ANÁLISE ESPECTRAL DE SÉRIES TEMPORAIS ATRAVÉS DE PONTOS FIXOS

Sílvia Lopes*

Resumo

Neste artigo consideramos modelos de espectro misto da forma

$$Z_t = \sum_{j=1}^p A_j \cos(\omega_j t + \phi_j) + \xi_t, \quad t \in \mathbf{Z},$$

onde p não é necessariamente conhecido e, para cada $1 \leq j \leq p$, A_j é constante desconhecida, ω_j é frequência desconhecida em $(-\pi, \pi]$ e a fase ϕ_j é uma variável aleatória uniformemente distribuída em $(-\pi, \pi]$ independente cada uma entre si e do processo de ruído. O objetivo é estimar as frequências da parte discreta do espectro. Esta estimativa é obtida através de um método recursivo cujos parâmetros são atualizados a cada passo. Os cossenos das frequências são obtidos como pontos fixos atratores de uma determinada aplicação.

Abstract

This article analyzes the mixed spectrum stationary process

$$Z_t = \sum_{j=1}^p A_j \cos(\omega_j t + \phi_j) + \xi_t, \quad t \in \mathbf{Z},$$

where p is not necessarily known, $A_1, \dots, A_p$ are unknown constants, $\omega_1, \dots, \omega_p$ are unknown frequencies with values in $(-\pi, \pi]$, $\{\xi_t\}_{t \in \mathbf{Z}}$ is a white noise process with mean 0 and variance σ_ξ^2 and $\phi_1, \dots, \phi_p$ are independent random variables uniformly distributed in $(-\pi, \pi]$ and are independent of the noise process. The goal of this paper is to estimate each discrete frequency. The estimate is obtained from a recursive method with updated parameters. The cosine of each discrete frequency is obtained as an attracting fixed point of a certain map.

1. Introdução.

Neste artigo vamos utilizar seqüências de filtros paramétricos com o objetivo de estimar as frequências de um modelo de espectro

*Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

misto. Isto é feito iterativamente, como segue. Uma série temporal é filtrada por um filtro paramétrico e a resultante função de autocorrelação de primeira ordem é imediatamente usada no ajuste do parâmetro do filtro. O filtro ajustado é então aplicado novamente, dando origem a uma nova autocorrelação de primeira ordem e o procedimento é repetido. Escolhendo filtros apropriados, o esquema produz seqüências convergentes e, sob certas condições, este método garante a consistência forte dos estimadores do cosseno das freqüências da parte discreta do espectro.

Para expressar as mesmas idéias através de uma linguagem matemática mais precisa, considere $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário de média zero e seja $\{\mathcal{L}_\theta(\cdot)\}_{\theta \in \Theta}$ uma família paramétrica de filtros lineares invariantes no tempo, onde θ é um parâmetro finito-dimensional no espaço de parâmetros Θ . Denotamos por $\{Z_t(\theta)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o processo filtrado

$$Z_t(\theta) = \mathcal{L}_\theta(Z)_t.$$

Então $\{\rho(\theta)\}_{\theta \in \Theta}$, definida por

$$\rho(\theta) = \frac{E[Z_t(\theta)Z_{t+1}(\theta)]}{E[Z_t^2(\theta)]}$$

é uma família de autocorrelações de primeira ordem parametrizadas, quando $\{Z_t(\theta)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ for um processo estocástico real.

Estamos interessados nos pontos fixos da aplicação $\rho(\theta)$ obtidos a partir da convergência da recursão

$$\theta_{k+1} = \rho(\theta_k) = \rho^k(\theta_0) \quad (1.1)$$

para algumas famílias específicas de filtros paramétricos.

O nosso objetivo é obter filtros paramétricos lineares de tal forma que os pontos fixos a serem determinados pela aplicação $\rho(\theta)$ resultante, coincidam com os cossenos das freqüências que desejamos estimar.

O método a ser apresentado nestas notas é um procedimento alternativo à *Análise do Periodograma* para a estimativa de freqüências em um modelo de espectro misto. Este método apresenta uma

complexidade computacional da ordem de $O(N)$, onde N é o tamanho amostral considerado (veja Yakowitz (1991)). Isto significa um avanço sobre o algoritmo da FFT que tem complexidade computacional da ordem de $O(N \log_2 N)$. Este método que, em um certo sentido, lembra o Método de Newton para determinar as raízes de uma equação não-linear é chamado de *Método da Contração na Detecção de Freqüências* (MC). Ele tem como uma de suas grandes vantagens, a não necessidade de informações *a priori* da localização aproximada das freqüências.

Os modelos de espectro misto, como foram mencionados acima, aparecem em várias áreas aplicadas como economia, oceanografia, engenharia, etc..

Estas notas foram escritas a partir de parte da Tese de Doutorado da autora realizada na Universidade de Maryland, sob a orientação do Dr. Benjamin Kedem e dos artigos Kedem e Lopes (1992) e Lopes e Kedem (1994).

2. O problema.

Considere o modelo de espectro misto

$$Z_t = \sum_{j=1}^p A_j \cos(\omega_j t + \phi_j) + \xi_t, \quad \text{para } t \in \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

onde p não é necessariamente conhecido e, para cada $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, A_j é uma constante desconhecida, ω_j é uma freqüência desconhecida tomando valor em $(-\pi, \pi]$ e a fase ϕ_j é uma variável aleatória uniformemente distribuída em $(-\pi, \pi]$ independente cada uma entre si e também da componente de ruído. Por simplicidade, assumimos aqui que esta componente é um ruído branco Gaussiano tal que $\xi_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\xi^2)$. Esta hipótese de ruído branco não é necessária para o que segue mas ela simplifica a exposição. Na verdade, qualquer ruído que seja um processo estocástico estacionário e ergódico e com distribuição espectral contínua servirá bem.

Apresentamos aqui um método (ver Kedem e Lopes (1992) e Lopes e Kedem (1994)) inspirado no *Algoritmo de He e Kedem* (veja o trabalho de He e Kedem (1989)) que permite a obtenção, através de

um procedimento iterativo e com alta ordem de precisão, dos valores estimados de A_j , ω_j , $1 \leq j \leq p$, e σ_ξ .

Em uma simulação com o modelo (2.1) quando $p = 2$, $A_1 = A_2 = 1.0$, $\omega_1 = 0.7$ e $\omega_2 = 2.2$, e utilizando o método a ser explicado aqui, obtivemos os seguintes estimadores consistentes: $\hat{\omega}_1 = 0.7044$ e $\hat{\omega}_2 = 2.1965$. Neste artigo nos preocupamos apenas em explicar o método para a obtenção das frequências ω_j , para $1 \leq j \leq p$. Para a estimação dos demais parâmetros envolvidos no modelo (2.1), veja Lopes (1993).

