

**FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS DE SÃO PAULO**

JOSÉ ANTONIO DA SILVA MOREIRA

**MAPAS PERCEPTUAIS E VARIAÇÕES
NA PARTICIPAÇÃO DE MERCADO**

**SÃO PAULO
2006**

JOSÉ ANTONIO DA SILVA MOREIRA

**MAPAS PERCEPTUAIS E VARIAÇÕES
NA PARTICIPAÇÃO DE MERCADO**

Dissertação apresentada à Escola de Administração de Empresas de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas como requisito para obtenção de título de Mestre em Administração de Empresas.

Linha de Pesquisa:

Estratégias de Marketing

Orientador:

Prof. Dr. Wilton de Oliveira Bussab

SÃO PAULO
2006

JOSÉ ANTONIO DA SILVA MOREIRA

**MAPAS PERCEPTUAIS E VARIAÇÕES
NA PARTICIPAÇÃO DE MERCADO**

Dissertação apresentada à Escola de Administração de Empresas de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas como requisito para obtenção de título de Mestre em Administração de Empresas.

Linha de Pesquisa:

Estratégias de Marketing

Data da Aprovação:

____ / ____ / ____

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Wilton de Oliveira Bussab
(orientador)
FGV-SP

Prof. Dr. Tales Andreassi
FGV-SP

Prof. Dr. Rinaldo Artes
IBMEC-SP

AGRADECIMENTOS

Serei eternamente agradecido ao Prof. Dr. Wilton de Oliveira Bussab pela sua prontidão em aceitar orientar esta dissertação, e por mostrar de maneira tão clara como a estatística pode nos ajudar a ser melhores profissionais de marketing.

Aos honoráveis membros da banca, Prof. Dr. Tales Andreassi e Prof. Dr. Rinaldo Artes, expresso minha gratidão.

Tenho dívidas eternas para com Natércia Carona, meu anjo da guarda durante este Programa de Mestrado em Administração na Fundação Getúlio Vargas.

Sou enormemente grato a Leda Kayano, Giseli Passarini e Daniela Castro, sem cuja ajuda este trabalho não teria sido possível.

E por fim, agradeço ao Mário, Joca, queridos amigos e minha família especial, pela paciência demonstrada ante minhas freqüentes ausências nos vários finais de semana que antecederam a finalização deste trabalho.

“Uma imagem vale mil palavras”
Ditado popular

“Uma imagem vale mil números”
Forrest W. Young

RESUMO

A questão do posicionamento de marcas é central ao processo de gerenciamento de marketing, pois produtos e serviços são adquiridos em grande parte em função da imagem que constroem na mente dos consumidores e clientes. Este trabalho busca explorar as relações existentes entre posicionamento de marca, preferências dos indivíduos e comportamento de compra através do tempo. Mais especificamente, ele se propõe a examinar as relações entre distância de uma marca ao ponto ideal num mapa perceptual e sua participação de mercado, e o quanto mudanças nessa distância através do tempo são acompanhadas de ganhos ou perdas em participação de mercado. Nessa tarefa são utilizadas técnicas de análise multivariada como o escalonamento multidimensional, a fim de elaborar os mapas perceptuais, e o mapeamento de preferências, a fim de localizar pontos ideais nos mapas elaborados. Também é utilizada a técnica de análise procrustiana, no processo de comparação de diferentes mapas perceptuais. Uma vez determinadas as distâncias das marcas ao ponto ideal e suas variações entres dois momentos no tempo, tais medidas são correlacionadas às participações de mercado das marcas, e suas variações. Os resultados obtidos no estudo empírico indicam que a variável “distância ao ponto ideal no mapa perceptual” é boa candidata a um indicador de participação de mercado, presente e futura. No entanto, essa distância não se mostra um bom indicador das variações na participação de mercado propriamente ditas. Outro resultado interessante diz respeito ao conceito de equilíbrio entre ordenação das marcas em função das distâncias ao ponto ideal e ordenação das marcas em função da participação de mercado, sugerindo que quando existe uma discordância nestas ordens, as participações de mercado das marcas tendem a mudar na direção de reduzir esse desequilíbrio.

PALAVRAS-CHAVE: Posicionamento; Participação de Mercado; Escalonamento Multidimensional; Mapeamento de Preferências; Análise Procrustiana; Estudos Longitudinais.

ABSTRACT

The matter of brand positioning is central to the process of marketing management, as products and services are purchased a great deal due to the image they build in consumers and clients minds. This work aims to explore the relationships that exist between brand positioning, subject's preferences and buying behavior across a period of time. More specifically, it proposes itself to examine the relationships between distance of a brand to the ideal point in a perceptual map and its market share, and to what extent changes in the distance of the brand to the ideal point are followed by gains or losses in market share. In this task, multivariate analysis techniques are employed, such as multidimensional scaling, in order to build the perceptual maps, and preference mapping, in order to determine the location of ideal points in the maps. Procrustean analysis is also employed in the process of comparing individual maps to each other. Once determined the distances of brands to the ideal point and its changes across two points in time, these measures are compared to the market share of these brands, and its changes. The results from the empirical study indicate that the variable "distance to the ideal point in a perceptual map" is a good indicator of market share, present and future. However, this distance does not represent a good indicator of the market share changes themselves. Another interesting result relates to the concept of equilibrium between ordering of brands according to distances to the ideal point, and ordering of brands according to market share, suggesting that, when there is disagreement between these two orderings, the market share of the brands tend to shift towards a reduction of this disequilibrium.

KEY WORDS: Positioning; Market Share; Multidimensional Scaling; Preference Mapping; Procrustean Analysis; Longitudinal studies.

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 Tipologia de dados de Coombs	36
TABELA 2 Cruzamento entre duas variáveis binárias.....	43
TABELA 3 Transformação de variável ordinal através do uso de indicadores	44
TABELA 4 Distâncias em quilômetros entre aeroportos do Brasil.....	51
TABELA 5 Média das avaliações de similaridade entre países.....	53
TABELA 6 Escala de dissimilaridade entre marcas de absorventes higiênicos	69
TABELA 7 Matriz de dissimilaridade de absorventes para participante A.....	69
TABELA 8 Matriz de dissimilaridade de absorventes para participante B.....	82
TABELA 9 Matrizes de dissimilaridade de absorventes para participantes A e B.....	82
TABELA 10 Pesos individuais das participantes A e B	84
TABELA 11 Análise de variância após aplicação de procrustes	104
TABELA 12 Atuação das marcas de serviço de comunicação por região.....	128
TABELA 13 Medidas de similaridade entre marcas por região 2004	136
TABELA 14 Medidas de similaridade entre marcas por região 2005	137
TABELA 15 Índices de preferência de marca serviços 2004 e 2005.....	139
TABELA 16 Distâncias ao ponto e participações de mercado para serviço.....	141
TABELA 17 Correlações entre distâncias e participação para serviço.....	141
TABELA 18 Variações de participação entre marcas B e C de serviço	144
TABELA 19 Medidas de similaridade entre marcas novembro 2004	144
TABELA 20 Medidas de similaridade entre marcas fevereiro 2005	145
TABELA 21 Índices de preferência de marca produtos 2004 e 2005.....	147
TABELA 22 Distâncias ao ponto e participações de mercado para produtos	148
TABELA 23 Correlações entre distâncias e participação para produtos	148
TABELA 24 Variações de participação entre marcas C e D de produtos.....	150
TABELA 25 Distâncias ao ponto anti-ideal e volumes de vendas	152

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 Massa de dados a três vias e dois modos	86
FIGURA 2 Espaço de objetos comum e espaço de pesos das fontes	89
FIGURA 3 Espaço de objetos individuais das fontes 2 e 3	89
FIGURA 4 Projeções dos pontos-objeto sobre a reta da regressão.....	97
FIGURA 5 Direções ajustadas de duas variáveis descritivas.....	98
FIGURA 6 Exemplo de boxplot para subgrupos após análise de agrupamentos....	100
FIGURA 7 Análise procrustea sobre um par de triângulos.....	107
FIGURA 8 Conceito de desdobramento de Coombs.....	113
FIGURA 9 Linhas de iso-preferência ao redor do indivíduo J	114
FIGURA 10 Matriz típica de proximidades em desdobramento.....	116
FIGURA 11 Modelo vetorial, métrico	118
FIGURA 12 Modelo vetorial, não-métrico.....	120
FIGURA 13 Modelo de ponto ideal elíptico	123
FIGURA 14 Modelo de ponto ideal quadrático	124
FIGURA 15 Triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5.....	164

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 Mapa perceptual de marcas de sabonete do mercado americano.....	14
GRÁFICO 2 Análise de preferências com grupos de pontos ideais	16
GRÁFICO 3 EMD a partir das distâncias entre capitais do Brasil	51
GRÁFICO 4 EMD a partir das distâncias entre capitais brasileiras rotacionado	52
GRÁFICO 5 Mapa perceptual dos países	54
GRÁFICO 6 Mapa perceptual dos países com interpretação de dimensões	55
GRÁFICO 7 EMD não métrico de absorventes para respondente A.....	70
GRÁFICO 8 Scree plot para estudo de similaridade entre países	77
GRÁFICO 9 Disparidades	79
GRÁFICO 10 EMD não-métrico de absorventes para respondente B	83
GRÁFICO 11 Mapa comum às respondentes A e B	84
GRÁFICO 12 Mapa de pesos individuais das respondentes A(1) e B(2)	84
GRÁFICO 13 Mapas individuais após aplicação de pesos	85
GRÁFICO 14 Análise procrustea para absorventes.....	103
GRÁFICO 15 Comparação dos mapas de absorventes das respondentes A e B...	105
GRÁFICO 16 Mapa perceptual serviços de comunicação 2004	136
GRÁFICO 17 Mapa perceptual serviços de comunicação 2005	138
GRÁFICO 18 Mapa perceptual serviços 2004, e 2005 após procrustes	139
GRÁFICO 19 Mapa perceptual serviços com pontos anti-ideais.....	140
GRÁFICO 20 Mapa perceptual produtos de consumo nov2004	145
GRÁFICO 21 Mapa perceptual produtos de consumo fev2005	146
GRÁFICO 22 Mapa perceptual produtos 2004, e 2005 após procrustes	146
GRÁFICO 23 Mapa perceptual produtos com pontos anti-ideais.....	147

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	13
1.1	Objetivos	16
1.2	Questões de pesquisa.....	17
1.3	Justificativa.....	19
1.4	Organização do trabalho	21
2	MAPAS PERCEPTUAIS EM MARKETING	23
2.1	Posicionamento.....	23
2.2	Mapas perceptuais	24
2.3	Preferências	27
2.4	Outras aplicações.....	29
3	TEORIA DE DADOS.....	35
3.1	Métodos de coleta de dados	39
3.1.1	Coleta de dados para escalonamento multidimensional.....	40
3.1.2	Coleta de dados para análise de preferências.....	47
4	ESCALONAMENTO MULTIDIMENSIONAL	50
4.1	Caracterização do problema	50
4.2	Um exemplo de aplicação em Ciências Sociais	53
4.3	História	55
4.4	Definições.....	62
4.5	Escalonamento métrico de Torgerson.....	65
4.6	Escalonamento não-métrico de Kruskal	68
4.6.1	Um exemplo.....	68
4.6.2	A solução	71
4.7	Escalonamento a três vias de Carroll	81
4.7.1	Um exemplo.....	82
4.7.2	A solução	85
4.7.3	Soluções para o modelo teórico do INDSCAL	90
4.8	Interpretação das dimensões	93
4.8.1	Interpretação através de regressão linear	95
4.8.2	Interpretação através de análise de agrupamentos	99
5	ANÁLISE PROCRUSTEANA.....	102
5.1	Um exemplo	102
5.2	A solução.....	105

6	MAPEAMENTO DE PREFERÊNCIAS.....	112
6.1	Mapeamento interno de preferências	113
6.2	Mapeamento externo de preferências	117
6.2.1	Mapeamento externo, modelo vetorial.....	118
6.2.2	Mapeamento externo, modelo de ponto ideal.....	120
6.3	PREFMAP	125
7	MÉTODO EMPÍRICO	127
8	RESULTADOS.....	136
8.1	Serviço de Comunicação.....	136
8.2	Produto de consumo doméstico	144
9	CONCLUSÕES.....	151
9.1	Implicações	152
9.2	Limitações	153
9.3	Sugestões de pesquisas futuras.....	155
10	REFERÊNCIAS	157
11	APÊNDICES	161
	APÊNDICE A – Decomposição em valores singulares.....	161
	APÊNDICE B – Solução do escalonamento métrico	163
	APÊNDICE C – Regressão Monotônica	166

1 INTRODUÇÃO

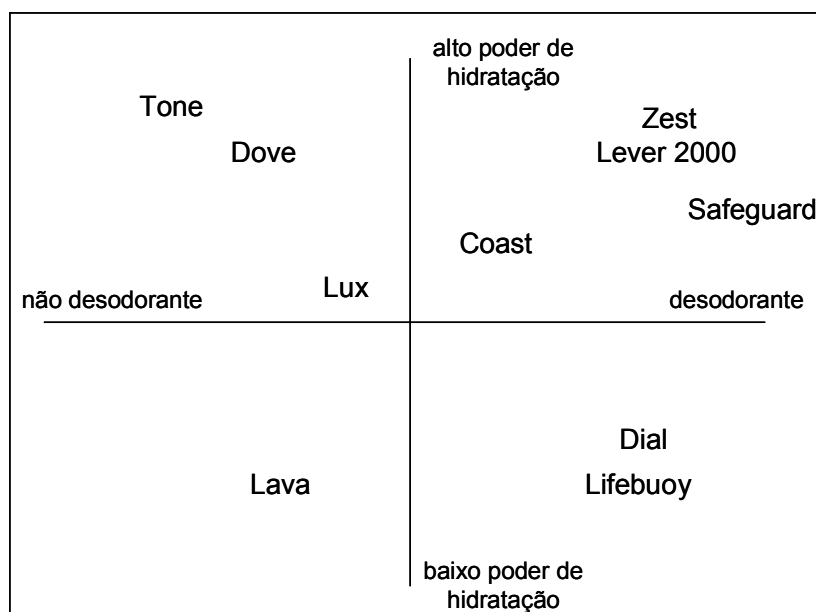
Grande parte do processo de gerenciamento de marketing envolve a questão do posicionamento das organizações, marcas ou produtos, onde são tratadas questões como “quem são nossos concorrentes?”, “como estão nossas marcas em comparação com a concorrência?”, ou “quais atributos de produto têm maior peso em atrair consumidores para nossos produtos, e quão fortes são percebidos nossos produtos nesses atributos?” (AACKER; KUMAR; DAY, 2001).

Uma ferramenta de análise largamente utilizada em estudos de posicionamento é o mapa perceptual, que é uma representação gráfica espacial de objetos (neste caso as organizações, marcas ou produtos) em dimensões relevantes para o mercado em questão. A construção do mapa perceptual envolve basicamente duas tarefas:

- a) Identificar as dimensões relevantes para o mercado em questão;
- b) Determinar a posição ocupada pelas marcas e/ou produtos nestas dimensões.

Um exemplo de mapa perceptual, extraído de Perreault e McCarthy (2000), foi construído a partir da avaliação das marcas de sabonete nos Estados Unidos da América em dois atributos considerados importantes no mercado em questão: a função hidratante e a função desodorante:

GRÁFICO 1
Mapa perceptual de marcas de sabonete do mercado americano



Fonte: Perreault e McCarthy (2000, p.71).

Note que Tone e Dove são percebidos como possuindo forte poder de hidratação, e Dial e Lifebuoy com alto poder desodorante, enquanto Zest e Lever 2000 possuem um posicionamento misto de hidratação e desodorância.

No entanto, os consumidores freqüentemente utilizam mais do que duas dimensões na percepção dos objetos e avaliação das alternativas que lhes são apresentadas. Dessa forma, técnicas de análise multivariada são muito empregadas na construção de mapas perceptuais, como, por exemplo, a Análise Fatorial ou a Análise de Componentes Principais¹.

Dentre elas, o Escalonamento Multidimensional (EMD) se mostra particularmente apropriado para esta tarefa. Isto se deve ao fato de que o resultado da aplicação do EMD é na sua essência uma representação espacial, idealmente em poucas dimensões (duas ou três), do grau de similaridade (ou dissimilaridade) entre os

¹ Uma apresentação sucinta das principais técnicas de análise multivariada pode ser encontrada em Schervish (1987).

objetos de estudo. O EMD será apresentado a fundo no capítulo 4 deste trabalho (ver p. 50).

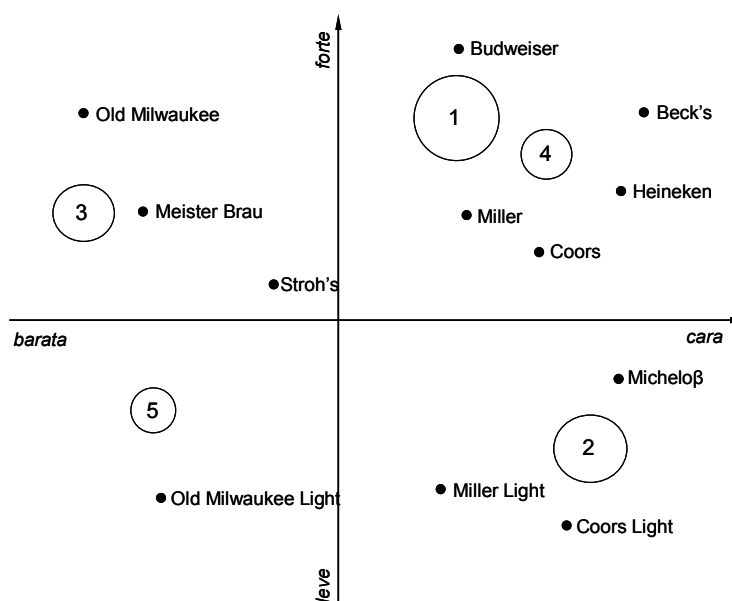
Além da posição ocupada pelas marcas no mapa perceptual, um outro aspecto altamente relevante para a definição da estratégia de marketing para uma empresa, marca ou produto é o que trata das relações de preferência entre os indivíduos e os objetos, pois permite relacionar o posicionamento do objeto com o gosto dos consumidores (AACKER; KUMAR; DAY, 2001).

As técnicas de Análise de Preferências lidam com essas relações. Elas buscam identificar, no mapa perceptual, quais regiões ou pontos conseguem atrair maior interesse dos consumidores potenciais. Cada um destes pontos no mapa recebe o nome de “ponto ideal”, pois representa o local onde um produto, que ali se posicionasse, atrairia a preferência máxima de um consumidor determinado.

No mapa perceptual de cervejas do mercado americano apresentado a seguir, extraído de Lilien e Rangaswami (2004), podemos visualizar como as diferentes marcas de cerveja do mercado são percebidas pelos consumidores nas dimensões de leveza e preço. Sobre o mapa perceptual estão também representados grandes círculos numerados que indicam áreas de grande concentração de pontos ideais dos participantes do estudo:

GRÁFICO 2

Análise de preferências com grupos de pontos ideais



Fonte: Lilien e Rangaswamy (2004, p.143)

Pode-se perceber no gráfico que, para um grande grupo de consumidores (círculo 1), a cerveja ideal seria forte, com preço um pouco acima da média do mercado (quadrante superior direito). Por outro lado, o segundo maior grupo de consumidores (círculo 2) dá preferência para cervejas *premium* mais leves.

1.1 Objetivos

Este trabalho é de natureza exploratória, e tem como objetivo investigar as relações existentes entre distâncias ao ponto ideal médio nos mapas perceptuais e participação de mercado², não somente num único momento no tempo, mas longitudinalmente, ao longo de um período.

² Neste estudo, participação de mercado é definida como a participação nas vendas totais (expressa em unidades ou valor monetário) atribuída a um determinado objeto (empresa, marca ou produto), num dado período e numa dada região geográfica.

Os mapas perceptuais são estruturas dinâmicas, sofrendo mudanças com o passar do tempo em função dos esforços de marketing empregados pelos concorrentes do mercado. Por exemplo, uma campanha de propaganda desenhada para reforçar as credenciais de uma marca num atributo em particular pode refletir numa movimentação dessa marca no mapa perceptual, alterando a sua distância em relação ao ponto ideal.

Adicionalmente, também o ponto ideal não é estático, pois com o passar do tempo, as preferências dos consumidores podem sofrer alterações. Por exemplo, tanto a introdução de uma grande inovação, como a veiculação de fortes campanhas publicitárias, podem modificar não somente a percepção dos consumidores em relação às marcas existentes, mas o próprio interesse dos consumidores por determinados atributos de produto.

Essa natureza dinâmica dos mapas perceptuais, pontos ideais, e participações de mercado, constitui o principal tema de estudo deste trabalho.

1.2 Questões de pesquisa

Consideremos um mapa perceptual onde foi localizado o ponto ideal médio do mercado, ou seja, o ponto onde um objeto hipotético ali posicionado alcançaria o mais alto nível de preferência, considerando todos os indivíduos pesquisados.

Seria natural esperar uma forte correlação entre proximidade de um objeto ao ponto ideal e sua participação de mercado. Em outras palavras, espera-se que quanto mais próximo do ponto ideal um objeto se encontra, maior participação de mercado possua, e vice-versa.

Em sua dissertação de mestrado, Souza (1994) se propôs a estudar essa relação. No seu estudo, ele testou a hipótese de que a ordenação das marcas em função da distância ao ponto ideal médio (marca mais próxima, segunda mais próxima, ..., marca mais distante) corresponderia à ordenação das marcas em função da participação de mercado (marca líder, vice-líder, ..., última colocada).

O estudo empírico foi realizado em dois mercados de produtos de consumo, fraldas descartáveis e absorventes higiênicos femininos. De fato, as conclusões a que Souza (1994) chegou foram que não era possível, em vista dos resultados obtidos, descartar a associação entre participação de mercado e distâncias ao ponto ideal. Apesar dela não ter se verificado de maneira forte nos índices de associação calculados, em ambos os mercados analisados os produtos líderes em participação de mercado eram de fato os mais próximos dos pontos ideais médios em seus respectivos mapas.

As principais questões a serem investigadas neste estudo dão continuidade ao trabalho iniciado por Souza (1994), buscando verificar:

- a) Existem fortes associações entre distância ao ponto ideal e variações na participação de mercado das marcas?
- b) Qual a correlação entre mudanças na distância ao ponto ideal de um momento para o outro e as variações observadas na participação de mercado?

Por outro lado, um fato interessante ocorreu no ano seguinte à conclusão do estudo de Souza (1994). A ordem de liderança do mercado de fraldas sofreu uma alteração, com a terceira colocada na época de realização do estudo aumentando sua

participação de mercado e assumindo a vice-liderança. Essa mudança, ocorrida posteriormente à finalização do estudo, reforçaria o grau de associação entre participação de mercado e distâncias ao ponto ideal observado.

Uma possível conclusão desse fato é que, se a ordenação das marcas em função de suas distâncias ao ponto ideal difere da ordem das marcas segundo a participação de mercado, isto poderia representar uma situação de desequilíbrio temporário no mercado, que tende a ser eliminada com o passar do tempo.

Esta constitui uma questão adicional a ser explorada nesse estudo: se uma marca se encontra mais próxima do ponto ideal do que a sua participação de mercado sugeriria, ela ganha participação no futuro até que a relação entre distâncias ao ponto ideal e participação de mercado volte a ser concordante, re-estabelecendo a situação de equilíbrio?

1.3 Justificativa

A importante contribuição deste trabalho no estudo destas relações reside na inclusão da dimensão temporal.

Existindo um objetivo maior de desenvolver um modelo robusto que relacione posicionamentos, preferências e participações de mercado, as relações entre distâncias ao ponto ideal e participação de mercado devem poder ser observadas mesmo em face da natureza dinâmica dos mapas perceptuais, pontos ideais e participações de mercado, caso contrário o modelo seria considerado de pouca utilidade prática.

No evento de fortes relações entre distâncias ao ponto ideal e participação de mercado através do tempo serem verificadas, a construção de mapas perceptuais a intervalos regulares permitirá prever ganhos ou perdas futuros de participação de mercado, o que constitui um poderoso instrumento de gerenciamento de marketing.

Através do seu uso, seria possível:

- a) Detectar precocemente ameaças competitivas, ao apontar marcas concorrentes que se encontram muito próximas do ponto ideal, ou que vêm se aproximando rapidamente dele, e que, portanto, tendem a aumentar sua participação de mercado;
- b) Perceber a necessidade de ajuste do posicionamento da marca gerenciada, a fim de se aproximar do ponto ideal, preservando ou ganhando participação de mercado;
- c) Melhorar a capacidade de análise diagnóstica da dinâmica de mercado, ao explicitar fatores de imagem e posicionamento que estão influenciando as variações na participação de mercado.

Adicionalmente, a variável “distância até o ponto ideal” poderia constituir uma maneira simples de incluir aspectos de posicionamento e preferência em modelos de alocação de investimentos de marketing, desenvolvidos com o objetivo de maximizar retornos sobre o investimento.

Por exemplo, no que tange investimento em propaganda, em geral estes modelos levam em consideração somente aspectos quantitativos dos esforços empregados (o quanto se vai investir em propaganda, em dinheiro ou GRP³), sem considerar os

³ GRP é uma medida de impacto freqüentemente utilizada em planejamento de mídia. Ela indica a porcentagem do público-alvo que é atingida, e com que freqüência isso se verifica. Por exemplo, um

aspectos qualitativos desse esforço (a natureza da mensagem veiculada). Em outras palavras, tais modelos costumam apontar o quanto se espera ganhar em participação de mercado com determinado nível de investimento em propaganda, mas não incluem neste cálculo a natureza da mensagem transmitida na propaganda.

Passando-se a incluir hipóteses sobre o deslocamento da marca no mapa perceptual em relação ao ponto ideal em função da mensagem comunicada, os modelos poderão eventualmente melhorar sua capacidade preditora do efeito do investimento em comunicação.

1.4 Organização do trabalho

A revisão teórica que dá suporte ao trabalho será apresentada em cinco capítulos.

O capítulo 2 inicia a revisão discutindo a uso de mapas perceptuais e pontos ideais no gerenciamento de marketing.

O capítulo 3 apresenta sucintamente a Teoria de Dados segundo formulada por Clyde Coombs, ressaltando os dois tipos de dados que são de interesse para este estudo e apontando os principais métodos utilizados para sua obtenção.

O capítulo 4 apresenta a técnica de escalonamento multidimensional, iniciando com um exemplo e um breve histórico do desenvolvimento da técnica. Na continuação são apresentados em profundidade os três principais modelos de EMD, segundo os principais expoentes da área: Warren Torgerson, Joseph Kruskal e J. D. Carroll. Ao final do capítulo é discutida a importante questão da interpretação das dimensões em escalonamento multidimensional.

plano de investimento de 100 GRP pode indicar que 100% do público alvo será atingido uma vez pela mídia, ou que 10% do público alvo será atingido 10 vezes.

O capítulo 5 introduz a técnica de análise procrustea segundo John Gower. Apesar da técnica não ser necessária para a realização de escalonamento multidimensional, ela é introduzida neste capítulo, uma vez que é fundamental na comparação de estudos EMD realizados separadamente.

Finalizando a revisão teórica, o capítulo 6 aborda as técnicas de análise de preferências, focando em mapeamento externo de preferências.

Os três capítulos subseqüentes tratam da investigação empírica realizada neste estudo:

O capítulo 7 apresenta o método adotado nos exercícios, e a fonte e natureza dos dados utilizados.

O capítulo 8 apresenta os resultados obtidos. Está subdividido em duas partes, segundo os dois mercados analisados neste estudo.

Finalmente, o capítulo 9 discorre sobre as conclusões do estudo e discute implicações, limitações do trabalho, e sugestões de pesquisas futuras relacionadas ao tema.

Os capítulos finais apresentam as referências bibliográficas utilizadas e itens anexos, constituídos principalmente de métodos matemáticos acessórios utilizados nas técnicas estudadas.

2 MAPAS PERCEPTUAIS EM MARKETING

2.1 Posicionamento

O posicionamento de um produto pode ser definido como a maneira através da qual os consumidores o percebem com base em seus atributos importantes, em relação aos concorrentes (KOTLER; ARMSTRONG, 2003). Segundo Aacker (1991), o posicionamento está intimamente relacionado a associações e imagem que um produto ocupa na mente do consumidor, dentro de um referencial formado pelos seus competidores. Evidencia-se assim que o processo de posicionar um produto é essencialmente comparativo, ou seja, o posicionamento de um produto está intimamente relacionado ao posicionamento dos produtos concorrentes.

A necessidade de se posicionar um produto está ligada principalmente à saturação de mensagens de comunicação típica na sociedade moderna, que faz com que os consumidores filtrem e rejeitem muitas das mensagens que recebem (RIES; TROUT, 1996). Sendo assim, a chance dos anunciantes de comunicar as diversas propriedades do seu produto ao público alvo torna-se bastante reduzida. Adicionalmente, estando sobrecarregados com informações sobre os diversos produtos, os consumidores não são capazes de reavaliar cada produto todas as vezes que tomam uma decisão de compra. Para simplificar o processo de decisão, consumidores costumam categorizar os produtos, posicionando-os na sua mente (KOTLER; ARMSTRONG, 2003). Em poucas palavras, posicionar um produto é ocupar um lugar na mente dos consumidores (RIES; TROUT, 1996).

Idealmente, o posicionamento do produto deve refletir os diferenciais oferecidos pelo produto: se for equivalente ao posicionamento de um concorrente, o posicionamento não terá muita eficácia (BHAT; REDDY, 1998). Ademais, estes diferenciais refletidos no posicionamento devem ser relevantes para os seus potenciais consumidores, além de serem sustentados por benefícios reais advindos da utilização do produto (TALARICO, 1998).

A tarefa de posicionar um produto em geral compreende quatro etapas (KOTLER; ARMSTRONG, 2003):

- a) Identificar possíveis vantagens competitivas;
- b) Escolher a vantagem competitiva com maior potencial de sucesso;
- c) Selecionar uma estratégia de posicionamento;
- d) Comunicar o posicionamento escolhido ao público alvo.

2.2 Mapas perceptuais

No processo de identificar e escolher o posicionamento para um produto, as empresas podem se utilizar de diversos métodos de obtenção e análise de informações sobre o próprio produto e os dos concorrentes. Um modelo de análise de posicionamento bastante difundido em marketing é o mapa perceptual (AACKER; KUMAR; DAY, 2001), que é uma maneira gráfica de representar como se localizam na mente do consumidor os produtos ou marcas do mercado analisado (SOLOMON, 2004).

