

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
ESCOLA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA
CURSO DE MESTRADO EM ECONOMIA

TÍTULO

**ANALISANDO O RISCO DE UMA
CARTEIRA DE CRÉDITO VIA
SIMULAÇÕES DE MONTE CARLO**

CÉSAR ARAGÃO

ORIENTADOR: MARCELO FERNANDES

**DISSERTAÇÃO APRESENTADA À
ESCOLA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ECONOMIA PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ECONOMIA**

Rio de Janeiro, fevereiro de 2003

Analisando o Risco de uma Carteira de Crédito via Simulações de Monte Carlo

Resumo

Neste trabalho, analisamos a utilização da metodologia *CreditRisk+* do Credit Suisse e sua adequação ao mercado brasileiro, com o objetivo de calcular o risco de uma carteira de crédito. Certas hipóteses assumidas na formulação do modelo *CreditRisk+* não valem para o mercado brasileiro, caracterizado, por exemplo, por uma elevada probabilidade de *default*. Desenvolvemos, então, uma metodologia para cálculo da distribuição de perdas através do método de Simulação de Monte Carlo, alterando algumas hipóteses originais do modelo com o objetivo de adaptá-lo ao nosso mercado. A utilização de simulações também oferece resultados mais precisos em situações onde as carteiras possuem uma pequena população de contratos, além de eliminar possíveis problemas de convergência do método analítico, mesmo considerando as hipóteses do modelo original. Verifica-se ainda que o tempo computacional pode ser menor que o da metodologia original, principalmente em carteiras com elevado número de devedores de perfis distintos e com alocações em diversos setores da economia. Tendo em vista as restrições acima, acreditamos que a metodologia proposta seja uma alternativa para a forma analítica do modelo *CreditRisk+*. Apresentamos exemplos de utilização e resultados providos por estas simulações. O ponto central deste trabalho é realçar a importância da utilização de metodologias alternativas de medição de risco de crédito que incorporem as particularidades do mercado brasileiro.

1	INTRODUÇÃO.....	3
2	O MODELO <i>CREDITRISK</i>+.....	6
2.1	EVENTOS DE <i>DEFAULT</i> COM TAXAS FIXAS	6
2.2	DISTRIBUIÇÃO DE PERDAS COM TAXAS FIXAS.....	8
2.3	EXEMPLO DE UMA CARTEIRA DE CRÉDITO	9
2.4	INCERTEZA DAS TAXAS DE <i>DEFAULT</i>	10
2.5	ANÁLISE SETORIAL E CORRELAÇÕES	10
2.6	EVENTOS DE <i>DEFAULT</i> COM TAXAS VARIÁVEIS	11
2.6.1	<i>A distribuição gama.....</i>	12
2.6.2	<i>Distribuição de defaults.....</i>	12
2.6.3	<i>Distribuição de perdas com taxas variáveis.....</i>	13
2.7	EXEMPLO DE UMA CARTEIRA DE CRÉDITO COM TAXAS DE <i>DEFAULTS</i> VARIÁVEIS.....	14
2.8	RESUMO DA METODOLOGIA DE CÁLCULO.....	15
3	MÉTODO VIA SIMULAÇÕES DE MONTE CARLO	16
3.1	METODOLOGIA DA SIMULAÇÃO	16
3.2	VANTAGENS DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO.....	17
4	EXEMPLOS.....	19
4.1	SIMULAÇÃO VERSUS <i>CREDITRISK</i> +	19
4.2	COMPARAÇÃO ENTRE A UTILIZAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE POISSON E GAMA.....	19
4.3	PROBLEMAS COMPUTACIONAIS EM CARTEIRA DE VAREJO.....	20
4.4	EFEITO DA ESCOLHA DO TAMANHO DA FAIXA.....	20
5	CONCLUSÃO.....	21
	APÊNDICE 1 – PRINCIPAIS CONCEITOS DE RISCO DE CRÉDITO	33

1 Introdução

O risco financeiro pode ser definido como uma medida da incerteza em relação ao valor de ativos e passivos. De maneira geral, estas fontes de incerteza podem ser classificadas como risco de mercado, de crédito, operacional e legal (Prado, Bastos e Duarte, 2000).

O risco de mercado surge das flutuações nos preços de ativos financeiros. Ele pode ser medido através de modelos que dependem basicamente das exposições a determinados fatores de risco, das volatilidades e correlações entre os retornos de diferentes ativos que compõem uma carteira. Existem diversas metodologias para sua mensuração de uma forma agregada, em particular a metodologia *RiskMetrics* (J.P. Morgan, 1995).

O risco de crédito surge quando a contraparte de um empréstimo ou operação financeira não deseja ou não é capaz de cumprir suas obrigações contratuais. A perda pode ocorrer de duas maneiras distintas. A primeira é quando a contraparte deixa de honrar o contrato, acarretando uma perda do valor de face do empréstimo menos uma taxa de recuperação. Esta modalidade é conhecida como risco de *default*. A segunda ocorre quando, devido a alterações na classificação de risco da contraparte, o valor de mercado do empréstimo sofre alterações, sendo conhecida como risco de *spread*.

Os sistemas de avaliação da capacidade de crédito de contraparte são tradicionalmente de caráter qualitativo. Entretanto, grandes avanços foram realizados nos últimos anos com o intuito de tratar o risco de crédito de forma agregada, como o risco de mercado. Com isso, surgiram algumas metodologias que atualmente são utilizadas pelo mercado, cada qual com um enfoque, além de, naturalmente, vantagens e desvantagens.

Entre as principais metodologias de análise de risco de crédito utilizadas atualmente no mercado, podemos citar os modelos KMV (Vasicek, 1987), *CreditMetrics* (J.P. Morgan, 1997), *CreditRisk+* (Credit Suisse First Boston, 1997) e o modelo de fatores (McKinsey, 1997).

Apresentamos a seguir um resumo destas metodologias. Para maiores detalhes sobre esses modelos, ver Saunders (1999).

Modelo KMV

O modelo KMV baseia-se na hipótese de que o mercado é a fonte mais eficiente de informações acerca da saúde financeira de uma empresa. Por esta hipótese, assume-se que o preço das ações de empresas negociadas em mercado aberto reflete as expectativas do mercado acerca da empresa.

A função de pagamento de um empréstimo está diretamente relacionada com o valor de mercado da empresa devedora. Se o valor de mercado de seus ativos superar o valor do empréstimo, os proprietários da empresa têm um incentivo para pagar ao credor e reter o valor residual como lucro. Caso contrário, a empresa devedora poderá tomar a decisão de entregar os seus ativos. Esse mecanismo é análogo à subscrição de

um contrato de opção de venda sobre uma ação. Se o preço da ação exceder o preço de exercício, o subscritor da opção reterá o prêmio da venda. Se o preço da ação cair abaixo do preço de exercício, a opção será exercida e o subscritor perderá montantes progressivamente maiores.

O valor do empréstimo pode ser então determinado através do modelo *Black-Scholes-Merton*¹ como a subscrição de uma opção de venda sobre os ativos da empresa devedora. Entretanto, esse valor dependerá do valor de mercado desses ativos e suas volatilidades, parâmetros que não podem ser diretamente observados. Para contornar este problema, costuma-se extrair implicitamente do modelo, utilizando dados sobre o valor da dívida, o valor de mercado da firma e sua volatilidade.

O modelo KMV inverte o problema, considerando o incentivo de pagamento por parte dos detentores do capital da empresa devedora. Com isso, torna-se possível determinar uma medida de frequência esperada de inadimplência.

O principal motivo que inviabiliza a sua utilização no mercado brasileiro é a necessidade de mercados líquidos de ações e opções negociados em bolsa, contemplando todos os ativos da carteira de crédito.

CreditMetrics

O modelo *CreditMetrics* é baseado na abordagem de risco de *spread*. Ele exige a marcação a mercado da carteira de crédito, de forma semelhante ao modelo utilizado pelo *Riskmetrics* para avaliação de risco de mercado. O modelo *CreditMetrics* procura estabelecer qual será a perda de uma carteira de crédito devido a alterações na classificação de crédito dos devedores e eventuais ocorrências de *default*.

Este cálculo exige o conhecimento do valor de mercado do empréstimo e de sua volatilidade. No entanto, estes valores não são diretamente observáveis no mercado. A fim de contornar este problema, utilizam-se dados disponíveis sobre a classificação de crédito do devedor, as probabilidades de que esta classificação mude ao longo do tempo (mapeadas em uma matriz de alteração de *rating*), os índices de recuperação de cada faixa de classificação e os *spreads* do mercado secundário. A partir desses dados, obtém-se estimativas do valor de mercado e de sua volatilidade, possibilitando o cálculo do valor em risco (VaR) de um devedor ou da carteira de crédito.

No Brasil não temos mercado secundário de crédito, ou seja, as operações são levadas ao vencimento. Além disso, não existe uma agência independente que seja provedora de *ratings* de crédito, bem como a matriz de transição. Desta maneira, não obtivemos razões que motivassem sua utilização.

Modelo de Fatores

O modelo de fatores da McKinsey é baseado na relação entre as probabilidades de *default* dos devedores e fatores macroeconômicos. Assim como no modelo *CreditMetrics*, parte-se de uma matriz de alteração de *ratings*. Entretanto as

¹ Esta equação calcula o preço de uma opção de compra ou venda sobre uma ação. A opção dá ao detentor o direito de comprar vender a ação a um preço pré-estabelecido em uma data futura (ver, por exemplo, Hull, 1997).

probabilidades podem variar ao longo do tempo de acordo com o estado da economia. Por exemplo, em um período de recessão essas probabilidades são mais elevadas e, como consequência, as probabilidades de melhora na classificação do tomador serão menores.

As probabilidades de alteração de *rating* são modeladas como função de variáveis macroeconômicas defasadas, de um fator de choque econômico geral e de fatores de choque para cada uma das variáveis. A distribuição de valores dos empréstimos obtida com base na matriz condicional pode ser usada no cálculo do VaR da carteira.

Dados macroeconômicos sem quebras estruturais são praticamente inexistentes no mercado brasileiro, resultado das inúmeras mudanças de regime econômico que passamos ao longo dos últimos anos (ver, por exemplo, Rocha e Bender, 2000). Por este motivo não acreditamos ser este o modelo mais adequado à realidade brasileira.

CreditRisk+

Este modelo trata o risco de *default*, ou seja, o risco do devedor não cumprir suas obrigações. Os devedores são classificados em faixas, cada qual associada a uma probabilidade de ocorrência de *default*. O modelo assume que todos os contratos de empréstimo são levados ao vencimento, ou seja, o pagamento ou o *default* ocorre apenas na data de vencimento do contrato. Eventos de *default* acarretam em uma perda equivalente ao valor integral do empréstimo, excluindo a taxa de recuperação.

O procedimento envolve ainda a estimação da distribuição de perdas da carteira de contratos de empréstimo. A partir desta distribuição, é possível calcular as perdas esperadas, as não esperadas, o valor em risco (VaR) e o capital econômico da empresa detentora dos contratos.² O capital econômico é definido como o valor estimado para cobrir qualquer perda entre a esperada (montante de empréstimos ponderado pelas probabilidades de ocorrência de *default*) e o percentual desejado para a taxa de solvência do detentor. O modelo também permite realizar análises de cenários e diversas medidas de sensibilidade.

