UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DE LEILÕES

Flávio M. Menezes*

Resumo

Neste trabalho descrevemos o modelo básico de leilões de um único objeto. Para o caso de sinais independentes e valores privados ou comuns, derivamos o teorema de equivalência de receitas. Esse teorema estabelece que os quatro tipos de leilões em estudo — leilões selados de primeiro ou segundo maior lance, leilões orais ingleses e leilões holandeses — geram a mesma receita. Discutimos ainda o fenômeno conhecido como a maldição do vencedor, onde o ganhador de um leilão selado de primeiro maior lance pode sofrer prejuízos. Mostramos que tal fenômeno é inconsistente com a noção de um equilíbrio de Nash. Finalmente, descrevemos uma das possíveis situações na qual o teorema de equivalência de receitas deixa de ser válido, ou seja, quando os sinais são estatisticamente dependentes.

Abstract

In this paper we provide an introduction to the theory of auctions of a single object. For the private-values independent-signals model we show that the four types of auctions — first and second-price sealed-bid auctions, English and Dutch auctions — generate the same revenue. We also show that the revenue equivalence theorem holds when values are common. Further, we show that the winner's curse (a situation where the winner in a first-price sealed-bid auction can pay a price higher than the true value of the object) is not consistent with Nash behavior. That is, the winner's curse is a result of suboptimal strategies. Finally, we argue that when signals are statistically dependent, the revenue equivalence theorem breaks down.

1. Introdução.

Um leilão é um mecanismo de venda no qual um agente (o leiloeiro) recebe ofertas (lances) de vários indivíduos (participantes) que irão determinar quem receberá o(s) objeto(s) e qual será o preço final.

A existência de leilões é registrada por historiadores desde pelo menos o início do império romano. Escravas destinadas ao casamento eram vendidas através de leilões. A guarda pretoriana, em um lance de extrema ousadia, leiloou o trono do império romano.

*Australian National University, Department of Economics, Faculty of Economics and Commerce — Canberra, ACT, 0200, Austrália

Outro exemplo de interesse histórico, mencionado por Engelbrecht-Wiggans (1990), diz respeito ao bloqueio naval durante a guerra de 1812. Vários navios mercantes, dado o desconhecimento do bloqueio, partiram da Europa rumo à América com seus porões repletos de mercadorias. Eles tiveram que esperar ao longo da costa americana pelo fim do bloqueio. Com o seu fim, um grande número de navios e suas cargas atingiram as docas de Boston, Nova York e Filadélfia, que precisavam ser esvaziadas rapidamente para que novos navios atracassem. Assim, para vender essa quantidade de objetos da forma mais rápida possível em mercados interrompidos pela guerra (e portanto sem um sistema de preços estável) foram usados leilões. Aliás, a convergência rápida para um preço de equilíbrio é uma característica importante desse mecanismo.

Nas economias contemporâneas a prática de leilões passou a representar um papel cada vez mais importante como instrumento de alocação de bens. O setor público, por exemplo, os utiliza intensamente, quer na venda dos seus títulos quer na aquisição de bens e serviços.¹

Não obstante a sua utilização intensa ao longo da história, o interesse dos economistas sobre o assunto somente foi capturado a partir da publicação do trabalho pioneiro de Vickrey (1961). Nos últimos 30 anos o nosso entendimento sobre esse mecanismo aumentou muito. Este texto, contudo, não pretende ser uma revisão da literatura sobre leilões, mas sim uma introdução ao seu estudo que guie o pesquisador/estudante desde os seus conceitos mais primitivos até os seus resultados básicos.²

O número de formatos de leilões existentes é bem elevado,³ contudo neste texto nos concentraremos no estudo de tipos específicos de leilões de um único objeto. Especificamente, vamos nos referir a leilões de lances selados (de primeiro e segundo maior lance) e leilões orais (ascendentes e descendentes).

¹As licitações (concorrências) públicas são também analisadas sob a ótica da teoria de leilões. Devemos apenas inverter os papéis dos jogadores, pois o leiloeiro seria agora o comprador e os participantes os vendedores.

²O leitor interessado pode se referir às competentes revisões de literatura de Engelbrecht-Wiggans (1980), McAfee e McMillan (1987) e Milgrom (1987, 1989).

³Cassady (1967) descreve os vários formatos de leilões praticados.

No primeiro caso, cada participante submete um lance selado, cujo valor não é revelado pelo leiloeiro. O participante com o maior lance recebe o objeto e paga o preço equivalente ao maior ou ao segundo maior lance (dependendo se o leilão é de primeiro ou segundo maior lance). As licitações públicas são em geral classificadas como leilões selados de primeiro maior lance. Evidentemente, num processo de licitação desse tipo o vendedor com o *menor* preço ganha a concorrência.

Os leilões selados de segundo maior lance, conhecidos também como leilões de Vickrey, pois foram originalmente sugeridos por ele em seu artigo de 1961, são mais incomuns. Selos raros são vendidos dessa forma no estado do Maine (E.U.A.).

Analisaremos leilões orais de dois tipos: de preço ascendente e de preço descendente. No leilão ascendente ou inglês, o leiloeiro anuncia um preço inicial e solicita lances dos participantes. O leiloeiro aumenta monotonicamente o preço até que ele não consiga um lance superior. Ganha aquele indivíduo que foi o último a manifestar sua intenção de pagar o preço solicitado. Esse tipo de leilão é talvez o mais comum, tendo sido popularizado por seu uso na venda de obras de arte.

