

Fundação Getúlio Vargas
Escola de Matemática Aplicada

**Introdução ao Cálculo de Malliavin e uma Aplicação
em Finanças**

Camilla Antunes

Rio de Janeiro
2018

Camilla Antunes

Aplicações do Cálculo de Malliavin em Finanças

Dissertação submetida à Escola de Matemática Aplicada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática da Informação.

Orientador: Yuri Saporito

Rio de Janeiro

2018

Antunes, Camilla

Introdução ao cálculo de Malliavin e uma aplicação em finanças / Camilla Antunes Silva. - 2018.

44 f.

Dissertação (mestrado) – Fundação Getulio Vargas, Escola de Matemática Aplicada.

Orientador: Yuri Saporito.

Inclui bibliografia.

1. Processo estocástico. 2. Cálculo Malliavin . 3. Modelagem de dados.
I. Saporito, Yuri Fahham. II. Fundação Getulio Vargas. Escola de Matemática Aplicada. III. Título.

CDD – 519.23

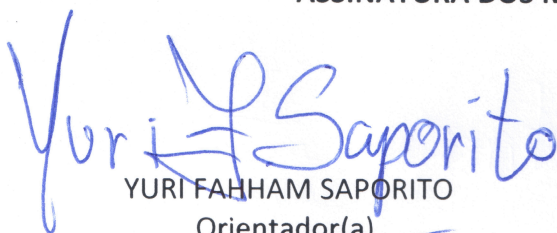
CAMILLA ANTUNES SILVA

“INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE MALLIAVIN E UMA APLICAÇÃO EM FINANÇAS”.

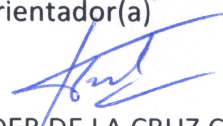
Dissertação apresentado(a) ao Curso de Mestrado em Modelagem Aplicada da Informação do(a) Escola de Matemática Aplicada para obtenção do grau de Mestre(a) em Modelagem Aplicada da Informação.

Data da defesa: 26/06/2018


ASSINATURA DOS MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA



YURI FAHAM SAVORITO
Orientador(a)



HUGO ALEXANDER DE LA CRUZ CANSINO
Membro Interno



JORGE PASSAMANI ZUBELLI
Membro Externo

Agradecimentos

Agradeço inicialmente ao meu noivo, Matheus, por entender todas as situações em que eu tive que me abster de estar na presença dele para poder me dedicar aos estudos que geraram esta dissertação.

Agradeço à minha mãe, Valéria, por entender que não poderia estar presente em todos os momentos em que fui solicitada. Agradeço-a também por todo esforço despendido na minha formação, tanto acadêmica quanto pessoal.

Agradeço a todos os professores e colaboradores da Escola de Matemática Aplicada da Fundação Getúlio Vargas pela oportunidade de desenvolver meus conhecimentos. Tanto na graduação quanto no mestrado, toda a dedicação da equipe foi de grande valia para a minha formação.

Finalmente agradeço ao meu orientador, Yuri, por todo o tempo gasto para me apoiar no desenvolvimento da minha dissertação e por todos os conselhos que recebi durante esse período. Espero que venhamos, novamente, a trabalhar juntos no futuro.

Resumo

Um dos métodos de análise de derivativos financeiros é o estudo de seu comportamento em relação a variações do seu ativo subjacente. Quando o payoff do derivativo não é uma função suave, temos problemas para calcular esse comportamento. Usamos o Cálculo de Malliavin para encontrar um método para calcular a primeira derivada do preço em relação ao valor inicial do ativo subjacente mesmo quando o payoff correspondente não é diferenciável. Para isso, estudamos a derivada de Malliavin e seu adjunto, a integral de Skorohod.

Abstract

One of the methods of analyzing financial derivatives is the study of their behavior in relation to variations in the underlying asset. When the derivative payoff is not a smooth function, we have trouble calculating this behavior. We use Malliavin calculus to find a method to calculate the first derivative of price in relation to the initial value of the underlying asset even when the corresponding payoff is not differentiable. For this, we study the derivative of Malliavin and its adjoint, the Skorohod integral.

Conteúdo

1	Introdução	7
2	Pré-requisitos	9
2.1	Espaço de Banach	9
2.2	Espaço de Hilbert	10
2.3	Variável Aleatória	10
2.4	Processos Estocásticos	11
2.5	Operador Fechável	11
2.6	<i>Mollifiers</i>	12
2.7	Finanças	14
2.7.1	Opções	14
3	A Derivada de Malliavan	15
3.1	Definição e propriedades	15
3.1.1	O caso do <i>White Noise</i>	22
4	O Operador de Divergência	23
4.1	Definição e Propriedades	23
4.2	Integral de <i>Skorohod</i>	30
4.2.1	A Integral de Itô como um caso particular da Integral de <i>Skorohod</i>	31
5	Cálculo do Delta de uma Opção	33
5.1	A derivada de uma difusão	34
5.2	Uma fórmula para o Delta usando o Cálculo de Malliavin	36
5.3	Simulações numéricas	38
5.3.1	O caso da Call	38
5.3.2	O caso da Digital	40
6	Conclusão	42

Capítulo 1

Introdução

O Cálculo de Malliavin (também conhecido como cálculo estocástico das variações) é um cálculo diferencial em dimensão infinita no espaço de Wiener¹. O Cálculo é composto por técnicas e ideias que ampliam o campo matemático do cálculo de variações de funções determinísticas para processos estocásticos. Em particular, permite o cálculo de derivadas de variáveis aleatórias.

Os fundamentos do assunto foram desenvolvidos no final dos anos 1970, a fim de estudar a existência e a suavidade da densidade para as leis de probabilidade de vetores aleatórios. A motivação original e a aplicação mais importante dessa teoria foi fornecer uma prova probabilística do teorema da hipoelipticidade de Hörmander. A teoria foi desenvolvida por Stroock, Bismut, Watanabe, Malliavin e outros, e ganhou importância em vários campos, muito além do problema original.

Uma das aplicações do Cálculo de Malliavin é o cálculo das gregas para opções financeiras. Hoje é vital para os gestores e negociadores de risco financeiro entenderem a sensibilidade dos valores das carteiras de opções a pequenas mudanças nos parâmetros dos ativos subjacentes, para que diferentes componentes de risco possam ser tratados e as carteiras possam ser protegidas contra possíveis exposições.

Essas sensibilidades nas carteiras podem ser medidas com a gregas das opções, algumas das mais conhecidas são:

1. **Delta:** Mede a taxa de variação do preço de uma opção em relação a mudanças no valor de um ativo subjacente a ela.
2. **Vega:** Mede a sensibilidade do preço da opção em relação à volatilidade do ativo subjacente.

¹Espaço de Wiener: espaço de todas as funções contínuas $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(0) = 0$ com a medida de Wiener.

3. **Gamma:** Mede a variação do Delta em relação a mudanças no preço do ativo subjacente à opção analisada.

O Cálculo de Malliavin é uma ferramenta útil para calcular essas gregas, principalmente quando a função de payoff não é suave, como por exemplo a opção Digital (também conhecida como opção binária) que possui o seguinte payoff:

$$\phi = \begin{cases} 1, & \text{Strike} \geq \text{Preço do ativo} \\ 0, & \text{Strike} < \text{Preço do ativo} \end{cases}$$

Neste trabalho apresentaremos a fórmula para o cálculo do Delta utilizando o cálculo de Malliavin, o cálculo das gregas Vega e e Gamma podem ser vistos em [3].

No Capítulo 2 temos os pré-requisitos para a leitura da dissertação, passamos por definições de Análise Real, de Processos Estocásticos e Análise Funcional. É esperado um conhecimento inicial, como o uso de sigma-álgebras e cálculo de Itô.

No Capítulo 3 introduzimos a Derivada de Malliavin e suas propriedades, dentre elas, vemos o teorema da Regra da Cadeia que será útil em nossas aplicações. No fim do capítulo temos uma pequena seção que trata do caso White Noise, em que as variáveis aleatórias são integrais de Itô. No Capítulo 4 estudamos o adjunto do operador da derivada de Malliavin, o operador de divergência, tratamos também de suas propriedades e da integral de Skorohod, que novamente se refere ao caso White Noise. Durante a dissertação evitamos a decomposição em caos de Wiener, com isso as demonstrações que dependem dessa decomposição estão referenciadas.

O quinto capítulo usa as definições e propriedades vistas nos capítulos anteriores para encontrar uma fórmula para o Delta que não dependa da derivada do seu payoff.

Capítulo 2

Pré-requisitos

Os pré-requisitos abaixo tiveram como referências o livro [1] para assuntos que tratam de análise funcional, o livro [5] para as definições de Cálculo Estocástico e variáveis aleatórias.

2.1 Espaço de Banach

Para definir o que é um espaço de Banach precisamos passar por algumas outras definições antes:

Definição 2.1.1. Chama-se **espaço Normado** um par $(V, ||.||)$, onde V é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} e $||.|| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ é a função **norma** onde se verificam as seguintes propriedades para todos $x, y \in V$:

1. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
3. (Desigualdade Triangular) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Definição 2.1.2. Uma sequência $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \in V$ é chamada de **sequência de Cauchy** quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m, n > n_0$, $||x_m - x_n|| < \varepsilon$.

Definição 2.1.3. Um espaço normado, V , é dito **completo** se toda sequência de Cauchy em V converge para um ponto em V .

Com as definições acima podemos finalmente definir o espaço de Banach.

Definição 2.1.4. Um **espaço de Banach** é um espaço normado completo.

2.2 Espaço de Hilbert

Definição 2.2.1. Um **produto interno** real no espaço vetorial H é uma função de $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ de maneira que para quaisquer $x, y, z \in H$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
2. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;
3. $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$;
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$;
5. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Definição 2.2.2. Um **espaço de Hilbert** é um espaço de Banach munido de um produto interno onde sua norma é induzida por ele. De forma que, seja x um elemento do espaço de Hilbert, temos que $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

Consideraremos durante toda a dissertação que o conjunto H é um espaço de Hilbert.

