NOÇÕES DE DESIGUALDADE E ÍNDICES DE CONCENTRAÇÃO: O CASO TRIDIMENSIONAL*

Lauro Ramos**

Ricardo Paes de Barros**

Resumo

Este trabalho tem por objetivo a avaliação de acordo com noções alternativas de desigualdade, do desempenho dos índices de concentração do uso mais difundido no que tange à ordenação de variáveis aleatórias com médias idênticas em termos dos níveis de desigualdade por elas encerradas. Com o intuito de permitir a ilustração gráfica e simplificar o tratamento analítico, a análise estará restrita ao caso de uma população formada por três indivíduos.

Abstract

This paper deals with the ordering of random variables with equal mean according to their level of inequality. The analysis is developed under alternative notions of inequality and considers the most commonly used inequality indices. In order to simplify the graphical illustrations, the exercise is developed for the case of a 3-individual population.

1. Introdução.

Este trabalho tem por objetivo a avaliação, de acordo com noções alternativas de desigualdade, do desempenho dos índices de concentração de uso mais difundido, no que tange à ordenação de variáveis aleatórias com médias idênticas em termos dos níveis de desigualdade por elas encerrados. As noções de desigualdade a serem privilegiadas aqui são aquelas induzidas pelos critérios de Pigou-Dalton, de Lorenz, do bem-estar e de Shorrocks-Foster, conforme discutido em detalhes em Barros e Ramos (1989).

De modo geral, seja $\Omega = \{1, \dots, n\}$ um espaço amostral formado por n indivíduos. Suponha que $P[\omega = i] = 1/n, i = 1, \dots, n$. Denotemos por X e Y variáveis aleatórias não-negativas com média igual

*O trabalho é diretamente baseado em Barros e Ramos (1989). Agradecemos várias sugestões, e correções, indicadas por um parecerista anônimo.

**(IPEA-RIO)

a 1, definidas neste espaço. Assim, $X: \Omega \rightarrow \mathbf{R}_+$ e $Y: \Omega \rightarrow \mathbf{R}_+$, com $(1/n)\Sigma X(i) = (1/n)\Sigma Y(i) = 1$.¹ Por mera questão de conveniência denotaremos $X(i)$ e $Y(i)$ por X e Y , respectivamente, e sempre nos referiremos a eles como sendo a renda do indivíduo i .

Mais geralmente, seja $\mathcal{F}$ a família de todas as variáveis aleatórias definidas em $(\Omega, 2^\Omega, P)$ com média igual a 1, isto é

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathbf{R}^n: X_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \text{ e } \Sigma X_i = n\}.$$

É claro, cada noção de desigualdade implica uma ordenação entre os elementos de $\mathcal{F}$, ordenações estas não necessariamente equivalentes e de caráter parcial. Isto é, existem subconjuntos não-vazios de $\mathcal{F}$ cujos elementos não são comparáveis conclusivamente de acordo com os critérios supracitados. Em vista da necessidade de ordem prática de se comparar duas variáveis aleatórias quaisquer, várias medidas, normalmente conhecidas como índices de concentração, que geram uma ordenação completa foram desenvolvidas, mesmo que às vezes às custas de um embasamento precário.

Sendo assim, é forçoso que estes índices não sejam perfeitamente compatíveis com, por exemplo, o critério do bem-estar, na medida em que ordenam variáveis aleatórias em princípio não-ordenáveis, sendo o exame da extensão destes "conflitos" o núcleo central destas notas.

2. Noções de desigualdade.

Antes de prosseguir adiante na comparação destas ordenações, cabe explicitar as noções de desigualdade a que se farão referência no texto.

Inicialmente suponha que $X \in \mathcal{F}$ e que Y pode ser obtido a partir de X via:

- (i) $Y_i = X_i$ para todo $i = 1, \dots, n$ e $i \neq k, l$
 - (ii) $Y_k = X_k + \lambda$; $Y_l = X_l - \lambda$
- onde λ é restrito de tal forma que:
- (iii) $\min(Y_k, Y_l) > \min(X_k, X_l)$

¹Ao longo do trabalho todos os somatórios, salvo aviso explícito em contrário, serão entendidos como variando de 1 até n .

