# Opções com ajuste diário: Características e Apreçamento

Alan De Genaro Dario[1]
*Bolsa de Mercadorias & Futuros - BM&F*
*Instituto de Matemática e Estatística – IME/USP*

**RESUMO**

Apresenta-se neste artigo as características bem como o preço livre de arbitragem de um contrato derivativo que comporta-se como uma mistura entre opções e futuros, trata-se das opções com ajuste diário. Sua relevância é a possibilidade de criar *portfolio* delta neutros, onde de fato não ocorre fluxo financeiro, permitindo assim uma melhor negociação da volatilidade de um determinado ativo.

## 1. Introdução

O objetivo deste artigo é apresentar as principais características, bem como determinar o preço livre de arbitragem de um contrato contingente que possui o *payoff* de uma opção, mas que é marcado a mercado diariamente gerando fluxo de caixa para os participantes. Este ativo é conhecido na literatura internacional como opções com margem no estilo de um futuro (*options with futures-style margining*).

Diferente das opções convencionais (*options with stock-style margining*), nas quais apenas o vendedor deposita margem de garantia, neste tipo de contrato o titular e o lançador da opção são obrigados a depositar margem de garantia em função dos ajustes diários que podem ser efetuados.

Atualmente não temos a negociação deste ativo no Brasil, entretanto existe um esforço da BM&F em lançar este derivativo, portanto justificando um artigo que explique o apreçamento, bem como o gerenciamento de risco. Em outros países, bolsas, como a EUREX e a EURONEXT, negociam contratos com esta característica, principalmente, sobre Bund Bonds do governo da Alemanha e possuem considerável liquidez.

Para um *trader* uma vantagem existente neste tipo de contrato é a possibilidade de gerar um *portfolio* delta neutro no qual o fluxo de caixa pode ser nulo. Isto ocorre, diferentemente, das opções tradicionais, em função da marcação a mercado da posição e não apenas da variação do MTM da posição. Desta forma, a negociação da volatilidade torna-se uma tarefa mais fácil do que atualmente é feito com a compra e pagamento do prêmio de uma

[1] As opiniões expressas neste artigo são únicas e exclusivamente atribuídas ao seu autor e não da instituição a que ele pertence. Endereço para correspondência: Alan De Genaro Dario, Bolsa de Mercadorias & Futuros – BM&F. Praça Antonio Prado, 48, São Paulo, Brasil. CEP 01010-901. e-mail: adario@bmf.com.br

opção e venda de um contrato futuro, pois o fluxo, com a mesma estratégia com as opções com ajuste gera, se corretamente calculado, um fluxo financeiro nulo.

Adicionalmente, para uma *Clearing* a possibilidade de marcação a mercado em ambos os contratos de uma carteira delta neutra evita, na ocorrência de um inadimplemento, o *gap* na geração de fluxo de caixa no processo de liquidação compulsória da carteira do participante. Ainda para uma *Clearing,* em virtude da simetria na geração de fluxo de caixa de uma carteira delta neutra, é possível uma compensação entre os fatores de risco que são comuns a ambos os contratos, no caso, o ativo subjacente. Neste caso a margem de garantia exigida deve refletir outros fatores de risco que não são comuns, por exemplo, a volatilidade. Dessa forma, a margem da carteira não será dada pela soma das margens de cada contrato. Esta característica tende aumentar a eficiência na alocação de recurso em relação ao risco incorrido na posição.

Este artigo é formado, além desta introdução por 5 seções e um anexo. Na seqüência, as principais características deste produto são expostas. Na seção 3, um panorama sobre a negociação deste contrato nas bolsas internacionais é conduzido. Na seção 4, uma fórmula livre de arbitragem é derivada. A seção 5 apresenta o gerenciamento de risco de uma posição em uma opção com ajuste. Na seção 6, exemplos numéricos são apresentados e a seção 7 consiste das considerações finais.

## 2. Características do Produto

Apresentam-se nesta seção as principais características da opção com ajuste diário. A primeira diferença que existe entre as opções com ajuste diário das convencionais[2] onde não existe ajuste diário refere-se ao pagamento do prêmio negociado. Nas opções convencionais o prêmio negociado é integralmente pago ao lançador pelo titular no momento da negociação. Por outro lado, nas opções com ajuste, não existe o pagamento integral do prêmio negociado. Entretanto, poderá ocorrer um fluxo financeiro igualmente provável para o lançador ou para o titular referente à diferença entre o preço em que foi realizada a operação e o preço de ajuste ao final do dia[3].

Nos dias que sucedem a negociação inicial da opção, conforme os fatores que determinam o seu preço se modificam, o valor da opção deverá refletir esta alteração, transformando-se em ajustes diários. Os ajustes ocorrerão até o vencimento ou no exercício antecipado no caso das opções americanas.

Uma vez que lançadores e titulares estão igualmente expostos a um fluxo financeiro diário, a contraparte central garantidora (a *Clearing* de Derivativos da BM&F, por exemplo) exigirá dos comitentes com posição em aberto, como instrumento de salvaguarda, o depósito de margem de garantia.

