ESTIMAÇÃO DO HIATO DO PRODUTO VIA COMPONENTES NÃO OBSERVADOS

Pedro Luiz Valls Pereira*

RESUMO

O Hiato do Produto é usualmente definido pela diferença entre o logaritmo do produto potencial e o logaritmo do produto efetivo, onde o produto potencial é definido pela estimativa do nível que o produto real atingiria se houvesse pleno emprego.

Está implícito na definição de produto potencial um crescimento continuado. Alguns autores criticam esta formulação (veja por exemplo Moreira (1985)) e supõem que, considerando-se o produto industrial, empresários prevêem o crescimento do ano, como a média das taxas verificadas nos dois últimos anos. E investimentos são realizados de forma a manter o grau de utilização do parque industrial constante.

Apresenta-se neste artigo uma forma alternativa de definir o produto potencial que está associada à formulação tradicional. Nesta formulação o produto potencial é definido pela componente de tendência da série do produto efetivo, podendo estar presente outros componentes tais como as de ciclo e sazonalidade.

Portanto o produto efetivo pode ser interpretado como uma série temporal que pode ser decomposta em componentes não observados, i.e., um modelo estrutural na terminologia de Harvey (1985).

* INSTITUTO DE PESQUISAS DO IPEA

A estimativa dos componentes não observados é feita pelo Filtro de Kalman e como subproduto tem-se a estimativa do hiato do produto como a diferença entre o produto efetivo e a componente de tendência. Também como subproduto é possível obter uma série do produto efetivo e do potencial num nível diferente do observacional.

ABSTRACT

The Product Gap is usually defined by the difference between the logarithm of potential product and that of effective product, the former being defined by the estimate of the level that the real product would reach if there were full employment.

Sustained growth is implicit in the definition of potential product. Some authors (such as Moreira (1985)) have criticized this formulation, and suppose that when entrepreneurs consider the industrial product, they make a provision for the year's growth using the average rate of the two previous years. Also, investments are realized so as to maintain the utilization of the industrial complex at a constant level.

This article presents an alternative way of defining potential product, one associated with the traditional formula. This new formulation defines potential product by the trend component of the effective product series, with the possible presence of other components such as cyclical and seasonal.

Effective product may therefore be interpreted as a temporal series that can be broken up into non-observed components, i.e., a structural model in the terminology of Harvey (1985).

The estimate of the non-observed components is made by Kalman's Filter; as a by-product we have the estimate of the product gap as the difference between effective product and the trend component. Another by-product that may be obtained is a series of effective and potential product on a different level from the observational.

1. INTRODUÇÃO

O Produto Potencial é usualmente definido pela estimativa do nível que o produto real atingiria se houvesse pleno emprego. Formalmente, denotando-se o produto por Y_t e assumindo-se um crescimento exponencial, estima-se a regressão:

$$y_t = \ln Y_t = a + bt + u_t \quad (1.1)$$

e o produto potencial (denotado por P_t) é definido por:

$$p_t = \widehat{\ln P_t} = \hat{a} + \hat{b}t \quad (1.2)$$

Está implícito nesta formulação um crescimento continuado, que é pouco razoável para uma economia como a brasileira. Além disto a suposição de uma tendência global é pouco satisfatória do ponto de vista estatístico e econômico, pois há várias mudanças que tornam esta hipótese improvável.

Uma formulação alternativa proposta por Moreira (1985) para definir o Produto Potencial Industrial, supõe que os industriais sejam conservadores tanto quanto às expectativas de crescimento e ao nível de investimento.

Moreira (1985) assume que este conservadorismo pode ser expresso, pelo lado das expectativas de crescimento, pela hipótese de

que a taxa de crescimento do setor industrial num ano é uma média das taxas verificadas nos dois últimos anos. E pelo lado do nível de investimento, os empresários investiriam de acordo com as expectativas de crescimento de forma a manter constante o grau de utilização do parque industrial. Formalmente, e utilizando-se a notação de Moreira (1985), se g_t é a taxa de crescimento do setor industrial e u_t o grau de utilização, estas duas hipóteses podem ser expressas por:

$$g_t^* = \frac{g_{t-1} + g_{t-2}}{2} \quad (1.3)$$

$$u_t^* = u_{t-1}$$

onde por definição $g_t = \frac{y_t}{y_{t-1}} - 1$ e $u_t = \frac{y_t}{p_t}$.