No leilão descendente ou holandês, o leiloeiro anuncia um preço inicial em uma roleta que fica na frente dos participantes e o preço cai monotonicamente nessa roleta até que um dos indivíduos grite "pare". Esse agente recebe a mercadoria e paga o preço no qual a roleta parou. Esse mecanismo é utilizado na venda de flores em Amsterdan.

O leitor pode observar, por exemplo, que o tipo de leilão utilizado tradicionalmente na venda de objetos de arte é bem distinto daquele que vem sendo praticado na venda de títulos do governo. Em adição, imagine que o governo quer determinar o preço de venda de uma empresa estatal ou o valor a ser cobrado pelo direito de exploração de uma jazida mineral. Nesses casos, a escolha de um mecanismo apropriado está longe de ser um problema trivial.

Assim, a teoria de leilões deve responder a pelo menos duas questões. Por um lado, essa teoria deve identificar que fatores influenciam o comportamento dos participantes e conseqüentemente o resultado

do leilão. Por outro lado, essa teoria deve prever o resultado, em termos da receita esperada (condicional à realização da venda), para os vários tipos de leilões existentes.

Este trabalho é organizado da seguinte forma: na segunda seção introduzimos o modelo básico no qual os participantes observam valores (sinais) independentes e privados relativos ao objeto que está sendo leiloado. Além disso, os participantes são simétricos e neutros em relação ao risco. Sob essas condições, podemos demonstrar o teorema mais popular da teoria de leilões: o teorema de equivalência de receitas. Esse teorema estabelece que os quatro leilões acima citados geram a mesma receita.

Ainda na seção dois, argumentamos que esse teorema é válido mesmo numa situação em que o verdadeiro valor do objeto (que é desconhecido) seja o mesmo para cada participante: No entanto, para isso precisamos que os sinais sejam independentes.

Na seção três discutimos um dos itens de maior apelo para aqueles que participam de leilões: a maldição do vencedor. Diversos autores apresentam evidência de que, em leilões selados de primeiro maior lance com valores comuns, o ganhador sofre prejuízo (ou obtém lucro inferior ao normal). Nessa seção mostramos que tal situação não pode ocorrer em um equilíbrio de Nash simétrico.

Na seção quatro discutimos uma das situações na qual o teorema de equivalência de receitas deixa de ser válido. Em particular, no caso em que os valores (sinais) são correlacionados os leilões selados de segundo maior lance geram uma receita superior à receita gerada em leilões de primeiro maior lance selado. Para obtermos tal resultado introduzimos a noção de valores afiliados. Finalmente, na última seção indicamos algumas das possíveis extensões do modelo básico.

2. Equivalência de receitas: Leilões com valores privados independentes.

2.1. Hipóteses básicas.

Nesta seção obteremos um dos resultados mais conhecidos da teoria de leilões, notadamente, o teorema de equivalência de receitas. Vale ressaltar que consideraremos apenas o caso de leilões de um único objeto com um número fixo de participantes (N). Por simplicidade,

supomos que o preço de reserva é zero e que os agentes não incorrem em custo algum caso participem do leilão. O valor do objeto para cada jogador i será representado por v_i . Assim, devemos interpretar v_i como a realização da variável aleatória V_i . O valor do objeto representa a quantia máxima que o participante está disposto a pagar. Denotaremos por F a distribuição do valor de cada v_i e por v o vetor $v_1, v_2, \dots, v_N$. Supomos que F tem um suporte finito $[\underline{v}, \bar{v}]$ e que possui densidade f , onde f é contínua. Temos, ainda, as seguintes hipóteses:

- H1 Valores privados: cada participante sabe o seu próprio valor para o objeto mas desconhece os valores dos demais participantes.
- H2 Valores (sinais) independentes: as variáveis aleatórias $V_1, V_2, V_3, \dots, V_N$ são distribuídas independentemente.
- H3 Simetria: Cada variável aleatória V_i , $i = 1, \dots, N$, tem a mesma distribuição.
- H4 Os participantes são neutros em relação ao risco

As hipóteses (H1) e (H2) implicam que cada participante i sabe a distribuição da qual são retirados os valores para os demais participantes, isto é, a distribuição conjunta é do conhecimento comum. Alternativamente, podemos descrever os sinais como variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_N$. Contudo, no modelo com valores privados independentes temos $V_i = X_i$, $i = 1, \dots, N$. Ou seja, em um modelo mais geral, o sinal é a informação que cada participante recebe sobre o valor do objeto. Por exemplo, consideraremos, na seção 2.5, o caso em que o valor de cada indivíduo é a média dos sinais recebidos.

Note que o modelo de valores privados independentes é apropriado para descrever leilões nos quais os valores dos objetos são idiosincráticos, como por exemplo em leilões de objetos de arte. Esse modelo certamente não é apropriado para descrever leilões do direito de extrair madeira de uma floresta ou petróleo de algum poço. Nesse caso, o valor estimado do objeto para cada participante depende de informação que é comum a todos os participantes. Isso implica que um participante que acredita que o objeto é muito valioso vai achar que os outros participantes também acham o objeto valioso. Nesse caso os sinais são correlacionados e não independentes.

