O ÍNDICE DE ATKINSON E A SENSIBILIDADE DAS MEDIDAS DE DESIGUALDADE A TRANSFERÊNCIAS REGRESSIVAS

Rodolfo Hoffmann*

Resumo

O artigo mostra como estimar a desigualdade dentro dos estratos quando o índice de Atkinson é calculado com base em uma tabela de distribuição de freqüências. Em seguida discute-se a sensibilidade das medidas de desigualdade a transferências regressivas com dada razão entre as rendas, sugerindo-se um critério mais restritivo que o de Shorrocks e Foster (1987).

Abstract

The paper shows how to estimate the inequality within classes when computing Atkinson's index from a frequency distribution table. The sensitivity of inequality measures to regressive transfers with a given ratio between the two incomes is discussed and it is argued that this sensitivity should decrease with the income level, which is a more restrictive criteria than the one proposed by Shorrocks and Foster (1987).

1. Introdução.

Os principais objetivos desse trabalho são: (1) mostrar como pode ser estimada a desigualdade dentro dos estratos quando o índice de Atkinson é calculado com base em uma tabela de distribuição de freqüências, sendo fornecida a renda média de cada estrato, e (2) discutir a sensibilidade das medidas de desigualdade a transferências regressivas.

A próxima seção trata da definição e da interpretação do índice de Atkinson, e também da decomposição dessa medida de desigualdade quando a população é dividida em grupos. A seção 3 mostra como estimar a desigualdade dentro dos estratos quando o índice de Atkinson é calculado com base em uma tabela de distribuição de freqüências, ilustrando o procedimento com os dados da PNAD de

*ESALQ/USP. Uma versão anterior desse trabalho foi apresentada no XV Encontro Brasileiro de Econometria, em Belo Horizonte, em dez./1993.

1989 sobre rendimento das pessoas ocupadas na agricultura brasileira. A última seção é dedicada à discussão da sensibilidade das medidas de desigualdade a transferências regressivas, sugerindo-se um critério mais restritivo que o de Shorrocks e Foster (1987), de maneira que essa sensibilidade seja uma função decrescente do nível de renda para transferências com dada razão entre as rendas.

2. O Índice de Atkinson.

Seja x_i soas. Admite-se que a utilidade marginal da renda seja inversamente proporcional a x_i^ϵ , isto é,

$$\frac{dU(x_i)}{dx_i} = \frac{\Psi}{x_i^\epsilon} \quad (1)$$

Impondo $\epsilon > 0$ garante-se que a utilidade marginal diminua quando x_i

De (1) segue-se que, para $\epsilon \neq 1$,

$$U(x_i) = \frac{\Psi}{1-\epsilon} x_i^{1-\epsilon} + C \quad (2)$$

e, para $\epsilon = 1$,

$$U(x_i) \quad (3)$$

Atkinson (1970) admite que o nível de bem estar social (W) é uma função aditivamente separável e simétrica das rendas individuais, isto é,

$$W = \sum_i^n U(x_i)$$

De acordo com Atkinson (1970), o nível de renda equivalente numa distribuição igualitária (x_*) é o valor da renda que cada pessoa deveria receber para, com todos recebendo renda igual, o nível de bem estar social ser igual ao correspondente à distribuição observada. Então

$$nU(x_*) = \sum_{i=1}^n U(x_i) \quad (4)$$

A medida de desigualdade proposta por Atkinson é

$$A(\epsilon) = 1 - \frac{x_*}{\mu}, \quad (5)$$

onde μ é a renda média da população:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Dada uma distribuição de renda com média μ , a relação

$$\frac{x_*}{\mu} = 1 - A(\epsilon)$$

indica a proporção da renda total que seria suficiente para produzir o mesmo bem-estar social se a mesma renda total fosse igualitariamente distribuída.