O fato da maioria das operações de empréstimo serem levadas até o vencimento e, principalmente, a inexistência de mercado secundário para contratos de crédito, sugere a utilização deste modelo para a mensuração do risco de uma carteira de crédito no mercado brasileiro. Por exemplo, a inexistência de mercado secundário dificulta a estimação dos *spreads* aplicados sobre estes contratos, dificultando a utilização do modelo *CreditMetrics*.

Neste trabalho, analisamos a utilização da metodologia *CreditRisk+* (Credit Suisse First Boston, 1997) e sua adequação ao mercado brasileiro. As limitações da forma analítica proposta por esta metodologia são investigadas para a realidade do cenário nacional, ressaltando-se algumas restrições na aplicação direta deste modelo. Argumentamos que simulações de Monte Carlo podem ser exploradas para reduzir estas restrições, servindo de alternativa para a forma analítica do modelo *CreditRisk+*. Apresentamos exemplos de utilização e resultados providos por estas simulações.

² Os principais conceitos envolvidos no cálculo de risco de uma carteira de crédito estão descritos no Apêndice I.

O restante do trabalho está organizado da seguinte forma. Na seção 2, discutimos o modelo *CreditRisk+*, ressaltando suas características e limitações. Na seção 3, apresentamos como simulações de Monte Carlo podem ser utilizadas para reduzir as limitações do modelo original. Apresentamos ainda uma análise comparando o custo computacional de realização destas simulações com o custo computacional do modelo analítico, além de possíveis problemas de convergência no método original. Na seção 4, apresentamos exemplos da utilização do modelo *CreditRisk+* e das simulações de Monte Carlo. A seção 5 apresenta algumas conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

2 O Modelo *CreditRisk+*

CreditRisk+ é um modelo de risco de *default*, onde cada devedor tem apenas dois possíveis estados: inadimplente ou não. A medição das perdas esperadas e não esperadas do valor da carteira é o principal objeto de análise deste modelo. A inadimplência é modelada como uma variável contínua com uma distribuição de probabilidade caracterizada por uma parametrização específica da média e variância. No caso de *default*, a perda é de tamanho fixo, equivalente a sua exposição (líquida da taxa de recuperação).

O modelo assume a hipótese de que não existem relações causais entre eventos de *default*. No entanto, existem fatores externos que podem afetar de maneira semelhante aos devedores dando origem às correlações entre eventos. Este processo será visto em maiores detalhes adiante.

Os empréstimos componentes de uma carteira de crédito são agrupados por faixas de exposição, de modo que a distribuição de eventos de *default* pode ser aproximada por uma distribuição de Poisson com média μ (não necessariamente constante). Entretanto, é importante ressaltar que tal aproximação só é válida supondo-se que as probabilidades p de *default* individuais são pequenas e o número N de devedores na carteira é alto. Como veremos adiante, a forma mais correta de modelar estes eventos seria através de uma distribuição binomial.

2.1 Eventos de *default* com taxas fixas

Em primeiro lugar, precisamos definir a Função Geradora de Probabilidade (FGP). Considerando X uma variável aleatória discreta com valores não negativos, definimos

sua FGP como $G_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = E(z^n)$, onde $p_n = P(X=n)$, $n=0, 1, 2, \dots$. Para

esta sequência, existe um número r tal que a série converge se $|z| < r$. Note que como $G_X(1) = 1$, a série converge se $|z| < 1$. Considerando uma carteira com N devedores, vamos definir p_i como a probabilidade do i -ésimo devedor não honrar seus compromissos.

Para analisarmos a distribuição de perdas da carteira, consideramos a seguinte FGP em função da variável auxiliar z : $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(ND=n)z^n$, onde $p(ND=n)$ representa a probabilidade de ocorrência de n defaults.

Como um devedor individual pode ou não entrar em *default*, sua função segue a seguinte regra: $F(z) = 1 - p_i + p_i z = 1 + p_i (z - 1)$. Assumindo independência entre os eventos de *default*, a FGP é o produto das funções de probabilidade iniciais. Então, para N devedores temos:

$$F(z) = \prod_{i=1}^N F_i(z) = \prod_{i=1}^N (1 + p_i(z - 1)).$$

Aplicando uma transformação logarítmica em ambos os lados da equação:

$$\log(F(z)) = \sum_{i=1}^N \log(1 + p_i(z - 1)).$$

Se as probabilidades de *default* forem pequenas, vale a aproximação:

$$\log(1 + p_i(z - 1)) = p_i(z - 1),$$

portanto, $F(z) = \exp\left(\sum_{i=1}^N p_i(z - 1)\right)$ ou, equivalentemente, $F(z) = \exp(\mu(z - 1))$,

onde $\mu = \sum_{i=1}^N p_i$.

Esta é a primeira grande simplificação do modelo, que pode gerar resultados inconsistentes para o mercado brasileiro, uma vez que as taxas de *default* no Brasil são bem mais elevadas do que as do mercado americano.

Expandindo $F(z)$ em séries de potência:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^n z^n}{n!},$$

e, portanto, $p(ND=n) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!}$. Esta é a função de distribuição de probabilidade de Poisson, ou seja, se a taxa de *default* é pequena, a probabilidade de ocorrer n defaults segue a fórmula acima.

A forma mais correta de modelar estes eventos é através da distribuição binomial com n devedores com probabilidade de *default* p , que converge para a de Poisson com média $\mu = np$ somente quando as hipóteses de n grande e p pequeno são observadas (Koyluoglu e Hickman, 1999). Ainda, a distribuição de Poisson permite que o número de eventos de *default* seja maior que o número de empréstimos em carteira, podendo gerar outras distorções.

2.2 Distribuição de perdas com taxas fixas

Como observado na seção anterior, os eventos de *default* seguem aproximadamente uma distribuição de Poisson. Entretanto, o objetivo é calcular a distribuição de perdas da carteira. Como as exposições dos empréstimos não têm tamanho fixo, a distribuição de perdas da carteira é substancialmente diferente da distribuição de Poisson. Para entendermos isso, basta imaginar que a probabilidade de um *default* de R\$1.000 é diferente de dez *defaults* de R\$100, ainda que a perda seja a mesma.

Para resolver o problema das diferenças de exposição, utilizamos bandas de exposição para agruparmos diversos devedores em faixas. Chega-se então a uma segunda aproximação no modelo, tendo em vista que dois devedores com exposições semelhantes devem ser alocados na mesma faixa, além das perdas serem de tamanho nL . Por exemplo, se $L = 100$, as perdas possíveis são 0, 100, 200, 300, ... Uma maneira de minimizar este problema é escolher faixas de amplitude relativamente pequena em relação ao tamanho das exposições. Desta maneira, aumentamos o número de faixas, o que pode causar problemas de tempo computacional, principalmente quando as probabilidades de *default* não forem fixas e os devedores são alocados em diversos setores da economia (ver seção 2.5).

Para prosseguirmos, precisamos definir algumas notações: L_i denota a exposição, p_i a probabilidade de *default* e λ_i a perda esperada do i -ésimo devedor. Definimos, então, o tamanho padrão de exposição como sendo igual a L , de forma que $L_i = L v_i$ e $\lambda_i = L \varepsilon_i$, onde v_i é a exposição do i -ésimo devedor e ε_i é a sua perda esperada, ambos múltiplos de L . Um ponto importante a ser discutido é a escolha de L , pois pode influenciar fortemente o parâmetro v_i , que sendo um número inteiro, torna L_i uma aproximação para a exposição real do i -ésimo devedor. Considerando m faixas de exposição, podemos definir j como o índice de cada uma das faixas. Sendo μ_j o número esperado de *defaults* na faixa j , $\varepsilon_j = v_j \mu_j$.

Definindo $G(z)$ como a função geradora das probabilidades de perdas em múltiplos de L , temos $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$, onde A_n é definido com a probabilidade de perda de tamanho nL .

Escrevendo esta função como um produto entre as funções das faixas, temos que

$$G(z) = \prod_{j=1}^m G_j(z), \text{ onde}$$

$$G_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(ND = n) z^{n v_j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu_j} \mu_j^n}{n!} z^{n v_j} = \exp(-\mu_j + \mu_j z^{v_j}),$$

de modo que

$$G(z) = \prod_{j=1}^m \exp(-\mu_j + \mu_j z^{v_j}) = \exp\left(-\sum_{j=1}^m \mu_j + \sum_{j=1}^m \mu_j z^{v_j}\right).$$

Por expansão de Taylor, temos:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n G(z)}{dz^n} \Big|_{z=0}.$$

que, pela fórmula de Leibnitz, pode ser expresso como

$$A_n = \sum_{k=v_j-1}^{n-1} \left(\frac{1}{n!} \binom{n-1}{k} (k+1)! (n-k-1)! \mu_j A_{n-k-1} \right).$$

Portanto,

$$A_n = \sum_{j: v_j \leq n} \left(\frac{\mu_j v_j}{n} \right) A_{n-v_j} = \sum_{j: v_j \leq n} \left(\frac{\varepsilon_j}{n} \right) A_{n-v_j}.$$

Considerando a recursividade da fórmula acima, precisamos definir A_0 . Em particular, adotamos

$$A_0 = G(0) = \exp \left(- \sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon_j}{v_j} \right).$$

2.3 Exemplo de uma carteira de crédito

Neste exemplo, com fins didáticos, vamos considerar a seguinte carteira de crédito:

- i) 50 empréstimos com exposição de R\$200 e probabilidade de *default* de 4%.
- ii) 100 empréstimos com exposição de R\$300 e probabilidade de *default* de 1%.

Escolhendo $L=100$, temos $m = 2$, $v_1 = 2$, $v_2 = 3$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$, $\varepsilon_1 = 4$ e $\varepsilon_2 = 3$.

Substituindo os valores nas duas últimas equações da seção anterior, obtemos os valores dos cinco primeiros termos na Tabela 1. O resultado completo é visualizado na Figura 1. Aumentando as probabilidades de *default*, a Figura 2 explicita a diferença na utilização da hipótese da distribuição de Poisson na aproximação da binomial.

Analisando o efeito da escolha do tamanho da faixa, verificamos que o resultado correto é obtido considerando $L=100$. A intuição para este resultado é a seguinte. Como temos exposições de R\$200 e R\$300, as primeiras combinações possíveis de *default* conjuntas geram resultados de R\$0 (nenhum *default* em ambas as faixas), R\$200 (um *default* da primeira faixa e nenhum da segunda), R\$300 (nenhum *default* da primeira faixa e um da segunda), R\$400 (dois *defaults* da primeira faixa e nenhum da segunda), R\$500 (um *default* da primeira faixa e um da segunda), R\$600 (três *defaults* da primeira faixa e nenhum da segunda ou nenhum *default* da primeira faixa e dois da segunda) e assim por diante.

Como as perdas são representadas em múltiplos de L , com $L = 100$ todas as combinações de *default* são percorridas. Porém, com $L = 200$, as perdas seriam de R\$0, R\$200, R\$400, R\$600, R\$800,... e portanto não haveria a correta representação das perdas reais de R\$300, R\$500, R\$700 e assim por diante. Se $L = 300$, teríamos perdas em R\$00, R\$600, R\$900,..., implicando resultados ainda mais distantes da realidade.

