vide Yoshino (2003).

volatilidade estocástica acaba falhando fragorosamente.¹⁷

Apesar dos efeitos de curtose e de assimetria na função densidade de probabilidade apresentarem valores pequenos, sua utilidade no entendimento do comportamento das opções e do respectivo ativo-objeto é relevante, principalmente para a modelagem do risco de mercado. Neste sentido, através das simulações Monte-Carlo, por exemplo, pode-se obter as verdadeiras distribuições de probabilidade dos retornos esperados do R\$/USD e conseqüentemente suas perdas esperadas.

Espera-se que este trabalho seja o início de próximos desenvolvimentos sobre o tema que parece ser muito vasto e útil ao mercado cambial brasileiro. Como sugestão para trabalhos futuros pode-se montar estratégias de negociação, por exemplo, delta-neutro para se verificar as possibilidades de ganhos de arbitragem para diferentes períodos, a incorporação de processos de saltos ao modelo de Heston, a incorporação de taxas de juros estocásticas ao modelo dentre outros passos de forma a se contemplar melhor todos estes fenômenos.

Referências

- Bakshi, G., Cao, C., & Chen, Z. (1997). Empirical performance of alternative option pricing models. *Journal of Finance*, 52:2003–2049.
- Bates, D. (1996). Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in Deutschemark options. *Review of Financial Studies*, 9:69–108.
- Black, F. (1976). The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics*, 3.
- Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81.
- Breeden, D. T. (1979). An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities. *Journal of Financial Economics*, 7:265–296.
- Costa, M. N. (2003). Derivativos de câmbio: Implementação do modelo de heston para o mercado brasileiro. Tese de Mestrado em Modelagem Matemática em Finanças – FEA/IME – USP.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1985a). An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica*, 53:363–384.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1985b). A theory of term structure of interest rates. *Econometrica*, 53:385–408.

¹⁷ Apesar da vantagem do Modelo de Heston de dar maior flexibilidade ao incorporar a volatilidade estocástica, uma de sua desvantagem quando comparado com o modelo de Garman-Kohlhagen é o tempo de processamento de cálculo do preço da opção, além do custo computacional para a calibração periódica do modelo.

- Cox, J. C. & Ross, A. (1976). The valuation of options for alternatives stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 3:145-166.
- Cox, J. C. & Rubinstein, M. (1985). *Options Markets*. Prentice Hall.
- Cunha Jr., D. & Lemgruber, E. F. (2003). Opções de dólar no Brasil com taxas de juro e de cupom estocásticos, 3º Encontro Brasileiro de Finanças. FEA USP, Julho.
- Duffie, D., Pan, J., & Singleton, K. (2000). Transformation analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica*, 68(6):1343-1376.
- Fouque, J., Papanicolaou, G., & Sircar, K. (2000). *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*. Cambridge University Press.
- Garman, M. B. & Kohlhagen, S. W. (1983). Foreign currency option values. *Journal of International Money and Finance*, 2:231-237.
- Geske, R. (1979). The valuation of compound options. *Journal of Financial Economics*, 7:63-81.
- Haug, E. G. (1997). *The Complete Guide to Options Pricing Formulas*. McGraw-Hill.
- Heston, S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(2).
- Hull, J. (1993). *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice Hall, 4th edition.
- Hull, J. & White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*, 42.
- Hull, J. & White, A. (1988). An analysis of the bias in option pricing caused by a stochastic volatility. *Advances in Futures and Options Research*, 3.
- Lamoureux, C. G. & Lastrapes, W. (1993). Forecasting stock return variance: Towards understanding stochastic implied volatility. *Review of Financial Studies*, 6:293-326.
- Lemgruber, E. F. (1999). Cupom limpo, cupom sujo e assincronismo na coleta de informações.
- Melino, A. & Turnbull, S. J. (1991). The pricing of foreign currency options. *Canadian Journal of Economics*, 24:251-281.
- Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell J. Econ. and Management Sci.*, 4:141-183.