2.3 Variável Aleatória

Definição 2.3.1. Um **espaço de probabilidade** é uma tripla formada $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ formada por um conjunto Ω , uma sigma-álgebra \mathcal{F} sobre Ω e uma medida positiva \mathbb{P} em \mathcal{F} (chamada de medida de probabilidade), tal que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Definição 2.3.2. Uma **variável aleatória** sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é uma função $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\{F \leq x\} = \{\omega \in \Omega; F(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definição 2.3.3. Podemos definir o espaço L^2 da seguinte forma:

$$L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{F \text{ é variável aleatória e } \mathbb{E}(F^2) < \infty\}$$

Definição 2.3.4. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Um evento $E \in \mathcal{F}$ acontece quase certamente se $\mathbb{P}(E) = 1$. De forma equivalente, E acontece quase certamente se a probabilidade de E não ocorrer é zero, ou seja, $\mathbb{P}(E^c) = 0$. Usaremos a notação *q.c.* para expressar que uma igualdade ocorre quase certamente.

2.4 Processos Estocásticos

Definição 2.4.1. Um **processo estocástico** em I , $\{X_t, t \in I\}$, é uma coleção de variáveis aleatórias definidas em um espaço de probabilidade comum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Um processo estocástico $\{B_t : 0 \leq t \leq T\}$ é chamado de **Processo Browniano Padrão** em $[0, T]$ se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $B_0 = 0$ q.c.;
2. Para todo t_1, \dots, t_n em $[0, T]$, onde $t_1 < \dots < t_n$, os incrementos $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ $i \in \{1, \dots, n-1\}$ são independentes;
3. Para todo $0 \leq s \leq t < T$, os incrementos $B_t - B_s$ tem distribuição Normal com média zero e variância $t - s$;
4. Para todo ω em um conjunto de probabilidade 1, $B_t(\omega)$ é uma função contínua de t .

Definição 2.4.2. Um processo estocástico $\{X_t, t \in I\}$ é um processo Gaussiano se para todo t_1, \dots, t_n em I o vetor $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ é distribuído de acordo com a normal multivariada de dimensão n .

Definição 2.4.3. Um processo estocástico $W = \{W(h), h \in H\}$ definido em um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é um **processo Gaussiano isonormal** se W é um processo gaussiano centrado ($\mathbb{E}[W(h)] = 0$) tal que $\mathbb{E}(W(h)W(g)) = \langle h, g \rangle_H$ para todos $h, g \in H$.

Definição 2.4.4. Seja $\{X_t, t \in T\}$ um processo estocástico definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ uma filtração de \mathcal{F} , onde $\min(T) = t_0$. Então o processo $\{X_t\}$ é dito adaptado à filtração $\{\mathcal{F}_t\}$ se para cada $t \geq t_0$, X_t é \mathcal{F}_t -mensurável:

$$X_t^{-1}(B) \in \mathcal{F}_t \text{ para cada conjunto de Borel } B \in \mathcal{B}$$

2.5 Operador Fechável

Definição 2.5.1. Um operador linear $A : D_A \subset X \rightarrow Y$, onde X e Y são espaços de Banach e D_A é um subespaço de X , é dito fechado se para qualquer sequência $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ de elementos em D_A tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$, temos que $x \in D_A$ e $Ax = y$.

Definição 2.5.2. Um operador linear $A : D_A \rightarrow Y$ é dito fechável se há uma extensão fechada e linear $B : D_B \rightarrow Y$, onde $D_A \subset D_B$ e $Ax = Bx, \forall x \in D_A$.

Lema 2.5.1. *Um operador linear $A : D_A \rightarrow Y$ é fechável se e somente se para qualquer sequência $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ em D_A tal que, para $x_n \rightarrow 0$ e $Ax_n \rightarrow y$, segue que $y = 0$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que A é fechável, e que B é uma extensão fechada de A . Se $x_n \in D_A$, então $x_n \in D_B$. Como $Bx_n = Ax_n \rightarrow y$ e $x_n \rightarrow 0$, já que B é fechado, temos que $y = B0 = 0$.

(\Leftarrow) Considere o espaço abaixo:

$$L = \{x \in X : \exists \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subseteq D_A \text{ e } y \in Y \text{ tais que } x_n \rightarrow x \text{ e } Ax_n \rightarrow y\}.$$

Em L , podemos definir $\overline{A}x = y$. Vamos mostrar que y é independente da sequência x_n tomada em D_A .

Seja $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \subseteq D_A$ uma sequência diferente de $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ tal que $u_n \rightarrow x$ e $Au_n \rightarrow h$. Como $x_n - u_n \rightarrow 0$ e $A(x_n - u_n) \rightarrow y - h$, temos que $y = h$.

Como \overline{A} está definido em L , é fácil ver que \overline{A} é um operador linear.

Para mostrar que o operador é fechado tome uma sequência $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ em L tal que $x_n \rightarrow x$ e $\overline{A}x_n \rightarrow y$. Para cada n , temos $x_n \in L$, e então existe $u_n \in D_A$ tal que:

$$\|x_n - u_n\| + \|\overline{A}x_n - Au_n\| < \frac{1}{n}.$$

Logo $u_n \rightarrow x$ e $Au_n \rightarrow y$, e então, $x \in L$ e $y = \overline{A}x$.

□

2.6 Mollifiers

Uma sequência de *mollifiers* $\{\rho_n, n \in \mathbb{N}\}$ em \mathbb{R}^m é qualquer sequência de funções em \mathbb{R}^m tal que

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m), \text{ suporte } (\rho_n) \subset \overline{B(0, 1/n)}, \int \rho_n = 1, \rho_n \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

É fácil gerar uma sequência de *mollifiers* começando com uma única função $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ tal que o suporte de ρ esteja contido na bola unitária e $\rho \geq 0$ em \mathbb{R}^m . Por exemplo a função:

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right), & \text{se } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Obtemos uma sequência de *mollifiers* tomando $\rho_n = Cn^m \rho(nx)$, com $C = \frac{1}{\int \rho}$.

Proposição 2.6.1. *Seja $f \in C(\mathbb{R}^m)$. Então $\rho_n * f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ uniformemente em conjuntos compactos de \mathbb{R}^m .*

Demonstração. Seja $K \subseteq \mathbb{R}^m$ um conjunto compacto dado. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (dependente de K e de ε) tal que:

$$|f(x - y) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in K, \quad \forall y \in B(0, \delta).$$

Para $x \in \mathbb{R}^m$, temos:

$$\begin{aligned} (\rho_n * f)(x) - f(x) &= \int [f(x - y) - f(x)] \rho_n(y) dy \\ &= \int_{B(0, \frac{1}{n})} [f(x - y) - f(x)] \rho_n(y) dy. \end{aligned}$$

Para $n > \frac{1}{\delta}$ e $x \in K$, temos:

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int \rho_n = \varepsilon.$$

□

Proposição 2.6.2. *Suponha $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$. Então $(\rho_n * f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ em $L^2(\mathbb{R}^m)$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$, fixamos uma função $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^m)$ tal que $\|f - f_1\|_2 < \varepsilon$. Pela Proposição 2.6.1 temos a convergência em todos os compactos de \mathbb{R}^m , por outro lado temos:

$$\text{suporte}(\rho_n * f_1) \subset \overline{B(0, 1/n)} + \text{suporte}(f_1) \subset \overline{B(0, 1)} + \text{suporte}(f_1),$$

que é um conjunto compacto fixo. Segue que:

$$\|(\rho_n * f_1) - f_1\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Podemos também escrever:

$$(\rho_n * f) - f = [\rho_n * (f - f_1)] + [(\rho_n * f_1) - f_1] + [f_1 - f]$$

E, com isso, considerando que $\|\rho_n * (f - f_1)\|_2 \leq \|f - f_1\|_2 \|\rho_n\|_1$ (pelo Teorema de Young (4.1.15) de [1]):

$$\|(\rho_n * f) - f\|_2 \leq 2\|f - f_1\|_2 + \|(\rho_n * f_1) - f_1\|_2.$$

Concluimos então que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup ||(\rho_n * f) - f||_2 \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

o que nos leva a $\lim_{n \rightarrow \infty} ||(\rho_n * f) - f||_2 = 0$. □

2.7 Finanças

2.7.1 Opções

As opções são um tipo de derivativo financeiro que te dá o direito de comprar (ou vender) o ativo subjacente a ela no futuro por um preço determinado no momento da compra da opção.

No caso do direito da compra, a opção é chamada de **Call** e no caso do direito da venda, é chamada de **Put**.

Alguns elementos são importantes na hora de analisarmos uma opção, entre eles, temos o **tempo de maturidade**, que é o tempo acordado no contrato da opção para a compra ou venda do ativo, e o **Strike**, valor que será gasto ou recebido caso a opção seja exercida no tempo de maturidade.

Digital

Um outro tipo de opção é a **Digital**. Nesse tipo de opção, o valor recebido após o tempo de maturidade é um valor fixo, então o seu lucro não é diretamente correlacionado com o valor final do ativo subjacente, apenas com o fato de se o valor desse ativo é maior ou não do que o Strike definido em contrato.

Capítulo 3

A Derivada de Malliavan

Neste capítulo introduziremos a derivada DF de uma variável aleatória F em L^2 . Isso significa que queremos diferenciar F com respeito ao parâmetro $\omega \in \Omega$. Usualmente, nas aplicações dessa teoria o espaço Ω é um espaço topológico. Entretanto, estamos interessados em variáveis aleatórias F que são definidas \mathbb{P} q.c. e que não possuem uma versão contínua. Com isso, usaremos uma noção de derivada definida em um sentido fraco, e sem assumir nenhuma estrutura topológica para o espaço Ω .

3.1 Definição e propriedades

Seja $W = \{W(h), h \in H\}$ um processo Gaussiano isonormal (Definição 2.4.3) sobre o espaço de Hilbert H . Presumimos que W está definido em um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, e que \mathcal{F} é gerado por W . Denotamos por $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as funções contínuas e infinitamente diferenciáveis $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tais que f e todas as suas derivadas parciais tem, **no máximo**, crescimento polinomial. Seja S a classe de todas as variáveis aleatórias da forma:

$$F = f(W(h_1), \dots, W(h_n)) \quad (3.1)$$

onde $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, $h_1, \dots, h_n \in H$ e $n \geq 1$. Chamamos essas variáveis aleatórias de suaves.

