

Fundação Getulio Vargas
Escola de Pós-Graduação em Economia
Mestrado em Finanças e Economia Empresarial

EXPOSIÇÃO CAMBIAL COMO PROTEÇÃO PARA
INVESTIDORES DE LONGO PRAZO NA ECONOMIA
BRASILEIRA: UMA APLICAÇÃO DA TEORIA DE ESCOLHA
ESTRATÉGICA DE PORTFÓLIO

Carlos Eduardo Meyer dos Santos

Rio de Janeiro
Maio de 2007

**EXPOSIÇÃO CAMBIAL COMO PROTEÇÃO PARA
INVESTIDORES DE LONGO PRAZO NA ECONOMIA
BRASILEIRA: UMA APLICAÇÃO DA TEORIA DE ESCOLHA
ESTRATÉGICA DE PORTFÓLIO**

CARLOS EDUARDO MEYER DOS SANTOS

Dissertação apresentada ao Mestrado em
Finanças e Economia Empresarial como
requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Finanças e Economia Empresarial.

ORIENTADOR: PROFº. MARCOS SILVEIRA

RIO DE JANEIRO

MAIO DE 2007

RESUMO

O viés de investimento em ativos doméstico é um fenômeno intrigante e ocorre tanto com ações, quanto com títulos de renda fixa. O pensamento convencional sugere que investidores conservadores devem evitar exposição a moedas estrangeiras, mantendo em suas carteiras de investimento apenas títulos de curto prazo extremamente líquidos e com o menor risco possível, como depósitos em moedas domésticas.

Todavia, títulos de curto prazo são arriscados para o indivíduo que deseja investir para o longo prazo, pois ele será obrigado a rolar os títulos a taxas de juros incertas. Esse risco pode ser hedgeado através da exposição a moedas estrangeiras. Isso porque, de acordo com a paridade descoberta de juros, uma depreciação das oportunidades de investimento é compensada por uma desvalorização da moeda nacional com relação às moedas estrangeiras.

Esse trabalho busca verificar como o aumento de aversão ao risco afeta a alocação de longo prazo de um investidor brasileiro que pode investir em depósitos na moeda brasileira e em moedas estrangeiras.

1	INTRODUÇÃO	01
2	OBSERVAÇÕES SOBRE O MERCADO DE DEPÓSITOS DE CURTO PRAZO NO BRASIL.....	05
3	O MODELO	06
	3.1 Restrição orçamentária.....	06
	3.2 Dinâmica das variáveis de estado	07
	3.3 O problema do investidor.....	08
	3.4 Metodologia da solução.....	10
	3.4.1 Uma abordagem aproximada	10
	3.4.2 Resolvendo o modelo aproximado e encontrando a escolha ótima de portfólio.....	12
4	UMA APLICAÇÃO EMPÍRICA: TÍTULOS DE CURTO PRAZO DOMÉSTICOS E TÍTULOS DE CURTO PRAZO ESTRANGEIROS.....	16
	4.1 Descrição dos dados	16
	4.2 Estatísticas dos dados	17
	4.3 Especificação do VAR	19
	4.4 Estimação do VAR	20
	4.4.1 Análise 1: Brasil x EUA	21
	4.4.2 Análise 2: Brasil x Inglaterra	22
	4.4.3 Análise 3: Brasil x Japão	24
5	ALOCAÇÃO ESTRATÉGICA ENTRE TÍTULOS DE CURTO PRAZO (TCP) DOMÉSTICOS E TÍTULOS DE CURTO PRAZO ESTRANGEIROS PARA INVESTIDORES DE LONGO PRAZO BRASILEIROS	25
	5.1 Análise 1: Brasil x EUA (País doméstico - Brasil).....	25
	5.2 Análise 2: Brasil x EUA (País doméstico - EUA).....	28
	5.3 Análise 3: Brasil x Japão.....	29

5.4 <i>Análise 4: Brasil x Inglaterra</i>	31
6 CONCLUSÃO	33
7 REFERÊNCIAS	35
8 APÊNDICE A: Demonstração dos Resultados (29), (30) e (31).....	37

1 Introdução

Um fato intrigante em Finanças diz respeito ao viés em investimentos domésticos. Investidores de um país costumam concentrar seus investimentos em ativos domésticos, alocando apenas uma pequena parcela ou nada em ativos estrangeiros. O viés doméstico encontra-se presente em diferentes classes de ativos e sua explicação pode diferir entre as classes. Neste sentido, Campbell, Viceira e White (daqui por diante CVW, 2002) fazem uma distinção entre o viés doméstico observado na aplicação em ações e o o viés doméstico observado na aplicação em títulos de renda fixa de curto prazo (comumente denominados na literatura como depósitos em moeda). Uma carteira diversificada internacionalmente em ações pode conter apenas moeda doméstica e mesmo ficar vendida em moeda estrangeira para efeito de hedge. Ao contrário, uma carteira concentrada em ações domésticas pode manter uma posição comprada em moeda estrangeira.

Segundo CVW, a teoria não oferece razão clara para o viés doméstico em ações. Isso porque os mercados de ações de diferentes países não são perfeitamente correlacionados entre si e, assim, é possível reduzir o risco sem perda de retorno esperado, através da formação de um portfólio de ações diversificado internacionalmente. No caso do viés doméstico em moeda, a teoria oferece respostas ambíguas. Por um lado, o viés não se justifica diante da validade da hipótese de paridade coberta de juros. Isto porque choques positivos nos preços domésticos são acompanhados por depreciações nominais da moeda doméstica, preservando assim o valor real dos depósitos em moeda estrangeira, enquanto os depósitos em moeda doméstica têm seu valor reduzido. Isto explicaria a demanda por dólar como reserva de valor em economias emergentes inflacionadas. Por outro lado, o viés poderia ser teoricamente justificado a partir da violação da hipótese da paridade do poder de compra. Isto porque choques na taxa de câmbio real poderiam tornar os depósitos em moeda estrangeira relativamente mais arriscados frente aos depósitos em moeda doméstica. Nas economias desenvolvidas, por exemplo, as taxas de câmbio nominal e real costumam se movimentar paralelamente. O pensamento convencional atribui a aversão a exposição cambial à sua alta volatilidade. Assim, investidores conservadores tendem a evitar exposição a tal fator de risco. Ativos com exposição cambial são tratados como ativos especulativos e costumam ser utilizados apenas por razões táticas para aumentar o retorno dos portfólios de investidores como *hedge funds* que buscam explorar desvios de curto prazo da paridade descoberta da taxa de juros. Dessa forma, investidores conservadores, como fundos de pensão, herdeiros de fortunas e entidades previdenciárias, tendem a direcionar seus recursos para títulos da dívida pública federal do seu país.

CVW apresentam uma segunda razão para a racionalidade da diversificação internacional de uma carteira de moedas, a qual diz respeito à distinção entre risco de

curto e risco de longo prazo. A idéia-chave do argumento é que, numa economia com inflação anual baixa, depósitos domésticos (aplicações em títulos domésticos de curto prazo) podem ser livres de risco para investidores de curto prazo, mas podem ser bastante arriscados para investidores de longo prazo. Isto porque a taxa de juros de curto prazo varia ao longo do tempo e, no futuro, esses investidores serão obrigados a rolar seus investimentos a taxas de juros incertas.

Diante do risco de longo prazo dos depósitos em moeda doméstica, investidores conservadores com horizonte de longo prazo estariam interessados em manter posições significativas em ativos arriscados no curto prazo, embora menos arriscados no longo prazo que os depósitos em moeda doméstica. Uma primeira alternativa seria a utilização de títulos de longo prazo. Esses títulos protegem o investidor contra flutuações nas taxas de juros real de curto prazo. Isto porque o investidor estará realizando um investimento de longo prazo com taxa de retorno nominal conhecida *ex-ante*. Entretanto, o investidor estará suportando risco inflacionário. Choques nos níveis de preço afetarão o retorno real desse título o que o torna arriscado nesse aspecto.

Outra alternativa são os títulos indexados a inflação. Esses ativos protegem a taxa de retorno real do investidor e, desse modo, são investimentos livre de risco no longo prazo. No curto prazo, quando a taxa de juros real cai, esses títulos se valorizam, oferecendo um aumento da riqueza do investidor, para compensar a deteriorização das oportunidades de investimento. Atualmente, o governo federal tem emitido papéis indexados a inflação, como NTNBS (Notas do Tesouro Nacional série B - títulos indexados ao IPCA) e NTNCs (Notas do Tesouro Nacional série C - títulos indexados ao IGPM), entretanto, são ativos ainda com baixo volume de negociação diária, expondo o investidor a outro tipo de risco, o risco de liquidez.

Uma terceira alternativa são os depósitos em moeda estrangeira. Um investidor avalia o retorno de qualquer ativo em termos de poder de compra na moeda de seu país. Assim, a teoria da paridade descoberta dos juros estabelece que, do ponto de vista do investidor de cada país, a taxa de juros real esperada implícita no investimento em títulos de curto prazo domésticos (depósitos em moeda doméstica) é igual a dos títulos de curto prazo externos (depósito em moeda estrangeira). Sendo assim, supondo constante a taxa de juros nominal extena e a taxa de inflação externa, uma trajetória de queda da taxa de juros real doméstica é acompanhada por uma trajetória de depreciação real da moeda doméstica. Dessa forma, um investidor doméstico que possui depósitos *off shore* é compensado por um aumento na sua riqueza quando ocorre uma queda na taxa de juros doméstica. É claro que no curto prazo movimentos na taxa de câmbio real podem ser causados por violações da paridade descoberta dos juros, induzindo risco de curto prazo nos depósitos em moeda estrangeira. No entanto, para o investidor de longo prazo, o risco destes depósitos depende da validade

da paridade descoberta no longo prazo.

CVW procuram demonstrar seu ponto de vista através da análise de um agente conservador que busca realizar um investimento de longo prazo em uma carteira formada por depósitos domésticos e depósitos *off shore*. A experiência é realizada para três pares de países: Estados Unidos da América (EUA) com Reino Unido, EUA com Japão e EUA com Alemanha. É observado um par de países por vez e o universo de investimento é restringido a títulos de curto prazo do par de países em análise. Como resultado do experimento o investidor obtém a alocação estratégica entre títulos domésticos e títulos estrangeiros. Os cálculos são realizados utilizando os EUA como país doméstico e os outros países como estrangeiros. Em seguida, a análise é repetida utilizando os outros países como domésticos e os EUA como estrangeiro. A dinâmica da alocação é observada aumentando o coeficiente de aversão ao risco dos investidores e verificando como a demanda por títulos estrangeiros se comporta.

Para obter a composição do portfólio ótimo de longo prazo, para diferentes níveis de aversão ao risco, CVW utilizaram o modelo proposto por Campbell, Chan e Viceira (daqui por diante CCV, 2002). Até este modelo, pouco havia sido produzido pela academia para avaliar quantitativamente a composição ótima da carteira de investidores de longo prazo. O modelo proposto por Markowitz (1952) provê paradigmas básicos enfatizando o efeito da diversificação para redução do risco, porém ignora vários fatores importantes. O fator mais importante é sua análise é estática, ou seja, Markowitz assume que os investidores se preocupam com o risco sobre as suas carteiras de investimento apenas um período a frente. Entretanto, muitos investidores, como fundos de pensão, entidades de previdência privada e fundações, entre outros, buscam financiar um fluxo de consumo ao longo do tempo.

