Nº 44

SOBRE O NOVO PLANO DO BNH: "SIMC"*

CLOVIS DE FARO

1984

SOBRE O NOVO PLANO DO BNH: "SIMC"*

Clovis de Faro[1/]

Maio 1984

* Agradece-se o patrocínio do PNPE.

1/ Professor da Escola de Pós-Graduação em Economia - EPGE/FGV

SOBRE O NOVO PLANO DO BNH: "SIMC"

1 - Introdução

Dando prosseguimento à já extensa seqüência de modificações que tem introduzido na sistemática de seus planos de financiamento para aquisição de casa própria, o Banco Nacional de Habitação (BNH) apresentou recentemente, através da Resolução do Conselho de Administração (RC) Nº 01/84, datada de 12 de janeiro de 1984, o que denominou de Sistema Misto de Amortização com Prestações Reais Crescentes (SIMC).

De acordo com a RC mencionada, ficaram estabelecidas as seguintes características para o SIMC:

a) a preços da data de assinatura do contrato de financiamento, as 24 prestações iniciais serão todas do mesmo valor $\bar{P}$, o qual será igual à 85% do valor da prestação constante que teria sido obtida caso houvesse sido estabelcida a adoção do chamado Sistema Francês de Amortização, também conhecido como Tabela Price (TP);

b) ainda a preços da data de assinatura do contrato, as demais prestações formam uma progressão aritmética crescente, cuja razão $\bar{R}$ é determinada de tal forma que:

$$\bar{R} = \frac{0{,}176470588\bar{P}i\,(a_{\overline{n-23}|i} + s_{\overline{23}|i})}{[1+(n-23)i]\,a_{\overline{n-23}|i} - n + 23} \qquad (1)$$

onde n é o prazo do financiamento, em meses, i é a taxa efetiva de juros, mensal e unitária, e

$$a_{\overline{n-23}|i} = [1-(1+i)^{-(n-23)}]/i \qquad (2)$$

e

$$s_{\overline{23}|i} = [(1+i)^{23} - 1]/i \quad , \qquad (3)$$

Isto é, representando-se por p_k o valor, a preços da data de assinatura do contrato, da k-ésima prestação mensal, e sendo F o valor do financiamento, a adoção do SIMC implica em que se tenha:

$$p_k = \begin{cases} \bar{P} = 0{,}85F/a_{\overline{n}|i} \ , \ k = 1,2,\ldots,24 \\ \bar{P} + (k-24)\bar{R}, \ k = 25, 26,\ldots,n \end{cases} \qquad (4)$$

Como a RC - Nº 01/84 não explica a gênese da expressão (1), que, convenhamos, é assaz esotérica, o propósito do presente trabalho é o de apresentar as propriedades fundamentais deste novo sistema de amortização. Adicionalmente, uma vez que o BNH oferece ao mutuário a possibilidade ainda de optar por um de seus outros 3 planos de financiamento, Tabela Price (TP), Sistema de Amortizações Constantes (SAC) e Sistema de Amortização Mista (SAM),[1/] será efetuada também uma comparação básica entre os 4 sistemas considerados.

[1/] Para detalhamento destes 3 planos veja-se, por exemplo, de Faro (1982).

2 - Caso Geral de um Sistema Misto

Partindo do princípio de que é mais profícuo estudar o caso geral do que o particular, consideremos a seguinte generalização da expressão (4)

$$p_k = \begin{cases} P, \ k=1,2,\ldots,\bar{n} \\ P + (k-\bar{n})R, \ k=\bar{n}+1,\bar{n}+2,\ldots,n \end{cases} \qquad (4')$$

Isto é, suponhamos que o financiamento F, contratado à taxa periódica i, deva ser resgatado por intermédio de n prestações periódicas, de tal forma que as $\bar{n}$ primeiras sejam constantes e iguais a P, e as $n-\bar{n}$ últimas variem segundo uma progressão aritmética de razão R e termo inicial $p_{\bar{n}+1} = P + R$.

É interessante observar que, dependendo dos valores que se atribuam aos parâmetros $\bar{n}$, P e R, o caso geral considerado pode ser reduzido, entre outros, aos seguintes casos particulares:

a) $\bar{n} = 0$ — As prestações serão todas constantes, sendo que, necessariamente, $P = F/a_{\overline{n}|i}$. Isto é, se $\bar{n} = 0$ o regime de amortização será o da TP.

b) $\bar{n} = n$, com $P = F(i+1/n)$ — Agora, também necessariamente, teremos $R = -iF/n$. Ou seja, as prestações formarão uma progressão aritmética decrescente, e de tal modo que o método de amortização será o do SAC.

c) $\bar{n} = n$, com $P = F(1/a_{\overline{n}|i} + i + 1/n)/2$ — Nesse caso, ainda necessariamente, teremos $R = -iF/(2n)$. Deste modo, as prestações também formarão uma progressão aritmética decrescente, mas agora de tal modo que o sistema de amortização passa a ser o do SAM.

d) $\bar{n} = 24$, com $P = \bar{P}$ — Ter-se-á $R = \bar{R}$, o que significa que recairemos no SIMC.

Verifica-se, pois, que os 4 planos básicos de financiamento do BNH nada mais são do que casos particulares do esquema de amortização associado à (4').

2.1 - Relação Fundamental

Para que, dada a taxa i, a seqüência das n prestações periódicas especificada pela relação (4'), efetivamente amortize o financiamento F, é necessário que seja satisfeita a seguinte equação fundamental de equivalência financeira.

$$F = \sum_{k=1}^{n} p_k (1+i)^{-k} = \sum_{k=1}^{\bar{n}} P(1+i)^{-k} + \sum_{k=\bar{n}+1}^{n} [P+R(k-\bar{n})](1+i)^{-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(1+i)^{-k} + \sum_{k=\bar{n}+1}^{n} (k-\bar{n})R(1+i)^{-k} \qquad (5)$$

Por conveniência, fazendo-se $k-\bar{n} = h$, podemos também escrever:

$$F = P\sum_{k=1}^{n} (1+i)^{-k} + R(1+i)^{-\bar{n}} \sum_{h=1}^{n-\bar{n}} h(1+i)^{-h} \qquad (5')$$

Visando tornar o trabalho auto-elucidativo, procederemos ao cálculo das somas indicadas. Para tanto, façamos:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{m} (1+i)^{-k} \tag{6}$$

e

$$S_2 = \sum_{k=1}^{m} k(1+i)^{-k} \tag{7}$$

Ora, observando-se que S_1 nada mais é do que a soma dos m primeiros termos de uma progressão geométrica com termo inicial $a_1=(1+i)^{-1}$, razão $q=a_1$, e termo final a_m, tem-se que:

$$S_1 = \frac{a_1 - q a_m}{1 - q} = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-m-1}}{1 - (1+i)^{-1}} = \frac{1 - (1+i)^{-m}}{i} = a_{\overline{m}|i} \tag{6'}$$