Usaremos as notações:

- $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$;
- $\nabla f = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$, sempre que $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Sejam:

- S_b a classe de variáveis aleatórias suaves da forma (3.1) tais que f pertence a $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ (f e todas as suas derivadas parciais são limitadas).
- S_0 a classe de variáveis aleatórias suaves da forma (3.1) tais que f pertence a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (f tem um suporte compacto).

Além disso, definimos \mathcal{P} como a classe de variáveis aleatórias da forma (3.1) tais que f é polinomial. Com isso, temos que $\mathcal{P} \subset S$, $S_0 \subset S_b \subset S$, e \mathcal{P} e S_0 são densos em $L^2(\Omega)$.

Definição 3.1.1. A derivada de uma variável aleatória suave da forma (3.1) é a variável aleatória com valores em H dada por:

$$DF = \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(h_1), \dots, W(h_n)) h_i. \quad (3.2)$$

Veja, por exemplo, que, tomando a função identidade $g(x) = x$:

$$DG = \partial_1(g(W(h_1)))h_1 = \partial_1(W(h_1))h_1 = h_1,$$

ou seja, $DW(h) = h$.

Para interpretarmos DF como uma derivada direcional, note que para cada $h \in H$ temos:

$$\begin{aligned} \langle DF, h \rangle_H &= \left\langle \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(h_1), \dots, W(h_n)) h_i, h \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(h_1), \dots, W(h_n)) \langle h_i, h \rangle \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [f(W(h_1) + \epsilon \langle h_1, h \rangle_H, \dots, W(h_n) + \epsilon \langle h_n, h \rangle_H) - f(W(h_1), \dots, W(h_n))]. \end{aligned}$$

Lema 3.1.1. *Sejam duas variáveis aleatórias $F, G \in S$. Então:*

$$D(FG) = (DF)G + F(DG) \quad (3.3)$$

Demonstração. Podemos escrever as variáveis da seguinte forma:

$$F = f(W(h_1), \dots, W(h_n)),$$

$$G = g(W(h_{n+1}), \dots, W(h_{n+m})).$$

Assim, as reescrevemos de forma que ambas possuam o mesmo número de variáveis:

$$F = f(W(h_1), \dots, W(h_n)) = \tilde{f}(W(h_1), \dots, W(h_{n+m})),$$

$$G = g(W(h_{n+1}), \dots, W(h_{n+m})) = \tilde{g}(W(h_1), \dots, W(h_{n+m})).$$

Com isso, tomando $Y = FG$ e $x = (W(h_1), \dots, W(h_{m+n}))$, queremos calcular DY :

$$\begin{aligned} DY &= D(FG) \\ &= \sum_i \partial_i(\tilde{f}(x)\tilde{g}(x))h_i \\ &= \sum_i ((\partial_i \tilde{f}(x))\tilde{g}(x) + (\partial_i \tilde{g}(x))\tilde{f}(x))h_i. \end{aligned}$$

Note que $\partial_i \tilde{f} = 0$, $\forall i \in \{n+1, \dots, n+m\}$ e $\partial_i \tilde{g} = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, então:

$$D(FG) = (DF)G + F(DG).$$

□

Lema 3.1.2. *Suponha que F é uma variável aleatória suave e $h \in H$. Então:*

$$E(\langle DF, h \rangle_H) = E(FW(h)). \quad (3.4)$$

Demonstração. É possível normalizar a equação (3.4), então assuma que a norma de h é igual a 1. Veja que existem elementos ortonormais de H , e_1, \dots, e_{n+1} , tais que $h = e_1$ e F é uma variável aleatória suave da forma:

$$F = f(W(e_1), \dots, W(e_{n+1})).$$

Construção de e_1, \dots, e_{n+1} :

Assim como na equação (3.1), temos $h_1, \dots, h_n \in H$. Com isso podemos usar o método de Gram-Schmidt para transformar a base do espaço gerado por h, h_1, \dots, h_n em uma base ortonormal e_1, \dots, e_n, e_{n+1} .

$$\text{Tome } e_1 = h \text{ e, } \forall i \in \mathbb{Z} | 1 < i \leq n+1, e_i = \frac{h_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \langle h_{i-1}, e_j \rangle \cdot e_j}{|h_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \langle h_{i-1}, e_j \rangle \cdot e_j|}.$$

Por indução, vamos mostrar e_1, \dots, e_{n+1} são tais que

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j. \end{cases}$$

Veja que:

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \frac{1}{|h_1 - \langle h_1, e_1 \rangle \cdot e_1|} \langle e_1, h_1 - \langle h_1, e_1 \rangle \cdot e_1 \rangle$$

$$= \frac{1}{|h_1 - \langle h_1, e_1 \rangle \cdot e_1|} \langle e_1, h_1 \rangle - \langle h_1, e_1 \rangle \langle e_1, e_1 \rangle = 0.$$

Hipótese de indução: e_1, \dots, e_k são ortonormais. Queremos mostrar que $\forall t \in 1, 2, \dots, k$, temos $\langle e_t, e_{k+1} \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \langle e_t, e_{k+1} \rangle &= \left\langle e_t, \frac{h_k - \sum_{j=1}^k \langle h_k, e_j \rangle \cdot e_j}{|h_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle h_k, e_j \rangle \cdot e_j|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{|h_k - \sum_{j=1}^k \langle h_k, e_j \rangle \cdot e_j|} \left(\langle e_t, h_k \rangle - \left\langle e_t, \sum_{j=1}^k \langle h_k, e_j \rangle \cdot e_j \right\rangle \right) \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, temos que $\langle e_t, e_j \rangle = 0$ para todo j em $\{1, \dots, t-1, t+1, \dots, k\}$, com isso:

$$\begin{aligned} \langle e_t, e_{k+1} \rangle &= \frac{1}{|h_k - \sum_{j=1}^k \langle h_k, e_j \rangle \cdot e_j|} (\langle e_t, h_k \rangle - \langle e_t, \langle h_k, e_t \rangle \cdot e_t \rangle) \\ &= \frac{1}{|h_k - \sum_{j=1}^k \langle h_k, e_j \rangle \cdot e_j|} (\langle e_t, h_k \rangle - \langle e_t, e_t \rangle \langle h_k, e_t \rangle) = 0 \end{aligned}$$

O que finaliza a construção.

Com isso, todo h_i é combinação linear de e_j 's, e podemos escrever:

$$F = f(W(h_1), \dots, W(h_n)) = \tilde{f}(W(e_1), \dots, W(e_{n+1})),$$

onde F é suave e \tilde{f} está em $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Seja ϕ a densidade da distribuição normal padrão em \mathbb{R}^{n+1} , ou seja:

$$\phi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \right).$$

Então, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\langle DF, h \rangle_H) &= \mathbb{E} \left(\left\langle \sum_i \partial_i \tilde{f}(W(e_1), \dots, W(e_{n+1})) e_i, h \right\rangle_H \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_i \partial_i \tilde{f}(W(e_1), \dots, W(e_{n+1})) \langle e_i, h \rangle_H \right) \end{aligned}$$

Como tomamos $e_1 = h$ de forma que o espaço seja ortonormal e $(W(e_1), \dots, W(e_{n+1})) \sim$

$N(0, I_{n+1})$ com densidade ϕ , podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\langle DF, h \rangle_H) &= \mathbb{E} \left(\partial_1 \tilde{f}(W(e_1), \dots, W(e_{n+1})) \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \partial_1 \tilde{f}(x) \phi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{x_1} \partial_1 \tilde{f}(x) \phi(x) dx_1 dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{f}(x) \phi(x) x_1 dx \\
&= E(FW(e_1)) = E(FW(h)),
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração do lema. \square

Lema 3.1.3. *Suponha que F e G são variáveis aleatórias suaves e que $h \in H$. Então temos:*

$$\mathbb{E}(G \langle DF, h \rangle_H) = \mathbb{E}(-F \langle DG, h \rangle_H + FGW(h)) \quad (3.5)$$

Demonstração. Pelo Lema 3.1.1, podemos escrever:

$$\mathbb{E}(\langle D(FG), h \rangle_H) = \mathbb{E}(\langle G(DF), h \rangle_H) + \mathbb{E}(\langle F(DG), h \rangle_H).$$

Usando o Lema 3.1.2 e a linearidade do valor esperado, temos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G \langle DF, h \rangle_H) &= \mathbb{E}(\langle D(FG), h \rangle_H) - F \mathbb{E}(\langle DG, h \rangle_H) \\
&= \mathbb{E}(-G \langle DF, h \rangle_H + FGW(h)).
\end{aligned}$$

\square

A seguir temos uma proposição que é útil para podermos definir o adjunto do operador D , que será apresentado no próximo Capítulo.

Proposição 3.1.1. *O operador $D : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega; H)$ é fechável para qualquer $p \geq 1$.*

Demonstração. Seja $\{F_N, N \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de variáveis aleatórias suaves tais que $F_N \rightarrow 0$ em $L^p(\Omega)$, e a sequência de derivadas DF_N converge para η em $L^p(\Omega; H)$ (como visto no Lema 2.5.1). Pelo Lema 3.1.3 podemos ver que $\eta = 0$, como segue abaixo.

Tome uma função $G \in S_b$ tal que $GW(h)$ é limitada, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G \langle \eta, h \rangle_H) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(G \langle DF_N, h \rangle_H) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(-F_N \langle DG, h \rangle_H + F_N GW(h)) = 0.
\end{aligned}$$

Como isso é válido para todo h e para toda G , temos que $\eta = 0$. \square

Denotaremos o domínio de D em $L^2(\Omega)$ por $\mathbb{D}^{1,2}$, ou seja, consideraremos o fecho da classe de variáveis suaves da forma S com respeito à norma:

$$\|F\|_{1,2} = [\mathbb{E}(|F|^2) + \mathbb{E}(\|DF\|_H^2)]^{\frac{1}{2}}$$

Considerando $h \in H$ um elemento fixo de H , podemos definir o operado D^h no conjunto $\mathbb{D}^{1,2}$ das variáveis aleatórias suaves como:

$$D^h F = \langle DF, h \rangle_H.$$

Analogamente à demonstração da Proposição 3.1.1, podemos concluir que esse operador é fechado de $L^p(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ para qualquer $p \geq 1$, e o seu domínio é denotado por $\mathbb{D}^{h,p}$.

