EQUILIBRIUM THEORY IN INFINITE DIMENSIONAL SPACES*

Flávio Marques Menezes**

Este é o primeiro número da nova série da editora Springer-Verlag, "Studies in Economic Theory", editada por C.D. Aliprantis (Departamento de Matemática, IUPUI, Indianápolis, IN, EUA) e N.C. Yannelis (Departamento de Economia, Universidade de Illinois, Champaign, IL, EUA). Mais uma vez essa editora demonstra que está na vanguarda da divulgação científica na área de teoria econômica avançada.

Nesta coletânea, são apresentados estudos relativos aos diversos conceitos de equilíbrio, tais como equilíbrio Walrasiano, ótimo de Pareto, Núcleo, equilíbrio de Nash e equilíbrios seqüencial e correlacionado, em espaços de dimensão infinita. Em particular, os artigos foram organizados de forma a propiciar ao leitor uma visão de como as principais idéias evoluíram (e estão ainda evoluindo) e de como foi necessário o desenvolvimento de novos instrumentos para abordar os problemas existentes quando analisamos economias ou jogos em espaços infinitos.

Alguns trabalhos foram escritos no início da década de 70, enquanto que outros refletem os resultados de pesquisas correntes. Dessa forma, é possível verificar o progresso realizado, tanto em termos técnicos quanto de conceitos, nos últimos vinte anos. É possível, também, verificar-se a superposição em termos das técnicas empregadas, tanto no estudo da teoria dos jogos quanto na análise de equilíbrio geral, em um contexto de espaços (de estratégias e de mercadorias, respectivamente) com dimensões infinitas.

Entretanto, não se trata de um tratado completo sobre o assunto, mas sim de um conjunto de seções variadas representando diferentes direções para o leitor, de tal forma que podem ser lidos de forma

---

*Editado por M.A. Khan & N.C. Yannelis, Berlin, New York:Springer-Verlag, 1991.

**Department of Economics, University of Illinois at Urbana-Champaign

independente. Aliás, paradoxalmente, o principal defeito dessa obra relaciona-se a tal diversidade, uma vez que os editores não apresentam uma introdução que guie o estudante e/ou pesquisador através das conexões existentes entre os diversos assuntos e das discrepâncias entre a teoria de equilíbrio geral em dimensões finitas e a mesma teoria em dimensões infinitas. Por exemplo, que estudante não se lembra de como a brilhante introdução de Hildebrand ao livro "Mathematical Economics: Twenty Papers of Gerard Debreu" (1983, Cambridge University Press) auxiliou na melhor compreensão da obra de Debreu?

Em termos dos pré-requisitos para a leitura dessa obra, o leitor deve estar familiarizado com os conceitos básicos da análise funcional, em seus três principais componentes: topologia, teoria da medida e álgebra linear. Em particular, é necessário o conhecimento dos elementos da teoria do espaço de Banach, inclusive o teorema de Hahn-Banach e as propriedades básicas das topologias fraca e fraca estrela. Esses resultados podem ser redefinidos em termos de uma terminologia mais geral, relativa a espaços localmente convexos e compatível com as hipóteses do teorema do ponto fixo de Fan-Glicksberg. Destacamos, entre as referências básicas, as seguintes obras: Aliprantis e Burkinshaw (1985), Castaing e Valadier (1977), Dinculeanu (1973), Dugundji (1966), Dundorf e Schwartz (1958), Jameson (1970), Kelley (1955), Kelley e Namioka (1963), Kuratowski (1966), Royden (1988), Shaefer (1974, 1986) e Tulcea e Tulcea (1969).

Esse livro é organizado em sete seções. A primeira seção contém dois ensaios, de autoria de N. C. Yannelis, onde são demonstrados alguns dos resultados que serão utilizados no restante do livro. Trata-se de uma revisão bastante competente do trabalho de diversos autores. Em particular, a análise da existência de equilíbrio com um número infinito de bens requer a generalização do arcabouço teórico de Aumann (1965). Ao invés de analisarmos a integração de correspondências com valores em espaços de dimensões finitas, devemos estudar a integração de correspondências com valores em espaços de Banach.

Assim, no primeiro ensaio são estudadas a convergência sequencial fraca em L_p , a compactabilidade fraca em L_p , as propriedades de um

conjunto de seleções integráveis de uma correspondência e a integral de Gel'fand. O primeiro ensaio contém também uma aplicação desses resultados ao problema de existência de equilíbrio competitivo em uma economia abstrata com um espaço de medida dos agentes (cuja técnica deve-se a Debreu). No segundo ensaio são analisadas diversas propriedades de correspondências com duas variáveis. Estuda-se, especificamente, a existência de seleções do tipo caratheodory, de pontos fixos randômicos e de elementos máximos aleatórios.