Neste caso diz-se que Y^2 pode ser obtido a partir de X , via uma *transferência progressiva tipo Pigou-Dalton*. De modo similar, invertendo o sinal da desigualdade em (iii) e adicionando a restrição de que $Y_k, Y_l \geq 0$ em (ii), diz-se que Y pode ser obtido a partir de X , via uma transferência regressiva do tipo Pigou-Dalton. A partir desta definição pode-se enunciar o critério de Pigou-Dalton da seguinte forma:

Critério de Pigou-Dalton: A variável aleatória $Y \in \mathcal{F}$ é mais *desigual* que $X \in \mathcal{F}$ segundo Pigou-Dalton quando X pode ser obtida de Y , via uma sequência finita e não-vazia de transferências progressivas do tipo Pigou-Dalton.

O critério de Lorenz está diretamente baseado no conceito de dominância de Lorenz e pode ser enunciado da seguinte maneira:

Critério de Lorenz: A variável aleatória $X \in \mathcal{F}$ é mais *desigual* que $Y \in \mathcal{F}$, segundo Lorenz, quando Y Lorenz-domina X , isto é, quando a curva de Lorenz associada a X nunca está acima da correspondente a Y e está abaixo desta em pelo menos um ponto.

Uma maneira alternativa de obter uma ordenação das variáveis aleatórias em $\mathcal{F}$, segundo seus níveis de desigualdade, é através do enfoque utilitário e pode ser assim resumida:

Critério de bem-estar: Para $X, Y \in \mathcal{F}$, diz-se que X é mais desigual que Y quando Y $\mathcal{S}$ -domina X , isto é, $\mathcal{W}(X) < \mathcal{W}(Y)$ para toda e qualquer função de bem estar $\mathcal{W}$ que seja Schur-côncava.

É possível mostrar (Barros e Ramos 1989) que estas três noções de desigualdade, apesar de embasamentos distintos, geram ordenações equivalentes entre os elementos de $\mathcal{F}$. A importância desta constatação reside no fornecimento de um respaldo teórico elegante para a utilização de curvas de Lorenz na comparação de variáveis aleatórias distintas em termos do seu grau de igualdade, usualmente justificada apenas a nível intuitivo e/ou axiomático, sem comprometimento da generalidade das funções de bem-estar admissíveis.

Por último, a extensão proposta por Shorrocks e Foster (1987) no sentido de expandir o subconjunto de $\mathcal{F}$ passível de comparação inequívoca pode ser assim formalizada:

²Note que é imediato mostrar que, nestas condições, $Y \in \mathcal{F}$.

Critério de Shorrocks-Foster: A variável aleatória $Y \in \mathcal{F}$ é dita menos desigual que a variável aleatória $Z \in \mathcal{F}$ se:

- (i) Y pode ser obtida a partir de Z através de uma sequência finita e não-vazia de transferências progressivas do tipo Pigou-Dalton;
- (ii) Y pode ser obtida a partir de Z via uma sequência finita e não-vazia de *pares de transferências compostas* do tipo Pigou-Dalton (isto é, *uma progressiva e uma regressiva*), desde que, a cada passo, (a) a transferência progressiva seja a mais próxima à cauda inferior, (b) o indivíduo doador nesta possua renda menor que o receptor na transferência regressiva e (c) a variância final não seja maior que a variância inicial.

De acordo com esta nova noção de desigualdade é possível ordenar variáveis aleatórias antes não-comparáveis, devido às intersecções nas suas respectivas curvas de Lorenz, sendo acrescentado à região de comparabilidade um subconjunto das curvas de Lorenz que se interceptam: em havendo apenas uma intersecção, e desde que a variável aleatória, cuja curva é mais alta nos percentis inferiores, seja também a de menor variância, esta é considerada preferível à outra segundo esta noção.