Com a intenção de simplificar a exposição, nos concentramos primeiramente no *Método da Contração na Detecção de Frequências* quando o modelo usado é do tipo (2.1) na situação mais simples onde $p = 1$. Para a descrição do método veja a Seção 4. Na Seção 3 introduzimos várias definições necessárias para o melhor entendimento da metodologia apresentada aqui. Na Seção 5 exemplificamos a metodologia com a utilização de determinados filtros lineares que serão necessários para analisar o caso $p > 1$. Na Seção 6 apresentamos as propriedades estatísticas dos estimadores obtidos através deste método.

3. Definições gerais.

Nesta Seção apresentamos algumas definições básicas necessárias para o entendimento das Seções subsequentes.

Utilizamos a notação usual para iterações de aplicações

$$f^k(\alpha) = f(f^{k-1}(\alpha)), \quad k \in \mathbf{N},$$

onde $f^1(\alpha) = f(\alpha)$ e chamamos $f^k(\alpha)$ o k -ésimo iterado da aplicação $f(\cdot)$ no valor α .

Desejamos descobrir um método que possibilite encontrar as frequências através da iteração de uma aplicação $f(\cdot)$. A função $f(\cdot)$ será denotada por $\rho(\cdot)$ na Seção 4. Nossa análise do problema será baseada nas propriedades geométricas dos gráficos de $f(\cdot)$ e sua derivada nos pontos fixos.

DEFINIÇÃO 3.1: Seja f uma função diferenciável definida de um intervalo $[a, b]$ em si mesmo. Um *ponto fixo* para a função f é um valor α^* tal que $f(\alpha^*) = \alpha^*$.

DEFINIÇÃO 3.2: Um valor α^* é dito ser um *ponto fixo atrator* da aplicação $f(\alpha)$ se α^* é um ponto fixo e $|f'(\alpha^*)| < 1$. Ele é dito ser um *ponto fixo repulsor* se α^* é um ponto fixo e $|f'(\alpha^*)| > 1$.

O conjunto $\{\alpha_0, f(\alpha_0), f^2(\alpha_0), \dots, f^k(\alpha_0), \dots\}$ ou $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots\}$ é chamado a *órbita do ponto* α_0 .

PROPRIEDADE DOS PONTOS ATRADORES: *Um ponto fixo atrator α^* tem a propriedade de que pontos próximos dos dois lados de α^* são atraídos para α^* através de iterações da f , isto é,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(\alpha) = \alpha^* \text{ para todo } \alpha \text{ próximo a } \alpha^*.$$

Observamos que esta é uma propriedade local e que não significa necessariamente que α^* é um ponto fixo atrator global, isto é, que para quase todo ponto $\alpha_0 \in (-1, 1)$, os iterados α_k de α_0 , convergirão para α^* .

PROPRIEDADE DOS PONTOS REPULSORES: *Um ponto fixo repulsor α^* tem a propriedade de que pontos próximos dos dois lados de α^* são repelidos de α^* através de iterações de f .*

Na prática, pontos fixos repulsores não são observáveis mas pontos fixos atratores podem ser detectados através de altas iterações da aplicação.

4. Método da contração na detecção de frequências.

O *Método da Contração na Detecção de Frequências* pode ser mais facilmente descrito no caso em que no modelo temos apenas uma única senóide com frequência ω_1 .

Considere o processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dado por

$$Z_t = Y_t + \xi_t = A \cos(\omega_1 t + \phi) + \xi_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.1)$$

onde $A > 0$ e $\omega_1 \in (0, \pi]$ são constantes, ϕ é uma variável aleatória uniformemente distribuída em $(-\pi, \pi]$, isto é, $\phi \sim \mathcal{U}((-\pi, \pi])$ e $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo estocástico estacionário e ergódico com média zero, independente da fase ϕ , com função de distribuição espectral $F_\xi(\omega)$ contínua em ω_1 .

Considere $\{\mathcal{L}_\alpha(\cdot)\}_{\alpha \in \Theta}$ uma família paramétrica de filtros lineares e invariantes no tempo indexados por α , onde $\alpha \in \Theta = [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ com constantes $\underline{\alpha}$ e $\bar{\alpha}$ tais que $-1 < \underline{\alpha} < \cos(\omega_1) < \bar{\alpha} < 1$. A função de transferência de $\mathcal{L}_\alpha(\cdot)$, denotada por $H(\omega; \alpha)$, é definida por

$$H(\omega; \alpha) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_j(\alpha) e^{-ij\omega},$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e $\{h_j(\alpha)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ é sua correspondente função de resposta a impulso.

Denotamos por $\{Z_t(\alpha)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o processo filtrado obtido a partir da aplicação do filtro $\mathcal{L}_\alpha(\cdot)$ ao processo original e definido por

$$Z_t(\alpha) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_j(\alpha) Z_{t-j} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_j(\alpha) Y_{t-j} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_j(\alpha) \xi_{t-j} = Y_t(\alpha) + \xi_t(\alpha).$$

A função de autocorrelação de primeira ordem do processo filtrado $\{Z_t(\alpha)\}_{t \in \mathbb{Z}}$, obtida a partir da representação espectral da função de autocorrelação, é dada por

$$\begin{aligned} \rho(\alpha) &= \frac{E[Z_t(\alpha)Z_{t+1}(\alpha)]}{E[Z_t^2(\alpha)]} = \\ &= \frac{\frac{A^2}{2}|H(\omega_1; \alpha)|^2 \cos(\omega_1) + \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega; \alpha)|^2 \cos(\omega) dF_\xi(\omega)}{\frac{A^2}{2}|H(\omega_1; \alpha)|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega; \alpha)|^2 dF_\xi(\omega)}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

quando a função de resposta a impulso do filtro $\mathcal{L}_\alpha(\cdot)$ tem valor real ou

$$\begin{aligned} \rho(\alpha) &= \frac{\mathcal{R}\{E[Z_t(\alpha)\overline{Z_{t+1}(\alpha)}]\}}{E[|Z_t(\alpha)|^2]} = \\ &= \frac{\frac{A^2}{2}(|H(\omega_1; \alpha)|^2 + |H(-\omega_1; \alpha)|^2) \cos(\omega_1) + \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega; \alpha)|^2 \cos(\omega) dF_\xi(\omega)}{\frac{A^2}{2}(|H(\omega_1; \alpha)|^2 + |H(-\omega_1; \alpha)|^2) + \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega; \alpha)|^2 dF_\xi(\omega)}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

quando a função de resposta a impulso do filtro $\mathcal{L}_\alpha(\cdot)$ tem valor complexo. Nas duas expressões (4.2) e (4.3) $\frac{A^2}{2}$ é a variância do sinal

$\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Aqui, e no restante deste artigo, $\mathcal{R}\{z\}$ denota a parte real do número complexo z e $\bar{z}$ denota o conjugado complexo de z .