- Naik, V. & Lee, M. H. (1993). The yield curve and bond option prices with discrete shifts in economic regimes. working paper.
- Rubinstein, M. (1983). Displaced diffusion option pricing. *Journal of Finance*, 38:213–217.
- Scott, L. O. (1987). Option pricing when the variance changes randomly: Theory, estimation, and an application. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22:419–438.
- Skiadopoulos, G. & Hodges, S. (2000). Simulating the evolution of the implied distribution. *European Financial Management*, 7:497–522.
- Stein, E. M. & Stein, J. C. (1991). Stock price distributions with stochastic volatility. *The Review of Financial Studies*, 4(4).
- Wiggins, J. B. (1987). Option valuation under stochastic volatility. *Journal of Financial Economics*, 19.
- Yoshino, J. A. (2003). Market risk and volatility in the Brazilian stock market. *Journal of Applied Economics*, VI:385–403.

Apêndice A

Determinação da Equação Diferencial do Modelo de Heston e Abordagem sobre o Prêmio de Volatilidade

Na medida que os modelos de volatilidade estocástica assumem a existência da incerteza na volatilidade, temos por conseguinte um prêmio de risco da volatilidade (λ). Por outro lado, o modelo de B-S assume que a volatilidade é determinística.¹⁸

Suponha que a equação do diferencial do preço de uma opção é dada pela expansão de Taylor abaixo:

$$dU(S, v, t) = \frac{\delta U}{\delta t} dt + \frac{\delta U}{\delta S} dS + \frac{\delta U}{\delta v} + \frac{\delta^2 U}{2 \delta t^2} + \frac{\delta^2 U}{2! \sigma S^2} dS^2 + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 U}{\sigma v^2} + \frac{1}{2!} \frac{\sigma^2 U}{2! \delta v \delta S} dv dS + \frac{1}{2!} \frac{\delta^2 U}{2! \delta v \delta t} dt dS + \frac{1}{2!} \frac{\delta^2 U}{\delta v \delta t} dv dt + \dots \quad (A.1)$$

Substituindo-se as Equações 1 e 2 na equação acima, tem-se

$$dU = \left(\frac{\delta U}{\delta t} + \alpha \frac{\delta U}{\delta v} + S r \frac{\delta U}{\delta S} + S^2 v \frac{1}{2} \frac{\delta^2 U}{2 \delta S^2} + \delta^2 v \frac{1}{2} \frac{\delta^2 U}{\delta v^2} + \frac{\delta^2 U}{\delta v \delta S} \rho \delta v S \right) dt + \frac{\delta U}{\delta S} S \sqrt{v} dz_1 + \delta \sqrt{v} \frac{\delta U}{\delta v} dZ^2 \quad (A.2)$$

Assumindo-se que o retorno esperado do portfolio replicante para esta opção num dado intervalo de tempo seja dado por $L(U)$. Este retorno que reflete os prêmios de risco tanto do ativo-objeto (r) como da volatilidade (λ) pode ser escrito como

$$L(U) = rU + \lambda \frac{\delta U}{\delta v} \quad (A.3)$$

Igualando-se a Equação A.3 ao termo de tendência da Equação A.2 chega-se a Equação 3 descrita anteriormente como a equação diferencial parcial do modelo de Heston. Observa-se na Equação A.3 o prêmio de risco da volatilidade (λ) representa um coeficiente da variação do preço da opção em relação a variância estocástica ($\frac{\delta U}{\delta v}$). Este aspecto mostra o quanto o investidor está disposto a "consumir" daquela opção para uma dada variação da variância. Para motivar a escolha de λ , recorreu-se ao modelo de consumo de Breeden (1979) a equação:

$$\lambda(s, v, t) dt = \gamma \text{ cov} \left[dv, \frac{dC}{C} \right]$$

¹⁸Na derivação deste modelo, tem-se também um mercado completo – o número de ativos igual ao número de estados da natureza. Neste caso, o prêmio de risco para o portfolio replicante (*market price of risk*) é nulo. Ademais, pelo argumento de não arbitragem, o retorno do portfolio replicante deve ser igual à taxa de juros livre de risco.