Destaca-se que, em função do fluxo financeiro das opções com ajuste ocorrer na mesma data dos futuros, neste caso na janela de liquidação da *Clearing*, que ocorre, em D+1, pode-

[2] Doravante, apenas opções convencionais.
[3] Operacionalmente é semelhante ao que ocorre em um contrato futuro.

se, para efeito da determinação da margem de garantia, realizar uma compensação de risco entre opções e futuros no que se refere a exposição ao ativo subjacente. É importante destacar, conforme colocado na introdução, que esta compensação de riscos não é total, uma vez que o preço de uma opção depende de outros fatores além do ativo subjacente, por exemplo, a variação da volatilidade implícita. Por último, destaca-se, que apesar de parcial a compensação é muito superior ao que atualmente é empregado para a determinação da margem de posições com futuros e opções com delta neutro, permitindo assim maior eficiência na alocação de recursos como garantias.

No vencimento do contrato ou no exercício da opção, o comprador é obrigado a pagar[4] o prêmio (valor de mercado atual ou teórico) da opção ao vendedor recebendo o ativo subjacente. Como será visto na seqüência, levando em consideração os ajustes acumulados desde o início da operação e o prêmio pago no vencimento/exercício, implica que o custo final para o titular da opção está limitado ao prêmio inicial ao qual a operação foi realizada. Garantindo também que o lançador receba o prêmio inicialmente negociado.
Da mesma forma, no vencimento, caso a opções encontre-se fora do dinheiro e não seja exercida, a perda máxima que o titular incorre é o prêmio inicialmente negociado.

Para completar o entendimento, apresentam-se, na seção 6, alguns exemplos numéricos onde a sistemática dos ajustes diários bem como, o pagamento do prêmio para uma opção européia sobre o futuro de dólar é detalhada.

Adota-se como ativo subjacente para as opções com ajuste diário, os ativos referenciados em taxa de câmbio (FX), futuro de dólar e dólar disponível. Entretanto os resultados podem ser prontamente estendidos para outra classe de ativos, índice de ações, por exemplo.

## 3. Negociação de opções com ajuste diário ao redor do mundo

Conforme colocado, no Brasil não existe até o momento a negociação em mercado organizado deste contrato. Entretanto, em outros países existem mercados organizados que negociam este derivativo, por exemplo, a bolsa que mais negocia as opções com ajuste diário é a EUREX, sendo que outras bolsas, tal como a EURONEXT têm contratos autorizados para a negociação deste produto.

Na EUREX as opções com ajuste diário integram a família de produtos de derivativos de renda fixa. Neste caso, o ativo subjacente do contrato de opção com ajuste diário é um contrato futuro sobre um título emitido pela Republica Federativa da Alemanha de prazo variado. Cada um dos títulos que referenciam as opções distingue-se pela maturidade, conforme o quadro a seguir.

[4] Ou liquidar pelo saldo líquido da posição.

| Contrato | Anos até a maturidade do título |
|---|---|
| Euro-Schatz Futures (FGBS) | 1.75 a 2.25 |
| Euro-Bobl Futures (FGBM) | 4.5 a 5.5 |
| Euro-Bund Futures (FGBL) | 8.5 a 10.5 |

Fonte: EUREX

Na seqüência, reportamos a quantidade negociada de cada opção, bem como o valor financeiro para os anos de 2002 a 2004.

| Options on Euro-BUND | | | |
|---|---|---|---|
| | *2002* | *2003* | *2004* |
| Contratos Negociados | 18.125.981,00 | 27.316.536,00 | 30.896.920,00 |
| Volume (milhões de EUR) | € 1.973.757,00 | € 3.134.308,00 | € 3.549.634,00 |

Fonte: EUREX

| Options on Euro-SCHATZ | | | |
|---|---|---|---|
| | *2002* | *2003* | *2004* |
| Contratos Negociados | 8.954.263,00 | 11.723.090,00 | 9.782.863,00 |
| Volume (milhões de EUR) | € 933.633,00 | € 1.244.713,00 | € 1.036.960,00 |

Fonte: EUREX

| Options on Euro-BOBL | | | |
|---|---|---|---|
| | *2002* | *2003* | *2004* |
| Contratos Negociados | 4.529.387,00 | 10.498.534,00 | 10.829.250,00 |
| Volume (milhões de EUR) | € 486.050,00 | € 1.171.634,00 | € 1.203.289,00 |

Fonte: EUREX

Por último, apresento a participação dos negócios com opções de ajuste diário, em relação ao total de opções negociadas na EUREX.

| | *2003* | *2004* |
|---|---|---|
| Opções com ajuste diário | 49.538.160,00 | 51.509.033,00 |
| Total dos negócios envolvendo opções | 346.282.284,00 | 381.008.508,00 |
| Participação relativa | 14,31% | 13,52% |

Fonte: EUREX

## 4. Apreçamento do ativo[5]

Nesta seção realiza-se o apreçamento da opção com ajuste diário do estilo europeu. Do ponto de vista conceitual, o ativo que se denomina uma opção com ajuste diário, se trata, na verdade, de um contrato futuro de uma opção, conforme Duffie (1989). Entretanto, dada à simplicidade de exposição, mantemos a denominação opção com ajuste diário para o ativo contingente com as propriedades apresentadas anteriormente.

[5] Esta seção segue de perto Duffie (1996).

Dessa forma, devido ao procedimento de ajustes diários, o apreçamento do ativo é feito da mesma forma que um contrato futuro diferenciando-se apenas dos futuros convencionais em seu *payoff* no vencimento.