A hipótese (H3) garante que cada par de participantes tem a mesma crença sobre como o valor de um terceiro participante é distribuído. Além disso, (H3) garante que cada participante acredita que os valores de quaisquer pares formados pelos demais participantes são identicamente distribuídos. Finalmente, a hipótese (H4) garante que os participantes maximizam o lucro esperado.

Assim, podemos descrever um leilão como um jogo $\Gamma = \{(Y_i, \pi_i) : i = 1, \dots, N\}$ onde Y_i representa o espaço de estratégias do agente i (que corresponde ao conjunto de reais positivos) e onde π_i representa a função payoff (que depende das regras do leilão). Neste contexto, uma estratégia de elaboração de lances para o jogador i é uma função $b_i(v_i)$ cujo domínio é o seu conjunto de informações (neste caso o seu valor) e cuja imagem é o conjunto R^+ . Podemos então definir o conceito de equilíbrio adequado ao problema em estudo.

Definição: Um perfil de estratégias $b^*(v) = b_1^*(v_1), \dots, b_N^*(v_N)$ é um equilíbrio de Nash simétrico do jogo Γ se:

- (i) $b_i^*(v_i) = \operatorname{argmax} \pi_i(b_i, b_{-i}^*),$ para todo $i = 1, 2, \dots, N;$
- (ii) $b_i^*(v_i) = b_j^*(v_i)$ para todo $i \neq j.$

2.2. Leilões selados de primeiro maior lance.

A metodologia empregada na caracterização do equilíbrio de Nash simétrico é a seguinte: consideramos o jogo do ponto de vista de um dos jogadores (digamos o jogador 1) e supomos que todos os agentes seguem a mesma estratégia de elaboração de lances $b(\cdot)$. Supomos, ainda, que $b(\cdot)$ é crescente em $[y, \bar{v}]$ e que o jogador 1, cujo valor é dado por v_1 , submete um lance como se o seu valor fosse y . Podemos calcular o payoff do jogador 1 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \pi(v_1, b(y)) &= (v_1 - b(y)) \Pr(b(y) \geq b(v_j), j = 2, \dots, N) \\ &= (v_1 - b(y)) F^{N-1}(y) \end{aligned}$$

Para que $b(s)$ seja uma estratégia de equilíbrio, é necessário que $\frac{d\pi}{dy} \big|_{y=v_1} = 0$, ou seja:

$$\{(v_1 - b(y))(N - 1)f(y)F^{N-2}(y) - b'(y)F^{N-1}(y)\} \big|_{y=v_1} = 0 \quad (1)$$

Note que $\frac{d\pi}{dy}$ tem o mesmo sinal que $v_1 - y^4$ e portanto a função payoff é quase-convexa. Conseqüentemente, $y = v_1$ maximiza a função payoff. Assim, substituindo y por v_1 na equação (1) obtemos:

$$v_1(N-1)f(v_1)F^{N-2}(v_1) = b'(v_1)F^{N-2}(v_1) + b(v_1)(N-1)f(v_1)F^{N-2}(v_1) \quad (2)$$

Observe que lado direito de (2) é simplesmente $\frac{d[b(v_1)F^{N-1}(v_1)]}{dv_1}$. Assim, se integrarmos os dois lados da expressão (2) obtemos:

$$b(v_1) = \frac{\int_0^{v_1} x(N-1)f(x)F^{N-2}(x)dx}{F^{N-1}(v_1)} \quad (3)$$

Fica como exercício para o leitor mostrar que $b(\cdot)$ é diferenciável e estritamente crescente em v_1 . Dessa forma, podemos concluir que o perfil de estratégias onde cada jogador usa $b(\cdot)$ é o único equilíbrio de Nash simétrico. Note, ainda, que a expressão 3 pode ser interpretada como uma probabilidade condicional, ou seja, $b(v_1)$ é o valor esperado do máximo dos outros participantes condicional ao fato de que v_1 é maior ou igual do que os outros valores. Note ainda que o preço esperado é igual a esse valor condicional. Consideremos um exemplo específico.

Exemplo 1: Seja $N = 5$ (ou seja, temos um leilão com cinco participantes) e $v_i \sim iid U[0, 1]$, $i = 1, \dots, 5$. Um único objeto é vendido através de um leilão selado de maior lance com preço mínimo igual a zero. Neste exemplo temos que $F(v) = v$ e $f(v) = 1$ para todo $v \in [0, 1]$. Usando a expressão (3) obtemos $b(v) = 4v/5$, ou seja, cada participante submete um lance equivalente a $4/5$ do seu valor.

⁴Observe que a condição necessária para que o payoff do jogador 1 seja maximizado é dada por: $\frac{d\pi}{dy} = 0$ quando $v_1 = y$. Além disso, $\pi(\cdot, \cdot)$ é crescente em v_1 .

Note que se o máximo valor for igual a v , então $4v/5$ representa o valor esperado do segundo maior valor (a distribuição condicional de uma variável aleatória uniformemente distribuída é também uniformemente distribuída). Assim, cada participante submete um lance de forma que ele consiga superar marginalmente o participante com o segundo maior valor, condicional é claro ao fato de que esse participante tenha o maior valor. Note que o fato de f ser contínua é fundamental para garantirmos que a probabilidade de um empate seja igual a zero. Contudo, essa hipótese apenas simplifica a análise e resultados similares podem ser obtidos para distribuições com átomos. Em particular o preço esperado é dado por $E[p] = 4/5 E[v_{(1)}] = (4/5)(5/6) = 2/3$. Onde $E[v_{(1)}]$ representa o valor esperado do estatística de primeira ordem. Podemos ainda calcular o lucro esperado do ponto de vista do ganhador: $E[\pi] = E[v_{(1)}] - 4/5 E[v_{(1)}] = 4/5 - 2/3 = 2/15$.