Por outro lado, para cálculo de S_2, note-se que a derivada de S_1, como dada por (6), com respeito à i, é igual a:

$$\frac{dS_1}{di} = -\sum_{k=1}^{m} k(1+i)^{-k-1} = -(1+i)^{-1} \sum_{k=1}^{m} k(1+i)^{-k}$$

$$= -(1+i)^{-1} S_2 \tag{8}$$

Logo, tendo em vista a relação (6'), segue-se que, derivando-a com respeito à i, podemos escrever:

$$S_2 = -(1+i) \left\{ \frac{i[0-(-m)(1+i)^{-m-1}] - [1-(1+i)^{-m}]1}{i^2} \right.$$

$$= \frac{1}{i} \{(1+i) a_{\overline{m}|i} - m(1+i)^{-m}\} \tag{9}$$

Por conseguinte, fazendo uso dos resultados obtidos, a relação fundamental de equivalência financeira pode ser reescrita como:

$$F = P a_{\overline{n}|i} + \frac{R(1+i)^{-\bar{n}}}{i} \{(1+i) a_{\overline{n-\bar{n}}|i} - (n-\bar{n})(1+i)^{-(n-\bar{n})}\} \qquad (5'')$$

2.2 - Caso particula do SIMC

Suponhamos, inicialmente, que seja estabelecido que $R > 0$ e que todas as prestações sejam amortizantes (no sentido de que excedam sempre os juros sobre o saldo devedor).[1/] Tal acontece se for espeficado que $P = \alpha F/a_{\overline{n}|i}$, para $i\, a_{\overline{n}|i} < \alpha < 1$; neste caso, a relação fundamental (5'') reduz-se a: [2/]

$$F = \alpha F + \frac{R(1+i)^{-\bar{n}}}{i} \{(1+i) a_{\overline{n-\bar{n}}|i} - (n-\bar{n})(1+i)^{-(n-\bar{n})}\} \qquad (5'')$$

Decorre, então, que o valor da razão R será tal que:

$$R = \frac{iF(1-\alpha)(1+i)^{\bar{n}}}{(1+i) a_{\overline{n-\bar{n}}|i} - (n-\bar{n})(1+i)^{-(n-\bar{n})}} \qquad (10)$$

1/ Note-se que se fixarmos $\bar{n} > 1$ e $P > F/a_{\overline{n}|i}$, teremos $R<0$. Por outro lado, se for especificado que $P \leq i\,F$, o saldo devedor só passará a decrescer a partir de um certo ponto posterior à época $\bar{n}$.

2/ Na realidade, a condição $\alpha > a_{\overline{n}|i}$, que implica em que todas as prestações sejam efetivamente amortizantes, não foi considerada pelo BNH. Assim, por exemplo, se $n = 240$ meses e $i = 1\%$ a.m., teremos $i\, a_{\overline{n}|i} \cong 0{,}908194 > 0{,}85$ que é o valor fixado pelo BNH. De qualquer modo, ter-se-á sempre $\bar{R} > 0$. Nossa análise, porém, não é por isso afetada.

ou, em função de P

$$R = \frac{iPa_{\overline{n}|i}\,(1/\alpha - 1)(1+i)^{\bar{n}}}{(1+i)\,a_{\overline{n-\bar{n}}|i} - (n-\bar{n})(1+i)^{-(n-\bar{n})}} \qquad (10')$$

No caso particular em que $\alpha = 0{,}85$ e $\bar{n} = 24$, que corresponde aos valores fixados pelo BNH para o estabelecimento do SIMC, teremos, na nossa notação $P \equiv \bar{P}$ e $R \equiv \bar{R}$, com o valor de $\bar{R}$ sendo dado por:

$$\bar{R} = \frac{0{,}15iF(1+i)^{24}}{(1+i)\,a_{\overline{n-24}|i} - (n-24)(1+i)^{-(n-24)}} \qquad (11)$$

ou

$$\bar{R} = \frac{0{,}176470588i\bar{P}a_{\overline{n}|i}\,(i+i)^{24}}{(1+i)\,a_{\overline{n-24}|i} - (n-24)(1+i)^{-(n-24)}} \qquad (11')$$

2.3 - Cotejo com a fórmula do BNH

À primeira vista, poderia parecer que as fórmulas (1) e (11') produzissem distintos resultados. Tal porém é falso, pois que, como mostraremos a seguir, a expressão (1) é uma maneira alternativa de escrever a (11').

Comparando, inicialmente, os numeradores das expressões (1) e (11'), note-se que, lançando mão de resultados apresenta-

dos em de Faro (1982, pgs. 188-190),[1/] temos que: :

$$(1+i)^{24} a_{\overline{n}|i} = \{(1+i)^{23}\, a_{\overline{23+(n-23)}|i}\}(1+i)$$

$$= (1+i)[\,(1+i)^{23}\, a_{\overline{23}|i} + a_{\overline{n-23}|i}\,]$$

$$= (1+i)[\,a_{\overline{n-23}|i} + s_{\overline{23}|i}\,] \qquad (12)$$

Logo, (11') pode ser reescrita como:

$$\bar{R} = \frac{0{,}176470588 i\bar{P}(1+i)[\,a_{\overline{n-23}|i} + s_{\overline{23}|i}\,]}{(1+i)\,a_{\overline{n-24}|i} - (n-24)(1+i)(1+i)^{-(n-23)}}$$

$$= \frac{0{,}176470588 i\bar{P}(a_{\overline{n-23}|i} + s_{\overline{23}|i})}{a_{\overline{n-24}|i} - (n-24)(1+i)^{-(n-23)}} \qquad (11'')$$

Concluímos, pois, que os numeradores coincidem. Passando agora a cotejar os denominadores, note-se que o de (11'') po

---

[1/] Em particular, considerem-se os resultados

$$a_{\overline{m+h}|i} = a_{\overline{m}|i} + (1+i)^{-m}\, a_{\overline{h}|i}$$

e

$$a_{\overline{m-h}|i} = a_{\overline{m}|i} - (1+i)^{-m}\, s_{\overline{h}|i}\ , \text{ se } m > h.$$

de ainda ser escrito como:

$$a_{\overline{n-23-1}|i} - (n-23-1)(1+i)^{-(n-23)}$$

$$= a_{\overline{n-23}|i} - (1+i)^{-23}\, s_{\overline{1}|i} - (n-23-1)(1+i)^{-(n-23)}$$

$$= a_{\overline{n-23}|i} - (n-23)(1+i)^{-(n-23)} \qquad (13)$$

Por outro lado, o denominador de (1) pode ser escrito como:

$$a_{\overline{n-23}|i} + (n-23)(i\, a_{\overline{n-23}|i} - 1)$$

$$= a_{\overline{n-23}|i} + (n-23)[1-(1+i)^{-23}-1] \qquad (14)$$

Por conseguinte, os denominadores de (1) e de (11') também coincidem, do que se segue que as relações consideradas são formas alternativas de expressar o mesmo resultado.

2.4 - Evolução das cotas de amortização

Buscando contemplar o caso onde $\alpha < i a_{\overline{n}|i}$, vejamos como evoluem as cotas de amortização, encerradas em cada uma das prestações, para o caso geral.