Admite-se a existência de incerteza na economia, que é descrita por $B_t$, um movimento browniano, definido num espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$, em que $\Im = \{\Im_t, t \in [0,T]\}$ é uma filtragem e **P** é uma medida de probabilidade.

Sendo abstrato em sua concepção, um contrato futuro com vencimento (*delivery date*) $T$ é um ativo que está intimamente relacionado ao valor de liquidação (entrega) *W*, o qual, por questões técnicas, toma-se como um processo mensurável em relação a filtragem $\Im = \{\Im_t, t \in [0,T]\}$ com variância finita.

O contrato é completamente definido pelo processo de preço futuro (*futures-price process)* $\Phi_t$ com a propriedade que $\Phi_T = W$. Pode-se provar que o contrato é literalmente um ativo cujo processo de preço é zero e o processo de dividendo acumulado é o próprio $\Phi$, mas para tanto remetemos o leitor interessado a Duffie (1996, pg 169).

A característica institucional do contrato futuro que é central para a análise do preço futuro é o ajuste diário do contrato, no qual ocorrem pagamentos aos detentores do contrato futuro baseado em mudança nos preços futuros. Destaca-se que o termo preço futuro $\Phi_t$ não é valor do contrato como um todo. Por sua vez, em cada ajuste *t* o investidor que detém $\theta$ contratos futuros desde o último ajuste, digamos *s*, recebe em sua conta margem o valor $\theta(\Phi_t - \Phi_s)$. A contrapartida em tempo contínuo do ajuste diário é assumir que o processo de preço é um processo de Ito e $\theta$ um processo $E\left[\int_t^T \theta_t^2 dt\right] < \infty$, tal que o processo de ajuste em tempo contínuo seja, $\int_t^T \theta \, d\Phi$, isto é, o processo de dividendo acumulado. Pode-se dessa forma, conforme já colocado, afirmar que o processo de preço futuro $\Phi$ é o próprio processo de dividendo acumulado associado ao contrato e o "verdadeiro" preço do contrato é zero, uma vez que não há pagamento quando da abertura da posição no mercado futuro.

Adicionalmente, devido a completitude do mercado, pode-se definir uma medida única $\boldsymbol{Q}$ por:

$$\boldsymbol{Q}(A) = \int_\Omega \boldsymbol{1}_{\{\omega \in A\}} \eta_t \boldsymbol{P}(d\omega) \qquad A \in F$$

sendo $\eta_t = \dfrac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ a derivada de Radon-Nikodym.

Segundo Duffie (1996) pode-se mostrar que o processo de preço futuro, $\Phi$, é um ***Q***-martingale implicando que:

$$\Phi_t = E_t^Q(W), \quad t \in [0,T] \tag{1}$$

Apenas para exemplificar, temos os seguintes valores possíveis para *W*:

a) $W = S_T$, isto é, um contrato futuro convencional;
b) $W = \max[F_T - K, 0]$, uma opção sobre o futuro com ajuste diário.

Assumindo que o preço do contrato futuro convencional possui distribuição log-normal, pode-se enunciar que:

**PROPOSIÇÃO 1** O cálculo da esperança acima sobre a medida ***Q***-martingale, fornece a seguinte fórmula para o apreçamento de uma opção européia sobre futuro com ajuste diário:

Para uma opção de compra

$$C_t(\tau) = F_t N(d_1) - KN(d_2) \tag{2}$$

E para uma opção de venda

$$P_t(\tau) = KN(-d_2) - F_t N(-d_1)$$

em que:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_t}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \text{ e } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

**PROVA:**

Vamos provar o caso para uma opção de compra, pois para a opção de venda os cálculos são análogos. Uma vez que $C_t(\tau) = E_t^{\mathbf{Q}}\{\max(F_T - K, 0)\}$ e impondo uma distribuição para o contrato futuro usual, deve-se, simplesmente, calcular a esperança acima para determinar o preço de uma *call* com ajuste diário. Então obtemos o seguinte resultado:

$$C_t(\tau) = \left\{ \underbrace{E_t^{\mathbf{Q}}\left[\mathbf{1}_{\{F_T > K\}} F_T\right]}_{1} - \underbrace{K E_t^{\mathbf{Q}}\left[\mathbf{1}_{\{F_T > K\}}\right]}_{2} \right\} \tag{3}$$

Em que $\mathbf{1}_{\{F_T > K\}}$ é a função indicador para $F > K$. Avaliando o termo definido por 1, podemos escrever o seguinte:

$$E_t^{\mathbf{Q}}\left[\mathbf{1}_{\{F_T>K\}}F_T\right] = \int_0^{\infty}\mathbf{1}_{\{F_T>K\}}F_T f(F_T)dF_T =$$

$$\int_0^{K}\mathbf{1}_{\{F_T>K\}}F_T f(F_T)dF_T + \int_K^{\infty}\mathbf{1}_{\{F_T>K\}}F_T f(F_T)dF_T = \int_K^{\infty}\mathbf{1}_{\{F_T>K\}}F_T f(F_T)dF_T \qquad \textbf{(4)}$$

A segunda igualdade decorre do fato de que no primeiro termo a função indicador assume o valor zero.