Finalmente, lembramos que uma estratégia em um leilão holandês com preço mínimo igual a zero é uma função $b(\cdot)$ cujo domínio é o conjunto de valores possíveis $[\underline{v}, \bar{v}]$ e cuja imagem é o conjunto R^+ . Considere, por exemplo, o perfil de estratégias $(b_1, \dots, b_N)$. Suponha que $b_1(v_1)$ é o lance mais elevado. Dessa forma, se o mecanismo utilizado é um leilão selado de maior lance então o jogador 1 arremata o objeto e tem um lucro de $v_1 - b_1$, enquanto que o lucro dos demais participantes é igual a zero. Se o mecanismo utilizado é um leilão holandês, então o jogador 1 é o primeiro a parar a roleta quando o preço atinge b_1 . O seu lucro é igual a $v_1 - b_1$, enquanto que o lucro dos demais participantes é igual a zero. Note que o jogador 1 não é especial. Podemos considerar qualquer jogador como tendo o maior valor. O que importa é que se tal perfil de estratégias for utilizado em ambos os leilões, temos o mesmo payoff para todos os jogadores.

Em resumo, temos dois jogos com espaços de estratégia idênticos e uma situação em que o mesmo perfil de estratégias gera o mesmo payoff para todos os jogadores em ambos os leilões. Nesse caso, dizemos que esses dois leilões são estrategicamente equivalentes.⁵ Dessa forma, os resultados acima são válidos também para os leilões holandeses.

⁵Ver, por exemplo, Myerson (1991)

2.3. Leilões selados de segundo maior lance.

Calcularemos, a seguir, o (único) equilíbrio de Nash simétrico quando um objeto é vendido através de um leilão de segundo maior lance selado, isto é, quando o participante com o maior lance arremata o objeto mas paga o equivalente ao segundo maior lance. Uma vez mais supomos que existe uma estratégia de elaboração de lances $b(\cdot)$ utilizada por todos os jogadores e que $b(\cdot)$ é estritamente crescente em $[\underline{v}, \bar{v}]$. Supomos, ainda, que o jogador 1 submete um lance de $b(y)$ enquanto que seu valor é dado por v_1 . O lucro resultante de tal estratégia é dado por:

$$\pi(v_1, b(y)) = (v_1 - b(z)) \Pr(b(y) \geq b(v_j), j = 2, \dots, N)$$

onde z representa o valor máximo entre os jogadores $2, \dots, N$. Mas nós conhecemos a distribuição do máximo dos demais valores e portanto podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\pi(v_1, b(y)) = \int_{x \leq y} (v_1 - b(z))(N-1)f(x)F^{N-2}(x)dx$$

Para que $b(\cdot)$ seja uma estratégia de equilíbrio, é necessário que $\frac{d\pi}{dy} \big|_{y=x} = 0$, i.e.,

$$(v_1 - b(v_1))(N-1)f(v_1)F^{N-2}(v_1) = 0; \text{ ou} \quad (4)$$

$$b(v_1) = v_1 \quad (5)$$

Note que $b(\cdot)$ é diferenciável, estritamente crescente em v e é um equilíbrio de Nash simétrico.

“submeter um lance de acordo com a equação (5)” é uma estratégia dominante. Note ainda que nesse caso a receita esperada será equivalente ao valor esperado do segundo maior valor. Isso ocorre porque os agentes submetem lances iguais aos seus valores, e o preço em um

leilão de Vickrey é igual ao segundo maior lance. Consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 2: Suponha que todos os parâmetros são idênticos aos do exemplo 1. A única diferença é a forma com o que o objeto é vendido. Agora, o jogador com o maior lance arremata o objeto mas paga um preço equivalente ao segundo maior lance. Usando a expressão (5), concluímos que $b(v) = v$, ou seja, cada participante submete um lance equivalente ao seu valor. Assim, o preço esperado é igual ao valor esperado do segundo maior lance, que é igual ao valor esperado do segundo maior valor. Nesse caso, $E[p] = E[v_{(2)}] = 4/6$, onde $v_{(2)}$ representa a estatística de segunda ordem. O lucro esperado (para o ganhador) é dado por $E[\pi] = E[v_{(1)}] - E[v_{(2)}] = 5/6 - 4/6 = 1/6$. Note que o preço esperado é o mesmo nos dois tipos de leilões. Esse resultado, que será formulado na próxima subseção, é conhecido como o teorema de equivalência de receitas.

Finalmente, nosso próximo passo é investigar a relação entre leilões de segundo maior lance e orais ingleses. Considere a seguinte representação de um leilão oral inglês com preço mínimo igual a zero: cada jogador aperta continuamente um botão enquanto que o leiloeiro aumenta continuamente o preço. Se um participante solta o botão ele está automaticamente fora do leilão. O leilão acaba quando apenas um participante permanece apertando o botão. Esse jogador arremata o objeto e paga um preço equivalente ao valor do lance no momento em que o penúltimo jogador se retirou. Uma estratégia nesse jogo é uma função cujo domínio é o intervalo $[2, \bar{v}]$ e cuja imagem é o conjunto R^+ .