De (2), (4) e (5) obtém-se, para $\epsilon \neq 1$,

$$A(\epsilon) = 1 - \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{n} \sum x_i^{1-\epsilon} \right)^{\frac{1}{1-\epsilon}} \quad (6)$$

De (3), (4) e (5) obtém-se, para $\epsilon = 1$,

$$A(\epsilon = 1) = 1 - \frac{1}{\mu} \exp \left(\frac{1}{n} \sum \ln x_i \right) \quad (7)$$

Pode-se verificar que:

- O índice de Atkinson não é afetado por variações proporcionais na renda de todas as pessoas da população.
- Para $\epsilon = 0$ temos $A = 0$, sempre.
- No caso de uma distribuição perfeitamente igualitária ($x_i = \mu$ para todo i), temos $A = 0$, qualquer que seja o valor de ϵ .

- d) Se $0 < \epsilon < 1$ e uma única pessoa se apropria de toda a renda ($x_j = n\mu$ e $x_i = 0$ para $i \neq j$), temos

$$A = 1 - n^{-\frac{\epsilon}{1-\epsilon}}$$

- e) Quando $\epsilon \geq 1$, basta haver um indivíduo com renda nula para que tenhamos $A = 1$. Isso corresponde a uma definição especial, onde identificamos o índice com o valor limite quando uma das rendas tende a zero, pois, a rigor, as funções (6) com $\epsilon > 1$ e (7) não são definidas para $x_i = 0$.
- f) Quando $\epsilon = 1$ o índice de Atkinson é a proporção em que a média geométrica das rendas é inferior à renda média.
- g) Quando $\epsilon = 2$ o índice de Atkinson é a proporção em que a média harmônica das rendas é inferior à renda média.

No índice de Atkinson, o parâmetro ϵ indica o grau de aversão à desigualdade: $\epsilon = 0$ significa que há indiferença em relação à desigualdade, ao passo que valores elevados de ϵ significam forte aversão à desigualdade.

Para deixar mais claro o significado de ϵ , Atkinson sugere um experimento mental envolvendo duas pessoas, uma com renda $x_i = M$ e outra com renda $x_j = 2M$. Subtrai-se \$ 1 da renda do mais rico e acrescenta-se \$ φ à renda do mais pobre, com $0 \leq \varphi \leq 1$; é como se a fração $1 - \varphi$ fosse gasta no processo de transferência. Para que as variações na utilidade das duas pessoas sejam iguais em valor absoluto devemos, de acordo com (1), ter

$$\frac{\Psi}{(2M)^\epsilon} = \frac{\Psi\varphi}{M^\epsilon}$$

Segue-se que

$$\varphi = \frac{1}{2^\epsilon}$$

Se $\epsilon = 1$ temos $\varphi = 0,5$ e $1 - \varphi = 0,5$; a transferência aumenta o bem estar social desde que menos da metade da renda seja gasta na sua realização. Se $\epsilon = 2$ temos $\varphi = 0,25$ e $1 - \varphi = 0,75$, isto é, admite-se que os gastos com a transferência alcancem 3/4 do valor subtraído do mais rico. Se $\epsilon = 0$ temos $\varphi = 1$ e qualquer gasto com a transferência fará com que o bem estar social diminua.

Se a renda da pessoa mais rica for 10 vezes maior do que a renda da mais pobre ($x_i = M$ e $x_j = 10M$), a condição para igualdade das variações na utilidade decorrentes da transferência fica

$$\varphi = \frac{1}{10^\epsilon}$$

Nesse caso, para $\epsilon = 1$ temos $\varphi = 0,1$, isto é, a transferência aumenta o bem estar social se mais de 10% da renda subtraída do mais rico chegar ao mais pobre. Para $\epsilon = 2$ temos $\varphi = 0,01$, indicando que a transferência deveria ser realizada mesmo que quase 99% da renda subtraída do mais rico fosse gasta no processo.

Com base nessa análise parece-me razoável limitar os valores de ϵ ao intervalo $(0,2]$. Valores de ϵ maiores do que 2 correspondem a níveis de aversão à desigualdade extremamente elevados.

Em seguida será analisado o cálculo do índice de Atkinson para uma população dividida em grupos, obtendo-se expressões indispensáveis para, na próxima seção, mostrar como se obtém o valor do índice a partir de uma tabela de distribuição de frequências, incluindo estimativas da desigualdade dentro dos estratos.

Considere-se uma população dividida em k grupos e seja x_{hi} a renda da i -ésima pessoa do h -ésimo grupo ($h = 1, \dots, k; i = 1, \dots, n_h$). Seja $N = \sum n_h$ o número total de pessoas.