Para o segundo termo, identificado por 2, temos:

$$KE_t^{\mathbf{Q}}\left[\mathbf{1}_{\{F_T>K\}}\right] = K\int_k^{\infty}\mathbf{1}_{\{F_T>K\}}f(F_T)dF_T \qquad \textbf{(5)}$$

Ao assumirmos a log-normalidade do preço do contrato futuro usual, temos:

$$\ln\left(\frac{F_T}{F_0}\right) \sim N\left(\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)T;\sigma\sqrt{t}\right) \qquad \textbf{(6)}$$

Resolvendo a esperança nas expressões (4) e (5) sabendo a distribuição do contrato futuro, expresso por (6), obtemos o resultado da expressão (2).

■

Analogamente, poder-se-ia, pelo teorema de Feymman-Kac, calcular o preço da opção com ajuste diário equivalente ao cálculo da esperança, sob a medida risco neutra, pela a resolução da seguinte PDE:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial F^2}\sigma^2F^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

Com a condição de contorno em (1)

Percebe-se que ao comparar a fórmula para o apreçamento de uma opção sobre um futuro com ajuste diário à originalmente proposta por Black (1976) não temos o termo de desconto. Este fato faz sentido, uma vez que não temos custos associados ao empréstimo para comprar a opção e assim construir uma carteira que sintetize o *payoff* deste contrato no vencimento.

Assim a relação entre as duas fórmulas é:

$$Call_{ajuste} = e^{r(T-t)}Call_{Black} \qquad \textbf{(8)}$$

O que se mostra uma relação interessante do ponto de vista prático, pois permite calcular o ajuste diário da posição de um contrato novo com o uso da fórmula de Black.

### 4.1 – Apreçamento de opções com ajuste diário sobre taxa de câmbio de Reais por Dólares

Nas seções anteriores mostrou-se algebricamente o preço justo de uma opção com ajuste diário sobre o contrato futuro de dólar.

Deseja-se agora, mostrar algebricamente que o resultado de uma opção com ajuste diário sobre um futuro é perfeitamente extensível para o caso em que o ativo subjacente é um ativo a vista (disponível para pronta entrega), no presente exemplo, sobre o dólar a vista.

Para tanto, a única condição adicional é que o contrato futuro de dólar esteja perfeitamente arbitrado em relação a uma posição sintética quando se utiliza o mercado à vista de dólar e as taxas pré-fixadas e o cupom cambial para se obter o futuro sintético.

Algebricamente, pode-se dizer que a condição necessária é:

$$F_t = S_t e^{\left(r_t^B - r_t^A\right)\tau} \tag{9}$$

Sendo:
$S_t$ = Dólar a vista;
$r_t^B$ = taxa de juros doméstica;
$r_t^B$ = taxa de juros externa.

Desta forma, pode-se enunciar a seguinte proposição

**PROPOSIÇÂO 2:** A fórmula para o apreçamento de uma opção européia sobre divisa com ajuste diário é dada por:

$$C_t(\tau) = e^{rB\tau}\left[e^{-rA\tau} S_t N(d_1) - e^{-rB\tau} K N(d_2)\right] \tag{10}$$

E para a opção de venda:

$$P_t(\tau) = e^{rB\tau}\left[e^{-rB\tau} K N(-d_2) - e^{-rA\tau} S_t N(-d_1)\right] \tag{11}$$

em que:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r^B - r^A + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

Em que
$r^{At}$ = Cupom cambial, expressa com capitalização contínua;
$r^{Bt}$ = Taxa Pré-fixada, expressa com capitalização contínua.

**PROVA:**

Para tanto se utiliza a não arbitragem entre os mercados dada pela equação (9) na equação (2), obtendo:

$$C_t(\tau) = S_t e^{\left(r_t^B - r_t^A\right)\tau} N(d_1) - KN(d_2)$$

Ou ainda

$$C_t(\tau) = e^{rB\tau}\left[e^{-rA\tau} S_t N(d_1) - e^{-rB\tau} KN(d_2)\right]$$

Utilizando novamente a expressão (9) para alterar os pontos de domínio da distribuição normal, pode-se, com o uso de poucas manipulações, obter a expressão para $d_1$ e $d_2$.

■

Utilizando a equivalência expressa na equação (8), pode-se mostrar o fato já conhecido que o modelo de Garman e Kohlhagen (1983) é um caso particular do modelo de Balck (1976) quando a relação expressa pela equação (9) se verifica.

Utilizando a condição de não arbitragem entre uma opção com e sem ajuste sobre um contrato futuro, expresso pela expressão (8), acrescido do fato que o modelo de Garman e Kohlhagen (1983) é um caso particular do modelo de Black quando o contrato futuro está arbitrado, permite-nos apreçar uma opção com ajuste sobre o disponível da mesma forma que a realizada com um contato futuro[6].

Em relação ao processo de liquidação, a diferença entre uma opção sobre o ativo a vista e o futuro é que no vencimento não ocorre, para o primeiro, abertura de uma posição no contrato futuro, sendo que o último fluxo financeiro será por meio de um ajuste diário, se este for devido.

[6] Uma prova breve pode ser encontrada no anexo A.