3. O caso tridimensional.

Com o intuito de permitir a ilustração gráfica e simplificar o tratamento analítico, vamos restringir a análise ao caso em que a população é formada por apenas três indivíduos. Seja Z uma variável aleatória pertinente a esta população, isto é, $Z \in \mathcal{F} = \{X \in \mathbb{R}_+^3 : X_1 + X_2 + X_3 = 3\}$. Sem embargo, vamo-nos ater à análise dos casos em que $Z_1 \leq Z_2 \leq Z_3$, ou seja, vamo-nos restringir agora ao subconjunto $\mathcal{G} = \{X \in \mathcal{F} : X_1 \leq X_2 \leq X_3\}$ (vale notar que $\mathcal{F}$ é formado pela união de $\mathcal{G}$ com suas permutações). No gráfico 1 a seguir este conjunto corresponde ao triângulo que contém o ponto Z .

Para cada $Z \in \mathcal{G}$ pode-se definir quatro subconjuntos de $\mathcal{G}$, conforme também indicado no gráfico 1, da seguinte maneira:

- (i) $\mathcal{A}(Z) = \{X \in \mathcal{G} : X \neq Z, \quad X_1 \leq Z_1, X_3 \geq Z_3\}$
- (ii) $\mathcal{B}(Z) = \{X \in \mathcal{G} : X \neq Z, \quad X_1 \geq Z_1, X_3 \leq Z_3\}$
- (iii) $\mathcal{C}(Z) = \{X \in \mathcal{G} : X_1 > Z_1, \quad X_3 > Z_3\}$
- (iv) $\mathcal{D}(Z) = \{X \in \mathcal{G} : X_1 < Z_1, X_3 < Z_3\}$

Gráfico 1.

Critério de Pigou-Dalton (3D)

Note que pelo critério de Pigou-Dalton uma variável aleatória $Z \in \mathcal{G}$ é menos desigual do que qualquer $X \in \mathcal{A}(Z)$, uma vez que é possível mostrar que qualquer $X \in \mathcal{A}(Z)$ pode ser obtida a partir de Z , via um par de transferências regressivas. Para provar este fato dois casos devem ser considerados: (i) $X_2 > Z_2$ e (ii) $X_2 < Z_2$. Defina $\lambda = Z_1 - X_1$ e $\delta = X_3 - Z_3$. No caso (i) X pode ser obtida a partir de Z por intermédio da transferência de δ do indivíduo 1 para o 3 e de $\lambda - \delta (= Z_1 - X_1 + Z_3 - X_3 = X_2 - Z_2 > 0)$ do indivíduo 1 para o 2. Com base nestas transferências teremos:

$$X_1 = Z_1 - \delta - (\lambda - \delta),$$

$$X_2 = Z_2 + \lambda - \delta,$$

$$X_3 = Z_3 + \delta.$$

No caso (ii) X pode ser obtida a partir de Z , via uma transferência de λ unidades do indivíduo 1 para o 3 e de $\delta - \lambda$ unidades do indivíduo 2 para o 3, isto é,

$$\begin{aligned}X_1 &= Z_1 - \lambda, \\X_2 &= Z_2 - (\delta - \lambda), \\X_3 &= Z_3 + \delta.\end{aligned}$$

Similarmente, Z é considerado mais desigual pelo critério de Pigou-Dalton que qualquer variável aleatória em $\mathcal{B}(Z)$.