A diferença no capital econômico, dado um nível de confiança de 5%, para cada uma das faixas está representada na Tabela 2. A Figura 3 ressalta as diferenças nas distribuições de perda em função do tamanho da faixa escolhida.

2.4 Incerteza das taxas de *default*

Até a seção anterior, consideramos as taxas de *default* como fixas. Analisaremos agora a influência da incerteza nas taxas. As taxas podem ser modeladas através da média histórica condicionada aos fatores macroeconômicos. Uma recessão econômica presumivelmente aumenta as taxas de *default* das empresas, por exemplo.

Introduzindo estocasticidade nas taxas de *default* através de uma distribuição gama com média μ e volatilidade σ ,³ observa-se na Figura 4 que a variância da distribuição de perdas aumenta, **enquanto a perda esperada permanece a mesma**. Assim, a distribuição de perdas das carteiras terá caudas mais largas. Esse aumento deve-se às correlações implícitas das exposições. É importante notar que quando temos volatilidades iguais a zero, estas correlações são nulas. Estas correlações observadas entre dois devedores devem-se única e exclusivamente aos fatores externos, não sendo modelada qualquer tipo de relação causal entre eventos de *default*.

Como exemplo, em um período de recessão econômica, observamos um aumento no nível das taxas de *default*, ocorrendo uma maior incidência de eventos de *default*.

2.5 Análise setorial e correlações

Além do efeito das volatilidades, pode-se considerar o efeito da distribuição das empresas por setores, que faz com que dois devedores em setores distintos sejam afetados de maneira diferente devido a fatores externos. Como consequência, temos uma diversificação do risco ao alocarmos exposições em setores diferentes.

Pode-se ver claramente o efeito da diversificação na Figura 5. Para efeito de simplificação, consideramos pesos iguais para cada setor. À medida que se aumenta o número de setores, maior será o grau de diversificação da carteira, isto é, menor a variância da distribuição de perdas.

O risco de concentração ocorre quando temos muitas exposições em um mesmo setor, ou seja, exposições afetadas pelos mesmos fatores. Um exemplo seria termos

³ Hipótese assumida pelo *CreditRisk+* (Credit Suisse First Boston, 1997). A seção 2.6 discute a sua motivação.

muitos devedores com domicílio em um mesmo país. Uma empresa não precisa pertencer necessariamente 100% a um único setor, podendo ser dividida em dois ou mais setores. Isso mostra que sua taxa de *default* sofre influência de mais de um fator.

Para a modelagem matemática, consideramos uma carteira onde:

$N \Rightarrow$ número de devedores:

$K \Rightarrow$ número de setores:

$\mu_i \Rightarrow$ taxa de *default* do devedor i :

$\sigma_i \Rightarrow$ volatilidade da taxa de *default* de cada devedor:

$e_i \Rightarrow$ exposição de cada devedor:

$\theta_{ik} \Rightarrow$ influência do setor k nos devedores i .

O setor k possui respectivamente média e volatilidade:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^N \theta_{ik} \mu_i \text{ e } \sigma_k = \sum_{i=1}^N \theta_{ik} \sigma_i.$$

O modelo supõe, ainda, que a probabilidade de *default* é uma variável aleatória com distribuição gama. Porém, no caso da simulação, podemos escolher qualquer outra distribuição que se adapte melhor à realidade.

Definindo x_k como a probabilidade de *default* do setor k , temos: $x_k \sim \Gamma(\alpha_k, \beta_k)$,

onde $\alpha_k = \mu_k^2 / \sigma_k^2$ e $\beta_k = \sigma_k^2 / \mu_k$. Para cada devedor, temos $x_i = \sum_{k=1}^K \left(\frac{x_k}{\mu_k} \right) \theta_{ik} \mu_i$.

2.6 Eventos de *default* com taxas variáveis

Sendo as probabilidades de *default* modeladas como variáveis aleatórias com distribuição gama, introduzimos uma volatilidade que produz o efeito de correlação no modelo. Como veremos adiante, a convolução entre distribuições gama e Poisson implica uma fórmula analítica fechada para a distribuição de perdas da carteira. Possivelmente, esta é a razão da escolha destas distribuições na formulação original do modelo.

Da mesma maneira que na seção 2.1, definimos a função geradora de probabilidade como $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(nd=n)z^n$, que pode ser escrita como

$$F(z) = \prod_{k=1}^K F_k(z), \text{ dado que os setores são independentes.}$$

Como visto acima, a taxa de *default* é modelada como uma variável aleatória x_k com média μ_k e desvio padrão σ_k . Condicionando em $x_k = z$, podemos escrever a função geradora de probabilidade como $F_k(z) = \exp[x(z-1)]$.

A função geradora de probabilidade pode ser entendida como a média da função acima para todos valores possíveis da taxa de *default*, ponderada pela possibilidade de ocorrência daquele estado da natureza:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(ND=n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{x=0}^{\infty} p(ND=n|x) f(x) dx = \int_{x=0}^{\infty} e^{x(z-1)} f(x) dx.$$

2.6.1 A distribuição gama

A distribuição gama tem a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x, \alpha, \beta > 0.$$

onde $\Gamma(\alpha)$ é a função gama definida como $\int_0^{\infty} y^{\alpha-1} \times e^{-y} dy$. A distribuição gama é completamente descrita por apenas dois parâmetros, α e β , tendo média $\alpha\beta$ e variância $\alpha\beta^2$. O modelo *CreditRisk+* supõe que as taxas de *default* tem distribuição gama, resultando em $\alpha_k = \mu_k^2 / \sigma_k^2$ e $\beta_k = \sigma_k^2 / \mu_k$, onde k denota o índice do setor.

2.6.2 Distribuição de defaults

Escolhida a distribuição gama para a função $f(x)$, podemos escrever $F_k(z)$ como:

$$F_k(z) = \int_0^{\infty} e^{x(z-1)} f(x) dx = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{x(z-1)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx.$$

A partir da mudança de variável $y = (1-z + 1/\beta)x$, chega-se à seguinte expressão:

$$F_k(z) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{1-z + \beta^{-1}} \right)^\alpha \int_0^{\infty} e^{-y} (y)^{\alpha-1} dy.$$

Portanto,

$$F_k(z) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{1-z + \beta^{-1}} \right)^\alpha \Gamma(\alpha) = \frac{1}{\beta^\alpha} \left(\frac{1}{1-z + \beta^{-1}} \right)^\alpha.$$

Assumindo que $p_k = \frac{\beta_k}{(1+\beta_k)}$ resulta em

$$F_k(z) = \left(\frac{1-p_k}{1-p_k z} \right)^{\alpha_k} = (1-p_k)^{\alpha_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \alpha_k \cdot (1-p_k)^{n-1}}{n} p_k^n z^n$$

após expansão em séries de Taylor.

Portanto,

$$p(ND = n) = (1 - p_k)^r \binom{n + \alpha_k + 1}{n} p_k^n.$$

demonstrando que a convolução entre distribuições gama e Poisson gera uma distribuição binomial negativa.

2.6.3 Distribuição de perdas com taxas variáveis

Essa seção analisa a distribuição das perdas de *default* com as taxas variáveis. O objetivo é calcular uma fórmula fechada para $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$. Como

$G(z) = \prod_{k=1}^K G_k(z)$, onde $G_k(z)$ é a função geradora de probabilidade para o setor k , podemos escrever, como na seção 2.2, que

$$G_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(nd=n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{x_k=0}^{\infty} p(A_n | x_k) f(x_k) dx_k = \int_{x_k=0}^{\infty} \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i (z^{v_i} - 1)\right) f_k(x_k) dx_k.$$

Logo, $G_k(z) = \int_{x_k=0}^{\infty} e^{x_k (W_k(z)-1)} f_k(x_k) dx_k$, onde $W_k(z) = \frac{1}{\mu_k} \sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon_j}{v_j} z^{v_j}$, de modo que

$$G(z) = \prod_{k=1}^K G_k(z) = \prod_{k=1}^K \left(\frac{1 - p_k}{1 - \frac{p_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} z^{v_j^{(k)}}} \right)^{\alpha_k}.$$

Vamos calcular a distribuição de perdas através de um algoritmo numérico.

Lembrando que $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$, onde A_n é a probabilidade de perda do montante

nL , temos $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ e $\frac{d(\log G(z))}{dz} = \frac{1}{G(z)} \frac{dG(z)}{dz} = \frac{A(z)}{B(z)}$, onde A e B são polinômios de ordem r e s , respectivamente.

Credit Suisse First Boston (1997) demonstra que os termos da expansão na equação acima podem ser calculados a partir de

$$A_{n+1} = \frac{1}{b_0(n+1)} \left[\sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i} - \sum_{j=0}^{\min(s-1,n-1)} b_{j+1}(n-j) A_{n-j} \right].$$

Por outro lado,
$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \sum_{k=1}^K \frac{G'_k(z)}{G_k(z)} = \sum_{k=1}^K \frac{\mu_k \sum_{j=1}^{m(k)} \varepsilon_j^{(k)} z^{v_j^{(k)}-1}}{1 - \mu_k \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} z^{v_j^{(k)}}}.$$

implicando que

$$\frac{A(z)}{B(z)} = \sum_{k=1}^K \frac{\mu_k \sum_{j=1}^{m(k)} \varepsilon_j^{(k)} z^{v_j^{(k)}-1}}{1 - \mu_k \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} z^{v_j^{(k)}}}.$$

O algoritmo procura, então, encontrar os coeficientes de $A(z)$ e $B(z)$. Um ponto importante é a escolha do parâmetro L , que vai determinar o v_j . Estes números representam os graus dos polinômios do numerador e do denominador. Se forem elevados, o gasto computacional pode ser intenso, inviabilizando a solução através de algoritmos numéricos. Observando que o índice k representa a faixa, em uma primeira análise, podemos verificar que, quanto maior o número de faixas, maior o tempo computacional.

2.7 Exemplo de uma carteira de crédito com taxas de *defaults* variáveis

Para entendimento do algoritmo da seção anterior, usaremos o mesmo exemplo da seção 2.3 com a inclusão das volatilidades das taxas de *defaults*.

A carteira é composta de:

- i) 50 empréstimos com exposição de R\$200, probabilidade de *default* de 4% e volatilidade igual a 2%.
- ii) 100 empréstimos com exposição de R\$300, probabilidade de *default* de 1% e volatilidade igual a 0.5%.

Escolhendo $L=100$, temos que $v_1 = 2$, $v_2 = 3$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$, $\varepsilon_1 = 4$ e $\varepsilon_2 = 3$.

Substituindo os valores nas fórmulas das seções 2.5 e 2.6.2, e considerando um único setor k , obtemos $\mu_k = 3$, $\sigma_k = 1.5$, $\alpha_k = 4$, $\beta_k = 1.52/3 = 0.75$ e $p_k = 0.42857$. Neste exercício, considerando que:

$$\frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\left[a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \right]}{\left[b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 \right]} = \frac{\rho_k \alpha_k}{\mu_k} \frac{\left[\varepsilon_1^{(k)} z + \varepsilon_2^{(k)} z^2 \right]}{1 - \frac{\rho_k}{\mu_k} \left[\frac{\varepsilon_1^{(k)}}{v_1} z^2 + \frac{\varepsilon_2^{(k)}}{v_2} z^3 \right]}.$$

obtemos os coeficientes da Tabela 4. Logo,

$$\frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\left[2.286z + 1.714z^2 \right]}{\left[1 - 0.286z^2 - 0.143z^3 \right]}.$$

Lembrando que:

$$A_{n+1} = \frac{1}{b_0(n+1)} \left(\sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i} - \sum_{j=0}^{\min(s-1,n-1)} b_{j+1}(n-j) A_{n-j} \right),$$

e considerando os dados do exemplo, encontramos os valores da Tabela 5 e a distribuição de perdas na Figura 6. É importante observar que esta metodologia vale mesmo quando as taxas de *default* forem constantes, como no exemplo da seção 2.3.