Proposição 3.1.2 (Regra da Cadeia). *Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável com derivada limitada. Suponha que $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Então $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$, e:*

$$D(\varphi(F)) = \varphi'(F)DF$$

Demonstração. Suponha $F = f(W(h_1), \dots, W(h_n)) \in S$ e $\varphi \in C_b^\infty$. Então $\varphi(F) \in S$ pois é uma composição de funções suaves, com isso, considerando a Equação (3.2), temos:

$$\begin{aligned} D\varphi(F) &= \sum_{i=1}^n \partial_i(\varphi \circ F)h_i \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi'(F) \partial_i f(W(h_1), \dots, W(h_n))h_i \\ &= \varphi'(F) \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(h_1), \dots, W(h_n))h_i \\ &= \varphi'(F)DF \end{aligned}$$

O caso em que $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ e $\varphi \in C^1$ segue da demonstração acima considerando a densidade de C^∞ e das variáveis aleatórias suaves nos seus respectivos espaços. \square

O lema abaixo contém a extensão do teorema acima para o caso em que a função ϕ tem o domínio em \mathbb{R}^m , sua demonstração é análoga à demonstração acima apresentada e pode ser consultada em [3].

Lema 3.1.4. *Seja $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável com derivadas parciais limitadas. Suponha que $F = (F_1, \dots, F_m)$ é um vetor aleatório cujas entradas*

pertencem ao espaço $\mathbb{D}^{1,2}$. Então $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$, e:

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^m \partial_i \varphi(F) DF_i$$

Lema 3.1.5. *Seja $\{F_n, n \geq 1\}$ uma sequência de variáveis aleatórias em $\mathbb{D}^{1,2}$ que converge para F em $L^2(\Omega)$ e tal que:*

$$\sup_n \mathbb{E}(\|DF_n\|_H^2) < \infty$$

Então $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ e a sequência de derivadas $\{DF_n, n \geq 1\}$ converge para DF na topologia fraca de $L^2(\Omega, H)$.

Demonstração. Como a demonstração depende do Caos de Wiener, ela pode ser encontrada em [3]. □

Proposição 3.1.3. *Seja $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitz, ou seja:*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K|x - y|$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$. Suponha que $F = (F_1, \dots, F_m)$ é um vetor aleatório cujos componentes pertencem a $\mathbb{D}^{1,2}$. Então $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$ e existe um vetor aleatório $G = (G_1, \dots, G_m)$ onde cada entrada G_i é limitada por K tal que

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^m G_i DF_i. \quad (3.6)$$

Demonstração. Veja que se a função $\varphi \in C^1$, temos que $G_i = \partial_i \varphi(F)$, pela proposição 3.1.2. Seja ρ_n um sequência de *mollifiers* como visto na Seção 2.6 e seja φ_n a convolução $\varphi * \rho_n$. Pela Proposição 2.6.1 temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ uniformemente em compactos com respeito a x . Além disso, as funções φ_n são C^∞ e $\|\nabla \varphi_n(x)\|_\infty \leq K$, pois $\nabla \varphi_n(x) = \nabla(\varphi * \alpha_n(x))$ e podemos calcular cada entrada do gradiente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_1} &= \frac{\partial(\varphi * \alpha_n(x))}{\partial x_1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi(x_1 - y_1 + h, x_2 - y_2, \dots, x_m - y_m) - \varphi(x_1 - y_1, \dots, x_m - y_m)}{h} \alpha_n(y) dy \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\varphi(x_1 - y_1 + h, x_2 - y_2, \dots, x_m - y_m) - \varphi(x_1 - y_1, \dots, x_m - y_m)|}{|h|} \alpha_n(y) dy \\ &\leq K \int_{\mathbb{R}^m} \alpha_n(y) dy = K n^m \int_{\mathbb{R}^m} \alpha(ny) dy = K \frac{n^m}{n^m} \int_{\mathbb{R}^m} \alpha(u) du = K. \end{aligned}$$

Analogamente, concluímos que cada entrada do gradiente é limitada superiormente por

K . Com isso, para cada n podemos escrever:

$$D(\varphi_n(F)) = \sum_{i=1}^m \partial_i \phi_n(F) DF_i. \quad (3.7)$$

Podemos também concluir pela Proposição 2.6.2 que a sequência $\varphi_n(F)$ converge para $\varphi(F)$ em L^2 . Por outro lado, a sequência $\{D(\varphi_n(F)), n \geq 1\}$ é limitada em $L^2(\Omega, H)$. Consequentemente, pelo Lema 3.1.5, $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$ e $\{D(\varphi_n(F)), n \geq 1\}$ converge na topologia fraca de $L^2(\Omega, H)$ para $D(\varphi(F))$. Podemos dizer também que existe uma sub-sequência $\{\nabla \varphi_{n(k)}(F), k \geq 1\}$ que converge para um vetor $G = (G_1, \dots, G_m)$ na topologia fraca já que a sequência $\{\nabla \varphi_n(F), n \geq 1\}$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Além disso, G é limitado por $\sqrt{m}K$. Com isso, tomando o limite na Equação (3.7), chegamos à Equação (3.6). \square

3.1.1 O caso do *White Noise*

Até então, tomamos os valores de h em um espaço de Hilbert qualquer. Nesta seção tomaremos os valores de h em $L^2[0, T] = H$ e a função W como sendo a integral de Wiener, ou seja $W(h) = \int_0^T h(t)dB(t)$, onde $\{B(t), t \in [0, T]\}$ é um Movimento Browniano. Com isso, temos que a derivada de uma variável aleatória $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ é um processo estocástico $\{D_t F, t \in [0, T]\}$. Podemos observar que:

$$\|DF\|_{L^2(\Omega, H)}^2 = \mathbb{E} \left[\int_0^T (D_t F)^2 dt \right] = \int_0^T \mathbb{E}[(D_t F)^2] dt = \mathbb{E}[\|D_t F\|_H^2].$$

Proposição 3.1.4. *Suponha que $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, e seja $A \in \mathcal{B}([0, T])$. Então a esperança condicional $\mathbb{E}(F|\mathcal{F}_A)$ também pertence a $\mathbb{D}^{1,2}$ e temos:*

$$D_t(\mathbb{E}(F|\mathcal{F}_A)) = \mathbb{E}(D_t F|\mathcal{F}_A)1_A(t)$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [3], pois depende do Caos de Wiener. \square

Capítulo 4

O Operador de Divergência

Nesse capítulo será introduzido o operador de divergência δ que é o adjunto do operador de derivada. No caso do *White Noise*, o operador adjunto é chamado de Integral de Skorohod.

4.1 Definição e Propriedades

O operador de divergência δ é o operador adjunto de D , ou seja, um operador limitado $\delta : \text{Dom } \delta \subset L^2(\Omega, H) \rightarrow L^2(\Omega)$ tal que:

- (i) O domínio de δ , $\text{Dom } \delta$, é o conjunto de variáveis $u \in L^2(\Omega, H)$ tal que $\forall F \in \mathbb{D}^{1,2}$,

$$|\mathbb{E}[\langle DF, u \rangle_H]| < c_u \|F\|_{L^2(\Omega)},$$

onde c_u é uma constante que depende de u .

- (ii) Se $u \in \text{Dom } \delta$, então $\delta(u) \in L^2(\Omega)$ e a seguinte relação de dualidade se mantém para todo $F \in \mathbb{D}^{1,2}$:

$$\mathbb{E}[F\delta(u)] = \mathbb{E}[\langle DF, u \rangle_H]. \quad (4.1)$$

Denotaremos por S_H a classe de elementos suaves da seguinte forma:

$$u = \sum_{j=1}^n F_j h_j, \quad (4.2)$$

onde F_j são variáveis aleatórias suaves e h_j são elementos de H .

Proposição 4.1.1. (i) Se $u \in \text{Dom } \delta$, então $\mathbb{E}[\delta(u)] = 0$.

Demonstração. Tome $F = 1$ na Equação (4.1):

$$\mathbb{E}[\delta(u)] = \mathbb{E}[\langle 0, u \rangle_H] = 0.$$

□

(ii) δ é um operador linear e fechado em $\text{Dom } \delta$.

Demonstração. Considere novamente a Equação (4.1) e $u, v \in \text{Dom } \delta$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F\delta(u+v)] &= \mathbb{E}[\langle DF, u+v \rangle_H] = \mathbb{E}[\langle DF, u \rangle_H] + \mathbb{E}[\langle DF, v \rangle_H] \\ &= \mathbb{E}[F\delta(u)] + \mathbb{E}[F\delta(v)] = \mathbb{E}[F(\delta(u) + \delta(v))]. \end{aligned}$$

Tome $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\mathbb{E}[F\delta(\alpha u)] = \mathbb{E}[\langle DF, \alpha u \rangle_H] = \alpha \mathbb{E}[\langle DF, u \rangle_H] = \alpha \mathbb{E}[F\delta(u)] = \mathbb{E}[F\alpha\delta(u)].$$

Para provar que o operador é fechado, suponha $u_n \in \text{Dom } \delta$ tal que:

$$\begin{cases} u_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(\Omega, H), \\ \delta(u_n) \rightarrow v \text{ em } L^2(\Omega). \end{cases}$$

Tome $F \in \mathbb{D}^{1,2}$:

$$\mathbb{E}[Fv] = \lim_{n \rightarrow 0} \mathbb{E}[F\delta(u_n)] = \lim_{n \rightarrow 0} \mathbb{E}[\langle DF, u_n \rangle_H] = \mathbb{E}[\langle DF, 0 \rangle_H] = 0.$$

Com isso, como $\mathbb{E}[Fv] = 0$ para todo $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, concluímos que $v = 0$. □