## 5 – Gerenciamento de risco

Um dos apelos à utilização de uma opção com ajuste diário em detrimento a uma opção convencional é a possibilidade de um *trader* construir um *portfolio* delta neutro onde de fato não ocorre movimentação financeira. Este fato decorre uma vez que o fluxo financeiro do futuro compensa o fluxo financeiro da opção e vice e versa. Dessa forma, se faz necessário a derivação das expressões do delta e do gama para a determinação do *portfolio* delta neutro.

A importância do delta é direta uma vez que será ele que determinará o número de opções a serem compradas/vendidas para construção do portfólio delta neutro. Por sua vez, o gama informará qual é freqüência que o portfólio deverá ser rebalanceado para mantê-lo delta neutro. Assim, se o gama for pequeno, a variação do delta será lenta, e os rebalanceamentos poderão ser realizados com uma baixa freqüência. Por sua vez, se o gama for grande em valor absoluto, o delta será altamente sensível ao ativo subjacente.

Desta forma pode-se enunciar a seguinte proposição.

**PROPOSIÇÃO 3:** As medidas de sensibilidade, delta e gama, para uma opção sobre futuro com ajuste são:

Para uma opção de compra:

$$\Delta = N\left(d_1\right)$$

$$\Gamma = \frac{n\left(d_1\right)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$$

Para uma opção de venda:

$$\Delta = -N\left(-d_1\right)$$

$$\Gamma = \frac{n\left(d_1\right)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$$

Em que
$n(d_1)$ = função densidade de probabilidade de uma v.a. com distribuição norma padrão.

**PROVA:**

Usando a expressão para o prêmio de uma opção de compra expresso em (2) temos:

$$\frac{\partial C}{\partial F} = N\left(d_1\right) + F \times \left[\frac{\partial N\left(d_1\right)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial F}\right] - K \times \left[\frac{\partial N\left(d_2\right)}{\partial d_2}\frac{\partial d_2}{\partial F}\right] \tag{12}$$

Usando a relação $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$, seguem-se que: $\frac{\partial d_1}{\partial F} = \frac{\partial d_2}{\partial F}$ e $\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} = \frac{\partial N\left(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial d_1}$,

substituindo os termos acima na equação (12), temos:

$$\frac{\partial C}{\partial F} = N(d_1) + \frac{\partial d_1}{\partial F}\left[FN'(d_1) - XN'\left(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}\right)\right]$$

Por último, sabendo que $d_1 = \left[\ln\left(F_t/K\right) + \left(\sigma^2/2\right)\tau\right] \Big/ \sigma\sqrt{\tau}$, realizando um transformação de variáveis e resolvendo para F, pode-se substituir no valor acima obtendo:

$$\frac{\partial C}{\partial F} = N(d_1) + \frac{\partial d_1}{\partial F}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\left[Xe^{-.5d_1^2}e^{d_1\sigma\sqrt{\tau}-.5\sigma^2\tau} - Xe^{-.5\left(d_1-\sigma\sqrt{\tau}\right)}\right]}_{I}$$

Ao reagrupar os termos em I, verificamos que os termos se cancelam e que:

$$\frac{\partial C}{\partial F} = N(d_1)$$

O cálculo do gama é:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial F^2} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial F}$$

Usando as expressões anteriores o resultado é obtido. O calculo para uma opção de venda é análogo e, portanto será omitido.

■

Da mesma forma, para as opções com ajuste diário sobre divisa, temos com o uso da equação de apreçamento a seguinte proposição:

**PROPOSIÇÃO 4:** As medidas de sensibilidade, delta e gama, as quais mensuram, respectivamente, a variação no preço da opção em relação à variação do fator de risco *spot* e a taxa de variação do fator de risco *spot*, estão expressas a seguir:

Para uma opção de compra:

$$\Delta = e^{rB\tau - rA\tau} \times N(d_1)$$

$$\Gamma = \frac{e^{rB\tau - rA\tau} \times n(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$$

Para uma opção de venda:

$$\Delta = -e^{rB\tau - rA\tau} \times N(-d_1)$$

$$\Gamma = \frac{e^{rB\tau - rA\tau} \times n(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$$

Em que
$n(d_1)$ = função densidade de probabilidade de uma v.a. com distribuição norma padrão;
$r^{Bt}$ = Taxa Pré-fixada, expressa com capitalização contínua;
$r^{At}$ = Cupom cambial, expressa com capitalização contínua.

**PROVA:**
Segue o mesmo argumento da proposição anterior ao tomar agora como referência a expressão (10) para o apreçamento e, portanto será omitida[7].

■

Na hipótese de um *trader* estar utilizando as opções com ajuste para a construção de um portfólio instantaneamente delta neutro, pode-se apresentar que o lucro & prejuízo (P&L) da carteira no intervalo de tempo $\Delta t$ é dada por:

$$P\&L = \int_{t}^{t+\Delta t} \frac{F_t^2}{2} \Gamma\left(\sigma_h^2 - \sigma_t^2\right) dt$$

Dessa forma, quando a opção é vendida com uma volatilidade implícita de $\sigma_h$ no instante $t$, o P&L instantâneo da operação delta-neutra é dado pela expressão acima, a qual nada mais é que a diferença entre a volatilidade negociada e volatilidade realizada, ponderada por metade do gama[8] em reais.

## 6) Exemplos Numéricos

Apresentam-se nesta seção alguns exemplos que ilustram a sistemática de uma opção com ajuste diário. No primeiro exemplo, mostra-se o caso em que a opção encontra-se no dinheiro no vencimento e será exercida, bem como a relação de não arbitragem que existe com as opções convencionais.