2.8 Resumo da Metodologia de Cálculo

O objetivo do modelo *CreditRisk+* é calcular a distribuição de perdas da carteira de crédito. Para tanto, é realizada a divisão das empresas por faixas de acordo com sua exposição. Consideremos uma carteira com N devedores, cada qual caracterizado por:

- uma exposição;
- uma probabilidade de *default*;
- uma volatilidade da probabilidade de *default*;
- distribuição das empresas dentro de setores.

Define-se, então, uma unidade de exposição L . A exposição de cada devedor deve ser arredondada para um múltiplo inteiro de L , de modo a agrupá-los por faixas de exposição. Temos então:

- exposição comum de cada faixa, expressa em unidades de L ;
- perda esperada em cada faixa, expressa em unidades de L ;

- número esperado de eventos de *default* em cada faixa.

Para cada faixa de exposição, teremos n devedores. A distribuição de eventos de *default* desta faixa pode ser modelada por uma distribuição de Poisson com parâmetro λ . Ao incluirmos a volatilidade, esta distribuição segue uma Poisson condicional à λ , onde λ tem distribuição gama. A convolução das distribuições Poisson e gama faz com que os eventos de *default* sigam uma distribuição binomial negativa, sendo possível chegar a uma fórmula fechada para a ocorrência de um determinado número de eventos.

Posteriormente, veremos que através do método de simulação não precisaremos mais nos restringir a estas distribuições de probabilidade, podendo modelar os eventos de *default* e suas volatilidades com quaisquer distribuições de probabilidade.

De posse de uma fórmula fechada para estimar a probabilidade de ocorrência de um determinado número de eventos de *default*, podemos determinar a distribuição de perdas da carteira de empréstimos. A partir desta distribuição, podemos calcular o valor em risco da carteira da empresa detentora dos empréstimos, assim como o capital econômico necessário para que esta atenda a um determinado nível de solvência.

3 Método via Simulações de Monte Carlo

Considerando que certas hipóteses assumidas na formulação do modelo *CreditRisk+* não valem para o mercado brasileiro, desenvolvemos uma metodologia para cálculo da distribuição de perdas através de métodos de simulação.

3.1 Metodologia da Simulação

Neste modelo de risco de crédito, utilizaremos um gerador de números pseudo-aleatórios porque não encontramos evidência da superioridade das seqüências quase-aleatórias, dado o nível de confiança dos resultados. Simulamos os números seguindo quatro distribuições: normal, gama, Poisson e binomial.

Consideremos uma carteira com N devedores. Cada um deles pode ser representado por taxas μ_i de *default*, volatilidade σ_i da taxa de *default*, exposição e_i e influência θ_{ik} de cada setor k no devedor i .

A cada setor associamos ainda uma média $\mu_k = \sum_{i=1}^N \theta_{ik} \mu_i$ e uma volatilidade $\sigma_k = \sum_{i=1}^N \theta_{ik} \sigma_i$. Como explicado na seção 2.6, o modelo original supõe que a probabilidade de *default* é uma variável aleatória com distribuição gama: $x_k \sim \Gamma(\alpha_k, \beta_k)$, onde $\alpha_k = \mu_k^2 / \sigma_k^2$ e $\beta_k = \sigma_k^2 / \mu_k$. É fundamental ressaltar que, neste ponto da simulação,

temos a opção de escolher qualquer distribuição para a probabilidade de *default*, e não necessariamente uma distribuição gama.

Simulamos a distribuição para determinar um valor de x_k para cada setor e a seguir calculamos x_i para cada devedor: $x_i = \sum_{k=1}^K \left(\frac{x_k}{\mu_k} \right) \theta_{ik} \mu_i$.

A cada um deles (ou conjunto de devedores) associamos uma probabilidade de *default* calculada a partir das realizações de x_k . Simula-se a distribuição, binomial ou Poisson, para cada devedor (ou conjunto) e calcula-se a perda isoladamente e para toda a carteira.

A realização dessa variável é multiplicada pela exposição característica do devedor e pelo número deles. Obtém-se o histograma e calcula-se então quantidades demandadas: por exemplo, medidas de risco, perdas esperadas e inesperadas, capital econômico, etc.

3.2 Vantagens da Simulação de Monte Carlo

A seguir descreveremos as principais vantagens da utilização de simulações de Monte Carlo. Primeiro, não é necessário utilizar a aproximação da distribuição de Poisson. Considera-se a distribuição binomial por ser válida mesmo para taxas de *default* elevadas, como explicamos na seção 2.1. O mesmo observa-se na modelagem da distribuição da taxas, não sendo necessário utilizar a distribuição gama.

Segundo, não se utiliza a aproximação de agrupamento por faixas, que é necessária no cálculo do método analítico. Como vimos na seção 2.3, a escolha de L pode influenciar substancialmente os resultados obtidos para as medidas de risco.

Terceiro, o fato de não utilizar uma fórmula recursiva evita a propagação de erros numéricos. Este problema torna-se extremamente importante quando temos muitos devedores em uma mesma faixa. Todas as fórmulas desenvolvidas na seção 2, que servem de base para o modelo original, são recursivas, dependendo do cálculo do primeiro termo. O primeiro termo da fórmula A_0 , que é a probabilidade de perda de 0 unidades de L , pode ser escrito como $A_0 = \exp \left(\sum_{j=1}^m \varepsilon_j / v_j \right)$, onde v_j é a exposição do devedor da faixa j , ε_j é a perda esperada (ambos em múltiplos de L) e m é o número de faixas. A fórmula para o cálculo de A_n é recursiva, ou seja, A_1 é função de A_0 , A_2 é função de A_1 e assim sucessivamente. No caso de taxas fixas,⁴ o fator $\sum_{j=1}^m \varepsilon_j / v_j$ pode ser interpretado como o valor esperado de *defaults*.

Quarto, em determinadas condições, observa-se que a simulação de Monte Carlo consome menos recursos computacionais que o método analítico. Na maioria dos

⁴ O mesmo resultado é obtido considerando taxas variáveis.

casos, a diferença de consumo de memória entre os dois métodos é desprezível. Assim, o principal recurso computacional em questão na avaliação da distribuição de perdas de uma carteira de crédito é o tempo necessário para realizar esta estimativa.

Analisando-se o método analítico com setores, observamos que sua complexidade ciclomática⁵ é quadrática em relação ao produto do número de setores com o número de faixas desejadas no histograma que descreve a distribuição de perdas da carteira. Assim, para que o resultado da avaliação analítica seja preciso (valores pequenos para L e um grande número de faixas no histograma resultante), o tempo de processamento necessário é bastante elevado.

Defina NS como o número de setores, NF o número de faixas, $NSIM$ o número de simulações de Monte Carlo e NC o número de contratos na carteira. O método analítico exige tempo de processamento na ordem de $(NS \times NF)^2$.

Considerando as simulações de Monte Carlo, observamos que a complexidade ciclomática de uma iteração da simulação é linear em relação ao número de contratos de empréstimos na carteira. Entretanto, são necessários milhares de simulações para obtermos um histograma preciso. O método de simulações de Monte Carlo apresenta tempo de processamento da ordem de $NSIM \times NC$.

Assim, observamos que, à medida que aumentamos o número de faixas desejadas **e, principalmente, o número de setores do modelo**, o tempo de processamento necessário para realizar as simulações passa a ser inferior ao tempo necessário para a resolução do método analítico.

Quinto, não é necessário considerar que as taxas de recuperação são constantes, como no modelo original do CreditRisk+. As taxas de recuperação podem ter qualquer distribuição, sendo isto já possível no CreditMetrics, no modelo da McKinsey e do KMV. A novidade é sua utilização dentro do contexto do CreditRisk+.

As taxas de recuperação podem ser modeladas com uma correlação com as probabilidades de default. Como esta correlação geralmente é negativa, implica em caudas mais largas na distribuição de perdas, e portanto, aumenta o capital econômico requerido pela instituição.

Finalmente, é importante ressaltar que, sob todas as hipóteses iniciais do CreditRisk+, o resultado da simulação numérica converge para o resultado analítico.

Em resumo, a maior flexibilidade, simplicidade e precisão do método baseado em simulações de Monte Carlo o torna uma alternativa, no mínimo, interessante ao método analítico.

⁵ A complexidade ciclomática é uma medida de custo de execução de programas, baseada no número de iterações presentes nas repetições que perfazem seus algoritmos.

4 Exemplos

Nesta seção, apresentamos exemplos da utilização da simulação de Monte Carlo aplicada a carteiras de crédito hipotéticas, mas que procuram representar a realidade de muitas instituições financeiras de varejo e atacado no mercado brasileiro.

Destacamos ainda a convergência da nossa proposta de simulação para o modelo original do *CreditRisk+*, a dificuldade da utilização da distribuição de Poisson no Brasil, as consequências da introdução da volatilidade nas taxas de *default*, os problemas computacionais decorrentes da recursividade da fórmula do *CreditRisk+* e o efeito da escolha do tamanho da faixa (L).

4.1 Simulação versus *CreditRisk+*

Utilizamos uma carteira com 25 empresas,⁶ cada uma com uma exposição e um *rating*. A cada *rating* é associada uma probabilidade de *default* e sua volatilidade. Neste exemplo, mostramos que a simulação converge para o modelo original quando suas hipóteses são válidas: notadamente, as distribuições Poisson e gama e um número razoável de faixas. Como o objetivo é testar aderência da simulação, escolhemos um tamanho da faixa “ótimo” para que o método analítico apresente resultados corretos.

Na Figura 7, comparamos o método original do *CreditRisk+*, considerando uma distribuição Poisson para as perdas e sem a inclusão das volatilidades das taxas, com a simulação de Monte Carlo a partir de uma distribuição Poisson. A Figura 8 realiza uma comparação semelhante, mas considerando uma distribuição gama para modelar a volatilidade das taxas. Os resultados observados nas Figuras 7 e 8 permitem algumas observações.

Considerando-se todas as hipóteses iniciais do *CreditRisk+*, o resultado da simulação numérica converge para o obtido através do método analítico independentemente da inclusão ou não da volatilidade das taxas. Os resultados para o capital econômico são muito semelhantes conforme documentado na Tabela 6. Entretanto, percebemos um aumento de capital na ordem de 23,5% quando consideramos a volatilidade das taxas.

4.2 Comparação entre a utilização da distribuição de Poisson e gama

Com a finalidade de mostrar a diferença entre as hipóteses distribucionais, utilizamos uma carteira com 9 faixas de exposição e dois *ratings*. A Figura 9 mostra a distribuição de perdas desta carteira.