(iii) Se $u \in S_H$, então $u \in \text{Dom } \delta$ e

$$\delta(u) = \sum_{j=1}^n F_j W(h_j) - \sum_{j=1}^n \langle DF_j, h_j \rangle_H. \quad (4.3)$$

Demonstração. Vamos primeiramente mostrar que $S_H \subset \text{Dom } \delta$. Pelo Lema 3.1.3 podemos escrever, para $F \in \mathbb{D}^{1,2}$:

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(\langle DF, u \rangle_H)| &= \left| \mathbb{E}(\langle DF, \sum_{j=1}^n F_j h_j \rangle) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(F_j \langle DF, h_j \rangle) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{j=1}^n (-\mathbb{E}[F\langle DF_j, h_j \rangle_H] + \mathbb{E}[FF_jW(h_j)]) \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^n (|\mathbb{E}[F\langle DF_j, h_j \rangle_H]| + |\mathbb{E}[FF_jW(h_j)]|) \\
&\leq \sum_{j=1}^n \left| \sqrt{\mathbb{E}(F^2)} \sqrt{\mathbb{E}(\langle DF_j, h_j \rangle_H^2)} \right| + \left| \sqrt{\mathbb{E}(F^2)} \sqrt{\mathbb{E}(F_jW(h_j))^2} \right| \\
&= \|F\|_{L^2(\Omega)} \sum_{j=1}^n \left| \sqrt{\mathbb{E}(\langle DF_j, h_j \rangle_H^2)} \right| + \left| \sqrt{\mathbb{E}(F_jW(h_j))^2} \right| \\
&= c_u \|F\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Como provamos que $u \in \text{Dom } \delta$, usaremos a Equação (4.1) para provar a segunda parte da proposição:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F\delta(u)] &= \mathbb{E}[\langle DF, u \rangle_H] \\
&= \mathbb{E}[\langle DF, \sum_{j=1}^n F_j h_j \rangle_H] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^n F_j \langle DF, h_j \rangle_H \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^n (-F \langle DF_j, h_j \rangle_H + FF_jW(h_j)) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[F \sum_{j=1}^n (F_jW(h_j) - \langle DF_j, h_j \rangle_H) \right].
\end{aligned}$$

Como a igualdade acima é válida para todo $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, temos:

$$\delta(u) = \sum_{j=1}^n F_j W(h_j) - \sum_{j=1}^n \langle DF_j, h_j \rangle_H.$$

□

Lema 4.1.1. *Se $u \in S_H$, então:*

$$Du = \sum_{j=1}^n DF_j h_j.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} Du &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_i F_j(W(h_1), \dots, W(h_n)) h_j h_i \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \partial_i F_j(W(h_1), \dots, W(h_n)) h_i \right) h_j = \sum_{j=1}^n DF_j h_j \end{aligned}$$

□

Lema 4.1.2. *Se $h, h_1 \in H$ e F é uma variável aleatória suave, então:*

$$\langle D(\langle DF, h \rangle), h_1 \rangle_H = \langle D(\langle DF, h_1 \rangle), h \rangle_H$$

Demonstração. Como F é suave, podemos escrever:

$$DF = \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(x_1), \dots, W(x_n)) x_i,$$

onde x_i são elementos do espaço de Hilbert. Com isso, temos que:

$$\langle DF, h \rangle_H = \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(x_1), \dots, W(x_n)) \langle x_i, h \rangle_H.$$

Podemos ver que a variável aleatória $\langle DF, h \rangle$ é também suave, assim:

$$D(\langle DF, h \rangle_H) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \partial_{ij} f(W(x_1), \dots, W(x_n)) x_j \right) \langle x_i, h \rangle_H.$$

Finalmente temos:

$$\begin{aligned} \langle D(\langle DF, h \rangle_H), h_1 \rangle_H &= \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij} f(W(x_1), \dots, W(x_n)) \langle x_j, h_1 \rangle_H \langle x_i, h \rangle_H \\ &= \langle D(\langle DF, h_1 \rangle_H), h \rangle_H \end{aligned}$$

□

Proposição 4.1.2. *Seja $u \in S_H$ e $h \in H$, então:*

$$\langle D(\delta(u)), h \rangle_H = \langle u, h \rangle_H + \delta(\langle Du, h \rangle_H).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\langle D(\delta(u)), h \rangle_H &= \left\langle D \left(\sum_{j=1}^n F_j W(h_j) - \sum_{j=1}^n \langle DF_j, h_j \rangle_H \right), h \right\rangle_H \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^n D(F_j W(h_j)) - \sum_{j=1}^n D(\langle DF_j, h_j \rangle_H), h \right\rangle_H \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^n [(DF_j)W(h_j) + (DW(h_j))F_j] - \sum_{j=1}^n D(\langle DF_j, h_j \rangle_H), h \right\rangle_H \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^n [(DF_j)W(h_j) + F_j h_j] - \sum_{j=1}^n D(\langle DF_j, h_j \rangle_H), h \right\rangle_H \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^n [(DF_j)W(h_j) + F_j h_j] - \sum_{j=1}^n D(\langle DF_j, h_j \rangle_H), h \right\rangle_H \\
&= \left\langle u + \sum_{j=1}^n (DF_j)W(h_j) - \sum_{j=1}^n D(\langle DF_j, h_j \rangle_H), h \right\rangle_H \\
&= \langle u, h \rangle_H + \left\langle \sum_{j=1}^n (DF_j)W(h_j) - \sum_{j=1}^n D(\langle DF_j, h_j \rangle_H), h \right\rangle_H \\
&= \langle u, h \rangle_H + \sum_{j=1}^n W(h_j) \langle DF_j, h \rangle_H - \sum_{j=1}^n \langle D(\langle DF_j, h_j \rangle_H), h \rangle_H.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.1.2, temos:

$$\langle D(\delta(u)), h \rangle_H = \langle u, h \rangle_H + \sum_{j=1}^n W(h_j) \langle DF_j, h \rangle_H - \sum_{j=1}^n \langle D(\langle DF_j, h_j \rangle_H), h_j \rangle_H.$$

Tome a substituição de variáveis $G_j = \langle DF_j, h \rangle_H$, com isso:

$$\begin{aligned}
\langle D(\delta(u)), h \rangle_H &= \langle u, h \rangle_H + \sum_{j=1}^n W(h_j) G_j - \sum_{j=1}^n \langle DG_j, h_j \rangle_H \\
&= \langle u, h \rangle_H + \delta \left(\sum_{j=1}^n G_j h_j \right) \\
&= \langle u, h \rangle_H + \delta \left(\sum_{j=1}^n \langle DF_j, h \rangle_H h_j \right) \\
&= \langle u, h \rangle_H + \delta (\langle Du, h \rangle_H).
\end{aligned}$$

□

Para que a Proposição 4.1.2 possa ser estendida para uma classe mais geral de variáveis aleatórias, podemos usar o seguinte lema que está provado em [3]:

Lema 4.1.3. *Seja $G \in L^2$. Suponha que existe $Y \in L^2(\Omega)$ tal que*

$$\mathbb{E}(G\delta(hF)) = \mathbb{E}(YF),$$

para todo $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Então $G \in \mathbb{D}^{h,2}$ e $\langle DG, h \rangle_H = Y$.

Definição 4.1.1. Definimos o traço de um "produto de duas derivadas de Malliavin como

$$Tr(Du \circ Dv) = \sum_{i,j=1}^{\infty} D^{e_j} \langle v, e_i \rangle_H D^{e_i} \langle u, e_j \rangle_H$$

A intuição da palavra traço remete a matrizes. Para ver isso, construa uma matriz infinita dependente de um elemento dado do Espaço de Hilbert e de um sistema ortonormal completo $\{e_i, i \geq 1\}$ também no espaço de Hilbert:

$$A(u) : a(u)_{ij} = D^{e_i} \langle u, e_j \rangle_H$$

Tome duas matrizes nesse formato: $A(u)$ e $A(v)$, o traço do produto é dado por:

$$Tr(A(u)A(v)) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a(u)_{ij}a(v)_{ji} = \sum_{i,j=1}^{\infty} D^{e_i} \langle u, e_j \rangle_H D^{e_j} \langle v, e_i \rangle_H.$$

Proposição 4.1.3. *Se $u, v \in S_H$, então*

$$\mathbb{E}(\delta(u)\delta(v)) = \mathbb{E}(\langle u, v \rangle_H) + \mathbb{E}(Tr(Du \circ Dv)). \quad (4.4)$$

Demonstração. Seja $\{e_i, i \geq 1\}$ um sistema ortonormal completo em H . Considerando a Equação (4.1) e a Proposição 4.1.2, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\delta(u)\delta(v)) &= \mathbb{E}(\langle D(\delta(u)), v \rangle_H) \\ &= \mathbb{E} \left(\left\langle D(\delta(u)), \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, v \rangle_H e_i \right\rangle_H \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, v \rangle_H \langle D(\delta(u)), e_i \rangle_H \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, v \rangle_H (\langle u, e_i \rangle_H + \delta(\langle Du, e_i \rangle_H)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}(\langle u, v \rangle_H) + \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (\langle e_i, v \rangle_H \delta(\langle Du, e_i \rangle_H)) \right) \\
&= \mathbb{E}(\langle u, v \rangle_H) + \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (\langle D\langle e_i, v \rangle_H, \langle Du, e_i \rangle_H \rangle_H) \right) \\
&= \mathbb{E}(\langle u, v \rangle_H) + \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\left\langle D\langle e_i, v \rangle_H, \left\langle D \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle u, e_j \rangle_H e_j, e_i \right\rangle_H \right\rangle_H \right) \right) \right) \\
&= \mathbb{E}(\langle u, v \rangle_H) + \mathbb{E} \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} (\langle D\langle e_i, v \rangle_H, \langle D\langle u, e_j \rangle_H, e_i \rangle_H e_j \rangle_H) \right) \\
&= \mathbb{E}(\langle u, v \rangle_H) + \mathbb{E} \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} (\langle D\langle e_i, v \rangle_H, e_j \rangle_H \langle D\langle u, e_j \rangle_H, e_i \rangle_H) \right) \\
&= \mathbb{E}(\langle u, v \rangle_H) + \mathbb{E} \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} D^{e_j} \langle v, e_i \rangle_H D^{e_i} \langle u, e_j \rangle_H \right) \\
&= \mathbb{E}(\langle u, v \rangle_H) + \mathbb{E}(Tr(Du \circ Dv)),
\end{aligned}$$

o que encerra a demonstração. \square

Proposição 4.1.4. *Suponha que $u \in \mathbb{D}^{1,2}$ e $D^h u \in Dom(\delta)$. Então $\delta(u) \in \mathbb{D}^{h,2}$.*

