UMA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS
ALGORITMOS DOS ELIPSÓIDES

Nelson Ortégosa da Cunha*

RESUMO

O matemático russo Khachyan demonstrou a existência de algoritmos com tempo polinomial para o problema da consistência de um sistema de desigualdades lineares. Neste artigo mostra-se como alguns destes algoritmos podem ser construídos a partir de propriedades geométricas de esferas elipsóides.

SUMMARY

The existence of polynomial time algorithms for the consistency problem of a system of linear inequalities was shown by Khachyan, a russian mathematician. In this article it is shown how some of these algorithms can be developed starting from simple geometric properties of spheres and ellipsoids.

* Centro Científico da IBM do Brasil.
Caixa Postal, 853.
70000 Brasília/DF.

1. INTRODUÇÃO

Como raras vezes ocorre no mundo científico, uma descoberta realizada por um matemático russo, foi anunciada ao mundo ocidental, através de manchetes de primeira página em jornais de grande circulação tais como The New York Times e o Guardian (vide referência 3). Khachian (ref. 1) demonstrou a existência de um algoritmo de tempo polinomial para a resolução de problemas de consistência de sistemas de desigualdades lineares. Como consequência desse trabalho, inúmeros pesquisadores se interessaram em investigar as possíveis aplicações dessa nova metodologia. A literatura técnica especializada registra nos últimos anos um grande número de publicações referentes a este tipo de algoritmos, denominados genericamente como Métodos dos Elipsóides.

O algoritmo dos elipsóides encontra um ponto em um conjunto convexo com interior não vazio em um número finito de passos, e será exposto detalhadamente mais adiante. Este tipo de construção permite com coeficientes inteiros, polinomial no "tamanho da entrada", que não será detalhado neste trabalho (ref. 2).

Em linhas gerais, o algoritmo constrói iterativamente uma sequência de elipsóides que envolvem o conjunto alvo: esses elipsóides têm volumes decrescentes por uma razão fixa que depende apenas da dimensão do espaço. Consequentemente, após um número finito de iterações o centro do elipsóide final deverá atingir o conjunto alvo.

Todos os algoritmos desta classe apresentam teoricamente características de convergência do tipo polinomial. No entanto os resultados práticos quando comparados com o desempenho de métodos clássicos, como o Simplex para Programação Linear, mostram-se inferiores na maioria dos casos exceto para alguns casos extremos de interesse apenas teórico. A melhoria da velocidade de convergência constitui ainda um tópico de pesquisa importante.

Neste trabalho procuramos apresentar, de uma maneira sistemática, o desenvolvimento de tais algoritmos, enfatizando os aspectos geométricos. Inicialmente são apresentadas as construções geométricas básicas e a seguir é detalhado o método dos elipsóides.

2. O OPERADOR DE DILATAÇÃO ESPACIAL

Como será visto mais adiante, os algoritmos construídos pelo método dos elipsóides, são obtidos pela aplicação iterativa de um operador linear aqui denominado operador de dilatação espacial cuja principal propriedade é a de transformar esferas em elipsóides.

Seja $v \in R^n$ um vetor de comprimento unitário, $\alpha > 0$ um escalar e $x \in R^n$ um vetor qualquer; o operador de dilatação espacial na direção v , designado por $R(\alpha, v)$, aplicado a x , é definido por:

$$R(\alpha, v) \cdot x = \alpha v^t \cdot x \cdot v + (x - v^t \cdot x \cdot v) \quad (1)$$

onde o superscrito (t) denota transposição.

A relação (1) tem uma interpretação geométrica bastante simples. Consiste na soma de duas parcelas. A primeira corresponde à componente de x na direção de v multiplicada pelo escalar α , e a segunda é simplesmente a componente de x ortogonal à direção v . Desse modo, o operador de dilatação espacial provoca uma dilatação ou expansão - dependendo de α ser maior ou menor do que 1, na direção do vetor v mantendo inalteradas as direções ortogonais a v .

Reordenando o segundo membro da relação (1) podemos escrever:

$$R(\alpha, v) \cdot x = (I + (\alpha - 1) v \cdot v^t) \cdot x \quad (2)$$

onde I é a matriz identidade.

O operador de dilatação espacial apresenta diversas propriedades importantes entre as quais a de linearidade.

Proposição-1: O operador de dilatação espacial $R(\alpha, v)$ é linear.