O objetivo da construção de mapas perceptuais é explicitar a estrutura competitiva do mercado, facilitando as decisões de diferenciação e posicionamento (LILIEIN;

RANGASWAMY, 2004). Eles são construídos em geral com finalidades exploratórias, a fim de entender qual o espaço ocupado pelos produtos na mente do consumidor potencial, e o quanto tal posição é valorizada por eles. Esse conhecimento é então utilizado no planejamento estratégico de marketing, através da escolha de um posicionamento objetivo para a marca e/ou produto.

Matematicamente, um mapa perceptual é uma representação gráfica no espaço euclidiano, onde os competidores são representados por pontos no espaço, sendo que as distâncias entre dois pontos indicam o grau de “semelhança” percebida entre dois competidores pelos consumidores (LILIEN; RANGASWAMY, 2004). Quanto mais próximos dois pontos no mapa, mais semelhantes esses dois produtos são percebidos pelos consumidores, e inversamente, quanto mais distantes dois pontos no mapa, mais diferentes esses dois produtos são percebidos.

O nome “perceptual” atribuído ao modelo tem suas raízes no fato de que as posições atribuídas aos produtos do mercado no mapa são oriundas de medidas das percepções dos consumidores sobre os produtos, que nem sempre refletem a realidade objetiva sobre eles. Percepção é definida como o processo através do qual as sensações (respostas imediatas de receptores sensoriais a estímulos visuais, auditivos, olfativos, gustativos e tácteis) são selecionadas, organizadas e interpretadas e, portanto, estão sujeitas aos vieses, necessidades e experiências particulares de cada indivíduo (SOLOMON, 2004).

Mapas perceptuais podem ser elaborados a partir de quaisquer informações que o interessado possua sobre seu(s) produto(s) e os produtos concorrentes do mesmo mercado. Encontra-se implícita nessa afirmação a necessidade de se definir, a priori, as fronteiras do mercado sendo considerado. Uma possível definição é que o

mercado englobe todos os produtos que competem pelo mesmo cliente potencial na satisfação de suas particulares necessidades ou desejos (COOPER; NAKANISHI, 1988).

Ainda assim essa definição não é rígida, pois quanto mais básicas as necessidades consideradas, maior o número de produtos que devem ser considerados (ex. cuidado de roupas incluiria detergente em pó, sabão em barra, aditivo pré-lavagem, água sanitária, amaciante de roupa, facilitador de passar roupa, entre outros), e quanto mais específicas as necessidades, menos produtos devem ser considerados (ex. lavagem de roupas coloridas incluiria detergentes específicos para roupas coloridas, sabão em barra e alvejantes sem cloro).

Uma sugestão de Cooper e Nakanishi (1988) é que, caso o objetivo seja orientar esforços de marketing, o mercado seja definido como abrangente o suficiente para abarcar todas as possíveis ameaças ao programa de marketing sendo elaborado, e restrito o suficiente de modo que o conjunto de medidas de esforço de marketing, e seus resultados, possam ser aferidos entre todos os competidores.

Em última instância, cabe ao praticante de marketing decidir quão abrangente ou não a sua definição de mercado será.

A segunda definição importante a cargo do praticante de marketing interessado em construir um mapa perceptual é a que envolve as medidas utilizadas na construção do mapa, ou seja, quais variáveis serão utilizadas para determinar o grau de similaridade entre os objetos de estudo. Estas medidas podem ser tanto propriedades dos objetos (avaliações em atributos determinados) como avaliações diretas de similaridade entre elas.

Quando a construção do mapa perceptual envolve poucas marcas e poucas medidas sobre elas, sua construção é relativamente simples, e pode ser realizada até mesmo sem a ajuda de processamento eletrônico. Por outro lado, se o número de características dos produtos sendo avaliados é grande, a tarefa se torna quase impossível de realizar sem a ajuda de modelos de análise multivariada e recursos de computação.

Como já visto no capítulo introdutório, uma técnica de análise multivariada de uso amplamente difundido na construção de mapas perceptuais em marketing é o escalonamento multidimensional. Essencialmente, o EMD parte de dados de similaridade (ou dissimilaridade) entre os objetos de estudo (marcas, produtos ou organizações) e gera um mapa, que é uma representação espacial que indica o quanto estes objetos são percebidos como semelhantes (ou diferentes) entre si. Ou seja, objetos localizados próximos um do outro no mapa são percebidos como mais semelhantes, e objetos localizados à distância um do outro são percebidos como mais diferentes entre si.

Ademais, através da interpretação das dimensões do mapa resultante do EMD pode-se entender quais critérios são utilizados pelos consumidores na percepção dos diferentes objetos, ou em outras palavras, o posicionamento de cada um na mente destes consumidores.

2.3 Preferências

Como visto até o momento, mapas perceptuais oriundos de aplicação da técnica de escalonamento multidimensional são freqüentemente utilizados em estudos de posicionamento como ferramenta exploratória, pois permite visualizar os espaços

ocupados por cada produto ou marca na mente do consumidor. No entanto, a representação espacial não chega a dizer quais regiões do mapa são mais atraentes para os consumidores (LILIEN; RANGASWAMY, 2004).

Nesse caso, torna-se necessário construir espaços onde dados de preferência do indivíduo em relação aos objetos são representados conjuntamente aos objetos em si. Coombs (1964) atribuiu a espaços dessa natureza o nome de “espaços conjuntos”. Em espaços conjuntos, os pontos-indivíduo indicam a combinação particular de intensidade de atributos que o indivíduo prefere frente a todas as outras combinações (GREEN; CARMONE, 1969). Dessa forma, os pontos-objeto que se encontram mais próximos ao ponto-indivíduo seriam preferidos por esse indivíduo em comparação aos pontos-objeto mais distantes.

Uma maneira simples de localizar um ponto ideal num mapa é levantar as mesmas informações solicitadas para os objetos de estudo em relação a um objeto ideal hipotético. O escalonamento multidimensional trata, então, o objeto ideal hipotético como se fosse simplesmente um outro objeto do estudo, identificando sua localização no mapa. No entanto, este método é pouco utilizado por duas razões:

- a) Exige um alto grau de abstração dos indivíduos participantes do estudo, que são solicitados a avaliar um objeto abstrato, que não existe na realidade;
- b) A avaliação do objeto ideal hipotético pode introduzir um viés na determinação das dimensões do mapa e, por conseguinte, na localização dos objetos do estudo, fazendo com que o mapa perceptual deixe de ser uma representação fiel do posicionamento dos objetos “reais” na mente dos participantes do estudo.

Uma maneira alternativa, freqüentemente utilizada na determinação dos pontos ideais, é a que parte do grau de preferência dos objetos do estudo, segundo manifestada diretamente pelos indivíduos participantes. Ou seja, a cada participante é solicitado que atribua um valor (nota) a cada objeto, de acordo com o seu grau de preferência por ele, ou alternativamente, que manifeste a sua ordem de preferência entre os objetos do estudo (*ranking*).

A partir destes dados de preferência, as técnicas de Mapeamento de Preferências, que serão apresentadas detalhadamente no capítulo 6 (ver p. 112), determinam então os pontos do mapa perceptual onde se localizam a preferência máxima dos sujeitos participantes (LILIEN; RANGASWAMY, 2004).

De posse então de um mapa perceptual e a indicação das áreas que atraem maior preferência dos sujeitos, o praticante de marketing possui informação suficiente para desenhar alternativas de posicionamento para o seu produto, buscando áreas de menor competitividade (vazios no mapa), ou áreas onde as credenciais da sua empresa ou marca lhe trariam maior vantagem competitiva.

2.4 Outras aplicações

Os mapas perceptuais e a análise de preferências têm sido largamente utilizados em aplicações de marketing, indo muito além da finalidade exploratória discutida anteriormente. Dentre elas, serão apresentados brevemente:

- a) Pré-teste de novos produtos;
- b) Modelos de troca de marca em análise de comportamento de compra;
- c) Reposicionamento de produtos ou serviços;

- d) Avaliação de efeito de comunicação;
- e) Análise de valor percebido;
- f) Segmentação de consumidores;
- g) Posicionamento em cenário competitivo de preços.

Pré-teste de novos produtos

PERCEPTOR é um modelo de previsão de vendas para novos produtos. A previsão de vendas é feita com base em estimativas de duas medidas principais:

- a) Taxa de experimentação, ou porcentagem do público alvo que experimentará o novo produto após conhecê-lo;
- b) Taxa de repetição, ou porcentagem do público alvo que recomprará o produto após experimentá-lo;

No PERCEPTOR, a taxa de experimentação é definida como uma função da distância quadrática entre o ponto-ideal de cada respondente e a posição do novo produto no mapa (URBAN, 1975).

Modelos de troca de marca

Em estudos de troca de marca é comum o uso de métodos estocásticos, que modelam a probabilidade dos consumidores de comprarem uma determinada marca num determinado momento no tempo.

Lehmann (1972) propôs um modelo misto de análise de troca de marca, combinando processos estocásticos com escalonamento multidimensional. No seu modelo, a

matriz de semelhança entre marcas é definida através do comportamento passado de troca de marca dos indivíduos, de duas maneiras alternativas.

Na primeira, a semelhança entre duas marcas i e j é dada por $\delta_{ij} = \frac{P_{ij} + P_{ji}}{2}$, onde P_{ij}

é a probabilidade de um indivíduo trocar da marca i para a marca j . Na segunda,

$\delta_{ij} = \frac{N_{ij} + N_{ji}}{N_i + N_j}$, onde N_{ij} é o número de consumidores que trocaram da marca i para

marca j no período, e N_i é o número de consumidores que compraram a marca i no período.

Estes modelos se mostram mais adequados para mercados mais maduros, com alta frequência de compra, como os produtos de consumo de massa (CARROLL; GREEN, 1997).

Reposicionamento de produtos e serviços

Gillette e Evans (1975) analisaram através de EMD a percepção dos clientes sobre serviços bancários. Em seu estudo, eles verificaram que, enquanto os quatro bancos analisados se posicionavam um próximo ao outro, o ponto ideal se encontrava distante de todos eles. A partir desses resultados foi possível tirar duas conclusões importantes:

- a) Havia baixa diferenciação percebida entre os bancos, sugerindo uma necessidade de reposicionamento das marcas a fim de buscar maior diferenciação;
- b) Os bancos em geral não estavam oferecendo os serviços considerados importantes para os clientes.

De posse dessas informações, os gerentes de marketing dos bancos poderiam desenvolver um programa de re-posicionamento de marca e re-estruturação dos serviços oferecidos, evitando forte competitividade por preço característica de mercados de baixa diferenciação.

Avaliação de efeito de comunicação

Moinpour, McCullough e MacLachlan (1976) estudaram os efeitos de veiculação de propaganda sobre o posicionamento das marcas através da aplicação de escalonamento multidimensional⁴.

Segundo os autores, uma primeira dificuldade no estudo dizia respeito a como controlar e avaliar mudanças na configuração resultante do EMD, pois elas poderiam ser tanto estruturais como espaciais. Mudanças estruturais são as em que o sujeito altera o número ou a natureza das dimensões que utiliza para avaliar objetos, enquanto mudanças espaciais são as em que o sujeito muda a importância de uma dimensão original ou a posição dos estímulos nessas dimensões.

Sendo assim, em seu estudo empírico, os autores utilizou um desenho experimental com amostras de controle (grupos de sujeitos que não foram expostos aos estímulos de interesse), a fim de se certificar que mudanças estruturais não haviam ocorrido naturalmente através do tempo, independente da exposição ao estímulo.

As duas hipóteses testadas pelos autores foram se o EMD pode reconstruir uma configuração espacial original na ausência de estímulos significativos, e se o EMD reflete, com confiança, o impacto de uma comunicação persuasiva sobre o espaço

⁴ Uma tarefa semelhante foi realizada por Varva (1972) utilizando análise fatorial em lugar de EMD, sob o argumento de que a identificação das dimensões, que era de interesse para o estudo, necessita um certo grau de inferência quando realizada através de EMD.

perceptual original. Os resultados obtidos levaram Moinpour, McCullough e MacLachlan (1976) a confirmar as hipóteses testadas, reforçando assim a utilidade do escalonamento multidimensional como instrumento de acompanhamento de efeitos dos esforços de marketing sobre a percepção e preferência dos consumidores.

Análise de valor percebido

Apesar de valor percebido ser freqüentemente definido como o *trade-off* entre qualidade e preço, vários pesquisadores perceberam que valor percebido se trata de um construto mais obscuro e complexo, envolvendo noções de preço percebido, qualidade, e sacrifício do cliente (SINHA; DeSARBO, 1998). Sendo assim, estes autores propuseram um novo modelo para estudo do valor percebido através de um misto das técnicas de classes latentes e escalonamento multidimensional, onde a medida de similaridade entre os objetos era derivada da medição direta do valor percebido de cada marca do estudo: os participantes foram solicitados a classificar cada marca em três categorias: (1) bom valor, (0) valor médio ou (-1) valor ruim.

A interpretação do mapa resultante da aplicação do EMD permitiu aos pesquisadores identificar as dimensões que compõem o valor percebido, sem que fosse necessário pré-definir as variáveis que compõem o construto.

Segmentação de Consumidores

Como já visto no gráfico GRÁFICO 2 (ver p. 16), mapas perceptuais podem ser utilizados com intuito de segmentação de mercado em função das preferências dos consumidores (JOHNSON, 1971), ou seja, determinar um agrupamento de consumidores em que sujeitos com preferências similares sejam alocados ao

mesmo grupo, e sujeitos com preferências distintas sejam alocados a diferentes grupos. O processo consiste em:

- a) Construir o mapa perceptual com as marcas do estudo;
- b) Determinar as localizações dos pontos ideais de cada consumidor;
- c) Analisar a distribuição dos pontos ideais, formando grupos com consumidores cujos pontos ideais se localizem próximos uns dos outros, possivelmente através da aplicação das técnicas de agrupamentos (GREEN; KRIEGER; CARROLL, 1987).

Posicionamento em cenário competitivo de preços

Em geral, os praticantes de marketing determinam o posicionamento objetivo do produto e separadamente determinam o preço mais adequado para ele. No entanto, tais decisões estão inter-relacionadas (HAUSER, 1988). Além disso, num cenário competitivo, uma ação de um competidor em geral desperta reações dos demais competidores, refletidas em possíveis ajustes de preço e/ou posicionamento.

Sendo assim, alguns pesquisadores desenvolveram modelos que combinam mapas perceptuais realizados através de EMD e a teoria de equilíbrio de Nash, a fim de que a decisão de preço e posicionamento fosse tomada conjuntamente (CHOI; DeSARBO; HARKER, 1990), englobando a dependência entre estas duas variáveis e as possíveis reações dos competidores ao esforço de marketing planejado.

3 TEORIA DE DADOS

Em 1964, Clyde H. Coombs da Universidade de Michigan publica o livro *A Theory of Data*. Seu trabalho profundamente iluminador sobre teoria de dados passou a influenciar todo o desenvolvimento de técnicas de análise de dados nas ciências sociais (YOUNG; HAMER, 1987).

A grande significância do trabalho de Coombs residiu no desenvolvimento de uma abrangente tipologia de dados, além da definição dos tipos de análise a que cada tipo de dado deveria ser submetido. A seguir será apresentada a espinha dorsal de sua tipologia segundo sua obra.

Para Coombs (1964), dados se referem a uma relação formal entre pontos, os quais são representantes abstratos de objetos de estudo. Essa caracterização é importante no sentido que distingue “dado” de “comportamento”. Segundo ele, comportamentos nunca geram dados por si. No processo de geração de dados tem importância fundamental o pesquisador, ao formular perguntas sobre o comportamento que se deseja investigar. E ao formular perguntas, o pesquisador está selecionando um repertório, que é um conjunto particular de mensagens. Em outras palavras, mapear um comportamento a um determinado tipo de dados é selecionar de um particular tipo de perguntas.

Essa discussão abstrata sobre comportamento, perguntas e dados é importante pois a classificação de dados desenvolvida por Coombs se apóia fortemente sobre o tipo das perguntas feitas pelos pesquisadores.

Outro aspecto importante diz respeito à natureza dos pontos sobre os quais a relação será estudada:

- a) Relação entre pontos “simples” em que se analisa uma relação entre dois objetos de estudo. Ex.: ao analisar diferenças na percepção de modernidade entre duas marcas, os pontos-objeto são as marcas e a relação é a diferença no grau de modernidade associado a cada marca, como percebida pelos indivíduos;
- b) Relação entre díades, em que se analisa o comportamento de uma relação B sobre uma relação A entre dois objetos de estudo. Ex.: ao analisar diferenças entre pares marca-indivíduo, onde o par representa o nível de preferência de um indivíduo por uma marca (uma relação), os pontos-objeto são os níveis de preferência associados aos pares marca-indivíduo, e a relação é a diferença na intensidade dessas preferências.

No caso de díades, ainda faz-se a distinção sobre díades “puras” (relação A é sobre dois objetos de mesma natureza) ou mistas, onde a relação A é sobre dois objetos de natureza distintas.

Dessa forma, segundo a tipologia de Coombs, todo tipo de dado pode ser visto como uma relação entre um par de pontos ou um par de díades, e os pontos podem ser de mesma natureza ou distinta. Essa estrutura de classificação gera quatro categorias de dados:

TABELA 1
Tipologia de dados de Coombs

	Pares de pontos	Pares de díades
Dois conjuntos de pontos	QII	QI
Um conjunto de pontos	QIII	QIV

Fonte: Adaptado de Coombs (1964, p. 21).

Em tipos de dados QI, analisa-se a relação entre duas díades formadas por pontos de natureza distinta. Um exemplo bastante freqüente é a análise das preferências de um sujeito sobre um conjunto de estímulos, feitas à luz de um referencial ideal, o chamado “ponto ideal”. Ou seja, o que se analisa são as distâncias (relação) entre os pontos que representam a preferência de um sujeito por um objeto (díade 1, estímulo-sujeito) e um ponto ideal localizado no mapa (díade 2, estímulo ideal-sujeito). Por esse motivo, essa família de dados recebe o nome usual de “dados de preferência”.

Em tipos de dados QII, analisa-se a relação entre um par de pontos que representam elementos de conjuntos distintos. Um exemplo desse tipo de análise seria o estudo de uma pergunta pertencente a um “teste de QI”. O sucesso em responder a pergunta (relação) está associado à quantidade de inteligência do indivíduo (ponto 1) e o nível de dificuldade da pergunta (ponto 2, de natureza distinta). Esta classe de dados recebe o nome usual de “dados de estímulo único”, uma vez que não está sendo analisada a eficácia do indivíduo em relação a diferentes perguntas de distintos níveis de dificuldade, mas sim em relação àquela única pergunta.

Em tipos de dados QIII, analisa-se a relação entre um par de pontos de mesma natureza. Em marketing, um exemplo bastante usual são as baterias de atributos de marca, em que se busca identificar, na percepção do respondente, qual marca possui mais de um atributo. O que se analisa é a diferença (relação) entre a intensidade do atributo que um estímulo possui (ponto 1) e a intensidade do atributo que outro estímulo possui (ponto 2, de mesma natureza). O nome usual desta família de dados é “dados de comparação de estímulos”.

Em tipos de dados QIV, analisa-se a relação entre um par de díades formadas de pontos de mesma natureza. O exemplo mais típico é a análise do conjunto de similaridades entre vários pares de estímulos. Em outras palavras, o que se analisa são as distâncias (relação) entre um ponto que representa a similaridade entre dois estímulos (díade 1, estímulo-estímulo) e um outro ponto que representa a similaridade entre outro par de estímulos (díade 2, estímulo-estímulo). Essa família de dados recebe o nome de “dados de similaridade”.

Coombs introduz ainda uma classificação adicional, que particiona cada um desses quatro tipos de dados em a e b, segundo a característica da relação entre os pontos/díades que se deseja analisar. Uma delas diz respeito à análise de relações de ordem entre os pontos/díades (ex.: um ponto tem dominância sobre o outro), a outra delas diz respeito à análise da distância entre os pontos/díades (ex.: o quanto um ponto/díade está “distante” do outro).

Um conceito importante introduzido por Coombs, decorrente de sua tipologia, é o de “espaços conjuntos”, ou seja, espaços de representação de pontos em que convivem pontos de natureza distinta. Por exemplo, em mapas perceptuais que representam o grau de similaridade entre marcas, é bastante comum a introdução de pontos que indicam direções de crescimento de atributos, permitindo que o analista entenda porque duas marcas são consideradas muito parecidas ou muito diferentes. Nesse caso, estamos diante de um mapa de espaço conjunto, em que são representados tanto pontos-marca como pontos-atributo.

Neste trabalho, dois tipos de dados segundo a classificação de Coombs serão trabalhados:

- a) Dados do tipo QIV, de similaridade entre pontos. Em escalonamento multidimensional, a informação analisada consiste de dados de similaridade entre pares de pontos-objetos, e no caso deste estudo, entre pares de marcas;
- b) Dados do tipo QI, de preferências entre pontos. Em análise de preferências, analisa-se a diferença entre a preferência de uma marca e a preferência de um fictício produto ideal.

3.1 Métodos de coleta de dados

Existem inúmeros métodos de coleta de dados, sejam eles de qualquer um dos tipos definidos anteriormente (QI, QII, QIII ou QIV).

No entanto, segundo Coombs (1964), duas principais dimensões num processo de coleta de dados, presentes em quase todos os métodos de coleta, são:

- a) Número de estímulos apresentados de uma vez, que pode variar entre um, dois, ou três a todos os estímulos envolvidos no estudo;
- b) A dicotomia entre solicitar que o participante escolha ou ordene os estímulos.

Por exemplo, ao se avaliar uma marca em atributos segundo uma escala Likert de concordância com 5 pontos, estamos solicitando ao participante que escolha, entre as cinco alternativas que são apresentadas de uma só vez, qual delas melhor descreve a intensidade da característica percebida na marca avaliada.

Ou ainda, ao se instruir um participante para ordenar um determinado número de marcas segundo a sua ordem de preferência, estamos apresentando todos os estímulos de uma só vez e solicitando que execute uma ordenação.

Neste estudo nos interessam particularmente os métodos de coleta para dados do tipo QI e QIV, que se relacionam com as técnicas de escalonamento multidimensional e análise de preferências.

3.1.1 Coleta de dados para escalonamento multidimensional

A propriedade de interesse nesse caso é a similaridade entre os estímulos. Similaridade é entendida com proximidade no espaço, tempo ou algum outro meio (COX; COX, 2001).

Podemos classificar os dados de similaridade entre objetos em dois grandes grupos:

- a) Similaridades diretas;
- b) Similaridades derivadas, também chamadas de coeficientes de similaridade.

Uma grande força dos modelos de escalonamento multidimensional, como será visto em mais detalhe adiante, reside no fato de que não é necessário especificar a priori um particular tipo de similaridade entre os objetos (por exemplo, similaridade cultural entre países). Nesse caso, estamos lidando com as similaridades diretas. Ainda assim, estas similaridades podem ser expressas de diversas maneiras alternativas: grau de associação entre estímulos, grau de substituição de um estímulo por outro, e assim por diante (KRUSKAL; WISH, 1987).

Além de formas alternativas de expressar similaridade, existem também diversas maneiras de coletar dados de similaridades diretas. Os mais usados são os que pedem ao sujeito que ordene pares de estímulos por ordem de semelhança, ou os que pedem que o sujeito atribua uma nota a cada par de estímulos conforme o grau de similaridade percebido entre os elementos do par.

O principal problema neste método de coleta é que o número de pares de estímulos cresce rapidamente com o aumento do número de estímulos considerados no estudo. O número total de pares de estímulos é dado por $C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$. Então para $n=5$, o número de pares é 10, para $n=7$ é 21 e para $n=10$ chega a 45, o que torna muito cansativa para os respondentes a tarefa de exprimir a similaridade entre todos os pares de pontos (SCHIFFMAN; REYNOLDS; YOUNG, 1981).

Alternativas para contornar o problema são distribuir as avaliações ao longo de um período de tempo maior, em vários dias possivelmente, ou trabalhar com desenhos incompletos, em que nem todos os participantes avaliam todos os pares de estímulos, os chamados métodos de coleta de dados conjuntos (*conjoint data collection methods*). Esses métodos assumem pressupostos de transitividade entre as respostas, e a aplicam na tarefa de estimar os pares que não foram avaliados diretamente (HENRY; STUMPF, 1975). Sendo assim, um planejamento cuidadoso dos pares que os participantes do estudo avaliarão é necessário.

No caso particular de escalonamento multidimensional não-métrico, que comporta bem dados faltantes (*missing data*), uma estratégia alternativa é a eliminação de alguns pares de estímulos do estudo, sem prejuízo significativo à solução final (BORG; GROENEN, 1997)

As similaridades derivadas, por sua vez, são construídas a partir de outro tipo de informação sobre os objetos estudados, que não similaridades exatamente. Por exemplo, a partir das notas atribuídas às diversas marcas em uma bateria de atributos. Marcas com avaliações semelhantes na maior parte dos atributos seriam então consideradas mais similares entre si. Uma desvantagem do uso de

similaridades derivadas, porém, é que a estrutura perceptual resultante estará associada às variáveis originais selecionadas, a partir das quais as similaridades serão derivadas (GINTER, 1979).

Métodos que minimizem essa inconveniência foram desenvolvidos, como, por exemplo, solicitar aos próprios participantes do estudo que indiquem quais dimensões são relevantes para julgar as marcas de uma determinada categoria, com ou sem a apresentação prévia das marcas em questão. No entanto, estes métodos são pouco utilizados na prática (STEENKAMP; VAN TRIJP; TEN BERGE, 1994).

Os métodos de se obter similaridades derivadas são vários, e dependem da natureza dos dados originais: quantitativos, binários ou ordinais. Quando os dados originais são quantitativos e presentes numa matriz de dados, há duas famílias principais de medidas de similaridade a se utilizar: correlações e distâncias.

Exemplos de medidas de similaridade obtidas através da família de distâncias são

as métricas de Minkowski, onde $d_{ij} = \left\{ \sum_k w_k |x_{ik} - x_{jk}|^\lambda \right\}^{\frac{1}{\lambda}}$, com $\lambda \geq 1$.

Casos particulares da métrica de Minkowski são a distância euclidiana ($\lambda = 2, w_k = 1$), a distância euclidiana ponderada ($\lambda = 2, w_k \neq 1$) e a distância “city block” ($\lambda = 1, w_k = 1$).

Existem inúmeras outras fórmulas para cálculo de distâncias, ainda que a mais largamente usada seja a distância euclidiana. É importante ressaltar que medidas de

distância em geral exprimem dissimilaridades entre os pontos, ou seja, quanto maior a distância entre eles, mais diferentes eles são entre si.

A família de medidas de correlações também pode ser usada para cálculo de similaridade entre objetos. Uma medida bastante utilizada é:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}$$

Enquanto a família de medidas de distância exprime as similaridades entre as respostas obtidas de dois sujeitos, a família de medidas de correlações exprime similaridades no padrão de respostas dos dois sujeitos. Por exemplo, se o indivíduo A sempre responde o dobro do que responde o indivíduo B, a correlação entre os dois é máxima (igual a 1.0), mas ainda assim a distância entre eles não é zero.

No caso dos dados originais serem binários, assumindo valores 0 ou 1 somente, também existem várias maneiras de se definir a similaridade entre os objetos, a partir do cruzamento dos seus valores observados:

TABELA 2
Cruzamento entre duas variáveis binárias

Objeto j	Objeto i		total
	1	0	
1	a	b	a+b
0	c	d	c+d
total	a+c	b+d	a+b+c+d

Fonte: Cox e Cox (2001, p. 12).

Algumas medidas de similaridade possíveis:

a) Coeficiente de coincidência simples: $d_{ij} = \frac{a+d}{a+b+c+d}$, que é a razão entre o

número de coincidências sobre o total de casos;

b) Russel, Rao: $d_{ij} = \frac{a}{a+b+c+d}$, que é a razão entre o número de coincidências presentes e o total de casos;

c) Coeficiente de Jacquard: $d_{ij} = \frac{a}{a+b+c}$, que é a razão entre o número de coincidências presentes e o total de casos desconsiderando as coincidências ausentes;

d) Kulczynski: $d_{ij} = \frac{a}{b+c}$, que é a razão entre o número de coincidências presentes e o número total de disparidades;

e) Czekanowski, Sørensen, Dice: $d_{ij} = \frac{2a}{2a+b+c}$, que é o coeficiente de Jacquard modificado através de um peso maior para coincidências presentes.

Finalmente, se uma variável é de natureza ordinal com k categorias, um procedimento usual é aplicar uma transformação da variável em (k-1) indicadores binários, e aplicar alguma das fórmulas de similaridade para variáveis binárias apresentadas anteriormente.

Um exemplo hipotético para variável ordinal com k=4 categorias:

TABELA 3
Transformação de variável ordinal através do uso de indicadores

Categorias	Indicadores		
	I_1	I_2	I_3
pequeno	0	0	0
médio	1	0	0
grande	1	1	0
muito grande	1	1	1

Fonte: Adaptado de Cox e Cox (2001, p. 14).

Não existe uma melhor medida de semelhança para todos os casos. Borg e Groenen (1997) afirmam que a escolha depende fundamentalmente do tipo de

pergunta de pesquisa e o seu contexto, mas que no caso de similaridades derivadas quantitativas, o pesquisador deve ponderar bastante sobre a escolha entre a família de distâncias ou a de correlações, uma vez que geram medidas de similaridade de natureza muito diferente entre si. Uma recomendação de Cox e Cox (2001) é aplicar a técnica mais de uma vez, utilizando-se diferentes medidas de similaridade para avaliar a robustez dos resultados frente às escolhas de medida feitas.

Na construção de mapas perceptuais através de dados de pesquisa de mercado, as maneiras mais freqüentes de obter dados de similaridade entre marcas são:

- a) Bateria de marcas x atributos;
- b) Matriz de associação marcas x atributos;
- c) Similaridade entre pares de marcas.

Na aplicação de bateria de atributos o respondente é solicitado a atribuir uma nota (segundo escala pré-definida) conforme a intensidade do atributo percebida em cada marca. As similaridades entre marcas são então derivadas através do uso de alguma medida de distância.

Nesse caso, o respondente perfaz $n \times m$ avaliações, onde n é o número de marcas avaliadas e m é o número de atributos. Se n ou m são grandes, a fadiga do entrevistado acaba por prejudicar a qualidade da informação colhida para as últimas marcas apresentadas. Estratégias para lidar com esse problema são rodiziar as marcas (cada respondente avalia marcas em ordem distinta, para que o viés de fadiga não se concentre sempre sobre as mesmas marcas) e utilizar desenhos incompletos (nem todos os participantes avaliam todas as marcas).

Uma vantagem adicional deste método é que as avaliações das marcas nos atributos podem ser utilizadas como ferramenta de auxílio na interpretação do mapa perceptual, como será visto adiante.