Desde o trabalho realizado por Samuelson (1969) e Merton (1969, 1971, 1973), teóricos em Finanças começaram a entender que a solução para o problema multiperíodo da escolha do portfólio pode ser muito diferente da solução do problema estático. Em particular, se as oportunidades de investimento variam ao longo do tempo, então investidores de longo prazo buscarão se proteger contra esses choques, demandando ativos financeiros que funcionem como *hedge* intertemporal. Apesar de preencher a lacuna deixada pelo trabalho de Markowitz, o modelo intertemporal de Merton só possui forma fechada para alguns casos especiais. Dessa forma, esse modelo possuía aplicabilidade limitada. Recentemente, essa situação começou a mudar com o aumento da capacidade computacional e avanços nos métodos numéricos. Além disso, foram descobertos novas soluções em forma fechada para o modelo de Merton.

CCV desenvolveram um método de solução aproximada para o problema da es-

colha do consumo e do portfolio ótimo de um investidor de longo prazo¹ com utilidade do tipo Epstein-Zin. Esse investidor se defronta com um conjunto de ativos, cujos retornos são descritos por um vetor de autoregressão nos retornos e em outras variáveis explicativas. A medida que a aversão ao risco do agente aumenta, o peso dado para análise média-variância é cada vez menor e aumenta o peso dado a capacidade do ativo de funcionar como *hedge* intertemporal para a riqueza do agente. Observando os dados americanos, britânicos, alemães e japoneses desde 1973, CVW encontraram uma demanda por *hedge* intertemporal em depósitos estrangeiros surpreendentemente elevada. Os resultados indicaram que os títulos mais atraentes para investidores estrangeiros foram aqueles de países com taxas de juros estáveis e com baixa correlação com a taxa de câmbio entre os países. Assim, espera-se que títulos de países com economias maiores possuam essas características. De fato, CVW encontraram em seus resultados que títulos americanos e títulos alemães são os mais atraentes para investidores estrangeiros.

Nesse trabalho, buscamos replicar o experimento realizado por CVW utilizando o Brasil com uma das partes de cada par de países, buscando investigar a importância empírica de investimentos em depósitos estrangeiros como proteção contra o risco de flutuação da taxa de juros real doméstica para investidores de longo prazo. Argumentamos que manter ativos denominados em moeda estrangeira não é necessariamente uma estratégia exclusivamente especulativa. Ela possui uma importância significativa para o portfolio de investidores conservadores de longo prazo. Com isso em mente, buscamos contribuir com o argumento de que o viés em investimentos domésticos não é ótimo para investimentos de longo prazo, no caso de portfólios formados por títulos de renda fixa. Para manter o foco nessa discussão, assumiremos que os únicos ativos disponíveis são títulos de curto prazo emitidos pelo governo federal brasileiro e títulos de curto prazo estrangeiros, e utilizaremos a teoria da escolha do portfolio de longo prazo de CCV para calcular a alocação ótima e realizar as análises.

O trabalho é organizado da seguinte forma. Na seção 2, apresentamos o modelo de CCV, que será utilizado para as análises ao longo do exercício. São apresentados o problema formal do investidor e a metodologia utilizada para solucioná-lo. Na seção 3, são apresentados os detalhes da aplicação empírica. São descritos os dados utilizados, a especificação da regressão utilizada para modelar a dinâmica dos dados e a análise dos seus resultados. Na seção 4 é apresentada a alocação estratégica no portfolio ótimo e os valores encontrados são discutidos, levando em consideração os resultados obtidos na seção 3. Por fim, a seção 5 conclui o trabalho.

¹O investidor de longo prazo é representado por um agente que vive infinitamente.

2 Observações sobre o Mercado de Depósitos de Curto Prazo no Brasil

Analisar o comportamento da alocação dos depósitos de curto prazo dos investidores brasileiros em diferentes moedas é análogo a observar como tais investidores se comportam com relação ao seu caixa, que é a parcela da riqueza que deve ser alocada em ativos com o menor risco possível para financiar seu fluxo de consumo ou suas operacionalidade (como no caso de instituições financeiras) ao longo do tempo.

A análise do comportamento de pessoas físicas seria muito complicado devido a falta de dados disponíveis para tanto, mas podemos analisar com facilidade a composição do caixa de bancos. De acordo com as demonstrações financeiras do final do exercício de 2006 dos três maiores bancos brasileiros, Itaú, Bradesco e Banco do Brasil, que possuem juntos quase 50% do caixa de todo o mercado bancário brasileiro, os depósitos em moedas atualmente são aplicados em sua totalidade em taxa *overnight*, ou seja, em operações compromissadas e LFTs (Letras Financeiras do Tesouro) de curto prazo. Ou seja, estes investidores concentram suas aplicações de curto prazo em moeda doméstica.

Isso parece fazer sentido de acordo com a realidade da economia brasileira. O Brasil possui um histórico recheado de mudanças de regras políticas para o câmbio e juros, passando por períodos de hiperinflação, câmbio fixo e preços de produtos administrados. Anomalias como essas tornaram a taxa de juros real brasileira uma das mais elevadas do mundo. Desde 2003 investidores internacionais vêm realizando arbitragens com a taxa de juros brasileira, se financiando através de taxas baixíssimas como a japonesa.

Mesmo em períodos de afrouxamento monetário como o que vivemos desde 2005, o fluxo de capital estrangeiro entrando no país continua extremamente elevado. Esse tipo de comportamento não condiz com a paridade de juros, pois mesmo com a redução da taxa de juros básica da economia, a entrada de dólares continua expressiva, o que prejudica o nosso argumento para a diversificação internacional em moedas.

Entretanto, desde o governo Fernando Henrique Cardoso e a instalação do plano real, esse quadro tem se alterado e o Brasil tem mantido uma política econômica consistente e cada vez confiável. Diversas medidas quanto a política fiscal e monetária vêm sendo tomadas, trazendo o Brasil cada vez mais próximo da classificação *investment grade* e para níveis de juros mais próximos ao praticados por economias sólidas e desenvolvidas. Com isso, podemos acreditar que num futuro não muito distante a paridade de juros terá mais possibilidade de valer para a economia brasileira.

Enquanto isso não acontece, o Brasil ainda é considerado como uma classe de ativo especulativo. Sendo assim, qualquer aumento de aversão ao risco mundial, mesmo que totalmente descorrelacionada com movimentos da política monetária brasileira, pode levar a uma saída em massa de capital estrangeiro para fora do Brasil, tornando a exposição cambial extremamente arriscada. Enquanto esse quadro não se modifica, ainda faz sentido que os caixas de instituições financeiras ainda sejam alocados exclusivamente em depósitos domésticos, como operações compromissadas e LFTs de curto prazo.

3 O Modelo

O trabalho consiste numa aplicação empírica do modelo proposto em CCV. Este modelo supõe um investidor de longo prazo com tempo de vida infinito, avesso ao risco e sem renda do trabalho, o qual possui preferências recursivas representadas por uma função utilidade intertemporal do tipo Epstein-Zin. A partir destas hipóteses, o modelo busca explicar a dinâmica da alocação ótima de carteira deste investidor em função da evolução de seu ambiente econômico-financeiro, descrito por um VAR (Vector Auto Regressive) para o retorno dos ativos financeiros disponíveis na análise (taxa de juros domésticas e excessos de retorno da taxa estrangeira) e variáveis de estado com poder de previsão sobre esses ativos.

3.1 Restrição orçamentária

Em cada período, o agente consome parte de sua riqueza e o restante investe no portfólio formado pelos ativos financeiros disponíveis. No próximo período, sua riqueza será o retorno bruto deste portfólio. Existem n ativos com risco e um ativo *benchmark* 1 (taxa de juros doméstica). Logo, a restrição orçamentária do período é dada por

$$W_{t+1} = (W_t - C_t)(1 + R_{p,t+1}), \quad (1)$$

tal que

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=2}^n \alpha_{i,t} (R_{i,t+1} - R_{1,t+1}) + R_{1,t+1} \quad (2)$$

onde C_t e W_t são o consumo e a riqueza em t , $\alpha_{i,t}$ é a proporção da riqueza investida no ativo com risco i em t e $R_{p,t+1}$, $R_{i,t+1}$ e $R_{1,t+1}$ são o retorno real do portfólio, do ativo com risco i e do *benchmark* entre t e $t + 1$. CCV medem o excesso de

retorno dos ativos em relação ao retorno do *benchmark*. Em geral, o retorno nominal do *benchmark* é sem risco, porém seu retorno real está sujeito a variações devido a choques inflacionários. Apenas para facilitar a exposição, no restante do documento o *benchmark* poderá ser chamado de "ativo livre de risco".

3.2 Dinâmica das variáveis de estado

Inicialmente, CCV definem um *vetor de variáveis-estado*

$$\mathbf{z}_{t+1} = \begin{bmatrix} r_{1,t+1} \\ \mathbf{x}_{t+1} \\ \mathbf{s}_{t+1} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

o qual é formado pelo retorno real em log do ativo referencial entre t e $t+1$, denotado por $r_{1,t+1}$, pelos excessos de retorno real em log dos demais ativos, agrupados no vetor \mathbf{x}_{t+1} , e por quaisquer outras variáveis com poder de predição sobre o retorno dos ativos, agrupados no vetor \mathbf{s}_{t+1} . Observe que o vetor \mathbf{x}_{t+1} é dado por

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} r_{2,t+1} - r_{1,t+1} \\ r_{3,t+1} - r_{1,t+1} \\ \vdots \\ r_{n,t+1} - r_{1,t+1} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

onde $r_{i,t+1}$ é o retorno real em log do ativo i entre t e $t+1$.

A dinâmica do vetor-estado \mathbf{z}_{t+1} é descrita por um vetor auto-regressivo de primeira ordem VAR(1), dado por

$$\mathbf{z}_{t+1} = \Phi_0 + \Phi_1 \mathbf{z}_t + \mathbf{v}_{t+1}, \quad (5)$$

onde Φ_0 é o vetor de interceptos com ordem $m \times 1$, Φ_1 é a matriz de coeficientes angulares com ordem $m \times m$ e \mathbf{v}_{t+1} são os choques nas variáveis de estado, com média zero e matriz de variância-covariância Σ_v , ou seja,

$$\mathbf{v}_{t+1} | \mathbf{z}_t \sim N[0, \Sigma_v]. \quad (6)$$

Desse modo, permite-se que os choques sejam correlacionados contemporaneamente, porém independentemente e identicamente distribuídos ao longo do tempo.

A modelagem da dinâmica do vetor de estados com um processo VAR(1) não é restritiva, pois qualquer outro vetor auto-regressivo de ordem maior pode ser reescrito

como um VAR(1) através da expansão do vetor-estado (podemos incluir outros atrasos quaisquer do retorno dos ativos no vetor de variáveis de estado).

Segue de (5) e (6) que

$$E_t [\mathbf{z}_{t+1}] = \Phi_0 + \Phi_1 \mathbf{z}_t,$$

ou seja, a estrutura do VAR captura a dependência linear do prêmio de risco esperado dos ativos em função da realização das variáveis-estado. Vale ressaltar que a hipótese (6) implica a homocedasticidade do retorno dos ativos, ou seja,

$$Var_t [\mathbf{z}_{t+1}] = Var_t [\mathbf{v}_{t+1}] = \Sigma_v.$$

Apesar de restritiva, CCV afirma que os resultados obtidos com a hipótese de homocedasticidade do retorno dos ativos são semelhantes ao caso em que essa restrição é relaxada, como mostrado por Campbell (1987), Harvey (1989,1991), e Glosten, Jagannathan e Runkle (1993).

É importante observar que o modelo supõe retornos com distribuição condicional lognormal. A hipótese de distribuição normal para os retornos dos ativos pode ser atraente para alguns propósitos, mas é inadequado para o estudo da escolha do portfólio de longo prazo. Isso porque, se os retornos de cada período forem normalmente distribuídos, então, o retorno acumulado de períodos consecutivos não possuirá distribuição normal, ou seja, a soma de variáveis normais é normal, mas o seu produto não é. Por outro lado, variáveis aleatórias com distribuição lognormal mantêm a lognormalidade no longo prazo, já que o produto de variáveis lognormais é também lognormal. Além disso, variáveis aleatórias lognormais não podem ser negativas, consistente com a hipótese de limitação de passivo a descoberto (limited liability).