No segundo exemplo, calcula-se o fluxo financeiro da opção na circunstância em que ela encontra-se fora do dinheiro no vencimento e não será exercida. Neste caso veremos que o fluxo de ajustes pagos é exatamente igual ao prêmio negociado, refletindo o resultado que para o titular de uma *call* a perda máxima é dada pelo prêmio da opção.

### 6.1) Exemplo I

Considere, por exemplo, a seguinte posição de opções com ajuste diário do tipo europeu sobre o contrato futuro de dólar.

[7] Todas as provas omitidas podem ser solicitadas ao autor.
[8] Caso o portfólio seja de opções com ajuste sobre futuros a expressão para o gama é dado conforme a proposição 3.

— Negociação de 1 uma opção de compra com vencimento em 23 dias úteis e preço de exercício igual a 2.500 R$/1.000 USD ao valor de R$ 1.200, com o ativo subjacente negociado a R$ 2.487;
— Os preços de ajuste são calculados pela fórmula (2), considerando uma volatilidade de 10%;
— A posição é automaticamente exercida no vencimento, originando uma posição no contrato futuro subjacente à opção, de forma semelhante às opções sem ajuste diário.

Na seqüência, são apresentados os valores para o ativo subjacente, bem como os valores de ajuste que serão utilizados para marcar a posição com as opções a mercado.

A sistemática do cálculo do ajuste das opções é a mesmo empregada nos futuros negociados na BM&F[9], ou seja, para o primeiro ajuste após a negociação temos:

$$AD_t = (PA_t - PO) \times 50 \times N$$

Em que:

PO = o preço da operação
$PA_t$ = preço de ajuste do contrato no dia *t*
N = número de contratos negociados.

Enquanto que os ajustes intermediários são calculados pela seguinte formula:

$$AD_t = (PA_t - PA_{t-1}) \times 50 \times N$$

Percebe-se das expressões acima que o preço de ajuste do contrato deve ser determinado diariamente para o cálculo dos fluxos financeiros. Nas circunstâncias de baixa liquidez neste mercado é necessário o arbitramento deste valor, o qual poderá, por exemplo, ser feito com a fórmula derivada na seção 4.

Na seqüência apresenta-se uma série de preços **arbitrária** para o contrato futuro de dólar e calcula-se a dinâmica dos fluxos pagos e/ou recebidos até a maturidade da opção.

[9] A descrição do contrato futuro de dólar padrão pode ser encontrada em www.bmf.com.br

**TABELA I – Ajuste diário de uma opção**

| *Data* | *DU* | *Underlying* | *Preço Opção* | *Ajuste* | *Ajuste Acumulado* |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 23 | 2502,71 | 1576,00 | 376,00 | 376,00 |
| 9 | 22 | 2364,86 | 41,74 | -1534,27 | -1158,26 |
| 10 | 21 | 2383,44 | 72,01 | 30,28 | -1127,99 |
| 11 | 20 | 2383,60 | 64,05 | -7,97 | -1135,95 |
| 12 | 19 | 2400,19 | 102,25 | 38,20 | -1097,75 |
| 13 | 18 | 2409,61 | 126,22 | 23,97 | -1073,78 |
| 14 | 17 | 2414,02 | 131,21 | 4,99 | -1068,79 |
| 15 | 16 | 2415,10 | 120,93 | -10,27 | -1079,07 |
| 16 | 15 | 2420,00 | 127,27 | 6,34 | -1072,73 |
| 17 | 14 | 2427,43 | 146,92 | 19,65 | -1053,08 |
| 18 | 13 | 2436,21 | 178,27 | 31,35 | -1021,73 |
| 19 | 12 | 2437,67 | 164,93 | -13,34 | -1035,07 |
| 20 | 11 | 2454,52 | 270,12 | 105,19 | -929,88 |
| 21 | 10 | 2473,35 | 461,53 | 191,41 | -738,47 |
| 22 | 9 | 2483,44 | 582,84 | 121,31 | -617,16 |
| 23 | 8 | 2485,68 | 573,65 | -9,19 | -626,35 |
| 24 | 7 | 2486,81 | 540,58 | -33,06 | -659,42 |
| 25 | 6 | 2505,55 | 916,96 | 376,37 | -283,04 |
| 26 | 5 | 2505,64 | 853,23 | -63,73 | -346,77 |
| 27 | 4 | 2514,72 | 1065,18 | 211,95 | -134,82 |
| 28 | 3 | 2520,48 | 1204,28 | 139,10 | 4,28 |
| 29 | 2 | 2528,41 | 1474,92 | 270,63 | 274,92 |
| 30 | 1 | 2552,23 | 2611,56 | 1136,64 | 1411,56 |

Ao longo dos 22 dias que antecedem o vencimento da opção o total de ajuste acumulado é de R$ 1.411,56, sendo que o prêmio da opção não foi pago no início da operação. No primeiro dia útil do mês de vencimento da opção, a movimentação resultante será:

**Nas opções:**

— Pagamento do prêmio da opção, dado pelo seu valor intrínseco: $Max\{(2552,23-2500);0\}\times 50 = R\$\ 2611,45$

— Último fluxo decorrente do ajuste = 2611,45 – 2611,56 = R$ -0,11

**No Futuro:**

O exercício da opção acarreta a abertura de uma posição comprada no valor de R$ 2.500 para o titular da opção, sabendo que o valor de liquidação será R$ 2.552,23, assim:

— Ajuste no contrato futuro $=(R\$2.552,23 - R\$2.500)\times 50 = R\$2.611,45$

Consolidando os pagamentos decorrentes da opção com os do futuro, percebe-se que o saldo final diz respeito apenas ao ajuste diário da opção entre o dia 30 e o dia 1°, no valor de R$ - 0,11.