Denotando-se por F_k o saldo devedor na época k, logo após o pagamento da prestação que aí tenha vencimento, a parce

la de juros J_k associada à k-ésima prestação é:

$$J_k = \min \{p_k, iF_{k-1}\}, \; k=1,\ldots,n \tag{14}$$

onde $F_0 \equiv F$.

Por outro lado, a parcela, ou cota, de amortização, A_k, associada à essa mesma prestação é:[1/]

$$A_k = p_k - iF_{k-1} \tag{15}$$

Com estas definições, o saldo devedor, de acordo com o que se denomina de metodo retrospectivo, evolui de tal forma que:

$$F_k = F_{k-1} - A_k \tag{16}$$

Para a determinação da sucessão de valores de A_k, basta que se faça uso das relações (15) e (16). Para tanto, é conveniente que, em função da época k, se distingam dois casos:

a) $0 \leq k \leq \bar{n}$.

Escrevendo a relação (15) respectivamente para as épocas k e k+1, e subtraindo a segunda da primeira, decorre que, face à (16), teremos:

$$A_{k+1} = (1+i)A_k \tag{17}$$

Ou seja, tal como no caso da TP, as $\bar{n}$ primeiras cotas de amortização formam uma progressão geométrica de razão (1+i)

e termo inicial $A_1 = P - iF$.

b) $\bar{n} + 1 \leq k \leq n$.

Procedendo-se de maneira idêntica ao do caso anterior, decorre agora que:

$$A_{k+1} = (1+i)A_k + R \tag{18}$$

Ora, a relação (18) nada mais é do que uma equação de diferenças finitas, linear, de primeira ordem, e não homogênea, exatamente do tipo estudado em de Faro (1979, pgs. 229-230). Logo, sendo K uma constante arbitrária, segue-se que a solução geral da equação considerada é:

$$A_k = K(1+i)^k - \frac{R}{i} \tag{19}$$

A solução particular de interesse pode ser facilmente determinada a partir do valor do saldo devedor na época $\bar{n}$. Fazendo uso do chamado método de recorrência, cf. de Faro (1982, pgs. 236-237), temos que

$$F_{\bar{n}} = F(1+i)^{\bar{n}} - P\delta_{\overline{\bar{n}}|i} \tag{20}$$

Então, fazendo-se $k=\bar{n}+1$ em (15) e (19), e igualando-se os segundos membros, decorre que:

$$K = (1+i)^{-\bar{n}-1}\{P - iF_{\bar{n}} + R(1+1/i)\} \tag{21}$$

Alternativamente, A_k pode ser diretamente determinado

fazendo-se uso de (16). Para tanto, basta fazer uso do cálculo do saldo devedor pelo chamado método prospectivo, segundo o qual ter-se-á:[1/]

$$F_k = \sum_{h=k+1}^{m} p_h (1+i)^{-(h-k)}$$

ou

$$F_k = \begin{cases} R(1+i)^{-(\bar{n}-k)}\{(1+i)a_{\overline{n-\bar{n}}|i} - (n-\bar{n})(1+i)^{-(n-\bar{n}}\}/i \\ \quad + Pa_{\overline{n-k}|i}, \text{ se } 0 \leq k \leq \bar{n} \\ \{P+(k+1-\bar{n}+1/i)R\}\, a_{\overline{n-k}|i} - \dfrac{(n-k)R(1+i)^{-(n-k)}}{i}, \\ \quad \text{se } \bar{n}+1 \leq k \leq n \end{cases} \qquad (22)$$

3 - Comparação entre os Quatro Planos do BNH

Abstraindo-se do problema de correção monetária,[2/] passemos agora ao confronto, a preços da data de assinatura do contrato, entre os quatros planos básicos de financiamento do BNH: Tabela Price (TP), Sistema de Amortizações Constantes, Sistema de Amortizações Mista (SAM) e Sistema Misto de Amortização com Prestações Reais Crescentes (SIMC). Para tanto iremos conside

---

1/ Obviamente, devemos ter $F_n = 0$.

2/ Embora desatualizada, face à modificações ocorridas na sistemática das cadernetas de poupança, uma comparação entre o SAC e a TP, levando em conta a correção monetária, é apresentada em de raro (1975).

rar o caso de um financiamento F contraído, segundo cada um desses 4 planos, em idênticas condições quanto ao número de prestações n e quanto à taxa periódica de juros i>0.

Quanto à seqüência de prestações, lembrando que o SAM nada mais é do que uma média aritmética entre a TP e o SAC, temos que, para k=1,...,n:

$$p_k^{TP} = F/a_{\overline{n}|i} \tag{23}$$

$$p_k^{SAC} = F\{i+1/n - (k-1)i/n\} \tag{24}$$

$$p_k^{SAM} = (p_k^{TP} + p_k^{SAC})/2 \tag{25}$$

$$p_k^{SIMC} = 0,85p_k^{TP} + \max\{0,k-24\}\bar{R} \tag{26}$$

com $\bar{R}$ como dado por (11).

3.1 - Confronto entre as evoluções do saldo devedor

Para o cotejo entre as prestações, examinaremos, preliminarmente, a evolução do saldo devedor. Quanto ao caso da TP, adotando-se o método prospéctivo,tem-se que:

$$F_k^{TP} = (F/a_{\overline{n}|i})a_{\overline{n-k}|i}$$

$$= (F/a_{\overline{n}|i}[1-(1+i)^{-n-k)}]/i \ , \ k=0,1,...,n \tag{27}$$

Logo, tomando-se k como variável contínua, segue-se que

as duas primeiras derivadas de F_k^{TP} com respeito a k, são, fazendo-se $\delta = LN(1+i)$:

$$dF_k^{TP}/dk = -(F/a_{\overline{n}|i})(\delta/i)(1+i)^{-n+k} < 0 \qquad (28)$$

e

$$d^2F_k^{TP}/dk^2 = -(F/a_{\overline{n}|i})(\delta^2/i)(1+i)^{-n+k} < 0 \qquad (29)$$

O seja, no caso da TP o saldo devedor decresce segundo uma função côncava.

Quanto ao caso do SAC, dado que as cotas de amortização são constantes e iguais a F/n, segue-se que o saldo devedor decresce segundo uma função linear. Isto é:

$$F_k^{SAC} = F(1-k/n) \quad , \; k = 0, 1, \ldots, n \qquad (30)$$

Logo, visto que, em qualquer dos planos, $F_0 = F$ e $F_n = 0$, decorre da definição de função côncava, e da peculiaridade apontada para o SAM, que:

$$F_k^{TP} > F_k^{SAM} > F_k^{SAC} \quad , \; k = 1, \ldots, n-1 \qquad (31)$$

Para o caso do SIMC, observe-se, inicialmente, que, fazendo uso do método de recorrência, é imediato, para $0 \leq k \leq 24$, tem-se:

$$F_k^{TP} = F(1+i)^k - (F/a_{\overline{n}|i})s_{\overline{k}|i} < F_k^{SIMC} = F(1+i)^k -$$

$$- 0,85(F/a_{\overline{n}|i})s_{\overline{k}|i} \qquad (32)$$

Por outro lado, derivando-se com relação a k, tem-se:

$$dF_k^{SIMC}/dk = \delta F(1+i)^k(i - 0,85/a_{\overline{n}|i})/i = D_1 \qquad (33)$$

e

$$d^2F_k^{SIMC}/dk^2 = \delta D_1 \qquad (34)$$

Ou seja, o sinal das duas primeiras derivadas depende do sinal da diferença $i-0,85/a_{\overline{n}|i}$. Se esta diferença for negativa, o que significa dizer que todas as prestações são amortizantes, o que ocorre se tivermos, para uma dada taxa i, $n < -LN\ 0,15/\delta$, o saldo devedor será decrescente e segundo uma função côncava. Por outro lado, se $n = -LN\ 0,15/\delta$, o saldo devedor fica constante; sendo que será crescente e segundo uma função convexa se $n > -NL\ 0,15/\delta$.[1]