onde $C(t)$ a taxa de consumo e γ é a aversão relativa ao risco do investidor. Considere o processo para consumo que emerge do modelo (equilíbrio geral) de Cox e Rubinstein (1985)

$$dC(t) = \mu_c v(t) C dt + \sigma_c \sqrt{v(t)} C dz_3(t)$$

onde o crescimento de consumo tem uma constante correlação com o retorno do ativo. Isto gera um prêmio de risco proporcional a v , $\lambda(S, v, t) = \lambda v$. Embora Heston se utilize desta forma para o prêmio de risco, os resultados do apuração são obtidos por arbitragem (e não por equilíbrio geral) e não depende das premissas de Breeden (1979) e Cox e Rubinstein (1985). Contudo, o modelo de Heston é consistente com a heterocedasticidade condicional no crescimento do consumo assim como do retorno do ativo.

Apêndice B

Análise dos Efeitos da Correlação e da Volatilidade da Volatilidade no Comportamento das Opções

Esta simulação objetiva mostrar a diferença entre os modelos Heston e Garman-Kohlhagen. O primeiro modelo permite que a FDP mude quando se varia separadamente os parâmetros correlação (ρ) e volatilidade da volatilidade (σ).

Para esta análise foi considerada uma call ATM cujo vencimento é de 3 meses com data-base em 28/02/2003. Assumimos os seguintes valores no modelo de Heston:

$$v = 0.07; \quad \theta = 0.07; \quad \sigma = 0.05; \quad k = 0.02; \quad \lambda = 0$$

Através de uma simulação Monte-Carlo foram construídos os histogramas dos retornos ativo-objeto:

$$\frac{(S(t, T) - S(t, 0))}{S(t, 0)}$$

onde $S(t, T)$ é o preço do ativo-objeto no tempo t para a opção com vencimento em T .

As Figuras B.1, B.2 e B.3 mostram os efeitos da correlação (ρ) na FDP do ativo-objeto. Pode-se notar que a correlação (ρ) afeta somente a skewness (terceiro momento) da FDP dos retornos do ativo-objeto. Uma correlação positiva implica uma maior variância quando os retornos do ativo-objeto são positivos e isto torna a cauda direita da distribuição mais "gorda" e a cauda esquerda mais "fina". Isto é chamado de assimetria positiva. O efeito contrário é observado no caso de uma correlação negativa, causando uma assimetria negativa. Em outras palavras, dada uma correlação positiva, um aumento da volatilidade da volatilidade faz com que a cauda direita mais gorda aumente a probabilidade de desvalorização cambial. Isto faz com que mais opções de compra OTM fique ITM. Este efeito valoriza estas opções devido ao aumento da volatilidade do ativo objeto.

Para a análise do efeito da volatilidade da volatilidade (σ) na FDP dos retornos do ativo-objeto, utilizou-se a mesma opção com os mesmos parâmetros e assumiu-se uma correlação nula. Através de uma simulação Monte-Carlo foram produzidos vários histogramas. Vide as Figuras B.4, B.5 e B.6. Nestas figuras observa-se que σ influencia a FDP somente em sua curtose (quarto momento) e não em sua assimetria (terceiro momento). Um aumento de σ causa um aumento da curtose da FDP. Em outras palavras, para um dado valor de σ observa-se que a curtose aumenta à medida que a opção se aproxima do dinheiro. Isto implica num aumento dos preços das opções (call) OTM e ITM e uma diminuição no preço da opção ITM quando comparado com Garman-Kohlhagen.

Figuras B.1, B.2, B.3, B.4, B.5, B.6

Efeitos observados na FDP do ativo-objeto devido a diferentes valores dos parâmetros correlação (ρ) e volatilidade da volatilidade (σ) do Modelo de Heston

Apêndice C

Descrição do Fluxograma utilizado para a Calibração do Modelo de Volatilidade Estocástica (Modelo de Heston)

Figura C.1

Fluxograma explicativo para a calibração do modelo de Heston para o mercado de câmbio brasileiro