Considere um perfil de estratégias $(b_1, \dots, b_N) = (v_1, \dots, v_N)$. Suponha que $b_1(v_1)$ é o lance mais elevado e que $b_2(v_2)$ é o segundo lance mais elevado. Dessa forma, se o mecanismo utilizado é um leilão selado de segundo maior lance então o jogador 1 arremata o objeto e tem um lucro de $v_1 - v_2$, enquanto que o lucro dos demais participantes é igual a zero. Se o mecanismo utilizado é um leilão inglês, então o jogador 1 é o último a soltar o botão e o jogador 2 o penúltimo. Portanto, o jogador 2 solta o botão quando o preço atinge v_2 . O lucro do jogador 1 é igual a $v_1 - v_2$, enquanto que o lucro dos demais participantes é igual a zero. Note que os jogadores 1 e 2 não

são especiais. Podemos considerar qualquer par de jogadores como tendo os dois maiores valores. O que importa é que se tal perfil de estratégias for utilizado em ambos os leilões, então temos o mesmo **payoff** para todos os jogadores.

Em resumo, temos dois jogos com espaços de estratégia idênticos e uma situação em que o mesmo perfil de estratégias gera o mesmo payoff para todos os jogadores em ambos os leilões. Assim, os leilões selados de segundo maior lance e os leilões ingleses são estrategicamente equivalentes. Dessa forma, os resultados acima são válidos também para os leilões ingleses.

2.4. Teorema de equivalência de receitas.

Note que no caso de leilões selados de primeiro maior lance, um participante arbitrário submete um lance que é equivalente ao valor esperado do jogador com o segundo maior valor dado que esse participante arbitrário tenha o maior valor. Assim, o preço esperado nesse tipo de leilão é igual ao valor esperado do maior lance, i.e, o valor esperado da estatística de segunda ordem. Mas esse valor é idêntico ao preço esperado em um leilão selado de segundo maior lance! Assim, estabelecemos o seguinte teorema.

Teorema 1: A receita esperada é idêntica nos quatro tipos de leilões descritos acima caso as hipóteses (H1)-(H4) sejam satisfeitas.

A título de ilustração, consideraremos o caso em que $v_i \sim iid$ $U[0, 1]$, $i = 1, \dots, N$. Nesse caso, $F(v) = v$ e $f(v) = 1$ para todo $v \in [0, 1]$. O preço esperado no leilão de primeiro maior lance, que denotaremos por $E[p_1]$ é simplesmente igual ao maior lance, que pode ser obtido através da expressão (3):

$$E[p_1] = \frac{\int_0^1 x(N-1)x^{N-2}dx}{1^{N-1}} = (N-1) \int_0^1 x^{N-1}dx = \frac{N-1}{N+1}$$

O preço esperado no leilão de segundo maior lance, que denotaremos por $E[p_2]$, é simplesmente igual ao valor esperado do segundo

maior lance, o que equivale ao valor esperado da estatística de segunda ordem, i.e.:

$$E[p_2] = \int_0^1 x f_{(2)}(x) dx$$

onde $f_{(2)}(x)$ denota a densidade da variável aleatória representando o segundo maior valor de uma amostra de N variáveis aleatórias com distribuição uniforme $[0,1]$, ou seja, $f_{(2)}(x) = N(N-1)x^{N-2}(1-x)$. Dessa forma:

$$E[p_2] = \int_0^1 x N(N-1)x^{N-2}(1-x) dx = N(N-1) \left[\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right] = \frac{N-1}{N+1}$$

2.5. Equivalência de receitas com valores incertos (comuns) e sinais independentes.

Nesta subseção abordaremos a seguinte questão: É possível relaxar alguma das hipóteses (H1)-(H4) e ainda obter equivalência de receitas? Myerson (1981) mostrou que é possível obter um teorema de equivalência de receitas relaxando (H1), desde que mantenhamos a independência entre os valores dos participantes. A demonstração do teorema seguinte é devida a Myerson.

Teorema 2: Considere uma família de leilões satisfazendo a seguinte propriedade:

(P1) O participante com o maior valor recebe o objeto.

A receita esperada por cada um dos leilões nessa família é a mesma desde que os sinais sejam independentes.

A seguir nós resolveremos um exemplo específico onde substituímos a hipótese (H1) pela seguinte hipótese:

H1' O valor do objeto para todos os participantes é o mesmo:

$$\frac{X_1 + \dots + X_N}{N}.$$

Note que a hipótese (H2) implica que $X_1, X_2, \dots, X_N$ são sinais independentes.

Exemplo 3: Seja $N = 2$ e consideremos o caso em que X_1 e X_2 são distribuídos uniformemente no intervalo $[0, 1]$. Assim, temos que $v_1 = v_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}$.