A segunda seção consiste de três ensaios que analisam, respectivamente, a existência de equilíbrio competitivo (Bewley), o núcleo (Yannelis) e os teoremas do bem-estar (Becker) em uma economia com um espaço de mercadorias de dimensão infinita. O trabalho de Bewley baseia-se em um texto para discussão do CORE de 1973. O trabalho do Yannelis reproduz o texto para discussão 214, de 1985, da Universidade de Minnesota. Uma das partes mais interessantes e mais instrutiva desse ensaio trata-se da demonstração da equivalência entre o lema de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (em sua versão mais geral demonstrada por Fan (1962)), o teorema de Browder e o teorema de existência de elementos máximos. Becker, por sua vez, apresenta uma revisão da literatura existente sobre versões dos teoremas de bem-estar em dimensões infinitas, enfatizando o problema com o preço de suporte em economias com um número finito de agentes. O conceito de preferências próprias foi introduzido com o objetivo de obter tal preço de suporte.

A terceira seção, que trata da equivalência entre o núcleo e equilíbrio competitivo, consiste de três ensaios. O primeiro, de autoria de Gabszewics, baseia-se em sua tese de doutorado de 1971 e estende o famoso teorema de Edgeworth-Scarf-Debreu para uma economia com infinitos bens. O trabalho de Mertens praticamente reproduz um texto para discussão do CORE de 1970, onde se demonstra a equivalência acima mencionada em uma economia com um espaço de medida dos agentes sem átomos e com espaço de mercadorias L_∞ dotado de uma topologia Mackey $\tau(L_\infty, L_1)$. Cheng, no último ensaio desta seção, estabelece um princípio geral de equivalência entre alocações quase-Walrasianas e o núcleo de uma economia sem átomos e com um número infinito de mercadorias.

Na quarta seção, a análise estende-se à existência de equilíbrio com infinito número de bens e de agentes. O primeiro ensaio desta seção é de autoria de Bewley e se origina de sua tese de Ph.D. de 1970. Khan e Yannelis, ao contrário de Bewley, não se utilizam do teorema auxiliar de Aumann (1966). Além disso, esses autores obtêm a existência de equilíbrio relaxando a hipótese de que o espaço de medida dos agentes não tenha átomos. Eles também assumem que o conjunto de consumo de cada agente é um subconjunto compacto fraco ou de espaço de funções consumo em um espaço métrico compacto ou de espaço de Lebesgue L_∞ . Rustichini e Yannelis, no terceiro ensaio, argumentam que, na presença de um infinito número de bens, o espaço de medida dos agentes utilizado por Aumann (ou seja, o intervalo $[0,1]$ dotado da medida de Lebesgue) não é o mais apropriado para se modelar a noção de competição perfeita. Além de prover um espaço mais adequado, os autores demonstram a existência de um equilíbrio.

Nas seções seguintes fica ainda mais aparente a relação entre a teoria dos jogos e a teoria de equilíbrio geral. Na quinta seção discute-se o conceito de equilíbrio correlacionado introduzido por Aumann (1974, 1987). Tal conceito resulta da caracterização do conjunto de soluções que, por sua vez, resultam do conhecimento comum sobre a racionalidade dos jogadores.

~ Dessa forma, os jogadores podem, racionalmente, basear suas ações em um instrumento de correlação (isto é, um conjunto de sinais não-definidos *a priori* como parte do jogo). Se os sinais de diferentes jogadores são correlacionados, então as ações resultantes também podem ser correlacionadas, o que leva a soluções que diferem dos equilíbrios de Nash. Em outras palavras, um equilíbrio correlacionado é um conjunto de “crenças” (“beliefs”) sobre as ações dos jogadores que pode ser sustentado por algum mecanismo de correlação.

Rustichini e Yannelis proveram, no primeiro ensaio desta seção, condições suficientes para a existência de tal equilíbrio em jogos não-cooperativos com um número finito de jogadores. Nowak demonstra, no segundo ensaio, a existência de equilíbrio correlacionado fraco (como definido por Moulin e Vial (1978)) para jogos descontínuos, de soma diferente de zero, com espaços de estratégias de Hausdorff

compactos. Cotter, por sua vez, examina a definição de equilíbrio com comunicação para jogos nos quais o espaço dos tipos dos agentes pode ser arbitrário. Esse autor demonstra a versão correspondente do princípio da revelação e compara o conjunto de equilíbrio com os conceitos similares de equilíbrios correlacionados de estratégia e de ações (propostos em, respectivamente, Cotter (1990) e Cotter (1989)).