Para $25 \leq k \leq n$, lançando mão do resultado apresentado em de Faro (1982, pg. 164), o saldo devedor passa a evoluir de acordo com a seguinte função:

---

[1] Por exemplo para a taxa de 10% a.a. c.c.m., ou seja $i = 0,8\bar{3}\%$ a.m., o valor limite para o número de prestações mensais é $n \cong 228,6$. Assim, para prazos maiores do que 19 anos, o saldo devedor crescerá no intervalo considerado.

$$F_k^{SIMC} = F(1+i)^k - 0,85(F/a_{\overline{n}|i})s_{\overline{k}|i} - \frac{\bar{R}}{i}\{(1+i)s_{\overline{k-24}|i} - k+24\} \quad (35)$$

Derivando-se com relação à k, teremos agora:

$$dF_k^{SIMC}/dk = D_1 - \frac{\bar{R}}{i}\{\frac{\delta(1+i)^{k-23}}{i} - 1\} = D_2 \quad (36)$$

e

$$d^2F_k^{SIMC}/dk^2 = \delta(D_2 - \bar{R}/i) \quad (37)$$

Embora o estudo direto dos sinais das duas primeiras derivadas acima seja algo complicado, um pouco de lógica propicia algumas conclusões imediatas. Assim, se $D_1 < 0$, como $\bar{R} > 0$, segue-se que a partir da época $k = 25$ estar-se-á pagando ainda mais do que nas épocas precedentes. Logo, com maior razão, o saldo devedor continuará a decrescer e, portanto, $D_2 < 0$. Mas, então, de (37), conclui-se que a derivada segunda também será negativa. Ou seja, se $n < -LN\ 0,15/\delta$, também para $k \geq 25$ o saldo devedor decrescerá segundo uma função côncava. Nesse caso, segue-se, que $F_k^{TP} < F_k^{SIMC}$, $k = 1,2,\ldots,n-1$.

Por outro lado, podemos ter casos onde $D_1 > 0$ e acarretando com que, ao menos no início do intervalo considerado, também se tenha $D_2 > 0$.[1/] Como, porém, o saldo devedor se anula na época $k = n$, e óbvio que F_k^{SIMC} passará por um ponto de máximo

---

[1/] Por exemplo, para n=240 meses, i=1% a.m. e F=10.000.000, tem-se que $\bar{P} = 93.592,32$ e $\bar{R} \simeq 297,372838$. É fácil verificar que: $F_{24}^{SIMC} = 10.172.837,34 < F_{25}^{SIMC} \simeq 10.180.676,02 < F_{26}^{SIMC} \simeq 10.188.295,72 < F_{27}^{SIMC} \simeq 10.195.694,25$.

(quando $D_2 = 0$), decrescendo a seguir ($D_2 < 0$). Deste modo, devido à continuidade da função F_k^{SIMC} no intervalo considerado, podemos concluir que, inicialmente, o saldo devedor crescerá, possivelmente segundo uma função convexa, mudando de concavidade a seguir, até um ponto de máximo, daí por diante decrescendo segundo uma função côncava.

Segue-se, então, que, em qualquer caso, teremos:

$$F_k^{SIMC} > F_k^{TP} \quad , \; k=1,2,\ldots,n-1 \qquad (38)$$

Com o intuito, tão somente, de ilustrar os dois casos básicos de evolução do saldo devedor para o caso do SIMC, suponhamos o financiamento onde $F = 1.000.000$ e $n = 36$, com $\bar{n} = 24$. Sendo a taxa periódica de juros i fixada em 1%, teremos o saldo devedor sempre decrescente em cada um dos quatro planos considerados, como indicado na Figura I, onde F_k é medido em centenas de milhar.[1/]

Por outro lado, se a taxa periódica de juros for de 10%, teremos a situação onde a prestação inicial do SIMC, que será $p_1 = 87841,60$, é inferior aos juros periódicos devido ao valor financiado. Deste modo, adotando-se o SIMC, temos uma situação onde o saldo devedor é inicialmente crescente,[2/] como esquematicamente apresentado na Figura II.

[1/] Para melhor entendimento da figura, deixamos de apresentar a linha de evolução do saldo devedor segundo o SAM; linha essa que se encontra a meio caminho das respectivamentes relativas ao SAC e à TP.

[2/] Observe-se que o saldo devedor cresce até a época 27, quando atinge o valor máximo $F_{27}=2.214.434$, que é mais do que 121% do valor financiado. A seguir, dado ao crescimento das prestações ($p_{36}=570.788,52$, mais da metade do valor financiado e quase 550% a mais do que a prestação inicial), o saldo devedor decresce aceleradamente.