Utilizando-se a hipótese de que o esperado é igual ao realizado, por (1.4) obtém-se que:

$$\frac{p_t}{p_{t-1}} = \frac{y_t}{y_{t-1}} \quad (1.5)$$

Mas pela definição de g_t tem-se que (1.5) é equivalente a $1 + g_t$. Novamente utilizando-se a hipótese de que $g_t^* = g_t$, tem-se que:

$$\frac{p_t}{p_{t-1}} = \frac{\frac{y_{t-1}}{y_{t-2}} + \frac{y_{t-2}}{y_{t-3}}}{2} \quad (1.6)$$

Observe que (1.6) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\dot{p}_t = \frac{\dot{y}_{t-1} + \dot{y}_{t-2}}{2} \quad (1.7)$$

onde, por definição, $\dot{A}_t = \frac{A_t}{A_{t-1}} - 1$, i.e., a taxa de crescimento da variável A_t .

Como $\dot{p}_t = \Delta p_t$ tem-se que enquanto em (1.2) a taxa de crescimento do Produto Potencial é constante e igual a b , nesta outra formulação ela é uma média móvel, de segunda ordem, da taxa de crescimento do Produto Efetivo defasada num período.

Embora a formulação de Moreira (1985) seja menos problemática do que a usual, ambas não utilizam informações importantes da série de produto, já que é difícil acreditar que não exista, pelo menos, uma componente cíclica associada à série de Produto Efetivo. Nestas duas formulações esta possível componente é ignorada.

Propõem-se que a série de Produto Efetivo possa ser escrita como um modelo estrutural de série temporal, i.e.:

$$Y_t = \mu_t + \gamma_t + \psi_t + \varepsilon_t \quad (1.8)$$

onde μ_t é a componente de tendência, γ_t a de sazonalidade, ψ_t a de ciclo e ε_t o componente irregular. O Produto Potencial será então definido pela componente μ_t em (1.8) e o hiato do Produto por:

$$h_t = Y_t - \mu_t$$

Este artigo está organizado da seguinte maneira: na Seção 2 apresenta-se a formulação de modelos estruturais de séries temporais. Na Seção 3 é apresentada a estimação destes modelos por Máxima Verossimilhança através do Filtro de Kalman. Também se apresenta um método para estimar as componentes não observadas de (1.8).

Na Seção 4 aplica-se esta técnica nas estimativas do Produto Potencial da Economia e do Potencial para a Indústria.

2. MODELOS ESTRUTURAIS DE SÉRIES TEMPORAIS

2.1 Introdução

Historicamente Séries Temporais eram decompostas em componentes de tendência, ciclo, sazonalidade e irregular, i.e.:

$$y_t = T_t + C_t + S_t + I_t \quad (2.1)$$

Este procedimento foi relegado a segundo plano com a introdução dos modelos ARIMA, que está intimamente ligada ao aparecimento do livro de Box & Jenkins (1976) cuja primeira edição foi publicada em 1970.

A metodologia de Box & Jenkins pode ser interpretada como a forma reduzida de um modelo da forma (2.1), como veremos a seguir. Por outro lado, devido à facilidade de utilização desta metodologia, os modelos da forma (2.1) foram considerados "ad-hoc" e com pouco embasamento teórico.

Nesta mesma década Harrison & Stevens (1976) apresentaram o Procedimento Bayesiano de Previsão que está relacionado à especificação de uma série de tempo em componentes como a descrita por (2.1).

Este procedimento permitiu dar uma "teoria" para a modelagem de uma série por componentes não observados, como (2.1). Mas alguns pontos fundamentais desta modelagem ainda permaneceram bastante "ad-hoc". Somente na década dos 80 com os trabalhos de Harrison e seus associados, foi possível justificar a "estimativa" sequencial das variâncias dos componentes [veja por exemplo West et alii (1985)].

Com a introdução do Filtro de Kalman para a estimação de séries temporais [Akaike (1974) ou Harvey (1981) para uma sistemati-

zação deste procedimento], foi possível dar uma interpretação clássica ao Procedimento Bayesiano de Previsão, pois este procedimento de "estimação", está relacionado com o Filtro de Kalman que é um método para se obter a verossimilhança de modelos.