Para simplificar a exposição do *Método da Contração na Detecção de Freqüências* vamos, a partir deste ponto, fazer uma análise completa quando $p = 1$, isto é, o modelo (4.1)

freqüência. Neste caso, é conveniente utilizar a família de filtros paramétricos $\mathcal{L}_\alpha(\cdot)$ constituída pelos *filtros alfa*, definidos a seguir. Nesta situação, a aplicação $\rho(\alpha)$, definida através da expressão (4.2), nos possibilitará obter a freqüência ω_1 a ser estimada como o arco cujo coseno é o ponto fixo atrator de $\rho(\cdot)$.

4.1. O filtro alfa.

Apresentamos agora uma reformulação do resultado de He e Kedem (1989) onde foi analisado o caso $p = 1$.

DEFINIÇÃO 4.1: O *filtro alfa* aplicado a um processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é definido pela seguinte transformação linear e invariante no tempo, para todo $\alpha \in (-$

$$Z_t(\alpha) = Z_t + \alpha Z_{t-1}(\alpha), \quad (4)$$

com função ganho quadrada igual a

$$|H(\omega; \alpha)|^2 = \frac{1}{1 - 2\alpha \cos(\omega)}^2,$$

para todo $\omega \in (-\pi,$
de primeira ordem é dada por

$$\rho(\alpha) = \frac{E[Z_t(\alpha)Z_{t+1}(\alpha)]}{E[Z_t^2(\alpha)]} = \frac{\sum_{j=1}^p \frac{A_j^2}{2} \frac{\cos(\omega_j)}{1 - 2\alpha \cos(\omega_j) + \alpha^2} + \sigma_\xi^2 \frac{\alpha}{1 - \alpha^2}}{\sum_{l=1}^p \frac{A_l^2}{2} \frac{1}{1 - 2\alpha \cos(\omega_l) + \alpha^2} + \sigma_\xi^2 \frac{1}{1 - \alpha^2}}. \quad (4.5)$$

Consideramos agora algumas propriedades da aplicação ρ , definida pela expressão (4.5)
existência de uma aplicação de contração.

Proposição 4.1: A aplicação $\rho(\alpha)$, dada pela expressão (4.5), $p = 1$, é uma aplicação do intervalo $[-1, 1]$ nele mesmo.

A prova desta proposição pode ser encontrada em Lopes (1991).

Uma longa elaboração algébrica permite mostrar que

$$\rho'(\alpha) = \frac{\frac{A^2}{2} \sigma_\xi^2 \left[\frac{1-8\alpha \cos(\omega_1)+4\alpha^2+2\alpha^2 \cos^2(\omega_1)-\alpha^4+2 \cos^2(\omega_1)}{(1-2\alpha \cos(\omega_1)+\alpha^2)^2} \right] + (\sigma_\xi^2)^2}{\left[\frac{A^2}{2} \frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha \cos(\omega_1)+\alpha^2} + \sigma_\xi^2 \right]^2}. \quad (4.6)$$

Observe que $\rho(-1) = -1$ e $\rho(+1) = +1$ mas $\rho'(-1) > 1$ e $\rho'(+1) > 1$, pois usando a expressão (4.6) acima, temos

$$\rho'(-1) = \frac{\frac{A^2}{2} + \sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2} = \rho'(+1).$$

Portanto, -1 e $+1$ são pontos fixos repulsores da aplicação $\rho(\cdot)$ dada pela expressão (4.5) com $p = 1$, conforme terminologia da Seção 3.

É fácil ver que $\alpha^* = \cos(\omega_1)$ é o único ponto fixo em $(-1, 1)$ para a aplicação $\rho(\cdot)$ dada pela expressão (4.5) com $p = 1$, isto é, $\rho(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \cos(\omega_1) = \alpha^*$.

Novamente, usando a expressão (4.6) pode-se obter que a derivada de $\rho(\cdot)$ no ponto fixo α^* é dada por

$$\rho'(\alpha^*) = \frac{\sigma_\xi^2}{\frac{A^2}{2} + \sigma_\xi^2}.$$

Note que este número é estritamente menor do que 1. Neste caso, o ponto fixo α^* é um atrator (observe o gráfico da aplicação $\rho(\cdot)$ em $[-1, 1]$ na Figura 1). As propriedades descritas na Seção 3 para a aplicação $f = \rho$ permitem concluir que, para qualquer ponto inicial $\alpha_0 \in (-1, 1)$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho^k(\alpha_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \cos(\omega_1).$$

Observe o gráfico de $\rho^{10}(\alpha)$ na Figura 3. Neste caso, como pode-se ver, qualquer ponto α_0 , iterado $k = 10$ vezes está praticamente em cima do valor $\cos(\omega_1) = \alpha^*$. Sendo assim, o caso $p = 1$ fica, em princípio, totalmente resolvido. É claro que é necessário usar a aplicação $\hat{\rho}(\cdot)$ (um estimador de $\rho(\cdot)$) baseada em alguma estimativa da função de autocorrelação de primeira ordem. Nas simulações presentes neste

Figura 1.

O ponto fixo atrator $\alpha^* = \cos(\omega_1)$ de $\rho(\alpha)$ obtido a partir do filtro alfa, quando $p = 1$.

artigo, como aplicação $\hat{\rho}(\cdot)$ consideramos aquela obtida a partir da função de autocorrelação amostral de primeira ordem baseada numa série temporal de tamanho N , isto é,

$$\hat{\rho}(\alpha) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} [Z_j(\alpha) - \overline{Z(\alpha)}][Z_{j+1}(\alpha) - \overline{Z(\alpha)}]}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [Z_j(\alpha) - \overline{Z(\alpha)}]^2} \quad (4.7)$$

no caso do *filtro alfa*. A notação $\overline{Z(\alpha)}$, na expressão acima, indica valor médio da série temporal filtrada $\{Z_t(\alpha)\}_{t=1}^N$.

O método funciona, mesmo quando em vez de $\rho(\alpha)$ utilizamos $\hat{\rho}(\alpha)$ a expressão estimada da aplicação $\rho(\cdot)$, devido a consistência forte que será demonstrada posteriormente na Seção 6. Sendo assim, o valor estimado $\hat{\alpha}^*$ será ponto fixo da aplicação $\hat{\rho}(\cdot)$.

Figura 2.

A aplicação $\rho(\alpha)$ obtida a partir do filtro alfa, quando $p = 2$. $\omega_1 = 0.56$ e $\omega_2 = 2.1$ onde $\cos(\omega_1) = 0.8472$ e $\cos(\omega_2) = -0.5048$.

Para o caso $p > 1$, no entanto, o *filtro alfa*, através da expressão (4.5) não permitirá a obtenção dos cosenos das frequências, como pode ser observado na Figura 2, caso $p = 2$. Isto porque os cosenos das frequências não são pontos fixos atratores da aplicação $\rho(\cdot)$. Para obtermos as frequências ω_j , $1 \leq j \leq p$, teremos que encontrar outros filtros que definirão outras aplicações $\rho(\cdot)$ que possuirão vários pontos fixos que serão os cosenos das frequências a serem estimadas. Neste caso, necessitamos introduzir o *filtro complexo*.