Infelizmente tem-se que, em geral, $\mathcal{F} - (\mathcal{A}(Z) \cup \mathcal{B}(Z)) \neq \phi$ e, portanto, existem elementos de $\mathcal{G}$ que não podem ser comparados a Z simplesmente usando o critério de Pigou-Dalton. De fato $\mathcal{F} - (\mathcal{A}(Z) \cup \mathcal{B}(Z)) = \mathcal{C}(Z) \cup \mathcal{D}(Z)$. Note que elementos em $\mathcal{C}(Z)$ podem ser obtidos a partir de Z , via transferências do indivíduo 2 para os indivíduos 1 e 3. Similarmente, distribuições em $\mathcal{D}(Z)$ só podem ser obtidas a partir de Z , via transferências dos indivíduos 1 e 3 para o indivíduo 2. Portanto, tanto elementos em $\mathcal{C}(z)$ quanto em $\mathcal{D}(Z)$ só podem ser obtidos via uma transferência progressiva e uma regressiva, o que impede o uso do princípio de Pigou-Dalton para ordená-los.

A mesma conclusão, naturalmente, é atingida via aplicação do critério de Lorenz. Para qualquer $X \in \mathcal{A}(Z)$ é imediato que

- (i) $X_1 \leq Z_1$ e $X_1 + X_2 < Z_1 + Z_2$ ou
- (ii) $X_1 < Z_1$ e $X_1 + X_2 \leq Z_1 + Z_2$

Conseqüentemente, a curva de Lorenz associada a X situa-se abaixo daquela associada a Z e, portanto, X é mais desigual que Z , segundo o critério de Lorenz. Analogamente, pode-se mostrar que a curva de qualquer $X \in \mathcal{B}(Z)$ está acima da de Z . Para qualquer $X \in \mathcal{C}(Z)$, têm-se que $X_1 > Z_1$ e $X_1 + X_2 < Z_1 + Z_2$ (uma vez que $X_3 > Z_3$) e, portanto, todos têm curvas de Lorenz que interceptam a de Z , não podendo assim ser comparadas a esta última. Similarmente, todo $X \in \mathcal{D}(Z)$ apresenta o mesmo comportamento.

Finalmente, pode-se também mostrar que a aplicação do critério do bem-estar gera o mesmo resultado. Para tanto, basta constatar que, como decorrência do lema 1 em Barros e Ramos (1989), uma

função é Schur-côncava se e somente se a sua curva de nível associada a Z separa os conjuntos $\mathcal{A}(Z)$ e $\mathcal{B}(Z)$, como a curva ww no gráfico anterior. Note que qualquer ponto em $\mathcal{B}(Z)$ pode ser obtido via uma sequência de combinações convexas entre Z e suas permutações e, portanto, conforme o conceito de concavidade de Schur, é superior a Z . Do mesmo modo, Z pode ser obtido a partir de qualquer ponto em $\mathcal{A}(Z)$ e é, assim, superior a qualquer deles. Por fim, como o critério estabelece que a comparação tem que se manter para qualquer função Schur-côncava, ou seja, para qualquer curva de nível que separe $\mathcal{A}(Z)$ e $\mathcal{B}(Z)$, têm-se que pontos em $\mathcal{C}(Z)$ e $\mathcal{D}(Z)$ não são ordenáveis em relação à variável Z , uma vez que os casos-limite são as linhas vertical e horizontal passando por Z .

Como já visto, o critério de Shorrocks-Foster permite a ampliação da região de comparabilidade, via incorporação de parte das regiões $\mathcal{C}(Z)$ e $\mathcal{D}(Z)$. A nova fronteira, mostrada no gráfico 2, é dada por $\sigma^2(X) = \sigma^2(Z)$, isto é:

$$(1/3)[X_1^2 + X_3^2 + (3 - X_1 - X_3)^2] - 1 = (1/3)[Z_1^2 + Z_3^2 + (3 - Z_1 - Z_3)^2] - 1 \quad (1)$$