No segundo caso, matriz de associação marcas x atributos, o respondente é solicitado a indicar quais marcas, de uma lista pré-determinada, possuem ou não a característica avaliada. Aos respondentes são dadas opções de indicar nenhuma marca, uma única marca, várias marcas, ou mesmo todas. Os dados resultantes são de natureza binária (as marcas têm ou não têm a característica), e as similaridades são também indiretas, calculadas através do uso de algum coeficiente de similaridade entre variáveis binárias.

O problema de fadiga do entrevistado nesse caso é reduzido, pois a tarefa se repete somente m vezes, uma para cada atributo considerado no estudo, o que acaba tornando esse método um dos mais utilizados em estudos de imagem de marca. Por outro lado, a natureza binária das respostas reduz a riqueza da informação coletada, pois tanto uma marca que possui muito de uma característica, como outra que possui pouco, acabam ambas por receber a mesma avaliação, sugerindo que são marcas similares.

Por último, a avaliação direta da semelhança entre pares de marcas pelo respondente apresenta a vantagem de não exigir uma derivação da similaridade, e nem de pré-determinar os critérios de avaliação de similaridade, o que acaba por gerar dados menos enviesados. No entanto, o problema de fadiga nesse caso é acentuado pelo grande número de combinações a avaliar, reduzindo a frequência de uso desse procedimento.

3.1.2 Coleta de dados para análise de preferências

O interesse nesse caso é de determinar uma ordenação da preferência associada aos diversos estímulos. Se o número de estímulos a ordenar é grande, a tarefa pode se tornar muito trabalhosa ou demorada. Além disso, estudos observaram que respondentes em geral têm dificuldade em ordenar a preferência entre estímulos não extremos – os que não tem preferência nem muito alta, nem muito baixa (BORG; GROENEN, 1997).

Uma estratégia para amenizar a tarefa é a ordenação em estágios, onde os respondentes são solicitados a particionar os estímulos em dois grupos apenas, um de maior e um de menor preferência. Em seguida, a tarefa é repetida para cada um dos subgrupos gerados, e assim por diante. Ao final, quando todos os subgrupos têm somente um estímulo, obtém-se uma ordenação completa dos estímulos.

Uma dificuldade do método é que podem ser necessárias até $n-1$ repetições de particionamentos, tornando a tarefa cansativa. Uma variante que reduz o número de partições, e portanto a fadiga, é permitir a partição em três ou mais grupos de cada vez, em vez de somente dois. Um caso particular dessa ordenação em estágios é a que deixa livre para o respondente o número de grupos a formar a cada particionamento. Segundo Borg e Groenen (1997), esse método recebe o nome de “ordenação livre” (*free sorting*).

Na obtenção de ordenações de preferência em pesquisa de mercado, os métodos utilizados com mais freqüência são:

- a) Ordenamento em estágios, por seleção;
- b) Ordenamento simples;

- c) Ordenamento através de notas de preferência;
- d) Jogo de soma constante, também chamado de “jogo de fichas”.

No ordenamento em estágios por seleção, todas as marcas são apresentadas ao participante, solicitando que ele primeiro diga qual marca é a preferida entre todas (uma única escolha é permitida). Em seguida, pergunta-se qual a preferida do conjunto restante, excluindo-se a escolhida anteriormente. E assim por diante repete-se o processo, até todas as marcas terem sido escolhidas. A ordem segundo a qual as marcas foram escolhidas determina a ordenação de preferência do participante.

O ordenamento simples é usado quando o número de marcas é pequeno. Todas as marcas são apresentadas de uma vez, e ao participante é solicitado que as ordene por ordem de preferência, diretamente.

Uma alternativa também utilizada com frequência é solicitar ao participante que atribua uma nota segundo o quanto ele gosta de cada marca (ex.: 0 = não gosto nem um pouco, 10 = gosto muito). As notas geram naturalmente uma ordenação de preferência entre as marcas, mas há que se lidar com o problema de empates (duas marcas com notas iguais). Nesse caso costuma-se pedir ao participante que ordene todas as marcas com notas iguais, para resolver a indeterminação.

O jogo de soma constante consiste em pedir que o respondente distribua n fichas (reais ou abstratas) entre cada par de marcas do estudo, de modo que a diferença no número de fichas alocadas a cada marca indique o quanto ele prefere uma marca em relação à outra. O número total n de fichas é em geral ímpar, para evitar empates.

Como exemplo, se a marca A recebe 9 fichas e a marca B recebe 2 (total=11), sabemos que a marca A é altamente preferida frente à marca B. Mas se a marca A recebe 6 fichas e a marca B recebe 5, a marca A é apenas ligeiramente preferida frente à marca B.

Uma vez munido das diferenças de alocação de fichas entre cada par de marcas, a ordenação entre todas as marcas é obtida através da aplicação de algum algoritmo de escalonamento unidimensional.

Como se pôde perceber no exemplo acima, o jogo de fichas vai além de obter a ordenação de preferências, conseguindo estabelecer a magnitude das diferenças de preferência entre marcas. Ele pode ser entendido, na verdade, como um método de obtenção de similaridades entre objetos, sendo que o critério de similaridade não é livre, mas dado pela dimensão “preferência”.

Uma desvantagem do método são as $C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}$ atribuições de fichas necessárias para completar o exercício, onde n é o número de marcas o ordenar.

4 ESCALONAMENTO MULTIDIMENSIONAL

O escalonamento multidimensional trata-se de uma técnica para a análise de dados de similaridade (ou dissimilaridade) entre um conjunto de objetos (BORG; GROENEN, 1997). Segundo Young e Hamer (1987), o EMD se refere a uma família de métodos de análise de dados que explicitam a estrutura dos dados de maneira espacial, facilitando sua inspeção, análise e interpretação até mesmo pelo olhar humano relativamente destreinado.

Uma grande qualidade do EMD, freqüentemente ressaltada pelos usuários da técnica, é sua robustez, ou seja, os métodos são capazes de recuperar a estrutura espacial dos dados mesmo em face de grandes perturbações nos dados originais (SIBSON, 1979).

4.1 Caracterização do problema

Uma forma bastante intuitiva de entender a natureza do problema resolvido pelo escalonamento multidimensional é encontrada em Malzyner (1981).

Imaginemos que estamos de posse do mapa geográfico do território brasileiro. Se quisermos determinar as distâncias entre as principais capitais do Brasil, basta utilizar uma régua, medir as distâncias entre as capitais e multiplicar as medidas obtidas pela escala segundo a qual o mapa foi construído.

O escalonamento multidimensional se propõe a resolver o problema inverso: de posse das distâncias entre as principais capitais brasileiras, reconstruir o mapa do território brasileiro.

Na tabela abaixo se encontram as distâncias em quilômetros entre os principais aeroportos do Brasil.

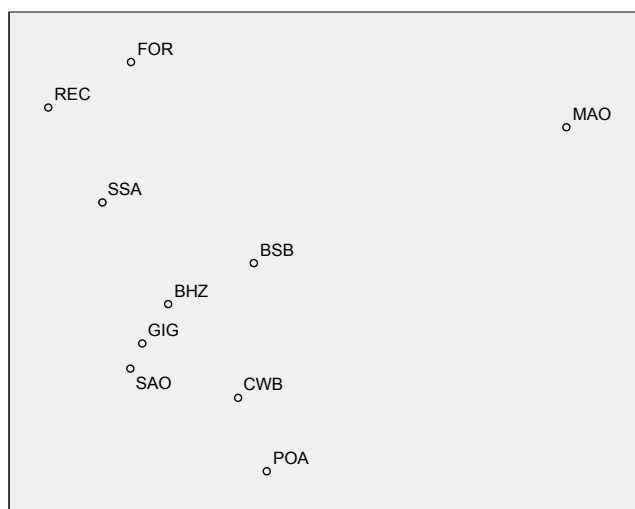
TABELA 4
Distâncias em quilômetros entre aeroportos do Brasil

	BHZ	BSB	CWB	FOR	MAO	POA	REC	GIG	SSA	SAO
BHZ	-									
BSB	589	-								
CWB	823	1087	-							
FOR	1878	1682	2805	-						
MAO	2569	1976	2730	2375	-					
POA	1360	1625	547	3340	3130	-				
REC	1632	1632	2552	640	2823	3083	-			
GIG	353	910	690	2195	2865	1141	1872	-		
SSA	980	1053	1310	1018	2617	2325	654	1228	-	
SÃO	500	865	330	2238	3100	844	2135	373	1486	-

Fonte: Portal Brasil (2006).

Aplicando o escalonamento multidimensional métrico aos dados acima, e escolhendo-se a solução com duas dimensões, obtemos a seguinte solução:

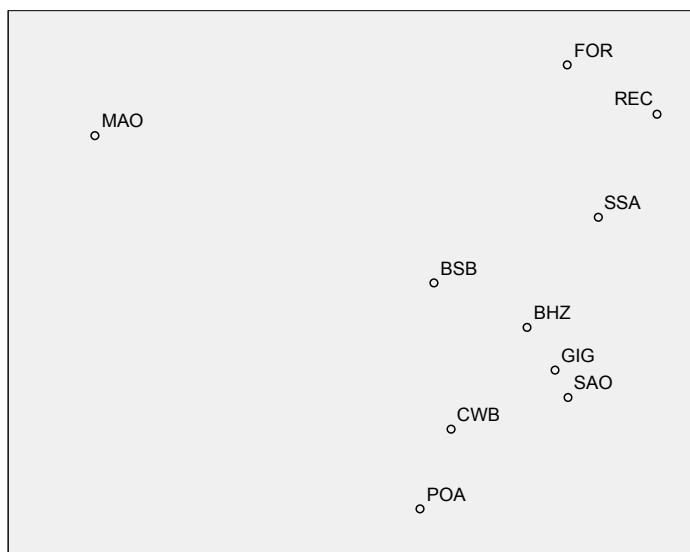
GRÁFICO 3
EMD a partir das distâncias entre capitais do Brasil



Fonte: Elaboração própria.

À primeira vista, o mapa resultante não se mostra uma representação fiel do mapa geográfico brasileiro, mas isso acontece porque estamos acostumados a ver o mapa brasileiro sempre na mesma orientação, no sentido Norte-Sul. Se aplicarmos a este mapa uma rotação de 90°, e uma posterior reflexão do eixo horizontal, obtemos um novo mapa, dessa vez mais facilmente reconhecível:

GRÁFICO 4
EMD a partir das distâncias entre capitais brasileiras rotacionado



Fonte: Elaboração própria.

O fato de termos que rotacionar o mapa original a fim de torná-lo mais reconhecível ilustra um importante aspecto dos mapas resultantes de EMD, que é a indeterminação quanto à orientação. Como as únicas relações de interesse para a técnica são as distâncias entre os objetos de estudo, e estas distâncias se preservam se mudarmos a orientação do mapa, existem infinitas soluções igualmente aceitáveis para o problema.

Esta indeterminação dos mapas quanto à orientação é de grande relevância para este estudo, pois estamos interessados em comparar mapas perceptuais realizados em diferentes momentos no tempo. Ela implica em não podermos combinar diretamente num mesmo mapa duas ou mais soluções do escalonamento multidimensional, pois as diferentes posições ocupadas pelas marcas entre um momento e outro pode ser em grande parte atribuída à particular orientação final de cada mapa, e não a uma mudança real na percepção dos consumidores em relação às marcas estudadas. Veremos como neutralizar essa indeterminação mais adiante, no capítulo 5 (ver p.102), que estuda a Análise Procrustiana.

4.2 Um exemplo de aplicação em Ciências Sociais

A título de ilustração das potencialidades do EMD em Ciências Sociais vejamos um exemplo de sua aplicação, extraído de Borg e Groenen (1997).

Foi solicitado a 18 estudantes que avaliassem a similaridade geral entre diferentes pares de países como, por exemplo, “Brasil e Congo” através de uma escala de 9 pontos, onde a nota 1 significa que os dois países são muito diferentes, e 9 que os dois países são muito semelhantes. Qualquer nota entre 1 e 9 poderia ser escolhida pelo estudante para indicar o nível de semelhança entre os dois países. Todos os estudantes avaliaram todos os 66 pares de países.

As médias de similaridade encontradas entre os 12 países estão descritas na tabela abaixo:

TABELA 5
Média das avaliações de similaridade entre países

NAÇÃO	BRA	CON	CUB	EGI	FRA	IND	ISR	JAP	CHI	URS	EUA	IUG
BRÁsil	-											
CONgo	4,83	-										
CUBa	5,28	4,56	-									
EGItó	3,44	5,00	5,17	-								
FRAnça	4,72	4,00	4,11	4,78	-							
ÍNDia	4,50	4,83	4,00	5,83	3,44	-						
ISRael	3,83	3,33	3,61	4,67	4,00	4,11	-					
JAPão	3,50	3,39	2,94	3,83	4,22	4,50	4,83	-				
CHIna	2,39	4,00	5,50	4,39	3,67	4,11	3,00	4,17	-			
URSS	3,06	3,39	5,44	4,39	5,06	4,50	4,17	4,61	5,72	-		
EUA	5,39	2,39	3,17	3,33	5,94	4,28	5,94	6,06	2,56	5,00	-	
IUGoslávia	3,17	3,50	5,11	4,28	4,72	4,00	4,44	4,28	5,06	6,67	3,56	-

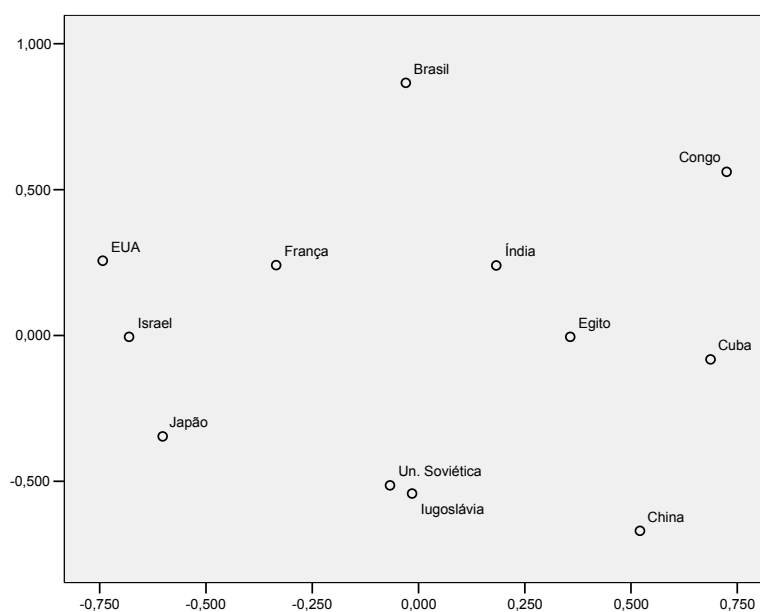
Fonte: Borg e Groenen (1997, p. 9).

O exame detalhado da tabela permite verificar que os países considerados os mais diferentes entre si são Brasil e China ($\bar{x} = 2,39$), e os considerados mais similares entre si são União Soviética e Iugoslávia ($\bar{x} = 6,67$). No entanto, a grande quantidade de informação presente na tabela torna difícil a tarefa de identificar, em geral, quais países são mais parecidos entre si e quais mais diferentes. Por conseguinte,

entender quais critérios são utilizados pelos alunos no seu julgamento de similaridade entre os países torna-se uma tarefa muito difícil. A técnica de EMD vem facilitar essa tarefa, ao explicitar visualmente a similaridade entre os países.

O mapa a seguir é resultante da aplicação do EMD em 2 dimensões:

GRÁFICO 5
Mapa perceptual dos países



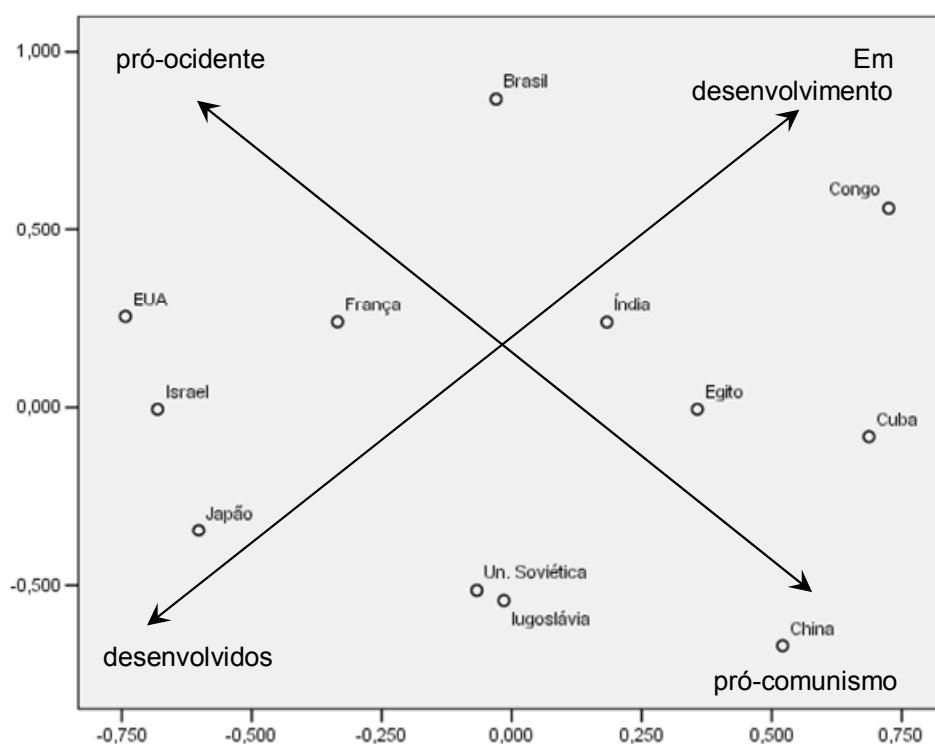
Fonte: Elaboração própria.

Representados dessa forma, os dados permitem facilmente entender quais países são considerados mais parecidos entre si, e quais são considerados muito diferentes (note a grande distância entre Brasil e China, e a grande proximidade entre União Soviética e Iugoslávia, em linha com as médias apresentadas anteriormente).

Como já visto, os eixos do gráfico apresentado não são rotulados porque não possuem significado substantivo, representam apenas “unidades de distância” entre os objetos do mapa. No entanto, o mapa perceptual permite que facilmente se façam conjecturas sobre os critérios utilizados pelos alunos para julgar o grau de similaridade entre países. Apesar dessa informação não ser diretamente fornecida no mapa, que se preocupa apenas com a disposição espacial dos objetos em função

de seu grau de semelhança, a partir de um limitado conhecimento sobre a natureza dos objetos torna-se relativamente fácil intuir critérios possivelmente utilizados pelos alunos no seu julgamento. Por exemplo, pode-se interpretar que dois principais critérios influenciaram a avaliação da semelhança entre os países: orientação pró-ocidente vs. pró-comunismo, e nível de desenvolvimento do país:

GRÁFICO 6
Mapa perceptual dos países com interpretação de dimensões



Fonte: Elaboração própria.

4.3 História

A história do EMD pode ser dividida em quatro estágios, cada qual correspondendo a uma década (YOUNG; HAMER, 1987).

- a) A primeira década, anos cinquenta do século XX, foi liderada pelo trabalho seminal de Torgerson (1952), que definiu o problema de escalonamento multidimensional e apresentou a primeira solução métrica;
- b) A segunda década foi pontuada pelo trabalho significativo de Shepard (1962) e Kruskal (1964) ao desenvolverem uma rota alternativa para a técnica: o EMD não-métrico. Também nessa década surgiu o trabalho iluminador de Coombs (1964) em teoria de dados, já apresentado no capítulo 3 (ver p. 35);
- c) A terceira década se iniciou com o trabalho de Carrol e Chang (1970), que introduziram o importante conceito de diferenças individuais em escalonamento multidimensional, sendo que nessa década observou-se a consolidação de toda a teoria de EMD através do trabalho de Takane, Young e de Leeuw (1977) e de Leeuw e Heiser (1980);
- d) A quarta fase, iniciada a partir de 1980 e que perdura até os dias de hoje, viu surgir o desenvolvimento das técnicas de escalonamento multidimensional baseada em máxima verossimilhança, como se pode verificar no trabalho de Ramsay (1982) e Takane principalmente.

Primeira década

Os métodos usuais utilizados em avaliações psicológicas até meados dos anos 50 do século XX se baseavam no julgamento dos objetos pelos sujeitos segundo uma escala (dimensão) dada. Por exemplo, o quanto um crime é considerado hediondo. Esse procedimento pressupunha que os participantes do estudo entendessem corretamente o significado da dimensão proposta, o que nem sempre era garantido (TORGERSON, 1952). Adicionalmente, a escolha da natureza e número de escalas, que era feita a priori pelo investigador, muitas vezes poderia não englobar as

variáveis de fato utilizadas pelos respondentes na percepção do fenômeno estudado (HAUSER; SIMMIE, 1981).

Como relatado por Torgerson (1952), Richardson em 1938 e Gulliksen em 1946 já haviam proposto modelos de escalonamento multidimensional com as seguintes características inovadoras para a época:

- a) Não requeriam julgamentos sobre uma dimensão pré-definida pelo pesquisador;
- b) A dimensionalidade (número de dimensões usadas pelos participantes na percepção dos diferentes produtos), assim como os valores assumidos pelos objetos nessas dimensões, era obtida diretamente a partir dos próprios dados.

Através do desenvolvimento do método de escalonamento multidimensional, então, tornou-se possível analisar dados a partir de dados de similaridades (ou dissimilaridades) entre objetos, e tanto a estrutura dos dados, como as dimensões utilizadas pelos sujeitos na comparação entre eles, passaram a ser inferidas a partir da própria massa de dados. Essas características dos modelos permitiam que florescesse a “estrutura escondida”, ou latente⁵, que envolvia os objetos estudados (KRUSKAL; WISH, 1978).

Apesar do trabalho anterior de Richardson e Gulliksen, foi Torgerson (1952) que apresentou uma primeira solução métrica (dissimilaridades entre os objetos medidas em escala intervalar ou razão) para o problema. A partir de então, a área se desenvolveu rapidamente, principalmente através do trabalho de cientistas da Psicometria. Papel fundamental nesse processo teve o periódico *Psychometrika*,

⁵ Um objeto ou fenômeno é chamado ‘latente’ se não é observável diretamente, mas cuja existência pode ser inferida através do comportamento de outros objetos ou fenômenos.

publicado pela Psychometric Society dos Estados Unidos da América (COX; COX, 2001), onde todos os principais expoentes da técnica de EMD passaram a apresentar seus avanços à comunidade científica.

Segunda década

Após o início do desenvolvimento da técnica liderado por Torgerson, a década seguinte (anos sessenta do século XX) presenciou uma grande popularização do EMD. Nesse período a técnica deixou de ser um instrumento usado somente por poucos aficionados familiarizados com ela no campo da Psicometria, e passou a ser utilizada em aplicações tão diversas como arquitetura, zoologia, geografia, ciências políticas e administração de empresas, em particular pesquisa de marketing (YOUNG; HAMER, 1987).

Os grandes responsáveis por essa popularização foram Shepard e Kruskal. O artigo de Shepard (1962) introduziu o escalonamento multidimensional não-métrico, realizado a partir de dados de natureza ordinal. Ou seja, a partir do modelo criado por Shepard, relaxa-se a obrigatoriedade da solução refletir a medida exata de similaridade medida entre os objetos sendo estudados, e a única exigência passa a ser respeitar a ordenação das distâncias entre os pontos. Isto é, se o objeto x é mais similar ao objeto y, do que ao objeto z, o mapa da solução deve simplesmente apresentar o ponto x mais próximo de y do que de z. O fato de que a mera ordenação da similaridade entre os pontos se mostrava suficiente para determinar uma configuração espacial dos objetos no espaço foi a princípio surpreendente até mesmo para o próprio autor (SHEPARD, 1962). Essa aparente “mágica” de recuperar a estrutura métrica dos dados (distâncias) a partir de sua estrutura não-métrica (ordenação de similaridades) foi a princípio razão de ceticismo entre os

cientistas da Psicometria. Por outro lado, ela foi decisiva para o grande aumento no número de pesquisas dedicadas ao tema (YOUNG; HAMER, 1987), uma vez que, em Ciências Sociais, medidas ordinais são mais confiáveis e fáceis de obter do que escalas intervalares ou razão. Por exemplo, é relativamente fácil para um consumidor dizer qual entre duas marcas é a sua preferida, mas difícil precisar o quanto ela é “mais preferida” que a outra.

Papel igualmente fundamental na década de 1960 teve Joseph Kruskal, que abordou o assunto sob uma perspectiva diferenciada de Shepard. Enquanto o algoritmo de Shepard propunha uma análise do problema de maneira similar à utilizada na técnica de análise fatorial (primeiro ajustando o modelo às dimensões, e depois eliminando dimensões para iniciar um novo ciclo), Kruskal enxergou o problema através de uma natureza otimizatória, desenvolvendo um índice de resíduos normalizado, chamado de “stress”. A solução do problema de escalonamento, segundo Kruskal, trata-se de um problema de minimização do stress, para um determinado número de dimensões definido a priori.

Um outro avanço importante introduzido por Kruskal, que vale ser mencionado, é que seu algoritmo permitia dados faltantes (*missing values*), o que não era contemplado nos métodos anteriores de Shepard ou Torgerson (YOUNG; HAMER, 1987).

Terceira década

Apesar do grande desenvolvimento alcançado pela técnica até o final dos anos 60, uma limitação importante da técnica persistia: somente uma matriz de dados podia ser analisada de cada vez. Dessa forma, o pesquisador que tivesse em mãos várias

versões da matriz de similaridade entre objetos (por exemplo, uma na visão de cada participante do estudo), teria duas opções: analisar as diversas configurações resultantes de cada matriz separadamente, tentando dar um sentido à coleção de mapas obtida, ou tirar a média de todas as matrizes disponíveis e aplicar a técnica aos dados médios de similaridade (YOUNG; HAMER, 1987).

Surgiram então, na terceira década de desenvolvimento do EMD, técnicas para contornar essa limitação, sendo que o principal trabalho é atribuído a Carroll e Chang (1970). A grande importância do seu trabalho reside no fato de terem elaborado um procedimento de EMD que calcula tanto a configuração de pontos no espaço que melhor representa toda a coleção de matrizes de entrada, como uma maneira bastante simples de recuperar a configuração específica individual oriunda de cada matriz (ou sujeito). O método de Carroll e Chang tornou-se popularmente conhecido como EMD a três vias (3-way EMD).

Um aspecto da técnica de Carroll e Chang, porém, era que o modelo desenvolvido assumia que os diferentes participantes utilizavam as mesmas dimensões latentes no julgamento da similaridade entre os objetos, e que as diferenças individuais se restringiam ao grau com que cada dimensão afetava os julgamentos de similaridade. Em vista desse limitante, trabalhos subseqüentes foram desenvolvidos na direção de relaxar esse pressuposto.

O primeiro passo foi um novo algoritmo apresentado pelos mesmos autores Carroll e Chang (1972), em que, na recuperação do mapa individual de cada participante, admitia-se a rotação dos eixos presentes na solução comum a todos os participantes, ainda que fosse obrigatório preservar a ortogonalidade dos eixos.

Outros modelos desenvolvidos na seqüência buscavam criar independência cada vez maior entre o mapa comum a todos os participantes, e as particularidades de cada sujeito, incluindo (YOUNG; HAMER, 1987):

- a) Harshman, cujo modelo permitia direções oblíquas no espaço individual (relaxando obrigatoriedade de ortogonalidade entre as dimensões);
- b) Bloxom, e Young e Lewyckyj, em cujo modelo os indivíduos poderiam usar apenas um subespaço de menor dimensionalidade do que a do espaço comum.

Apesar dos modelos desenvolvidos por esses autores trazerem um benefício de maior flexibilidade na representação dos espaços individuais, sua grande complexidade fez que com não alcançassem grande popularidade, e seu uso se tornou restrito a aplicações muito específicas (YOUNG; HAMER, 1987).

Outros trabalhos desenvolvidos na terceira década de existência do EMD foram trabalhos de natureza unificadora, como o proposto por Takane, Young e de Leeuw, que apresentaram um algoritmo mais abrangente, capaz de realizar escalonamento multidimensional tanto métrico como não-métrico.

Período atual

Os desenvolvimentos da técnica a partir dos 80 se concentraram em dois temas principais:

- a) Escalonamento multidimensional com restrições, onde a cada indivíduo presente no estudo se atribui um peso distinto a sua matriz de similaridades;
- b) Escalonamento multidimensional através de máxima verossimilhança, que estuda a distribuição probabilística da localização dos pontos no espaço

comum, ou seja, como os pontos gerados “flutuam” ao redor da melhor localização atribuída a eles pelos algoritmos de EMD (YOUNG; HAMER, 1987).

Entre estes dois temas, o que recebeu maior atenção foi o segundo, tendo sido Ramsey (1977) o iniciador dos estudos nessa área (MEAD, 1992). Apesar dos métodos de escalonamento multidimensional probabilístico oferecerem a vantagem de se testar hipóteses a respeito de dimensionalidade e estabelecer intervalos de confiança para os pontos resultantes (CARROLL; GREEN, 1997), estes métodos não são usados com frequência em marketing (BIJMOLT; WEDEL, 1999).

4.4 Definições

A fim de facilitar o desenvolvimento da teoria sobre o escalonamento multidimensional, cabe nesse momento a definição de alguns conceitos fundamentais:

Definição 1: Objetos. Elementos de interesse de um estudo. Podem assumir uma infinidade de formas, não necessariamente concretas, como países, sentimentos, tipos de crimes cometidos ou marcas.

Definição 2: Atributo. Uma característica percebida num objeto. Por exemplo, a acidez de uma maçã (SCHIFFMAN; REYNOLDS; YOUNG, 1981), ou o poder de limpeza de uma marca de detergente em pó.

Definição 3: Similaridade. Trata-se de uma medida de parença entre dois objetos. Quanto maior o valor dessa medida, mais semelhantes dois objetos são considerados. A medida de similaridade pode ser livre (critério livremente definido

pelos respondentes, como no exemplo dos países acima), ou sugerida (por exemplo, o quanto dois países são semelhantes em termos de liberdades civis). A medida pode ser uma propriedade física, como a distância em quilômetros entre duas cidades, ou oriunda de um julgamento subjetivo realizado pelos participantes de um estudo.

Definição 4: Dissimilaridade. O inverso de similaridade, ou seja, quanto maior o valor de dissimilaridade entre dois objetos, menos semelhantes esses dois objetos são considerados. A técnica de EMD pode ser aplicada tanto sobre medidas de similaridade como de dissimilaridade.