Usaremos a metodologia descrita anteriormente para calcular o equilíbrio de Nash simétrico no caso de leilões selados de primeiro maior lance. O lucro do ponto de vista do jogador 1, dado que ele possui um valor X_1 , que ele submete um lance como se seu valor fosse y e que ele arremate o objeto, é dado por:

$$\pi(X_1, b(y)) = \int_{y \geq z} (v_1(X_1, z) - b(y)) f(z | X_1) dz$$

Contudo, independência implica que $f(X_2 | X_1) = f(X_2)$. Assim, podemos substituir esse valor na integral acima e usar a condição de primeira ordem do problema de maximização do lucro, i.e., $\frac{d\pi}{dy} |_{y=x} = 0$, para obtermos:

$$b(X_1) = \frac{\int_0^{X_1} v_1(z, z) dz}{X_1} = \frac{\int_0^{X_1} z dz}{X_1} = \frac{X_1^2}{2X_1} = \frac{X_1}{2}$$

Podemos derivar uma expressão semelhante para o participante 2, ou seja, cada participante submete um lance equivalente a metade do seu sinal privado. Assim, o preço esperado nesse leilão é simplesmente metade do valor esperado da estatística de primeira ordem, ou seja:

$$E[p_1] = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Calcularemos, a seguir, o equilíbrio de Nash simétrico no caso de leilões selados de segundo maior lance. Podemos escrever o lucro do

participante 1 dado que ele ganhe o objeto e que submeta um lance como se seu valor fosse y quando na verdade é X_1 :

$$\begin{aligned}\pi(X_1, b(y)) &= \int_{y \geq z} (v_1(X_1, z) - b(z))f(z | X_1)dz = \\ &= \int_{y \geq z} (v_1(X_1, z) - b(z))f(z)dz.\end{aligned}$$

Utilizando a condição de primeira ordem para o problema de maximização do lucro, i.e. $\frac{d}{dy}$, temos que:

$$b(X_1) = v_1(X_1, X_2)$$

Assim, submeter um lance equivalente ao seu valor (que no caso é aleatório) continua sendo uma estratégia dominante quando os valores são comuns. O preço esperado nesse leilão é simplesmente o valor esperado do segundo maior lance, ou seja

$$E[p_2] = 1/3$$

Como era esperado, $E[p_1] = E[p_2]$. Note que a questão da equivalência estratégica entre os diversos leilões é irrelevante do ponto de vista da receita arrecadada, uma vez que cada um dos quatro tipos de leilões mencionados anteriormente satisfaz a propriedade (P1).

3. A maldição do vencedor.

Em leilões selados de primeiro maior lance onde a hipótese (H1) é substituída por uma versão qualquer da hipótese (H1') e onde a hipótese (H2) permanece inalterada ou é substituída pela hipótese (H2') abaixo, um fenômeno tem sido frequentemente mencionado em trabalhos empíricos sobre leilões. Esse fenômeno é a maldição do vencedor.

H2' Valores (sinais) dependentes: As variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots, X_N$ são correlacionadas.

Suponha que todos os participantes obtem estimativas não viesadas do verdadeiro valor do objeto (que é evidentemente desconhecido pelos participantes) e que as estratégias de elaboração de lances sejam funções crescentes dessas estimativas. O participante com o maior lance será aquele mais otimista com relação ao valor verdadeiro do objeto. A menos que esse problema de seleção adversa seja incluído no processo de elaboração de lances, teremos uma situação na qual o ganhador poderá sofrer prejuízos (ou atingir um lucro inferior ao normal).

Tal fenômeno tem sido mencionado em leilões de jazidas de petróleo (Capen, Clapp e Campbell, 1971), em leilões de direitos de publicação de livros (Dessauer, 1981) e em disputas pelo controle acionário de empresas (Roll, 1986).

Observe, no entanto, que não existe maldição do vencedor em qualquer equilíbrio de Nash simétrico, uma vez que a estratégia de elaboração de lances ótima deve levar em consideração o problema de seleção adversa mencionado acima. Portanto, a maldição do vencedor é uma solução na qual os jogadores empregam estratégia subótimas. O modelo a seguir segue Cox e Isaac (1984): considere o caso em que o objeto que está sendo leiloadado possui um valor v , que corresponde à realização de uma variável aleatória V com distribuição G e com suporte em $[\underline{v}, \bar{v}]$. $F_j(y | v), j = 1, 2, \dots, N - 1$, representa a probabilidade (do ponto de vista de um participante qualquer) de que o rival de ordem j submeterá um lance de no máximo y , dado que o valor do objeto é dado por v . Supomos que os sinais são independentes (H2) e, portanto, a probabilidade de que os demais participantes (do ponto de vista do nosso participante arbitrário) submetam lances inferiores a y , dado que o valor do objeto é v , pode ser escrita da seguinte forma:

$$F(y | v) = \prod_{j=1}^{N-1} F_j(y | v)$$

Supondo que y é uma variável aleatória contínua, o lucro espe-

rado pelo ganhador, dado que submeta um lance de b , é dado por:

$$\pi(b, \cdot) = \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} (v - b) F(b | v) dG(v) \quad (6)$$

Caso b^* seja o lance ótimo, então temos que:

$$\pi(b^*, v) \geq \pi(b, v), \forall b \geq 0 \quad (7)$$

Assim

$$\pi(b^*, \cdot) \geq \pi(0, \cdot) = \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} v F(0 | v) dG(v) \geq 0 \quad (8)$$

O caso em que $b^* = 0$ é trivial. Assim, seja $b^* > 0$ então

$$\pi(b^*, \cdot) > 0 \quad (9)$$

Dessa forma, temos que

$$b^* \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} F(b^* | v) dG(v) < \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} v F(b^* | v) dG(v) \quad (10)$$

Isto é

$$b^* < \frac{\int_{\underline{v}}^{\bar{v}} v F(b^* | v) dG(v)}{\int_{\underline{v}}^{\bar{v}} F(b^* | v) dG(v)} \quad (11)$$

O denominador da expressão (11) representa a probabilidade de que b^* seja o lance ganhador. Assim, podemos concluir que a maldição do vencedor é inconsistente com um comportamento ótimo. Caso os jogadores não reconheçam o problema de seleção adversa implícito na análise acima, a maldição do vencedor ocorre pois:

$$E[v \mid X_i] > E[v \mid X_i = X_1]$$

Onde $E[v \mid X_1]$ representa o valor esperado condicional à observação do sinal mais elevado. Assim, todos os lances superiores a $E[v \mid X_i]$ implicam em um lucro esperado negativo. No modelo acima isso não ocorre pois os participantes “descontam” os seus lances.