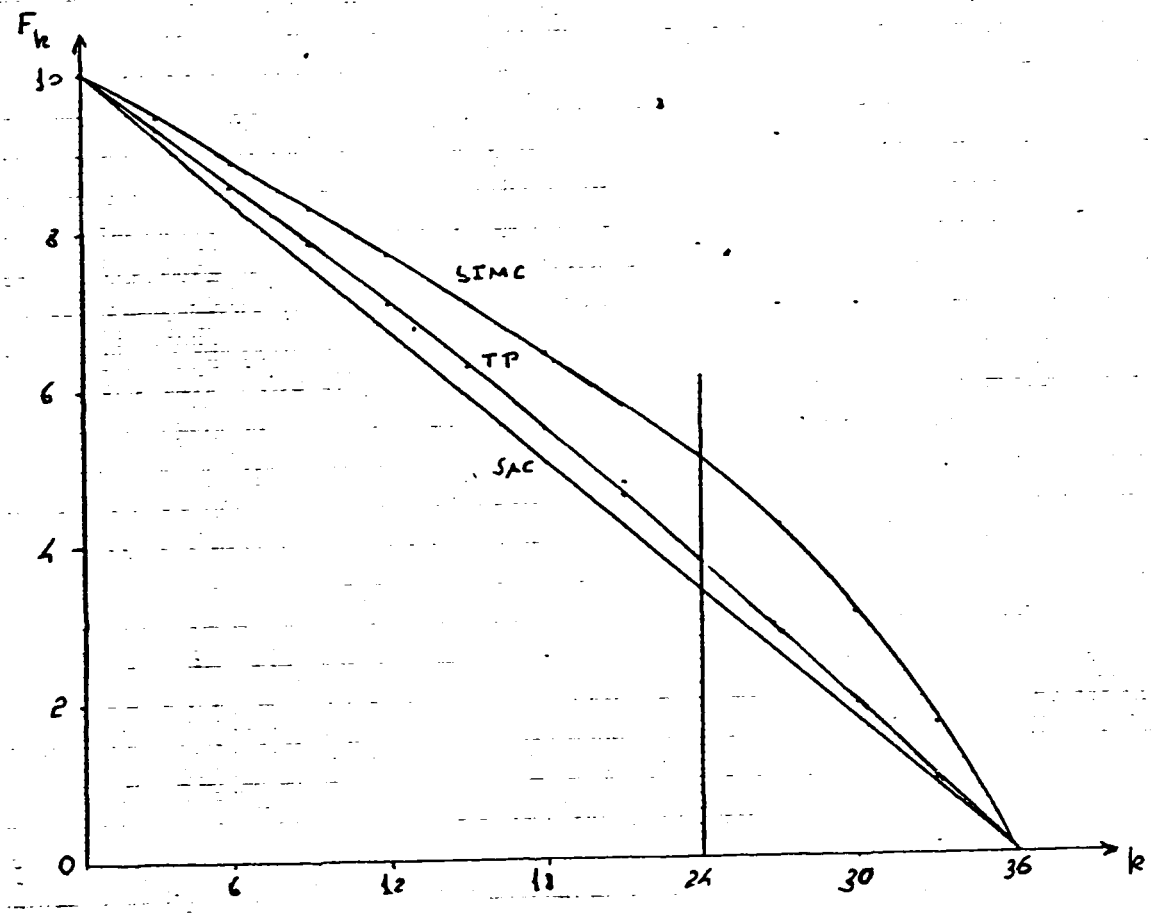

Figura I

Evolução dos Saldos Devedores para o Caso da Taxa de 1%

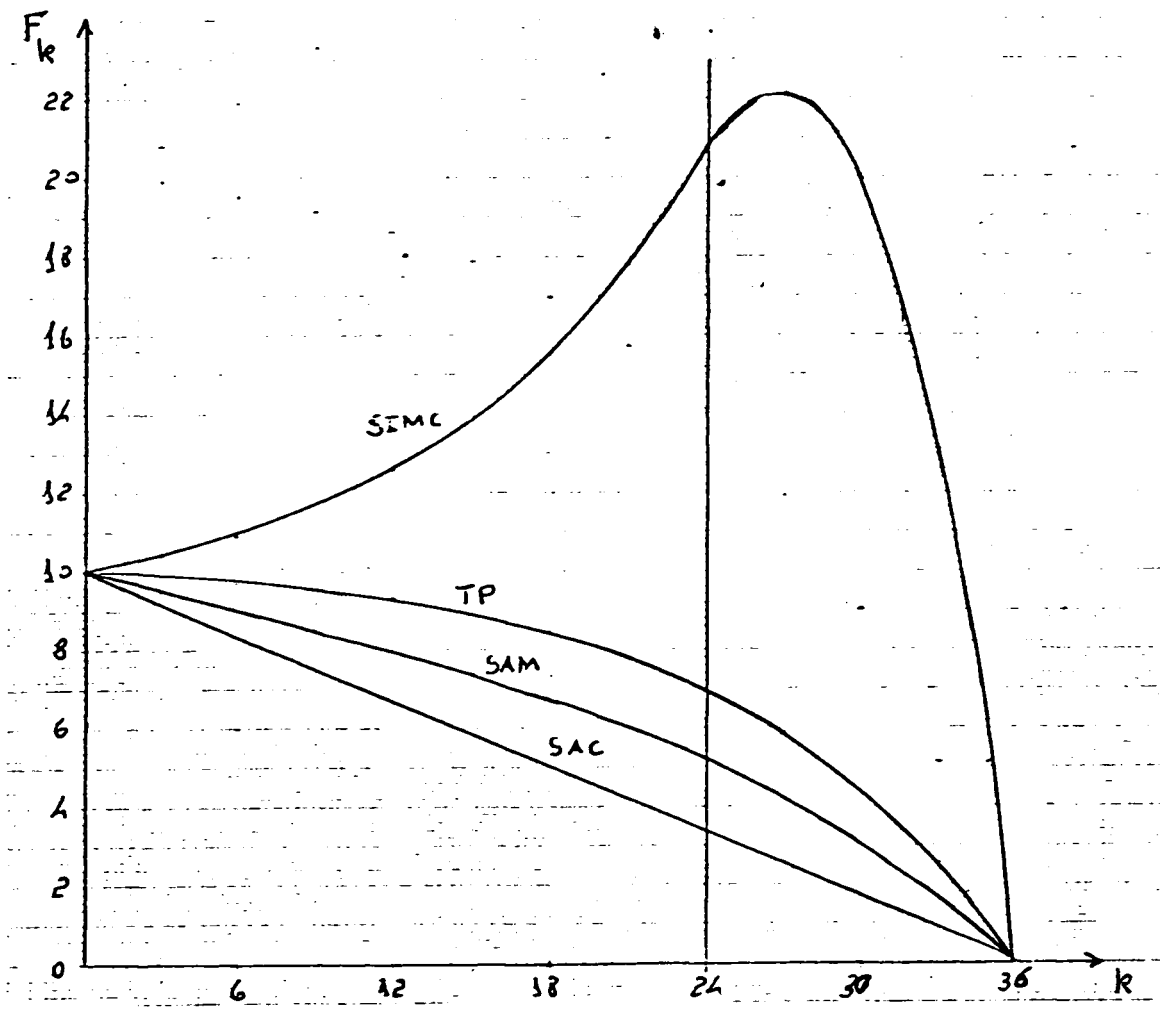

Figura II

Evolução dos Saldos Devedores para o Caso da Taxa de 10%.

3.2 - Confronto entre as prestações

Passando a examinar o comportamento da sucessão de prestações associadas a cada um dos 4 planos considerados, note-se, inicialmente, que, de (15), dado que a soma das cotas de amortização é igual ao valor financiado F, tem-se:

$$\sum_{k-1}^{n} p_k = F + i \sum_{k-1}^{n} F_{k-1}$$

Consequentemente, tendo em vista o apresentado no item anterior, conclui-se:

$$\sum_{k-1}^{n} p_k^{SIMC} > \sum_{k=1}^{n} p_k^{TP} > \sum_{k=1}^{n} p_k^{SAM} > \sum_{k=1}^{n} p_k^{SAC} \qquad (39)$$

Ou seja, contabilmente, o plano de financiamento que obriga ao mutuário efetuar o maior pagamento de juros é o SIMC; seguido da TP, do SAM e, por último, do SAC.

Como visto em de Faro (1974) e de Faro (1982, pa. 255), temos que tanto as prestações segundo o SAC como segundo o SAM são respectivamente maiores, ou iguais, que as de acordo com a TP até a época ℓ_1, que chamamos de reversão, e que é tal que:

$$\ell_1 = \text{parte inteira de } \{(ni + 1 + i - a_{\overline{n}|i}^{-1})/i\} \qquad (40)$$

Isto é, para $k=1,\ldots,\ell_1$, teremos $p_k^{SAC} \geq p_k^{SAM} \geq p_k^{TP}$, com igual-

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
BIBLIOTECA MARIO HENRIQUE SIMONSEN

dade podendo ocorrer somente na época ℓ_1, sendo que $p_k^{TP} > p_k^{SAM} > p_h^{SAC}$, para $k=\ell_1 + 1,\ldots,n$.