Prova: A demonstração é trivial a partir da definição do operador. //

Conseqüentemente, o operador de dilatação espacial pode ser representado por uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$. Por simplicidade de notação, designaremos esta matriz por $R(\alpha, v)$. Então, a partir da relação (2) podemos escrever:

$$R(\alpha, v) = I + (\alpha - 1) v v^t \quad (3)$$

Proposição-2: A matriz $R(\alpha, v)$, com $\alpha > 0$ e $\|v\| = 1$, é não singular e o operador inverso é dado por:

$$R^{-1}(\alpha, v) = R(\alpha^{-1}, v) \quad (4)$$

Prova: Aplicando a definição obtemos:

$$\begin{aligned} R(\alpha, v) \cdot R(\alpha^{-1}, v) &= (I + (\alpha - 1) v v^t) \cdot (I + (\alpha^{-1} - 1) v v^t) \\ &= I. // \end{aligned}$$

Por esta propriedade, o operador de dilatação espacial é não singular, isto é, o operador inverso existe. Este operador inverso é linear, e sua representação matricial pode ser obtida da representação matricial do operador direto pela substituição do escalar α pelo seu inverso α^{-1} . Além disso, como demonstrado a seguir, o determinante da matriz $R(\alpha, v)$ é independente da direção v , e numericamente igual a α .

Proposição-3: Para qualquer escalar α , o determinante da matriz $R(\alpha, v)$ com $\|v\| = 1$, é igual a α .

Prova: O sub-espço S gerado por v é invariante sob a transformação $R(\alpha, v)$. Seja A a transformação $R(\alpha, v)$ considerada sobre S apenas, e B a transformação quociente $R(\alpha, v)/S$ ou seja a transformação $R(\alpha, v)$ restrita ao complemento ortogonal a S . Como a transformação $R(\alpha, v)$ é a soma direta das transformações A e B , podemos escrever (*):

$$\det R(\alpha, v) = \det A \cdot \det B = \alpha \cdot 1 = \alpha. // \quad (5)$$

(*) Vide Halmos, P.R., "Finite-Dimensional Vector Spaces", Van Nostrand, 1958, Section 53.

Proposição-4: A matriz $R(\alpha, v)$ é simétrica.

Prova: A partir da expressão (3) podemos escrever:

$$\begin{aligned} R^t(\alpha, v) &= (I + (\alpha - 1) v v^t)^t \\ &= I + (\alpha - 1) v v^t \\ &= R(\alpha, v). \quad // \end{aligned}$$

Proposição-5: A matriz M definida pela relação

$$M = R^t(\alpha, v) \cdot R(\alpha, v) \quad (6)$$

é simétrica e positiva definida.

Prova: O fato de que M é simétrica decorre trivialmente da proposição 4.

Agora, para qualquer vetor x em R^n :

$$\begin{aligned} x^t M x &= x^t \cdot R^t(\alpha, v) \cdot R(\alpha, v) x \\ &= \|x\|^2 + (\alpha^2 - 1) \cdot |v^t x|^2 \end{aligned}$$

Se $\alpha > 1$, então $x^t M x > 0$ para $\|x\| \neq 0$; por outro lado, para $0 < \alpha < 1$, como $\|x\|^2 \cdot \|v\|^2 \geq |v^t x|^2$ resulta que $x^t M x > 0$ quando $\|x\| \neq 0$. //

Por esta proposição a imagem de uma esfera em R^n sob a transformação M é um elipsóide. As Proposições 6, 7 e 8 apresentadas a seguir expressam algumas propriedades geométricas de esferas, elipsóides e hiperplanos, que serão utilizadas para a elaboração de algoritmos de busca.

Proposição-6: Sejam C um conjunto convexo em R^n ; x_0 um ponto em R^n não pertencente a C , e $H = \{x \in R^n : a^t \cdot (x - x_0) = 0\}$, um hiperplano passando por x_0 e que separa x_0 do conjunto C . Seja L uma transformação linear não singular em R^n . Então, o hiperplano G , definido por:

$$G = \{y \in \mathbb{R}^n : b^t (y - y_0) = 0, y_0 = Lx_0, b = (L^{-1})^t \cdot a\}$$

separa o ponto y_0 do conjunto convexo $L(C)$.