4. Leilões com valores afiliados.

Nesta seção argumentamos que quando as estimativas dos participantes com relação ao valor do objeto são estatisticamente dependentes, o leilão selado de segundo maior lance gera uma receita superior a do leilão selado de primeiro maior lance. Para isso, introduziremos a noção de valores afiliados, que inclui como casos particulares valores comuns e valores privados. A noção de valores afiliados foi utilizada pela primeira vez no contexto de leilões em Milgrom e Weber (1982). O restante desta seção é baseado nesse trabalho.

Seja $X = X_1, \dots, X_N$ o vetor de sinais observados pelos participantes. X_i pode ser interpretado como a estimativa do valor do objeto para o participante i , que pode ou não ser correlacionada com as estimativas dos demais participantes. Note que X_i é a única informação disponível para o participante i . Seja $S = S_1, \dots, S_M$ o vetor de variáveis que também influenciam o valor do objeto. O valor do objeto para o participante i é representado pela função $V_i = u_i(S, X)$. Milgrom e Weber impõem o seguinte conjunto de hipóteses:

- A1 Existe uma função u definida em R^{M+N} tal que para todo i , $u_i(S, X) = u(X, X_i, \{X_j\}_{j \neq i})$, ou seja, o valor de cada participante é uma função simétrica dos sinais dos demais participantes.
- A2 A função u é não-negativa, contínua e não-decrescente.

- A3 $E[V_i] < \infty$
- A4 $V_1, \dots, V_N$ são medidos em valores monetários
- A5 Os indivíduos são neutros em relação ao risco, isto é, maximizam o lucro esperado.
- A6 A distribuição conjunta dos sinais tem uma densidade $f(s, x)$.
- A7 f é simétrica nos seus N argumentos.
- A8 As variáveis $S_1, \dots, S_M, X_1, \dots, X_N$ são afiliadas, conforme definição abaixo.

Considere z e $z' \in R^{M+N}$. Seja $z \vee z'$ o máximo dos dois elementos e $z \wedge z'$ o mínimo. As variáveis do modelo são afiliadas se, para cada par (z, z') , a seguinte desigualdade é válida:

$$f(z \vee z')f(z \wedge z') \geq f(z)f(z') \quad (12)$$

Intuitivamente, a desigualdade (12) indica que valores altos para algumas das variáveis implicam em que a probabilidade de que as realizações das outras variáveis sejam altas é maior do que a probabilidade de que sejam baixas. Note, ainda, que o modelo acima pode ser utilizado para descrever leilões com valores privados (faça $M = 0$ e $V_i = X_i$) ou leilões com valores comuns (faça $M = 1$ e $V_i = S_i$). Em adição, o modelo acima pode ser reduzido para o modelo da seção 2 ao assumirmos que $X_1, \dots, X_N$ são estatisticamente independentes. Nesse caso, a desigualdade (12) transforma-se em uma igualdade. Finalmente, Milgrom e Weber mostram que o modelo da seção anterior também satisfaz a condição (12), onde $f(s, x)$ assume a forma $f(s, x) = h(s)g(x_1, s) \dots g(x_N, s)$, onde h representa a densidade marginal de S e supomos que g satisfaz a propriedade da razão de verossimilhança monotônica. O seguinte teorema é demonstrado por Milgrom e Weber (Teorema 15):

Teorema 3: O preço esperado em um leilão de segundo maior lance selado é superior ao preço esperado em um leilão de primeiro lance selado quando os sinais são estatisticamente dependentes.

Em um leilão selado de segundo maior lance, mesmo com valores afiliados, submeter um lance igual ao valor ainda é uma estratégia ótima. No leilão de primeiro maior lance, os participantes vão reduzir

seus lances ainda mais do que eles faziam sob valores privados independentes, pois cada indivíduo agora desconta o fato de que se ele tiver o maior lance, então ele estaria superestimando o valor do objeto.

Vale destacar que neste caso os leilões selados de segundo maior lance não são equivalentes aos leilões orais ingleses. Especificamente, o leilão oral gera uma receita esperada superior à gerada pelos leilões selados de segundo maior lance. A intuição por trás desse resultado é simples. Quando os jogadores não estão certos quanto ao valor do objeto, eles refinam sua informação pela evolução dos lances em um leilão oral. Essa informação adicional faz com que os participantes submetam lances de forma mais agressiva em um leilão oral. Note, contudo, que os leilões selados de primeiro maior lance continuam sendo equivalentes aos leilões holandeses.