Por outro lado, para o caso do SIMC, a época de reversão em relação a TP, que chamaremos de ℓ_2, e que é sempre não inferior à 24, é tal que:

$$\ell_2 = \text{parte intèira de } \left\{ \frac{\beta/a_{\overline{n}|i} + 24i(1+i)^{24}}{i(1+i)^{24}} \right\} \quad (41)$$

onde β denota o denominador da expressão (11)

Ou seja, para $k=1,2,\ldots,\ell_2$ ter-se-á $p_k^{TP} \geqslant p_k^{SIMC}$, com igualdade podendo ocorrer somente na época ℓ_2, sendo que $p_k^{SIMC} > p_k^{TP}$, para $k = \ell_2+1,\ldots,n$

Similarmente, comparando-se o SAM com o SIMC e o SAC com o SIMC, podemos determinar, respectivamente, as épocas de reversão ℓ_3 e ℓ_4. As expressões são, porém, bem mais complicadas; ainda mais que, em função da taxa periódica i e do prazo n, podemos ter tanto tais épocas inferiores ou iguais a 24, como superiores. Deste modo, ao invés de aqui apresentá-las, achamos mais instrutivo evidenciar alguns exemplos numéricos. Para tanto, foi construído o Quadro I, onde, para cada par (i,n), são mostrados os correspondentes valores das épocas de reversão ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 e ℓ_4, e, entre parênteses, suas respectivas proporções percentuais do prazo n.

QUADRO I

Comportamento das Épocas de Reversão

i(%)	n	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4
1	36	17 (47,22)	25 (69,44)	25 (69,44)	25 (69,44)
10	36	9 (25,00)	24 (66,67)	20 (55,56)	15 (41,67)
1	48	22 (45,83)	29 (60,42)	28 (58,33)	27 (56,25)
10	48	10 (20,83)	24 (50,00)	24 (50,00)	17 (35,42)
1	60	27 (45,00)	33 (55,00)	32 (52,33)	31 (51,67)
10	60	10 (16,67)	25 (41,67)	24 (40,00)	19 (31,67)
1	72	32 (44,44)	37 (51,39)	36 (50,00)	35 (48,61)
10	72	10 (13,89)	25 (34,72)	24 (33,33)	21 (29,17)
1	84	36 (42,86)	41 (48,81)	40 (47,62)	39 (46,43)
10	84	10 (11,90)	25 (29,76)	24 (28,57)	23 (27,38)
1	120	48 (40,00)	52 (43,33)	51 (42,50)	50 (41,67)
10	120	10 (8,33)	25 (20,83)	24 (20,00)	24 (20,00)
1	180	64 (35,56)	68 (37,38)	66 (36,67)	66 (36,67)
$0,8\bar{3}$	180	68 (37,78)	71 (39,44)	70 (38,89)	70 (38,89)
1	240	76 (31,67)	79 (32,92)	78 (32,50)	78 (32,50)
$0,8\bar{3}$	240	83 (34,58)	85 (35,42)	84 (35,00)	84 (35,00)

Esquematicamente, fixando atenção no caso onde n=120, i = 1% por período e F = 1.000.000, teremos que as prestações segundo cada um dos quatro planos considerados, evoluirão como indicado na Figura III (onde p_k é medido em centenas de milhar).

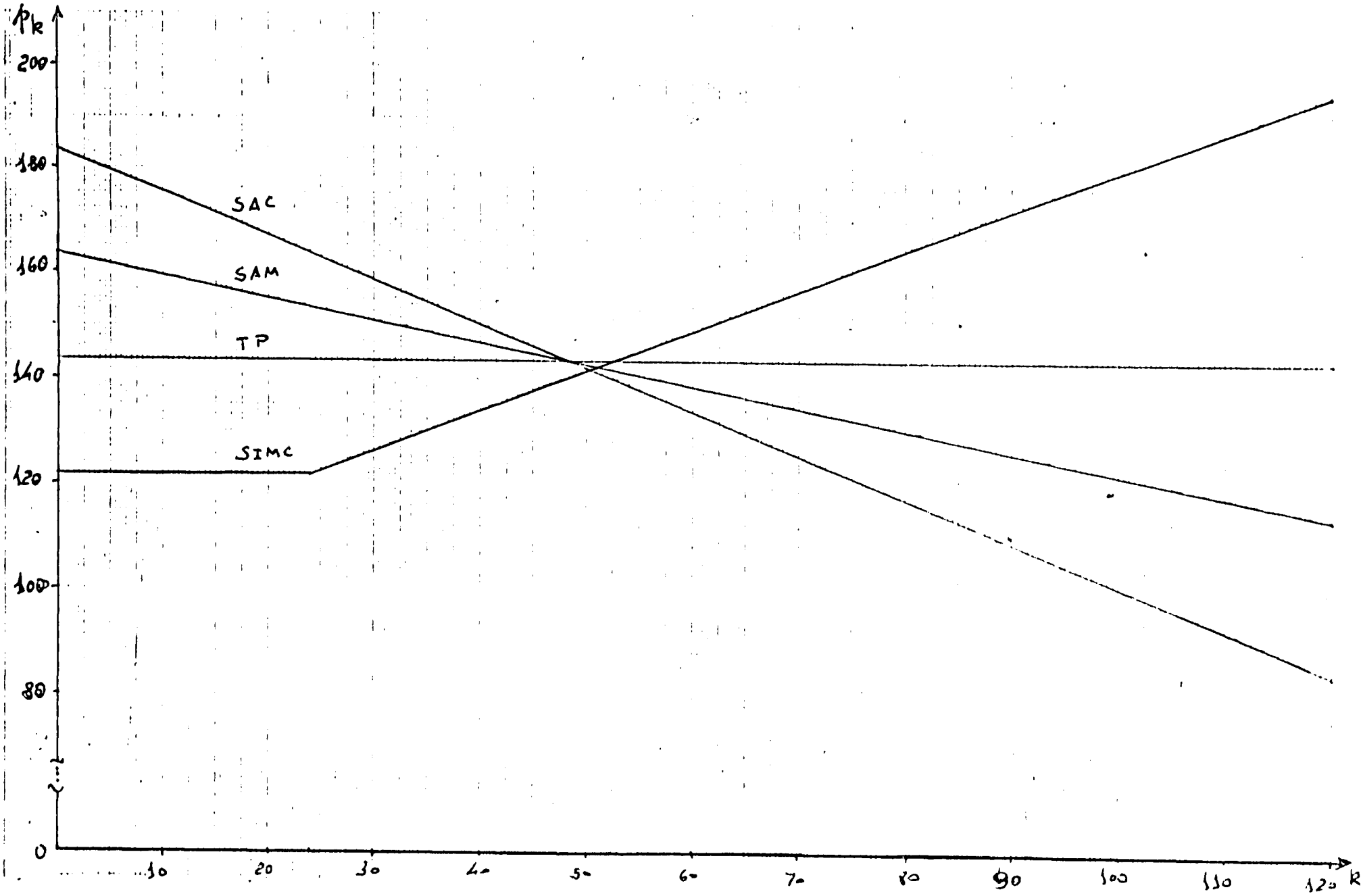

Figura III

Comportamento das Prestações Segundo os 4 Planos

3.3 - Modelo de escolha entre os planos

Dado que, como visto, para cada par dos planos considerados, começa-se a pagar mais inicialmente, segundo um deles, e menos após a respectiva época de reversão, podemos imaginar, como sugerido em de Faro (1975), o seguinte modelo de escolha entre o par de planos em apreço, sob o ponto de vista do tomador do financiamento.