3.3 O problema do investidor

Em cada período t , o investidor precisa tomar duas decisões: quanto consumir de sua riqueza e como alocar a sua poupança entre os ativos financeiros disponíveis. Como o tempo de vida do investidor é infinito, ele escolhe um plano de consumo e alocação de portfólio que maximiza uma função utilidade intertemporal sujeito a sua restrição orçamentária intertemporal. É comum na literatura a hipótese de uma função utilidade intertemporal em que as utilidades, de cada período, sejam aditivas e separadas no tempo. Neste caso, o objetivo do investidor se resume em maximizar uma função

$$Max E_t \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i U(C_{t+i}) \quad (7)$$

dada a sua restrição orçamentária intertemporal, onde a utilidade do período é dada pela função potência

$$U(C_{t+i}) = \frac{C_{t+i}^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

onde δ é o fator de desconto temporal e γ é o coeficiente de aversão ao risco, $U(C_{t+i})$ é a utilidade do consumo C_{t+i} em $t+i$ e E_t é o operador esperança condicional às informações que o investidor possui no tempo t . O parâmetro δ varia inversamente com a impaciência do investidor para consumo. Esta função utilidade apresenta um sério inconveniente: o grau de aversão ao risco γ , o qual mede a relutância do investidor em substituir consumo entre diferentes estados da natureza num certo período de tempo, é o inverso da elasticidade intertemporal de substituição $\frac{1}{\lambda}$, a qual mede o efeito da taxa de juros sobre a transferência intertemporal de consumo e, portanto, varia inversamente com a disposição do investidor em suavizar consumo ao longo do tempo. No entanto, não existe razão econômica para que estas duas medidas estejam relacionadas.

Consequentemente, CCV usam um caso mais geral de função utilidade intertemporal, conhecida como função objetivo Epstein-Zin, onde a utilidade do consumo no período é descrita recursivamente por

$$U_t = \left\{ (1-\delta) C_t^{\frac{1-\gamma}{\theta}} + \delta (E_t U_{t+1}^{1-\gamma})^{\frac{1}{\theta}} \right\}^{\frac{\theta}{1-\gamma}} \quad (8)$$

tal que

$$\theta = \frac{1-\gamma}{1-\frac{1}{\psi}}$$

onde γ é novamente o coeficiente de aversão ao risco relativo, enquanto ψ é agora a elasticidade de substituição intertemporal. Esses parâmetros são elementos chave para a escolha do portfólio e as decisões sobre o consumo, respectivamente. Pode-se mostrar que a função (7) é um caso particular de (8) quando $\gamma = \frac{1}{\psi}$

A recursão não linear da equação 8 não parece fácil de ser resolvida. Felizmente, Epstein e Zin (1989, 1991) mostraram, usando argumentos de programação dinâmica, que se a restrição orçamentária possuir a forma da equação 1, então podemos encontrar condições de primeira ordem, ou seja, uma equação de Euler para o problema do investidor, da forma:

$$1 = E_t \left[\left\{ \delta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\frac{1}{\psi}} \right\}^{\theta} \left\{ \frac{1}{1+R_{p,t+1}} \right\}^{1-\theta} (1+R_{i,t+1}) \right] \quad (9)$$

onde $R_{i,t+1}$ é o retorno de um ativo genérico qualquer, incluindo o ativo "livre de risco" e até o próprio portfolio. A regra de consumo e a escolha do portfolio ótimo devem satisfazer a equação de Euler (9) em todos períodos.

3.4 Metodologia da solução

3.4.1 Uma abordagem aproximada

CCV encontraram uma solução genérica aproximada para o modelo intertemporal de Merton. O primeiro passo para o desenvolvimento da solução aproximada do modelo é a linearização das equações envolvidas. Como discutido anteriormente, é conveniente trabalharmos com retornos logarítmicos, e sendo assim derivaremos uma log-linearização do retorno do portfolio, definido em 2. Para realizar essa log-linearização é necessário realizar uma aproximação (serão utilizadas letras minúsculas para representar o log das variáveis)

$$r_{p,t+1} = r_{1,t+1} + \alpha'_t \mathbf{x}_{t+1} + \frac{1}{2} \alpha'_t (\sigma_x^2 + \Sigma_{xx} \alpha_t) \quad (10)$$

onde $r_{p,t+1} = \log(1 + R_{p,t+1})$, $r_{1,t+1} = \log(1 + R_{1,t+1})$ e $\mathbf{x}_{t+1} = \log(1 + R_{i,t+1}) - \log(1 + R_{1,t+1})$. α'_t é o vetor transposto dos percentuais alocados em cada ativo arriscado i . Σ_{xx} é a matriz de variância-covariância dos excessos de retorno dos ativos arriscados em relação ao ativo *benchmark*. $\sigma_x^2 \equiv \text{dig}(\Sigma_{xx})$ é o vetor que contém a diagonal dos elementos de Σ_{xx} , ou seja, as variâncias dos excessos de retornos. Essa aproximação se torna exata em um modelo de tempo contínuo, e é bastante precisa para intervalos de tempo pequenos. Detalhes da derivação da log-linearização são encontrados em Campbell e Viceira (2002) (daqui por diante CV).

A restrição orçamentária na equação (1) não é linear. Seguindo Campbell (1993, 1996), a restrição orçamentária pode ser log-linearizada através da expansão de Taylor ao redor de média incondicional do log da razão consumo-riqueza, como a seguir:

$$\Delta w_{t+1} = w_{t+1} - w_t \approx r_{p,t+1} + (1 - \frac{1}{\rho})(c_t - w_t) + k \quad (11)$$

onde $\rho \equiv 1 - \exp(E[c_t - w_t])$ e $k \equiv \log(\rho) + \frac{(1-\rho)}{\rho} \log(1 - \rho)$. Essa forma de restrição orçamentária é exata se a elasticidade de substituição intertemporal $\psi = 1$ e, nesse caso, $c_t - w_t$ é constante e $\rho = \delta$.

A equação de Euler também é não linear. Sendo assim, para realizar a log-linearização, aplica-se uma expansão de Taylor de segunda ordem para a equação de Euler, na equação 9 ao redor da média condicional de Δc_{t+1} , $r_{p,t+1}$ e $r_{i,t+1}$.

$$\begin{aligned} 0 = & \theta \log \delta - \frac{\theta}{\psi} E_t \Delta c_{t+1} - (1 - \theta) E_t r_{p,t+1} + E_t r_{i,t+1} \\ & + \frac{1}{2} Var_t \left[-\frac{\theta}{\psi} \Delta c_{t+1} - (1 - \theta) r_{p,t+1} + r_{i,t+1} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

Essa log-linearização torna-se exata se o consumo e os retornos dos ativos possuírem distribuição conjunta lognormal, que é o caso quando a elasticidade de substituição intertemporal for $\psi = 1$. Uma discussão mais detalhada sobre essa aproximação é apresentada em CV.

Podemos ainda obter a equação do prêmio de risco exigido pelo investidor para os ativos arriscados. Essa equação ajudará a entender como o agente valoriza os ativos. O prêmio de risco o obtido, fazendo $i = 1$ na equação 12 e subtraindo-a da forma geral da equação 12, de forma que.

$$\begin{aligned} E_t(r_{i,t+1} - r_{1,t+1}) + \frac{1}{2} Var_t(r_{i,t+1} - r_{1,t+1}) = & \frac{\theta}{\psi} (\sigma_{i,c-w,t} - \sigma_{1,c-w,t}) \\ & + \gamma (\sigma_{i,p,t} - \sigma_{1,p,t}) - (\sigma_{i,1,t} - \sigma_{1,1,t}) \end{aligned} \quad (13)$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_{i,c-w,t} &= Cov_t(r_{i,t+1}, c_{t+1} - w_{t+1}) \\ \sigma_{1,c-w,t} &= Cov_t(r_{1,t+1}, c_{t+1} - w_{t+1}) \\ \sigma_{i,p,t} &= Cov_t(r_{i,t+1}, r_{p,t+1}) \\ \sigma_{1,p,t} &= Cov_t(r_{1,t+1}, r_{p,t+1}) \\ \sigma_{i,1,t} &= Cov_t(r_{i,t+1}, r_{1,t+1}) \\ \sigma_{1,1,t} &= Var_t(r_{1,t+1}) \end{aligned}$$

Essa equação simplifica bastante caso o ativo *benchmark* for livre de risco, e para interpreta-la mais facilmente, realizaremos essa simplificação:

$$E_t r_{i,t+1} - r_{1,t+1} \mathbf{i} + \frac{\sigma_t^2}{2} = \frac{\theta}{\psi} \sigma_{i,c-w,t} + \gamma \sigma_{i,p,t} \quad (14)$$

O lado esquerdo dessa equação é o prêmio de risco do ativo i sobre o ativo 1 (*benchmark*), ajustado pela desigualdade de Jensen ao adicionar metade da variância do

excesso de retorno do ativo arriscado sobre o ativo 1, $\frac{\sigma_1^2}{2}$. Essa equação relaciona o prêmio de risco a dois elementos: a primeira parcela do lado esquerdo da equação é a covariância entre o excesso de retorno do ativo arriscado com o crescimento do consumo e a segunda parcela é a covariância entre o excesso de retorno do ativo arriscado com o retorno do portfólio. Sendo assim, o investidor exige um prêmio de risco menor de ativos que covariam negativamente com o crescimento do consumo e com o retorno do portfólio.

Isso faz sentido, pois o agente deseja suavizar seu consumo ao longo do tempo e entre os estados da natureza num dado período. Dessa forma esse agente vai desejar um ativo que apresente um alto retorno quando seu nível de consumo estiver mais baixo. Esse ativo vai compensar a perda em consumo com um aumento de sua riqueza no mesmo período. Da mesma forma, o agente vai exigir um prêmio de risco menor de ativos que tenham retornos mais expressivos em momentos em que seu portfólio apresentar resultados mais pobres. Isso significa que o investidor dá um valor maior para ativos que tenham um papel de "seguro" para seu portfólio, podendo até aceitar retornos negativos de tal ativo.

3.4.2 Resolvendo o modelo aproximado e encontrando a escolha ótima de portfólio

Para resolver o modelo, CCV supõe que o portfólio ótimo e a regra de consumo tomam a seguinte forma:

$$\alpha_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_t \quad (15)$$

$$c_t - w_t = b_0 + \mathbf{B}_1' \mathbf{z}_t + \mathbf{z}_t' \mathbf{B}_2 \mathbf{z}_t \quad (16)$$

Sendo assim, a regra para o portfólio ótimo é linear no vetor de estados do VAR, mas a regra de consumo ótimo é quadrática. As matrizes de coeficientes \mathbf{A}_0 , \mathbf{A}_1 , b_0 , \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_2 , com dimensões $(n-1) \times 1$, $(n-1) \times m$, 1×1 , $m \times 1$ e $m \times m$ respectivamente, são determinadas em função dos parâmetros comportamentais, δ , γ e ψ e dos parâmetros no processo para o vetor-estado, Φ_0 , Φ_1 e Σ_u .

O motivo da suposição realizada por CCV, de que a regra de portfólio ótimo é linear em \mathbf{z}_t , em 15, se deve ao fato de que essa é a regra mais simples que permite α_t responder a mudanças nas oportunidades de investimentos, causadas por mudanças nos prêmios de risco. Isso acontece, porque α_t é uma função linear do vetor de prêmios de riscos, $E_t[r_{i,t+1} - r_{1,t+1}]$, que está incluído no vetor-estado \mathbf{z}_{t+1} , que por sua vez é uma função linear de \mathbf{z}_t .