Prova: Para qualquer $x \in C$, podemos supor que:

$$a^t \cdot (x - x_0) \leq 0 \quad (7)$$

Seja y um ponto qualquer em $L(C)$. Então, existe um ponto $\tilde{x}$ em C tal que:

$$\tilde{y} = L\tilde{x} \quad (8)$$

Como L é não singular:

$$\tilde{x} = L^{-1} \tilde{y} \quad (9)$$

Substituindo (9) em (7) e lembrando que $x_0 = L^{-1} \cdot y_0$:

$$a^t \cdot (L^{-1} \cdot \tilde{y} - L^{-1} \cdot y_0) \leq 0$$

ou

$$a^t \cdot L^{-1} \cdot (\tilde{y} - y_0) \leq 0$$

donde

$$b^t \cdot (\tilde{y} - y_0) < 0, \text{ com } b = (L^{-1})^t \cdot a \quad // \quad (10)$$

Proposição-7: A imagem do elipsóide $E \subset \mathbb{R}^n$ com centro no ponto x_1 :

$$E = \{x : (x - x_1)^t \cdot M(x - x_1) \leq r_1^2\} \quad (11)$$

onde $M = R^t(\alpha, v) \cdot R(\alpha, v)$, sob a transformação $R(\alpha, v)$ é a esfera S em $\mathbb{R}^n$, dada por:

$$S = \{y : \|y - y_1\| \leq r_1\} \quad (12)$$

onde

$$y_1 = R(\alpha, v) \cdot x_1. \quad (13)$$

Prova: Seja x um ponto qualquer do elipsóide E , e seja y a imagem de x sob a transformação $R(\alpha, v)$, isto é:

$$y = R(\alpha, v) \cdot x \quad (14)$$

Então:

$$\begin{aligned} \|y - y_1\|^2 &= \|R(\alpha, v)x - R(\alpha, v)x_1\|^2 \\ &= \|R(\alpha, v) \cdot (x - x_1)\|^2 \\ &= (x - x_1)^t \cdot R^t(\alpha, v) \cdot R(\alpha, v) \cdot (x - x_1) \\ &= (x - x_1)^t M \cdot (x - x_1) \leq r_1^2. \end{aligned}$$

Portanto y pertence à esfera S . A recíproca é verdadeira. //

Conseqüentemente, como a transformação $R(\alpha, v)$ é biunívoca, o elipsóide E é a imagem da esfera S sob a transformação inversa de $R(\alpha, v)$, ou seja, sob a transformação $R(\alpha, v)$.

Proposição-8: Seja $S_0 \subset R^n$, ($n \geq 2$) a semiesfera definida pela interseção da esfera S_0 de raio r_0 e centro no ponto x_0 , com o semi-espaço $H = \{x \in R^n : v^t \cdot (x - x_0) \leq 0\}$. Seja E_0 o elipsóide definido por:

$$E_0 = \{x \in R^n : (x - x_1)^t \cdot M \cdot (x - x_1) \leq r_1^2\} \quad (15)$$

onde:

$$M = R^t(\alpha, v) \cdot R(\alpha, v) \quad (16)$$

$$\alpha = \sqrt{(n+1)/(n-1)} \quad (17)$$

$$x_1 = x_0 - (r_0/(n+1)) \cdot v \quad (18)$$

$$r_1 = (n/\sqrt{(n^2-1)}) \cdot r_0 \quad (19)$$

$$e, \quad \|v\| = 1. \quad (20)$$

Então: $S_0 \subset E_0$.

Prova: Como $\alpha > 0$ e $\|v\| = 1$, pela Proposição-5 a matriz $M = R^t(\alpha, v) \cdot R(\alpha, v)$ é simétrica e positiva definida. Portanto o conjunto E_0 é um elipsóide bem definido.

Seja x um vetor qualquer em S_0 . Então, por substituição:

$$\|R(\alpha, v) \cdot (x - x_1)\|^2 = \|R(\alpha, v)(x - x_0 + (r_0/(n+1)) \cdot v)\|^2 \quad (21)$$

Usando a relação (3) e chamando:

$$z = x - x_0$$

obtemos por substituições sucessivas em (21):

$$\begin{aligned} \|R(\alpha, v) \cdot (x - x_1)\|^2 &= \|z\|^2 + 2((\alpha - 1)v^t \cdot z + \alpha(r_0/(n+1)) \cdot v^t z + \\ &+ ((\alpha - 1)v^t z + \alpha(r_0/(n+1)))^2 \cdot \|v\|^2 \end{aligned}$$