Destaque-se que não ocorreria o pagamento do prêmio e abertura de uma posição no futuro, uma vez que idealmente estes valores são liquidados por diferença, uma vez que o futuro vence no mesmo dia da opção, ocorrendo apenas o fluxo de R$ - 0,11 associado ao teta da opção.

Percebe-se que a soma dos ajustes acumulados totaliza R$1.411,45, este valor guarda uma relação importante com as opções convencionais, conforme veremos a seguir.

Considere agora o resultado obtido com uma opção européia sem ajuste. Espera-se que na ausência de oportunidades de arbitragem o *payoff* das duas opções seja o mesmo.

O preço teórico de uma opção sem ajuste, com as mesmas características da opção com ajuste, calculado pelo modelo de Black[10] é R$ 1.182,026.

No momento da operação existe um desembolso pelo titular no valor total do prêmio, o qual pode ser pago por meio de um empréstimo a taxa pré-fixada no valor de 16,353%.

Assim, no momento da operação o titular paga R$ 1.182,026, referente ao prêmio da opção, por meio de um empréstimo que vence em 23 dias úteis a taxa de 16,353%.

No vencimento, o titular exerce a opção e deve pagar o empréstimo, resultando no seguinte fluxo:

- Exercício da opção $= Max\{(R\$2.552,23 - R\$2.500);0\} \times 50 = R\$2.611,45$
- Pagamento empréstimo = R$ 1.200 ($1.182,026 \times e^{0,16353 \times (23/252)}$)
- Resultado final = R$ 1.411,45

Ao compararmos o resultado da opção tradicional com o obtido pelo modelo com ajuste diário percebe-se que os valores obtidos são os mesmos, o que os diferencia é a ocorrência dos fluxos no tempo.

### 6.2) Exemplo II

Considere agora, por exemplo, a seguinte posição de opções com ajuste diário do tipo europeu sobre o contrato futuro de dólar.

- Negociação de 1 uma opção de compra com vencimento em 23 dias úteis e preço de exercício igual a 2.500 R$/1.000 USD ao valor de R$ 1.200, com o ativo subjacente negociado a R$ 2.487;
- Os preços de ajuste são calculados pela fórmula (2), considerando uma volatilidade de 10%;

[10] Para obter este valor, utilize o modelo de Black com os seguintes parâmetros S = 2487; $\sigma$ = 10%; r = 16,535% ; $\tau$ = 23/252; X = 2500.

A diferença em relação ao exemplo anterior é que a opção vencerá fora do dinheiro e não será exercida. Vejamos o fluxo da operação.

**TABELA II – Ajuste diário de uma opção**

| *Data* | *DU* | *Underlying* | *Preço Opção* | *Ajuste* | *Ajuste Acumulado* |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 23 | 2502,71 | 1576,00 | 376,00 | 376,00 |
| 9 | 22 | 2552,23 | 3144,80 | 1568,80 | 1944,80 |
| 10 | 21 | 2528,41 | 2267,38 | -877,42 | 1067,38 |
| 11 | 20 | 2520,48 | 1981,28 | -286,10 | 781,28 |
| 12 | 19 | 2514,72 | 1772,43 | -208,85 | 572,43 |
| 13 | 18 | 2505,64 | 1480,00 | -292,43 | 280,00 |
| 14 | 17 | 2505,55 | 1440,04 | -39,96 | 240,04 |
| 15 | 16 | 2486,81 | 950,97 | -489,08 | -249,03 |
| 16 | 15 | 2485,68 | 888,65 | -62,32 | -311,35 |
| 17 | 14 | 2483,44 | 803,81 | -84,83 | -396,19 |
| 18 | 13 | 2473,35 | 583,53 | -220,29 | -616,47 |
| 19 | 12 | 2454,52 | 301,84 | -281,69 | -898,16 |
| 20 | 11 | 2437,67 | 142,19 | -159,65 | -1057,81 |
| 21 | 10 | 2436,21 | 112,48 | -29,71 | -1087,52 |
| 22 | 9 | 2427,43 | 59,58 | -52,90 | -1140,42 |
| 23 | 8 | 2420,00 | 29,34 | -30,25 | -1170,66 |
| 24 | 7 | 2415,10 | 14,27 | -15,07 | -1185,73 |
| 25 | 6 | 2414,02 | 7,62 | -6,65 | -1192,38 |
| 26 | 5 | 2409,61 | 2,42 | -5,20 | -1197,58 |
| 27 | 4 | 2400,19 | 0,25 | -2,16 | -1199,75 |
| 28 | 3 | 2383,60 | 0,00 | -0,25 | -1200,00 |
| 29 | 2 | 2383,44 | 0,00 | 0,00 | -1200,00 |
| 30 | 1 | 2364,86 | 0,00 | 0,00 | -1200,00 |

Ao longo dos 22 dias que antecedem o vencimento da opção o total dos ajustes acumulados é de R$ -1.200, sendo que o prêmio da opção não foi pago no início da operação. No primeiro dia útil do mês de vencimento da opção, a movimentação resultante será:

**Nas opções:**

- Não ocorre exercício, mas é realizado o pagamento do prêmio da opção, dado pelo seu valor de intrínseco: $Max\left\{\left(R\$2.364,86 - R\$2.500\right);0\right\}\times 50 = 0$.
- Não ocorrem mais fluxos financeiros

**No Futuro:**

Como não ocorre o exercício da opção não existe a abertura de uma posição nos contratos futuros.