Essa é uma suposição simples e intuitiva, mas para verificar a sua validade e encontrar os parâmetros da solução, inicialmente reescreveremos o lado esquerdo da equação (13) como função dos parâmetros do VAR, Φ_0 e Φ_1 e dos parâmetros desconhecidos das equações (15) e (16). Para tanto, lembrando que a expressão (4) define \mathbf{x}_t como o vetor dos excessos de retorno dos ativos arriscado sobre o ativo *benchmark*, segue que

$$E_t(\mathbf{x}_{t+1}) + \frac{1}{2}Var_t(\mathbf{x}_{t+1}) = \mathbf{H}_x \Phi_0 + \mathbf{H}_x \Phi_1 \mathbf{z}_t + \frac{1}{2}\sigma_x^2 \quad (17)$$

onde \mathbf{H}_x é uma matriz que seleciona os excessos de retornos no vetor de estados.

Em seguida, os momentos condicionais, no lado direito da equação (13), são reescritos como função dos parâmetros do VAR, Φ_0 , Φ_1 e Σ_u e dos parâmetros desconhecidos da regra de consumo ótimo 16, \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_2 . Em notação matricial essas covariâncias se tornam:

$$\sigma_{c-w,t} - \sigma_{1,c-w,t}e \equiv [\sigma_{i,c-w,t} - \sigma_{1,c-w,t}]_{i=2,\dots,n} = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{z}_t \quad (18)$$

$$\sigma_{p,t} - \sigma_{1,p,t}e \equiv [\sigma_{i,p,t} - \sigma_{1,p,t}]_{i=2,\dots,n} = \Sigma_{xx} \alpha_t + \sigma_{1x} \quad (19)$$

$$\sigma_{1,t} - \sigma_{1,1,t}e \equiv [\sigma_{i,1,t} - \sigma_{1,1,t}]_{i=2,\dots,n} = \sigma_{1x} \quad (20)$$

onde $e = (1, 1, \dots, 1)$ e Λ_0 e Λ_1 são dados por

$$\Lambda_0 = [(\Sigma_v \mathbf{H}'_x)' \mathbf{B}_1 + (\Sigma_v \mathbf{H}'_x)' (\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}'_2) \Phi_0]$$

$$\Lambda_1 = [(\Sigma_v \mathbf{H}'_x)' (\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}'_2) \Phi_1]$$

O apêndice de CCV mostra em detalhes a derivação das equações acima, que relaciona as três covariâncias condicionais da equação 13 como função linear das variáveis de estado e dos parâmetros do VAR.

Substituindo as equações (17), (18), (19) e (20) na equação de Euler loglinearizada (13), e resolvendo-a para a alocação do portfolio, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_t = & \frac{1}{\gamma} \Sigma_{xx}^{-1} \left[E_t(r_{i,t+1} - r_{1,t+1}) + \frac{1}{2} Var_t(r_{i,t+1} - r_{1,t+1}) + (1 - \gamma) \sigma_{1x} \right] \\ & + \frac{1}{\gamma} \Sigma_{xx}^{-1} \left(-\frac{\theta}{\psi} \sigma_{c-w,t} - \sigma_{1,c-w,t} e \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Esta equação pode ser mais facilmente interpretada no caso especial onde os prêmios de risco são constantes e apenas o retorno do *benchmark* varia (essa simplificação não muda a interpretação, apenas apresenta o resultado da alocação ótima de uma forma

mais enxuta). Nesse caso, CV (capítulo 3) mostram que a regra de portfolio pode ser escrita como

$$\alpha_t = \frac{1}{\gamma} \Sigma_{xx}^{-1} \left(E_t \mathbf{x}_{t+1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^2}{2} \right) + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \Sigma_{xx}^{-1} (\sigma_h - \boldsymbol{\sigma}_1) \quad (22)$$

onde $E_t \mathbf{x}_{t+1}$ é a esperança condicional dos excessos de retornos dos ativos arriscados sobre o *benchmark*, $\boldsymbol{\sigma}^2$ é o vetor de variâncias dos excessos de retorno dos ativos arriscados sobre o *benchmark*, $\boldsymbol{\sigma}_1$ é o vetor de covariâncias do excesso de retorno de cada ativo arriscado sobre o *benchmark* com o próprio *benchmark* e σ_h é o vetor que contém as covariâncias de cada excesso de retorno com declínios nas expectativas do retorno do *benchmark*, dado por

$$\sigma_h \equiv Cov \left(\mathbf{x}_{t+1}, -(E_{t+1} - E_t) \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{1,t+1+j} \right)$$

Normalmente, o *benchmark* é a taxa de juros básica da economia em estudo. Muitas vezes esse ativo é considerado um ativo livre de risco ou próximo a isso. Nesse caso, σ_h mede a covariância dos excessos de retorno dos ativos com o declínio nas expectativas das taxas de juros futuras. O índice h é utilizado para lembrar o conceito de demanda intertemporal por *hedge* introduzido por Merton (1969, 1971).

A intuição por trás da escolha do portifolio é simples. O primeiro termo do lado direito da equação (22) é o componente míope da demanda pelo ativo arriscado. Ele é o vetor de razões de Sharpe dos ativos arriscados, ajustado pelo coeficiente de aversão ao risco relativo e por um meio da variância dos excessos de retorno dos ativos arriscados. Devido a sua natureza míope, esse componente não depende de ψ , a elasticidade de substituição intertemporal. Um investidor com aversão ao risco relativa igual a $\gamma = 1$, realizará a alocação com base apenas nesse termo, e, portanto, é chamado de investidor míope. Em outras palavras, um investidor míope ($\gamma = 1$) realiza sua alocação com base apenas no *trade-off* entre retorno esperado e variância (razão "retorno/risco").

O segundo termo do lado direito da equação (22) é a demanda por *hedge* intertemporal de Merton que dá mais valor a um ativo que covaria negativamente com as oportunidades futuras de investimento, ou seja, o investidor que possui esse componente de demanda por *hedge* intertemporal aprecia ativos que apresentam retornos elevados quando as oportunidades futuras de investimento se deterioram. Um investidor racional que é mais avesso ao risco que um investidor com preferências logarítmicas ($\gamma = 1$, que leva a alocação míope) irá se proteger contra mudanças adversas nas oportunidades de investimento. Para um investidor logarítmico, a regra de portfolio ótimo é puramente míope e, desse modo, a demanda por proteção intertemporal

será igual a zero. Isso pode ser facilmente verificado na equação 21, com $\gamma = 1$ e $\theta = 0$, tornando o componente de *hedge* igual a zero. Por outro lado, um investidor extremamente avesso ao risco, com $\gamma \rightarrow \infty$, terá o componente de demanda míope nulo e realizará a alocação com base apenas no componente de demanda por *hedge* intertemporal de Merton. Essa intuição é extremamente importante, pois será a base de análise para a interpretação dos resultados obtidos nesse trabalho.

Substituindo as equações (17) e (18) na equação (21) e rearranjando os termos, obtém-se:

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_t \quad (23)$$

onde:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{\gamma} \Sigma_{xx}^{-1} \left[\mathbf{H}_x \Phi_0 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_x^2 + (1 - \gamma) \boldsymbol{\sigma}_{1x} \right] + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \Sigma_{xx}^{-1} \left(\frac{-\boldsymbol{\Lambda}_0}{1 - \psi} \right) \quad (24)$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{\gamma} \Sigma_{xx}^{-1} \mathbf{H}_x \Phi_1 + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \Sigma_{xx}^{-1} \left(\frac{-\boldsymbol{\Lambda}_1}{1 - \psi} \right) \quad (25)$$

A equação (23) confirma a afirmação inicial feita por Campbell e Viceira sobre a forma linear da regra do portfolio ótimo e expressa as matrizes de coeficientes \mathbf{A}_0 e \mathbf{A}_1 como funções dos parâmetros que descrevem as preferências do investidor (γ e ψ) e da dinâmica das variáveis de estado (Φ_0 e Φ_1). \mathbf{A}_0 e \mathbf{A}_1 também dependem dos parâmetros da equação que descreve a regra de consumo, \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_2 , através das matrizes de coeficientes $\boldsymbol{\Lambda}_0$ e $\boldsymbol{\Lambda}_1$ (definidos em 18). Os termos multiplicados por $\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)$ nas equações (24) e (25) refletem o efeito da proteção intertemporal na escolha do portfolio ótimo (como pode ser visto na equação 22). Sendo assim, a demanda por *hedge* intertemporal e as mudanças nas variáveis de estado afetam a alocação do portfolio através de \mathbf{A}_0 e \mathbf{A}_1 .

4 Uma aplicação empírica: títulos de curto prazo domésticos e títulos de curto prazo estrangeiros

A seção anterior desenvolveu um modelo geral para tratar da alocação estratégica entre quaisquer conjunto de ativos. Esta seção descreve a dinâmica do conjunto de ativos que se resume a depósitos em moeda doméstica (títulos de curto prazo domésticos) e depósitos em moeda estrangeira (depósitos *off shore*). Em seguida, essa dinâmica dos dados é utilizada como fonte de entrada para a derivação da alocação ótima dos investidores brasileiros entre depósitos domésticos e estrangeiros. Ainda na seção seguinte serão realizados exercícios de estática comparativa para se avaliar como a alocação ótima varia com o grau de aversão ao risco.

4.1 Descrição dos dados

Na análise empírica, foram utilizados dados mensais das economias brasileira, americana, britânica e japonesa no período compreendido entre janeiro de 1999 e fevereiro de 2007. A flexibilização do câmbio na economia brasileira é uma quebra estrutural que impede a utilização de séries mais longas. Foram construídas séries históricas para o log das taxas de juros real *ex-post* para os países e para o log das taxas de câmbio real entre Brasil e Estados Unidos, Brasil e Inglaterra e Brasil e Japão, inicialmente utilizando o Brasil como país doméstico e em seguida como país estrangeiro. A taxa de juros real é o log da taxa de juros nominal de 30 dias, menos o log da inflação realizada no período. A taxa de câmbio real é o preço da cesta de produtos estrangeira em termos de cestas domésticas. Assim, o log da taxa de câmbio real é a soma do log da taxa de câmbio nominal com o log do nível de preços doméstico, menos o log do nível de preços estrangeiro. Os dados americanos, britânicos e japoneses de taxas de juros nominais (taxa embutida nas notas de curto prazo do tesouro de cada país) e índice de preços (CPI), foram obtidos da Bloomberg. A taxa de câmbio nominal entre Brasil e Estados Unidos, foi obtida da base de dados do Banco Central do Brasil, e as taxas de câmbio entre Brasil e Inglaterra e Brasil e Japão foram obtidas da Bloomberg. O índice de preços brasileiro (IPCA) foi obtido da base de dados do IBGE e as taxas de juros nominais brasileiras (taxa embutida no Swap DI x Pré de 30 dias) foram obtidas da base de dados da BM&F¹.

¹ Apesar de ser possível obter o câmbio real através do câmbio nominal e do diferencial dos índices de preços dos dois países, para a série de câmbio real entre Brasil e Estados Unidos utilizamos a série disponibilizada na base de dados da consultoria MCM que calcula o câmbio real entre esses países utilizando o IPCA e CPI EUA como índices de inflação.