Se μ_h é a renda média da h -ésimo grupo, a média geral é

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_h n_h \mu_h$$

Para $0 \leq \epsilon \neq 1$ o índice de Atkinson da população é

$$A = 1 - \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{N} \sum_h \sum_i x_{hi}^{1-\epsilon} \right)^{\frac{1}{1-\epsilon}} \quad (8)$$

e o índice de Atkinson dentro do h -ésimo grupo é

$$A_h = 1 - \frac{1}{\mu_h} \left(\frac{1}{n_h} \sum_i x_{hi}^{1-\epsilon} \right)^{\frac{1}{1-\epsilon}} \quad (9)$$

Verifica-se que o índice de Atkinson para a população pode ser expresso por (Nygard e Sandstrom, 1981, p. 330)

$$A = 1 - \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{1}{N} \sum_h n_h [(1 - A_h) \mu_h]^{1-\epsilon} \right\}^{\frac{1}{1-\epsilon}} \quad (10)$$

Se $A_h = 0$ para todo h , obtém-se o índice de Atkinson entre grupos:

$$A_e = 1 - \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{N} \sum_h n_h \mu_h^{1-\epsilon} \right)^{\frac{1}{1-\epsilon}} \quad (11)$$

Para $\epsilon = 1$ o índice de Atkinson da população é

$$A = 1 - \frac{1}{\mu} \exp \left(\frac{1}{N} \sum_h \sum_i \ln x_{hi} \right) \quad (12)$$

e o índice dentro do h -ésimo grupo é

$$A_h = 1 - \frac{1}{\mu_h} \exp \left(\frac{1}{n_h} \sum_i \ln x_{hi} \right) \quad (13)$$

Verifica-se que o índice de Atkinson para a população pode ser expresso por

$$A = 1 - \frac{1}{\mu} \exp \left\{ \frac{1}{N} \sum_h n_h \ln [(1 - A_h) \mu_h] \right\} \quad (14)$$

e o índice entre grupos é

$$A_e = 1 - \frac{1}{\mu} \exp \left(\frac{1}{N} \sum_h n_h \ln \mu_h \right) \quad (15)$$

Cabe ressaltar que a diferença $A - A_e$ não é uma média ponderada dos índices referentes à desigualdade dentro dos grupos.

3. Estimação da desigualdade dentro de estratos no cálculo do índice de Atkinson.

Os dados disponíveis para o cálculo de medidas de desigualdade consistem, freqüentemente, no número de pessoas (ou famílias) e nos totais de renda para um certo número de estratos. Nestes casos, ao calcular uma medida da desigualdade da distribuição é aconselhável incorporar estimativas da desigualdade dentro de cada estrato.

Um dos métodos utilizados consiste em pressupor que a distribuição de renda dentro dos estratos com limite superior finito tem função de densidade linear e que no último estrato, sem limite superior finito, a distribuição é a de Pareto com dois parâmetros. A aplicação desse método na interpolação de percentis e no cálculo do índice de Gini e das medidas de desigualdade de Theil está descrita em Hoffmann (1979, 1984 e 1991). Aqui vamos estendê-lo ao cálculo do índice de Atkinson¹.

Vamos admitir que dentro do estrato $[a, b)$ a distribuição de renda tenha média μ e função de densidade.

$$f(x) = \alpha + \beta x \quad (16)$$

Define-se

$$\lambda = \frac{\mu - a}{b - a} \quad (17)$$

Para $f(x) \geq 0$ no intervalo $[a, b)$ devemos ter $1/3 \leq \lambda \leq 2/3$. O procedimento a ser seguido caso essa condição não seja satisfeita é descrito em Hoffmann (1984).

Dados os valores de a, b e μ podemos calcular $\lambda, \theta = b - a$,

$$\beta = \frac{6(2\lambda - 1)}{\theta^2} \quad (18)$$

e

$$\alpha = \frac{1}{\theta} - \frac{\beta}{2}(a + b) \quad (19)$$

¹ Kakwani (1980) apresenta vários métodos de estimar a desigualdade dentro de estratos ao calcular medidas de desigualdade, mas considera, para o índice de Atkinson, apenas os casos em que $\epsilon = 1$ e $\epsilon = 2$.