Definição 5: Matriz de similaridades. É a matriz $\Delta = (\delta_{ij})$ em que são representadas de forma ordenada as similaridades medidas entre os n objetos estudados, da

seguinte forma:
$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}.$$

$\Delta = (\delta_{ij})$ é chamada *métrica* se valem as seguintes propriedades (COX; COX, 2001):

- a) $\delta_{ij} = 0$ se e somente se $i = j$;
- b) $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$;
- c) $\delta_{ij} \leq \delta_{ik} + \delta_{kj}$ para todo $1 \leq i, j, k \leq n$. Esta propriedade é conhecida como a propriedade triangular.

Nesse caso, costuma-se representar $\Delta = (\delta_{ij})$ pela matriz triangular

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \delta_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, \text{ já que o triângulo superior torna-se redundante } (\delta_{12} = \delta_{21}, \dots).$$

Existem métodos de EMD tanto para matrizes métricas, que satisfazem as condições acima, como para matrizes não-métricas, como veremos no capítulo 4 (ver p. 50).

Definição 6: Ponto. Uma posição no espaço que é uma representação abstrata de um objeto.

Definição 7: Espaço de objetos. Nome dado ao espaço resultante da aplicação do EMD, onde se encontram posicionados os objetos segundo a relação de semelhança entre eles.

Definição 8: Dimensionalidade. Número de dimensões do espaço de objetos, neste estudo representado por P . Em geral buscamos soluções com $P = 2$, ou no máximo $P = 3$, para que o mapa seja facilmente interpretável, mas nem sempre essa solução de baixa dimensionalidade se mostra adequada.

Definição 9: Matriz de distâncias. É uma matriz $\mathbf{D}(\mathbf{X}) = (d_{ij})$ em que, dada uma

configuração \mathbf{X} de n pontos em P dimensões ($\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $x_i = (x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{iP})$)

cada posição d_{ij} é ocupada pela distância entre os pontos x_i e x_j de \mathbf{X} , ou seja

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Se as distâncias são calculadas a partir das coordenadas $x_i = (x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{iP})$ de

cada ponto nas P dimensões através da fórmula de Pitágoras $d_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^P (x_{ik} - x_{jk})^2}$,

diz-se que a matriz de distâncias é *euclidiana*. É importante notar que toda matriz de distâncias euclidiana é métrica, portanto valem as mesmas propriedades listadas na Definição 5.

De posse destas definições podemos então explicitar em termos gerais o objetivo dos métodos de escalonamento multidimensional:

A partir de uma matriz de similaridade (dissimilaridade) entre objetos de estudo $\Delta = (\delta_{ij})$, encontrar uma configuração de pontos \mathbf{X} tal que a matriz de distâncias entre estes pontos $\mathbf{D}(\mathbf{X})$ seja a melhor aproximação possível de Δ .

4.5 Escalonamento métrico de Torgerson

Nessa seção apresentaremos os principais fundamentos teóricos do escalonamento multidimensional métrico desenvolvido inicialmente por Torgerson (1952), e aprimorado por Gower (1966).

Um exemplo de escalonamento métrico é o exercício de reconstrução do mapa geográfico brasileiro a partir das distâncias aéreas entre as principais capitais, apresentado na introdução deste capítulo.

O fundamento teórico que permitiu o florescimento das técnicas de EMD na década de 1950 é atribuído ao trabalho anterior de Schoenberg (1935) e Young e Householder (1938). Eles demonstraram como, a partir de uma matriz \mathbf{D} que representa distâncias entre pontos num espaço euclidiano (portanto métrica), uma configuração de pontos \mathbf{X} pode ser determinada, a qual obedece às relações de distância presentes na matriz de distâncias. Em outras palavras, eles mostraram como, a partir de \mathbf{D} , encontrar \mathbf{X} tal que $\mathbf{D}(\mathbf{X}) = \mathbf{D}$ (COX; COX, 2001).

Em poucas palavras, a solução proposta consiste em aplicar sobre \mathbf{D} um processo

de dupla centralização $\mathbf{B} = \mathbf{H} \left[-\frac{\mathbf{D}^2}{2} \right] \mathbf{H}$ e promover a decomposição em valores

singulares⁶ da matriz resultante $\mathbf{B} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$. Uma configuração de pontos que

soluciona o problema é $\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$.⁷

A questão da dimensionalidade do espaço é de particular interesse, e é determinada pelo número de autovalores não nulos de \mathbf{B} , presentes na matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}$.

Como \mathbf{B} tem no máximo $n-1$ autovalores diferentes de zero⁸, sempre se consegue encontrar uma solução para o problema onde a configuração de pontos \mathbf{X} utiliza $n-1$ dimensões. No entanto, na prática, objetivamos construir a configuração de

⁶ Ver apêndice A

⁷ O apêndice B (ver p. 163) apresenta um bom detalhamento desta solução.

⁸ Propriedade de matrizes de produtos escalares

pontos num número de dimensões muito menor que n (COX; COX, 2001). Como lidar com esse problema foi discutido por Gower (1966).

Gower observou que as distâncias entre os pontos na solução com $n-1$ dimensões

é dada por $d_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (x_{ik} - y_{jk})^2$, o que significa que, se um autovalor λ_i é muito

pequeno, ele influencia muito pouco a somatória tornando-se, portanto, desprezível.

Sendo assim, ordenando-se os autovalores do maior para o menor

$\lambda_i > \lambda_j > \lambda_k > \dots > \lambda_m$, e tomando-se apenas os maiores autovalores, desprezando

os muito pequenos ou negativos, pode-se reduzir a dimensionalidade do espaço de

pontos, com sorte, para duas ou três dimensões. Essa técnica foi batizada por

Gower de “análise das coordenadas principais”.

O seu uso, porém, introduz um desvio na solução do problema, que está relacionado

ao valor dos autovalores que são desprezados no processo. Uma medida da

proporção de variação explicada pelos primeiros P maiores autovalores, em relação

à solução exata com todos os $n-1$ autovalores, é dada por $q = \frac{\sum_{i=1}^P \lambda_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i}$. Este valor

pode ser usado para se decidir se a dimensionalidade P escolhida é adequada ou

não, em função de quanta variabilidade se perde na aproximação.

É importante ressaltar que todo o processo de escalonamento métrico descrito acima é sempre possível em se lidando com uma matriz de distâncias euclidianas.

No entanto, muitas vezes lidamos com matrizes de similaridade que não são

verdadeiras matrizes de distâncias euclidianas, principalmente por violarem a

propriedade triangular, em que $d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}$ para todo i, j, k .

Nesse caso, se $\Delta = (\delta_{ij})$ é o conjunto de valores que exprime a similaridade medida entre cada par de objetos, não necessariamente uma matriz de distâncias euclidiana, gera-se uma nova matriz de distâncias $\mathbf{D} = (\delta_{ij} + c(1 - \delta^{ij}))$, onde δ^{ij} representa o delta de Kronecker ($\delta^{ij} = 1$ se $i = j$, $\delta^{ij} = 0$ se $i \neq j$)⁹ e $c = \max_{(i,j,k)}(\delta_{ij} - \delta_{ik} - \delta_{kj})$. Em outras palavras, soma-se a constante c apropriada a todos os valores da matriz de similaridades, com exceção da diagonal, e o escalonamento métrico pode ser aplicado.

4.6 Escalonamento não-métrico de Kruskal

Nessa seção serão apresentados os principais fundamentos teóricos do escalonamento multidimensional não-métrico segundo Kruskal e Wish (1978).

4.6.1 Um exemplo

Em sua dissertação de mestrado, Souza (1994) investigou a percepção das consumidoras quanto à similaridade entre 6 diferentes marcas de absorventes higiênicos. As participantes do estudo foram solicitadas a atribuir uma nota de 1 a 7 a todos os 15 pares de marcas de absorventes, em função da sua dissimilaridade, segundo a escala abaixo:

⁹ Não confundir com as medidas δ_{ij} de similaridade entre os objetos

TABELA 6
Escala de dissimilaridade entre marcas de absorventes higiênicos

Nota	Grau de dissimilaridade
1	Idênticas
2	Muito parecidas
3	Parecidas
4	Nem parecidas, nem diferentes
5	Diferentes
6	Muito diferentes
7	Totalmente diferentes

Fonte: Souza (1994, p. 129).

Uma das participantes, a qual chamaremos de A, atribuiu as seguintes notas às dissimilaridades entre os pares de marcas de absorventes:

TABELA 7
Matriz de dissimilaridade de absorventes para participante A

Marcas	SEM	MOD	SEG	ELA	SER	SUT
SEMpre Livre	-					
MODess	1	-				
SEGura & Natural	2	1	-			
ELA	5	5	4	-		
SERena	5	4	4	2	-	
SUTil	5	5	5	3	4	-

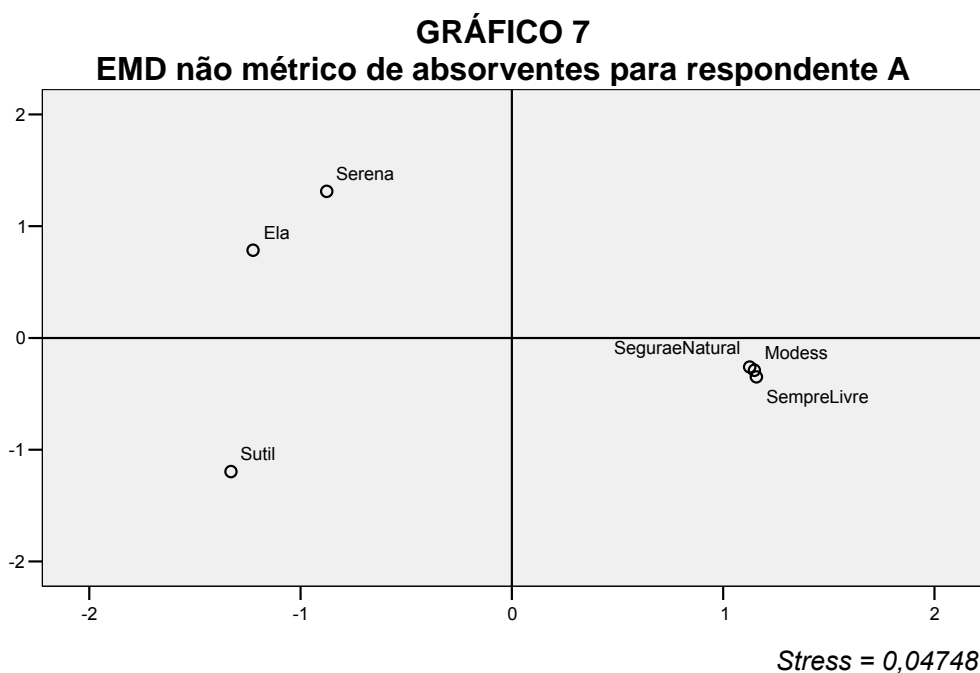
Fonte: Souza (1994, p. 129).

O primeiro aspecto importante a notar nesse problema é a natureza da escala utilizada para medir a similaridade entre as marcas de absorvente. Apesar dela se tratar de uma maneira adequada para a respondente indicar o quanto duas marcas são diferentes entre si segundo a sua percepção, não seria razoável supor estritamente que essa participante acha as marcas Sutil e Sempre Livre (nota 5) 5 vezes mais diferentes do que Sempre Livre e Modess (nota 1). Essa característica da escala sugere que o método de Torgerson não seria a maneira mais apropriada de construir o mapa perceptual segundo essa participante.

A solução do EMD proposta por Kruskal, no entanto, não exige uma natureza métrica na escala, pois trabalha somente com as relações de ordem de semelhança, e não com os valores estritos. Em outras palavras, ela leva em conta somente quais

pares de marcas são consideradas mais semelhantes entre si, e não exatamente quanto.

O resultado da aplicação do escalonamento multidimensional não-métrico para a participante A é o seguinte:



Fonte: Elaboração própria.

Para esta participante existem três grupos bem distintos de marcas de absorvente: um grupo formado por Sempre Livre, Modess e Segura & Natural, um segundo grupo formado por Ela e Serena, e um terceiro com a marca Sutil.

As marcas Modess, Sempre Livre e Segura & Natural são virtualmente idênticas para essa respondente, sugerindo alta competitividade por preço entre elas. O fato de que Modess e Sempre Livre pertencem ao mesmo fabricante (Johnson & Johnson) também chama a atenção, já que sugere o gerenciamento de um portfólio conflitante de marcas.

4.6.2 A solução

Seja $\{\delta_{ij}\}$ o conjunto de valores que exprime a similaridade (dissimilaridade) medida entre cada par dos n objetos. Estes valores são representados na matriz $\Delta = (\delta_{ij})$.

Novamente, cada um dos n objetos será representado, na solução do problema, através de suas coordenadas no espaço P -dimensional da forma $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iP})$.

Uma primeira grande diferença entre as soluções métrica e não-métrica se mostra neste instante, que é a necessidade de definir, *a priori*, o valor de P . Enquanto na solução de Torgerson a dimensionalidade era escolhida a partir da variabilidade explicada pelos maiores autovalores, na solução não-métrica o valor de P é um dado de entrada do algoritmo. Veremos mais adiante maneiras apropriadas de selecionar o valor de P .

Como visto anteriormente, o problema central do EMD não-métrico é encontrar uma configuração de n pontos \mathbf{X} tal que a matriz de distâncias $\mathbf{D}(\mathbf{X})$ associada a eles corresponda o melhor possível à matriz de similaridades Δ . Isto equivale a dizer que queremos encontrar uma relação entre as distâncias e as similaridades, ou seja, queremos encontrar um conjunto de pontos x_i tal que $d_{ij} = f(\delta_{ij})$. A função f em questão pode ser qualquer, por exemplo, da forma $d_{ij} = a + b\delta_{ij}$ ou $d_{ij} = b\delta_{ij}$, caso em que se diz que a relação é métrica.

Na alternativa proposta por Kruskal, a única exigência é que a função f que relaciona as similaridades e distâncias seja monotônica, ou seja, que se $\delta_{ij} \geq \delta_{kl}$, então $d_{ij} \geq d_{kl}$ para todo i, j, k, l (ou equivalentemente, que $f(\delta_{ij}) \geq f(\delta_{kl})$).

O fato de que essa restrição mais fraca do que uma relação métrica fosse capaz de recuperar a configuração de pontos original é justamente o fato surpreendente que causou ceticismo junto à comunidade científica na segunda década de desenvolvimento do método. No entanto, não é difícil perceber intuitivamente como o algoritmo é capaz de obter uma solução ótima para o problema. Basta perceber que o número de inequações $f(\delta_{ij}) \geq f(\delta_{kl})$ a obedecer é muito maior que o número de pontos a determinar no mapa (GREEN; CARMONE, 1969). Por exemplo, se temos 11 pontos no mapa em 2 dimensões, são necessários somente 22 números para solucionar o problema (coordenadas dos 11 pontos). Existem, no entanto, 55 distâncias entre esses 11 pontos a serem respeitadas $\left(\frac{11*10}{2}\right)$, o que acaba por restringir fortemente o número de soluções possíveis para o problema.

Note que no caso da função f ser a função identidade ($d_{ij} = \delta_{ij}$), as similaridades seriam as distâncias propriamente. Isto indica que o método de Kruskal também é adequado para resolver problemas de natureza métrica (ARABIE; CARROLL; WISH, 1987).

A estratégia utilizada por Kruskal para chegar à configuração de pontos mais adequada, no entanto, difere bastante do método utilizado por Torgerson. Como visto anteriormente, enquanto Torgerson e Gower utilizaram uma abordagem baseada na análise dos fatores da matriz de produto escalar \mathbf{B} , Kruskal tratou o

problema desde um ponto de vista de otimização. Uma estratégia bastante utilizada nesses tipos de problemas é a introdução de uma função penalidade, que geralmente toma a forma de uma medida numérica do desvio em relação a um objetivo estabelecido. A partir de então, o problema passa a ser encarado como um problema de minimização da função penalidade, pois quanto menor o valor da penalidade, melhor o ajuste obtido através da solução em questão.

Kruskal definiu então a função *fstress* que toma a forma de uma soma dos quadrados das diferenças entre $f(\delta)$ e d , padronizada por um fator de escala:

$$fstress = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (f(\delta_{ij}) - d_{ij})^2}{\sum_i \sum_j d_{ij}^2}}$$

A fim de eliminar a influência da particular função f , a função de penalidade utilizada por Kruskal em seu modelo assume a forma $stress(\Delta, X) = \min_{\text{todo } f} fstress(\Delta, X, f)$, e recebe o nome de *stress* (ou *stress-1*).

Fica explícito assim o primeiro passo no processo computacional do escalonamento não-métrico de Kruskal, que trata de encontrar a função f que minimize o valor de *fstress* para uma dada configuração de pontos e o conjunto de similaridades. Esse processo é realizado através da família de procedimentos chamada de regressão monotônica por mínimos quadrados¹⁰.

Note que devido à natureza da função penalidade escolhida por Kruskal, seu modelo passa a comportar dados faltantes: basta, no cálculo de *fstress*, atribuir valor zero às diferenças $f(\delta_{ij}) - d_{ij}$ relativas aos dados faltantes e seguir adiante, sem prejuízo

¹⁰ Ver Apêndice C

para a aplicação do algoritmo. Esse fato representa uma outra grande vantagem deste modelo sobre o escalonamento métrico de Torgerson.

Munidos da melhor função f , a tarefa então se torna encontrar a configuração de pontos X que minimize o stress, ou seja, $stress(\Delta, X) = \min_{\text{todo } X} stress(\Delta, X)$, mantendo-se fixa nessa etapa a função f determinada no passo anterior. Esse procedimento é realizado através do método do gradiente, cuja analogia seria: num terreno ondulado, a partir do ponto onde se encontra, “sentir” os pontos próximos para ver qual deles apresenta a maior inclinação descendente. Uma vez identificado esse ponto, dar uma passo nessa direção, e reiniciar o processo (KRUSKAL; WISH, 1978).

Resumindo-se o processo, o algoritmo de Kruskal consiste em iterações subseqüentes de dois passos:

- 1º Minimização de f stress, encontrando-se a melhor função f , para uma dada configuração de pontos X e a matriz original Δ de similaridades;
- 2º Minimização de stress, encontrando-se a melhor configuração de pontos X' , para a dada função f determinada no passo anterior e a matriz original Δ de similaridades.

O processo se repete então, com a nova configuração de pontos encontrada X' no lugar de X .

Alguns pontos importantes a observar:

- a) Note que a primeira iteração do algoritmo de Kruskal pressupõe a existência de uma *configuração de pontos inicial*. Qualquer configuração de pontos é a

princípio válida, mas existem várias técnicas para gerar uma configuração de pontos inicial para os algoritmos de escalonamento multidimensional que reduzem o número de passos até o algoritmo chegar à solução ótima. Por exemplo, o algoritmo “sobe-e-desce” de Kruskal, o método de Torgerson e soluções obtidas através de programação linear, como o Simplex.

- b) A utilização do método do gradiente no segundo processo computacional introduz no modelo de Kruskal o risco potencial de se estacionar em mínimos locais (a melhor solução naquela redondeza, mas não necessariamente a melhor solução de todo o problema). O problema é em geral contornado através de heurísticas, como, por exemplo, executar o escalonamento com diferentes configurações iniciais de pontos. Se todas as vezes o algoritmo resulta na mesma configuração final de pontos, provavelmente trata-se de um ponto de mínimo global, e não local.
- c) Note também que se faz necessário estabelecer uma *regra de parada* para o algoritmo, o que é feito em geral estabelecendo-se um limite inferior para as reduções do stress após cada iteração: quando a redução no valor do stress após um ciclo completo for inferior a um limite (pequeno) estipulado pelo usuário, o algoritmo pára e apresenta a solução final.

Como vimos anteriormente, o número P de dimensões da representação espacial dos pontos da configuração a ser encontrada é definido *a priori* pelo usuário do método. Cabe então ao pesquisador determinar qual a melhor dimensionalidade para o problema em questão.

O valor de stress final associado à configuração de pontos parece a princípio uma boa medida para se analisar a adequação da dimensionalidade escolhida (se o

stress é pequeno, a dimensionalidade selecionada parece ser adequada). No entanto, a medida de stress é afetada por muitos fatores que poderiam levar a uma aceitação inapropriada da solução (BORG; GROENEN, 1997):

- a) Quanto maior a dimensionalidade P do mapa, menor o stress;
- b) Quanto maior o número n de pontos no estudo, maior o stress em geral;
- c) Quanto maior o número de empates nos dados (vários pares de pontos com mesma similaridade), menor o stress.

Estas relações fazem com que definir um valor fixo (uma norma) abaixo do qual o valor de stress seja considerado bom seja uma prática desaconselhável.

Em escalonamento não-métrico, qualquer matriz de similaridades $n \times n$ pode ser representada por uma configuração de dimensionalidade $n-2$ com stress zero (BORG; GROENEN, 1997). No entanto, em geral estamos interessados em mapas de baixa dimensionalidade, sob pena de se perder a capacidade de interpretação visual do mapa (fácil visualizar em duas dimensões, mais difícil em três, e quase impossível com quatro ou mais dimensões). Por outro lado, construir mapas com dimensionalidades muito baixas introduz altas distorções nos dados devido à compressão excessiva das informações.

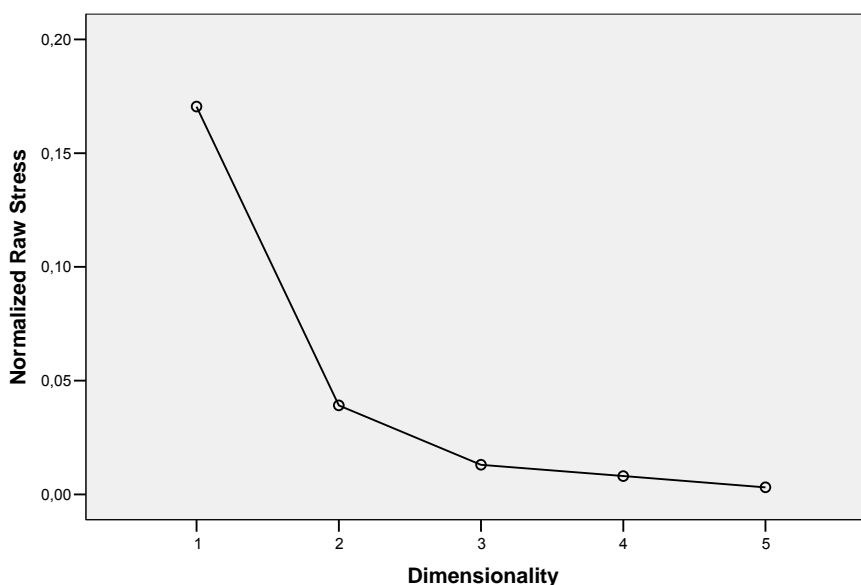
Nesse *trade-off* entre interpretabilidade e tamanho da distorção, a análise do valor de stress nas diferentes dimensionalidades é de grande ajuda para o usuário. A prática em geral reside em se gerar mapas em diferentes dimensionalidades ($P=2, 3$ e 4 em geral), e escolher a solução mais apropriada.

Essa escolha é de natureza subjetiva, e segundo Kruskal (1964) deveria ser fortemente guiada pela interpretabilidade do mapa obtido. Em outras palavras, o

pesquisador deve escolher o mapa que “faz mais sentido” para ele, e cujo mapa de dimensionalidade uma unidade maior não traga à tona nenhuma outra informação significativa sobre o comportamento dos dados.

Existem, no entanto, medidas objetivas que auxiliam o pesquisador na tarefa de escolha da dimensionalidade. O procedimento mais usual é construir um gráfico chamado de *scree plot* que contrapõe os valores finais de stress versus as dimensionalidades dos mapas, e procurar a dimensão a partir da qual aumentos na dimensionalidade não trazem grandes reduções no valor de stress, ou seja, o ponto a partir do qual a linha do gráfico se aproxima da horizontal. Esse procedimento é usualmente descrito como procurar um “cotovelo” na curva. No exemplo dos países apresentado no início deste capítulo, o *scree plot* para mapas de dimensões 1 a 5 é o seguinte:

GRÁFICO 8
Scree plot para estudo de similaridade entre países



Fonte: Elaboração própria.

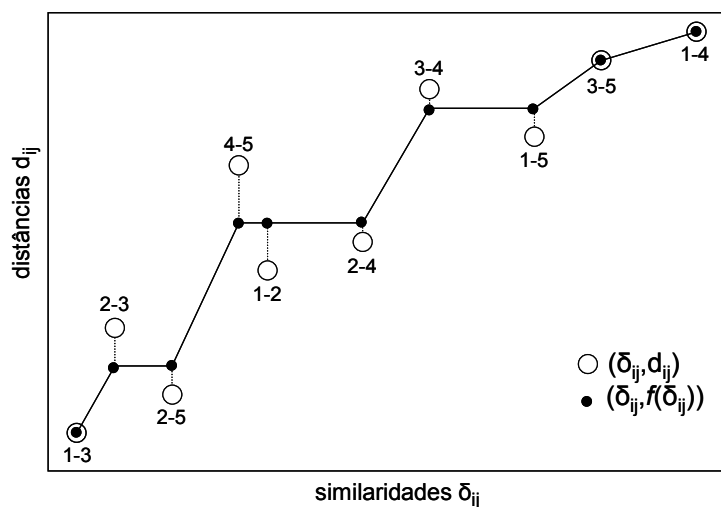
Note que a para os mapas gerados em dimensões 3, 4 e 5, os valores de stress são muito similares, indicando que a redução na distorção que se ganharia ao se usar

dimensões maiores é pequena. Também pode ser notada a grande melhora no stress ao se passar de uma única dimensão para duas dimensões. Sendo assim, a escolha do pesquisador deveria ficar entre mapas de dimensionalidade 2 ou 3, e a decisão final ser feita após uma análise cuidadosa da interpretabilidade destes dois mapas. Para nosso exemplo foi escolhida a dimensionalidade 2, onde se percebe o “cotovelo” na curva (a partir desse ponto, as reduções no valor de stress são bem menores a cada aumento de dimensão). Apesar de que para a dimensão 2 o valor absoluto de stress é maior do que para a dimensão 3, essa solução já permite uma boa interpretação dos critérios usados no julgamento de similaridade entre países.

Uma outra análise importante a se realizar para avaliar a qualidade do ajuste realizado pelo EMD, além do stress, é a análise das disparidades $f(\delta_{ij}) - d_{ij}$ individuais, processo semelhante à análise de resíduos nos métodos de regressão. Por exemplo, pode ser que o valor de stress seja alto, sugerindo aumentar o número de dimensões no modelo, mas este valor esteja sendo inflacionado por algumas poucas disparidades muito pronunciadas. Nesse caso, uma alternativa viável seria manter o número de dimensões, tendo-se em mente que a distância entre os pontos x_i e x_j no mapa está mal representada.

Nessa análise, uma ferramenta de grande ajuda é o gráfico de disparidades, em que são apresentados os valores de $f(\delta_{ij})$ sobre o produto cartesiano $(\delta_{ij} \times d_{ij})$:

GRÁFICO 9
Disparidades



Fonte: Kruskal e Wish (1978, p. 25).

Nesse gráfico pode-se observar que as distâncias com pior ajuste $f(\delta_{ij}) - d_{ij}$ são entre os pontos 4 e 5 e entre os pontos 1 e 2.

Também se pode observar a natureza monotônica da função $f(\delta_{ij})$, demonstrada pela linha ascendente, e visualizar como, se o modelo resolvesse escolher uma nova função $f'(\delta_{ij})$ onde $f'(\delta_{45}) > f(\delta_{45})$ a fim de reduzir essa discrepância em particular, estaria ao mesmo tempo aumentando as discrepâncias para os pares de pontos 1-2 e 2-4, pois pela condição de monotonicidade devemos ter $f(\delta_{24}) \geq f(\delta_{12}) \geq f(\delta_{45})$ obrigatoriamente.

Ainda no gráfico de disparidades pode-se perceber a representação geométrica de stress, que é raiz da soma dos quadrados distâncias entre cada ponto (δ_{ij}, d_{ij}) e a linha da função $f(\delta_{ij})$, dividida pela raiz da soma das distâncias entre os pontos (δ_{ij}, d_{ij}) e o eixo horizontal (fator de escala).

O gráfico de disparidades acima é relativamente fácil de analisar em função do reduzido número de pontos incluídos no exemplo. No caso do número de pontos ser muito grande, como é freqüente na prática, uma alternativa que se apresenta é analisar a tabela de disparidades, que mostra para cada par de objetos (x_i, x_j) , as diferenças entre a distância ajustada $f(\delta_{ij})$ e a distância d_{ij} entre os pontos da configuração final obtida.

Um último aspecto importante a discutir quanto à maioria das técnicas que solucionam o problema do escalonamento multidimensional, e em particular para o não-métrico de Kruskal, é a questão da indeterminação da solução quanto a rotação, translação, reflexão e escala, como vista no exemplo do mapa geográfico brasileiro.

Rotação diz respeito à orientação do mapa. Como a única relação exigida entre os pontos no mapa resultante é que a distância entre os pontos preserve uma relação de ordem com as similaridades originais, os eixos podem ser rotacionados livremente, e as distâncias entre os pontos se preservam. Uma analogia dessa transformação seria de girar um mapa sobre a mesa (o que foi de fato realizado no exemplo de distâncias entre aeroportos brasileiros apresentado anteriormente).

Translação diz respeito à localização da origem do mapa. Da mesma maneira, se a origem $(0,0)$ do mapa fosse transportada para outro ponto, a relação de distância entre os pontos se manteria, e a solução seria igualmente aceitável. Basta lembrar que a fórmula para distância entre dois pontos é oriunda da diferença entre as coordenadas desses dois pontos, então qualquer constante que seja adicionada ou subtraída a todas as coordenadas do mesmo eixo como um todo não afeta o cálculo das distâncias:

$$(x'_i - x'_j)^2 = (x_i + c - (x_j + c))^2 = (x_i + c - x_j - c)^2 = (x_i - x_j)^2.$$

A analogia nesse caso seria mudar o ponto de referência num mapa.

Reflexão diz respeito à inversão do sentido de algum dos eixos. A reflexão também é permitida na solução do escalonamento não-métrico, uma vez que a inversão do sinal da coordenada do eixo ocorre ao mesmo tempo para todos os pontos do espaço:

$$(x'_i - x'_j)^2 = (-x_i - (-x_j))^2 = (-x_i + x_j)^2 = (-1)^2(x_i - x_j)^2 = (x_i - x_j)^2.$$

A analogia nesse caso seria de inverter uma direção do mapa, como acontece, por exemplo, ao se virar uma página e olhar o mapa pelo verso da folha.

Escala diz respeito à unidade de medida dos eixos. Uma mudança na escala dos eixos apenas mudaria a medida numérica das distâncias entre os pontos, mas ainda assim os pontos mais próximos no mapa original continuariam sendo os mais próximos no mapa com nova escala, mantendo a relação de ordem com as similaridades originais. A analogia nesse caso seria dar um “zoom” no mapa.