4.2 Estatísticas dos dados

A tabela 1 apresenta um resumo das principais estatísticas dos dados. As primeiras duas linhas da tabela mostram a média e o desvio-padrão das taxas de juros reais *ex-post* anualizadas. O Brasil é o país que possui a maior taxa de juros real esperada dentre os países analisados, com média igual a 11.03% ao ano. Em seguida vem a taxa de juros real britânica com valor esperado incondicional igual a 3.17% ao ano, quase um quarto da média da taxa de juros real brasileira. O país com menor média de taxa de juros real é o Japão, com 0.63% ao ano, muito próxima a taxa de juros real dos Estados Unidos com média 0.68%. O mesmo acontece com o desvio-padrão incondicional. O Brasil possui a taxa de juros real mais volátil, com desvio padrão igual a 6.88% ao ano. O país com taxa de juros real menos volátil é o Japão, com 0.63% ao ano de desvio padrão incondicional. A princípio, estes resultados sugerem que os títulos de curto prazo brasileiros oferecem as maiores taxas de juros esperadas e o Japão possui as menores. Ao mesmo tempo, os títulos de curto prazo japoneses são mais seguros para os investidores de curto prazo, seguidos bem de perto pelos títulos de curto prazo americanos, e os títulos brasileiros são os mais arriscados. Apesar disso, o investidor conservador de longo prazo deve mais preocupado com o risco advindo do perigo imposto pela estratégia de rolar títulos de curto prazo ao longo do tempo a taxas desconhecidas *ex-ante* e não o desvio padrão incondicional. Assim, para esse investidor, a capacidade do ativo atuar como *hedge* intertemporal para as oportunidades de investimento é mais importante que sua volatilidade incondicional.

As duas linhas seguintes apresentam a média das variações na taxa de câmbio real e o desvio-padrão dessas variações, ambas representadas em taxas anualizadas. Já que estamos utilizando o Brasil como referência, não há entrada dessa estatística para o Brasil. A tabela mostra que todas as moedas têm se apreciado, na média, em relação a moeda brasileira no período compreendido entre o início de 1999 e o início de 2007, sendo que a moeda britânica (pound) é a que mais tem se valorizado, e o dólar a que tem se valorizado menos.

Como o câmbio real é um índice, sua média não possui interpretação relevante. Sendo assim, apresentamos apenas o seu desvio padrão, na quinta linha da tabela. Como é possível perceber seu valor é muito maior que o desvio padrão das taxas de juros reais. O país que possui a menor volatilidade cambial são os Estados Unidos da América e o país com maior volatilidade cambial é a Inglaterra.

Para verificar a estacionariedade dos dados, foi realizado o teste de raiz unitária para todas as séries. O *Augmented Dickey-Fuller* rejeitou fortemente a presença de raiz unitária na taxa de juros real de todos os países. A presença de raiz unitária foi rejeitada fortemente para taxa de juros brasileira com um nível de confiança de 1%.

Para a taxa de juros americana, a presença de raiz unitária também foi fortemente rejeitada com um nível de confiança de 1%. O mesmo pode ser dito para a taxa de juros japonesa. Já para a taxa de juros real inglesa, a hipótese de haver raiz unitária não pôde ser rejeitada, nem mesmo a um nível de confiança de 10%. O teste *Augmented Dickey-Fuller* também não rejeitou a possibilidade de haver presença de raiz unitária para as taxas de câmbio real americana, japonesa e inglesa. Entretanto, reconhecendo o baixo poder desses testes e observando a evidência que sugere reversão a média na taxa de juros inglesa e na taxa de câmbio real desses países, nós assumimos que essas séries são estacionárias.

Finalmente, nas últimas duas linhas da tabela, são reportadas as médias e os desvios padrão da taxa de inflação de cada país. A série de inflação americana, inglesa e japonesa utilizadas são dessazonalizadas, todavia, a inflação brasileira não é. A dessazonalização da série de inflação brasileira seria problemática, devido às peculiaridades do mercado brasileiro até 2003. Até esse período a economia brasileira viveu períodos de inflação elevada e preços administrados. Já que as taxas de juros nominais não possuem sazonalidades, assume-se que a sazonalidade da inflação brasileira corresponde a erros de medição, em vez de efeitos sazonais nos preços. De acordo com os resultados encontrados por CVW, a utilização da inflação sem a dessazonalização não altera significativamente os resultados, apenas melhoram o ajuste do VAR. A tabela mostra que o país com a maior média de inflação é o Brasil. O Brasil possui média de inflação igual a 7.30% ao ano, muito maior que o Japão que possui apenas 0.07% ao ano de inflação, em média. Por outro lado, o Japão possui a inflação mais volátil entre os países, com desvio padrão igual 1.88% ao ano.

Tabela 1
Estatísticas dos dados

	BRASIL	EUA	INGLATERRA	JAPÃO
$E[r_t]$	11.025	0.683	3.170	0.634
$\sigma[r_t]$	6.879	3.619	4.579	3.384
$E[\Delta e_t]$	0.000	2.304	8.694	8.268
$\sigma[\Delta e_t]$	0.000	18.137	21.147	21.892
$\sigma[e_t]$	0.000	17.548	37.403	35.151
$E[\pi_t]$	7.295	2.644	1.523	0.070
$\sigma[\pi_t]$	1.684	0.944	1.228	1.883

4.3 Especificação do VAR

Para capturar a dinâmica das variáveis-estado, inicialmente foi estimado o VAR(1)

$$z_{t+1} = \begin{bmatrix} r_{t+1} \\ r_{t+1}^* \\ e_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_t \\ r_t^* \\ e_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1,t+1} \\ u_{2,t+1} \\ u_{3,t+1} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

onde r_{t+1} é a taxa de juros real doméstica *ex-post* em log entre t e $t+1$, r_{t+1}^* é a taxa de juros real estrangeira *ex-post* em log entre t e $t+1$ e e_{t+1} é o log da taxa de câmbio real em $t+1$. Deste modo, um aumento em e_{t+1} corresponde a uma apreciação real da moeda estrangeira e, em consequência, a uma depreciação real da moeda doméstica. O sistema foi estimado sem impor restrições nos parâmetros do processo. O VAR permite expressar a expectativa da taxa de juros real futura de cada país como função do valor corrente das variáveis-estado incluídas no sistema. Outras variáveis poderiam ser incluídas no sistema, porém, como sugerido por CVW, esse é o sistema mais simples de VAR que permite impor e testar a hipótese de paridade dos juros descoberta. Foram testados sistemas alternativos, incluindo outras variáveis de estado, como o log do prêmio de risco Brasil e o log da atividade dos países estrangeiros, porém os resultados obtidos não ficaram melhores com a inclusão dessas variáveis. Os coeficientes estimados no VAR alternativo apresentaram, na sua maioria, estatística t muito baixa. Sendo assim, foi decidido utilizar o sistema mais parcimonioso sugerido por CVW, pois, além de ser um sistema de fácil interpretação, apresentou resultados semelhantes aos sistemas com outras variáveis incluídas. Com o sistema sugerido por CVW, apesar de não testarmos a paridade dos juros descoberta, temos a capacidade de interpretar o sinal dos coeficientes e verificar a validade paridade dos juros em cada par de países.

O sistema VAR descrito em (26) provê uma descrição sucinta para os dados. Entretanto, o vetor z_{t+1} em (26) não está na forma apresentada na expressão (3) e assim os coeficientes de seu processo não podem ser usados diretamente na solução do modelo. Conforme a expressão (3), o modelo apresentado em CCV exige uma transformação para que a primeira variável-estado em z_{t+1} seja a taxa de juros real doméstica r_{t+1} (ou seja, a taxa de juros que será utilizado como *benchmark* para as outras taxas de juros), a segunda variável seja o excesso de retorno do investimento em títulos de curto prazo estrangeiro, do ponto de vista do investidor doméstico, dado por $r_{t+1}^* + \Delta e_{t+1} - r_{t+1}$ (ou seja, o excesso de retorno do ativo estrangeiro sobre a taxa de juros doméstica, já considerando a conversão cambial) e as demais variáveis sejam as outras variáveis de estado com poder de capturar a dinâmica do VAR (no nosso caso será apenas o câmbio real). Para tanto, define-se um novo vetor de estados Z_{t+1} , dado por

$$Z_{t+1} = \begin{bmatrix} r_{t+1} \\ r_{t+1}^* + \Delta e_{t+1} - r_{t+1} \\ \Delta e_{t+1} \\ e_{t+1} \end{bmatrix} \quad (27)$$

o qual segue o processo

$$Z_{t+1} = \Phi_0 + \Phi_1 Z_t + u_{t+1} \quad (28)$$

onde os parâmetros em Φ_0 e Φ_1 , bem como os elementos da matriz de covariâncias do vetor de erros u_{t+1} , são determinados a partir dos coeficientes do processo (26). Observe que Z_{t+1} encontra-se na forma da expressão (3) e assim o processo (28) é a especificação do processo geral (5) na aplicação do modelo geral de CCV neste trabalho. No apêndice A, demonstra-se que

$$\Phi_0 = \Xi A_0, \quad (29)$$

$$\Phi_1 = (H + \Xi A_1)(\Xi' \Xi)^{-1} \Xi' (I - \Psi). \quad (30)$$

onde H e Ξ são definidos por

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Além disso, a matriz de covariâncias dos resíduos de u_{t+1} é dada por

$$\Sigma_u = \text{var}[u_{t+1}] = \Xi \Sigma_v \Xi' \quad (31)$$

4.4 Estimação do VAR

A seguir serão analisados os resultados obtidos com o VAR, para cada par de países, começando pelo par Brasil-EUA, em seguida, Brasil-Inglaterra e por fim Brasil-Japão.

4.4.1 Análise 1: Brasil x EUA

A tabela 2 abaixo apresenta a matriz de coeficientes estimados do sistema VAR (26), bem como a matriz de variâncias-correlações² das inovações, para o caso em que o Brasil é o país doméstico, com taxa de juros real ex-post r_t , e os EUA é o país estrangeiro, com taxa de juros real ex-post r_t^* .

A parte superior da tabela apresenta os coeficientes estimados do VAR, com as estatísticas t entre parênteses e o R^2 de cada equação. A taxa de juros real *ex-post* brasileira depende significativamente de sua própria defasagem com um coeficiente 0.50 e estatística t acima de 6. As defasagens das outras variáveis do VAR não são estatisticamente significativas para explicar a dinâmica da taxa de juros brasileira, pois suas estatísticas t são menores que 2. Isso parece fazer sentido, já que a política monetária brasileira, no período analisado, possui como objetivo uma meta de inflação e não uma meta cambial ou algum tipo de acompanhamento da taxa de juros americana. Quase 40% da dinâmica da taxa de juros real brasileira é explicada pelas variáveis do VAR.

Como acontece com a taxa de juros brasileira, a taxa de juros real americana é explicada pela sua defasagem, com coeficiente de 0.27 estatisticamente significativo. A defasagem das outras variáveis não possuem coeficientes significativos. A justificativa para os coeficientes não serem significativos é a mesma dada para os juros brasileiros.

Por fim, o câmbio real é afetado positivamente pela sua própria defasagem. O coeficiente é igual a 0,976 e este efeito é bastante significativo. Além disso, a defasagem da taxa de juros real brasileira têm um efeito positivo - coeficiente igual a 3.48 - e estatisticamente significativo sobre o câmbio real. Por outro lado, a defasagem da taxa de juros americana afeta negativamente o câmbio real, embora este efeito não seja estatisticamente significativo. Os sinais da equação para a dinâmica do câmbio real refletem a paridade de juros descoberta, apesar de não termos imposto restrição alguma aos coeficientes do VAR. Supondo taxa de juros americana constante, um aumento da taxa de juros brasileira tende a atrair dólares para o Brasil, sendo assim, a moeda brasileira se fortalece frente à moeda americana e o poder de compra dos brasileiros aumenta frente a economia americana. Além disso, fazendo as taxas de juros brasileira e americana constantes, a moeda brasileira tende a se fortalecer no futuro quando o seu passado se valoriza. A mesma análise de estática comparativa pode ser realizada observando o efeito dos juros americanos no câmbio: quando os juros americanos caem há uma debandada de dólares para fora dos EUA e o dólar tende a se enfraquecer no futuro frente a outras moedas.