Para uma distribuição contínua as expressões correspondentes a (6) e (7) são, respectivamente,

$$A = 1 - \frac{1}{\mu} \left[\int_a^b x^{1-\epsilon} f(x) dx \right]^{\frac{1}{1-\epsilon}} \quad (20)$$

e

$$A = 1 - \frac{1}{\mu} \exp \left[\int_a^b (\ln x) f(x) dx \right] \quad (21)$$

Uma vez que o cálculo referente à desigualdade dentro de cada estrato é feito tendo em vista determinar, em seguida, o índice de desigualdade para toda a população, de acordo com (10) ou (14), interessa obter, para cada estrato, o valor de

$$B = [(1 - A)\mu]^{1-\epsilon} = \int_a^b x^{1-\epsilon} f(x) dx \text{ para } 0 < \epsilon \neq 1 \quad (22)$$

ou

$$B = \ln[(1 - A)\mu] = \int_a^b (\ln x) f(x) dx \text{ para } \epsilon = 1 \quad (23)$$

Para o caso particular da função de densidade linear definida em (16), obtemos:

a) Para $0 < \epsilon \neq 1$, $\epsilon \neq 2$ e $\epsilon \neq 3$

$$B = \frac{\alpha}{2-\epsilon} (b^{2-\epsilon} - a^{2-\epsilon}) + \frac{\beta}{3-\epsilon} (b^{3-\epsilon} - a^{3-\epsilon}) \quad (24)$$

b) Para $\epsilon = 2$

$$B = \alpha \ln \frac{b}{a} + \beta \theta \quad (25)$$

c) Para $\epsilon = 1$

$$B = b(\ln b) \left(\frac{1}{\theta} - \frac{\beta a}{2} \right) - a(\ln a) \left(\frac{1}{\theta} - \frac{\beta b}{2} \right) - 1 + \frac{\beta \theta}{4} (a+b) \quad (26)$$

Deixamos de apresentar a expressão para o caso particular de $\epsilon = 3$ pois não vamos considerar valores de ϵ maiores do que 2.

Note-se que, para $\epsilon < 2$, o valor da expressão (24) pode ser calculado mesmo quando $a = 0$ (o que pode acontecer no primeiro estrato). No caso da Expressão (25) ($\epsilon = 2$), com $\alpha > 0$, temos

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} B = \infty$$

e, lembrando (10), verifica-se que, nesse caso $a = 0$ implica $A = 1$. No caso da expressão (26) ($\epsilon = 1$) verifica-se que

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} B = \frac{b}{\theta} \ln b - 1 + \frac{\beta \theta b}{4}$$

Quando o último estrato não tem limite superior finito, admitimos que dentro desse estrato a distribuição é a de Pareto com dois parâmetros, cuja função de distribuição é

$$F(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^\alpha \quad (27)$$

A média desta distribuição é

$$\mu = \frac{\alpha a}{\alpha - 1} \quad (28)$$

Verifica-se que, para $\epsilon + \alpha > 1$ e $\epsilon \neq 1$

$$B = \frac{\alpha}{\epsilon + \alpha - 1} a^{1-\epsilon} \quad (29)$$

e para $\epsilon = 1$

$$B = \ln a + \frac{1}{\alpha} \quad (30)$$

Com base nos limites e na renda média de cada estrato podemos, assim, obter o respectivo valor de B . Em seguida, utilizando também o número de pessoas em cada estrato, podemos calcular o índice de Atkinson da população através de (10) ou (14).

Para ilustrar a aplicação do método vamos utilizar os dados da PNAD de 1989 referentes à distribuição das pessoas ocupadas na agricultura brasileira, classificadas de acordo com seu rendimento

Tabela 1.

Pessoas ocupadas na agricultura brasileira
e rendimento médio para 13 estratos de rendimento
mensal de todos os trabalhos, de acordo com a PNAD de 1989.