4.7 Escalonamento a três vias de Carroll

Nessa seção serão apresentados os principais fundamentos teóricos do escalonamento multidimensional a três vias segundo Arabie, Carroll e Chang (1987).

O modelo teórico recebe o nome de INDSCAL, oriundo de **Individual Scaling**.

4.7.1 Um exemplo

Retornando ao exemplo de absorventes higiênicos extraído de Souza (1994), consideremos agora uma segunda participante do estudo, a qual será chamada de participante B. Ela julgou a dissimilaridade entre os pares de marcas da seguinte maneira:

TABELA 8
Matriz de dissimilaridade de absorventes para participante B

Marcas	SEM	MOD	SEG	ELA	SER	SUT
SEMPre Livre	-					
MODess	2	-				
SEGura & Natural	4	5	-			
ELA	5	5	2	-		
SERena	5	3	2	2	-	
SUTil	3	5	4	2	3	-

Fonte: Souza (1994, p.117).

Antes mesmo de aplicar a técnica, já pode-se perceber que esta respondente percebe a marca Segura & Natural de maneira bem distinta da respondente A:

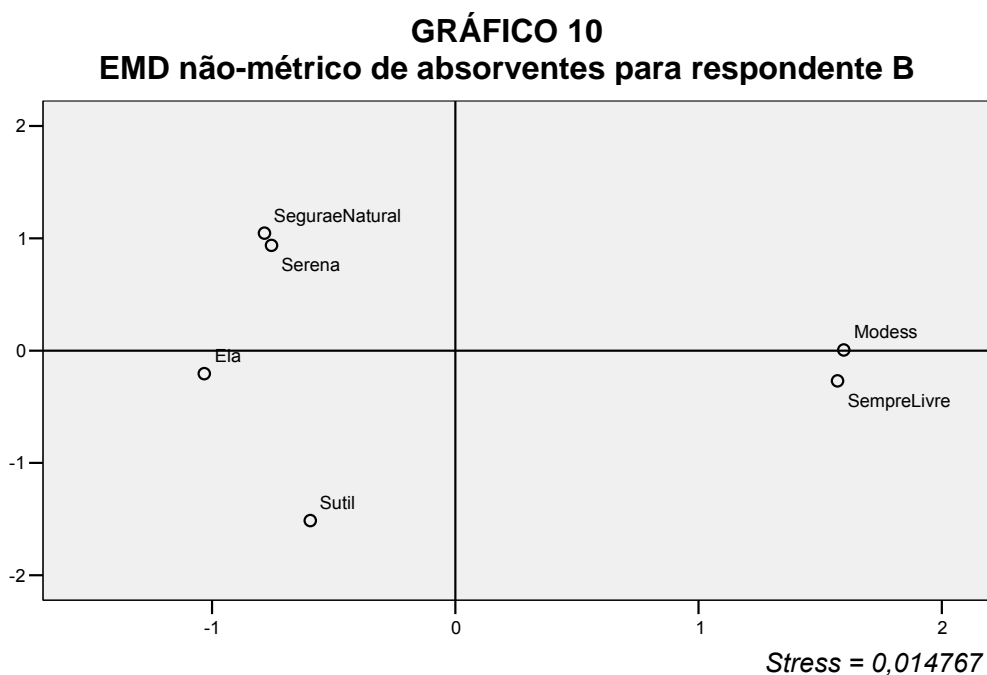
TABELA 9
Matrizes de dissimilaridade de absorventes para participantes A e B

Marcas	Participante A						Participante B					
	Sem	Mod	Seg	Ela	Ser	Sut	Sem	Mod	Seg	Ela	Ser	Sut
SEMPre Livre	-						-					
MODess	1	-					2	-				
SEGura & Natural	2	1	-				4	5	-			
ELA	5	5	4	-			5	5	2	-		
SERena	5	4	4	2	-		5	3	2	2	-	
SUTil	5	5	5	3	4	-	3	5	4	2	3	-

Fonte: Souza (1994, p.129 e 117).

Essa variabilidade nas percepções de similaridade foi o grande motivador para o desenvolvimento do método de escalonamento a três vias, uma vez que trabalhar com a média das similaridades nesse caso poderia não resultar numa boa representação da marca Segura & Natural, nem da participante A, nem da participante B.

O resultado da aplicação do escalonamento multidimensional não-métrico para a participante B é o seguinte:

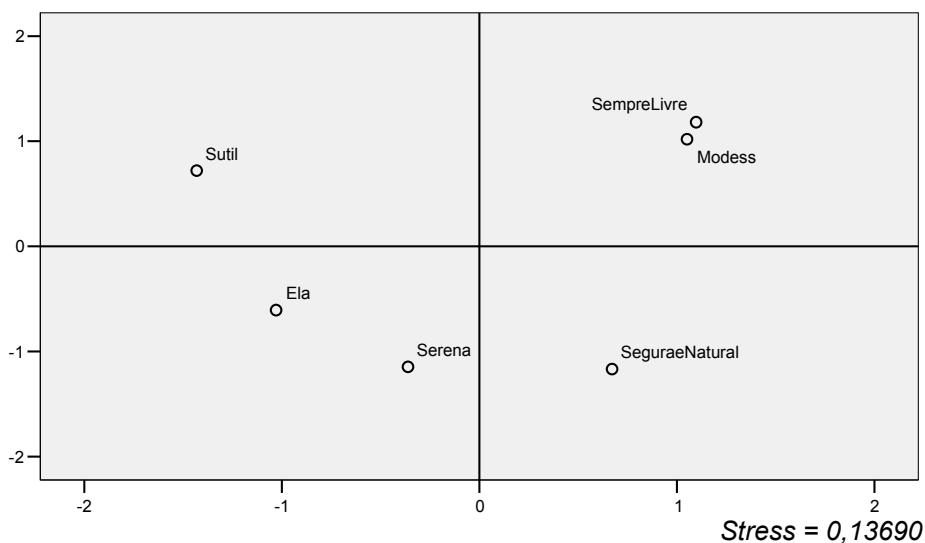


Fonte: Elaboração própria.

A comparação direta dos mapas correspondentes às participantes A e B não é possível em virtude da indeterminação das soluções em relação a rotações e translações, já discutidas.

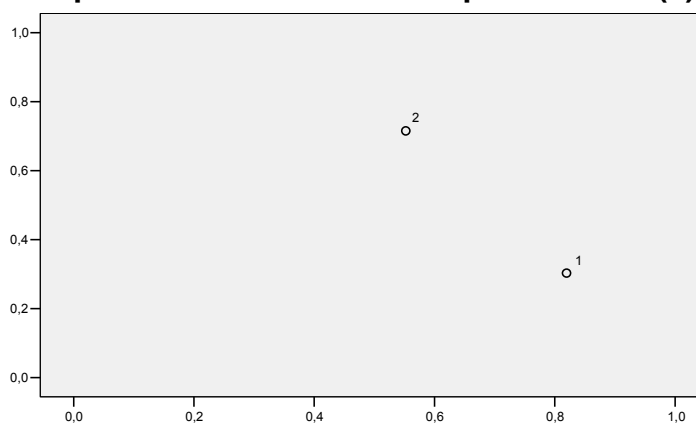
Para solucionar este problema, foi desenvolvido o escalonamento a três vias, que essencialmente constrói um mapa comum, que combina as informações de dissimilaridade de cada participante individual do estudo, e indica, num segundo mapa, chamado mapa de pesos, como variam as percepções de cada respondente em relação ao mapa comum construído:

GRÁFICO 11
Mapa comum às respondentes A e B



Fonte: Elaboração própria.

GRÁFICO 12
Mapa de pesos individuais das respondentes A(1) e B(2)



Fonte: Elaboração própria.

O mapa de pesos individuais acima indica que as participantes A e B atribuem pesos distintos às dimensões do mapa comum. Representando-o numa tabela, temos:

TABELA 10
Pesos individuais das participantes A e B

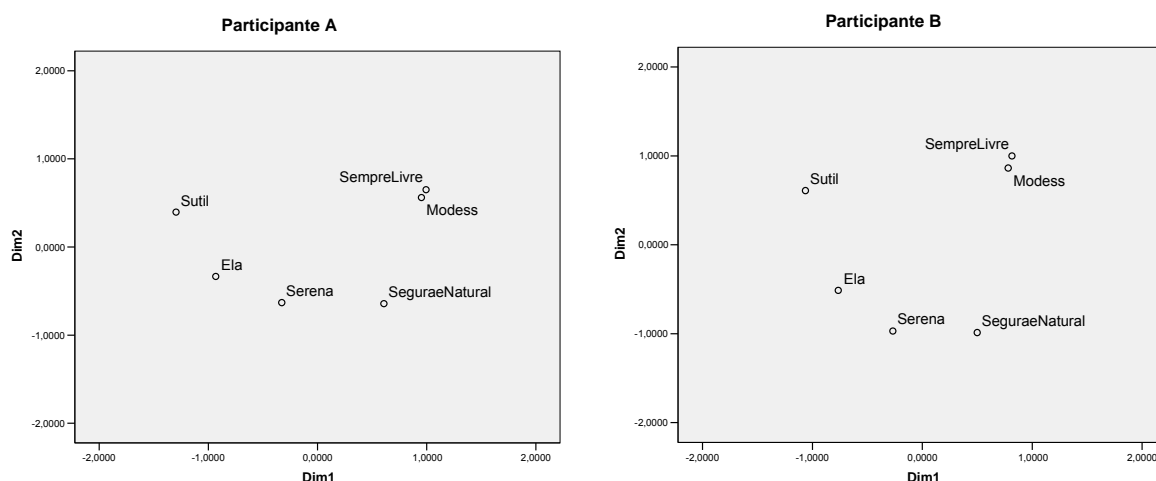
	Dimensão 1	Dimensão 2
Participante A	0,8196	0,3030
Participante B	0,5523	0,7155

Fonte: Elaboração própria.

Pode-se verificar que a respondente A atribui maior peso à dimensão 1 do que à dimensão 2: para uma mesma diferença nas coordenadas das duas dimensões, a

distância entre os pontos será maior na dimensão 1 do que na dimensão 2. O oposto se verifica para a respondente B. Essas diferenças de pesos se refletem nos mapas individuais de cada participante, recuperados através da aplicação dos pesos de cada uma ao mapa comum:

GRÁFICO 13
Mapas individuais após aplicação de pesos



Fonte: Elaboração própria.

Note-se como para a participante A, a marca Segura e Natural é mais semelhante às marcas Sempre Livre e Modess do que para a participante B, em linha com o que havíamos visto anteriormente. Também pode-se notar o efeito do menor peso atribuído à dimensão 2 da participante A, que causa um achatamento no gráfico naquela dimensão.

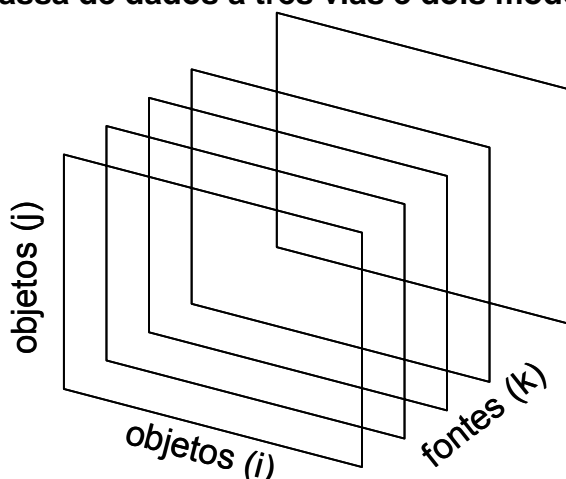
4.7.2 A solução

O primeiro conceito importante a descrever no estudo da solução do EMD a três vias diz respeito a “modos” (*modes*) e “vias” (*ways*). Carroll e Arabie (1980) foram os pioneiros a definir uma taxonomia para modelos de EMD, definindo que um “modo” se refere a uma particular classe de entidades, as quais poderiam ser, por exemplo, sujeitos, objetos, marcas, estímulos ou ocasiões. Já uma “via” diz respeito à

dimensionalidade do produto cartesiano de vários modos, os quais não precisam ser necessariamente distintos. Dessa forma, a noção de “via” diz respeito à dimensão da massa de dados de similaridade, enquanto a noção de “modo” diz respeito à natureza qualitativa das entidades envolvidas.

Por exemplo, se os vários participantes de um estudo (chamados de “fontes”) respondem a um questionário gerando dados individuais de similaridade entre marcas (chamadas “objetos”) temos a seguinte configuração da massa de dados:

FIGURA 1
Massa de dados a três vias e dois modos



Fonte: Adaptado de Arabie, Carroll e DeSarbo (1987, p. 11).

Nesse exemplo, temos três vias (dimensões i , j , k da matriz de dados), mas somente dois modos, pois em duas das dimensões (i e j), os objetos são de mesma natureza (as marcas), e em uma delas diferente (os indivíduos).

Alternativamente, em estudos de pesquisa de mercado, também é bastante comum a avaliação de marcas em atributos por diferentes indivíduos, a qual gera uma massa de dados de três vias e três modos (marcas \times atributos \times sujeitos).

Os métodos de escalonamento multidimensional vistos até o momento sempre se aplicam sobre uma matriz de similaridade entre objetos, com os mesmos objetos nas

linhas e colunas, e cada valor da matriz representando a similaridade entre eles. Trata-se assim de uma massa de dados de 2 vias (objetos x objetos), 1 modo (objetos).

No entanto, os softwares desenvolvidos para EMD geralmente incluem a funcionalidade de gerar uma matriz de similaridades entre objetos a partir de dados de outra natureza. Por exemplo, a partir de uma avaliação de diversas marcas em atributos (matriz marcas x atributos, 2 vias, 2 modos), o programa gera a matriz de similaridades (matriz marcas x marcas, 2 vias, 1 modo), em função de quão similares são os perfis das diferentes marcas nos diversos atributos. Este processo é realizado através da aplicação de alguma fórmula de distância, como as apresentadas no capítulo 3 de Teoria de Dados (ver p. 35). Essa matriz resultante é que serve de entrada para o algoritmo de escalonamento multidimensional.

Dessa forma, na prática, é possível usar os métodos de escalonamento vistos até agora com uma massa de dados de 2 vias, seja ela de 1 ou 2 modos.

O trabalho de Carroll e Chang se trata de uma extensão desses métodos para permitir a inclusão de uma terceira via (matriz de entrada de 3 vias, 2 ou 3 modos). Sendo assim, não se parte agora de similaridades entre objetos δ_{ij} somente, mas de $\delta_{ij,k}$, ou seja, tantas matrizes de similaridades entre os objetos quantas forem as fontes de dados. As fontes de dados podem ser de qualquer natureza, sendo usualmente de sujeitos (vários participantes de um estudo), mas também de diferentes localizações geográficas (dados oriundos de diferentes regiões ou países) ou diferentes ocasiões (informações de mesma natureza colhidas em diferentes momentos no tempo).

A solução para o problema desenvolvida por Carroll e Chang parte do princípio de determinar diferentes pesos w_{kp} para cada dimensão p do espaço comum, para cada fonte k . A distância entre os pontos da configuração passa a ser calculada através da distância euclidiana ponderada:

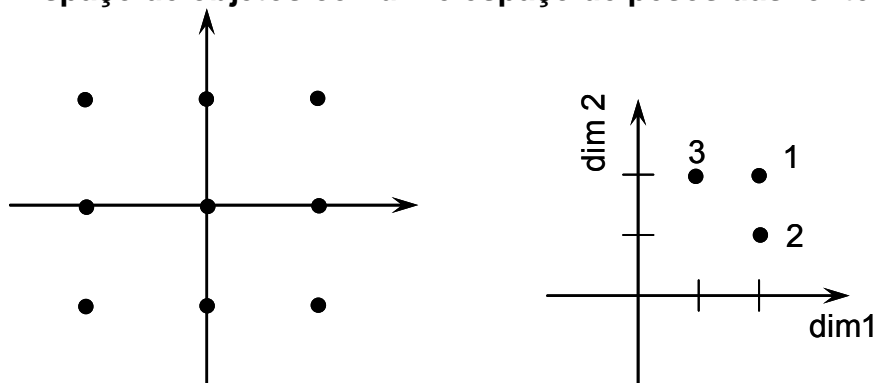
$$d_{ij,k} = \sqrt{\sum_{p=1}^P w_{kp} (x_{ip} - x_{jp})^2}$$

Por conseguinte, além de apresentar o espaço de objetos comum gerado a partir da reunião das informações de todas as fontes, o algoritmo permite, através da aplicação desses pesos, “recuperar” o espaço de objetos particular de cada fonte individual. Esse aspecto do modelo o torna altamente relevante para marketing, ao permitir a realização de segmentação de consumidores com base nos pesos atribuídos a cada dimensão (GREEN; RAO, 1971).

Um exemplo adaptado de Carroll e Wish (1974) mostra visualmente esta funcionalidade.

Suponhamos que uma aplicação do escalonamento a três vias tenha gerado a seguinte configuração comum de pontos para o grupo das três fontes, e os seguintes pesos para cada fonte:

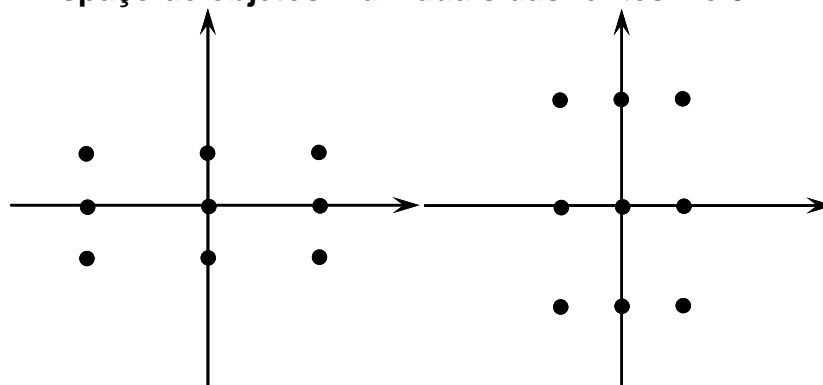
FIGURA 2
Espaço de objetos comum e espaço de pesos das fontes



Fonte: Adaptado de Carroll e Wish (1974, p.62).

Pode-se notar que as três fontes que fazem parte do estudo atribuem pesos diferentes às dimensões 1 e 2 do espaço de objetos. O mapa particular da fonte 1 seria idêntico ao espaço de objetos comum a todos, pois seus pesos são $w_1 = (1,1)$. Já os pesos das fontes 2 e 3 gerariam mapas individuais distintos, em função do peso que atribuem a cada dimensão:

FIGURA 3
Espaço de objetos individuais das fontes 2 e 3



Fonte: Adaptado de Carroll e Wish (1974, p. 62).

Note que $w_2 = \left(1, \frac{1}{2}\right)$, ou seja, a fonte 2 dá um peso menor à dimensão 2 do que o conjunto das fontes como um todo (como era o caso da participante A do exemplo de absorventes). Por esse motivo, seu espaço de objetos aparece “achatado” no sentido horizontal. O reverso acontece com a fonte 3, que com $w_3 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, dá um

peso menor para a dimensão 1 e, portanto, seu espaço de objetos aparece “estreitado” no sentido vertical.

Uma importante diferença entre os modelos de Kruskal e o de Carroll e Chang surge nesse momento. Uma vez que pesos relativos a cada dimensão são apresentados para cada fonte participante do estudo, eles determinam uma orientação única dos eixos das dimensões no espaço de objetos comum. Isto é, o modelo passa a não admitir rotações livres dos eixos do espaço de objetos, como era possível no método de Kruskal. Se essa operação fosse efetuada, seria necessário recalcular todos os pesos das dimensões para cada participante. Por outro lado, outras operações como translação e reflexão continuam sendo permitidas.

4.7.3 Soluções para o modelo teórico do INDSCAL

Diferentes pesquisadores desenvolveram diferentes formas computacionais de solucionar o modelo teórico INDSCAL. A primeira delas foi desenvolvida por Carroll, Chang e Pruzanzky, e por isso recebeu o próprio nome de INDSCAL, ainda que a distinção entre o modelo teórico e o algoritmo computacional seja bastante importante.

Este método computacional está fortemente ligado à teoria desenvolvida por Torgerson, já apresentada neste trabalho (ver capítulo 4.5, p. 65). A idéia central é repetir o processo de Torgerson para cada fonte, com uma modificação importante: substituir cada coordenada $x_{ij,k}$ por $y_{ij,k}$, onde $y_{ij,k} = \sqrt{w_{r,k}} x_{ij,k}$. Dessa forma, fixando a fonte k , o produto escalar entre dois vetores y_i e y_j do espaço dessa fonte passa a ser:

$$\begin{aligned} (y_i - y_j)^2 &= \sum_{l=1}^P (y_{il} - y_{jl})^2 = \sum_{l=1}^P (\sqrt{w_l} x_{il} - \sqrt{w_l} x_{jl})^2 = \\ &= \sum_{l=1}^P \left((\sqrt{w_l})^2 (x_{il} - x_{jl})^2 \right) = \sum_{l=1}^P w_l (x_{il} - x_{jl})^2 \end{aligned}$$

Em outras palavras, as distâncias entre y_i e y_j são as distâncias entre x_i e x_j ponderadas em cada dimensão pelo peso w_l , que é a essência do modelo teórico INDSCAL.

A solução para o problema utiliza a técnica de mínimos quadrados alternantes (*alternating least squares*), cuja complexidade a tira do escopo deste trabalho. No entanto, vale mencionar que o princípio é alternar entre achar uma solução para os pesos em função de uma configuração de pontos, em seguida melhorar a configuração de pontos em função dos pesos encontrados, e reiniciar o processo, até a convergência do algoritmo.

Takane, Young e de Leeuw (1977) apresentaram uma outra solução para o modelo teórico INDSCAL, chamada de ALSCAL, solução essa que segue o mesmo princípio do modelo desenvolvido por Kruskal de minimização de uma função de penalidade, nesse caso chamada de *sstress*:

$$\text{sstress} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i (f(\delta_{ij,k})^2 - d_{ij,k}^2)^2}{\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i f(\delta_{ij,k})^4}}$$

Há grande semelhança de *sstress* com *fstress* (ver p. 73), e a principal diferença é a inclusão da terceira somatória, que percorre as k matrizes de dados de entrada.

No entanto, uma diferença chave entre *fstress* e *sstress* é que as distâncias d_{ij} no caso de *sstress* são distâncias euclidianas ponderadas pelos pesos $w_{l,k}$, a fim de tornar o procedimento adequado a solucionar o modelo teórico do INDSCAL.

Uma outra diferença importante é que o ALSCAL especifica a função f de acordo com a escala de medida das similaridades $\delta_{ij,k}$, enquanto que o EMD de Kruskal utiliza sempre uma função monotônica. Sendo assim, o ALSCAL realiza tanto escalonamentos métricos como não-métricos, mas no sentido estrito da palavra. Isto é, se a natureza do problema é métrica, ele utiliza um algoritmo métrico de fato.

A solução para o problema de minimização também segue a mesma estratégia utilizada no INDSCAL ao estimar alguns parâmetros enquanto mantém outros fixos, e depois melhorar a estimativa dos que estavam fixos em função do novo valor encontrado.

Ela se dá em basicamente quatro estágios:

- a) Inicialização, onde se geram valores iniciais para a configuração de pontos e para a matriz de pesos;
- b) Escalonamento optimal, onde se determinam os melhores valores de $f(\delta_{ij,k})$, enquanto a configuração de pontos e os pesos são mantidos fixos. É nesta etapa que diferentes procedimentos são adotados em função da natureza das medidas de similaridade;
- c) Estimação da matriz de pesos, mantendo a configuração de pontos e os valores de $f(\delta_{ij,k})$ fixos;
- d) Estimação da configuração de pontos, mantendo os pesos e os valores de $f(\delta_{ij,k})$ fixos.

Ao terminar o quarto estágio, o algoritmo volta para o passo 2 e recomeça o processo. A parada do algoritmo se dá se ao final do passo 2, a diferença entre o stress anterior e o novo stress for suficientemente pequena.

Finalmente, uma outra solução computacional para o modelo teórico do INDSCAL foi proposta por Ramsay, e recebe o nome de MULTISCALE. Ainda que não nos interesse aprofundar neste modelo, é interessante mencioná-lo, pois a solução para o problema é bastante diferenciada, de essência probabilística.

Ramsay parte do pressuposto que as similaridades observadas $\delta_{ij,k}$ são independentes e identicamente distribuídas, com uma função de densidade de probabilidade dada por $f(\delta_{ij,k} | d_{ij,k}, \sigma^2)$. Em outras palavras, o modelo considera que existe um valor “real”, livre de erro, para as distâncias $d_{ij,k}$ em torno das quais as similaridades $\delta_{ij,k}$ observadas flutuam com erro padrão σ . O método utiliza, então, o princípio de máxima verossimilhança para resolver o problema.

4.8 Interpretação das dimensões

As dimensões resultantes da aplicação do escalonamento multidimensional não têm significado intrínseco atreladas a elas e em geral não são diretamente interpretáveis (KRUSKAL; WISH, 1978). Elas servem apenas de referência para que o analista perceba relações métricas entre as distâncias entre os pontos (ex.: o ponto A está duas vezes mais distante do ponto B do que o ponto C).

O fato de que é possível, como visto anteriormente, aplicar rotações, translações e inversões de escala no mapa resultante do escalonamento multidimensional deixa

claro que as dimensões obtidas são meras referências, desprovidas de um significado necessariamente substantivo (KRUSKAL; WISH, 1978).

No entanto, a interpretação das dimensões que fazem com os objetos sejam considerados mais similares ou mais dissimilares é uma das grandes funcionalidades do EMD, tendo sido uma das principais motivações que levou os cientistas psicométricos a desenvolver a técnica.

Esta interpretação pode ser feita de dois modos em geral, um mais intuitivo, e outro através de suporte estatístico (SOUZA, 1994).

O método intuitivo consiste em examinar o mapa resultante do EMD buscando-se reconhecer padrões conhecidos entre os objetos mais próximos entre si. Este método intuitivo foi utilizado no exemplo de similaridade entre países no início deste capítulo (ver p.55), onde através do conhecimento do pesquisador sobre a natureza dos países (quais são desenvolvidos, quais não são; quais são capitalistas, quais comunistas), foi possível intuir que estas dimensões eram fortemente utilizadas pelos estudantes no seu julgamento de similaridades entre países.

Provavelmente o pesquisador continha muito mais informações sobre os países além dessas, como tamanho da população, ou composição étnica, mas as considerou pouco relevantes porque os agrupamentos de países no mapa não refletiam grupos homogêneos nessas dimensões. Por exemplo, Índia e China são ambos muito populosos, mas se encontram muito distantes um do outro no mapa, então a dimensão “população” não parece estar influenciando fortemente a percepção de semelhança entre os países.

Ainda assim, não há nenhum impedimento para que esta interpretação livre realizada pelo pesquisador não indique que outras dimensões, de natureza bastante distinta das indicadas, estejam direcionando as avaliações dos respondentes. Essa dinâmica deixa claro que a interpretação intuitiva está intimamente ligada ao grau de conhecimento prévio do pesquisador sobre os objetos de estudo, o que representa um risco para a confiabilidade da análise: pesquisadores com diferentes referenciais e quantidade de informação sobre os estímulos podem interpretar o mesmo mapa de maneiras diferentes.

Um outro risco associado à interpretação intuitiva reside no fato de que os humanos tendem a encontrar padrões onde na verdade eles não existem, o que representa um sério potencial de análise equivocada dos resultados (KRUSKAL; WISH, 1978).

Finalmente, uma última desvantagem da interpretação intuitiva a mencionar é que, se o número de objetos é muito grande, o reconhecimento de padrões “o olho nu” pode se tornar uma tarefa muito complexa.

Existem, alternativamente, técnicas estatísticas que vêm auxiliar o pesquisador na tarefa de interpretar as dimensões do espaço de objetos, a partir da existência de dados descritivos sobre os objetos. A seguir serão apresentadas duas delas:

- a) Através de regressão linear;
- b) Através de análise de agrupamentos.

4.8.1 Interpretação através de regressão linear

Suponhamos, ainda no exemplo dos países, que o pesquisador possua uma grande tabela com informações diversas sobre cada país. Essas informações podem ser de

qualquer natureza, como população, porcentagem de população empregada, etc., e serão chamadas a partir de agora de variáveis descritivas.

As técnicas de regressão podem ajudar o pesquisador a entender se existe um padrão de comportamento “escondido” no mapa associado a uma variável descritiva. O processo consiste em fazer uma regressão da variável dependente, que no caso é a variável descritiva, sobre as variáveis independentes constituídas das coordenadas dos objetos na configuração final de pontos do EMD.

Isto equivale a dizer estaremos buscando entender se existe alguma combinação ponderada das coordenadas dos objetos no espaço que explique fortemente as mudanças no valor da variável descritiva para cada país.

Matematicamente, estaremos aplicando a regressão $y = a + \sum_{i=1}^P b_i x_i$ onde y é a variável descritiva em questão e os x_i são as coordenadas dos pontos para cada dimensão entre 1 e P , obtendo como resultado os valores das constantes a e b_i , assim como o coeficiente r^2 que mede a qualidade do ajuste da regressão em particular.