²Os elementos da diagonal principal são as variâncias dos choques, enquanto os elementos fora da diagonal principal são as correlações entre os choques.

Tabela 2
Brasil x EUA: Resultados da Estimação do VAR

Variável	r_t	r_t^*	e_t	R^2
Dependente	(Estatística t)	(Estatística t)	(Estatística t)	-
Coeficiente Estimados no VAR				
r_{t+1}	0.501 (6.09)	0.164 (1.25)	-0.002 (-0.618)	0.379 -
r_{t+1}^*	-0.048 (-0.769)	0.266 (2.643)	-0.004 (-2.187)	0.159 -
e_{t+1}	3.477 (3.140)	-0.847 (-0.479)	0.976 (28.350)	0.919 -
Matriz de Correlações Cruzadas dos resíduos				
	r_t	r_t^*	e_t	
r_t	0.001%	-0.065	-0.405	
r_t^*	-0.065	0.001%	-0.044	
e_t	-0.405	-0.044	0.241%	

Na parte inferior da tabela é apresentada a matriz de variâncias-correlações das inovações do sistema VAR. Choques na taxa de juros real brasileira são negativamente correlacionadas com choques no câmbio real. Choques na taxa de juros real brasileira possuem baixa correlação com choques na taxa de juros real americana, porém, ainda assim são negativamente correlacionados. O mesmo acontece com a correlação entre as inovações nas taxas de juros americanas e choques sobre o câmbio real. As variâncias dos resíduos das taxas de juros de ambos países são praticamente nulos, e iguais a 0.001%. A variância dos resíduos do câmbio real é bem maior, que a variância das taxas de juros apesar de seu R^2 elevado.

4.4.2 Análise 2: Brasil x Inglaterra

A tabela 3 segue o mesmo formato da tabela 2. Na análise da dinâmica dos juros reais para o Brasil e Inglaterra, podemos verificar que os coeficientes estimados ficaram muito piores que para o caso Brasil-EUA. Apenas dois coeficientes são estatisticamente significativos.

A taxa de juros brasileira depende positivamente de sua própria defasagem, com coeficiente 0.53, e estatística t significativa de 6.9. A defasagem da taxa de juros

inglesa afeta positivamente a taxa de juros brasileira e o câmbio tem efeito nulo. Mas os coeficientes estimados para essas variáveis não são estatisticamente significativas. Aproximadamente 36% das variações dos juros reais brasileiros foram explicadas pelas variáveis do modelo.

Na equação que explica a dinâmica dos juros reais ingleses, os coeficientes apresentaram estatística t muito baixas. A taxa de juros inglesa varia negativamente com seu passado, com um baixo coeficiente igual -0.1. A taxa de juros brasileira e o câmbio real apresentam coeficiente praticamente nulo sobre os juros ingleses. O R^2 para a dinâmica dos juros reais ingleses é menor que 1%, refletindo um baixo poder de previsibilidade das variáveis de estado.

Já o câmbio real entre o Brasil e a Inglaterra segue um processo com forte persistência, apresentando um coeficiente 0.98 para sua própria defasagem. As taxas de juros brasileira e inglesa afetam negativamente o câmbio real, com coeficientes -0.58 e -2.09, respectivamente. Ambas não estatisticamente significativas. Aproximadamente 97% das variações do câmbio real são explicadas.

Tabela 3
Brasil x Inglaterra: Resultados da Estimação do VAR

Variável	r_t	r_t^*	e_t	R^2
Dependente	(Estatística t)	(Estatística t)	(Estatística t)	-
Coeficiente Estimados no VAR				
r_{t+1}	0.527 (6.901)	0.045 (0.419)	-0.000 (-0.421)	0.364 -
r_{t+1}^*	-0.002 (-0.038)	-0.102 (-0.993)	-0.002 (-1.674)	0.006 -
e_{t+1}	-0.580 (-0.459)	-2.091 (-1.181)	0.976 (55.884)	0.974 -
Matriz de Correlações Cruzadas dos resíduos				
	r_t	r_t^*	e_t	
r_t	0.001%	-0.373	-0.197	
r_t^*	-0.373	0.001%	0.122	
e_t	-0.197	0.122	0.373%	

Na parte inferior da tabela, é apresentada a matriz de variâncias e correlações. O coeficiente de correlação entre a taxa de juros real brasileira e a taxa de juros real

inglesa é baixo e igual a -0.37. A correlação entre a taxa de juros real brasileira e o câmbio real também é negativa e igual a -0.20. A correlação entre a taxa de juros real inglesa e o câmbio real é 0.12. Os resultados das variâncias são bastante parecidos com o encontrado para o par Brasil-EUA.

4.4.3 Análise 3: Brasil x Japão

A tabela 4 apresenta os resultados do VAR para o par Brasil e Japão. De uma maneira geral, os resultados apresentados na tabela 4 são muito melhores que os resultados do VAR para o par Brasil-Inglaterra.

A taxa de juros real brasileira é explicada pela sua própria defasagem com um coeficiente igual a 0.51 estatisticamente significativo (estatística t igual a 6.09). Tanto a taxa de juros japonesa quanto o câmbio real possuem apresentam coeficientes não estatisticamente significativos, como esperado.

A dinâmica da taxa de juros japonesa é explicada pela sua própria defasagem com coeficiente 0.27. A taxa de juros brasileira não possui coeficiente estatisticamente significativo e a o câmbio real, apesar de possuir coeficiente significativo, possui coeficiente aproximadamente nulo.

Tabela 4
Brasil x Japão: Resultados da Estimação do VAR

Variável	r_t	r_t^*	e_t	R^2
Dependente	(Estatística t)	(Estatística t)	(Estatística t)	-
Coeficiente Estimados no VAR				
r_{t+1}	0.517 (6.89)	-0.221 (-1.64)	-0.000 (-0.722)	0.381 -
r_{t+1}^*	-0.011 (0.198)	0.050 (0.484)	-0.000 (-0.432)	0.006 -
e_{t+1}	-0.995 (-0.771)	-3.145 (-1.358)	0.966 (50.993)	0.969 -
Matriz de Correlações Cruzadas dos resíduos				
	r_t	r_t^*	e_t	
r_t	0.001%	-0.137	-0.177	
r_t^*	-0.137	0.001%	-0.001	
e_t	-0.177	-0.001	0.392%	

Os choques nas taxas de juros brasileira e japonesa são negativamente correlacionadas, com coeficiente de correlação baixo e igual a 0.07. A correlação entre os choques nas taxas de juros brasileira e os choques no câmbio real é maior e também negativa, igual a 0.41. As inovações na taxa de juros japonesa são baixamente correlacionadas negativamente com o câmbio real.

5 Alocação Estratégica entre Títulos de Curto Prazo (TCP) Domésticos e Títulos de Curto Prazo Estrangeiros para Investidores de Longo Prazo Brasileiros

Observando os resultados do VAR, podemos interpretar as suas implicações para as escolhas de portfolio ótimo de investidores de longo prazo brasileiros. Utilizando os coeficientes estimados no VAR e a matriz de covariâncias dos choques nas variáveis-estado, calculamos o portfolio ótimo entre os títulos de curto prazo de cada par de países, no ponto de vista de um investidor de longo prazo, resolvendo o modelo geral apresentado na seção 1. Para fins investigativos, realizamos também uma análise adicional, invertendo o referencial no par Brasil x EUA, colocando o Brasil como país estrangeiro.

5.1 Análise 1: Brasil x EUA (País doméstico - Brasil)

Na tabela 5, apresentamos a alocação ótima do investidor de longo prazo brasileiro para coeficientes de aversão ao risco igual a 1, 5, 30 e 2000 (aversão ao risco tecnicamente infinita). Utilizamos os valores sugeridos por CCV para os parâmetros ψ , δ e ρ . Sendo assim, os cálculos foram realizados com $\psi = 1$, $\delta = 0.92$ (frequência mensal) e $\rho = 0.92$. Nesse mesmo artigo, CCV mostram que a utilização de outros valores para os parâmetros não alteram significativamente os resultados.

Tabela 5
Alocação Estratégica do Portfolio: TCP Brasil e TCP EUA

	País Doméstico: Brasil			
	Coeficiente de Aversão ao Risco Relativo			
	1	5	30	2000
TCP Brasil	1065.16%	331.85	81.06	23.97
TCP EUA	-965.16%	231.85	18.94	76.03

A segunda coluna da tabela apresenta a alocação entre depósitos domésticos (TCP Brasil) e depósitos estrangeiros (TCP EUA) para investidores logarítmicos, ou seja, com $\gamma = 1$. Esse tipo de investidor realiza a alocação de forma míope. Sendo assim, ele escolhe seu portfólio levando em consideração o valor esperado do prêmio de risco oferecido pelos ativos, ponderados pelas suas variância, de acordo com o primeiro termo da equação 22. Desse modo, ele vai alocar a maior parcela no ativo com maior índice de Sharpe.

A alocação, quando $\gamma = 1$, apresenta uma posição comprada de 1065.16% em depósitos de curto prazo brasileiros e -965.16% em depósitos em moeda americana. Isso se deve porque depósitos em moeda brasileira possuem uma expectativa de retorno muito superior a de títulos de curto prazo americanos. Historicamente o Brasil possui taxas de juros reais muito elevadas devido ao histórico de dívida pública expressiva elevada, produto de políticas de gastos fiscais muito altos. Com isso, o investidor míope tende a se alavancar em títulos públicos de curto prazo brasileiros, que pagam taxa de juros reais com média incondicional igual a 11.025% ao ano, com desvio padrão de 6.88% anualizados, enquanto moedas americanas apresentam, para o investidor brasileiro, taxas de retorno real com média incondicional igual de apenas 0.86% ao ano e volatilidade de 6.33% anualizada, já levando em consideração a conversão cambial. Vê-se o porquê do investidor doméstico míope se alavancar tanto no ativo brasileiro. Esse ativo possui um retorno esperado muito maior que o ativo estrangeiro, com volatilidade semelhante. Esse resultado justifica o pensamento convencional que evita a exposição cambial como alocação estratégica, utilizando esse tipo de ativo apenas fins especulativos.

Entretanto, investidores de longo prazo com coeficiente de aversão ao risco relativo maior que 1 preferem ativos que se valorizam quando as oportunidades futuras de investimento se deterioram. Isto porque estes ativos funcionam como uma proteção para a riqueza e o consumo futuros do investidor contra choques negativos no retorno esperado dos ativos financeiros disponíveis, os quais acarretariam uma redução no seu nível de consumo futuro. Ativos desse tipo possuem correlação negativa com as oportunidades futuras de investimento e apresentam um risco menor no longo prazo.

Analisando a tabela 5, observa-se que à medida que a aversão ao risco relativa do investidor aumenta, a demanda por moeda americana também aumenta. Com $\gamma = 30$, o investidor já aloca uma parcela significativa do seu portfólio, igual a 18.94%, em depósitos em moeda americana.

Um investidor extremamente conservador alocará a maior parte de sua riqueza em depósitos em moeda estrangeira. Com um $\gamma = 2000$, o investidor brasileiro de longo prazo aloca 76.03% do seu portfólio na moeda americana e apenas 23.97%

em depósitos em moeda brasileira. Esse resultado reflete o efeito de redução da volatilidade do câmbio no longo prazo, devido reversão a média estimada para o câmbio real.