Lembrando que $\|v\| = 1$ e reagrupando as parcelas:

$$\begin{aligned} \|R(\alpha, v) \cdot (x - x_1)\|^2 &= \|z\|^2 + 2 \cdot \alpha^2 \cdot (r_0/(n+1)) \cdot v^t z + \\ &+ (\alpha^2 - 1)(v^t \cdot z)^2 + \alpha^2 \cdot (r_0/(n+1))^2 \end{aligned} \quad (22)$$

Substituindo a relação (17) em (22), resulta:

$$\begin{aligned} \|R(\alpha, v)(x - x_1)\|^2 &= \|z\|^2 + 2(r_0/(n-1)) \cdot v^t \cdot z + \\ &+ (2/(n-1)) \cdot (v^t z)^2 + ((n+1)/(n-1)) \cdot (r_0/(n+1))^2 \end{aligned} \quad (23)$$

Como o ponto x pertence a S_0

$$0 \leq -v^t \cdot z \leq r_0. \quad (24)$$

Então podemos escrever:

$$\begin{aligned} (2/(n-1)) \cdot (v^t \cdot z)^2 + 2(r_0/(n-1)) \cdot v^t \cdot z &\leq (2/(n-1)) \cdot (v^t \cdot z)^2 - \\ - (2/(n-1)) \cdot (v^t \cdot z)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Substituindo a relação (25) em (23), resulta:

$$\|R(\alpha, v) \cdot (x - x_1)\|^2 \leq \|z\|^2 + ((n+1)/(n-1)) \cdot (r_0/(n+1))^2 \quad (26)$$

Por hipótese x pertence a S_0 . Consequentemente

$$\|z\|^2 = \|x - x_0\|^2 \leq r_0^2 \quad (27)$$

De (27) e (26) resulta

$$\begin{aligned} \|R(\alpha, v) (x - x_1)\|^2 &\leq r_0^2 + ((n+1)/(n-1)) \cdot (r_0/(n+1))^2 = \\ &= (n^2/(n^2+1)) \cdot r_0^2 \leq r_1^2 \end{aligned}$$

Portanto o ponto x pertence ao elipsóide E_0 . //

Esta última proposição, indica uma maneira de envolver uma semi-esfera por um elipsóide. A simplicidade desta construção geométrica pode ser explorada na elaboração de algoritmos de busca (vide referências 1 a 6).

Uma propriedade importante deste elipsóide é a de que seu volume é menor do que o volume da esfera inicial S_0 , como demonstrado a seguir.

Proposição-9: Sejam $V(E_0)$ e $V(S_0)$ respectivamente os volumes do elipsóide E_0 e da esfera S_0 definidos na Proposição-7. Então:

$$\frac{V(E_0)}{V(S_0)} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n^2}{n^2-1} \right)^{\frac{n-1}{2}} = c(n) \quad (28)$$

Prova: Sejam α e v como definidos na Proposição-7. Pela Proposição 6, o conjunto

$$S_1 = R(\alpha, v) \cdot E_0 \quad (29)$$

é uma esfera em R^n com centro no ponto y_1 , e raio r_1 , onde

$$Y_1 = R(\alpha, v) \cdot x_1, \text{ e} \quad (30)$$

$$r_1 = (n/\sqrt{n^2-1}) \cdot r_0 \quad (31)$$

Como a transformação $R(\alpha, v)$ é linear o volume da esfera S_1 , $V(S_1)$ é dado por:

$$V(S_1) = \det(R(\alpha, v)) \cdot V(E_0) \quad (32)$$

e usando a Proposição-3:

$$V(S_1) = \alpha \cdot V(E_0) = \sqrt{(n+1)/(n-1)} \cdot V(E_0) \quad (33)$$

Por outro lado, a relação entre os volumes das esferas S_1 e S_0 é:

$$\frac{V(S_1)}{V(S_0)} = \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^n \quad (34)$$

Substituindo (31) e (34) em (33) obtemos:

$$\begin{aligned} V(E_0) &= \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \cdot \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^n \cdot V(S_0) \\ &= \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2-1} \right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot V(S_0) // \end{aligned} \quad (35)$$

Por esta proposição, a relação $c(n)$, entre o volume do elipsóide E_0 e o volume da esfera S_0 , é dada pela expressão (28) como sendo igual a:

$$c(n) = \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2-1} \right)^{\frac{n-1}{2}}$$

Este coeficiente depende apenas da dimensão do espaço n , não sendo função do raio ou do centro da esfera. Para $n \geq 2$, $c(n)$ é um número

menor do que 1 e que tende monotonicamente para 1 quando n cresce indefinidamente. A tabela abaixo tem caráter ilustrativo.