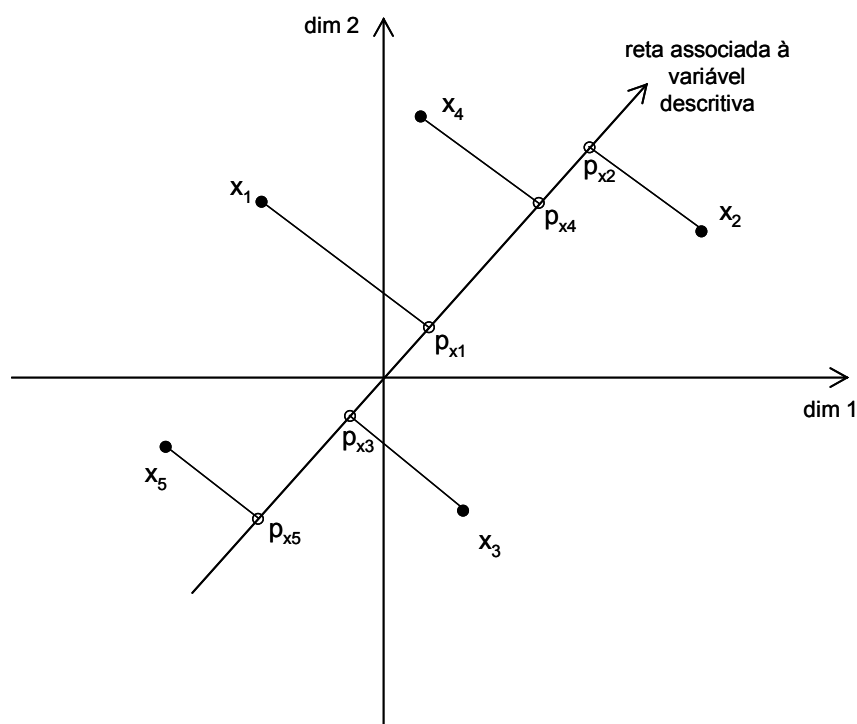
Existem métodos bem conhecidos para resolver problemas de regressão, e o método mais utilizado é o de mínimos quadrados. O que o método faz é minimizar a soma das diferenças entre y e $a + \sum_{i=1}^P b_i x_i$ associada a cada objeto, ou seja,

minimiza $\sum_{k=1}^n \left(y_k - a + \sum_{i=1}^P b_i x_{ki} \right)$, onde n é o número de pontos da configuração. Ao

minimizar a soma de quadrados, a regressão está determinando a direção de uma

reta, a qual maximiza a correlação entre os valores da variável descritiva (y_1, y_2, \dots, y_n) e as projeções dos pontos-objeto sobre ela $(p_{x_1}, p_{x_2}, \dots, p_{x_n})$:

FIGURA 4
Projeções dos pontos-objeto sobre a reta da regressão

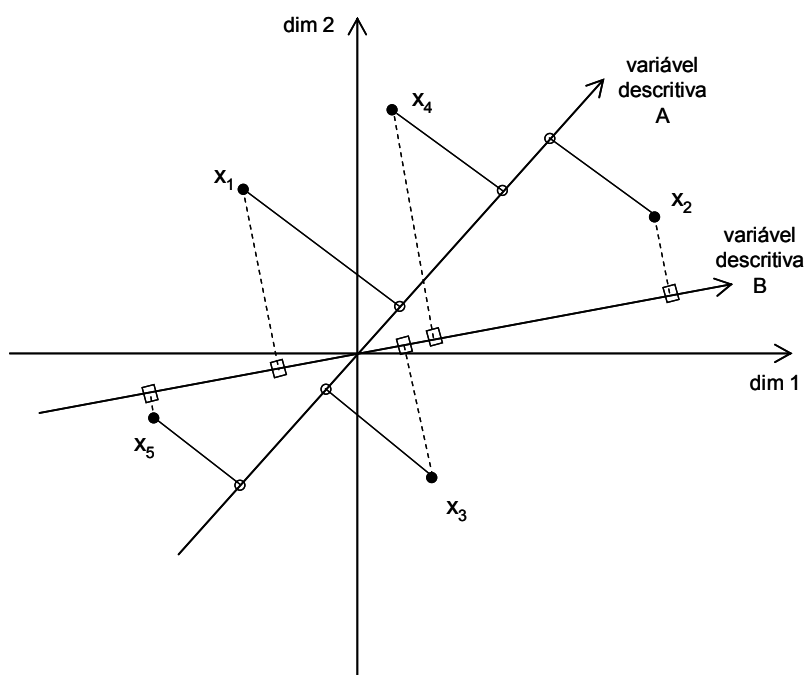


Fonte: Adaptado de Kruskal e Wish (1978, p. 88).

O cossenos dos ângulos formados pela reta ajustada pela regressão e cada um dos eixos do espaço é dado pelos coeficientes b_i . Dessa forma, em nossa tarefa de interpretação dos eixos, o que buscamos são altos valores de algum coeficiente b_i ¹¹, o que indicará que o ângulo entre o eixo i e a reta ajustada em função do comportamento da variável descritiva é bem pequeno, sendo ambos quase paralelos. Em outras palavras, o eixo i pode ser corretamente interpretado como uma aproximação da variável descritiva.

¹¹ Depois de normalizados para que a soma total de seus quadrados seja 1.

FIGURA 5
Direções ajustadas de duas variáveis descritivas



Fonte: Elaboração própria.

No exemplo acima, podemos dizer que a variável B é uma melhor candidata a interpretação da primeira dimensão que a variável A, pois o ângulo entre as retas e o eixo dim1 é menor para a linha ajustada a partir da variável B.

É muito importante lembrar, no entanto, que a qualidade do ajuste da reta através da regressão é tão melhor quanto melhor for a medida r^2 , e então se o valor de r^2 para a regressão da variável descritiva for baixo (em geral abaixo de 0,8), ela não pode ser considerada uma boa candidata a interpretação de nenhum eixo, mesmo que os coeficientes da regressão apontem pequenos ângulos entre a reta e algum dos eixos.

4.8.2 Interpretação através de análise de agrupamentos

O método de regressão linear investiga a ocorrência de relações lineares entre as variáveis descritivas e a configuração de pontos resultante do escalonamento multidimensional. No entanto, mesmo que as regressões não resultem em nenhuma boa interpretação dos eixos, pode ser que isto se deva ao fato de que a relação entre elas não seja de natureza linear, e não porque uma relação não exista.

Adicionalmente, segundo Kruskal e Wish (1978), os métodos que utilizam regressão costumam atribuir maior peso às grandes distâncias presentes na configuração e menor peso às pequenas distâncias. Dessa forma, o método não é muito potente em identificar padrões quando a maioria dos pontos se divide em poucas regiões de grande aglomeração de pontos.

Nesse caso, uma alternativa que se propõe é investigar a existência de sub-regiões no espaço onde a maioria dos objetos que se aglomeram nessa região têm um comportamento similar, comportamento este que difere bastante do comportamento de objetos que se encontram aglomerados em outras regiões do espaço.

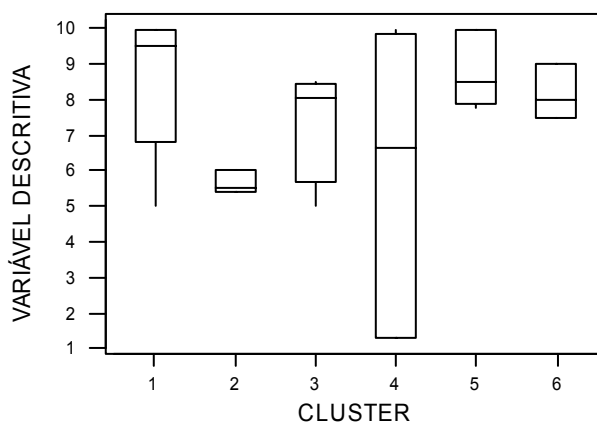
As técnicas de análise multivariada que tentam descobrir padrões de comportamento como estes são as de agrupamento. Na definição de Hair *et al.* (1998), técnicas de agrupamento são aquelas cujo objetivo principal é agrupar objetos segundo características que eles possuem. Sendo assim, os grupos de objetos resultantes da aplicação da técnica devem apresentar grande homogeneidade interna (objetos do mesmo grupo bastante similares), e grande heterogeneidade externa (objetos em grupos distintos bastante diferentes).

O emprego das técnicas de agrupamento após a aplicação de escalonamento multidimensional consiste então em considerar as coordenadas de cada objeto no espaço P -dimensional como as características desses pontos, segundo as quais os agrupamentos serão realizados.

A aplicação das técnicas de agrupamento gerará um certo número de subgrupos, onde cada qual contém os objetos que habitam uma região circunvizinha no espaço. A partir de então, uma análise das características dos subgrupos pode ser feita, tanto intuitivamente, como através da tabulação das médias que as variáveis descritivas assumem em cada subgrupo (valor médio que variável assume em função dos objetos que fazem parte do subgrupo).

Um instrumento de grande ajuda nesse processo de análise são os gráficos boxplots, que concentram, numa única representação gráfica, várias medidas de concentração e dispersão, como média, quartis e a eventual presença de dados discrepantes (*outliers*):

FIGURA 6
Exemplo de boxplot para subgrupos após análise de agrupamentos



Fonte: Elaboração própria.

No exemplo hipotético acima, pode-se notar como a variável descritiva assume valores distintos para alguns subgrupos formados, principalmente o subgrupo 2 (média mais baixa do que nos demais grupos, com pouca dispersão) e subgrupo 1 (média mais alta que nos demais grupos).

Um cuidado que deve ser tomado ao se utilizar este tipo de técnica, segundo Kruskal e Wish (1978), é que, principalmente em representações que usam um reduzido número de dimensões, a grande compactação pela qual os dados passaram durante o escalonamento multidimensional pode levar objetos a serem considerados “vizinhos” de maneira artificial. Nesse caso, uma maior segurança nas conclusões pode ser obtida ao se replicar o processo para dimensionalidades maiores e verificar se os objetos permanecem consistentemente nos mesmos grupos.

5 ANÁLISE PROCRUSTEANA

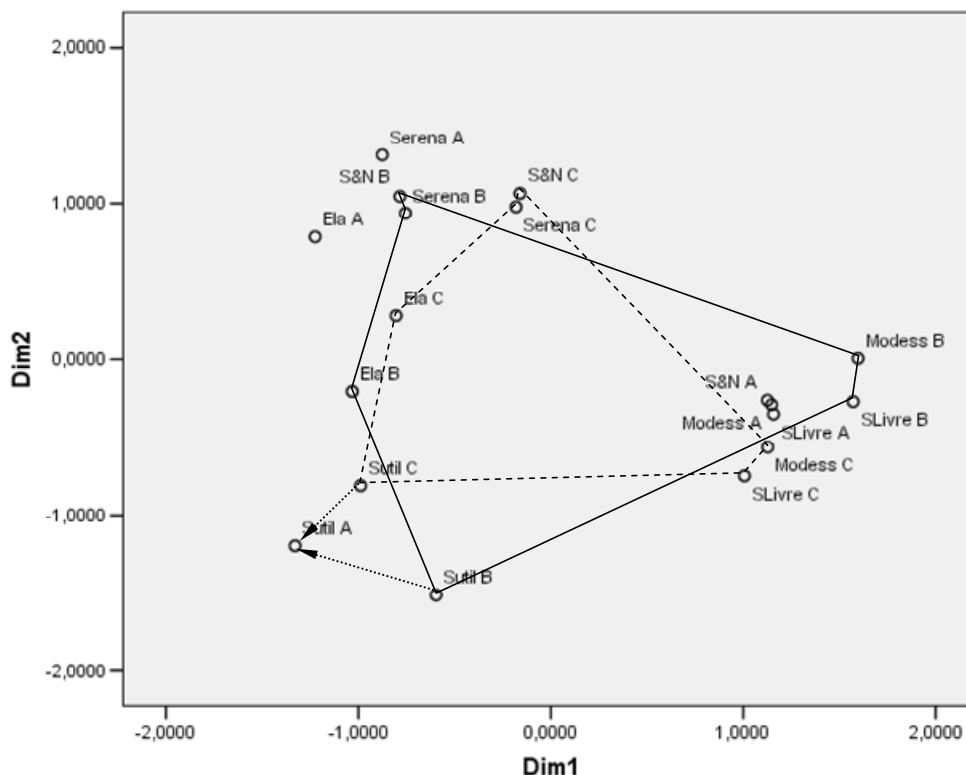
5.1 Um exemplo

Retornando ao nosso exemplo de absorventes, foram realizados independentemente os escalonamentos não-métricos para as respondentes A (ver p. 70) e B (ver p.83). Como já sinalizado anteriormente, a comparação direta dos dois mapas não é possível de ser feita, devido à indeterminação de cada uma das soluções em termos de rotação, reflexão e escala. Ou seja, uma marca pode se mostrar distante do seu ponto original simplesmente pela orientação escolhida para o segundo mapa, e não porque os consumidores mudaram sua percepção em relação a ela.

Para eliminar esta influência, uma alternativa possível é fornecida pela análise procrustiana, cujo objetivo é ajustar uma configuração de pontos a outra da melhor maneira possível, sem, no entanto, alterar a estrutura de distâncias entre os pontos da configuração ajustada.

O mapa a seguir apresenta o resultado da aplicação da análise procrustiana, estabelecendo a respondente A como configuração-objetivo e a respondente B como configuração a ser ajustada:

GRÁFICO 14
Análise procrustea para absorventes



$s = 0.798592090$

Fonte: Elaboração própria.

No gráfico estão indicadas com sufixo C as posições finais das marcas, segundo a participante B, após aplicação da análise procrustea. Note que a distância entre Sutil C e Sutil A é menor do que a distância entre Sutil B e Sutil A, como indicado pelas duas setas.

Adicionalmente, o polígono com linha cheia mostra a relação original de distâncias entre as marcas segundo a participante B, enquanto o polígono com linha pontilhada mostra a relação de distâncias para a mesma participante após aplicação de procrustes. O fato de que os dois polígonos possuem a mesma forma comprova que a relação de distâncias entre as marcas foi preservada pelo algoritmo.

A redução nas distâncias entre os pontos das duas configurações mencionada acima ocorre para a maioria das marcas, mas não todas (ex. Serena C está mais

distante de Serena A do que estava Serena B). Esse efeito é decorrente do fato de que as distâncias relativas entre os pontos antes e depois da aplicação da análise procrustea necessita ser mantida. Nesse caso, o algoritmo calculou que haveria maior ganho na redução da distância total aproximando a maioria delas das marcas A, ainda que a distância em relação à marca Serena A fosse piorada.

De fato, a redução da variância entre as distâncias médias pode ser verificada através da simples análise de variância:

TABELA 11
Análise de variância após aplicação de procrustes

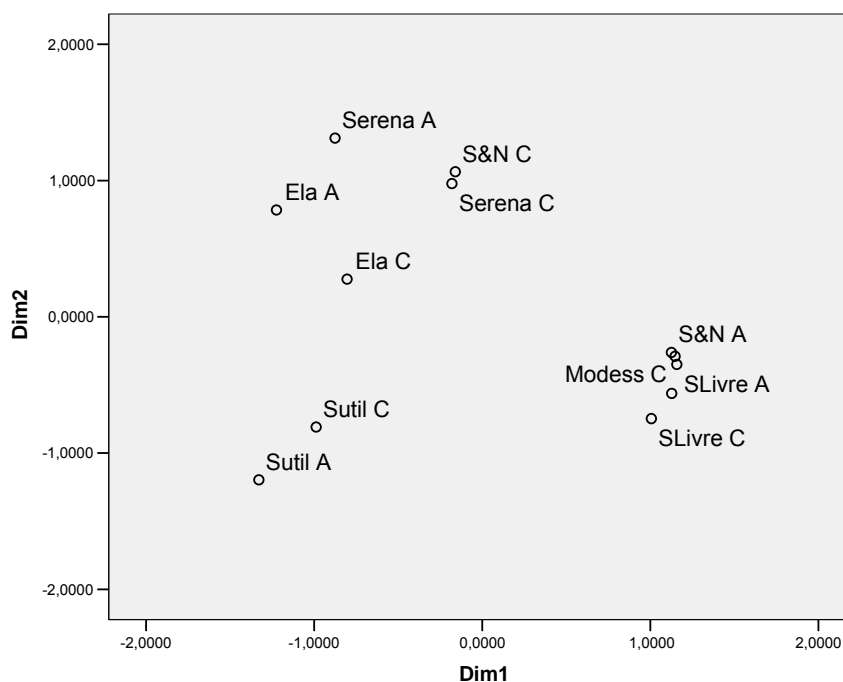
Fonte da variação	Modelo	Soma dos quadrados das distâncias	Média das distâncias (n=6)
Ajustado	$2s \operatorname{tr}(\Sigma)$	4,2556	0,7093
Residual	$\ s\mathbf{X}_B \mathbf{T} - \mathbf{X}_A\ $	1,1164	
Total	$s^2 \ \mathbf{X}_B\ + \ \mathbf{X}_A\ $	5,3720	0,8953

Fonte: Elaboração própria.

A tabela mostra que, nesse caso, 20,8% $\left(\frac{1,1164}{5,3720}\right)$ dos quadrados das distâncias entre os pontos referentes às configurações A e B pode ser atribuído à orientação particular dos mapas, e não a diferenças de percepção entre as duas participantes necessariamente.

A partir de então já se torna possível uma análise das diferenças em percepção entre as duas participantes. O gráfico abaixo é uma reprodução do gráfico anterior, sem as posições originais de B e sem as linhas indicativas, a fim de maior clareza:

GRÁFICO 15
Comparação dos mapas de absorventes das respondentes A e B



Fonte: Elaboração própria.

Como se pode notar, as duas participantes posicionam as marcas de absorventes em suas mentes de forma similar, com exceção de uma marca em particular, a marca Segura & Natural. A participante A percebe essa marca como similar a Sempre Livre e Modess, enquanto a participante B a percebe mais similar à marca Serena.

5.2 A solução

A seguir será apresentada uma descrição sucinta da técnica de análise procrustiana segundo Gower e Dijksterhuis (2004).

A análise procrustiana se trata de uma família de técnicas que podem ser utilizadas na comparação (e ajuste) de duas ou mais configurações de pontos no espaço – a qual será de utilidade no nosso estudo empírico (ver capítulo 7). O seu nome deriva da figura mitológica grega de Procrustes, filho de Poseidon, o qual possuía uma

estalagem para viajantes. Procrustes se gabava de que possuía uma cama especial, que se encaixava perfeitamente a qualquer viajante. A fim de manter sua promessa comprovada, Procrustes cortava extremos de hóspedes muito altos, e martelava e esticava hóspedes muito baixos. Por conseqüência, de fato seus hóspedes sempre se encaixavam perfeitamente na cama, mas infelizmente morriam. O nome da técnica foi inicialmente cunhado por Hurley e Cattell em 1962, fazendo referência ao fato de que a técnica possui “o poder brutal de fazer quase qualquer conjunto de dados se ajustar a qualquer hipótese”¹² (HURLEY; CATTELL, 1962 apud GOWER; DISJKSTERHUIS, 2004).

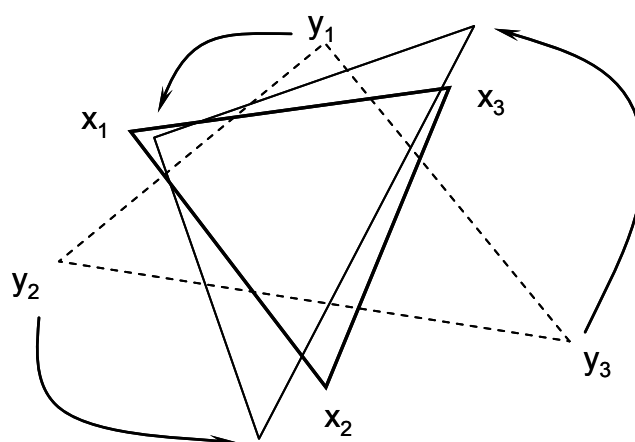
De forma semelhante, a análise procrustea tem por objetivo ajustar uma figura geométrica a outra, através de transformações sobre as configurações de pontos. As três transformações geralmente permitidas são:

- a) Translação, ou mudança da origem de coordenadas;
- b) Rotação, ou giro dos eixos no espaço, preservando-se ou não a angulação original entre eles;
- c) Re-escalamento, ou aumento/diminuição da proporção entre as diferentes configurações.

Um exemplo visual simples da aplicação da análise procrustea é dado a seguir:

¹² NT: tradução livre do autor

FIGURA 7
Análise procrustea sobre um par de triângulos



Fonte: Adaptado de Gower e Dijksterhuis (2004, p. 30).

Neste exemplo, o triângulo $x_1x_2x_3$ é fixo, e o sobre o triângulo pontilhado $y_1y_2y_3$ são aplicadas as transformações de translação, rotação e re-escalamento, resultando no triângulo de linha completa indicado pelas setas. Este novo triângulo representa a melhor aproximação do triângulo $y_1y_2y_3$ em relação ao triângulo $x_1x_2x_3$, sem afetar no entanto a estrutura do triângulo $y_1y_2y_3$, caracterizada pelos ângulos entre os seus lados.

A análise procrustea é o método mais popular na avaliação da similaridade entre configurações de pontos (BORG; LEUTNER, 1985), tarefa essa que engloba a comparação de configurações oriundas de escalonamento multidimensional. Como visto no capítulo 4.6 (ver p. 68), as configurações resultantes da aplicação do EMD não-métrico não possuem orientação fixa. A aplicação da análise procrustea possibilita então “enxergar” as diferenças de fato estruturais entre as configurações, pois, ao fazer o ajuste, elimina diferenças de orientação entre elas sem afetar as distâncias euclidianas entre os pontos da cada configuração, que é a principal propriedade obtida através da aplicação do EMD.

Matematicamente, a análise procrustea é um problema cujo objetivo é minimizar a norma (ou tamanho) da diferença entre uma configuração \mathbf{X}_1 , sobre a qual podem ser aplicadas as três transformações descritas anteriormente, e uma segunda configuração \mathbf{X}_2 fixa. Sejam então \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 matrizes $n \times P_1$ e $n \times P_2$ respectivamente que representam configurações de n pontos em espaços euclidianos de dimensões P_1 e P_2 . O problema de procrustes procura a matriz de transformação \mathbf{T} tal que $\|\mathbf{X}_1\mathbf{T} - \mathbf{X}_2\|$ seja mínimo¹³. Note que \mathbf{T} tem dimensão $P_1 \times P_2$.

Na verdade, o problema de procrustes assume diversas formas em função das restrições que se aplicam sobre a dimensionalidade das configurações de pontos e a natureza da matriz de transformação \mathbf{T} . Alguns exemplos:

- a) \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 com mesma dimensionalidade. Nesse caso, \mathbf{T} é uma matriz quadrada de ordem P ;
- b) \mathbf{T} ortogonal, onde os vetores que compõem a matriz são ortogonais (perpendiculares) entre si;
- c) \mathbf{T} ortonormal, onde os seus vetores são ortogonais entre si e de tamanho 1;
- d) \mathbf{T} como matriz de cossenos direcionais, em que não se exige que os vetores sejam ortogonais entre si. Essa forma do problema admite que os ângulos entre as dimensões da configuração transformada sejam diferentes dos ângulos antes da transformação.

Uma variante do problema de procrustes é a que admite tanto uma transformação sobre a primeira matriz de pontos, como a segunda. O objetivo passa a ser então

¹³ A norma de uma matriz é definida como a soma dos quadrados dos elementos da matriz. Ela pode ser calculada através da operação $\text{tr}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})$, onde $\text{tr}(\mathbf{X})$ é operação de soma dos elementos da diagonal da matriz \mathbf{X} .

encontrar duas matrizes \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2 tal que $\|\mathbf{X}_1\mathbf{T}_1 - \mathbf{X}_2\mathbf{T}_2\|$ seja mínimo. Note que neste caso o problema admite a solução trivial $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 = \mathbf{0}$, então restrições adicionais são impostas sobre o modelo.

Existe ainda a generalização do problema de procrustes, que envolve não somente duas matrizes de configurações de pontos, mas várias, e o objetivo é encontrar a coleção de K matrizes \mathbf{T}_i que minimizem $\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^i \|\mathbf{X}_i\mathbf{T}_i - \mathbf{X}_j\mathbf{T}_j\|$, ou seja, a soma das distâncias entre cada par de configurações.

No nosso estudo, estamos interessados numa das formas mais simples do problema, onde \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 possuem mesma dimensionalidade e \mathbf{T} é ortogonal, uma vez que o objetivo é ajustar duas configurações de n pontos em P dimensões resultantes da aplicação de EMD, sem afetar a ortogonalidade das dimensões originais. Nesse caso, uma solução analítica para o problema é bem conhecida.

O objetivo é encontrar \mathbf{T} tal que $\|\mathbf{X}_1\mathbf{T} - \mathbf{X}_2\|$ seja mínimo. Temos que:

$$\|\mathbf{X}_1\mathbf{T} - \mathbf{X}_2\| = \text{tr}(\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_2) - 2\text{tr}(\mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_1\mathbf{T})$$

Como a primeira parte da expressão não depende de \mathbf{T} , o problema se resume a encontrar \mathbf{T} que maximize $\text{tr}(\mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_1\mathbf{T})$. A solução é obtida utilizando-se a decomposição em valores singulares $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$ de $\mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_1$:

$$\text{tr}(\mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_1\mathbf{T}) = \text{tr}(\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T\mathbf{T}) = \text{tr}(\Sigma\mathbf{V}^T\mathbf{T}\mathbf{U}) = \text{tr}(\Sigma\mathbf{H}), \text{ onde } \mathbf{H} = \mathbf{V}^T\mathbf{T}\mathbf{U}$$

Pelas propriedades da decomposição em valores singulares, \mathbf{V}^T e \mathbf{U} são ortogonais. E como por restrição, \mathbf{T} é ortogonal, então \mathbf{H} também é ortogonal.

Sendo $\text{tr}(\Sigma \mathbf{H}) = \sum_{i=1}^p h_{ii} \sigma_i$, e como cada σ_i é não-negativo, o valor máximo da expressão é atingido quando cada $h_{ii} = 1$. Isso significa dizer que $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ e, portanto, $\mathbf{I} = \mathbf{V}^T \mathbf{T} \mathbf{U}$. Desse modo, a solução que buscamos é $\mathbf{T} = \mathbf{V} \mathbf{U}^T$.

A matriz \mathbf{T} obtida é responsável pela rotação de \mathbf{X}_1 , mas o melhor ajuste ainda pode depender de um fator de escala. Nesse caso, queremos encontrar um fator s que minimize $\|s \mathbf{X}_1 \mathbf{T} - \mathbf{X}_2\|$. O cálculo de \mathbf{T} é inalterado, e o valor de s é dado por:

$$s = \frac{\text{tr}(\mathbf{X}_2^T \mathbf{X}_1 \mathbf{T})}{\text{tr}(\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1)} = \frac{\text{tr} \Sigma}{\|\mathbf{X}_1\|}$$

Fica dessa forma determinado o processo para encontrar o melhor ajuste da configuração de pontos \mathbf{X}_1 à configuração \mathbf{X}_2 :

1. Calcular $\mathbf{X}_2^T \mathbf{X}_1$;
2. Encontrar sua decomposição em valores singulares $\mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T$;
3. Calcular $\mathbf{T} = \mathbf{V} \mathbf{U}^T$;
4. Definir $s = \frac{\text{tr} \Sigma}{\|\mathbf{X}_1\|}$;
5. Calcular $\mathbf{X}_1' = s \mathbf{X}_1 \mathbf{T}$.

Um último comentário sobre a aplicação de análise procrustea se faz necessário nesse momento.

Como visto no capítulo 4.8 (ver p. 93), as dimensões resultantes da aplicação do escalonamento não-métrico não possuem necessariamente um significado

substantivo. Representando nada mais do que uma medida métrica de separação entre cada ponto, as dimensões de ambos os mapas são consideradas compatíveis, ou seja, seguem o mesmo tipo de escala (GOWER; DIJKSTERHUIS, 2004).

O único cuidado que deve ser tomado é que, caso as dimensões na configuração de pontos original tenham sido interpretadas, essa interpretação não é mais válida para a configuração ajustada, pois os eixos foram rotacionados.

6 MAPEAMENTO DE PREFERÊNCIAS

Até o presente momento estudamos o tratamento de dados do tipo QIV, focando em dados de similaridade entre objetos. A partir de agora passamos a trabalhar com dados do tipo QI, analisando níveis de preferência atribuídos por diferentes indivíduos a diferentes objetos.

Existem dois tipos principais de abordagem a fim de se fazer o mapeamento de preferências (BORG; GROENEN, 1997):

- a) Mapeamento interno;
- b) Mapeamento externo.

Ambas as abordagens partem do pressuposto que foi obtida uma matriz de preferências $Q_{m \times n}$, onde m é o número de indivíduos e n é o número de objetos, e cada entrada da matriz q_{ij} denota o nível de preferência do indivíduo i pelo objeto j .

Como no caso do escalonamento multidimensional, essas preferências podem ser tratadas de duas formas:

- a) Através de modelos métricos, onde as relações métricas entre os diferentes níveis de preferência devem ser respeitadas (o quanto a preferência q_{ij} é maior ou menor do que a preferência q_{ik});
- b) Através de modelos não-métricos, onde o modelo somente precisa preservar a ordenação das preferências, independente da magnitude das diferenças entre elas.

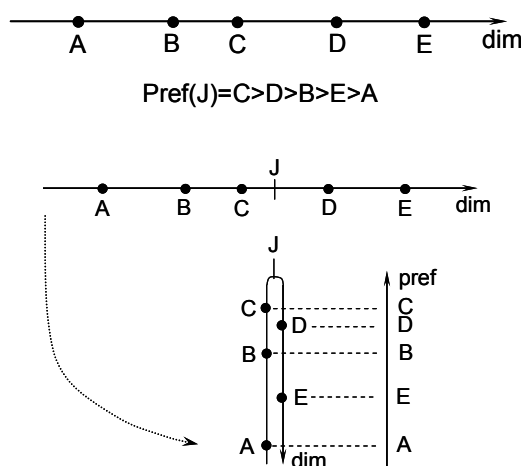
6.1 Mapeamento interno de preferências

O mapeamento interno de preferências está intimamente relacionado com o conceito de “desdobramento” (*unfolding*) de Coombs (1964).

A origem desse nome se mostra no seguinte princípio: suponhamos uma escala onde se encontram diversas marcas (A, B, C, D e E) ordenadas de acordo com a intensidade que possuem de uma característica qualquer, por exemplo, modernidade. Suponhamos também que medimos separadamente o nível de preferência de um indivíduo específico J pelas mesmas marcas, obtendo uma segunda ordenação das marcas, dessa vez segundo o quanto cada uma atrai preferências do indivíduo J. Por exemplo, $\text{pref}(J) \sim C > D > B > E > A$.

Freqüentemente a ordenação das marcas nestas duas variáveis não coincide. A técnica de desdobramento consiste, então, em localizar na escala da característica modernidade o ponto J onde o dobramento da escala faz com que a ordem em que as marcas aparecem na escala dobrada siga exatamente a ordem de preferência do indivíduo J:

FIGURA 8
Conceito de desdobramento de Coombs

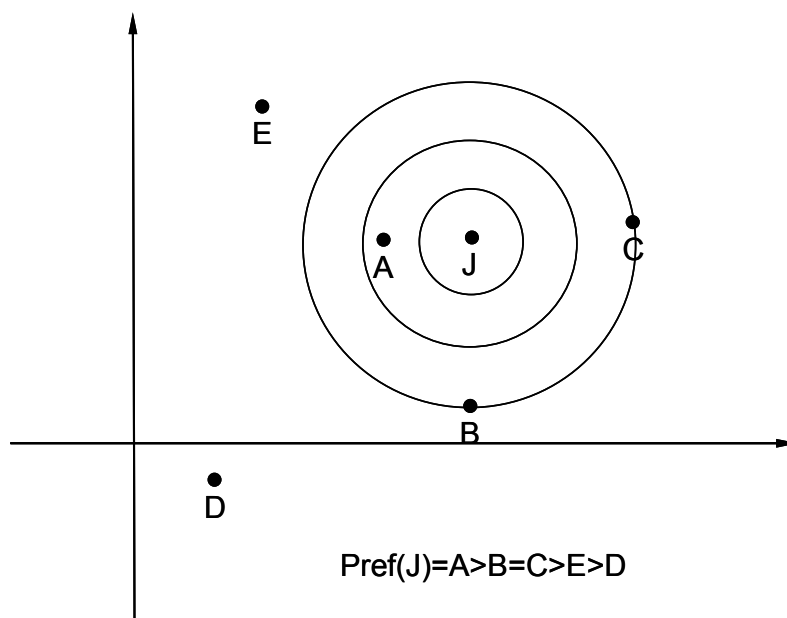


Fonte: Adaptado de Cox e Cox (2000, p. 166).