Limites do estrato em salários mínimos ¹	Número pessoas	Rendimento médio (NCZ\$)
Até 0,25	679702	42,51
Mais de 0,25 a 0,5	1452463	99,70
Mais de 0,5 a 0,75	1210200	155,84
Mais de 0,75 a 1	1674526	220,24
Mais de 1 a 1,5	1844254	294,82
Mais de 1,5 a 2	840353	418,56
Mais de 2 a 3	983323	574,31
Mais de 3 a 5	697340	946,94
Mais de 5 a 7	231657	1467,18
Mais de 7 a 10	185934	1995,10
Mais de 10 a 15	137250	2895,76
Mais de 15 a 20	43600	4185,39
Mais de 20	131436	10476,24
Total	10112038	545,82

¹ Salário mínimo no mês de referência da PNAD (setembro de 1989): NCZ\$ 249,48.

todos os trabalhos, excluindo as pessoas ocupadas sem rendimento do trabalho. Cabe lembrar que o levantamento da PNAD não abrange a área rural da Região Norte. A amostra inclui 18.394 observações que, de acordo com os pesos fornecidos pelo IBGE, correspondem a 10.112.038 pessoas ocupadas na agricultura cujo rendimento de todos os trabalhos é positivo.

A tabela 1 mostra a distribuição de freqüências dessas pessoas, considerando 13 estratos de rendimento de todos os trabalhos, e o rendimento médio em cada estrato.

Também foi considerada uma distribuição de freqüências com apenas 6 estratos cujos limites inferiores são 0, 0,5, 1, 2, 5 e 10 salários mínimos. Esses são os estratos utilizados na publicação dos resultados da PNAD (ver IBGE, 1991, p. 16).

Utilizando o método descrito nesta seção, o índice de Atkinson foi calculado, para vários valores de ϵ , utilizando as informações da tabela 1 (13 estratos) ou considerando informações para apenas 6

Tabela 2.

Medidas da desigualdade da distribuição do rendimento de todos os trabalhos entre pessoas ocupadas na agricultura brasileira, excluindo as pessoas com rendimento igual a zero, de acordo com a PNAD de 1989.

Medida de desigualdade	Utilizando distribuição de frequências com		Utilizando dados individuais
	6 estratos	13 estratos	
Índice de Gini	0,6183	0,6196	0,6199
Redundância (T de Theil)	1,0553	0,9985	0,9790
L de Theil	0,7055	0,7054	0,7065
Índice de Atkinson			
para $\epsilon = 0,25$	0,2057	0,2017	0,2007
para $\epsilon = 0,50$	0,3386	0,3368	0,3366
para $\epsilon = 0,75$	0,4333	0,4331	0,4334
para $\epsilon = 1$	0,5062	0,5061	0,5066
para $\epsilon = 1,5$	0,6203	0,6144	0,6155
para $\epsilon = 2$	0,6970	0,6974	0,7003

estratos. Para avaliar a exatidão do método, o índice de Atkinson também foi calculado utilizando os dados individuais. Os resultados estão na tabela 2, juntamente com valores do índice de Gini e das medidas de desigualdade de Theil, calculadas nas mesmas condições.

Se considerarmos que o valor dessas medidas de desigualdade geralmente é arredondado na terceira casa decimal, pode-se afirmar que os valores obtidos a partir da tabela de distribuição de frequências estão muito próximos dos valores exatos, mesmo quando temos informações para apenas 6 estratos. A aproximação é especialmente boa para valores de ϵ "intermediários", surgindo diferenças um pouco maiores para valores de ϵ relativamente baixos ($\epsilon = 0,25$) ou relativamente elevados ($\epsilon = 1,5$ ou $\epsilon = 2$). Essas diferenças maiores parecem estar associadas a uma maior sensibilidade do índice ao que ocorre nas caudas da distribuição. Note-se que a diferença entre o valor estimado com base na tabela de distribuição de frequências e o valor exato também é relativamente elevada no caso da redundância, que é uma medida de desigualdade bastante sensível ao que ocorre na cauda superior da distribuição.