Isso acontece, porque a medida que os investidores tornam-se mais conservadores, eles vão deixando de tomar suas decisões unicamente com base na análise média-variância, reduzindo a alocação míope e aumentando sua demanda por proteção. Quando o investidor torna-se infinitamente avesso ao risco, ele monta seu portfólio com base apenas na sua demanda por *hedge* intertemporal.

Agora vamos analisar como os resultados obtidos na estimação do VAR para Brasil-EUA, apresentados na tabela 2, explicam os resultados referentes à alocação ótima do investidor brasileiro, apresentados na tabela 5 acima. Pela tabela 2, sabemos que a taxa de juros real brasileira ex-post é explicada por sua própria defasagem. Além disso, este efeito tem coeficiente positivo e é bastante significativo. Isto implica que um aumento da taxa de juros corrente ex-post r_t tem um efeito positivo sobre a expectativa da taxa de juros real futura $E_t(r_{t+1})$, ou seja, um aumento da taxa de juros corrente ex-post brasileira acarreta uma melhoria das expectativas quanto às oportunidades futuras de investimento em depósitos em moeda brasileira. Por outro lado, uma redução da taxa de juros corrente r_t tem um efeito negativo sobre a expectativa da taxa de juros futura $E_t(r_{t+1})$, ou seja, uma redução da taxa de juros corrente ex-post brasileira acarreta uma deterioração das expectativas quanto às oportunidades futuras de investimento em títulos curtos brasileiros. Em outras palavras, a taxa de juros real brasileira apresenta a propriedade de "aversão" à média. Além disso, devido à correlação contemporânea negativa entre os choques na taxa de juros real brasileira r_t e no câmbio real e_t , também observada na tabela 2, pode-se afirmar que, em média, uma deterioração nas oportunidades futuras de investimento é acompanhada por uma elevação do câmbio real, o que por sua vez tem um impacto positivo sobre o valor real corrente de uma posição em dólar mantida pelo investidor brasileiro. Assim, uma exposição cambial, na forma de uma posição comprada em dólar, protege o investidor brasileiro contra deteriorações das oportunidades futuras de investimento que impactam negativamente sobre seu consumo e riqueza futura. Logo, é ótimo para o investidor conservador de longo prazo brasileiro demandar títulos americanos para reduzir a volatilidade de sua riqueza e consumo no futuro. A explicação intuitiva deste resultado está no fato de que uma queda da taxa de juros real ex-post corrente brasileira, ao impactar de forma negativa na expectativa da taxa de juros futura, incentiva uma saída de dólares da economia brasileira, elevando assim taxa de câmbio e aumento o valor real das posições compradas em dólar.

5.2 Análise 2: Brasil x EUA (País doméstico - EUA)

Torna-se relevante observar os resultados de alocação quando invertemos os referenciais, colocando os EUA como país doméstico e o Brasil como país estrangeiro. Analisando do ponto de vista do investidor americano, podemos realizar uma análise mais completa e verificar se os resultados se comportam de acordo com o que foi discutido no caso anterior, utilizando o Brasil como país doméstico.

Na tabela 6 são apresentados os resultados de alocação para depósitos domésticos (TCP EUA) e depósitos estrangeiros (TCP Brasil). Um investidor míope americano, com $\gamma = 1$, aloca 152% de sua poupança em títulos de curto prazo brasileiros, refletindo ainda o elevado retorno real esperado nesse ativo. Apesar da volatilidade elevada imbutida no câmbio real, a taxa de juros real brasileira ainda é elevada o suficiente para compensá-la e fazer o agente se alavancar no ativo estrangeiro, vendendo títulos domésticos.

O valor esperado do log da taxa de juros real americana é 0.68% ao ano. Já a taxa de juros brasileira apresenta um retorno anual de 5.24%, já considerando a conversão cambial, ou seja, quase 8 vezes maior. Por outro lado, o título brasileiro é muito mais arriscado para o investidor americano, apresentando volatilidade igual a 21.31% anualizada, enquanto que a volatilidade do título americano é de apenas 3.62%. Mesmo com a elevada volatilidade, o índice de Sharpe do título brasileiro é mais de 30% maior que a razão de Sharpe do título americano, explicando a preferência pelo ativo brasileiro.

Tabela 6
Alocação Estratégica do Portfólio: TCP Brasil e TCP EUA

	País Doméstico: EUA			
	Coeficiente de Aversão ao Risco Relativo			
	1	5	30	2000
TCP EUA	-52.14%	-24.67	67.17	131.51
TCP Brasil	152.14%	124.67	32.83	-31.51

A medida que a aversão ao risco do investidor aumenta, o critério média-variância, utilizado na alocação míope, torna-se cada vez menos importante para a decisão de escolha do portfólio, e assim, menos vai sendo alocado em moeda brasileira. Isso acontece porque a medida que o investidor vai ficando mais avesso ao risco mais importância vai sendo dada para a capacidade de *hedge* intertemporal dos ativos.

Verificamos na tabela 3 que a taxa de juros real brasileira apresenta a propriedade de aversão à média. Isso torna esse ativo pouco atraente para o investidor que deseja se proteger contra a deteriorização das oportunidades futuras de investimento, já que isso significa que depósitos brasileiros apresentam resultados fracos quando as expectativas das oportunidades futuras de reinvestimento se deterioram.

Por outro lado, a expectativa para a taxa de juros americana, apesar de ser afetada positivamente por seu passado, possui uma persistência muito menor, o que torna esse ativo mais atraente para o investidor de longo prazo. Além disso, na parte inferior da tabela 2, verificamos que a correlação contemporânea entre os choques na taxa de juros real brasileira r_t e no câmbio real e_t , são positivos. Isso porque, como os EUA é o país doméstico, o referencial para o câmbio inverte, alterando o seu sinal da correlação. Com isso, uma deterioração nas oportunidades futuras de investimento em depósitos brasileiros é acompanhada por uma redução do câmbio real, o que impacta negativamente a posição em reais mantida pelo investidor americano. Assim, uma exposição cambial, comprada em reais, piora a situação do investidor americano contra deteriorações das oportunidades futuras de investimento que impactam negativamente sobre seu consumo e riqueza futura. Logo, o investidor conservador de longo prazo americano deveria vender títulos brasileiros para reduzir a volatilidade de sua riqueza e consumo no futuro.

Novamente, pode-se entender intuitivamente este resultado observando que uma queda da taxa de juros real ex-post corrente brasileira, ao impactar de forma negativa na expectativa da taxa de juros futura, incentiva uma saída de dólares da economia brasileira, o que enfraquece o real comparativamente ao dólar, reduzindo o valor das posições compradas em reais.

Sendo assim, a medida que a aversão ao risco aumenta, o investidor aloca uma parcela cada vez maior no ativo doméstico que apresenta uma capacidade superior de atuar como *hedge* intertemporal para sua riqueza. Como verificamos na tabela 6, um investidor americano de longo prazo extremamente avesso ao risco ficará vendido em moeda brasileira para se alavancar em depósitos americanos.

5.3 Análise 3: Brasil x Japão

Nessa seção analisaremos o comportamento da escolha do portfólio de um investidor brasileiro de longo prazo, que decide entre o investimento em depósitos de curto prazo brasileiros e japoneses.

Com $\gamma = 1$, o investidor realiza sua escolha de portfólio com visão de curto prazo, sem se preocupar com o *hedge* intertemporal de sua carteira de investimentos. Nesse caso, como podemos observar na tabela 7, o investidor brasileiro aloca cerca de 80% de sua poupança em depósitos no Brasil e apenas 20% em moeda japonesa.

O investidor decide investir a maior parte de sua riqueza em depósitos brasileiros, pois apesar de apresentar retorno esperado equivalente ao da moeda japonesa, possui volatilidade muito mais baixa. De acordo com a tabela 1, depósitos de curto prazo no Brasil apresentam média incondicional igual a 11%, aproximadamente, enquanto a moeda japonesa possui retorno esperado igual a 11.2%. O retorno esperado do ativo japonês é calculado somando os retornos esperados do depósito de curto prazo no Japão com a variação cambial e metade da variância dos dois ativos. O ativo brasileiro possui desvio padrão incondicional de aproximadamente 6.88%, enquanto que a moeda japonesa apresenta desvio padrão de 21.89%, refletindo a volatilidade cambial.

Verificamos um resultado curioso quando γ aumenta de 1 para 5 e depois para 30. O percentual alocado em moeda estrangeira inicialmente vai de uma posição comprada de 20% para uma posição vendida de 9% e em seguida aumenta para uma posição comprada de 13%. Isto ocorre porque, à medida que γ sobe de 1 para 5, o aumento da demanda por moeda japonesa para hedge intertemporal é menor, em termos absolutos, que a redução linear da demanda míope por este ativo. Como a soma destas duas demandas é a demanda total pelo ativo, apresentada na tabela 7, esta sofre uma redução. No entanto, esta tendência se inverte quando γ sobe além de 5, de forma que a demanda total pela moeda japonesa passa a aumentar com γ .

Tabela 7
Alocação Estratégica do Portfólio: TCP Brasil e TCP Japão

País Doméstico: Brasil				
Coeficiente de Aversão ao Risco Relativo				
	1	5	30	2000
TCP Brasil	79.42%	109.29	86.66	70.67
TCP Japão	20.58%	-9.29	13.34	29.33

A medida que a aversão ao risco aumenta, o investidor vai aumentando a proporção de sua riqueza alocada em moeda japonesa. De acordo com a tabela 4, isto ocorre porque a taxa de juros real brasileira é positivamente e significativamente afetada por sua própria defasagem, apresentando assim a propriedade de "aversão à média",

enquanto a taxa de juros japonesa possui esse efeito muito menos persistente. Além disso, choques na taxa de juros corrente brasileira covaria negativamente com choques sobre o câmbio real. Isso significa quando a taxa corrente brasileira cai, a expectativa sobre as oportunidades futuras de investimento se deterioram, mas por outro lado, simultaneamente haverá um aumento do valor real dos depósitos em moeda japonesa, protegendo assim o consumo e a riqueza futura do investidor de longo prazo.

5.4 Análise 4: Brasil x Inglaterra

Por fim, calculamos a escolha do portfólio para o par Brasil-Inglaterra, utilizando o Brasil como país doméstico. Na tabela 8, podemos verificar que um investidor brasileiro míope, ou seja, que realiza escolha do portfólio apenas observando o *trade off* entre valor esperado e variância dos ativos, aloca a maior parte de sua riqueza em moeda inglesa.

Para nossa surpresa, aproximadamente 85% da poupança do investidor brasileiro é direcionada para depósitos britânicos, aproximadamente o contrário da alocação obtida quando o investidor brasileiro decide entre investir em depósitos brasileiros e depósitos japoneses.

Tabela 8
Alocação Estratégica do Portfólio: TCP Brasil e TCP Inglaterra

País Doméstico: Brasil				
Coeficiente de Aversão ao Risco Relativo				
	1	5	100	2000
TCP Brasil	14.86%	74.09	74.14	74.68
TCP Inglaterra	85.14%	25.91	25.86	25.32

Isso se deve ao fato da taxa de juros inglesa ser muito maior que as taxas americanas e japonesas. Apesar do Brasil possuir uma taxa de juros real esperada elevada, que de acordo com a tabela 1, é de aproximadamente 11% ao ano, e a taxa de juros real inglesa possuir uma taxa de juros esperada de pouco mais que 3% ao ano, ainda deve-se contar com o retorno do câmbio devido a conversão cambial, que é de quase

9% anualizado. Sendo assim, o retorno esperado de um investimento em moeda inglesa para um investidor brasileiro fica aproximadamente 14% ao ano³, quase 30% maior que o valor esperado do retorno de títulos domésticos. Isso já é o suficiente para o investidor míope preferir esse ativo.