A principal vantagem do Procedimento Bayesiano de Previsão é o custo computacional, já que a estimação por Máxima Verossimilhança de modelos da forma (2.1) consome bastante tempo de máquina.

Engle (1978) introduziu o conceito de modelo estrutural em Séries Temporais que é uma volta à formulação de uma série via componentes não observados do tipo (2.1).

Posteriormente Harvey & Todd (1983) especificam cada um dos componentes de (2.1) de uma forma bastante semelhante à de Harrison & Stevens (1976).

2.2 Componente de Tendência

Para a componente de tendência, em vez de assumirmos uma tendência global, adotaremos a formulação que aproxima localmente esta tendência.

Por exemplo, se a tendência puder ser representada por uma função linear no tempo, em vez de assumirmos a tendência global, i.e.:

$$T_t = a + b_t \quad (2.2)$$

assumiremos que esta formulação é válida localmente, isto é, que tanto o nível desta tendência [i.e., a em (2.2)] quanto a taxa de crescimento [i.e., b em (2.2)], evoluem suavemente ao longo do tempo.

Denotando o nível por μ_t e a tendência por β_t , tem-se que:

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t \quad (2.3)$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \xi_t \quad (2.4)$$

onde η_t e ξ_t são ruídos brancos não correlacionados com médias zero e variâncias σ_η^2 e σ_ξ^2 respectivamente.

Se o processo de geração dos dados for uma tendência mais erro, i.e.:

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t \quad (2.5)$$

onde ϵ_t é ruído branco independente de η_t e ξ_t , com média zero e variância de σ_ϵ^2 , tem-se que o modelo é dado pelas equações (2.5), (2.4) e (2.3), que representa a forma estrutural de um modelo ARI-MA.

A forma reduzida para as observações é obtida observando-se que a equação (2.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\beta_t = \frac{\xi_t}{(1 - L)} \quad (2.6)$$

substituindo-se (2.6) em 2.4), obtém-se:

$$(1 - L)\mu_t = \frac{\xi_{t-1}}{(1 - L)} + \eta_t \Leftrightarrow \mu_t = \frac{\xi_{t-1}}{(1 - L)^2} + \frac{\eta_t}{(1 - L)} \quad (2.7)$$

e substituindo-se (2.7) em (2.5), obtém-se:

$$(1 - L)^2 y_t = \xi_{t-1} + (1 - L)\eta_t + (1 - L)^2 \epsilon_t \quad (2.8)$$

que corresponde a um ARIMA (0,2,2) com restrições nos parâmetros do MA.

2.3 Componente de Ciclo

A segunda componente que pode estar presente em séries econômicas é a do ciclo. Poderíamos modelar a componente de ciclo por um ARMA (p,q). Na literatura [veja por exemplo Priestley (1981)] o modelo mais usado é o AR(2), já que este modelo pode gerar movimentos senoidais amortecidos.

Na formulação alternativa, proposta por Harvey (1985), denota-se a componente cíclica por ψ_t , e assume-se um modelo estacionário centrado na frequência λ_c que pertence ao intervalo $[0, \pi]$. A formulação estatística é dada por:

$$\begin{pmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos \lambda_c & \sin \lambda_c \\ -\sin \lambda_c & \cos \lambda_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

onde κ_t e κ_t^* são ruídos brancos não correlacionados com média zero, variância comum σ_κ^2 e ρ , que pertence ao intervalo $[0,1]$, é o coeficiente de amortecimento.

É fácil mostrar que a forma reduzida de (2.9) é dada por:

$$(1 - 2\rho \cos \lambda_c L + \rho^2 L^2) \psi_t = \kappa_t^{**} \quad (2.10)$$

onde κ_t^{**} pode ser escrito como um MA(1) com parâmetros θ e $\sigma_{\kappa^{**}}^2$ e estes parâmetros são as soluções das equações:

$$(1 + \theta^2) \sigma_{\kappa^{**}}^2 = (1 + \rho^2) \sigma_\kappa^2 \quad (2.11)$$

$$\theta \sigma_{\kappa^{**}}^2 = -\rho \cos \lambda_c \sigma_\kappa^2 \quad (2.12)$$

É também fácil mostrar que θ é a solução real, que satisfaz a condição de invertibilidade, de uma equação de 2º grau.