Imaginemos que o mutuário tenha acesso irrestrito a uma certa oportunidade de investimento, cujo exemplo mais trivial é o caso das Cadernetas de Poupança (CP), que paga uma dada taxa periódica que denotaremos por $\hat{i}$. Nessas condições, supondo que o mutuário possa fazer face aos pagamentos associados a qualquer um dos planos de financiamento que formam o par considerado, é lícito admitir que, caso optasse pelo plano de menores prestações iniciais, estaria poupando, investindo na oportunidade mencionada, até a época de reversão, a diferença entre as duas seqüências de prestações periódicas. Como, a partir da época de reversão, passaria a pagar mais que no outro plano, podemos supor que cubra a diferença periódica fazendo retiradas da poupança acumulada. Segue-se, então, que, caso haja ainda poupança após o pagamento da última prestação, que o mutuário teria efetuado a opção correta. Caso contrário, ocorrendo a exaustão da poupança antes da época n, a melhor opção teria sido a do plano com maiores prestações iniciais.[1/]

---

[1] Obviamente, se a poupança acumulada for zerada exatamente na data do pagamento da última prestação, o mutuário ficaria indiferente entre os planos do par em questão.

Fixando atenção, inicialmente, na seleção entre a TP e o SIMC, temos que a poupança acumulada até a época k, inclusive, que denotaremos por S_k e que resulta das aplicações das diferenças a favor do mutuário, será:

$$S_k = \sum_{j=1}^{k} (p_j^{TP} - p_j^{SIMC})\ (1+\hat{i})^{k-j}\ ,\ k=1,2,\ldots,\ell_2 \qquad (42)$$

Após a época de reversão ℓ_2, face às retiradas necessárias para cobrir as diferenças que passam a ser, agora, contra o mutuário, o valor da poupança acumulada até a época k passa a ser igual a:

$$S_k = S_{\ell_2}(1+\hat{i})^{k-\ell_2} - \sum_{j=\ell_2+1}^{k} (p_j^{SIMC} - p_j^{TP})\,(1+\hat{i})^{k-j}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (p_j^{TP} - p_j^{SIMC})\,(1+\hat{i})^{k-j}\ ,\ k=\ell_2+1,\ldots,n \qquad (43)$$

Deste modo, segue-se que o SIMC será a melhor escolha se $S_n > 0$; ou, o que é equivalente, se:

$$V^{TP}(\hat{i}) = \sum_{j=1}^{n} p_j^{TP}(1+\hat{i})^{-j} > \sum_{j=1}^{n} p_j^{SIMC}\ (1+\hat{i})^{-j} = V^{SIMC}(\hat{i}) \qquad (44)$$

Repetindo a análise para cada um dos outros 5 possíveis distintos pares de planos, conclui-se, do exame da relação (44), e de suas homólogas, que o melhor plano, sob a ótica do tomador do financiamento, será aquele para o qual o valor atual,

na época zero (que é a de concessão do financiamento) e à taxa periódica $\hat{i}$, da correspondente seqüência de prestações, seja mínimo.

Cabe, então, agora, investigar a influência que a posição da taxa de aplicação $\hat{i}$, em relação à de financiamento i, exerce no processo de escolha. Antes de mais nada, observe-se que se $\hat{i} = i$, o mutuário ficará indiferente entre os 4 planos; pois que, face à equação fundamental de equivalência financeira, tem-se a igualdade:

$$V^{TP}(i) = V^{SAC}(i) = V^{SIMC}(i) = V^{SAM}(i) = F \qquad (45)$$

Por outro lado, no caso limite de aplicação à taxa nula, ou seja $\hat{i} = 0$, segue-se de (39) que:

$$V^{SIMC}(0) > V^{TP}(0) > V^{SAM}(0) > V^{SAC}(0) \qquad (46)$$

Portanto, se $\hat{i} = 0$, a melhor escolha é o SAC, com o SIMC sendo a pior opção.

A não ser nesses dois casos apontados, nada mais podemos afirmar à priori.[1/] Necessitamos, pois, de uma investigação teórica adicional. Para tanto, selecionando-se um par qualquer dentre os 4 planos, denote-se por d_k a diferença entre suas res

---

[1/] Excetuando-se, é óbvio, o caso onde a taxa de aplicação é infinitamente grande. Nesse caso, o valor atual da seqüência de prestações de cada um dos 4 planos tende a zero, levando o mutuário a ficar indiferente.

pectivas prestações na época k.A seqüência $\{d_1,\ldots,d_\ell,\ldots,d_n\}$, onde ℓ designa a correspondente época de reversão para o par considerado, apresenta uma, e somente uma, troca de sinal. Logo, como é fartamente sabido, veja-se, por exemplo, de Faro (1979, pg. 61), existe uma única taxa periódica de juros, que representaremos por $i^* > -1$, tal que:

$$\sum_{k=1}^{n} d_k \cdot (1+i^*)^{1-k} = 0 \qquad (47)$$

Conseqüentemente, face à definição de d_k, conclui-se que i^* é a única taxa que iguala o valor atual das respectivas seqüências de prestações do par de planos considerados. Mas, então, tendo em vista a (45), segue-se que esta taxa i^* nada mais é do que a taxa i cobrada no financiamento. Ou seja, em outras palavras, os 4 planos considerados só são equivalentes, no sentido de que o mutuário fique indiferente entre eles, se a taxa de aplicação $\hat{i}$ coincidir com a de financiamento.

Por conseguinte, levando-se em conta a (46), podemos afirmar que:

$$\begin{cases} V^{SIMC}(\hat{i}) > V^{TP}(\hat{i}) > V^{SAM}(\hat{i}) > V^{SAC}(\hat{i}), \text{ se } \hat{i} < i \\ V^{SAC}(\hat{i}) > V^{SAM}(\hat{i}) > V^{TP}(\hat{i}) > V^{SIMC}(\hat{i}), \text{ se } \hat{i} > i \end{cases} \qquad (48)$$

Ou seja, se $\hat{i} < i$, a melhor opção para o mutuário será o SAC; com o SIMC sendo a pior escolha. Se, entretanto, o mutuário puder efetuar aplicações à uma taxa superior à cobrada no financiamento, o SIMC possa ser o plano preferível, com o SAC sen-

do o menos interessante.