Na literatura da Análise Numérica, o procedimento iterativo utilizado aqui, é conhecido como *método iterativo para detectar ponto fixo*. Veja, por exemplo, Stoer e Bulirsch (1980)) no caso em que é usado para encontrar raízes da equação $f(x) = x$, através do Método

Figura 3.

A aplicação $\rho^{10}(\alpha)$ obtida a partir do filtro alfa quando $p = 1$. $\alpha^* = \cos(\omega_1) = \cos(0.56) = 0.8472$.

de Newton.

Na Seção 6 estabelecemos que

$$\hat{\theta} = \arccos(\hat{\alpha}^*) = \arccos(\hat{\rho}(\hat{\alpha}^*))$$

é o estimador fortemente consistente de ω_1 . O problema de consistência deste estimador quando $\hat{\rho}(\alpha)$ é função de autocorrelação amostral de primeira ordem foi analisado por Lopes e Kedem (1994) (para o caso em que a família paramétrica $\mathcal{L}_\alpha(\cdot)$ é formada pelos *filtros complexos*) e, posteriormente, por Li e Kedem (1993) em outros casos.

5. O filtro complexo.

Nesta Seção voltamos a considerar o modelo geral dado pela expressão (1.1) já que a intenção é agora estimar as frequências ω_j , para $1 \leq j \leq p$.

O material apresentado nesta Seção é um resumo de parte da Seção 1 de Lopes (1991).

DEFINIÇÃO 5.1: O *filtro complexo* aplicado a um processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é definido pela transformação

$$Z_t(\alpha, M) = (1 + e^{i\theta(\alpha)} \mathcal{B})^M Z_t, \quad (5.1)$$

onde M é um número inteiro positivo, $\alpha \in (-1, 1)$, $\theta(\alpha) \in (-\pi, \pi)$, $\mathcal{B}$ é o operador defasagem $\mathcal{B}Z_t = Z_{t-1}$ e onde $\theta(\alpha) = \arccos(\alpha)$.

Claramente a expressão (5.1) pode ser reescrita como

$$Z_t(\alpha, M) = \sum_{n=0}^M \binom{M}{n} e^{i\theta(\alpha)n} Z_{t-n},$$

para $t \in \mathbb{Z}$, $-\pi < \theta(\alpha) < \pi$ e $M \in \mathbb{N} - \{0\}$.

A função de resposta a impulso para este filtro é dada por

$$h_j(\alpha, M) = \begin{cases} \binom{M}{j} e^{i\theta(\alpha)j}, & \text{para } 0 \leq j \leq M, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A correspondente função ganho quadrada é igual a

$$|H(\omega; \alpha, M)|^2 = 4^M \cos^{2M} \left(\frac{\omega - \theta(\alpha)}{2} \right)$$

para $\theta(\alpha)$, $\omega \in (-\pi, \pi]$ e $\alpha \in (-1, 1)$. Pode-se mostrar rigorosamente (veja Lopes e Kedem (1994)) que, quando M é grande, a correspondente função de autocorrelação de primeira ordem pode ser escrita como

$$\rho(\alpha, M) = \frac{\mathcal{R}\{E[Z_t(\alpha, M)\overline{Z_{t+1}(\alpha, M)}]\}}{E|Z_t(\alpha, M)|^2} \approx$$

$$\frac{\sum_{j=1}^p \frac{\Lambda_j^2}{2} \left[\cos^{2M} \left(\frac{\omega_j + \theta(\alpha)}{2} \right) + \cos^{2M} \left(\frac{\omega_j - \theta(\alpha)}{2} \right) \right] \cos(\omega_j) + \left[\frac{\sigma_\xi^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2M} \left(\frac{\lambda - \theta(\alpha)}{2} \right) d\lambda \right] \alpha}{\sum_{l=1}^p \frac{\Lambda_l^2}{2} \left[\cos^{2M} \left(\frac{\omega_l + \theta(\alpha)}{2} \right) + \cos^{2M} \left(\frac{\omega_l - \theta(\alpha)}{2} \right) \right] + \frac{\sigma_\xi^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2M} \left(\frac{\lambda - \theta(\alpha)}{2} \right) d\lambda} \quad (5.2)$$

Aqui $\mathcal{R}\{z\}$ significa a parte real do número complexo z e $\bar{z}$ representa o conjugado complexo de z .

A expressão (5.2) acima parece muito complexa e será substituída pela expressão (5.3), que é mais fácil de ser entendida.

Observamos que a expressão (5.2) mostra que $\rho(\alpha, M)$ é uma média ponderada de $\cos(\omega_j)$, $j \in \{1, \dots, p\}$, e de α . Definimos os pesos $B_j(\alpha, M)$, $j \in \{0, 1, \dots, p\}$, da seguinte forma

$$B_j(\alpha, M) = \frac{\frac{\Lambda_j^2}{2} \left[\cos 2M \left(\frac{\omega_j + \theta(\alpha)}{2} \right) + \cos 2M \left(\frac{\omega_j - \theta(\alpha)}{2} \right) \right]}{\sum_{l=1}^p \frac{\Lambda_l^2}{2} \left[\cos 2M \left(\frac{\omega_l + \theta(\alpha)}{2} \right) + \cos 2M \left(\frac{\omega_l - \theta(\alpha)}{2} \right) \right] + \frac{\sigma_\xi^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2M \left(\frac{\lambda - \theta(\alpha)}{2} \right) d\lambda},$$

para $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ e

$$B_0(\alpha, M) = \frac{\frac{\sigma_\xi^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2M \left(\frac{\lambda - \theta(\alpha)}{2} \right) d\lambda}{\sum_{l=1}^p \frac{\Lambda_l^2}{2} \left[\cos 2M \left(\frac{\omega_l + \theta(\alpha)}{2} \right) + \cos 2M \left(\frac{\omega_l - \theta(\alpha)}{2} \right) \right] + \frac{\sigma_\xi^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2M \left(\frac{\lambda - \theta(\alpha)}{2} \right) d\lambda}$$

Observe que $\sum_{j=0}^p B_j(\alpha, M) = 1$ e, portanto, $\rho(\alpha, M)$ é uma média ponderada envolvendo $\cos(\omega_j)$, $1 \leq j \leq p$, e α dada por

$$\rho(\alpha) = \rho(\alpha, M) = \sum_{j=1}^p B_j(\alpha, M) \cos(\omega_j) + B_0(\alpha, M) \alpha, \quad (5.3)$$

onde os pesos $B_j(\alpha, M)$, $0 \leq j \leq p$, são não-negativos, somam um e dependem de α e M . Esta observação é importante na recuperação de todas as frequências ω_j , $j \in \{1, \dots, p\}$.

Consideramos agora algumas propriedades da aplicação ρ , definida em (5.2), que auxiliarão na prova da existência de uma aplicação de contração.