O gráfico da Figura 9 e a Tabela 7 permitem algumas observações. Primeiro, o decréscimo de 20% do capital econômico indica que a aproximação baseada na distribuição de Poisson é conservadora, superestimando o risco. Segundo, a distribuição de perdas apresenta resultados diferentes. Basta observar que a

⁶ Este exemplo baseia-se no documento técnico do *CreditRisk+* (Credit Suisse First Boston, 1997).

probabilidade de nenhuma perda utilizando Poisson é 12.1%, enquanto que o valor exato dado pela distribuição binomial é 8%. Outra diferença significativa ocorre na perda de R\$1600, cujas probabilidades aproximada e exata são 2.5% e 4.3%, respectivamente. Terceiro, a cauda da distribuição de perdas aproximada pela Poisson é mais pesada que a cauda real advinda da binomial. Portanto, o resultado da Tabela 7 vale aparentemente para outros níveis de confiança do capital econômico.

4.3 Problemas Computacionais em Carteira de Varejo

Vamos considerar um exemplo onde existam 33.000 devedores, cinco *ratings* e cinco exposições diferentes. A exposição total desta carteira é R\$28.000.000, com perda esperada de R\$5.330.000. Podemos observar na Tabela 8 e nas Figuras 10 e 11 que, para esta carteira, não é possível utilizar o método analítico devido ao erro computacional no cálculo do primeiro termo. É importante ressaltar que o método via simulações não apresenta problemas deste tipo.

Para entendermos o problema, basta observar que A_0 é igual a $\exp(-5.000)$, que a maioria dos computadores entende como **zero** por questões de arredondamento numérico. Como o cálculo é recursivo, teríamos $A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$, impedindo o cálculo da distribuição de perdas da carteira. Ademais, a inclusão da volatilidade das taxas gera um capital econômico aproximadamente 17 vezes maior.

4.4 Efeito da escolha do tamanho da faixa

No exemplo das Figuras 12 e 13, mostramos como a escolha do parâmetro L , no contexto do algoritmo numérico do *CreditRisk+*, pode influenciar muito a distribuição de perdas da carteira. O exercício realizado consiste em percorrer diversos valores para o parâmetro L , com o objetivo de explicitar o problema discutido na seção 2.3.

Os resultados obtidos neste exemplo levam as seguintes considerações. Quanto ao método analítico, se escolhermos o tamanho da faixa L igual a 4.000 temos uma distribuição de perdas bastante diferente da realidade, conforme a Figura 12. Observa-se a convergência do método analítico para o resultado obtido por simulação quando o tamanho faixa varia de R\$4.000 a R\$400. Com $L = 4.000$, o capital econômico alocado é de R\$247.000 e R\$156.000 dependendo da inclusão ou não da volatilidade. Os valores corretos são, entretanto, R\$32.200 e R\$11.800, respectivamente. Os resultados são muito superiores quando $L = 400$. Na simulação, a distribuição de perdas não é alterada em função do tamanho da faixa conforme ilustrado na Figuras 12 e 13.

5 Conclusão

Neste trabalho, propomos a utilização de simulações de Monte Carlo para a análise de uma carteira de crédito baseada na metodologia *CreditRisk+*. Tal procedimento possui inúmeras vantagens. Em primeiro lugar, não é necessário utilizar a aproximação da distribuição de Poisson. Considera-se, então, uma distribuição binomial por ser válida mesmo com taxas de *default* elevadas, como no caso brasileiro. Segundo, mostramos como a escolha do parâmetro L , no contexto do algoritmo numérico do *CreditRisk+*, pode influenciar a distribuição de perdas da carteira, o que não ocorre na simulação (não se utiliza a aproximação de agrupamento por faixas). Terceiro, o erro numérico, resultado da recursividade da fórmula do *CreditRisk+*, não é propagado. Este problema torna-se importante quando temos muitos devedores numa mesma faixa.

Observamos ainda que, à medida que aumentamos o número de faixas desejadas e, principalmente, o número de setores do modelo, o tempo de processamento necessário para realizar as simulações passa a ser inferior ao tempo necessário para a resolução do método analítico. Ademais, mostramos como os resultados obtidos através do algoritmo proposto de simulação de Monte Carlo podem diferir dos resultados do modelo *CreditRisk+*.

Outra vantagem é que as taxas de recuperação podem ser modeladas com uma correlação (geralmente negativa) com as probabilidades de *default*, o que implica em caudas mais largas na distribuição de perdas e aumento no capital econômico estimado para a instituição. Esta característica só é possível de ser implementada no contexto do *CreditRisk+* através de simulações.

Finalmente, destacamos a convergência da nossa proposta de simulação para o modelo original do *CreditRisk+* e as consequências da introdução da volatilidade nas taxas de *default*.

O ponto central deste trabalho é realçar a importância da utilização de metodologias alternativas de mensuração de risco de crédito que incorporem as particularidades do mercado brasileiro. A principal proposta de extensão a este trabalho é modelar precisamente os dados de entrada do modelo, principalmente as taxas de recuperação, as probabilidades de *default*, a distribuição destas probabilidades com seus parâmetros e a alocação das empresas nos setores. Por exemplo, no mercado brasileiro, as taxas de recuperação apresentam um comportamento estocástico e verifica-se que sua correlação é negativa com as taxas de *default*, o que intuitivamente torna a distribuição de perdas mais pesada nas caudas. O método proposto neste trabalho para inferir o risco de uma carteira de crédito via simulações de Monte Carlo surge como uma ferramenta poderosa para este tipo de análise.

Referências Bibliográficas

- Credit Suisse First Boston. “*CreditRisk+* – A Credit Risk Management Framework”. 1997.
- Jorion, P., “Value at Risk”. McGrawHill, New York, 1997.
- J. P. Morgan. “*CreditMetrics* Technical Document”. 1997.
- J. P. Morgan. “*RiskMetrics* Technical Document”. 1995.
- Hull, J. C., “Options, Futures and Other Derivatives”. Prentice Hall, 1997.
- Koyluoglu, H.U e Hickman, A., “A Generalized Framework for Credit Risk Portfolio Models”, 1999.
- McKinsey, “Measuring Credit Portfolio Risk: Incorporating Macroeconomic Migration Analysis”. Technical Report. 1997.
- Prado, R. G. A., Bastos, N. T. e Duarte, A. M. Jr., “Gerenciamento de Riscos de Crédito em Bancos de Varejo no Brasil”. Tecnologia de Crédito Serasa, 2000.
- Rocha, F. e Bender S., “Present Value Test of the Brazilian Current Account”, *Economia Aplicada* 4, número 2, 2000, páginas 203-222.
- Saunders, A., “Medindo o Risco de Crédito”, QualityMark, 1999.
- Vasicek, O., “Probability of Loss on Loan Portfolio”, KMV Corporation, 1987.

Tabela 1 - Distribuição de perdas

n	0	1	2	3	4	5
Perda R\$ (nL)	0	100	200	300	400	500
Probabilidade da perda de nL	4.98%	0.00%	9.96%	4.98%	9.96%	9.96%

Tabela 2 – Efeito de L sobre o capital econômico (5%)

Tamanho da faixa	Capital Econômico (R\$)
L=100	602
L=200	863
L=300	1052

Tabela 3 - Exemplo de distribuição de empresas em setores

	Desmembramento em Setores		
	Setor 1	Setor 2	Setor 3
Empresa(s) A	100%	0%	0%
Empresa(s) B	50%	25%	25%
Empresa(s) C	30%	40%	30%
Empresa(s) D	0%	0%	100%

Tabela 4- Distribuição de perdas com taxas de *defaults* variáveis

a0	a1	a2	b0	b1	b2	b3
0.000	2.286	1.714	1.000	0.000	-0.286	-0.143

Tabela 5- Distribuição de perdas com taxas de *defaults* variáveis

n	0	1	2	3	4	5
Perda R\$ (nL)	0	100	200	300	400	500
Probabilidade de perda de	10.66%	0.00%	12.19%	6.09%	8.70%	8.70%

Tabela 6 – Capital econômico (5%) para o método analítico e o método via simulação.

Sem volatilidade nas taxas		Com volatilidade nas taxas	
Método	Capital Econômico (R\$)	Método	Capital Econômico (R\$)
Analítico	19503	Analítico	24100
Simulação	19430	Simulação	24135

Tabela 7 - Capital econômico (5%) utilizando a distribuição de Poisson e binomial

Distribuição	Capital Econômico (R\$)
Poisson	5864
Binomial	4720

Tabela 8 – Capital econômico (5%) para o método analítico e o método via simulação.

Sem volatilidade nas taxas		Com volatilidade nas taxas	
Método	Capital Econômico (R\$)	Método	Capital Econômico (R\$)
Analítico	-----	Analítico	-----
Simulação	207	Simulação	3941