n	$c(n)$
2	0,7698
5	0,9042
10	0,9512
50	0,9900
100	0,9950
500	0,9990
1000	0,9995

3. ALGORITMO DE BUSCA

O problema a ser analisado consiste na determinação de um ponto x pertencente a um dado conjunto convexo C , denominado conjunto alvo, contido em uma esfera S_0 em $\mathbb{R}^n$. São conhecidos o centro e o raio da esfera S_0 . É também especificada uma regra simples de verificação se um dado ponto pertence ou não ao conjunto C : dado um ponto qualquer, x em $\mathbb{R}^n$, esta sub-rotina, designada genericamente por Oráculo, determina se x pertence a C : caso contrário, constrói um hiperplano que separa x do conjunto C (vide Figura 1).

Figura 1. S: círculo com raio igual a 1.0 e centro no ponto (2,2); vetor ortogonal ao plano separador (0,-1.0)H; E: elipse envolvendo o semi-círculo.

Inicialmente a sub-rotina Oráculo testa o centro da esfera S_0 : não sendo solução, é construído um hiperplano que secciona a esfera S_0 em duas partes, uma das quais, S_0' , contém o conjunto alvo C . Em seguida constrói-se um elipsóide que envolve S_0' . Por intermédio de um operador de dilatação espacial apropriado, o elipsóide é transformado numa esfera que contém o conjunto convexo imagem do conjunto C sob a mesma transformação. Desta forma retorna-se à situação inicial, isto é, deseja-se determinar um ponto pertencente a um conjunto convexo contido numa esfera de centro e raio conhecidos. No entanto, a relação entre os volumes das esferas e os conjuntos alvos respectivos, decresceu na razão do coeficiente $c(n)$ que é menor do que 1.

Na i -ésima iteração, o algoritmo de busca proposto executa as seguintes operações:

1. É conhecida uma esfera S_i de raio r_i e centro no ponto z_i , e que contém o conjunto convexo C_i , imagem do conjunto alvo C .

2. A sub-rotina Oráculo testa se o ponto x_i , imagem inversa do ponto z_i pertence ao conjunto C ; caso contrário, constrói um hiperplano H_i passando por z_i e que separa z_i do conjunto C_i . O vetor normal a H_i e apontando no sentido oposto a C_i é designado por v_i

$$(\|v_i\| = 1).$$

3. O hiperplano H_i secciona a esfera S_i em duas semi-esferas: a semi-esfera que contém o conjunto C_i é designada por S_i' . A semi-esfera S_i' é envolvida pelo elipsóide:

$$E_i = \{z \in R^n : \|R(\alpha, v_i) \cdot (z - v_i)\| \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \cdot r_i\}$$

onde:

$$\alpha = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}, \quad e \quad v_i = z_i - \frac{r_i}{n+1} \cdot v_i$$

4. Por meio do operador de dilatação espacial $R(\alpha, v_i)$ com

$$\alpha = \sqrt{((n+1) / (n-1))},$$

o elipsóide E_i é transformado numa esfera S_{i+1} com centro no ponto z_{i+1} e raio r_{i+1} onde

$$z_{i+1} = R(\alpha, v_i) \cdot \bar{y}_i$$

$$r_{i+1} = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \cdot r_i,$$

e o conjunto convexo C_i é transformado no conjunto convexo C_{i+1} :

$$C_{i+1} = R(\alpha, v_i) \cdot C_i \subset S_{i+1}. \quad //$$

Como será visto a seguir, se o volume do conjunto convexo alvo C for maior do que zero, o algoritmo de busca termina, necessariamente, num número finito de passos.

Proposição-10: Seja $V(C_0)$ o volume do conjunto alvo C_0 . Se $V(S_0) > 0$, o algoritmo de busca termina num número finito de passos.

Prova: Na k -ésima iteração, a relação entre o volume do conjunto alvo C_k e a esfera S_k que o contém é:

$$\frac{V(C_k)}{V(S_k)} = \frac{\alpha \cdot V(C_{k-1})}{\alpha \cdot V(E_{k-1})}$$

pois $R(\alpha, v_{k-1})$ é uma transformação linear e $\det R(\alpha, v_{k-1}) = \alpha$.