Agora, de acordo com este critério, as variáveis aleatórias em $\mathcal{C}_1(Z)$ são ditas menos desiguais que Z , pois embora tendo curvas de Lorenz que se interceptam com a de Z , podem ser obtidas a partir desta via uma sequência finita e não-vazia de pares de transferências compostas nos moldes do critério de Shorrocks-Foster, enquanto que aquelas em $\mathcal{D}_1(Z)$, por raciocínio inverso, são mais desiguais que Z . Assim, parte das regiões $\mathcal{C}(Z)$ e $\mathcal{D}(Z) - \mathcal{C}_1(Z)$ e $\mathcal{D}_1(Z)$ — são incorporadas à região de comparabilidade.³

Por último, resta verificar como a ordenação completa implicada por alguns índices de concentração se compara com a ordenação parcial gerada por estes critérios. Para tal, vamos primeiro introduzi-los e derivar sua forma específica para o caso de uma população de três indivíduos.

³Vale notar que os pontos nas regiões $\{\mathcal{C}(Z) \cap \overline{\mathcal{C}}(Z)\}$ e $\{\mathcal{D}_1(Z) \cap \overline{\mathcal{D}}_1(Z)\}$ permanecem não-comparáveis com Z . A ordenação é, portanto, ainda parcial.

Gráfico 2.

Critério de Shorrocks-Fostern (3D)

3.1. Principais índices de concentração.

a) Coeficiente de Gini

O coeficiente de Gini, associado à variável aleatória X , é dado pela seguinte expressão no caso discreto:

$$G(X) = [(2/n^2\mu) \cdot \sum_i iX_i] - (1/n) - 1$$

No caso de uma população de três indivíduos com suas rendas já ordenadas e média igual a 1, o coeficiente de Gini é dado por:

$$G(X) = (2/9)(X_3 - X_1) \quad (2)$$

b) Coeficiente de Variação

O coeficiente de Variação é dado por:

$$C(X) = \frac{\sigma(X)}{\mu(X)} = \left(\frac{(1/n)\Sigma X_i^2 [(1/n)\Sigma X_1]^2}{((1/n)\Sigma X_1)^2} \right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{(1/n)\Sigma X_i^2}{((1/2)\Sigma X_i)^2} - 1 \right)^{1/2}$$

expressão esta que, no presente caso, reduz-se a:

$$C(X) = ((2/3)[X_1^2 + X_3^2 + X_1X_3 + 3(1 - X_1 - X_3)])^{1/2} \quad (3).$$

c) Índices de Theil

As medidas baseadas na teoria da entropia, propostas por Theil, T e L podem ser escritas como segue

$$T(X) = (1/n)\Sigma (X_i/\bar{X}) \ln(X_i/\bar{X}) = \frac{(1/n)\Sigma X_i \ln(X_i)}{(1/n)\Sigma X_i} - \ln((1/n)\Sigma X_i)$$

e

$$L(X) = (1/n)\Sigma \ln(\bar{X}/X_i) = \ln((1/n)\Sigma X_i) - (1/n)\Sigma \ln(X_i).$$

Temos, portanto, que para o caso de três indivíduos:

$$T(X) = (1/3)(X_1 \ln X_1 + X_3 \ln X_3 + (3 - X_1 - X_3) \ln(3 - X_1 - X_3)) \quad (4)$$

e

$$L(X) = -(1/3)(\ln X_1 + \ln X_3 + \ln(3 - X_1 - X_3)) \quad (5)$$

d) Variância dos Logaritmos

Para toda variável aleatória $X \in \mathcal{F}$, a variância de seu logaritmo, V , pode ser obtida via

$$V(X) = (1/n)\Sigma (\ln X_i)^2 - ((1/n)\Sigma \ln(X_i))^2$$

No caso particular em análise, têm-se que:

$$V(X) = (1/3)((\ln X_1)^2 + (\ln X_3)^2 + (\ln(3 - X_1 - X_3))^2) - ((\ln X_1 X_3 (3 - X_1 - X_3))/3)^2$$

3.2. Avaliação gráfica dos principais índices.

As curvas de nível do coeficiente de Gini, do coeficiente de variação,⁴ da variância dos logaritmos e dos T e L de Theil são mostradas no Gráfico 3. Obviamente o conjunto de pontos à direita das respectivas curvas de nível apresentam valores menores para o índice em questão, o contrário ocorrendo para os pontos à esquerda. A análise deste gráfico deixa claro que todos estes índices são compatíveis com o critério de Pigou-Dalton, de Lorenz, e do bem-estar, no sentido que ordenam da mesma maneira qualquer par ordenável por aqueles critérios,⁵ isto é, o segundo quadrante relativo à Z está à esquerda das respectivas isoquantas, enquanto o quarto quadrante está à direita.