Proposição 5.1: Para cada $M \in \mathbb{N} - \{0\}$ fixado e $\rho(\alpha) = \rho(\alpha, M)$, dada pela expressão (5.2), a aplicação $\rho(\cdot)$ é uma função do intervalo $[-1, 1]$ nele mesmo, como uma função da variável α .

A prova desta proposição é similar àquela da Proposição 4.1 considerando agora a expressão (5.2).

Queremos fazer alguns comentários a respeito da aplicação $\rho(\alpha) = \rho(\alpha, M)$ dada pelas expressões (5.2) ou (5.3).

RESULTADO PRINCIPAL PARA O FILTRO COMPLEXO: Se M é grande e fixo (suponha, por exemplo, $M = 30$), então dado $\alpha_0 \in (-1, 1)$ escolhido ao acaso, $\rho^k(\alpha_0)$ estará bem próximo de um ponto fixo α^* , onde α^* é um dos possíveis valores $\cos(\omega_j)$, para $1 \leq j \leq p$, quando k for tomado grande.

Isto permitirá obter as várias frequências do modelo (2.1) através de um procedimento iterativo similar ao que foi utilizado no caso $p = 1$ com o *filtro alfa*. Neste caso, $\hat{\rho}^k(\alpha_0)$, com k grande, estará estimando um possível $\cos(\omega_j)$.

Vamos tentar explicar de uma maneira heurística a razão pela qual o *Resultado Principal* é verdadeiro. Para simplificar o raciocínio, suponha que α_0 está mais próximo de $\cos(\omega_1)$ do que dos demais $\cos(\omega_j)$, para $2 \leq j \leq p$. Dessa forma, é fácil ver que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\cos^{2M} \left(\frac{\omega_j + \theta(\alpha_0)}{2} \right) + \cos^{2M} \left(\frac{\omega_j - \theta(\alpha_0)}{2} \right)}{\cos^{2M} \left(\frac{\omega_1 - \theta(\alpha_0)}{2} \right)} = 0,$$

para todo $j \in \{2, \dots, p\}$ e

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\cos^{2M} \left(\frac{\omega_1 + \theta(\alpha_0)}{2} \right)}{\cos^{2M} \left(\frac{\omega_1 - \theta(\alpha_0)}{2} \right)} = 0.$$

Lembre que $\theta(\alpha_0) = \arccos(\alpha_0)$. A partir das duas igualdades acima segue-se

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{B_j(\alpha_0, M)}{B_1(\alpha_0, M)} = 0, \quad (5.4)$$

para todo $j \in \{2, 3, \dots, p\}$. A expressão acima significa que o peso relativo $B_1(\alpha_0, M)$ é muito maior do que os outros $B_j(\alpha_0, M)$, se M é grande e α_0 está próximo de ω_1 .

Da expressão (5.3) podemos concluir que, para o valor inicial $\alpha = \alpha_0$ próximo a $\cos(\omega_1)$,

$$\alpha_1 = \rho(\alpha_0) = \rho(\alpha) = \sum_{j=1}^p B_j(\alpha, M) \cos(\omega_j) + B_0(\alpha, M) \alpha$$

é, na verdade, uma combinação linear ponderada de α_0 e dos $\cos(\omega_j)$, para todo $j \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Supondo M grande e fixo então, pela igualdade (5.4), concluímos que a média $\alpha_1 = \rho(\alpha_0)$ tem uma tendência muito forte de estar próxima a $\cos(\omega_1)$ pois o peso $B_1(\alpha_0, M)$ é muito maior do que os demais pesos $B_j(\alpha_0, M)$, para $j \in \{0, 2, \dots, p\}$. Aplicando o mesmo raciocínio a $\alpha_2 = \rho(\alpha_1)$, temos que α_2 deve estar ainda mais próxima de $\cos(\omega_1)$ do que α_1 . Aplicando agora sucessivamente k vezes o raciocínio, concluímos que $\alpha_k = \rho^k(\alpha_0) = \rho^k(\alpha)$ deve estar bastante próximo de $\cos(\omega_1)$, e é um bom estimador para o cosseno de uma das frequências, no caso ω_1 . De forma análoga, se α estivesse mais próximo de $\cos(\omega_2)$ do que dos demais $\cos(\omega_j)$, para $j \in \{1, 3, \dots, p\}$, então $\rho^k(\alpha)$ deveria estar bastante próximo de $\cos(\omega_2)$, e assim por diante.

Como no caso do *filtro alfa*, aqui também estaremos usando uma estimativa $\hat{\rho}(\cdot, M) = \hat{\rho}(\cdot)$ para a obtenção da aplicação $\rho(\cdot, M) = \rho(\cdot)$. Nas simulações apresentadas nestas notas, utilizamos como estimativa para $\rho(\cdot, M)$ a função de autocorrelação amostral de primeira ordem da série temporal filtrada $\{Z_t(\alpha, M)\}_{t=1}^N$ de tamanho N . Esta estimativa é dada por

$$\hat{\rho}(\alpha, M) = \frac{\frac{1}{N} \mathcal{R}\{\sum_{j=1}^{N-1} [Z_j(\alpha, M) - \overline{Z(\alpha, M)}][\overline{Z_{j+1}(\alpha, M) - Z(\alpha, M)}]\}}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [Z_j(\alpha, M) - \overline{Z(\alpha, M)}][\overline{Z_j(\alpha, M) - Z(\alpha, M)}]}$$

onde a notação $\overline{Z(\alpha, M)}$ indica o valor médio da série temporal filtrada $\{Z_t(\alpha, M)\}_{t=1}^N$.

A consistência forte pode ser demonstrada neste caso, e então todo o procedimento acima descrito pode ser totalmente justificado (ver Lopes e Kedem (1994)).

A eficácia deste procedimento pode ser observada através da análise dos gráficos da função $\rho(\cdot) = \rho(\cdot, M)$ na situação em que temos duas e três frequências (veja as Figuras 4, 5, 6 e 7). Para apreciar corretamente o efeito do acréscimo de M na localização exata das frequências, observe a Figura 8. Para o valor $M = 15$ se obtém uma boa precisão para o valor a ser estimado através da iteração de $\rho(\cdot)$. Observe que a frequência não é um ponto fixo, mas existe um ponto

fixo atrator bem próximo a ela. Quando $M \rightarrow \infty$ este ponto fixo atrator tende a coincidir com o coseno da frequência a ser detectada.

Figura 4.

Pontos Fixos para $\rho(\alpha, 15)$ obtida a partir do filtro complexo com $p = 2$, $A_1 = A_2 = \sigma_\xi = 1.0$, $\omega_1 = 0.7$ e $\omega_2 = 2.2$ ($\cos(\omega_1) = 0.7684$, $\cos(\omega_2) = -0.5885$).