Demonstração. Para todo $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ usando a Equação (4.4), temos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\delta(u)\delta(hF)) &= \mathbb{E}(\langle D(\delta(u)), hF \rangle_H) \\
&= \mathbb{E}(FD^h(\delta(h))) \\
&= \mathbb{E}(F(\langle u, h \rangle_H + \delta(D^h u))).
\end{aligned}$$

Com isso, $\delta(u) \in \mathbb{D}^{h,2}$ pelo Lema 4.1.3. \square

Proposição 4.1.5. *Seja $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ e $u \in Dom(\delta)$ tal que $Fu \in L^2(\Omega, H)$ e $F\delta(u) - \langle DF, u \rangle_H \in L^2(\Omega, H)$. Então Fu pertence ao domínio de δ e a seguinte equação é verdadeira:*

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \langle DF, u \rangle_H.$$

Demonstração. Para toda variável aleatória suave $G \in S_0$, temos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\langle DG, Fu \rangle_H) &= \mathbb{E}(\langle FDG, u \rangle_H) \\
&= \mathbb{E}(\langle u, D(FG) - G(DF) \rangle_H) \\
&= \mathbb{E}(\langle u, D(FG) \rangle_H - \langle u, G(DF) \rangle_H)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}(FG\delta(u) - G\langle u, DF \rangle_H) \\
&= \mathbb{E}(G(F\delta(u) - \langle u, DF \rangle_H)).
\end{aligned}$$

Com isso temos que:

$$|\mathbb{E}(\langle DG, Fu \rangle_H)| \leq \|G\|_2 \sqrt{\mathbb{E}((F\delta(u) - \langle u, DF \rangle_H)^2)}.$$

Como $F\delta(u) - \langle u, DF \rangle_H \in L^2(\Omega, H)$, temos:

$$|\mathbb{E}(\langle DG, Fu \rangle_H)| \leq c_u \|G\|_2,$$

o que implica $F\delta(u) \in \text{Dom}(\delta)$.

Assim concluímos que $\mathbb{E}(G\delta(Fu)) = \mathbb{E}(G(F\delta(u) - \langle u, DF \rangle_H))$ e, conseqüentemente:

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \langle u, DF \rangle_H.$$

□

A proposição abaixo é uma modificação da Proposição 4.1.5 onde trocamos o u por um $h \in H$ dado. Nesse caso é suficiente que F tenha derivada na direção de h .

Proposição 4.1.6. *Se $h \in H$ e $F \in \mathbb{D}^{h,2}$ então Fh pertence ao domínio de δ e a seguinte equação é verdadeira:*

$$\delta(Fh) = FW(h) - D^h F$$

4.2 Integral de *Skorohod*

A Integral de *Skorohod* é um caso particular do operador de divergência visto na seção anterior. Tome como referência o *White Noise* mostrado na Seção 3.1.1, ou seja, usaremos a suposição de que o espaço de Hilbert H é um espaço L^2 da forma $H = L^2([0, T])$. Neste caso os elementos de $\text{Dom}(\delta) \subset L^2(\Omega, H)$ são processos estocásticos quadrado integráveis e o operador de divergência, $\delta(u)$, é chamado de *Integral Estocástica de Skorohod* do processo u . Usaremos a notação:

$$\delta(u) = \int_0^T u_t dW_t.$$

Na próxima seção veremos o caso em que a integral de *Skorohod* pode ser considerada uma integral de Itô, e as condições para essa igualdade acontecer.

4.2.1 A Integral de Itô como um caso particular da Integral de Skorohod

Lema 4.2.1. *Seja $A = (s, t]$ e F uma variável aleatória cujo quadrado é integrável, tal que sua medida é com respeito à sigma-álgebra \mathcal{F}_{A^c} . Então o processo $F1_A$ é Skorohod integrável e:*

$$\delta(F1_A) = FW(A).$$

Demonstração. Inicialmente veja que $u = F1_A$ pertence a S_H , pois é escrito da forma (4.2). Com isso, podemos usar a Equação (4.3):

$$\begin{aligned}\delta(F1_A) &= FW(1_A) - \langle DF, 1_A \rangle_H \\ &= FW(1_A) - \int_0^T D_t F 1_A(t) dt\end{aligned}$$

Como F é mensurável no conjunto A^c , temos $D_t F = 0$, para $t \in A$ e logo $\int_0^T D_t F 1_A(t) dt = 0$. Assim,

$$\delta(F1_A) = FW(1_A).$$

□

Perceba que o Lema 4.2.1 é um caso particular da Proposição 4.1.5 já que $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{A^c}, \mathbb{P})$, então $F \in \mathbb{D}^{1A,2}$ e $\langle DF, 1_A \rangle_H = 0$. Usando o Lema acima nós podemos mostrar que o operador δ é uma extensão da integral de Itô no caso do Movimento Browniano. Denotaremos como L_a^2 o subespaço fechado de $L^2([0, T] \times \Omega, \mathbb{R})$ formado pelos processos adaptados.

Proposição 4.2.1. *$L_a^2 \subset \text{Dom}(\delta)$ e o operador δ restrito ao espaço L_a^2 coincide com a integral de Itô, ou seja,*

$$\delta(u) = \int_0^T u_t dW_t.$$

Demonstração. Suponha que u é um processo adaptado da forma:

$$u_t = \sum_{j=1}^n F_j 1_{(t_j, t_{j+1}]}(t),$$

onde $F_j \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_j}, \mathbb{P})$ e $0 \leq t_1 < \dots < t_{n+1} \leq T$. Então, como $u \in S_H$, temos que $u \in \text{Dom}(\delta)$ e:

$$\delta(u) = \sum_{j=1}^n F_j W(1_{(t_j, t_{j+1}]}) - \int_0^T D_t F 1_{(t_j, t_{j+1}]}(t) dt$$

Como $\int_0^T D_t F 1_{(t_j, t_{j+1}]}(t) dt = 0$ pelo Lema 4.2.1, concluimos que

$$\delta(u) = \sum_{j=1}^n F_j(W(t_{j+1}) - W(t_j)).$$

Sabemos que qualquer processo $u \in L_a^2$ pode ser aproximado na norma $L^2([0, T])$ por uma sequência u^n de processos adaptados elementares. Então, pela equação acima $\delta(u^n)$ é igual à Integral de Itô de u^n e converge em $L^2(\Omega)$ para a Integral de Itô de u . Como δ é fechado, deduzimos que $u \in \text{Dom}(\delta)$, e $\delta(u)$ é igual à integral de Itô de u . \square

No caso da integral de *Skorohod* podemos expressar a condição inicial do operador como:

$$\mathbb{E}[F\delta(u)] = \mathbb{E} \left[\int_0^T D_t F u_t dt \right],$$

onde $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ e $u \in \text{Dom}\delta$.

Capítulo 5

Cálculo do Delta de uma Opção

Esse capítulo é destinado ao cálculo da derivada do preço de um derivativo financeiro com relação à condição inicial do ativo subjacente. Essa derivada é conhecida como o **Delta de um derivativo**. Usaremos uma função de payoff $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dependente de um ativo subjacente $\{X_t, t \in [0, T]\}$, de forma que

$$\mathbb{E}[\phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^2] < \infty,$$

onde $0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = T$ e T é a maturidade do derivativo analisado.

É importante que saibamos o valor do Delta do derivativo para entendermos qual a mudança gerada no preço final para uma variação no valor de X_0 . Seja $u(x)$ o preço da opção. Uma das formas de se calcular o Delta, $\partial_x u(x)$, é usando a definição de derivada, com a qual pode-se concluir que:

$$\begin{aligned} \partial_x u(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[\phi(X_{t_1}^{x+h}, \dots, X_{t_n}^{x+h})] - \mathbb{E}[\phi(X_{t_1}^x, \dots, X_{t_n}^x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\frac{\phi(X_{t_1}^{x+h}, \dots, X_{t_n}^{x+h}) - \phi(X_{t_1}^x, \dots, X_{t_n}^x)}{h} \right] \end{aligned}$$

É possível simular diretamente esse valor de $\partial_x u(x)$ utilizando o método de Monte Carlo para simular várias ocorrências de X e aproximar $\frac{\mathbb{E}[\phi(X_{t_1}^{x+h}, \dots, X_{t_n}^{x+h})] - \mathbb{E}[\phi(X_{t_1}^x, \dots, X_{t_n}^x)]}{h}$ com h suficientemente pequeno. Como isso corresponde a tirar a derivada da função ϕ , caso a função seja pouco suave essa forma de simulação não será eficiente.

5.1 A derivada de uma difusão

Seja $\{X_t, t \geq 0\}$ um processo de Itô com valores reais cuja dinâmica é expressa pela equação diferencial estocástica:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t. \quad (5.1)$$

Assumiremos que os coeficientes b (drift) e σ (volatilidade) do processo $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ são funções diferenciáveis contínuas com a primeira derivada limitada. Isso garante a existência de uma solução única e forte para o processo. Além disso, consideraremos que $\exists \varepsilon > 0$ e $\forall x, \sigma(x) \geq \varepsilon$.