Tendo em vista que, derivando-se duas vezes com relação a $\hat{i}$ a expressão de definição que se inseriu na (44), conclui-se que o valor atual da seqüência de prestações, de cada um dos 4 planos, é uma função decrescente e convexa da taxa de aplicação $\hat{i}$. Deste modo, podemos visualizar o modelo de seleção adotando, baseado na comparação dos valores atuais das seqüências de prestações, como esquematicamente apresentado na Figura IV.

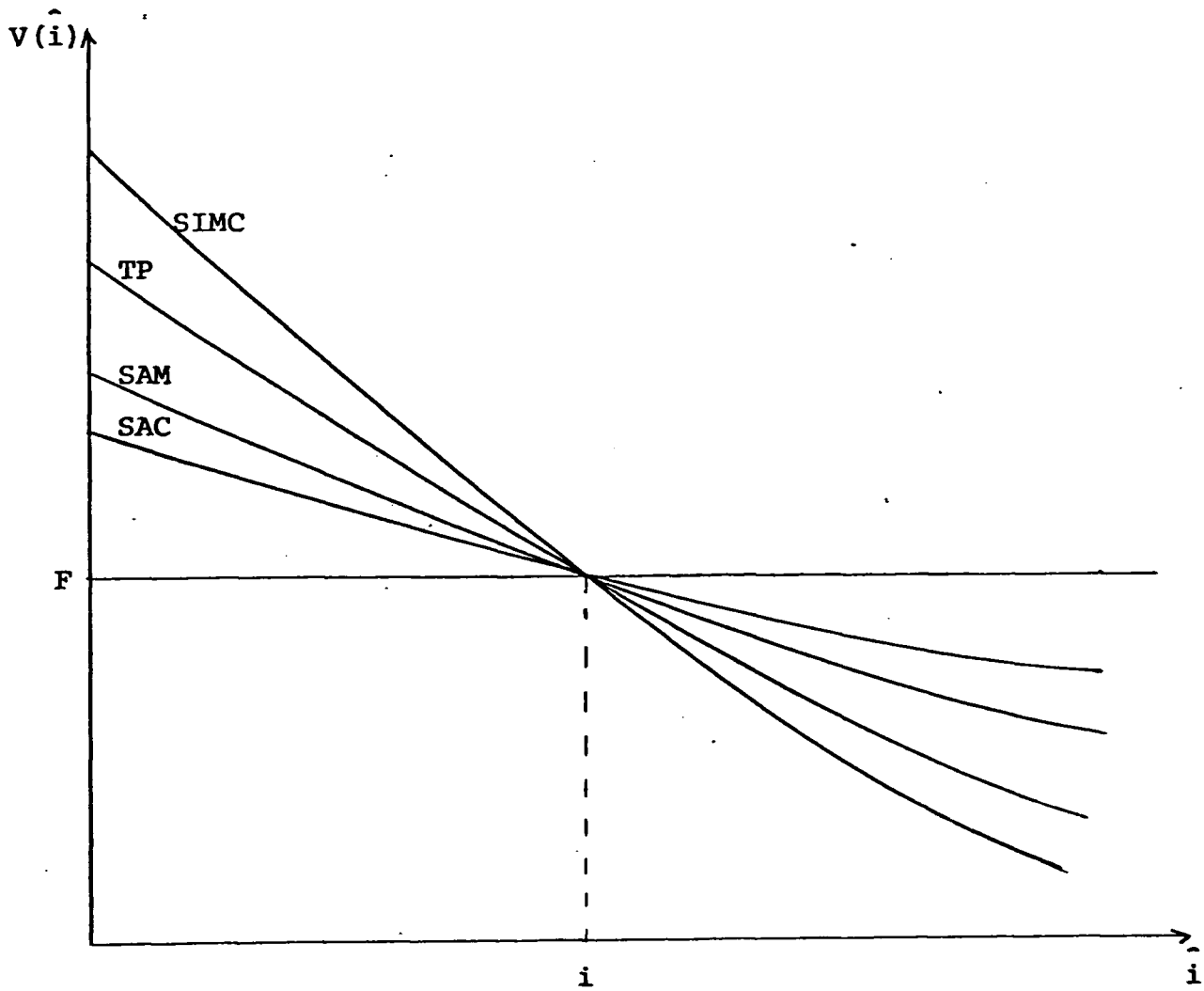

Figura IV

Comportamento dos Valores Atuais das Prestações

4. - Conclusão

Tendo em vista que a oportunidade básica de aplicação para os mutuários é a Caderneta de Poupança, que, correntemente, paga exatamente 0,5% ao mes sobre os depósitos, monetariamente corrigidos de acordo com a variação do valor nominal das Obrigações Reajustáveis do Tesouro Nacional (ORTN), a análise apresentada é suficiente para que, abstraindo-se de aspectos fiscais do problema, se faça uma seleção entre os 4 planos considerados na hipótese de que o financiamento seja oferecido em iguais condições, no que tange à prazos e taxas, e com cláusula de correção monetária mensal, de saldos devedores e prestações, de acordo com a variação do valor nominal das ORTN. Nesse caso, se a taxa efetiva mensal cobrada no financiamento exceder a 0,5%, o que pode ser considerado como o usual, a melhor opção para o mutuário será o SAC, com o SIMC sendo a pior escolha.

Para o caso das sistemáticas de reajuste das prestações ora vigentes nos financiamentos pactuados sob a égide do BNH, entretanto, o modelo de escolha apresentado não mais é suficiente. Isto porque, no chamado Plano de Correção Monetária (PCM), que é um plano financeiramente consistente,as prestações, bem como o saldo devedor, são monetariamente corrigidas no início de cada trimestre civil e de acordo com a variação do valor nominal do que se denomina de Unidade Padrão do Capital (UPC), e não mensalmente, como exigido no modelo estudado. Por outro lado, no caso do Plano de Equivalência Salarial (PES), que é financeiramente inconsistente, com reajuste anual das prestações e trimestral do

saldo devedor, e, em alguns casos, segundo a variação de distintos índices, temos ainda a distorção causada pela aposição do chamado Coeficiente de Equiparação Salarial (CES). Tomando os depósitos em Cadernetas de Poupança como base de comparação, o modelo de escolha para a hipótese de financiamentos contratados de acordo com tais planos de reajuste, deve ser adaptado na mesma linha do desenvolvido em de Faro.(1975).

REFERÊNCIAS

de Faro, Clovis (1974) - DIVID: Um Programa Flexível para Construção do Quadro de Evolução do Estado de uma Dívida, Ensaio Econômico da EPGE Nº 20, Instituto Brasileiro de Economia da Fundação Getúlio Vargas, R.J.

_____ (1975) - Escolha entre os Regimes da Tabela Price e do Sistema de Amortizações Constantes: Ponto de Vista do Mutuário, Ensaio Econômico da EPGE Nº 21, Instituto Brasileiro de Economia da Fundação Getúlio Vargas, R.J.

_____ (1970) - Elementos de Engenharia Econômica, 3a Edição, Editora Atlas, S.P.

_____ (1982) - Matemática Financeira, 9a. Edição, Editora Atlas, S.P.

000029684