Os gráficos que apresentamos em todas as figuras foram feitos para as expressões analíticas $\rho(\cdot)$. O gráfico da respectiva aplicação $\hat{\rho}(\cdot)$ deveria estar bem próximo do gráfico da respectiva aplicação $\rho(\cdot)$. Em conclusão, $\hat{\rho}^k(\alpha_0) = \hat{\alpha}_k$ é um estimador de alguma frequência, se k for suficientemente grande.

6. Propriedades estatísticas dos estimadores MC .

Antes de enunciarmos formalmente o teorema que garante a convergência da sequência dos estimadores $\hat{\alpha}_k$ baseados em uma série

Figura 5.

Pontos Fixos para $\rho(\alpha, 15)$ obtida a partir do filtro complexo com $p = 2$, $A_1 = A_2 = \sigma_\xi = 1.0$, $\omega_1 = 0.7$ e $\omega_2 = 2.2$ ($\cos(\omega_1) = 0.7684$, $\cos(\omega_2) = -0.5885$).

temporal filtrada através de *filtros complexos*, vamos introduzir a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 6.1: O procedimento iterativo (1.1) de atualização de parâmetros é dito ser *aproximadamente globalmente convergente* se para cada $M \in \mathbb{N} - \{0\}$ fixo existe um conjunto C_M de medida de Lebesgue total em $[-1, 1]$ tal que para qualquer $\alpha_0 \in C_M$ existe o limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho^k(\alpha_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{k+1} = \alpha_M^*.$$

Os possíveis valores α_M^* são pontos fixos da aplicação $\rho(\cdot)$, dada pela expressão (5.2), isto é, $\rho(\alpha_M^*) = \alpha_M^*$.

O procedimento iterativo de atualização de parâmetros é considerado com respeito ao filtro com parâmetro fixo M e o valor limite α_M^* pode depender de α_0 , o valor inicial. Nós exigimos também nesta

Figura 6.

Pontos Fixos para $\rho(\alpha, 40)$ obtida a partir do filtro complexo com $p = 3, A_1 = A_2 = A_3 = \sigma_\xi = 1.0, \omega_1 = 0.5, \omega_2 = 1.7$ e $\omega_3 = 2.4$ ($\cos(\omega_1) = 0.8775, \cos(\omega_2) = -0.1288$ e $\cos(\omega_3) = -0.7373$).

definição que existam p destes possíveis valores α_M^* e que, para cada um deles, exista $l \in \{1, 2, \dots, p\}$ tal que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \alpha_M^* = \cos(\omega_l).$$

O resultado a seguir expressa matematicamente o que explicamos de maneira heurística na Seção 5 através do *Resultado Principal* e garante que a obtenção das frequências do processo (2.1) é feita através dos pontos fixos da aplicação $\rho(\cdot)$, dada pela expressão (5.2). Veja Lopes e Kedem (1994) para a demonstração completa.

Teorema 6.1: Considere o processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ como em (2.1) onde o processo $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um ruído branco Gaussiano. Seja $\{\mathcal{L}_\theta(Z)_t\}_{\theta \in \Theta} = \{Z_t(\alpha, M)\}_{(\alpha, M) \in \Theta}$, onde $\theta = (\alpha, M) \in (-1, 1) \times$

Figura 7.

Pontos Fixos para $\rho^{30}(\alpha, 40)$ obtida a partir do filtro complexo com $p = 3, A_1 = A_2 = A_3 = \sigma_\xi = 1.0, \omega_1 = 0.5, \omega_2 = 1.7$ e $\omega_3 = 2.4$ ($\cos(\omega_1) = 0.8775, \cos(\omega_2) = -0.1288$ e $\cos(\omega_3) = -0.7373$).

$N = \Theta$, a família paramétrica dos filtros complexos. Considere ainda o procedimento iterativo (1.1). Então, a família $\{\mathcal{L}_\theta(Z)_t\}_{\theta \in \Theta}$ é aproximadamente globalmente convergente.

Veja as Tabelas 6.1 e 6.2.

6.1. Ergodicidade do processo estocástico.

Apresentamos a prova da consistência forte (ou equivalentemente, da ergodicidade), dos estimadores utilizados neste trabalho, apenas para o caso $p = 1$. Para o caso geral, veja Lopes e Kedem (1994). Considere $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade onde Ω é o espaço amostral, $\mathcal{F}$ é a σ -álgebra de Borel e P é a função de probabilidade definida em Ω . Considere a transformação T definida sobre o espaço Ω nele mesmo.

Figura 8.

$\rho(\alpha, M)$ obtida a partir do filtro complexo para $p = 2$ numa vizinhança do coseno da frequência $\omega_1 = 0.7$ ($\cos(\omega_1) = 0.7684$). O gráfico da função constante $y = \cos(\omega_1)$ e da reta da diagonal também estão plotados. (a) $M = 8$; (b) $M = 11$; (c) $M = 15$.

Tabela 6.1.

Estimativa da Frequência ω_j , $j = 1, 2$, a partir do filtro complexo. $p = 2$, $\omega_1 = 0.8$, $\omega_2 = 2.2$, $N = 3000$ e $SNR = 20 \log_{10} \left(\frac{\text{desv.pad. sinal}}{\text{desv.pad. ruído}} \right) \text{ dB}$. Número de Iterações = 8.

Frequência Estimada	A_1	A_2	σ_ξ	SNR(dB)	M	Θ_o	ω_j
ω_1	1.0	1.0	1.0	0	15	0.5	0.84721
	1.0	1.0	1.0	0	20	0.5	0.83152
	1.0	1.0	1.0	0	25	0.5	0.82310
	1.0	1.0	1.0	0	30	0.5	0.81827
	1.0	1.0	1.0	0	34	0.5	0.81557
ω_2	1.0	1.0	1.0	0	15	1.9	2.17078
	1.0	1.0	1.0	0	20	1.9	2.18241
	1.0	1.0	1.0	0	25	1.9	2.18823
	1.0	1.0	1.0	0	30	1.9	2.19164
	1.0	1.0	1.0	0	34	1.9	2.19337
	2.0	1.0	1.0	4	15	1.9	2.19260
	2.0	1.0	0.5	10	15	1.9	2.19786

DEFINIÇÃO 6.2: Dizemos que $\mathbf{P}$ é uma *medida invariante sobre T* se $\mathbf{P}(T^{-1}(B)) = \mathbf{P}(B)$, para todo boreliano $B \in \mathcal{F}$.

DEFINIÇÃO 6.3: Dizemos que $\mathbf{P}$ é *ergódica sobre T* se, para todo boreliano $B \in \mathcal{F}$ tal que $T^{-1}(B) = B$, temos $\mathbf{P}(B) = 0$ ou $\mathbf{P}(B) = 1$.

Um resultado muito importante é o Teorema Ergódico de Birkhoff (veja Cornfeld, Fomin e Sinai (1982)) que enunciamos a seguir.