Podemos reescrever a equação acima como:

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_u^x)du + \int_0^t \sigma(X_u^x)dB_u. \quad (5.2)$$

Ao aplicar a derivada de Malliavin no processo estocástico X no ponto s , temos que se $s > t$, essa derivada é zero (como pode ser visto na Proposição 3.1.4). Caso contrário, usamos a Proposição 3.1.2 e que $D_s(\int_0^t \sigma(X_u^x)dB_u) = \sigma(X_s^x) + \int_0^t \sigma'(X_u^x)D_s X_u^x dB_u$ (Teorema 1.3.8 de [3]). Com isso, temos:

$$D_s X_t^x = \begin{cases} 0, & s > t \\ \int_s^t b'(X_u^x)D_s X_u^x du + \sigma(X_s^x) + \int_s^t \sigma'(X_u^x)D_s X_u^x dB_u, & s \leq t. \end{cases}$$

Defina o processo estocástico $\varphi_t^{s,x} := D_s X_t^x$, temos então, considerando $s \leq t$:

$$\varphi_t^{s,x} = \int_s^t b'(X_u^x)\varphi_u^{s,x} du + \sigma(X_s^x) + \int_s^t \sigma'(X_u^x)\varphi_u^{s,x} dB_u.$$

Tomando a equação na forma diferencial, temos:

$$\begin{cases} d\varphi_t^{s,x} = b'(X_t^x)\varphi_t^{s,x} dt + \sigma'(X_t^x)\varphi_t^{s,x} dB_t, \\ \varphi_s^{s,x} = \sigma(X_s^x). \end{cases}$$

Com isso, usando a fórmula de Itô com a transformação $f = \log$ sobre um processo Y_t da forma

$$\begin{cases} dY_t = b'(X_t)Y_t dt + \sigma'(X_t)Y_t dB_t, \\ Y_0 = 1. \end{cases} \quad (5.3)$$

Com isso, temos:

$$\begin{aligned}
d(\log(Y_t)) &= \frac{1}{Y_t} (b'(X_t)Y_t dt + \sigma'(X_t)Y_t dB_t) - \frac{1}{2} \frac{1}{(Y_t)^2} (\sigma'(X_t)Y_t)^2 dt \\
&= b'(X_t)dt + \sigma'(X_t)dB_t - \frac{1}{2}(\sigma'(X_u))^2 dt \\
&= \left(b'(X_t) - \frac{1}{2}\sigma'(X_t)^2 \right) dt + \sigma'(X_t)dB_t.
\end{aligned}$$

Tomando a forma integral no intervalo $[0, t]$:

$$\log(Y_t) - \log(Y_0) = \int_0^t \left(b'(X_u) - \frac{1}{2}\sigma'(X_u)^2 \right) du + \int_0^t \sigma'(X_u)dB_u \Rightarrow$$

A condição que pede que as primeiras derivadas de b e σ são limitadas garantem a existência e unicidade de uma solução para o processo Y_t .

$$Y_t = \exp \left(\int_0^t \left(b'(X_u^x) - \frac{1}{2}(\sigma'(X_u^x))^2 \right) dt + \int_0^t \sigma'(X_u^x)dB_t \right). \quad (5.4)$$

Como $\varphi_t^{s,x}$ e Y_t diferem apenas no ponto inicial, temos que a solução de $\varphi_t^{s,t}$ pode ser escrita como:

$$\varphi_t^{s,x} = \sigma(X_s^x) \cdot \frac{Y_t}{Y_s} \cdot 1_{\{s \leq t\}}. \quad (5.5)$$

Por outro lado, podemos calcular a derivada de X_t^x em relação a x :

$$\partial_x X_t^x = 1 + \int_0^t b'(X_u^x) \partial_x X_u^x du + \int_0^t \sigma'(X_u^x) \partial_x X_u^x dB_u \quad (5.6)$$

Tomando a equação na forma diferencial, podemos ver que a solução da equação é Y_t . O que nos leva a concluir que:

$$\partial_x X_t^x = Y_t. \quad (5.7)$$

Pela Equação (5.5) podemos escrever:

$$Y_t 1_{\{s \leq t\}} = \frac{Y_s \cdot D_s X_t^x}{\sigma(X_s^x)}$$

Tome uma função $a \in L^2([0, T])$ tal que $\int_0^t a(s)ds = 1$. Assim, podemos escrever a seguinte igualdade:

$$\int_0^T 1_{\{s \leq t\}} Y_t a(s) ds = \int_0^T \frac{Y_s \cdot D_s X_t^x}{\sigma(X_s^x)} a(s) ds.$$

Como Y_t não depende de s , a integral do lado esquerdo só é influenciada pelo $a(s)$ e pela indicadora. Temos que o lado esquerdo da equação é igual a Y_t :

$$Y_t = \int_0^T \frac{Y_s \cdot D_s X_t^x}{\sigma(X_s^x)} a(s) ds. \quad (5.8)$$

O processo Y_t definido em (5.3) é processo de primeira variação associado a $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$.

5.2 Uma fórmula para o Delta usando o Cálculo de Malliavin

Usaremos o Cálculo de Malliavin e como feito no artigo [2] para concluir que existe uma variável aleatória Π tal que:

$$\partial_x u(x) = \mathbb{E}[\phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \Pi].$$

Inicialmente, suponha que ϕ é continuamente diferenciável com derivadas limitadas, então:

$$1. \frac{\phi(X_{t_1}^{x+h}, \dots, X_{t_n}^{x+h}) - \phi(X_{t_1}^x, \dots, X_{t_n}^x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \partial_j \phi(X_{t_1}^x, \dots, X_{t_n}^x) \partial_x X_{t_j}^x \text{ q.c.};$$

2. Pelo teorema do valor médio sob a norma da soma, temos

$$\frac{\phi(X_{t_1}^{x+h}, \dots, X_{t_n}^{x+h}) - \phi(X_{t_1}^x, \dots, X_{t_n}^x)}{h} \leq \|M\| \sum_{j=1}^n \frac{\|X_{t_j}^{x+h} - X_{t_j}^x\|}{h},$$

onde M é o gradiente da função ϕ em um ponto $(X_{t_1}^k, \dots, X_{t_n}^k)$ e $k \in [x, x+h]$.

Como M é limitado pela premissa adotada, e $\sum_{j=1}^n \frac{\|X_{t_j}^{x+h} - X_{t_j}^x\|}{h} \in L^1(\Omega)$ (demonstração em [4] páginas 301 e 302), temos, pelo Teorema da Convergência Dominada:

$$\partial_x u(x) = \mathbb{E} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(X_{t_1}^{x+h}, \dots, X_{t_n}^{x+h}) - \phi(X_{t_1}^x, \dots, X_{t_n}^x)}{h} \right].$$

Considerando que ϕ é diferenciável, podemos escrever:

$$\partial_x u(x) = \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^n \partial_j \phi(X_{t_1}^x, \dots, X_{t_n}^x) \partial_x X_{t_j}^x \right]$$

Pela Equação (5.7), temos:

$$\partial_x u(x) = \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^n \partial_j \phi(X_{t_1}^x, \dots, X_{t_n}^x) Y_{t_j} \right].$$

Definição 5.2.1. Definimos o conjunto de funções Γ_m como:

$$\Gamma_m = \left\{ a \in L^2([0, T]) \mid \int_0^{t_i} a(t) dt = 1 \quad \forall i = 1, \dots, m \right\},$$

onde $0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = T$.¹

Pelo Teorema 3.1.2 e pela Equação (5.8), tomando a em Γ_m :

$$\begin{aligned} \partial_x u(x) &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^n \partial_j \phi(X_{t_1}^x, \dots, X_{t_n}^x) \int_0^T \frac{Y_s \cdot D_s X_{t_j}^x}{\sigma(X_s^x)} a(s) ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^T \sum_{j=1}^n \partial_j \phi(X_{t_1}^x, \dots, X_{t_n}^x) \cdot D_s X_{t_j}^x \frac{Y_s}{\sigma(X_s^x)} a(s) ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^T D_s \phi(X_{t_1}^x, \dots, X_{t_n}^x) \frac{Y_s \cdot a(s)}{\sigma(X_s^x)} ds \right]. \end{aligned}$$

Considere o processo adaptado v com uma função a fixada em Γ_m :

$$v(s) = \frac{Y_s \cdot a(s)}{\sigma(X_s^x)}.$$

Como σ satisfaz a condição $\exists \varepsilon > 0$ e $\forall x, \sigma(x) \geq \varepsilon$, temos que $v \in L^2([0, T])$. Usando a dualidade do operado δ mostrada na Equação (4.1), temos:

$$\begin{aligned} \partial_x u(x) &= \mathbb{E} \left[\int_0^T D_s \phi(X_{t_1}^x, \dots, X_{t_n}^x) v(s) ds \right] \\ &= \mathbb{E}[\langle D\phi, v \rangle_H] = \mathbb{E}[\phi \cdot \delta(v)] \end{aligned}$$

Como v é adaptado, temos $\delta(v) = \int_0^T v(s) dW_s$, pelo Teorema 4.2.1. Com isso, concluímos que:

$$\partial_x u(x) = \mathbb{E} \left[\phi(X_{t_1}^x, \dots, X_{t_n}^x) \int_0^T v(s) dW_s \right].$$

Caso ϕ não seja continuamente diferenciável, usamos aproximações de ϕ que cumpram tal papel. Usando o fato de que as funções infinitamente diferenciáveis com suporte

¹Veja que qualquer função que integre 1 de zero até t_1 e zero em cada um dos intervalos $[t_i, t_{i+1}]$, $i \in \mathbb{N}^*$ pertence a Γ_m . A melhor função a é a que minimiza a variância de Π .

compacto são densas em L^2 , podemos usar os *mollifiers* apresentados na Seção 2.6 e encontrar tais funções que aproximem ϕ .

5.3 Simulações numéricas

Para demonstrar a utilidade do Cálculo de Malliavin para o cálculo do Delta, vamos calculá-lo para dois derivativos distintos, dependentes de ativos $\{X_t, t \geq 0\}$ que satisfazem a equação de Black and Scholes, ou seja,

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dB_t,$$

Para as simulações consideraremos:

- Tempo de maturação = 1 ano ($T = 1$);
- Taxa livre de risco = 5% ($r = 0.05$);
- Volatilidade = 20% ($\sigma = 0.2$);
- Número de simulações = 100 mil ($N = 100000$);
- Intervalos no tempo = 100 ($n = 100$);
- Strike = 100 ($K = 100$);
- Valor inicial do ativo subjacente = 100 ($x = 100$).