Cabe lembrar que o índice de Atkinson para $\epsilon = 1$ é uma função do L de Theil (L):

$$A(\epsilon = 1) = 1 - \exp(-L) \quad (31)$$

4. Sensibilidade a transferências regressivas.

Uma transferência regressiva de renda consiste em subtrair um montante da renda de uma pessoa e acrescentá-lo à de uma outra pessoa que, anteriormente, já tinha renda maior do que a primeira. Portanto, uma transferência regressiva sempre aumenta a diferença entre as rendas das duas pessoas envolvidas. O princípio de Pigou-Dalton estabelece que o valor de uma medida de desigualdade da distribuição da renda deve aumentar quando é feita uma transferência regressiva.

Vamos admitir que as pessoas estão ordenadas da mais pobre até a mais rica, isto é,

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$$

Se $x_h < x_j$, uma transferência regressiva consiste em subtrair $\omega > 0$ de x_h e adicioná-lo a x_j .

A sensibilidade do índice de Atkinson a uma transferência regressiva é dada por

$$\frac{dA}{d\omega} = \frac{1}{n} \mu^{\epsilon-1} (1-A)^\epsilon \left[\frac{1}{(x_h - \omega)^\epsilon} - \frac{1}{(x_j + \omega)^\epsilon} \right]$$

Como essa expressão ainda depende de ω , para facilitar as comparações vamos considerar seu limite quando ω tende a zero; isto é, vamos considerar

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{dA}{d\omega} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\omega} = \frac{1}{n} \mu^{\epsilon-1} (1-A)^\epsilon \left(\frac{1}{x_h^\epsilon} - \frac{1}{x_j^\epsilon} \right)$$

Para analisar como o efeito da transferência regressiva varia com o nível de renda das pessoas envolvidas é usual fixar a diferença ($x_j - x_h$) entre essas rendas. Aqui vamos fixar a razão entre elas, isto é, vamos considerar

$$x_j = \beta x_h, \text{ com } \beta > 1$$

Nesse caso obtemos

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\omega} = \frac{\mu^{\epsilon-1}(1-A)^{\epsilon}(\beta^{\epsilon}-1)}{nx_h^{\epsilon}\beta^{\epsilon}} \quad (32)$$

A opção por considerar transferências regressivas com dada diferença ou com dada razão entre elas é, até certo ponto, arbitrária, não afetando as principais conclusões sobre a sensibilidade das diferentes medidas de desigualdade a transferências regressivas. Pode-se argumentar, entretanto, que considerar rendas com dada razão é mais coerente com a noção usual de desigualdade. Note-se que todas as medidas mais comuns de desigualdade não sofrem alteração se todas as rendas são multiplicadas por uma constante, uma operação que também não afeta a razão entre duas rendas quaisquer, mas altera a diferença entre elas.

A expressão (32) mostra que a sensibilidade do índice de Atkinson a transferências regressivas é inversamente proporcional a x^{ϵ} . A diminuição da sensibilidade quando a renda aumenta (para $\epsilon > 0$) é tanto mais rápida quanto maior o valor de ϵ . O próprio Atkinson (1970, p. 59) já observou que “quando ϵ cresce, associamos mais peso a transferências na cauda inferior da distribuição e menos peso a transferências na parte superior”.

A seguir vamos construir um gráfico comparando a sensibilidade relativa do índice de Gini (G), da redundância (R), do coeficiente de variação (C) e do índice de Atkinson (para vários valores de ϵ) a transferências regressivas com $x_j/x_h = \beta > 1$. As expressões para a sensibilidade do índice de Gini, da redundância e do coeficiente de variação podem ser encontradas em Hoffmann (1992).

Uma vez que a sensibilidade do índice de Gini depende da densidade de probabilidade da distribuição, vamos considerar uma distribuição de renda log-normal com média e variância dos logaritmos iguais a $-0,7$ e $1,5$, respectivamente, semelhante à distribuição da renda entre pessoas, no Brasil, em 1980, classificadas de acordo com seu rendimento familiar *per capita* (em salários mínimos de agosto de 1980 por pessoa) (ver Hoffmann, 1992).