Figura 1 - Distribuição de perdas

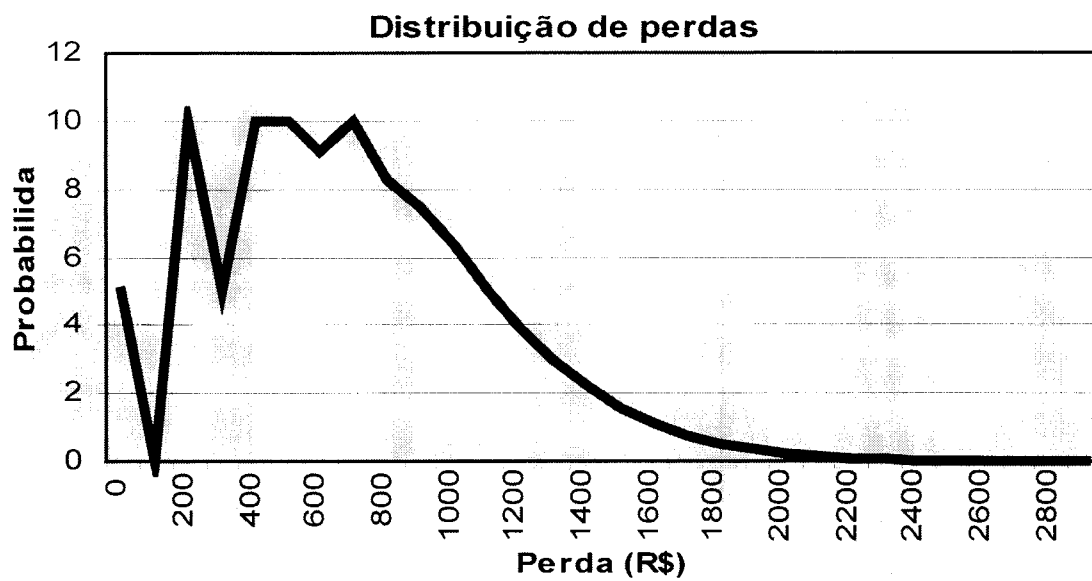


Figura 2 - Distribuição de perdas considerando a distribuição binomial e Poisson

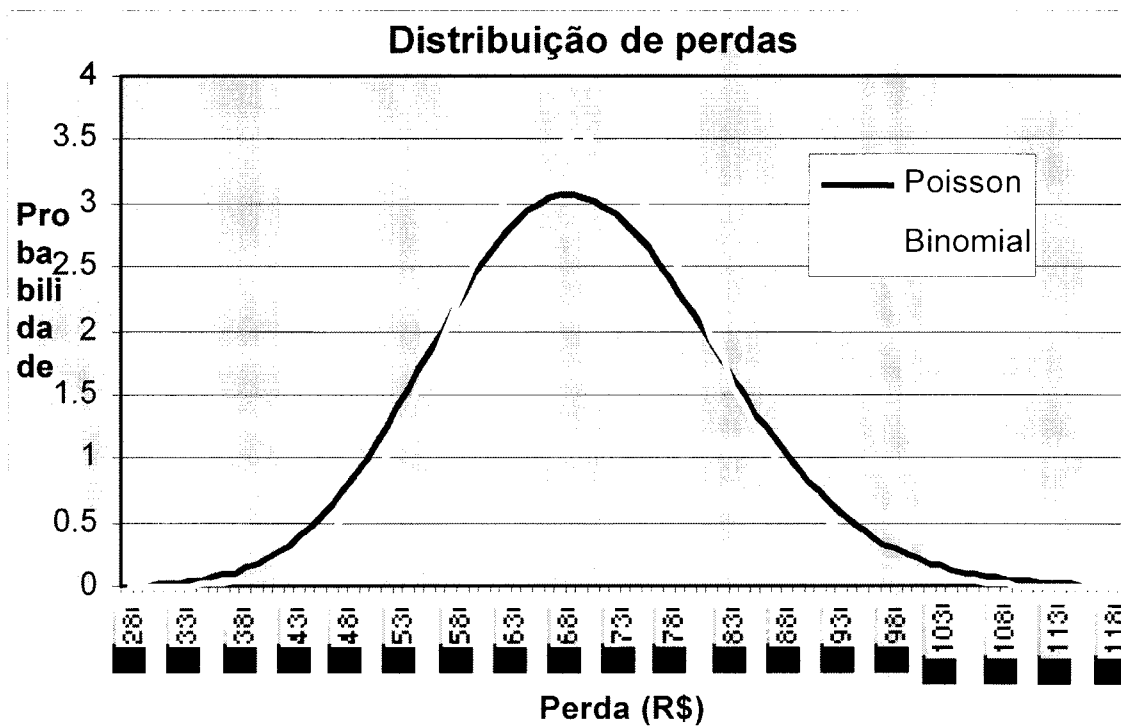


Figura 3 - Distribuição de perdas considerando diferentes tamanhos de faixa

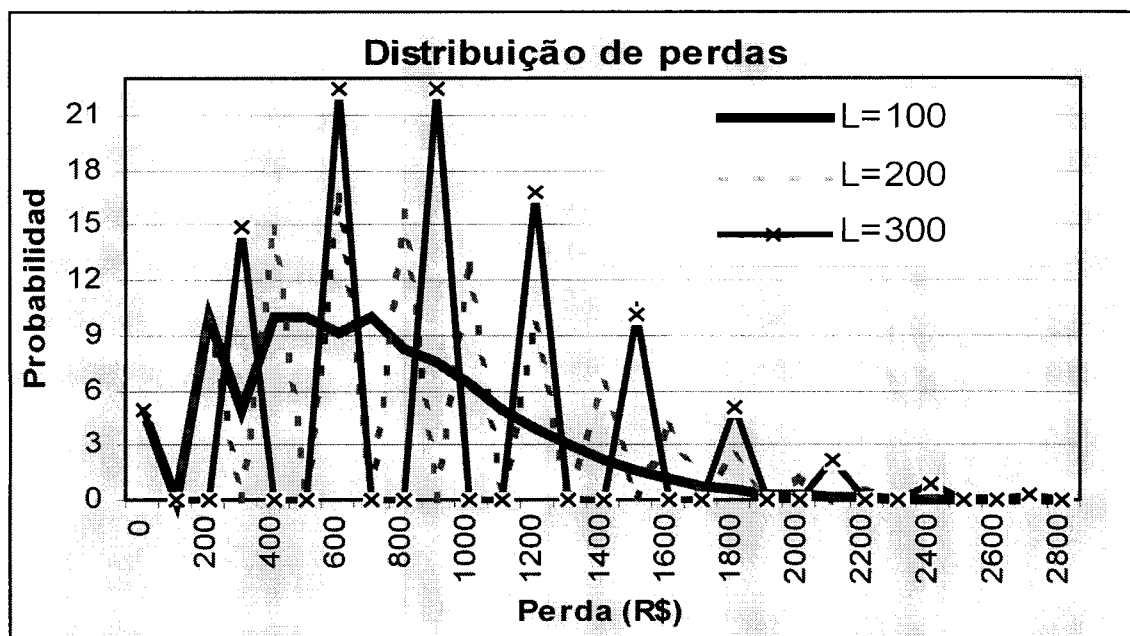


Figura 4 - Distribuição de perdas com e sem volatilidade

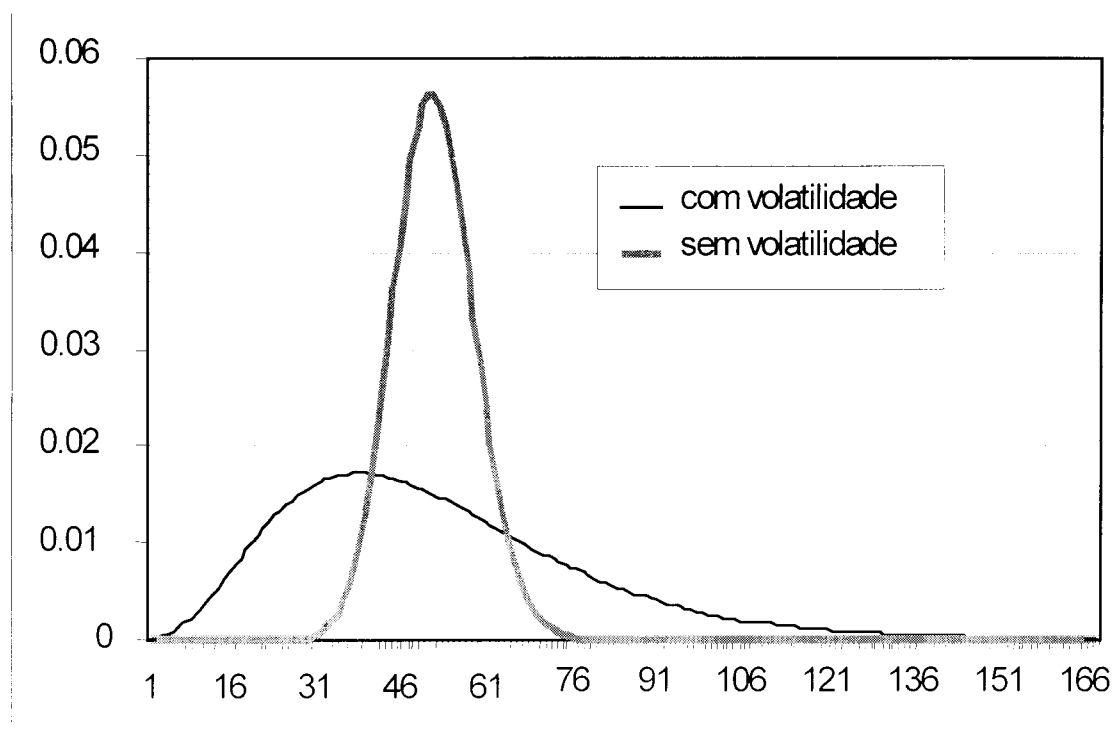


Figura 5 - Distribuição de perdas da carteira com diversos setores

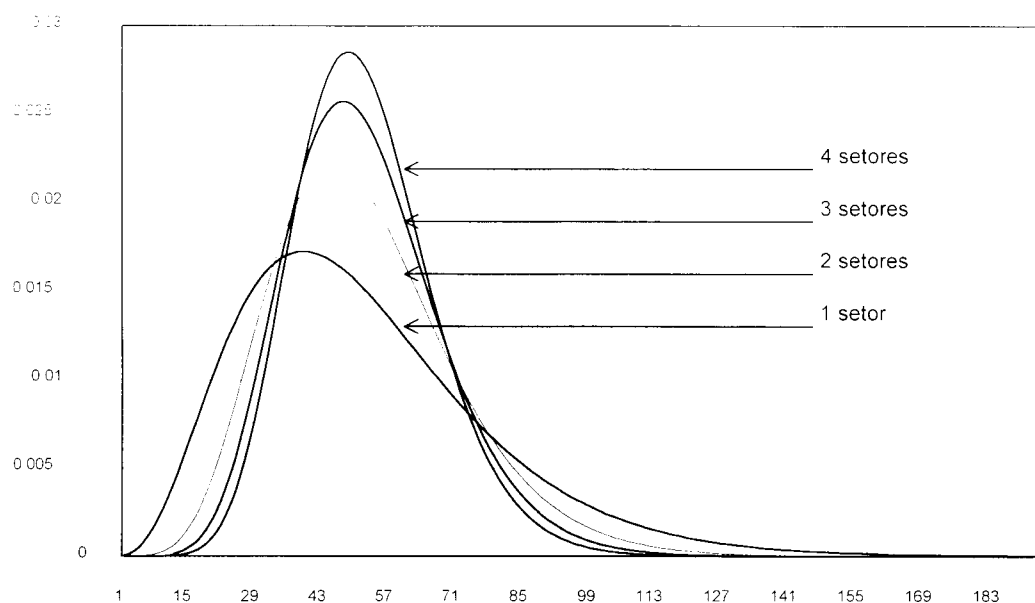


Figura 6 - Distribuição de perdas com e sem volatilidade

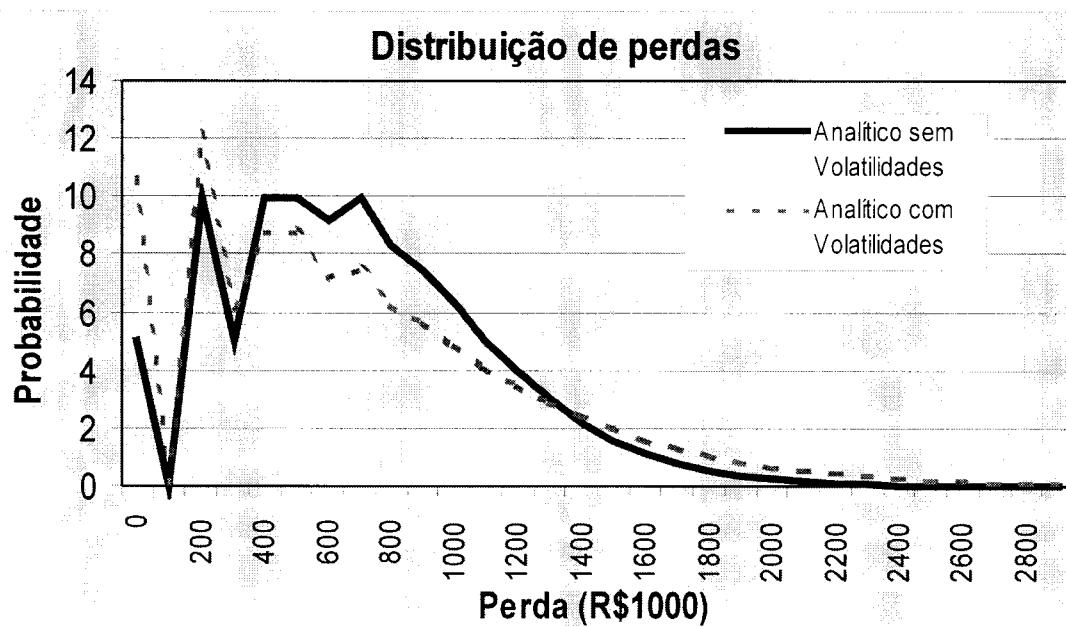


Figura 7 - Analítico x Simulação sem volatilidade nas taxas

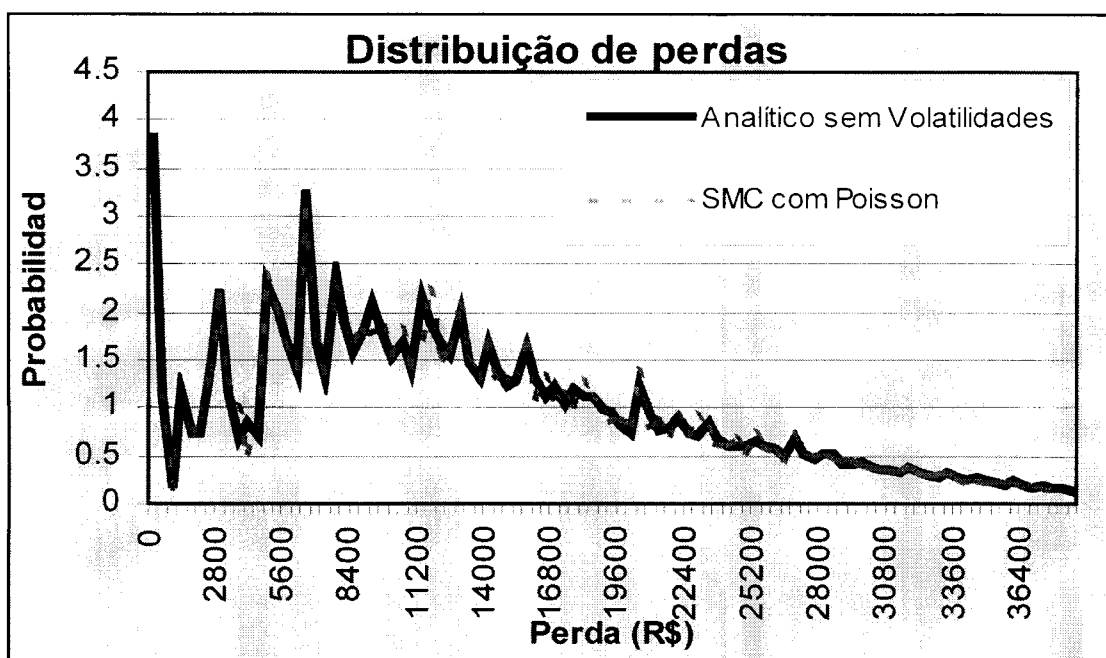


Figura 8 - Analítico x Simulação com volatilidade nas taxas

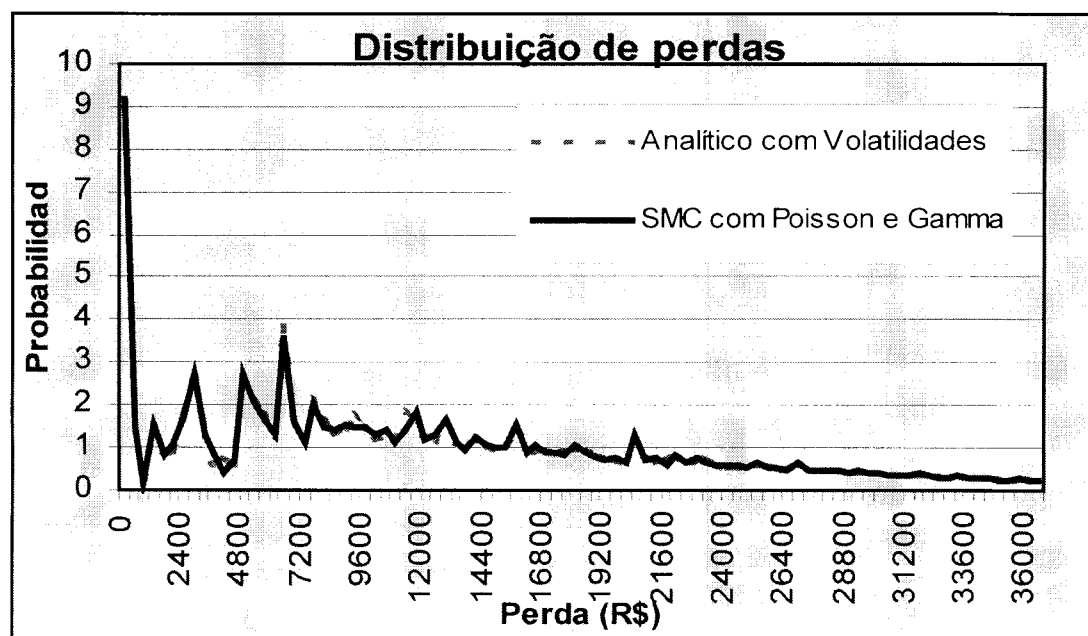


Figura 9 – Comparação da distribuição de perdas utilizando Poisson e binomial

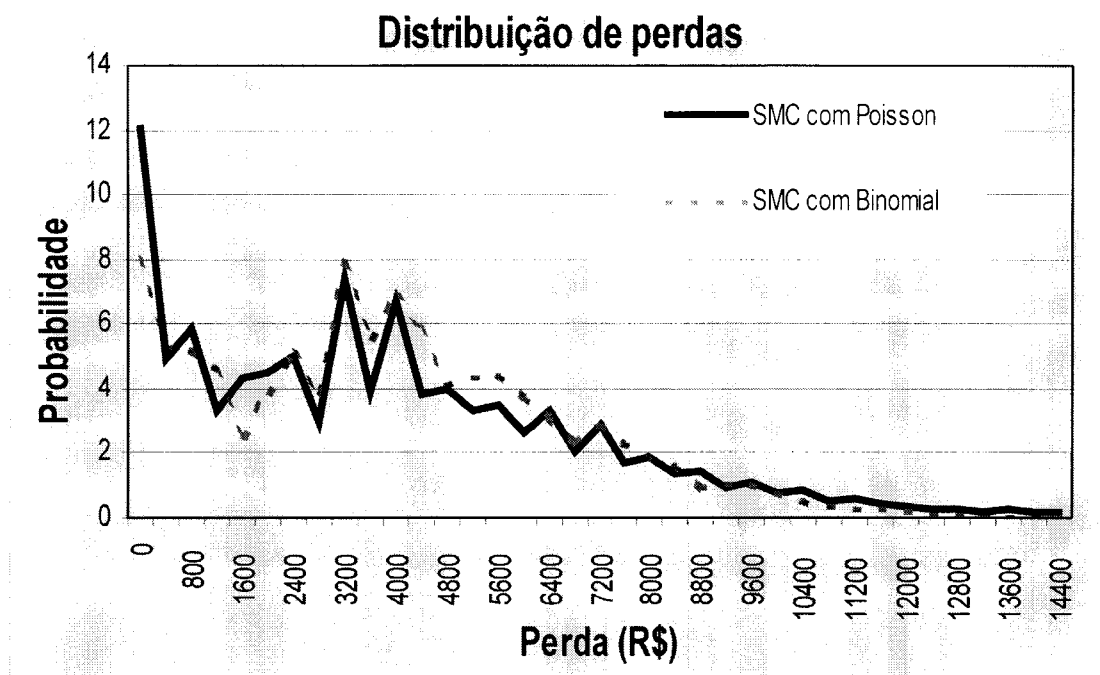


Figura 10 - Analítico x Simulação sem volatilidade nas taxas

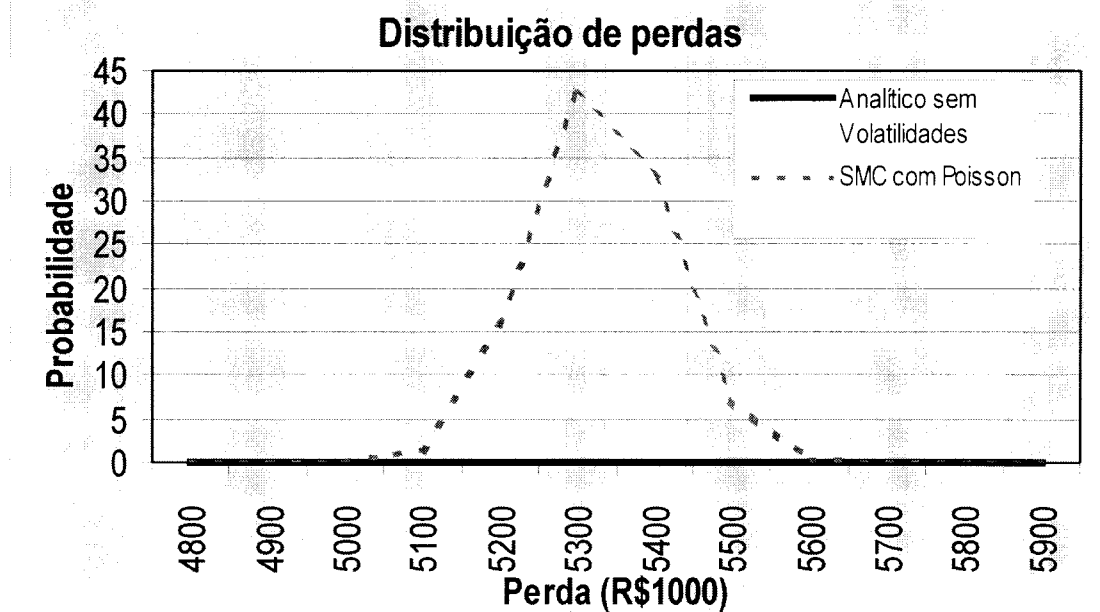


Figura 11 - Analítico x Simulação com volatilidade nas taxas