O resultado final é o pagamento, sob a forma de ajuste diários, da quantia de R$ 1.200, que é exatamente o valor do prêmio da operação.

## 7. Considerações Finais

O objetivo deste artigo foi apresentar as principais características, bem como, derivar o preço livre de arbitragem de uma opção do estilo europeu com ajuste diário. Conforme colocado na seção 4, este ativo na verdade deve ser visto como um contrato futuro sobre uma opção facilitando o apreçamento do mesmo.

A negociação de uma opção com ajuste diário não acarreta o pagamento do prêmio no momento da operação pelo titular, apenas estará sujeito aos ajustes diários, de forma semelhante ao contrato futuro.

No caso de uma opção americana, o prêmio da opção será pago no vencimento ou no exercício. Levando em conta os ajustes pagos ou recebidos, bem como o prêmio pago o custo total da opção para o titular estará limitado ao valor do prêmio originalmente negociado.

Dessa forma, é importante ressaltar que o resultado obtido no vencimento com uma opção com ajuste diário é o mesmo que ocorre com as opções tradicionais. A grande diferença entre elas é a forma como o fluxo financeiro está distribuído ao longo da vida da opção.

A extensão dos resultados obtidos para uma opção com ajuste sobre um contrato futuro pode ser perfeitamente realizada para uma opção com ajuste sobre o ativo a vista.

Uma fórmula fechada para o apreçamento é obtida por meio do uso de uma medida ***Q***-martingale para o cálculo da esperança condicional do processo de preço futuros. A fórmula obtida é muito semelhante à derivada por Black, a despeito da ausência do termo que reflete o custo de oportunidade para a construção de uma *portfolio* replicante quando a opção não possui ajuste diário. Adicionalmente, as medidas de sensibilidade, delta e gama, são calculadas para a construção de um *portfolio* delta neutro com estas opções, o que permite a negociação da volatilidade do ativo subjacente de uma maneira mais eficiente em relação ao caixa necessário para construir a operação, bem como no que diz respeito às margens de garantia cobradas nesta posição.

## Referências


Black, Fischer (1976) The Pricing of Commodity Contracts. *Journal of Financial Economics,* v. 3: 167-169

Carr, Peter e Madan, Dilip (2002) Torwards a theory of volatility trading, *Risk Book Publication.*

Dario, Alan De Genaro (2005). Ensaios sobre apreçamento de ativos em equilíbrio geral. Dissertação de Mestrado – FEA/USP.

Duffie, Darrell (1989). Futures Markets. Englewood Cliffs, NJ. Prentice-Hall.

Duffie, Darrell (1996). Dynamic Asset Pricing Theory. Princeton, NJ. Princeton University Press.

Garman, M. e Kohlhagen, S. (1983) Foreign currency option values. *Journal of International Money and Finance,* v.2 : 231-237.

**ANEXO A:**

Mostra-se rapidamente neste anexo que, considerando a relação de não arbitragem no mercado de divisas, expresso através do contrato futuro e mercado a vista, o preço teórico de uma opção sobre divisa pode ser calculado pode ser calculado pelo modelo de Black (1976).

Considere o preço teórico de uma opção sobre divisa, derivado por Garman e Kohlhagen (1983):

$$C_t(\tau) = e^{-rA\tau} S_0 N(d_1) - e^{-rB\tau} KN(d_2) \qquad \textbf{(A.1)}$$

em que:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r^B - r^A + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

E a relação de não arbitragem

$$F_t = S_t e^{\left(r_t^B - r_t^A\right)\tau} \qquad \textbf{(A.2)}$$

Reescrevendo a equação (A.1) como:

$$C_t(\tau) = e^{-r^B\tau}\left[S_t e^{\left(r^B - r^A\right)\tau} N(d_1) - KN(d_2)\right] \qquad \textbf{(A.3)}$$

Alterando, os pontos de domínio da função distribuição:

$$d_1 = \frac{\ln(S_t) + \ln\left(e^{\left(r^B - r^A\right)\tau}\right) - \ln(K) + \left(+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(S_t e^{\left(r^B - r^A\right)\tau}\right) - \ln(K) + \left(+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t e^{\left(r^B - r^A\right)\tau}}{K}\right) + \left(+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \qquad \textbf{(A.4)}$$

Substituindo (B.2) em (B.3) e (B.4), obtemos:

$$C_t(\tau) = e^{r^b \tau}\left[F_t N(d_1) - KN(d_2)\right] \qquad \textbf{(A.5)}$$

em que:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_t}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

Que é a expressão derivada por Black (1976).