5.3.1 O caso da Call

Consideraremos, inicialmente, a call com a seguinte função de payoff para as simulações:

$$\phi = \begin{cases} 0, & X_T < K \\ X_T - K, & X_T \geq K \end{cases}$$

Caso o preço do ativo seja menor que o Strike, o lucro será a diferença entre os valores, caso contrário, a compra não é realizada.

Analisaremos duas formas distintas para a simulação, utilizando **Diferenças Finitas** e o **Cálculo de Malliavin**.

Nesta função, com ativos subjacentes que satisfazem a equação de Black-Scholes podemos calcular diretamente o valor do Delta utilizando a seguinte fórmula:

$$\partial_x u(x) = \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{x}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot T}{\sigma \sqrt{T}} \right) = \Phi(d_1),$$

onde Φ é a função acumulada de probabilidade da distribuição normal padrão.

Diferenças finitas

Simularemos o limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E} [e^{-rT} \phi(X_T^{x+h})] - \mathbb{E} [e^{-rT} \phi(X_T^x)]}{h},$$

de forma que o valor esperado será calculado para utilizando o método de Monte Carlo com $h = 1$ para $N = 100000$ simulações.

Cálculo de Malliavin

Queremos calcular o delta usando a seguinte fórmula:

$$\partial_x u(x) = \mathbb{E} \left[e^{-rT} \phi(X_{t_1}^x, \dots, X_{t_n}^x) \int_0^T v(s) dW_s \right].$$

Como a função payoff tomada depende apenas do valor final do ativo subjacente, X_T , temos:

$$\partial_x u(x) = \mathbb{E} \left[e^{-rT} \phi(X_T^x) \int_0^T v(s) dW_s \right],$$

onde $v(s) = \frac{Y_s \cdot a(s)}{\sigma(X_s^x)}$. Como a função ϕ depende apenas de X_T , a única exigência sobre o a é que integre 1 no intervalo $[0, T]$, tomaremos então a função constante $a(t) = \frac{1}{T}$. Então, neste caso, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \int_0^T v(s) dW_s &= \int_0^T \frac{Y_s \cdot a(s)}{\sigma(X_s^x)} dW_s \\ &= \int_0^T \frac{Y_s \cdot \frac{1}{T}}{\sigma X_s} dW_s \end{aligned}$$

Como $Y_s = \frac{X_s}{x}$ e $\int_0^T dW_s = W_T$, temos:

$$\int_0^T v(s) dW_s = \frac{W_T}{T\sigma x}$$

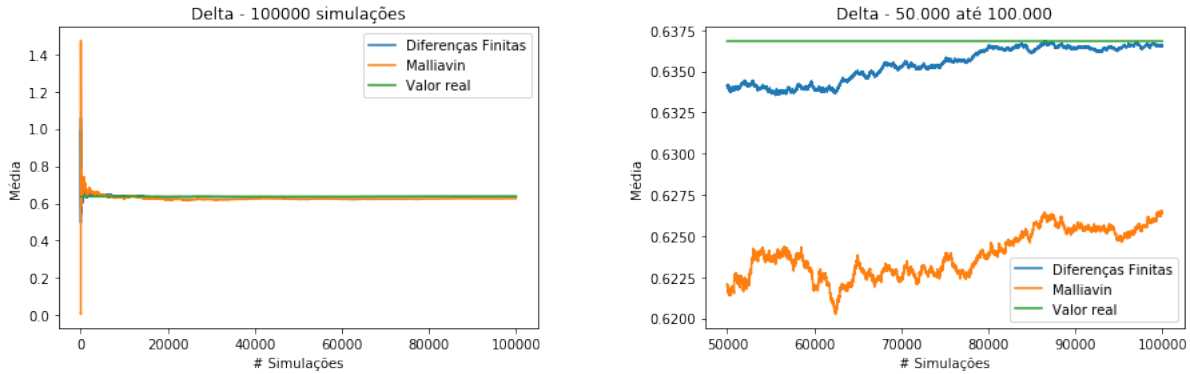
Assim, temos:

$$\partial_x u(x) = \mathbb{E} \left[e^{-rT} \phi(X_T^x) \frac{W_T}{T\sigma x} \right].$$

Com isso, simularemos o valor esperado para $N = 100000$ simulações.

Comparando as simulações

Simulando o delta das duas formas demonstradas acima para o payoff da **Call**, temos os gráficos abaixo que mostram o número de simulações feitas e a média das simulações executadas até então.



Podemos ver que, neste caso, a simulação feita com as diferenças finitas se aproxima melhor do valor real do Delta, isso pode ser explicado pelo fato de que a função é contínua, sem saltos, então a simulação feita dessa forma não sofre de problemas pois é o cálculo da "derivada" manual é possível.

Os valores encontrados no fim das simulações, para fins de comparação entre os métodos, são:

	Diferenças Finitas	Malliavin	Valor real
Delta Estimado	0.635803	0.626628	0.636830
Desvio Padrão	5.916×10^{-5}	1.4817×10^{-4}	-

5.3.2 O caso da Digital

Consideraremos, agora, o caso da Digital, com a seguinte função payoff:

$$\phi = \begin{cases} 0, & X_T < K \\ 1, & X_T \geq K \end{cases}$$

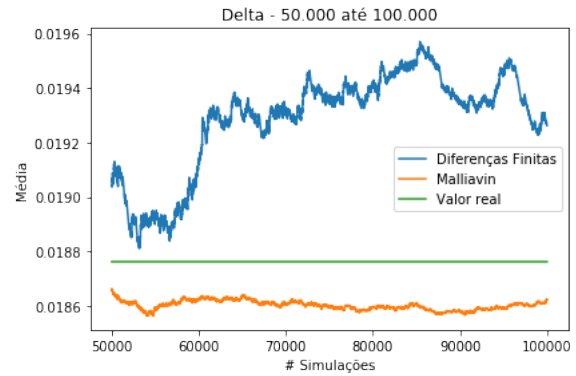
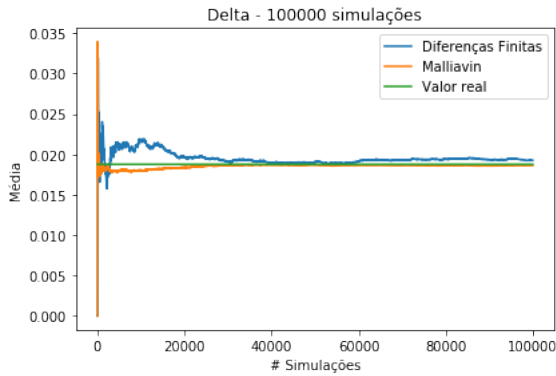
Da mesma forma que a Call, a função payoff da Digital depende apenas da última observação do ativo subjacente, ou seja, seu valor após o tempo de maturidade da opção (T). Assim, a forma de simular o Delta pelo cálculo de Malliavin é a mesma vista na seção acima, ou seja, $\partial_x u(x) = \mathbb{E} \left[e^{-rT} \phi(X_T^x) \frac{W_T}{T\sigma x} \right]$.

Podemos calcular diretamente o valor do delta neste caso utilizando a seguinte fórmula:

$$\partial_x u(x) = e^{-rT} \cdot \frac{\exp\left(\frac{-d_2^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}x\sigma\sqrt{T}}$$

Comparando as simulações

Simulando o Delta para a **Digital** utilizando diferenças finitas e utilizando o Cálculo de Malliavin, temos os gráficos abaixo, onde o eixo horizontal mostra o número de simulações e o eixo vertical, a média encontrada até então.



Diferentemente da Call, a função de payoff da Digital não é contínua, e podemos ver que a aproximação feita com o Cálculo de Malliavin é mais próxima que a feita com Diferenças Finitas, assim. Além disso o fato da função não ser contínua aumenta o desvio padrão da aproximação feita utilizando Diferenças Finitas pela maior dificuldade em calcular sua "derivada" computacionalmente. Podemos ver os valores encontrados na tabela abaixo:

	Diferenças Finitas	Malliavin	Valor real
Delta Estimado	0.019502	0.018510	0.018762
Desvio Padrão	9.29×10^{-6}	2.55×10^{-6}	-

Capítulo 6

Conclusão

No decorrer da dissertação estudamos os conceitos de cálculo de Malliavin e seus dois operadores fundamentais, a derivada de Malliavin e o Operador de Divergência. Ampliamos os conceitos para o domínio que contém a Integral de Itô, usando o caso *White Noise* e a Integral de Skorohod. Desenvolvemos os teoremas e suas demonstrações com base no livro [3] e chegamos na fórmula importante para que pudéssemos fazer a aplicação aqui pretendida.

Apesar de não termos apresentado as fórmulas para o cálculo de outras gregas além do Delta, elas podem ser encontradas, juntamente com suas demonstrações, em [2]. Assim, nos focamos no desenvolvimento do Delta e na parte teórica do Cálculo de Malliavin.

O uso do Cálculo de Malliavin se mostrou útil para calcular o Delta de uma opção sem a necessidade de derivar computacionalmente a função payoff. Ficou perceptível durante as simulações numéricas que o Cálculo de Malliavin é recomendado para funções pouco suaves, como por exemplo a Digital que possui um salto no valor do Strike.

Além da melhor aproximação do valor real do Delta, podemos salientar que o uso do Cálculo de Malliavin para esse fim não é particularmente custoso, pois é possível realizar apenas uma simulação do Movimento Browniano, que pode ser usado para simular diversas opções distintas sem precisar de recálculo para cada uma delas, diminuindo o custo computacional do processo.

Bibliografia

- [1] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.
- [2] Eric Fournié, Jean-Michel Lasry, Jérôme Lebuchoux, Pierre-Louis Lions, and Nizar Touzi. Applications of malliavin calculus to monte carlo methods in finance. *Finance and Stochastics*, 3:391–412, 1999.
- [3] David Nualart. *The Malliavin Calculus and Related Topics*. Springer, 2010.
- [4] Philip E. Protter. *Stochastic integration and differential equations*. Springer, 2 edition, 2004.
- [5] J. Michael Steele. *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Applications of Mathematics 45. Springer-Verlag New York, 1 edition, 2001.