A sexta seção trata de jogos com um número infinito de agentes. O primeiro ensaio, de autoria de Mas-Collel, é uma reprodução do relatório técnico 274 (IMSSS, Stanford) de 1978, e consiste de uma abordagem axiomática para o estudo de eficiência em jogos não-cooperativos. Parte desse trabalho foi publicado anteriormente em Dubey, Mas-Collel e Shubik (1980) e Mas-Collel (1984). Khan e Sun complementam, no segundo ensaio, a análise de Mas-Collel ao demonstrar que é possível tornar simétrica a distribuição de equilíbrio Cournot-Nash (cuja existência foi demonstrada por Mas-Collel) em um jogo com um número finito de ações e um número infinito de jogadores. Balder e Yannelis, por sua vez, provam a existência dos equilíbrios de Nash aleatório e Bayesiano em jogos com um espaço de medida dos jogadores.

Finalmente, o conceito de equilíbrio seqüencial é discutido na sétima e última seção. O trabalho de Chew e Epstein consiste de uma abordagem axiomática ao estudo de funções utilidades recursivas no contexto de um horizonte infinito incluindo incerteza. Nachaman e Kertz, por outro lado, consideram uma economia de trocas onde os mercados permanecem abertos, para trocas à vista e para elaboração de contratos para entrega futura, em cada uma das seqüências infinitas de datas. Esses autores examinam questões relativas à existência de uma seqüência de equilíbrios temporários.

Vale mencionar, ainda, alguns problemas de menor importância relacionados ao trabalho em apreço, notadamente a ausência da relação dos autores com seus endereços atuais, e a duplicação no final do livro das referências existentes no final de cada ensaio. Aliás, as referências de alguns dos ensaios estão incompletas. Falta, ainda, um índice remissivo.

Em conclusão, a obra acima analisada merece a atenção de alunos e pesquisadores e pode ser utilizada como leitura complementar

em cursos avançados de tópicos em equilíbrio geral que se propõem a estudar extensões do tradicional modelo de Arrow-Debreu-McKenzie.

Submetido em abril de 1992. Revisado em janeiro de 1993.

Referências

- Aumann, R. J. 1965. "Integrals of set-valued functions." *Journal of Mathematical Analysis & Applications* 12: 1-12.
- 1966. "Existence markets with a continuum of traders." *Econometrica* 34: 1-17.
- 1974. "Subjectivity and correlation in randomized strategies." *Journal of Mathematical Economics* 1: 67-96.
- 1987. "Correlated equilibrium as an expression of Bayesian learning." *Econometrica* 55: 1-18.
- Aliprantis, C. D & Burkinshan, O. 1985. *Positive Operators*. New York: Academic Press.
- Castaing, C, & Valadier, M. 1977. "Convex analysis and measurable multifunctions." In *Lecture Notes in Mathematics 580*. New York: Springer-Verlag.
- Cotter, K. 1989. "Correlated equilibria with payoff uncertainty." CMSEMS Discussion Paper nº 840, Northwestern University.
- 1990. "Correlated equilibria in games with type-dependent strategies." In *Journal of Economic Theory*, a ser publicado.
- Dinculeanu, N. 1973. "Linear operations on L_p -spaces." In Maynard, H. & Tuckers, D., eds., *Vector and Operator Valued Measures and Applications*. New York: Academic Press.
- Dubey, P., A. Mas-Collel & M. Shubik. 1980. "Efficiency properties of strategic market games: an axiomatic approach." *Journal of Economic Theory* 22: 339-362.
- Dugundji, J. 1966. *Topology*. Allyn and Bacon: Boston.
- Dundorf, N & Schwartz J. T. 1958. *Linear Operators Part I: General Theory*. New York: Wiley Interscience Publishers.
- Fan, K. 1962. "A generalization of Tychonoff's fixed point theorem." *Mathematische Annalen* 143: 305-310.

- Jameson, R. E. 1970. *Ordered Linear Spaces*. New York: Springer-Verlag.
- Kelley, J. L. 1955. *General Topology*. New York: Van Nostrand.
- Kelley, J. & Namioka, I. 1963. *Linear Topological Spaces*. New York: Springer-Verlag.
- Kuratowski, K. 1966. *Topology Vol. I*. New York: Academic Press.
- Mas-Collel, A. 1984. "On a theorem of Schmeidler." *Journal of Mathematical Economics* 13:210-206.
- Moulin, H. & Vial, J. P. "Strategically zero-sum games: the class of games whose completely mixed equilibria cannot be improved upon." *International Journal of Game Theory* 7:201-221.
- Royden, H. L. 1988. *Real Analysis*. New York: MacMillan.
- Shaefer, H. H. 1974. *Banach Lattices and Positive Operators*. Berlin: Springer-Verlag.
- _____ 1986. *Topological Vector Spaces*. New York: Springer-Verlag.
- Tulcea, A. I. & Tulcea, C. I. 1969. *Topics in the Theory of Lifting*. New York: Springer-Verlag.