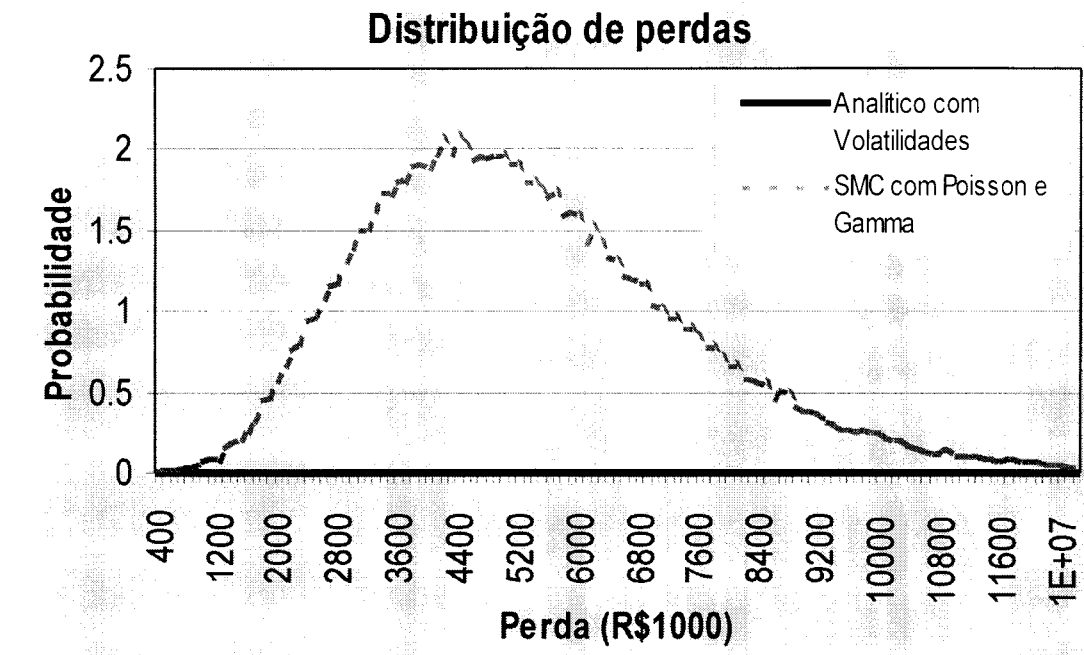
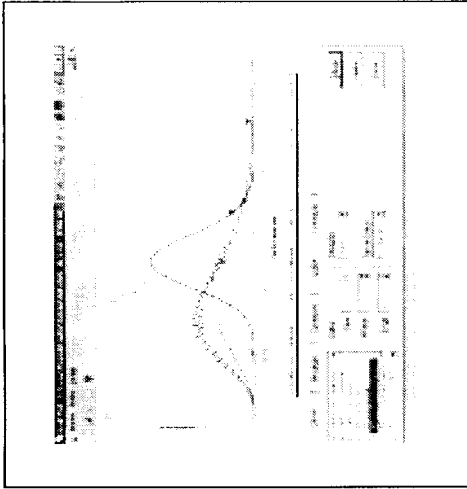
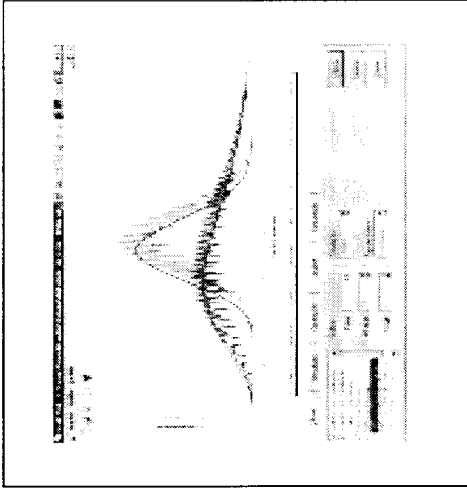


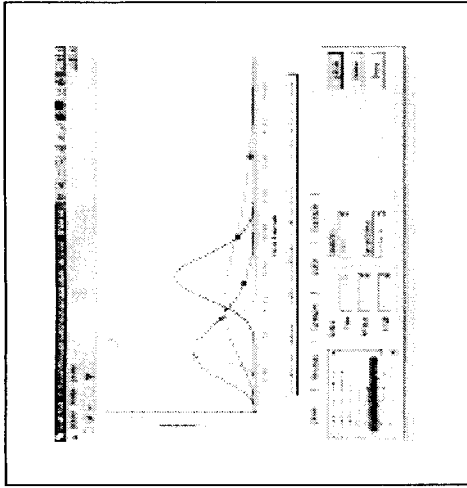
Figura 12 – Convergência da distribuição de perdas do método analítico para a simulação com a mudança no L .



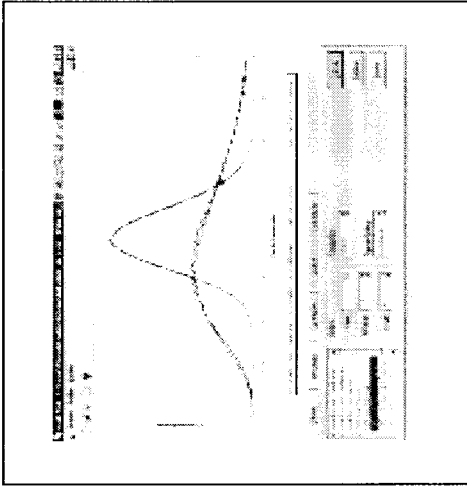
3



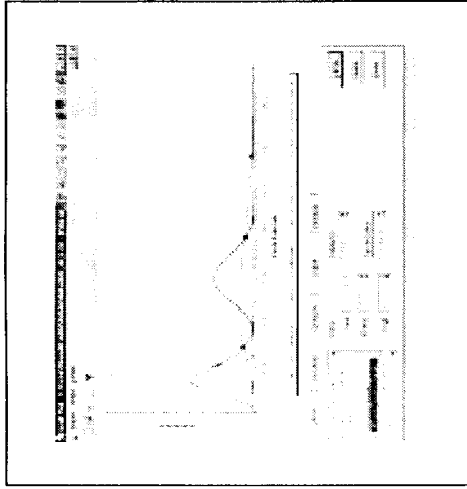
6



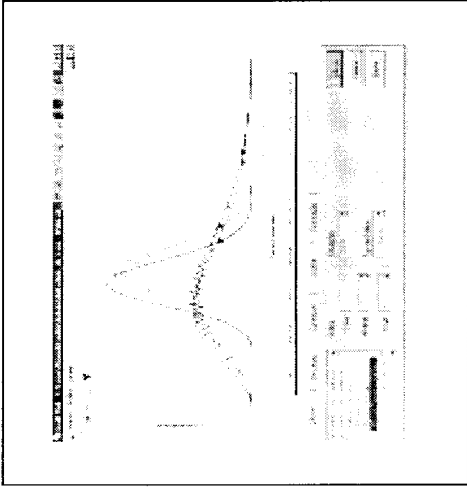
2



5

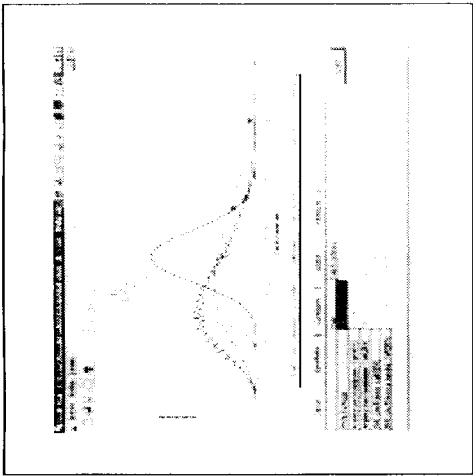


1

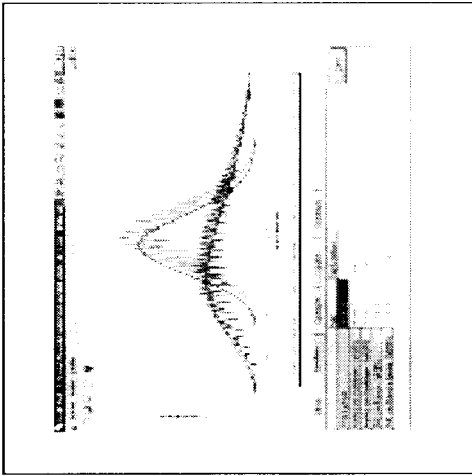


4

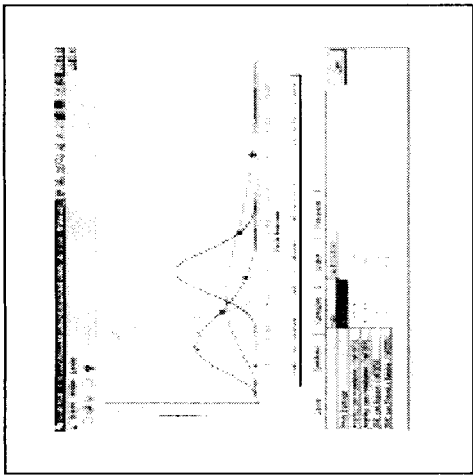
Figura 13 – Convergência do capital econômico do método analítico para a simulação com a mudança no L .



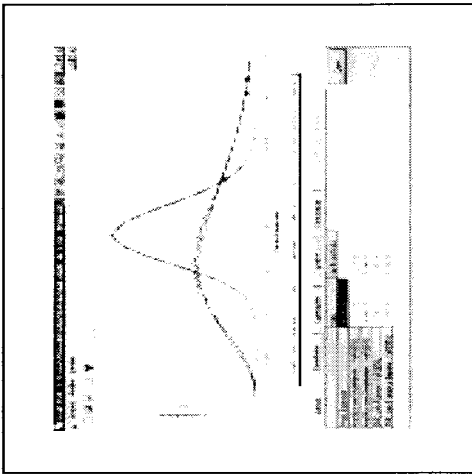
9



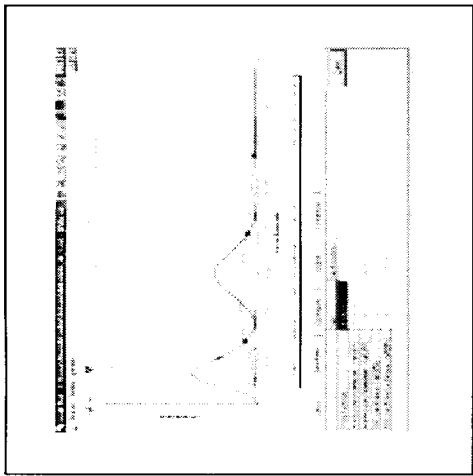
12



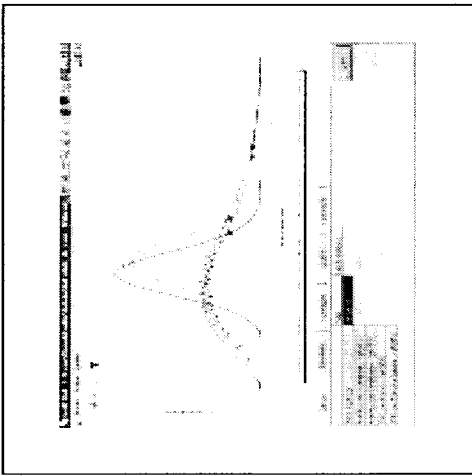
8



11



7



10

Apêndice 1 – Principais Conceitos de Risco de Crédito

Neste apêndice, discutiremos os principais conceitos utilizados no gerenciamento de risco de uma carteira de crédito. Um resultado importante destes modelos consiste na estimação da distribuição de perdas da carteira, de maneira semelhante ao cálculo de VaR (*Value at Risk*) em modelos de risco de mercado. Esta estimação pode ser utilizada para efeito de cálculo de capital regulatório e/ou econômico ou, alternativamente, como medida do risco de concentração da carteira.

As principais definições utilizadas em risco de uma carteira de crédito são listadas a seguir.

Perda esperada: Montante esperado de perda na operação de crédito. Pode ser considerado o custo da concessão do crédito. Para o seu cálculo, multiplicamos a exposição (líquida da taxa de devolução) do empréstimo pela probabilidade de inadimplência deste devedor.

Perda não esperada: São perdas associadas à incerteza da concessão de crédito. São as perdas maiores do que as esperadas e advindas da variação da taxa de inadimplência ao longo do tempo. Seu cálculo exige hipóteses sobre o comportamento desta taxa assim como sua distribuição de probabilidade. Ao longo deste trabalho, discutiremos em detalhes o seu cálculo.

Capital econômico: Valor estimado (capital do acionista) para cobrir qualquer perda entre a esperada e o percentual desejado para a taxa de insolvência.