Observe que (2.10) implica num modelo ARMA(2,1) onde as raízes do polinômio da componente autoregressiva são os complexos conjugados $\rho(\cos\lambda_c \pm i \sin\lambda_c)$, cujo módulo é menor do que um, já que $\rho \in [0,1)$.

Observe também que existe uma relação não linear entre os parâmetros do componente autoregressivo e os do componente média-móvel de (2.10). Defina ϕ_1 e ϕ_2 como os coeficientes de L e L^2 no polinômio do lado esquerdo de (2.10). Tem-se que o lado direito de (2.11) é dado por $(1 - \phi_2)\sigma_k^2$ e o de (2.12) por $(-\frac{\phi_1}{2})\sigma_k^2$.

2.4 Componente de Sazonalidade

A componente sazonal, denotada por γ_t é definida como a soma de s fatores sazonais $\gamma_{j,t}$ cada um deles tendo uma especificação do tipo (2.9) com ρ igual a um e a frequência λ_c igual a uma dada frequência sazonal, denotada por $\lambda_j = \frac{2\pi j}{s}$, i.e.,

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{s/2} \gamma_{j,t} \quad (2.13)$$

onde

$$\begin{pmatrix} \gamma_{j,t} \\ \gamma_{j,t}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda_j & \sin\lambda_j \\ -\sin\lambda_j & \cos\lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{j,t-1} \\ \gamma_{j,t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{j,t} \\ \omega_{j,t} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

se $j=1, \dots, (\frac{s}{2})-1$ e

$$\gamma_{j,t} = (\cos\lambda_j) \gamma_{j,t-1} + \omega_{j,t} \quad (2.15)$$

se $j = \frac{s}{2}$ e $\text{Var}(\omega_{j,t}) = \text{Var}(\omega_{j,t}^*) = \sigma_\omega^2$ para todo j .

É fácil mostrar que a forma reduzida de (2.14) é dada por:

$$(1 - 2\cos\lambda_j L + L^2)\gamma_{j,t} = (1 + \theta_j L)\omega_{j,t}^{**} \quad (2.16)$$

para $j=1, \dots, (\frac{s}{2})-1$ com $\theta_j = -\sec\lambda_j \mp \tan\lambda_j$ e $\omega_{j,t}^{**}$ são ruídos brancos independentes com $\text{Var}(\omega_{j,t}^{**}) = -\frac{\sigma_\omega^2}{(1 \pm \sin\lambda_j)}$.

E a forma reduzida de (2.15) é dada por:

$$(1 - \cos\lambda_{\frac{s}{2}} L)\gamma_{\frac{s}{2},t} = \omega_{\frac{s}{2},t} \quad (2.17)$$

Portanto (2.13) é equivalente a:

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{(\frac{s}{2}-1)} \frac{(1 + \theta_j L)\omega_{j,t}^{**}}{1 - 2\cos\lambda_j L + L^2} + \frac{\omega_{\frac{s}{2},t}}{1 + L} \quad (2.18)$$

É fácil mostrar que

$$\left(\prod_{j=1}^{\frac{s}{2}-1} \left(1 - 2\cos\left(\frac{2\pi j}{s}\right)L + L^2 \right) \right) (1+L) = (1+L+L^2+\dots+L^{s-1}) = S(L) \quad (2.19)$$

e que

$$(1 + \theta_j L) \left(\prod_{\substack{j \neq k \\ k=1}}^{\frac{s}{2}-1} (1 - 2\cos\lambda_k L + L^2) \right) (1+L)\omega_{j,t}^{**} \equiv \omega_{j,t}^{***} = MA(s-2) \quad (2.20)$$

para $j=1, \dots, \frac{s}{2} - 1$ e que

$$\prod_{j=1}^{\frac{s}{2}-1} \left(1 - 2 \cos \left(\frac{2\pi j}{s} \right) L + L^2 \right) \equiv \omega_{\frac{s}{2},t}^{***} = MA(s-2) \quad (2.21)$$

e o numerador de (2.18) sendo a soma de $\frac{s}{2}$ MA(s-2) independentes é também um MA(s-2). Portanto tem-se que $S(L) \gamma_t \sim MA(s-2)$.