As curvas que mostram a sensibilidade *relativa* de G , R , C e $A(\epsilon)$ a transferências regressivas estão na figura 1. Considera-se um

valor de $\beta = x_j/x_h$, pouco superior a 1, para que a sensibilidade do índice de Gini possa ser associada à densidade de probabilidade do logaritmo da renda. Como a finalidade é comparar a sensibilidade relativa das medidas de desigualdade, as curvas foram construídas de maneira que seu valor médio no intervalo de $x_h = 0,04$ a $x_h = 10$ fosse aproximadamente igual a 100 para todas as medidas de desigualdade (embora, para maior clareza, o rendimento máximo considerado na figura 1 seja apenas 8 salários mínimos *per capita*). Cabe assinalar que o valor de β não afeta a posição das curvas, desde que seja bastante próximo de 1. É indiferente, por exemplo, considerar $\beta = 1,01$ ou 1,001. Embora o valor do efeito da transferência regressiva sobre as medidas de desigualdade diminua quando β diminui, o comportamento das sensibilidades *relativas* é estável para valores de β próximos de 1.

Devido à relação (31), a curva de sensibilidade relativa do L de Theil é idêntica à curva relativa ao índice de Atkinson para $\epsilon = 1$.

A figura 1 mostra que a existência da “aversão à desigualdade” de Atkinson ($\epsilon > 0$) corresponde a curvas de sensibilidade relativa decrescentes. Com $\epsilon > 0$ a sensibilidade do índice de Atkinson a transferências regressivas diminui com o nível de renda, quando se fixa a *razão* entre as rendas afetadas pela transferência. A redundância representa uma espécie de “fronteira”: uma medida de desigualdade cuja sensibilidade relativa independe do nível de renda.

Na análise de Shorrocks e Foster (1987) sobre a sensibilidade das medidas de desigualdade a transferências regressivas a “fronteira” é dada pelo comportamento do coeficiente de variação. Isso porque aqueles autores consideraram, inicialmente, transferências com uma dada diferença ($\alpha = x_j - x_h$) entre as rendas envolvidas. Para esse tipo de transferência regressiva a sensibilidade do coeficiente de variação independe do nível de renda.

Para deixar mais clara a diferença entre o critério de Shorrocks e Foster (1987) e aquele sugerido pela figura 1, é interessante considerar a família de índices de Shorrocks²:

$$S = \frac{1}{k(k-1)} \left(\frac{1}{n\mu^k} \sum x_i^k - 1 \right)$$

²Ver Ramos e Barros (1989, p.40).

Figura 1.

Sensibilidade relativa de várias medidas de desigualdade a transferências regressivas com dada razão entre as rendas: índice de Gini (G), redundância (R), coeficiente de variação (C) e índice de Atkinson para $\epsilon = 0,3$, $\epsilon = 0,7$, $\epsilon = 1$ e $\epsilon = 1,75$.

O coeficiente de variação (C), a redundância (R) e o L de Theil (L) correspondem a casos particulares do índice de Shorrocks, pois

$$C = \sqrt{2S}$$

quando o parâmetro k é igual a 2,

$$R = \lim_{k \rightarrow 1} S$$

e

$$L = \lim_{k \rightarrow 0} S$$

De acordo com Shorrocks e Foster (1987) o índice S apresenta sensibilidade decrescente se $k < 2$.

Se considerarmos transferências regressivas com dada razão entre as rendas, a sensibilidade de S só é decrescente se $k < 1$.

A sensibilidade de S a transferências regressivas com dada razão entre as rendas ($\beta = x_j/x_h$) é dada por

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\omega} = \frac{1 - \beta^{k-1}}{n(1-k)\mu^k x_h^{1-k}}$$

Fazendo $k = 1 - \epsilon$, verifica-se que, para $k < 1$ (correspondendo a $\epsilon > 0$), a curva de sensibilidade relativa do índice de Shorrocks é idêntica à do índice de Atkinson.

Em resumo, a “aversão à desigualdade” de Atkinson corresponde, na figura 1, a curvas de sensibilidade decrescente. O coeficiente de variação e o índice de Shorrocks com $k > 1$ são medidas de desigualdade cuja sensibilidade a transferências regressivas com dada razão entre as rendas aumenta com o nível de renda.

Isso não significa que o coeficiente de variação deva ser totalmente descartado como medida de desigualdade. É possível que seja a medida mais adequada, se estivermos especialmente interessados em ressaltar mudanças na cauda superior da distribuição.