5. Conclusão.

O objetivo da análise acima foi introduzir o leitor à teoria de leilões. Assim, deixamos de lado vários aspectos interessantes e diversas extensões do modelo básico. Por exemplo, ao longo deste trabalho assumimos que o preço mínimo era igual a zero. Contudo, se o objetivo do leiloeiro é maximizar a receita obtida no leilão, pode ser ótimo impor um preço mínimo positivo. Consideramos, ainda, o caso em que um número fixo de participantes submetem lances em um leilão sem ter que incorrer em qualquer custo de participação (como a cobrança de um ingresso). A cobrança de tal tarifa pode ser ótima. Neste caso, deveríamos considerar a racionalidade de termos um número fixo de participantes e poderíamos considerar o caso em que exista um número de participantes em potencial do qual apenas uma fração decide pagar o ingresso.

Outra questão não abordada neste trabalho diz respeito ao papel da informação em leilões. Por exemplo, como os participantes se comportariam na presença de um "expert" (alguém que tenha informação superior sobre o valor verdadeiro do objeto)? Seria o caso em que a divulgação de tal informação aumentaria o preço esperado no leilão? Ainda sobre esse tópico, como resolver leilões em que os participantes são assimétricos?

Para aqueles leitores que estão convencidos de que as questões

acima são interessantes, sugiro que leiam Milgrom e Weber (1982). Esse trabalho provê a linguagem e os resultados básicos para um entendimento adequado da teoria de leilões de um único objeto. A partir daí, algumas das respostas às perguntas feitas acima podem ser encontradas nas resenhas de McAfee e McMillan (1987) e Milgrom (1987, 1989).

Finalmente, o leitor pode estar interessado em saber qual é a capacidade de previsão da teoria de leilões com relação à venda de mais de um objeto simultanea ou sequencialmente. Apesar da teoria de leilões de vários objetos ainda está no seu estágio inicial, suas aplicações potenciais são muitas, uma vez que uma variedade de objetos (idênticos ou semelhantes) são vendidos dessa forma. No caso de leilões sequenciais, o leitor pode se referir a, entre outros, Weber (1983), McAfee e Vincent (1993), Engelbrecht-Wiggans e Menezes (1993), Menezes (1992, 1993-a), e Menezes e Monteiro (1993). No caso de leilões simultâneos, o leitor deve consultar, por exemplo, Engelbrecht-Wiggans e Weber (1979), Weber (1983), Menezes (1993-b), e Menezes e Monteiro (1994).

Referências

- Capen, E.C., R. V. Clapp & W.M. Campbell 1971. "Competitive bidding in high-risk situations." *Journal of Petroleum Technology* 23:641-53.
- Cassady, R., Jr. 1967. *Auctions and auctioneering*. Berkeley: University of California Press.
- Cox, J. C. & I. R. Mark 1984. "In search of the winner's curse." *Economic Inquiry* 22: 579-92.
- Dessauer, J. P. 1981. *Book publishing*. New York: Bowker.
- Engelbrecht-Wiggans, R. 1990. "A theoretical basis for 19th century changes to the port of New York imported goods auctions." Working paper. University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Engelbrecht-Wiggans, R. 1980. "Auctions and bidding models: A survey." *Management Science* 26:119-42.
- Engelbrecht-Wiggans, R. & F. M. Menezes 1993. "Sequential auctions with continuation costs." *Informes de Matemática B-77*, IMPA.

- Engelbrecht-Wiggans, R. & R. J. Weber 1979. "An example of a multi-object auction game." *Management Science* 25:1272-77.
- McAfee, R. P. & J. McMillan 1987. "Auctions and bidding." *Journal of Economic Literature* 25:699-738.
- McAfee, R. P. & D. Vincent 1993. "The Declining Price Anomaly." *Journal of Economic Theory* 60:191-212.
- Menezes, F. M. 1992. "Leilões sequenciais com custos de permanência." *Revista de Econometria* 12:125-165.
- Menezes, F. M. 1993-a. "Sequential auctions with delay costs: a two-period model." *Economics Letters* 42:173-178.
- Menezes, F. M. 1993-b. "Leilões de privatização: uma análise de equilíbrio." *Revista Brasileira de Economia* 47:317-48.
- Menezes, F. M. & P. K. Monteiro 1993. "Sequential asymmetric auctions with endogenous participation." *Informes de Matemática B-78*, IMPA.
- Menezes, F. M. & P. K. Monteiro 1994. "A note on the existence of equilibria in Treasury bill auctions." Working Paper no. 273, Australian National University.
- Milgrom, P. 1989. "Auctions and bidding: a primer." *Journal of Economic Perspectives* 3:3-22.
- Milgrom, P. 1987. "Auction theory." In Bewley, T. (ed.) *Advances in Economic Theory 1985: Fifth World Congress*. London: Cambridge University Press, pp. 1-32.
- Milgrom, P. R. & R. J. Weber 1982. "A theory of auctions and competitive bidding." *Econometrica* 50:1089-1122.
- Myerson, R. 1991. *Game theory: Analysis of conflict*. Cambridge: Harvard University Press.
- Myerson, R. 1981. "Optimal Auction Design." *Mathematics of Operations Research* 6:58-73.
- Roll, R. 1986. "The Hubris hypothesis of corporate takeovers." *Journal of Business* 59:197-216.
- Vickrey, W. 1961. "Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders." *Journal of Finance* 16:8-37.
- Weber, R. J. 1983. "Multiple-Object Auctions." In Engelbrecht-Wiggans, R., Shubik, M. & R. J. Weber (eds.) *Auctions, bidding and contracting: Uses and theory*. New York: New York University Press, pp. 165-191.