2.5 Componente Irregular

O componente irregular, denotado por ϵ_t , é geralmente assumido ser um ruído branco com variância σ_ϵ^2 , exceto quando tem-se alguma informação "a priori" sobre este componente para se modelar por um processo estacionário do tipo ARMA(p,q).

Se o processo de geração dos dados puder ser representado por uma série temporal que possa ser decomposta em componentes dos tipos descritos acima, e estes componentes entram de forma aditiva, tem-se que este processo pode ser caracterizado por:

$$y_t = \mu_t + \psi_t + \gamma_t + \epsilon_t \quad (2.22)$$

É fácil ver que a forma reduzida do modelo estrutural geral é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta_s (1 - 2\rho \cos \lambda_c L + \rho^2 L^2) y_t = & \Delta_s (1 - 2\rho \cos \lambda_c L + \rho^2 L^2) \eta_t \\ & + S(L) (1 - 2\rho \cos \lambda_c L + \rho^2 L^2) \xi_{t-1} \\ & + (1 - \theta L) \Delta \Delta_s \kappa_{j,t}^{**} \\ & + MA(s-2) \Delta^2 \omega_{j,t}^{**} \\ & + \Delta \Delta_s (1 - 2\rho \cos \lambda_c L + \rho^2 L^2) \epsilon_t \end{aligned} \quad (2.23)$$

3. FORMULAÇÃO DE MODELOS EM ESPAÇO DE ESTADO

Dada uma série temporal y_t a representação desta série em espaço de estado é dada pelas equações de medida, i.e.:

$$y_t = z' \alpha_t + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

com $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ e de transição, que dá a evolução do vetor de estado α_t , i.e.:

$$\alpha_t = T \alpha_{t-1} + R S_t \quad (3.2)$$

com $\text{Var}(S_t) = Q$.

É fácil ver que a representação dos modelos estruturais em espaço de estado é dada pelas equações (3.1-2) onde o vetor de estado é dado por:

$$\alpha_t = [\mu_t, \beta_t; \psi_t, \psi_t^*; \gamma_{1,t}, \gamma_{1,t}^*, \dots, \gamma_{\frac{s}{2}-1,t}, \gamma_{\frac{s}{2}-1,t}^*, \gamma_{\frac{s}{2},t}, \gamma_{\frac{s}{2},t}^*] \quad (3.3)$$

e o vetor z na equação de medida é dado por:

$$z = [1, 0; 1, 0; 1, 0, \dots, 1, 0] \quad (3.4)$$

A matriz de transição T é facilmente obtida pelas equações que definem cada um dos componentes.

O erro da equação de transição é definido por:

$$S_t = [\eta_t, \xi_t, \kappa_t, \kappa_t^*, \omega_t, \omega_t^*] \quad (3.5)$$

e a matriz R é definida por:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e a matriz de variância e covariância de S_t é definida por:

$$Q = \text{diag}\{\sigma_\eta^2, \sigma_\xi^2, \sigma_\kappa^2, \sigma_\kappa^2, \sigma_\omega^2, \sigma_\omega^2\}$$

3.1 Estimação dos Parâmetros no Domínio do Tempo

Se os erros em (3.1) e (3.2) têm distribuições normais, a função de verossimilhança para o processo de geração dos dados pode ser obtida pelo Filtro de Kalman utilizando-se a decomposição do erro de predição [veja Harvey (1981)]. A estimativa dos parâmetros pode ser obtida por uma rotina numérica que maximizará a verossimilhança, i.e.:

$$\log L = - \left(\frac{T}{2}\right) \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log f_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{v_t^2}{f_t} \quad (3.6)$$

onde v_t é o erro de predição um passo à frente e $\sigma^2 f_t$ é a variância do erro de predição, e estas quantidades são obtidas pelo Filtro de Kalman.

Para se iniciar as recursões do Filtro de Kalman, necessita-se de valores iniciais para a média e variância do vetor de estado, denotados por a_0 e $\sigma^2 P_0$.

No caso de modelos estruturais existem várias formas de iniciar estes dois valores, mas adotaremos a forma mais simples que é assumir $a_0 = 0$ e $P_0 = \kappa I$, onde κ é um número grande.