Teorema Ergódico de Birkhoff 6.2: Considere V uma variável aleatória integrável em Ω , $\mathbf{P}$ é uma medida de probabilidade invariante em Ω e T é uma transformação mensurável em Ω . Seja $\mathcal{G}$ a menor σ -álgebra de conjuntos em $\mathcal{F}$ com respeito a qual todas as variáveis aleatórias W com $W(T^t(\omega)) = W(\omega)$ para $\mathbf{P}$ -quase todo ω e para $t > 0$ são mensuráveis. Então,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} V(T^t(\omega)) = E(V/\mathcal{G})(\omega) \mathbf{P} - \text{quase certo.}$$

Quando $\mathbf{P}$ é ergódica (isto é, $\mathcal{G}$ é trivial) então $E(V/\mathcal{G})$ se reduz a $E(V) = \text{constante}$ e o resultado acima essencialmente diz que para

Tabela 6.2.

Estimativa da Frequência ω_j , $j = 1, 2$, a partir do filtro complexo. $p = 2$, $\omega_1 = 0.5$, $\omega_2 = 2.5$, $N = 3000$ e $SNR = 20 \log_{10} \left(\frac{\text{desv.pad.sinal}}{\text{desv.pad. ruído}} \right) dB$. Número de Iterações = 8.

Frequência Estimada	A_1	A_2	σ_ξ	SNR(dB)	M	Θ_o	ω_j
ω_1	1.0	1.0	1.0	0	15	0.3	0.56217
	1.0	1.0	1.0	0	20	0.3	0.53882
	1.0	1.0	1.0	0	25	0.3	0.52659
	1.0	1.0	1.0	0	30	0.3	0.51954
	1.0	1.0	1.0	0	34	0.3	0.51587
	1.0	2.0	1.0	4	15	0.1	0.51628
ω_2	1.0	1.0	1.0	0	15	2.9	2.46535
	1.0	1.0	1.0	0	20	2.9	2.47876
	1.0	1.0	1.0	0	25	2.9	2.48631
	1.0	1.0	1.0	0	30	2.9	2.49077
	1.0	1.0	1.0	0	34	2.9	2.49303
	0.5	1.0	1.0	-2	15	3.1	2.37030
	2.0	1.0	1.0	4	15	2.8	2.49065

típicas trajetórias com respeito a $\mathbf{P}$, a média temporal de V converge para a média espacial de V .

Em termos de processos estocásticos, nós estamos considerando na terminologia acima o processo estacionário $Y_t(\omega) = V(T^t(\omega))$, $\omega \in \Omega$ e $t \in \mathbf{Z}$. Esta é a maneira usual de transferir resultados de transformações com medidas invariantes para processos estocásticos (veja Lamperti (1977), Capítulo 5, para maiores detalhes). Basicamente, temos que considerar no espaço $\Omega^{\mathbf{N}}$, a medida produto gerada por $\mathbf{P}$ em Ω e a definição acima do processo estocástico Y_t . Nós observamos aqui que $\mathbf{P}$ será a medida produto no caso em que tivermos coordenadas independentes e identicamente distribuídas.

OBSERVAÇÃO 6.1: Suponha que $\int V(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = 0$. Então, neste caso, se a probabilidade é ergódica, a autocovariância de ordem k

$$\int V(\omega)V(T^k(\omega))\mathbf{P}(d\omega)$$

pode ser obtida como o limite quase certo da média

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k}$$

Neste caso, podemos dizer que a autocovariância amostral de primeira ordem (caso $k = 1$) estimadores fortemente consistentes.

No nosso caso devemos considerar $\Omega = (-\pi, \pi]$ e para qualquer $\omega \in \Omega$, temos

$$T(\omega) = \omega + \omega_1 \pmod{2\pi},$$

onde ω_1 é uma constante fixa no intervalo $(-\pi, \pi]$. Agora $\mathbf{P}$ é a medida de Lebesgue normalizada em $(-\pi, \pi]$ e esta probabilidade é claramente invariante para T .

É conhecido (veja Cornfeld, Fomin e Sinai (1982), página 64) que, quando $\frac{\omega_1}{2\pi}$ é um número irracional, então $\mathbf{P}$ é *ergódica* para T .

OBSERVAÇÃO 6.2: O Teorema Ergódico quando $\frac{\omega_1}{2\pi}$ é irracional, é verdadeiro numa forma mais forte do que o Teorema Ergódico de Birkhoff. De fato, a afirmação acima a respeito das médias temporais é verdadeira, não apenas $\mathbf{P}$ -quase certo, mas na verdade para todo $\omega \in (-\pi, \pi]$. A afirmação análoga para os números ω_1 quando $\frac{\omega_1}{2\pi}$ é racional não é verdadeira.

Para a situação que temos aqui, vamos denotar os elementos do espaço amostral Ω por ϕ . Desta forma teremos uma notação coerente com o visto anteriormente. Consideremos a variável aleatória $V(\omega) = V(\phi) = A \cos(\phi)$. Observe que

$$\int V(\omega) \mathbf{P}(d\omega) = A \int \cos(\phi) \mathbf{P}(d\phi) = 0$$

Portanto, a hipótese da Observação 6.1 Observe
que para qualquer $n \in \mathbf{N}$ e $\phi \in (-\pi, \pi]$, temos que $T^n(\phi) = \phi + n\omega_1 \pmod{2\pi}$.

Se $\frac{\omega_1}{2\pi}$ é irracional então podemos aplicar o Teorema Ergódico para a variável aleatória $V(\phi)V(T^k(\phi))$, já que $\mathbf{P}$ é ergódica (veja a

Observação 6.1). Desta forma, nós temos um estimador consistente para a autocovariância.

Portanto, pelo Teorema Ergódico segue que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k} V(T^t(\phi)) V(T^{t+k}(\phi)) &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} A^2 \sum_{t=0}^{N-k} \cos(\omega_1 t + \phi) \cos(\omega_1(t+k) + \phi) = \\ &= A^2 \int \cos(\phi) \cos(\omega_1 k + \phi) P(d\phi) = \\ &= A^2 \int \cos(\phi) \cos(T^k(\phi)) P(d\phi), \text{ para } k \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto, para qualquer $\phi \in (-\pi, \pi]$, temos que as autocovariâncias amostrais de ordem k fornecem estimadores fortemente consistentes para a autocovariância de ordem k do processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Relembramos que primeiro consideramos o processo estocástico

$$Y_t(\phi) = V(T^t(\phi)) = V(\phi + t\omega_1) = A \cos(\omega_1 t + \phi).$$

Queremos agora adicionar o processo do ruído branco Gaussiano ξ_t ao Y_t . Portanto, queremos analisar a autocovariância de ordem k para o processo Z_t dado por

$$Z_t = Y_t + \xi_t = V(T^t(\cdot)) + \xi_t.$$

Observamos que, para todo $k \geq 0$,

$$Z_t(\phi) Z_{t+k}(\phi) = Y_t(\phi) Y_{t+k}(\phi) + Y_t(\phi) \xi_{t+k} + Y_{t+k}(\phi) \xi_t + \xi_t \xi_{t+k}.$$

A correspondente igualdade acima no caso amostral é dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k} Z_t(\phi) Z_{t+1}(\phi) &= \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k} V(T^t(\phi)) V(T^{t+k}(\phi)) \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k} V(T^t(\phi)) \xi_{t+k} + \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k} V(T^{t+k}(\phi)) \xi_t \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k} \xi_t \xi_{t+k}. \end{aligned}$$

As médias amostrais correspondentes ao segundo e terceiro termo da igualdade acima convergem a zero, quando N tende a infinito, já que as variáveis ξ_t e $Y_t = V(T(\phi))$ são não-correlacionadas.