Nas situações usuais, entretanto, parece recomendável utilizar medidas de desigualdade cuja sensibilidade a transferências regressivas com dada razão entre as rendas não cresça com nível de renda. Levando em consideração o que foi discutido na seção 2, pode-se limitar o valor do parâmetro ϵ do índice de Atkinson ao intervalo $[0, 2]$ e, portanto, limitar o valor do parâmetro k do índice de Shorrocks ao intervalo $[-1, 1]$. A redundância (que corresponde a $k = 1$) está em um dos limites do intervalo adotado; para essa medida de desigualdade a sensibilidade a transferências regressivas com dada razão

entre as rendas independe do nível de renda. Um índice de Shorrocks com $k = 1, 5$, que satisfaz o critério de Shorrocks e Foster (1987), já seria considerado “excessivamente” sensível a transferências na cauda superior da distribuição pelo critério ora proposto.

A sensibilidade do índice de Gini a transferências regressivas com dada razão entre as rendas é proporcional à densidade de frequência relativa dos logaritmos das rendas que, no caso de uma distribuição log-normal, é máxima para a renda mediana (ver Hoffmann, 1992). Haverá, então, usualmente, um intervalo, para rendas relativamente baixas, em que a sensibilidade do índice de Gini cresce com o nível de renda, como mostra a figura 1. Isso não é razão para deixar de considerar o índice de Gini uma boa medida de desigualdade. A figura 1 mostra que, excluindo as rendas muito próximas de zero, a sensibilidade do índice de Gini a transferências regressivas é substancialmente maior para rendas relativamente baixas (em torno da mediana) do que para rendas elevadas. Pode-se argumentar, inclusive, que a pouca sensibilidade do índice de Gini ao que ocorre com rendas muito próximas de zero é uma qualidade desejável na medida em que tais rendas correspondem a situações em que o dado não corresponde à renda real da pessoa. Esse é o caso, por exemplo, das pessoas ocupadas que são membros não remunerados das famílias de pequenos agricultores, cuja renda declarada é igual a zero. Note-se que o índice de Gini pode ser utilizado para comparar distribuições onde há pessoas com renda igual a zero, ao passo que um índice especialmente sensível ao que ocorre na cauda inferior da distribuição, como um índice de Atkinson com $\epsilon \geq 1$, é inútil para uma comparação desse tipo, pois basta haver uma renda igual a zero para que o índice já assumira seu valor máximo ($A = 1$).

Referências

- Atkinson, A. B. 1970. “On the measurement of inequality.” *Journal of Economic Theory* 2:244–263. O artigo é reproduzido, juntamente com um apêndice não-matemático, in Atkinson, A. B. (org.), (1973) *Wealth, Income and Inequality*. Penguin Books, pp. 46–68.
- Hoffmann, R. 1979. “Estimação da desigualdade dentro de estratos

- no cálculo do índice de Gini e da redundância." *Pesquisa e Planejamento Econômico* 9:719-738.
- _____. 1984. "Estimation of inequality and concentration measures from grouped observations." *Revista de Econometria* 4:5-21.
- _____. 1991. "O índice de desigualdade de Theil-Atkinson." *Revista de Econometria* 11:143-160.
- _____. 1992. "Sensibilidade das medidas de desigualdade a transferências regressivas." *Pesquisa e Planejamento Econômico* 22:289-304.
- IBGE. 1991. "Pesquisa nacional por amostra de domicílios." vol. 13, 1989. Tomo 1 - Brasil e Grandes Regiões.
- Kakwani, N. C. 1980. *Income Inequality and Poverty: methods of estimation and policy applications*. Banco Mundial. Oxford: Oxford University Press.
- Nygard, F. & A. Sandstrom 1981. *Measuring Income Inequality*. Estocolmo: Almqvist & Wiksell International.
- Ramos, L. R. A. & R. P. Barros 1989. "Medidas de desigualdade." Texto apresentado na terceira Escola de Séries Temporais e Econometria. Rio de Janeiro: IPEA-INPES.
- Shorrocks, A. F. & J. E. Foster 1987. "Transfer sensitive inequality measures." *Review of Economic Studies* 54:485-497.