É importante notar então que, quanto mais próximo do ponto J a marca se encontra na escala de modernidade, seja para a direita ou para a esquerda, maior a preferência do indivíduo J pela marca.

Essa técnica recebe o nome de “ponto ideal”, pois o ponto onde o indivíduo é localizado teoricamente indica o ponto onde a preferência do sujeito por um objeto hipotético seria máxima. Em outras palavras, ali estaria localizado o seu “produto ideal”. A partir daí, quanto mais distante a marca se encontra do ponto, menor a preferência do indivíduo por ela. Isto equivale a dizer que existem círculos de iso-preferência ao redor desse ponto, onde pontos sobre o mesmo círculo têm preferência similar (BORG; GROENEN, 1997), como pode ser visto na figura a seguir:

FIGURA 9
Linhas de iso-preferência ao redor do indivíduo J



Fonte: Adaptado de Borg e Groenen (1997, p. 234).

A complexidade do problema cresce muito quando é necessário determinar a localização do único ponto J em P dimensões, sendo que em todas essas

dimensões o ordenamento das marcas após o dobramento da escala deve respeitar as preferências do indivíduo J pelas marcas.

Outra dificuldade inerente à técnica de desdobramento é que podem existir ordenações de preferências que não se acomodam na escala original de maneira nenhuma. Por exemplo, a ordem de preferências $E > A > D > C > B$ nunca pode ser obtida através de um dobramento da escala mostrada na figura anterior, pois qualquer ponto J próximo de E que se escolha (pois E é a marca com maior preferência), deixaria A mais distante de J do que B, C e D, mas a preferência da A é maior que a dessas marcas.

O mapeamento interno de preferências consiste em posicionar, num mapa perceptual de P dimensões, tanto os pontos relativos aos objetos como os pontos relativos aos indivíduos (pontos ideais), a partir de uma matriz de dados de preferência indivíduos-objetos.

Como estamos lidando essencialmente com distâncias entre pontos, os modelos de EMD surgem naturalmente como uma possível abordagem para solucionar o problema. É importante notar, porém, que neste caso temos pontos de natureza distinta no mapa e na matriz de dados, e que os dados são oriundos de níveis de preferência ligando indivíduos a objetos (chamados de “proximidades-entre”), não existindo dados que liguem objetos a objetos, nem indivíduos a indivíduos (chamados de “proximidades-intra”). Isto equivale a dizer que estamos lidando com uma matriz de dados com muitos elementos faltantes, da seguinte forma:

FIGURA 10
Matriz típica de proximidades em desdobramento

		objetos		indivíduos	
		A B	N 1 2 3	M	
objetos	A	vazio			
	B				
indivíduos	1				
	2				
	3			vazio	
	...				
	M				

Fonte: Borg e Groenen (1997, p. 233).

Como visto no capítulo 4.6 (ver p. 68), existem modelos de EMD que podem lidar com matrizes com dados faltantes. Então a solução parece ser simples: construir a matriz de preferências indivíduos-objetos, tratá-la como uma matriz de dissimilaridades (quanto maior o valor da preferência de um indivíduo por uma marca, mais próximos queremos estes pontos no mapa) e aplicar a técnica de EMD apropriada, obtendo a configuração de pontos no espaço, onde alguns deles serão pontos-objeto, e outros pontos-indivíduo.

Infelizmente, estudos indicam que as soluções do mapeamento interno de preferências geram freqüentemente soluções degeneradas (padrões irreais na configuração de pontos) ou atingem pontos ótimos locais, não globais (BORG; GROENEN, 1997). Uma das razões para o surgimento de tais problemas é que o algoritmo tem a difícil tarefa de determinar uma configuração de pontos-objeto no espaço que indique o grau de semelhança entre os objetos, na ausência total de informação de similaridades entre objetos (as proximidades-intra).

Apesar de existirem vários procedimentos para atenuar esses problemas, somente usuários experientes se aventuram a utilizá-los. Dessa forma, não nos

aprofundaremos mais em modelos de preferência interna. Para maiores informações sobre essas técnicas, Borg e Groenen (1997) oferecem um tratamento detalhado do problema, e Mackey, Easley e Zinnes (1995) apresentam um modelo alternativo para solução do problema utilizando escalonamento multidimensional probabilístico.

6.2 Mapeamento externo de preferências

A principal diferença entre mapeamento interno e externo de preferências é que, no mapeamento externo, assume-se uma dada configuração de pontos-objeto no espaço, possivelmente oriunda de uma aplicação anterior de EMD sobre dados de similaridade entre os objetos. A tarefa passa a ser então somente de localizar no mapa fornecido os pontos ideais.

Segundo ressaltam Borg e Groenen (1997), isto pressupõe uma hipótese forte sobre o problema, a de que todos os indivíduos participantes do estudo percebem os objetos de forma similar, o que freqüentemente não é completamente verdadeiro.

Ainda assim, as técnicas de mapeamento externo são largamente utilizadas, dada sua simplicidade. No caso de existirem segmentos de indivíduos muito distintos em termos de percepção dos objetos (o que pode ser percebido através da matriz de pesos do escalonamento a três vias, por exemplo), uma alternativa é separar estes segmentos de indivíduos em grupos distintos, obter a configuração de pontos-objeto para cada segmento, e na seqüência aplicar a técnica de mapeamento externo de preferências a cada configuração de pontos-objeto obtida.

Existem dois modelos principais de mapeamento externo:

- a) Modelo vetorial;
- b) Modelo de ponto ideal.

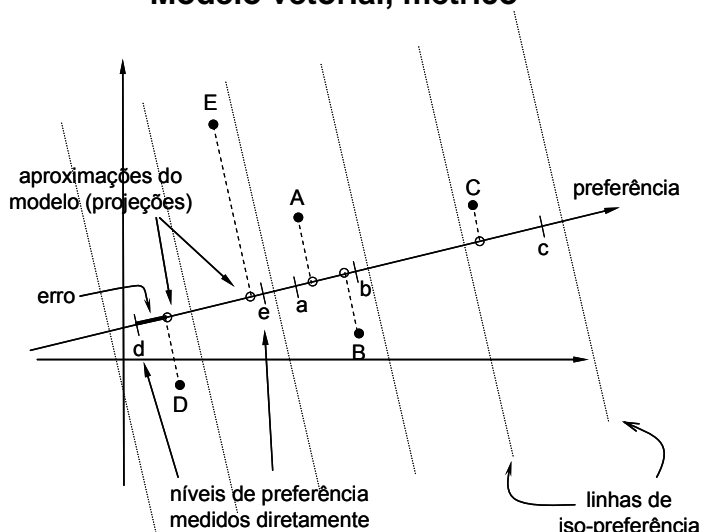
Ambos os modelos partem do pressuposto que foi anteriormente determinada uma configuração de n pontos-objeto no espaço P -dimensional $X_{n \times P}$ que representa o grau de similaridade entre os objetos.

6.2.1 Mapeamento externo, modelo vetorial

Este modelo tem o mesmo fundamento teórico apresentado no capítulo 4.8.1 (ver p. 95), onde tratamos da interpretação de dimensões nos mapas perceptuais. Nesse caso, define-se como variável descritiva, da qual queremos encontrar a direção de crescimento no mapa de pontos-objeto dado, a variável preferência propriamente.

No caso métrico, através de regressão linear, localiza-se no mapa a direção de crescimento de preferência, e as projeções de cada ponto-objeto sobre a reta determinada devem refletir os diferentes níveis de preferência do sujeito por cada objeto:

FIGURA 11
Modelo vetorial, métrico



Fonte: Adaptado de Schiffman, Reynolds e Young (1981, p. 256).

Matematicamente, para cada indivíduo do estudo, o modelo tenta encontrar os coeficientes b_i ($i = 0, 1, \dots, P$), soluções da regressão linear dos níveis de preferência de cada objeto sobre as coordenadas de cada ponto-objeto no espaço:

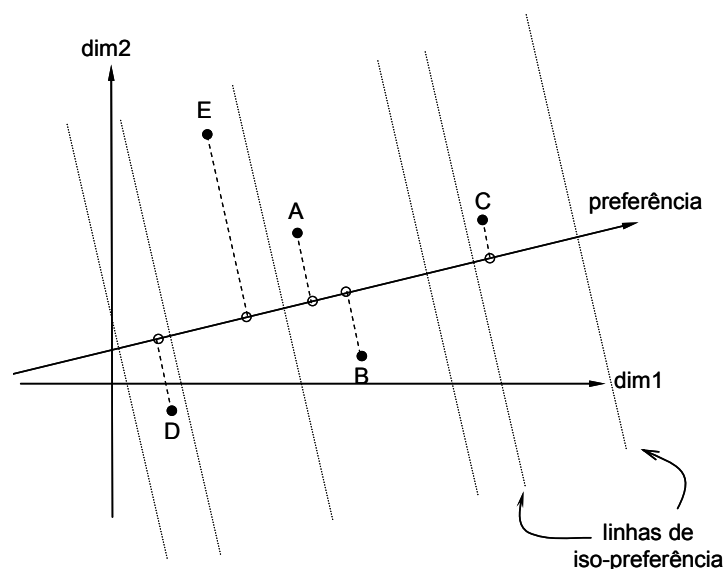
$$q_i \cong \hat{q}_i = b_0 + \sum_{k=1}^P b_k x_{ik}, \text{ onde:}$$

- a) q_i é a preferência do indivíduo pelo objeto i , sinalizadas na figura pelas letras minúsculas a, b, c, d, e;
- b) \hat{q}_i é a melhor aproximação para a preferência do indivíduo pelo objeto i obtida através da regressão linear, ou equivalentemente, a projeção do ponto-objeto sobre a reta de preferência, sinalizadas pelos círculos vazados;
- c) x_{ik} é a coordenada do objeto i na dimensão k .

Note-se que, para um único indivíduo, existem n equações de regressão como tal, uma para cada objeto do mapa, mas todas com os mesmos valores b_i . Se o número de dimensões é menor que o número de objetos, a solução pode ser encontrada resolvendo-se o sistema de n equações lineares com $P + 1$ incógnitas.

No caso do modelo vetorial não-métrico, em vez de regressão linear, utiliza-se a variante chamada de “regressão linear optimal”. O fato de que é necessário respeitar apenas a ordenação das preferências faz com que as linhas de iso-preferência deixem de ser igualmente espaçadas entre si, como visto no caso métrico. O efeito é como se a direção de preferência determinada tivesse uma propriedade elástica, se esticando em alguns pontos, se escolhendo em outros (SOUZA, 1994):

FIGURA 12
Modelo vetorial, não-métrico



Fonte: Adaptado de Schiffman, Reynolds e Young (1981, p. 258).

Os modelos vetoriais, tanto o métrico, como o não-métrico, assumem que a preferência é uma variável crescente, e quanto mais um objeto “caminhar” na direção do vetor, maior nível de preferência o objeto conseguirá obter.

No exemplo acima, isso equivale a dizer que um objeto que aumente sua posição em relação às dimensões 1 e 2 deve sempre ganhar em preferências, mas aumentos na dimensão 1 trazem maiores ganhos em preferências do que aumentos na dimensão 2.

6.2.2 Mapeamento externo, modelo de ponto ideal

Existem casos, no entanto, onde aumentos numa dimensão nem sempre levam a aumentos na preferência. Por exemplo, se uma dimensão é o nível de doçura de uma bebida, provavelmente existe um ponto ótimo nessa dimensão para cada indivíduo, além do qual a bebida é considerada muito doce, e abaixo do qual é

considerada pouco doce. Para essas situações, o modelo vetorial não se mostra tão apropriado, e então é utilizado o modelo de ponto ideal.

A essência do modelo é a mesma já apresentada no capítulo 6.1 (ver p. 113), onde apresentamos a abordagem de mapeamento interno de preferências: encontrar um ponto que represente a preferência máxima do indivíduo no mapa, a partir da qual a preferência diminui em todas as direções. A diferença entre as duas abordagens reside no fato de que, no mapeamento interno, o modelo se propunha a determinar tanto a localização dos pontos-objeto como os pontos-indivíduo, resultando em problemas de degeneração, e nesse caso a configuração dos pontos-objeto é dada.

A solução para o problema do ponto ideal é obtida novamente através de regressões lineares, mas nesse caso à equação de regressão é adicionado um último termo,

que é a soma dos quadrados das coordenadas: $q_i \cong \hat{q}_i = b_0 + \sum_{k=1}^P b_k x_{ik} + c \sum_{k=1}^P x_{ik}^2$.

Dessa forma, enquanto o modelo vetorial é linear nas suas variáveis, o modelo de ponto ideal é quadrático (CARROLL; DeSARBO, 1985).

Solucionando-se a regressão múltipla e fazendo $b'_k = -\frac{b_k}{2c}$, para $k = 1, 2, \dots, P$,

obtemos as coordenadas do ponto ótimo para o indivíduo.

O sinal de c tem um significado substantivo. Se $c < 0$, o ponto ótimo é ideal, o que significa que quanto mais próximo dele, maior a preferência associada aos objetos. No entanto, se $c > 0$, o ponto ótimo é *anti-ideal*, no sentido de que ele representa o ponto de preferência mínima, e não máxima. Nesse caso, quanto mais distante do

ponto, maior a preferência associada aos objetos, ou seja, a preferência cresce em todas as direções a partir do ponto anti-ideal.

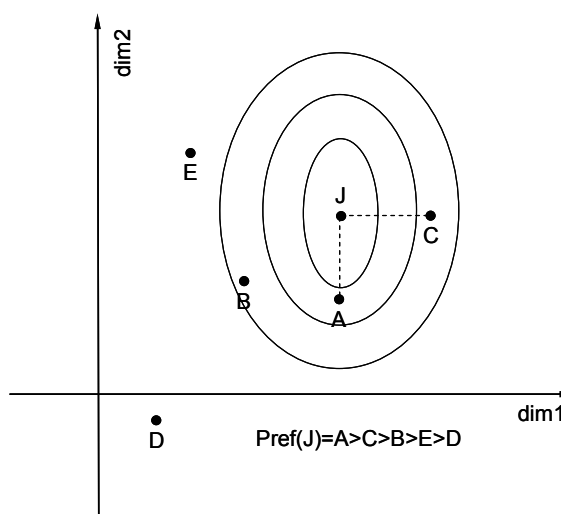
O modelo não-métrico do ponto ideal, assim como o modelo vetorial não-métrico, também é obtido através da regressão linear optimal.

Variações do modelo de ponto ideal

Uma característica do modelo de ponto ideal, como apresentada na FIGURA 9 (ver p. 114), é que a preferência do indivíduo decai em todas as direções a partir do ponto ideal, de forma proporcional – os círculos de isopreferência. No entanto, não é incomum encontrar casos onde a preferência de um indivíduo decai a diferentes proporções conforme a dimensão. Por exemplo, a preferência por sabonetes pode decair mais acentuadamente se é percebido com menor poder de hidratação do que se é percebido com menor qualidade do perfume. A fim de modelar esse aspecto, foram criadas variantes do modelo de ponto ideal que flexibilizam esse pressuposto de iso-preferência circular.

O primeiro deles é o modelo de ponto ideal elíptico:

FIGURA 13
Modelo de ponto ideal elíptico



Fonte: Adaptado de Schiffman, Reynolds e Young (1981, p. 263).

Como pode ser visto pela figura, apesar das distâncias do ponto ótimo do indivíduo J até os pontos-objeto A e C serem iguais, a preferência por A é maior que a preferência por C (A está no segundo intervalo de iso-preferência, e C está no terceiro). Isto se deve ao fato de que, para este indivíduo, a dimensão 1 contribui mais para preferência do que a dimensão 2: para deslocamentos semelhantes nas dimensões 1 e 2, a preferência cai com mais rapidamente quando o deslocamento é feito sobre a dimensão 1.

A solução matemática para esta variante é obtida através da inclusão de pesos nos termos quadráticos da regressão, um peso para cada dimensão do espaço de objetos, e não somente um peso c para o termo como um todo, como acontece no modelo circular. A solução então é dada resolvendo-se a regressão linear múltipla

$$q_i \cong \hat{q}_i = b_0 + \sum_{k=1}^P b_k x_{ik} + \sum_{k=1}^P c_k x_{ik}^2.$$

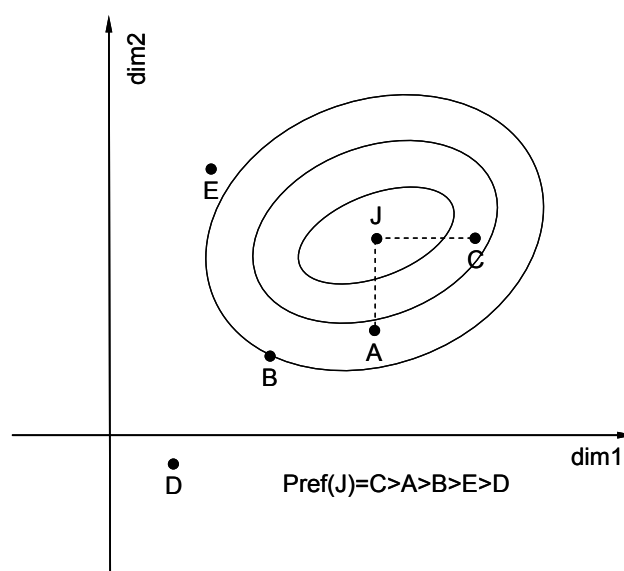
Note-se que, neste caso, o número de parâmetros a serem determinados cresce para $2P+1$, exigindo, portanto, um maior número de dados para a solução do

problema. Da mesma forma que na solução circular, os sinais dos coeficientes quadráticos definem se o ponto é ideal ou anti-ideal:

- a) Se todos os P coeficientes c_1, c_2, \dots, c_P são negativos, o ponto é ideal;
- b) Se todos os P coeficientes c_1, c_2, \dots, c_P são positivos, o ponto é anti-ideal;
- c) No caso de alguns coeficientes serem negativos, e outros positivos, o ponto configura um 'ponto de sela'. Nesse caso, ele não indica nem a preferência máxima, nem a mínima, pois a preferência cresce em determinadas direções a partir do ponto, e decresce a partir do ponto em outras direções. O ponto indica apenas uma região no espaço onde as preferências são menos sensíveis a variações.

Existe ainda uma segunda variante do modelo de ponto-ideal, a qual relaxa a condição de que as elipses sejam perpendiculares aos eixos das dimensões:

FIGURA 14
Modelo de ponto ideal quadrático



Fonte: Adaptado de Schiffman, Reynolds e Young (1981, p. 263).

Nesse caso, chamado de modelo de ponto ideal quadrático, além das dimensões contribuírem com pesos diferentes para a preferência, os eixos das elipses podem ser rotacionados. Isto equivale a dizer que, na modelagem da preferência, as coordenadas são multiplicadas também por um fator associado ao ângulo que os eixos da elipse formam com as várias dimensões.

A solução matemática desta variante é obtida através da inclusão de termos de

interação na regressão linear múltipla: $q_i \cong \hat{q}_i = b_0 + \sum_{k=1}^P b_k x_{ik} + \sum_{k=1}^P c_k x_{ik}^2 + \sum_{k=1}^{P-1} \sum_{j=k+1}^P d_{kj} x_{ik} x_{ij}$.

Apesar dessas duas variantes do modelo de ponto ideal serem mais flexíveis na modelagem, teoricamente se ajustando melhor ao comportamento irregular das preferências dos indivíduos, a sua interpretação visual é mais complicada, pois a distância euclidiana simples entre os pontos ideais e objetos não mais representa bem o nível de preferência dos indivíduos pelos objetos.

6.3 PREFMAP

Um programa de computador freqüentemente utilizado em mapeamento externo de preferências é o PREFMAP. Ele foi desenvolvido a partir do trabalho teórico de Carroll (1972) e das habilidades de programação de Chang (YOUNG; HAMER, 1987).

Dada uma configuração de pontos-objeto no espaço, independente de como ela tenha sido obtida (através de EMD ou não), e a preferência dos sujeitos entre os objetos, o PREFMAP localiza os vetores de preferência e/ou pontos ideais de cada sujeito no espaço.

O *software* contempla quatro fases, em que são realizados, na seqüência:

- a) Modelo ponto-ideal quadrático (fase I);
- b) Modelo ponto-ideal elipsóide (fase II);
- c) Modelo ponto-ideal circular (fase III);
- d) Modelo vetorial (fase IV).

A análise da saída do programa permite identificar, através de testes de significância, quais dos quatro modelos são mais adequados para representar a preferência de cada indivíduo participante do estudo.

O programa também calcula o ponto ideal médio de todos os participantes do estudo, que pode ser interpretado como o ponto em que a preferência global seria máxima, levando-se em conta as diferenças em preferências existentes entre os participantes do estudo.

7 MÉTODO EMPÍRICO

A fim de examinar as relações entre distâncias ao ponto ideal e participação de mercado ao longo do tempo, foram obtidos junto a duas empresas, uma prestadora de serviços de comunicação, e outra fabricante de produtos de consumo doméstico, dados de estudos de imagem de marca e participação de mercado para dois momentos no tempo. Os dados foram gentilmente cedidos por estas empresas, sob condições de sigilo do nome destas empresas, do mercado analisado e das marcas envolvidas no estudo.

Serviço de Comunicação

Os dados de imagem de marca são oriundos de um estudo realizado anualmente junto a usuários do serviço em questão (entrevistas pessoais). São de natureza descritiva evolutiva, realizadas através de levantamento de campo (MATTAR, 1993).

O método de amostragem é probabilístico, com amostras independentes em cada período. Na onda de 2004 foi realizado um total de 16.599 entrevistas, e na onda de 2005, 17.114 entrevistas.

A abrangência do estudo é nacional, cobrindo quase a totalidade das áreas urbanas do país. No entanto, este mercado apresenta grandes diferenças regionais, com nem todas as marcas atuando em todas as regiões, como pode ser visto através da tabela a seguir:

TABELA 12
Atuação das marcas de serviço de comunicação por região

Marca	Regiões							
	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8
A	√	√	√	√	√	√	√	√
B	√	√	√	√	√	√		√
C	√	√	√	√	√	√	√	√
D			√				√	
E							√	

Fonte: Elaboração própria.

Os dados de similaridade entre marcas utilizados para a construção dos mapas perceptuais foram obtidos através da aplicação de uma matriz de associação marcas vs. atributos, da seguinte forma: a cada participante foi entregue uma lista das marcas atuantes na região. Em seguida, foram apresentados, um por vez, 17 atributos de imagem de marca, e ao participante era solicitado que indicasse, entre todas as marcas da lista, quais possuíam tal característica. Ao participante era permitido indicar uma só marca, várias marcas, ou mesmo nenhuma, se entendesse que nenhuma delas possuía tal característica. A ordem em que os 17 atributos eram apresentados aos participantes era rodiziada, a fim de evitar vieses associados à ordem de apresentação dos mesmos.

A lista de marcas era a mesma entre as ondas 2004 e 2005, e a lista de atributos diferia em somente um atributo, que teve sua redação ligeiramente modificada, mas ainda media uma característica de natureza semelhante. Por esse motivo, essa discrepância foi ignorada no tratamento dos dados.

Sendo assim, as respostas de cada participante geravam uma matriz binária Z (valores 1 ou 0) de tamanho 5x17, com atributos nas colunas e marcas nas linhas, onde $z_{ij} = 1$ indicava que, segundo o participante em questão, a marca i possuía a

característica j , e $z_{ij} = 0$ indicava que a marca i , no seu entender, não possuía a característica j .

Para cada participante foi calculado, então, o grau de semelhança entre as marcas, a partir das características possuídas ou não por elas. Nessa tarefa foi empregada a fórmula de Czekanowski, Sørensen, Dice (já apresentada no capítulo 3.1, ver p. 39). Segundo esta fórmula, a semelhança δ_{ij} entre duas marcas i e j é dada por

$$\delta_{ij} = \frac{2a}{2a + b + c}, \text{ onde:}$$

- a) a é o número de pares concordantes positivos 1-1, ou seja, contagem dos atributos onde tanto a marca i como a marca j possuem tal característica

$$\left(\sum_{z_{ik}=z_{jk}=1} z_{ik} \right);$$

- b) b é o número de pares discordantes 1-0, ou seja, contagem dos atributos onde a marca i possui a característica, mas a marca j não $\left(\sum_{z_{ik}=1 \text{ e } z_{jk}=0} z_{ik} \right);$

- c) c é o número de pares discordantes 0-1, ou seja, contagem dos atributos onde a marca i não possui a característica, mas a marca j sim $\left(\sum_{z_{ik}=0 \text{ e } z_{jk}=1} z_{jk} \right).$

O valor de δ_{ij} varia entre 0 e 1, assumindo valor 0 quando não há nenhum par concordante positivo, e valor 1 quando todos os pares são concordantes positivos. A escolha da fórmula de Czekanowski, Sørensen, Dice, que é o coeficiente de Jacquard modificado para dar maior peso às características concordantes positivas, foi feita em função das matrizes individuais serem relativamente esparsas, caso em

que o coeficiente de Jacquard resultaria em dados de similaridade muito baixos e, portanto, pouco discriminantes.

A partir das semelhanças entre marcas calculadas para cada indivíduo foram calculadas as médias das semelhanças entre marcas por região. Estes valores foram então utilizados como entrada do escalonamento multidimensional a três vias e dois modos (marcas x marcas x regiões), realizado através do algoritmo ALSCAL presente no pacote estatístico SPSS, opção INDSCAL ordinal.

O escalonamento a três vias foi selecionado a fim de levar em consideração, na construção do mapa, as diferenças de padrões de semelhança entre marcas existentes entre as diversas regiões. A opção ordinal foi escolhida, apesar da medida de semelhança de Czekanowski, Sørensen, Dice ser métrica, em virtude da existência de dados faltantes na matriz (marcas não atuantes em determinadas regiões). A solução adotada é a que envolve duas dimensões, pois o reduzido número de marcas não permite que seja construído o mapa com um número maior de dimensões (a construção de um mapa com 5 marcas e 3 dimensões exige pelo menos 15 dados de similaridade entre marcas, e no caso só estão disponíveis

$$\frac{5*4}{2} = 10 \text{ dados de similaridade}).$$

O mesmo procedimento descrito acima foi aplicado para as massas de dados de 2004 e 2005, obtendo-se dois mapas perceptuais, um para cada ano. Em seguida, o mapa de 2005 foi ajustado ao mapa de 2004 através da aplicação de procrustes, eliminando possíveis alterações nas posições das marcas que pudessem ser atribuídas à particular orientação escolhida pelo algoritmo ALSCAL para o mapa de

2005. A aplicação de procrustes foi realizada através da rotina PROCRUST, distribuída em CD com a obra de Cox e Cox (2001).

Para a determinação dos pontos ideais seriam necessários dados de preferência entre marcas. No entanto, a pesquisa realizada não levanta esta informação de forma direta. Por outro lado, estão disponíveis dados de importância de atributos, que podem ser usados para gerar indiretamente a preferência de cada participante por cada marca.

A cada participante dos mesmos estudos foi perguntado quais dos 17 atributos eram considerados os três mais importantes no momento de selecionar uma marca da categoria, por ordem de importância: P_i indica o atributo mais importante para o participante i , S_i indica o segundo mais importante e T_i indica o terceiro mais importante (P_i, S_i e T_i assumem valores entre 1 e 17, sem coincidências para um mesmo indivíduo).

A partir dessa informação foi gerado um índice de preferência de cada marca, através da seguinte fórmula:

$$P(m)_i = \frac{\sum_{j=1}^{17} z_{mj} + 8 * z_{mP_i} + 4 * z_{mS_i} + 2 * z_{mT_i}}{15}$$

Segundo esta fórmula, a importância da marca m para o indivíduo i é composta do número de atributos que a marca possui (como todos os atributos são qualidades positivas, quanto mais atributos possui, maior espera-se que seja a preferência do indivíduo pela marca) ajustado para o intervalo 0-1. Este número foi em seguida modificado através dos três atributos mais importantes na opinião do entrevistado,

somando-se um peso 8 se a marca possui o atributo que o participante considera o mais importante, peso 4 se a marca possui o atributo que considera o segundo mais importante e peso 2 se possui o terceiro atributo mais importante. Finalmente, a soma total foi dividida por 15 para que os índices de preferência flutuassem entre 0 e 1.

De posse das importâncias de cada marca para cada indivíduo, foram calculadas as médias de importância de cada marca para a amostra total. Essas médias, junto com as configurações de pontos oriundas das aplicações do EMD, formaram a entrada do algoritmo PREFMAP, presente no software estatístico XLSTAT, que localizou, em cada mapa de cada ano, o ponto ideal do mercado.

A partir das coordenadas de ponto ideal e de marcas, foram calculadas as distâncias euclidianas entre cada marca e o ponto ideal. Estas distâncias foram então comparadas às suas respectivas participações de mercado em cada ano, e às variações de participação de mercado observadas entre os dois períodos.

Também foram analisados os postos¹⁴ das marcas em relação às distâncias ao ponto ideal e participação de mercado, a fim de verificar se as duas ordenações seguem o mesmo padrão, ou existem discordâncias nesses postos (por exemplo, uma marca mais próxima do ponto ideal do que outra que apresenta maior participação de mercado do que ela).

Os dados de participação de mercado de cada marca, em cada ano, também foram fornecidas pela empresa, e são oriundas de dados publicados pelos órgãos oficiais reguladores do sistema de telecomunicações brasileiro (Anatel).

¹⁴ Posição ocupada por um objeto numa seqüência ordenada.

Produto de consumo doméstico

O mercado em questão é altamente sazonal, com aproximadamente 70% do volume anual sendo comprado entre os meses de novembro e fevereiro. A empresa realiza estudos de imagem de marca logo antes do início da temporada (novembro), e logo após o final da temporada (fevereiro). Os dados são levantados junto a usuários da categoria (entrevistas domiciliares), sendo a pesquisa de natureza descritiva evolutiva, realizada através de levantamento de campo (MATTAR, 1993).