As médias amostrais correspondentes ao primeiro termo da igualdade acima já foram analisadas anteriormente com o uso do Teorema Ergódico.

Finalmente, as médias amostrais referentes ao quarto termo convergem a zero, quando N tende ao infinito, já que as variáveis aleatórias ξ_t na definição de um ruído branco Gaussiano são não correlacionadas.

Portanto, concluímos que para o processo

$$Z_t = A \cos(\omega_1 t + \phi) + \xi_t,$$

onde $\frac{\omega_1}{2\pi}$ é irracional e $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um ruído branco Gaussiano, as autocovariâncias amostrais de ordem k são estimadores fortemente consistentes para as autocovariâncias de ordem k do processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Ressaltamos que, por simplicidade, o processo $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ foi assumido ser um ruído branco Gaussiano mas as afirmações valem mais geralmente para qualquer ruído ergódico colorido.

Colocamos agora o resultado apresentado acima de forma condensada através do seguinte teorema.

Teorema 6.3: Considere o processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dado pela expressão (4.1) onde o processo $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um ruído branco Gaussiano e independente do processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Então, o processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário e ergódico sempre que $\frac{\omega_1}{2\pi}$ é irracional.

A condição de ser irracional é genérica (tem probabilidade um) no conjunto das possíveis frequências.

O Teorema 6.3 assegura a propriedade de consistência forte dos parâmetros, o que torna lícito tomar médias amostrais dos dados da série temporal para estimar os valores esperados que aparecem na definição da aplicação $\rho(\cdot)$ dada através das expressões (4.2) ou (4.3).

Desta maneira fica demonstrado a justificação do procedimento descrito no *Resultado Principal*, isto é, dado $\alpha_0 \in (-1, 1)$, $\rho^k(\alpha_0)$ estima o coseno de uma certa frequência, quando k é grande (por exemplo, $k = 8$). Para obter as outras frequências podemos proceder em etapas do seguinte modo. Após a localização do co-

seno da frequência ω_l , aplicamos um filtro passa banda para tirar fora apenas esta frequência. A série resultante corresponderá a um modelo do tipo (2.1) em que temos agora $p - 1$ frequências. Considerando um outro α_0 ao acaso, com o procedimento iterativo de atualização de parâmetros acima descrito, agora para a série resultante, estimamos outro valor $\cos(\omega_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ e $i \neq l$. Assim, sucessivamente, obtemos todas as frequências ω_j , $j \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Não é difícil ver que, quando $p = 0$ em (4.1), então $\rho(\alpha)$ é a função identidade. Logo, a iteração $\hat{\rho}^k(\alpha_0)$ não move praticamente α_0 . Neste caso, o procedimento chegou ao final e teremos descoberto todas as frequências e o número p .

Para a consistência e a normalidade assintótica dos estimadores MC referimos o leitor aos artigos de Li e Kedem (1993) e de Li, Kedem e Yakowitz (1991), respectivamente.

7. Conclusão.

As frequências de um modelo de espectro misto podem ser obtidas através de iteração de um ponto α escolhido ao acaso no intervalo das possíveis frequências. O método apresentado acima é robusto e eficiente. Os vários valores limites $\hat{\rho}^k(\alpha)$ são as estimativas dos cosenos das frequências.

Modelos de frequência modulada são considerados por Lopes (1994) e Lopes e Kedem (1991) como um caso mais geral da análise feita aqui. Neste caso, existem infinitas frequências e uma análise matemática mais precisa será objeto de um futuro trabalho.

(Submetido em agosto de 1993. Revisado em junho de 1994)

Referências

- Cornfeld, I.P., S.V. Fomin & Ya. G. Sinai 1982. *Ergodic Theory*. New York: Springer-Verlag.
- He, S. & B. Kedem 1989. "Higher order crossings spectral analysis of an almost periodic random sequence in noise." *IEEE Transactions on Information Theory* 35: 360-370.

- Kedem, B. 1992. "Contraction mappings in mixed spectrum estimation." In Brillinger, D. et al. (eds.), *New Directions in Time Series Analysis*, Part I. New York: Springer-Verlag, pp. 169–191.
- Kedem, B. & S. Lopes 1992. "Fixed points in mixed spectrum analysis." In Byrnes J. S. et al. (eds.), *Probabilistic and Stochastic Methods in Analysis, with Applications (Proceedings of NATO ASI)*. Massachusetts: Kluwer, pp. 573–591.
- Kedem, B. 1994. *Time Series Analysis by Higher Order Crossings*. New York: IEEE Press.
- Kedem, B. & S. Yakowitz 1991. "On the contraction mapping method for frequency detection." Relatório Técnico 92–45, Systems Research Center, University of Maryland, College Park.
- Lamperti, J. 1977. *Stochastic Processes – A Survey of the Mathematical Theory*. New York: Springer-Verlag.
- Li, T-H & B. Kedem 1993. "Strong consistency of the contraction mapping method for frequency estimation." *IEEE Transactions on Information Theory* **39**: 989–998.
- 1991. "Asymptotic normality of the contraction mapping estimator for frequency estimation." Relatório Técnico 92–22, Systems Research Center, University of Maryland, College Park.
- Lopes, S. 1991. "Spectral analysis in sinusoidal frequency modulated models." Tese de Doutorado na University of Maryland, Mathematics Department, College Park.
- 1993. "Amplitude estimation in multiple frequency spectrum." *Communications in Statistics, Theory and Methods* **22**: 2955–2967.
- Lopes, S. & B. Kedem 1994. "Iteration of mappings and fixed points in mixed spectrum analysis." *Stochastic Models* **10**: 309–333.
- 1991. "Sinusoidal frequency modulated spectrum analysis." Relatório Técnico do Instituto de Matemática da UFRGS, Série A, Nº25, Porto Alegre.
- Lopes, S. 1994. "Contraction mapping method in spectral analysis for sinusoidal FM models." A aparecer nas atas do V Congresso Latino Americano em Probabilidade e Estatística Matemática.
- Stoer, J. & R. Bulirsch 1980. *Introduction to Numerical Analysis*.

New York: Springer-Verlag.

Yakowitz, S. 1991. "Some contributions to a frequency location method due to He and Kedem." *IEEE Transactions on Information Theory* **37**:1177-1182.