A medida que o coeficiente de aversão ao risco do investidor aumenta, da mesma forma cresce a demanda por *hedge* intertemporal. Entretanto, esse é um caso interessante, pois nem títulos brasileiros nem títulos ingleses parecem se diferenciar significativamente na função de proteção para a riqueza do investidor ao longo do tempo. Isso pode ser verificado ao analisarmos os coeficientes estimados no VAR para o par de países.

Na tabela 3, verificamos que as taxas de juros futuras no Brasil possuem um coeficiente positivo e bastante elevado para o seu próprio passado, de aproximadamente 0.53. Isso significa que as taxas de juros brasileiras costumam ir mal quando as oportunidades de investimento se deterioram. Isso torna os depósitos de curto prazo brasileiros, ativos ruins para o *hedge* intertemporal da riqueza do investidor de longo prazo brasileiro.

Por outro lado, a moeda inglesa também se tornam não se comporta muito bem na função de *hedge* para a riqueza do investidor brasileiro. Na tabela 3 observamos, que apesar de títulos de curto prazo ingleses irem bem quando as oportunidades de investimento futuras apresentam resultados piores, o câmbio apresenta um resultado ruim nesses momentos, pois a covariância entre os choques na taxa de juros corrente inglesa e o câmbio real é positivo, anulando o efeito de *hedge* de depósitos estrangeiros para o investidor brasileiro.

Sendo assim, o componente de *hedge* intertemporal se torna aproximadamente neutro comparativamente entre os dois ativos e a alocação torna-se constante ao aumentarmos o coeficiente de aversão ao risco do investidor.

Nesse caso, vemos que o componente de demanda por *hedge* intertemporal apenas serve para reduzir o percentual alocado no ativo brasileiro, quando a demanda deixa de ser puramente míope, quando a aversão ao risco passa de $\gamma = 1$ para $\gamma = 5$. Em seguida, a medida que a aversão ao risco aumenta a alocação não se altera significativamente.

³Para chegar aos 14% ao ano, adiciona-se metade da variância ao retorno esperado do ativo para levar em consideração a desigualdade de Jensen (já que estamos tratando do logaritmo do valor esperado de variáveis lognormais).

6 Conclusão

Nesse trabalho argumentamos que investimentos em depósitos denominados em moedas estrangeiras, mantidos sem cobertura cambial, podem ser atraentes não apenas para motivos especulativos, mas também como alocação estratégica de longo prazo. Mais que isso, insistimos que o investimento em depósitos em moeda estrangeira não adicionam risco de longo prazo ao portfolio de um investidor doméstico. Muito pelo contrário, são uma proteção para o valor de longo prazo desse portfolio. Essa aplicação da teoria de demanda por *hedge* intertemporal de Merton vai de encontro ao pensamento tradicional que acredita que a exposição a moedas é uma fonte de risco que deve ser evitada por investidores conservadores.

Utilizando dados da economia brasileira e americana, no período compreendido entre janeiro de 1999 e fevereiro de 2007, verificamos que a demanda por *hedge* intertemporal para moeda estrangeira pode ser bastante elevado. Um investidor brasileiro altamente conservador e que só pode investir em depósitos em moeda doméstica e depósitos em moeda americana, alocaria 76% do seu portfolio no ativo americano e apenas 24% no ativo brasileiro.

Por outro lado, observamos que depósitos na moeda Brasileira e na moeda da Inglaterra, enquanto países estrangeiros, apresentaram baixa ou nenhuma demanda como ativos de proteção intertemporal da carteira do investidor de longo prazo, avesso ao risco.

Verificamos os resultados encontrados por Campbell, Viceira e White (CVW, 2002), que investidores acham atraentes moedas estrangeiras de países com taxa de juros real estável e descorrelacionadas com suas taxas de câmbio. CCW ainda sugerem que países que possuem esse tipo de características possuem economias bastante desenvolvidas, como no caso dos EUA e do Japão.

Apesar de termos obtido os resultados esperados para a demanda por moeda estrangeira, várias dificuldades e limitação estão presentes no trabalho empírico. Apesar de o ideal seria realizar análises de portfolios diversificados em várias moedas, optamos por realizar análises mais simples utilizando carteiras de investimento com apenas um par de países por vez. Além disso limitamos o universo de ativos para somente depósitos de curto prazo nas moeda dos dois países. Outros problemas surgiram em função das séries de dados brasileiras. Devido a períodos de câmbio fixo, hiperinflação e preços administrados, o período de dados utilizáveis para análise ficou muito curto. Sendo assim, fomos obrigados a reduzir frequência dos dados utilizados, de trimestral, que é o mais condizente para prazos de realocação de carteiras de investidores de longo prazo, para séries com frequência mensal. Mesmo assim, ao termos

que restringir nossa amostra ao início de 1999, trabalhamos apenas com 98 dados em cada série.

Outra dificuldade foi que vários coeficientes estimados no VAR não tiveram relevância estatística para a explicação da dinâmica das oportunidades de investimentos, principalmente para os casos das taxas de juros real da Inglaterra e do Japão. Para tentar contornar esse problema experimentamos incluir várias outras variáveis explicativas no nosso sistema, como taxa de inflação dos dois países, variação da taxa de câmbio, risco Brasil e variação do risco país, mas além de poluir o sistema e dificultar as análises, vários coeficientes continuaram sem significância estatística, o que fez com que voltássemos para o sistema VAR " enxuto", sugerido por CVW. Uma explicação para essa dificuldade pode estar no tamanho e qualidade da amostra. De alguma forma, a dinâmica do câmbio nominal e do câmbio real dos países analisados sofreram com a taxa de juros real brasileira extremamente maior que a dos países analisados, momentos de inflação elevada no Brasil e intervenções do Banco Central do Brasil no mercado cambial. Além disso, o tamanho da amostra limita a qualidade da previsibilidade do sistema.

Há ainda o pressuposto de que as taxas de câmbio real seguem um processo estacionário. Ignoramos a possível existência de choques permanentes na taxa de câmbio real como, por exemplo, choques de produtividade que alteram o preço de equilíbrio de longo prazo de ativos não negociáveis em relação a de ativos negociáveis. Além disso, ignoramos o fato da taxa de juros real inglesa ter apresentado indícios de raiz unitária no teste de *Augmented Dickey-Fuller*. Isso pode ter tornado nosso modelo mal especificado. Além disso, assumimos que as dinâmicas das taxas de juros e da taxa de câmbio, estimadas no VAR, são constantes ao longo do tempo. Isso ignora o fato das constantes mudanças na política monetária e nos dois países, principalmente no Brasil.

Vale também ressaltar as limitações do modelo, ao analisar os resultados obtidos. Na restrição orçamentária, não levamos em consideração a riqueza oriunda do trabalho do investidor. Não restringimos venda a descoberto, o que leva a alavancagens elevadas como observada na carteira do investidor doméstico brasileiro com $\gamma = 1$ e $\gamma = 5$, que está habilitado para investir em títulos brasileiros e americanos. O sistema de VAR é estimado sem correções para amostras pequenas e não são levadas em consideração perspectivas macroeconômicas para a dinâmica futura da economia não embutidas nas amostras dos dados. Por fim, consideramos que o investidor conhece todos os parâmetros do modelo e os retornos futuros de ante-mão.

7 Referências

Campbell, J. Y., (1987). "*Stock returns and the term structure*". Journal of Financial Economics 18, 373-399.

e risk". Journal of Finance 46, 111-157.

Campbell, J.Y., (1993). "*Intertemporal asset pricing without consumption data*". American Economic Review 83, 487-512.

Campbell, J.Y., (1996). "*Understanding risk and return*". Journal of Political Economy 104, 298-345.

CAMPBELL, John Y. e Luis M. Viceira (2002). "*Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors*", Oxford: Oxford University Press.

CAMPBELL, John Y., Luis M. Viceira e Joshua S. White (2002). "*Foreign Currency for Long-Term Investors*", Manuscrito.

CAMPBELL, John Y., Yeung Lewis Chan e Luis M. Viceira (2002). "*A Multivariate Model of Strategic Asset Allocation*", Journal of Financial Economics, Vol. 67, No. 1:41-80.

Epstein, L., Zin, S., (1989). "*Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns: a theoretical framework*". Econometrica 57, 937-69.

Epstein, L., Zin, S., (1991). "*Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns: an empirical investigation*". Journal of Political Economy 99, 263-286.

Glosten, L. R., Jagannatahn, R., Runkle, D., (1993). "*On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks*". Journal of Finance 48, 1779-1801.

Harvey, C., (1989). "*Time-varying conditional covariances in tests of asset pricing models*". Journal of Financial Economics 22, 305-334.

Harvey, C., (1991). "*The world price of covariance risk*". Journal of Finance 46, 111-157.

MARKOWITZ, Harry, (1952). "*Portfolio Selection*", Journal of Finance 7, 77-91.

Merton, R.C., (1969). "*Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous time case*". Review of Economics and Statistics 51, 247-257.

Merton, R.C., (1971). "*Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model*". Journal of Economic Theory 3, 373-413.

8 Apêndice A: Demonstração dos Resultados (29), (30) e (31)

Inicialmente, deve-se notar que Z_{t+1} , z_t e z_{t+1} se relacionam da seguinte maneira:

$$Z_{t+1} = H.z_t + \Xi.z_{t+1}, \quad (32)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} r_{t+1} \\ r_{t+1}^* + \Delta e_{t+1} - r_{t+1} \\ \Delta e_{t+1} \\ e_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_t \\ r_t^* \\ e_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{t+1} \\ r_{t+1}^* \\ e_{t+1} \end{bmatrix}$$

onde H e Ξ são definidos por

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \Xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, nota-se também que z_t e Z_{t+1} se relacionam da seguinte maneira:

$$H.z_t = \Psi.Z_{t+1}, \quad (33)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_t \\ r_t^* \\ e_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{t+1} \\ r_{t+1}^* + \Delta e_{t+1} - r_{t+1} \\ \Delta e_{t+1} \\ e_{t+1} \end{bmatrix},$$

onde

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, substituindo a transformação (33) na equação (32), obtemos

$$Z_{t+1} = \Psi.Z_{t+1} + \Xi.z_{t+1}$$

ou ainda, de forma equivalente:

$$(I - \Psi)Z_{t+1} = \Xi.z_{t+1}$$

A equação acima vale em todos os períodos. Multiplicando ambos os lados da equação acima pela transposta de Ξ e invertendo, obtemos

$$(\Xi'\Xi)^{-1}\Xi'(I - \Psi)Z_t = z_t \quad (34)$$

Sabemos pela equação (26) que o processo para as variáveis estado é dado por

$$z_{t+1} = A_0 + A_1 z_t + v_{t+1}$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por Ξ e, posteriormente, somando $H z_t$ a ambos os lados, obtemos

$$H z_t + \Xi z_{t+1} = \Xi A_0 + (H + \Xi A_1) z_t + \Xi v_{t+1}$$

Substituindo os resultados (32) e (34) na equação acima, obtemos

$$Z_{t+1} = \Xi A_0 + (H + \Xi A_1)(\Xi'\Xi)^{-1}\Xi'(I - \Psi)Z_t + \Xi v_{t+1} \quad (35)$$

Sendo assim, o novo VAR fica na forma 5 e seus parâmetros são dados por

$$u_{t+1} = \Xi v_{t+1},$$

$$\Phi_0 = \Xi A_0,$$

$$\Phi_1 = (H + \Xi A_1)(\Xi'\Xi)^{-1}\Xi'(I - \Psi).$$

Além disso, a matriz de covariâncias dos resíduos é

$$\Sigma_u = var[u_{t+1}] = \Xi \Sigma_v \Xi'$$