Este procedimento corresponde a assumirmos que o vetor de estado no instante inicial tem uma distribuição "a priori" difusa [para maiores detalhes veja Harvey & Peters (1984)].

3.2 Estimação de Modelos Estruturais com Falta de Observação

Suponha que as observações são feitas a cada δ período de tempo, onde δ é um inteiro positivo. Para variáveis de estoque isto quer dizer que:

$$y_{\tau}^{\dagger} = y_{\delta\tau} \quad \tau = 1, \dots, T \quad (3.7)$$

e para $t \neq \delta\tau$, y_t é não observado. Para variáveis de fluxo tem-se:

$$y_{\tau}^{\dagger} = \sum_{r=0}^{\delta-1} y_{\delta\tau-r}^{\delta} \quad \text{para } \tau = 1, \dots, T \quad (3.8)$$

Algumas vezes as variáveis de estoque são medidas pela média no período de observação. Neste caso deve-se tratar esta variável como do tipo fluxo já que as observações são dadas por:

$$y_{\tau}^{\dagger} = \frac{1}{\delta} \sum_{r=0}^{\delta-1} y_{\delta\tau-r}^{\delta} \quad \text{para } \tau = 1, \dots, T \quad (3.9)$$

A estimação dos parâmetros é feita utilizando-se o Filtro de Kalman. A representação em Espaço de Estado, dada pelas equações (3.1-2), é válida para o intervalo de tempo unitário, i.e., para $t = 1, \dots, \delta T$.

Para o caso de variável de estoque não é necessário fazer nenhuma modificação nas equações (3.1-2). Mas como o período de observação é dado por $t = \delta, 2\delta, \dots, \delta T$, as equações de atualização são puladas para todo $t \neq \delta, 2\delta, \dots, \delta T$.

Para o caso de variáveis de fluxo, é necessário aumentar o vetor de estado. Neste caso o novo vetor de estado é definido por:

$$\begin{pmatrix} \alpha_t^f \\ y_t^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_t \\ y_t^f \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

onde y_t^f é definido por:

$$y_t^f = \psi_t y_{t-1}^f + z' \alpha_t + \varepsilon_t \quad (3.11)$$

onde ψ_t é definido por:

$$\begin{aligned} \psi_t &= 0 \quad \text{para } t = \delta(\tau-1) + 1, \quad \tau = 1, \dots, T \\ &= 1 \quad \text{caso contrário} \end{aligned} \quad (3.12)$$

É fácil ver que a nova equação de transição para o vetor de estado é dada por:

$$\begin{pmatrix} \alpha_t \\ y_t^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ z' T & \psi_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{t-1} \\ y_{t-1}^f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R & 0 \\ z' R & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

e a nova equação de medida é dada por:

$$y_\tau = (0' \quad 1) \begin{pmatrix} \alpha_t \\ y_t^f \end{pmatrix}, \quad t = \delta\tau, \quad \tau = 1, \dots, T \quad (3.14)$$

O filtro é iniciado como $a_0^f = (\bar{0}, 0)$ e $P_0^f = \kappa I$.

3.3 Interpolação e Distribuição das Observações Intermediárias

Interpolação de observações faltando é facilmente obtida usando-se um algoritmo de suavizamento de ponto fixo [veja Anderson & Moore (1979), Capítulo 7]. O estimador das observações intermediárias é dado por:

$$y_{t/\delta T} = z' a_{t/\delta T}^f, \quad t \neq \delta\tau, \quad \tau = 1, \dots, T \quad (3.15)$$

onde $a_{t/\delta T}$ denota o estimador de suavizamento do vetor de estado usando a informação até o tempo $t = \delta T$.

Distribuição de variáveis agregadas temporalmente também podem ser obtidas através de um algoritmo de suavizamento. Neste caso deve-se adicionar mais um componente ao vetor de estado de forma a obter as observações intermediárias.

Neste caso o novo vetor de estado é definido por:

$$\alpha_t^{ff} = (\alpha_t^f, y_t) \quad (3.16)$$

e adiciona-se uma linha na matriz de transição que corresponde à decomposição da série nos componentes não observados, i.e., equação (3.1).

4. APLICAÇÕES

Esta seção apresenta os resultados obtidos com o programa TEMPAGG.SMS que estima modelos estruturais de séries temporais com falta de observação ou agregação temporal.