No que concerne à extensão de Shorrocks-Foster, vê-se que tanto o coeficiente de Gini quanto o coeficiente de Variação não a satisfazem (este por considerar os pontos na curva de separação como equivalentes a Z). Vale lembrar que isto se deve ao fato que o Gini é mais sensível às transferências nas proximidades da moda, enquanto o coeficiente de variação é uniformemente sensível ao longo de todo espectro de renda. Os demais índices respeitam o princípio de sensibilidade decrescente às transferências e, portanto, são compatíveis com o critério de Shorrocks-Foster.⁶

Deste modo, parece lícito concluir que se a satisfação dos critérios de Lorenz e Shorrocks-Foster é considerada desejável, então os índices

⁴Idêntica à da variância, como pode ser depreendido da comparação de (1) e (3) (ou diretamente da própria definição do coeficiente de Variação).

⁵Note que a variância dos logaritmos satisfaz o critério de Dalton-Pigou neste exemplo, mas que esta não é uma propriedade global deste índice (ver, dentre outros, Anand (1983)).

⁶Novamente, esta não é uma propriedade geral da variância dos logaritmos, haja vista que este índice nem sempre satisfaz o princípio das transferências de Dalton-Pigou.

Gráfico 3.

Curvas de nível: principais índices

de Theil são os mais adequados dentre o conjunto dos índices de concentração mais comuns analisados aqui.

(Submetido em janeiro 1991. Revisado em março 1992)

Referências

- Allison, P. 1978. "Measures of inequality." *American Sociological Review* **43**: 865-880.
- Anand, S. 1983. *Inequality and Poverty in Malasia: Measurement and Decomposition*. New York: Oxford University Press.

- Atkinson, A. B. 1970. "On the measurement of inequality." *Journal of Economic Theory* 2:244-263.
- Barros, R. P. & Ramos, L. 1989. "Medidas de Desigualdade." Rio de Janeiro. Terceira Escola de Séries Temporais e Econometria.
- Bourguignon, F. 1979. "Decomposable income inequality measures." *Econometrica* 47:901-20.
- Dasgupta, P., Sen, A. & Starrett, D. 1973. "Notes on the measurement of inequality." *Journal of Economic Theory* 6:180-187.
- Fields, G.S. 1987. "Measuring inequality change in an economy with income growth." *Journal of Development Economics* 26:357-374.
- Fields, G.S. & Fei, C. 1978. "On inequality comparisons." *Econometrica* 46:303-16.
- Foster, J.E. & Shorrocks, A.F. 1988. "Inequality and poverty ordering." *European Economic Review* 32:654-661.
- Foster, J.E. 1983. "An axiomatic characterization of the Theil measure of income inequality." *Journal of Economic Theory* 31:105-121.
- Morris, C. 1972. *Measures of Relative Income Inequality*. Santa Monica: Rand.
- Sen, A. 1973. *On Economic Inequality*. New York: Norton.
- Shorrocks, A. F. 1980. "The class of additively decomposable inequality measures." *Econometrica* 48.
- _____. 1983. "Ranking income distributions." *Econômica* 50:3-17.
- Shorrocks, A. F. & Foster, J.E. 1985. "Transfer sensitive inequality measures." *Review of Economic Studies* 54:485-97.
- Theil, H. 1967. *Economics and Information Theory*. Amsterdam: North-Holland.