Pela Proposição-8:

$$V(E_{k-1}) = c(n) \cdot V(S_{k-1}).$$

Portanto

$$\frac{V(C_k)}{V(S_k)} = \left(\frac{1}{c(n)} \right)^k \cdot \frac{V(C_0)}{V(S_0)}$$

Seja N o menor número inteiro, tal que

$$N > \frac{1}{\log c(n)} \cdot \log \frac{V(C_0)}{V(S_0)}$$

Então, para $k = N$, $V(C_k) > V(S_k)$ o que é um absurdo, pois pela sub-rotina Oráculo o centro da esfera S_k não pertence ao conjunto alvo C_k . Consequentemente o algoritmo de busca termina num número finito de passos, o qual não excede N . //

4. FÓRMULAS DE RECORRÊNCIA

A partir da definição do algoritmo de busca, pode-se escrever as relações de recorrência abaixo, as quais permitem a implementação numérica do mesmo.

Passo 1. Fazer $k = 0$, $r(0) = r_0$, $T(0) = I$ (I = matriz identidade em R^n).

Passo 2. Se $x(k)$ é solução ($x(k) \in C$) terminar. Se $k < N$, vá ao Passo-3. Caso contrário terminar: o problema não tem solução, mais precisamente $V(C) = 0$.

Passo 3. A sub-rotina Oráculo fornece um vetor não nulo $a(k)$.

Passo 4. Calcular:

$$v(k) = \frac{T^t(k) \cdot a(k)}{\|T(k) \cdot a(k)\|} \quad (36)$$

$$x(k+1) = x(k) - \frac{r(k)}{n+1} \cdot T(k) \cdot v(k) \quad (37)$$

$$r(k+1) = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \cdot r(k) \quad (38)$$

$$T(k+1) = T(k) \cdot R(\alpha^{-1}, v(k)) \quad (39)$$

Fazer $k = k+1$ e retornar ao Passo 2.

As relações de recorrência no Passo 4 podem ser simplificadas se definirmos

$$D(k) = r(k) \cdot T(k) \quad (40)$$

Então:

$$x(k+1) = x(k) - \frac{1}{n+1} \cdot D(k) \cdot w(k) \quad (41)$$

$$D(k+1) = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \cdot D(k) \cdot R(\alpha^{-1}, w(k)) \quad (42)$$

com:

$$w(k) = \frac{D^t(k) \cdot a(k)}{\| D(k) \cdot a(k) \|} \quad (43)$$

Nesta forma o algoritmo é semelhante ao de Shor (4).

5. CONCLUSÕES

A Proposição-8 contém o elemento mais importante do algoritmo. A esfera que envolve o conjunto alvo é seccionada por um hiperplano que passa pelo seu centro. A semi-esfera resultante que contém o conjunto alvo é envolvida por um elipsóide de volume mínimo. Em certos casos é possível realizar "cortes mais profundos" da esfera, como o proposto por Wolfe (ref. 6) para resolver um sistema de desigualdades lineares. Obtém-se assim, uma convergência mais rápida.

Como demonstrado na Proposição-10 o algoritmo de busca termina necessariamente num número finito de passos desde que o conjunto alvo tenha um volume diferente de zero. Aspvall e Stone (ref. 2) apresentam demonstrações detalhadas de que o conjunto das soluções de um sistema de desigualdades lineares com coeficientes inteiros ou é vazio, ou tem volume maior do que zero, hipótese esta utilizada por Khachian.

PRINCIPAIS REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. KHACHIAN, L.G., "A Polynomial Algorithm in "Linear Programming", Soviet Mathematics Doklady 20, 191-194, 1979.
2. ASPVALL, B., and R.E. Stone, "Khachiyan's Linear Programming Algorithm", Report STANCS - 79 - 776, Nov. 1979, Department of Computer Science, Stanford University, Stanford, California 94305, USA.
3. LAWLER, E.L., "The Great Mathematical Sputnik of 1979", The Sciences, 12-15, 34-35, September 1980.
4. SHOR, N.Z., "New Development Trends in Nondifferentiable Optimization", Cybernetics, 13, 881-886, 1977 (translated from Kibernetika, 6, 87-91, Nov-Dec 1977).
5. SHOR, N.Z., "Cut-off Method with Space Extension in Convex Programming Problems", Cybernetics, 13, 94-95, Jan-Feb, 1977 (translated from Kibernetika, 13, 94-95, Jan-Feb 1977).
6. WOLFE, P., "A Bibliography for the Ellipsoid Algorithm", IBM Research Center, Yorktown Heights, NY 10598, USA, March, 1980.