Este programa obtém os estimadores de máxima verossimilhança para as variâncias dos diversos componentes, maximizando a função de verossimilhança no domínio do tempo, utilizando a rotina E04JBF da biblioteca de programas da NAG. Esta rotina é da classe Quasi-Newton e permite a maximização com restrições.

Este programa também permite obter as estimativas das observações entre pontos intermediários, i.e., as interpolações se a série sob consideração é do tipo estoque e as distribuições das observações se do tipo fluxo. Para alguns exemplos veja Pereira (1986).

Utilizou-se o Produto Industrial e uma série do PIB real (em cruzeiros de 1970) construída a partir do índice do Produto Real Total. As fontes para os índices de Produto são Zerkowski & Velloso (1982) para os anos de 1920 a 1980 e Contas Nacionais / Conjuntura Econômica para os anos de 1981 a 1984.

O modelo especificado foi do tipo Tendência + Ciclo + Irregular. Devido à definição de hiato foi necessário utilizar a transformação logarítmica nos dados. Desta forma a componente de tendência, que representará o produto potencial, é dada pelas equações (2.3-4)

Para a série do PIB Real as estimativas dos parâmetros obtidas pelo programa TEMPAGG.SMS foram:

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = 0.0000$$

$$\sigma_{\eta}^2 = 0.0000$$

$$\sigma_{\xi}^2 = .1212 \cdot 10^{-4} (.1010 \cdot 10^{-4})$$

$$\sigma_{\kappa}^2 = .1103 \cdot 10^{-2} (.2217 \cdot 10^{-3})$$

$$\lambda_c = .3826 (.6180 \cdot 10^{-1})$$

$$\rho = .9012 (.4186 \cdot 10^{-1})$$

onde os valores entre os parênteses são os desvios das estimativas.

Pelas estimativas dos parâmetros observa-se que:

i) a forma reduzida correspondente a um modelo ARIMA(2,2,3) com restrições não lineares entre os coeficientes do componente AR e do MA;

ii) embora a variância do nível da tendência seja não nula, a um nível de significância de cinco por cento, não se pode rejeitar a hipótese de que esta variância não é significativamente diferente de zero. Tem-se, portanto, que as variâncias da taxa de crescimento e do nível da tendência são nulas implicando numa tendência determinística;

iii) tem-se, portanto, que o modelo que descreve a série do PIB Real é do tipo tendência determinística mais ciclo;

iv) pela estimativa da amplitude, tem-se que o período do ciclo, definido por $\frac{2\phi}{\lambda_c}$, é de 16 anos e 5 meses.

A estimativa do hiato do PIB Real é apresentada no Gráfico 1.

HIATO DO PRODUTO REAL

1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980
-0.0113	-0.0195	0.0356	-0.0008	0.0766	-0.0596	0.1049
-0.0388	-0.0951	-0.0714	0.0035	0.0705	-0.0162	0.0181
0.0229	-0.1179	-0.0448	-0.0035	0.0097	0.0196	-0.0208
0.0746	-0.0429	-0.0534	-0.0069	-0.0345	0.0814	-0.1255
0.0314	-0.0025	-0.082	0.0235	-0.0834	0.1036	-0.1416
0.0011	0.0683	-0.0266	-0.0217	-0.1017	0.0917	
-0.0295	0.0564	-0.041	-0.0107	-0.1279	0.1182	
0.0232	0.0573	-0.0125	0.0207	-0.0955	0.1062	
0.1084	0.0486	0.0128	0.0441	-0.0687	0.0891	
0.0649	0.0115	0.0195	0.073	-0.0687	0.0907	

Para a série do índice do Produto Industrial as estimativas dos parâmetros obtidas pelo programa TEMPAGG.SMS foram:

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = .1374 \cdot 10^{-3} (.4158 \cdot 10^{-3})$$

$$\sigma_{\eta}^2 = .3853 \cdot 10^{-7} (.2443 \cdot 10^{-2})$$

$$\sigma_{\xi}^2 = .2018 \cdot 10^{-4} (.2371 \cdot 10^{-4})$$

$$\sigma_{\kappa}^2 = .1826 \cdot 10^{-2} (.1661 \cdot 10^{-2})$$

$$\lambda_C = .3737 (.6153 \cdot 10^{-1})$$

$$\rho = .9191 (.5486 \cdot 10^{-1})$$

Pelas estimativas dos parâmetros observa-se que:

i) embora as variâncias do nível e da taxa de crescimento da tendência sejam não nulas, a um nível de significância de cinco por cento, não se pode rejeitar a hipótese de que estas variâncias não são significativamente diferentes de zero. Tem-se, portanto, que as variâncias da taxa de crescimento e do nível da tendência são nulas implicando numa tendência determinística;

ii) embora não se possa rejeitar a hipótese de que a variância do ciclo seja nula, optou-se por manter este componente já que ao se comparar o modelo estimado com um somente componente de tendência, o modelo menos parcimonioso foi aquele que apresentou menor A.I.C.;

iii) tem-se, portanto, que o modelo que descreve a série do Produto Industrial é do tipo tendência determinística mais ciclo;

iv) pela estimativa da amplitude tem-se que o período do ciclo, definido por $\frac{2\phi}{\lambda_C}$, é de 16 anos e 10 meses.

A estimativa do hiato do Produto Industrial é apresentada no Gráfico 2 a seguir.

GRÁFICO 2
HIATO DO PRODUTO INDUSTRIAL

HIATO DO PRODUTO INDUSTRIAL

1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980
0.02019	-0.13041	0.0702	0.0281	0.0759	-0.0537	0.1286
-0.03315	-0.18839	0.0822	0.0184	0.0886	-0.0168	0.0075
0.15369	-0.2251	-0.0198	-0.0005	0.0836	0.0294	-0.0509
0.20553	-0.159	-0.041	0.0221	0.0104	0.1052	-0.1843
0.07664	-0.074	-0.0581	0.0034	-0.0166	0.1208	-0.1905
0.04931	-0.0097	-0.0797	0.0161	-0.1237	0.1067	
-0.00468	0.0519	-0.0198	0.0001	-0.1096	0.1531	
0.03787	0.0735	-0.0597	-0.0313	-0.158	0.1224	
0.07106	0.0636	-0.1071	0.0311	-0.1133	0.1241	
0.01504	0.1018	0.0111	0.0492	-0.076	0.1188	

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AKAIKE, H. *Markovian Representation of Stochastic Processes and its applications to the Analysis of Autoregressive-Moving*
Institute of Statistical Mathematics, 26, 363-387, 1974.
- ANDERSON, B. D. O. & MOORE, J.B. *Optimal Filtering*, Englewood Cliffs: Prentice Hall., 1979.
- BOX, G.E.P. & JENKINS, G.M. *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, São Francisco: Holden-Day. 1976.
- Conjuntura Econômica*, 1985.
- ENGLE, R.F. *Estimating Structural Models of Seasonality*, em A. Zellner (ed.) *Seasonal Analysis of Economic Time Series*, Bureau of Census, Washington, 281-308, 1978.
- HARRISON, P.J. & STEVENS, C.F. *Bayesian* *Journal of the*
Royal Statistical Society, B, 38, 205, 247., 1976.
- HARVEY, A.C. *Time Series Models*, Deddington: Philip Allan, 1981.
- HARVEY, A.C. *Trends and Cycles in Macroeconomic*
ness and Economic Statistics, 3, 216-227, 1985.
- HARVEY, A.C. & PETERS, S. *Estin* *Series*
Models, LSE Econometrics Programme Discussion Paper, A.44, 1984.
- MOREIRA, A.R. *Balanço de Pagamentos*
 1985.
- PEREIRA, P.L.V. *Estimação de Modelos Estruturais de Séries Temporais com Falta de Observação*, artigo apresentado no V Encontro Regional da Região Sudeste da S.B.E., Piracicaba, São Paulo, 1986.
- PRIESTLEY, M. *Spectral Analysis and Time Series*, New York: Academic Press, 1981.
- WEST, N.; HARRISON, P.J. & MIGON, H.S. *Dynamic Generalized Linear Models and Bayesian Forecasting*, Journal of the American Statistical Association, 80, 73-97, 1985.
- ZERKOWSKI, R.M. & VELOSO, M.A.G. *Seis décadas de Economia Brasileira através do PIB*, *Revista Brasileira de Economia*, 36, 331-338, 1982.