A pesquisa é realizada numa única grande cidade do interior do estado de São Paulo, que é a área de maior consumo do produto no país. O método de amostragem é semi-probabilístico: bairros da cidade são sorteados, e dentro de cada bairro são realizadas 10 entrevistas. São utilizadas cotas de idade da dona de casa e classe social do domicílio, segundo o critério Brasil, a fim de manter a amostra final representativa da demografia da região. Nas duas ondas analisadas neste trabalho, de novembro 2004 e fevereiro 2005, foram realizadas 150 entrevistas. As duas amostras são independentes.

Semelhantemente ao ocorrido no mercado de serviço de comunicação, os dados de imagem de marca são levantados através da aplicação de uma matriz de associação marcas x atributos, nesse caso com 5 marcas e 11 atributos. Os dados de similaridade entre marcas foram gerados da mesma maneira para este mercado, dispensando maiores detalhamentos. O único ponto relevante a ressaltar é que, nesse mercado, as marcas D e E apresentavam muitas observações onde o participante não indicava nenhum atributo presente na marca (valor 0 para todos os atributos da marca). Esse evento foi causado provavelmente por pouco conhecimento da marca, uma vez que se tratam das marcas de mais baixa

participação de mercado. A fim de evitar distorções no mapa em função de baixo conhecimento, foram então consideradas somente as observações onde pelo menos uma característica era atribuída às marcas.

Os mapas perceptuais para este mercado foram realizados através de escalonamento multidimensional não-métrico a duas vias (marcas x marcas), utilizando-se algoritmo ALSCAL, opção ordinal, presente no pacote estatístico SPSS. Diferentemente do realizado para o mercado de serviços de comunicação, não foi necessário utilizar o algoritmo de três vias, uma vez que a região é considerada razoavelmente homogênea. Os mapas foram construídos sempre em duas dimensões, em virtude do número de marcas envolvidas no estudo ser reduzido.

O mapa de fevereiro de 2005 foi ajustado ao mapa de novembro de 2004 através da aplicação de procrustes.

Também para esse mercado os levantamentos não incluem dados de preferência direta entre as marcas. No entanto, existem três medidas de atratividade de marca que podem ser usadas para gerar dados de preferência:

- a) Esta marca possui algo especial, único e diferente das outras marcas;
- b) Esta marca combina comigo e satisfaz as minhas necessidades mais do que as outras;
- c) Esta é uma marca que sempre tem alta qualidade.

Estas três variáveis foram medidas numa escala Likert de concordância, com 10 pontos, com cada participante avaliando as 5 marcas de interesse do estudo uma por vez, independentemente.

Foi calculada então, para cada participante do estudo, a média aritmética das notas atribuídas a cada marca nas três variáveis de atratividade, e esta média foi considerada o grau de preferência do participante por cada uma das marcas. A média aritmética dessas preferências individuais foi considerada a preferência total de cada marca.

De maneira semelhante à realizada para o primeiro mercado, as coordenadas dos pontos e os dados de preferência foram usados como entrada do PREFMAP, segundo implementado em XLSTAT, para calcular os pontos ideais de cada mapa, e em seguida foram analisadas as correlações entre distâncias ao ponto ideal e participação de mercado, assim como a análise de postos.

Os dados de participação de mercado foram fornecidos pela empresa, e são levantados pela empresa ACNielsen. Os dados pré-temporada incluem os meses de agosto, setembro, outubro e novembro de 2004, e os dados pós-temporada incluem os meses de dezembro 2004, janeiro, fevereiro e março de 2005.

8 RESULTADOS

8.1 Serviço de Comunicação

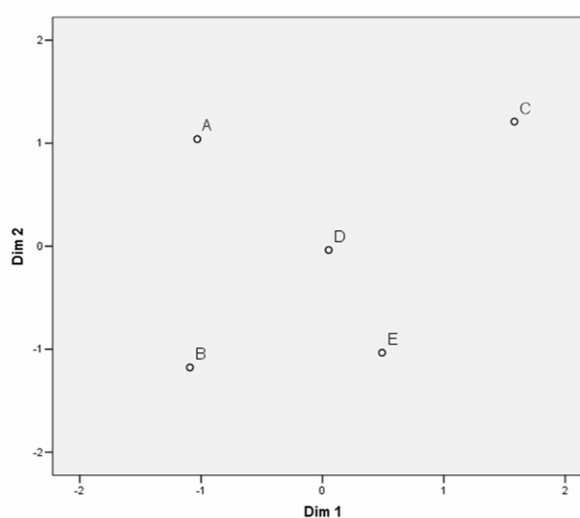
As medidas de similaridade entre marcas calculadas, por região, para o ano de 2004, e o mapa resultante, comum a todas as regiões, são apresentados abaixo:

TABELA 13
Medidas de similaridade entre marcas por região 2004

Similaridade		Região							
		R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8
A	B	,1134	,1852	,1906	,1086	,1494	,1415	.	,1047
	C	,1231	,1514	,1396	,1746	,0862	,1019	,1112	,2405
	D	.	.	,1594	.	.	.	,0846	,1546
	E	,1490	.
B	C	,1168	,1641	,1118	,0994	,0941	,1061	.	,1070
	D	.	.	,1317	,1732
	E
C	D	.	.	,1764	.	.	.	,1413	,1721
	E	,0777	.
D	E	,0671	.

Fonte: Elaboração própria.

GRÁFICO 16
Mapa perceptual serviços de comunicação 2004



Fonte: Elaboração própria.

Esta solução para o mapa perceptual foi alcançada após 13 iterações do algoritmo INDSCAL, e a parada ocorreu porque a redução em stress da 12^a. para a 13^a. iteração foi inferior a 0,001. A solução final apresenta $stress=0,10366$, que em geral representa um ajuste mediano para bom das disparidades. O ajuste do mapa resultante para cada região em separado é bom, alcançando $stress\ médio=0,0214$. Apenas a região 3 apresenta um ajuste pior, com $stress=0,118$. A importância de cada dimensão na explicação das semelhanças entre as marcas surge bem equilibrada, com a dimensão 1 explicando 48% da variação, e a dimensão 2 explicando 49% da variação.

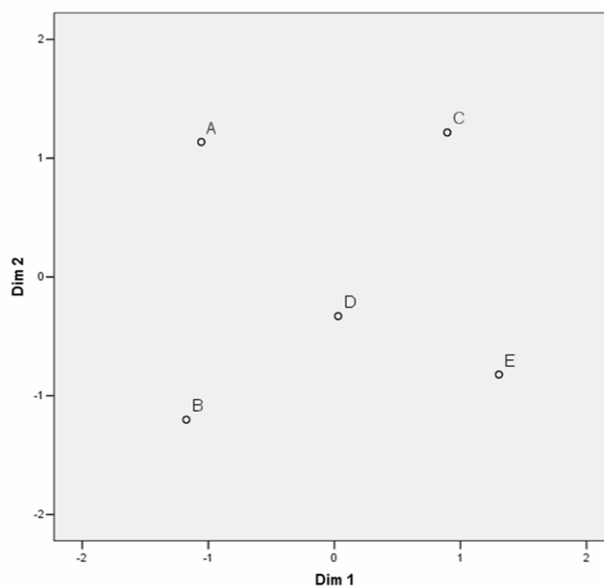
Da mesma forma, as similaridades calculadas entre marcas para 2005, por região, e o mapa perceptual resultante foram:

TABELA 14
Medidas de similaridade entre marcas por região 2005

Similaridade	Região								
	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	
A	B	,4176	,5020	,4065	,1439	,4477	,4939	.	,2282
	C	,4699	,4584	,3044	,2169	,2608	,3621	,1859	,3625
	D	.	.	,2945	.	.	.	,1293	,2724
	E	,2282	.
B	C	,4216	,4629	,2766	,1334	,2855	,3266	.	,2164
	D	.	.	,2856	,3085
	E
C	D	.	.	,3164	.	.	.	,1699	,2906
	E	,1445	.
D	E	,1046	.

Fonte: Elaboração própria.

GRÁFICO 17
Mapa perceptual serviços de comunicação 2005



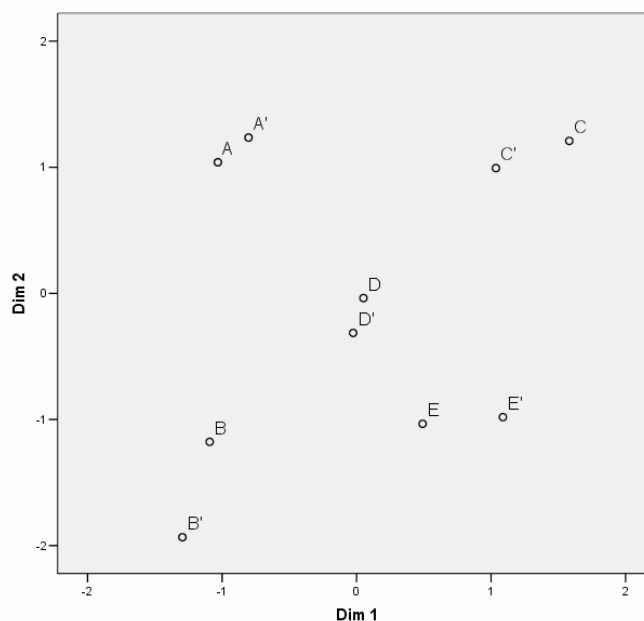
Fonte: Elaboração própria.

O algoritmo precisou de 23 iterações para chegar à essa solução final, obtendo um melhor ajuste do que foi conseguido no ano de 2004: $sstress=0,08099$. O stress médio, relativo às regiões, foi de 0,03795. A região 3 novamente apresenta o pior ajuste ($stress=0,076$), ainda que o nível de ajuste tenha melhorado consideravelmente em relação ao ajuste obtido através do mapa de 2004. Nesta solução, a dimensão 1 explica 51% da variação, e a segunda dimensão, 47%.

O ajuste do mapa perceptual de 2005 ao mapa de 2004 através de procrustes resulta no seguinte mapa perceptual conjunto:

GRÁFICO 18
Mapa perceptual serviços 2004, e 2005 após procrustes

A, B, C, D, E → 2004
A', B', C', D', E' → 2005



Fonte: Elaboração própria.

Os índices de preferência de cada marca foram calculados segundo a fórmula apresentada no capítulo anterior, resultando em:

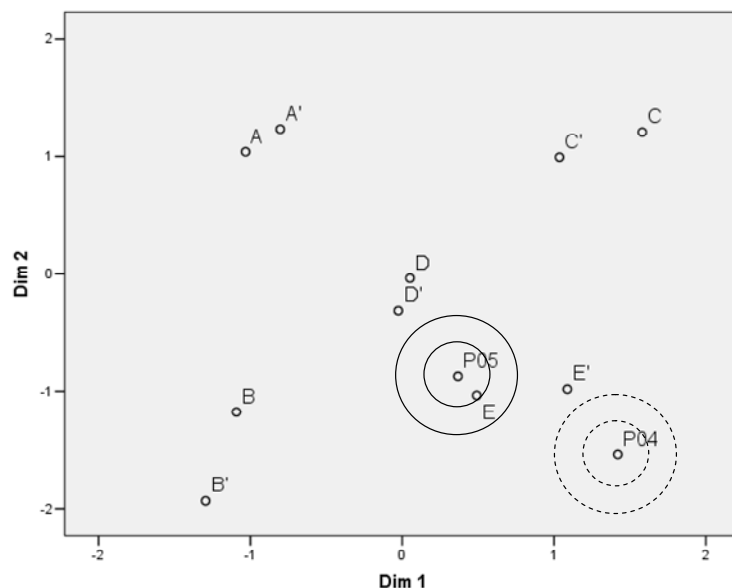
TABELA 15
Índices de preferência de marca serviços 2004 e 2005

Marca	2004	2005
A	0,449760	0,584188
B	0,274658	0,469541
C	0,313129	0,451321
D	0,232407	0,336443
E	0,330215	0,395706

Fonte: Elaboração própria.

O algoritmo PREFMAP localizou nos mapas perceptuais de 2004 e 2005, respectivamente, os seus pontos anti-ideais, que são os pontos a partir dos quais, quanto mais distante dele uma marca se encontra, maior a preferência por essa marca:

GRÁFICO 19
Mapa perceptual serviços com pontos anti-ideais



Fonte: Elaboração própria.

É interessante notar, pelo mapa perceptual conjunto acima, que enquanto as marcas sofreram em geral pouca variação na sua imagem junto aos consumidores entre 2004 e 2005, o ponto anti-ideal se moveu bastante na direção das marcas de maior participação no mercado (A, B e C). Isto sugere que a principal mudança ocorrendo no mercado em questão é do ponto de vista de importância dos atributos envolvidos na categoria, e não quanto às percepções das marcas.

As distâncias de cada marca aos pontos anti-ideais, e suas respectivas participações de mercado, estão presentes na tabela abaixo:

TABELA 16
Distâncias ao ponto e participações de mercado para serviço

Marcas	2004				2005				Variação	
	Dist.	Posto	Part.	Posto	Dist.	Posto	Part.	Posto	Dist.	Part.
A	3,557	1	0,509	1	2,411	1	0,444	1	-1,146	-0,065
B	2,538	3	0,225	2	1,972	3	0,237	2	-0,566	0,012
C	2,752	2	0,174	3	1,982	2	0,205	3	-0,769	0,031
D	2,031	4	0,057	4	0,684	4	0,062	4	-1,348	0,005
E	1,057	5	0,024	5	0,729	5	0,018	5	-0,328	-0,006

Fonte: Elaboração própria.

A partir da tabela acima, podemos estudar as correlações entre as distâncias ao ponto anti-ideal e as participações de mercado e suas variações no tempo. Os principais resultados estão descritos na tabela abaixo:

TABELA 17
Correlações entre distâncias e participação para serviço

Correlação entre	Valor
Distância 2004 e participação 2004	0,900094
Distância 2005 e participação 2005	0,930096
Distância 2004 e participação 2005	0,940031
Distância 2004 e variação na participação	-0,42198
Distância 2005 e variação na participação	-0,31824
Variação na distância e participação 2004	-0,33340
Variação na distância e participação 2005	-0,31075
Variação na distância e variação na participação	0,329345

Fonte: Elaboração própria.

Pode-se notar, pelos dados de correlação acima, que as distâncias das marcas ao ponto anti-ideal se correlacionam bem com a participação de mercado, e que esta correlação aumentou de 2004 para 2005 (de 0,90 para 0,93). Estes dados parecem suportar uma hipótese de que a distância ao ponto (anti-)ideal seja um bom indicador da participação de mercado da marca.

Um dado interessante a observar é que a distância ao ponto ideal em 2004 se mostra um pouco mais fortemente correlacionada com as participações de mercado de 2005 do que 2004. Este fato poderia gerar uma hipótese de que as distâncias ao ponto ideal sejam melhores indicadores de participação de mercado a longo prazo, do que de participação de mercado no momento da medição.

Por outro lado, examinando-se as correlações entre distâncias ao ponto anti-ideal e variação na participação de mercado entre 2004 e 2005, percebe-se que ambas as correlações (com distância 2004 e com distância 2005) são baixas, e no sentido inverso do esperado (-0,42 e -0,32). Este dado sugere que a distância ao ponto ideal de uma marca não configura um bom indicador das variações de participação dessa marca.

Os resultados examinados até o momento apresentam uma aparente contradição: as distâncias em relação ao ponto ideal parecem ser bons indicadores da participação de mercado, presente e futura, mas não são bons indicadores dos ganhos ou perdas futuras de participação.

As causas dessa aparente inconsistência estão em parte relacionadas ao fato de que a participação de mercado é uma medida de soma constante 1: sempre que uma marca ganha participação, outras marcas devem perder participação. Isso estabelece uma relação de forte dependência entre as variações de participações das diversas marcas, que age como um fator de confusão na relação entre distâncias e variações na participação.

Outro fator relacionado a este que pode contribuir para a aparente inconsistência observada é a presença de elasticidades cruzadas entre as marcas. O mapa perceptual, ao explicitar que duas marcas são bastante semelhantes entre si desde o ponto de vista do consumidor, naturalmente sugere uma maior competitividade entre elas. Sendo assim, seria de se esperar que, se uma marca ganha participação, as perdas de participação que as demais devem sofrer para compensar este ganho estejam correlacionadas com as distâncias entre esta marca e as demais. Esta modelagem se mostra de natureza bastante complexa, pois todas as marcas, ao

ganharem ou perderem participação, estariam influenciando os ganhos ou perdas de participação de todas as demais marcas.

No sentido oposto, examinando-se as correlações entre participação de mercado e variações nas distâncias ao ponto ideal, percebe-se que ambas as correlações (com participação em 2004 e com participação em 2005) também são baixas e negativas (-0,33 e -0,31).

Por último, a correlação entre mudanças nas distâncias ao ponto anti-ideal e mudanças na participação de mercado entre 2004 e 2005 são positivas, mas baixas. Apesar de o sentido ser o esperado (aumentos nas distâncias ao ponto anti-ideal sugerem aumentos na participação de mercado), esta correlação é baixa, atingindo apenas 0,33.

Com relação aos postos, é interessante notar que neste mercado existe uma discordância na ordem dos postos, considerando de um lado as distâncias, e de outro as participações de mercado: a marca C é a segunda marca mais distante do ponto anti-ideal ($dist=0,2752$), mas ocupa a terceira posição no mercado em termos de participação ($part=0,174$). A segunda posição no mercado é ocupada pela marca B, mas ela está mais próxima do ponto anti-ideal do que C.

Esta discordância está presente tanto em 2004 como 2005, mas é interessante notar que a marca C ganhou mais participação de mercado entre 2004 e 2005 do que a marca B, diminuindo a distância entre elas:

TABELA 18
Variações de participação entre marcas B e C de serviço

Marca	Participação de mercado		Variação na participação
	2004	2005	
B	22,5%	23,7%	+1,2pp
C	17,4%	20,5%	+3,1pp
Diferença entre B e C	5,1pp	3,2pp	-

Fonte: Elaboração própria.

Esse fato, ainda que não conclusivo, sugere uma dinâmica semelhante à observada por Souza (1994) em seu trabalho, em que a discordância em termos de postos tende a ser eliminada com o passar do tempo, até que a ordenação das marcas em função das distâncias aos pontos ideais fique em concordância com a ordenação a partir das participações de mercado.

8.2 Produto de consumo doméstico

As medidas de similaridade médias entre marcas calculadas em novembro de 2004 estão presentes na tabela abaixo:

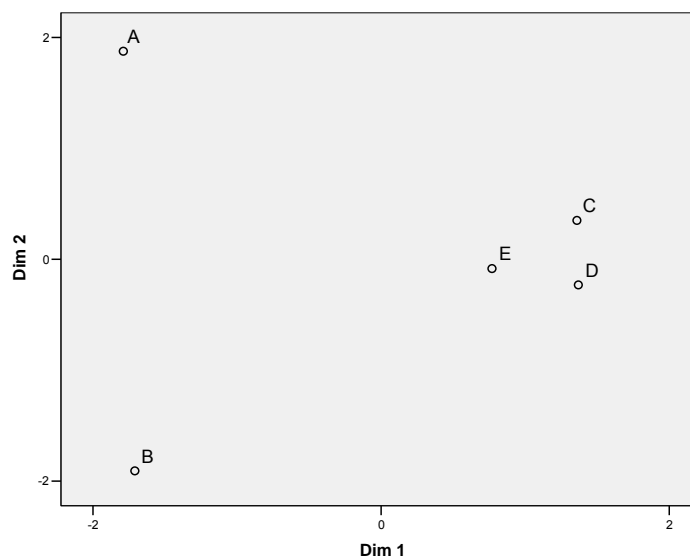
TABELA 19
Medidas de similaridade entre marcas novembro 2004

Marcas	A	B	Marcas C	D	E
A	-				
B	0,571624	-			
C	0,579293	0,560694	-		
D	0,565154	0,583315	0,725791	-	
E	0,625846	0,636610	0,782906	0,853919	-

Fonte: Elaboração própria.

O mapa perceptual oriundo destas medidas de similaridade é o seguinte:

GRÁFICO 20
Mapa perceptual produtos de consumo nov2004



Fonte: Elaboração própria.

Esta solução para o mapa perceptual foi alcançada após apenas uma iteração do algoritmo, pois o stress já apresentava um valor bastante baixo. A solução apresenta stress=0,01135.

Da mesma forma, as similaridades entre marcas medidas em fevereiro de 2005 foram:

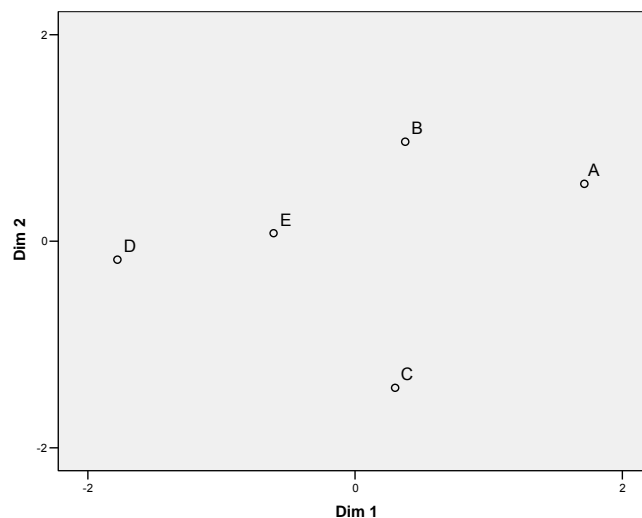
TABELA 20
Medidas de similaridade entre marcas fevereiro 2005

Marcas	Marcas				
	A	B	C	D	E
A	-				
B	0,619103	-			
C	0,568289	0,492763	-		
D	0,393795	0,528690	0,492619	-	
E	0,483117	0,608137	0,574150	0,581481	-

Fonte: Elaboração própria.

O mapa perceptual criado a partir desses dados de similaridade é o seguinte:

GRÁFICO 21
Mapa perceptual produtos de consumo fev2005



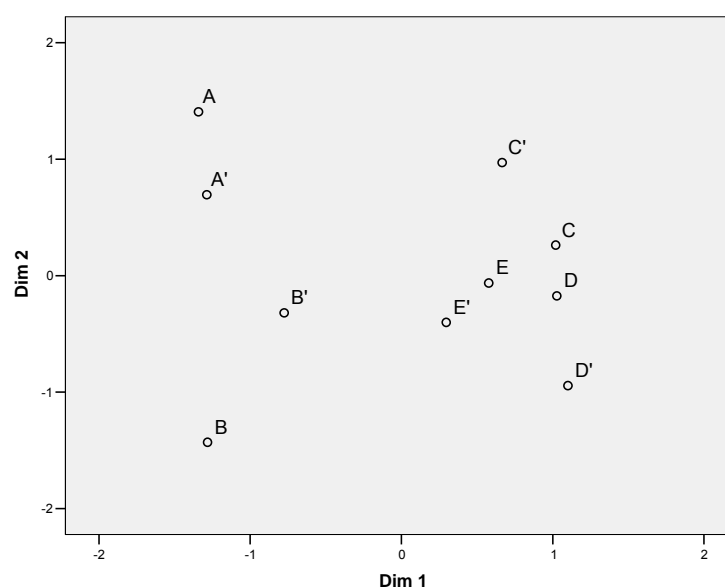
Fonte: Elaboração própria.

Esta solução foi atingida após 10 iterações do algoritmo, com stress=0,02219.

Os dois mapas, de novembro de 2004 e fevereiro de 2005, parecem ser muito distintos um do outro, mas aplicando-se procrustes, as diferenças em função da orientação são amenizadas, gerando o seguinte mapa conjunto nov2004-fev2005:

GRÁFICO 22
Mapa perceptual produtos 2004, e 2005 após procrustes

A,B,C,D,E → novembro 2004
A',B',C',D',E' → fevereiro 2005



Fonte: Elaboração própria.

O mapa mostra uma razoável movimentação das marcas num curto espaço de tempo (3 meses). Este efeito pode ser devido ao fato de que todas as ações de marketing, como propagandas, lançamentos de extensões de marca, e promoções de preço se concentram nesse intervalo, mas também a outros fatores como qualidade irregular do levantamento de dados.

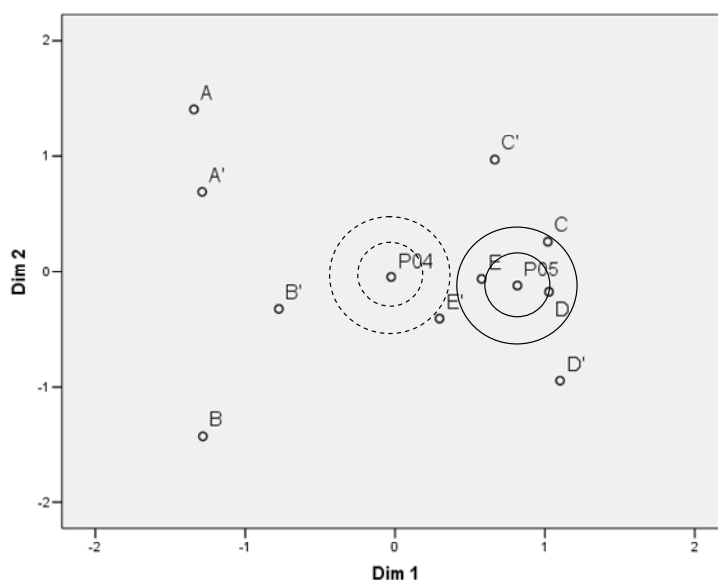
Os índices médios de preferência de marca, calculados para os dois períodos, e a localização dos pontos anti-ideais pelo PREFMAP são apresentados a seguir:

TABELA 21
Índices de preferência de marca produtos 2004 e 2005

Marca	nov 2004	fev 2005
A	7,557823	8,077098
B	7,414414	7,740492
C	6,363218	7,147392
D	6,140230	6,910798
E	5,863850	6,500000

Fonte: Elaboração própria.

GRÁFICO 23
Mapa perceptual produtos com pontos anti-ideais



Fonte: Elaboração própria.

Note-se que, durante a temporada, as marcas se movimentaram principalmente na direção da dimensão 2, permanecendo em posições muito semelhantes na

dimensão 1. Enquanto as marcas A e B se aproximaram uma da outra, as marcas C e D se distanciaram. O ponto anti-ideal, no entanto, se moveu principalmente na dimensão 1, na direção das marcas C, D e E.

As distâncias de cada marca ao ponto anti-ideal, e suas respectivas participações de mercado, antes e depois da temporada, estão representadas na tabela a seguir:

TABELA 22
Distâncias ao ponto e participações de mercado para produtos

Marcas	2004				2005				Variação	
	Dist.	Posto	Part.	Posto	Dist.	Posto	Part.	Posto	Dist.	Part.
A	1,9609	1	0,3330	1	2,2553	1	0,3290	1	0,2944	-0,004
B	1,8690	2	0,2860	2	1,6041	2	0,3220	2	-0,2649	0,036
C	1,0901	3	0,0910	4	1,1005	3	0,1100	4	0,0104	0,019
D	1,0603	4	0,1740	3	0,8725	4	0,1550	3	-0,1878	-0,019
E	0,6031	5	0,0610	5	0,5914	5	0,0580	5	-0,0117	0,003

Fonte: Elaboração própria.

A partir da tabela acima, podemos estudar as correlações entre as distâncias ao ponto anti-ideal e as participações de mercado e suas variações no tempo. Os principais resultados estão descritos na tabela abaixo:

TABELA 23
Correlações entre distâncias e participação para produtos

Correlação entre	Valor
Distância 2004 e participação 2004	0,9574
Distância 2005 e participação 2005	0,9119
Distância 2004 e participação 2005	0,9847
Distância 2004 e variação na participação	0,3984
Distância 2005 e variação na participação	0,2464
Variação na distância e participação 2004	0,1947
Variação na distância e participação 2005	0,1304
Variação na distância e variação na participação	-0,3195

Fonte: Elaboração própria.

Consistentemente com o verificado para o mercado de serviço de comunicação, as correlações entre distâncias ao ponto anti-ideal e participações de mercado são altas considerando-se cada ano em separado (0,96 e 0,91).

Também nesse mercado percebe-se que a correlação entre distância ao ponto ideal e participação de mercado é ligeiramente maior considerando-se a participação de

mercado futura, e não no mesmo período onde a distância ao ponto ideal é aferida (0,98 vs. 0,96 e 0,91).

Novamente percebe-se que as correlações que envolvem distâncias ao ponto ideal e variações na participação são baixas, tanto com distância no momento 1 como no momento 2, ainda que neste mercado elas não assumam sinais negativos.

Iguamente, as correlações entre participação de mercado e variações na distância ao ponto ideal são bastante baixas, tanto antes da temporada como após a temporada.

Por fim, a correlação entre variações na distância ao ponto ideal e variações na participação de mercado também se mostram baixas e no sentido oposto ao esperado.

Analisando-se os postos em relação a distâncias e participações, também nesse mercado pode-se notar uma discordância entre os postos, dessa vez ocorrendo entre as terceira e quarta marcas do mercado: a terceira marca em participação é a quarta mais distante do ponto ideal, enquanto a quarta colocada em participação é a terceira mais distante.

Interessantemente, também aqui se observa que a movimentação de participações entre os dois períodos ocorre no sentido de minimizar essa discordância, com a diferença de participação entre essas marcas caindo para quase a metade de antes da temporada:

TABELA 24
Variações de participação entre marcas C e D de produtos

Marca	Participação de mercado		Variação na participação
	2004	2005	
C	9,1%	11,0%	+1,9pp
D	17,4%	15,5%	-1,9pp
Diferença entre C e D	8,3pp	4,5pp	-

Fonte: Elaboração própria.

9 CONCLUSÕES

Os resultados obtidos nas duas aplicações empíricas, uma no setor de serviços, outra no setor de produtos de consumo, foram muito consistentes entre si.

Eles sugerem que as distâncias em relação ao ponto ideal são em geral bons indicadores de participação de mercado das marcas, principalmente no que se refere às participações de mercado futuras, num horizonte de mais longo prazo.

O exame dos postos em relação a distâncias ao ponto ideal e participações de mercado também indicam uma tendência de se eliminar possíveis desequilíbrios nas ordenações, com marcas “em desvantagem” ganhando mais participação de mercado através do tempo do que as marcas “em vantagem”, diminuindo a distância em relação a elas.

Este resultado sugere que as distâncias ao ponto ideal possam representar um potencial por vezes não realizado de participação de mercado. Por exemplo, uma marca com forte tradição no mercado, que já tenha construído junto aos consumidores uma boa imagem, mas que venha apresentando fracos investimentos em propaganda e promoção através dos anos, pode estar enfrentando resultados abaixo do seu verdadeiro potencial de mercado.

Por outro lado, os resultados dos estudos empíricos considerando-se variações através do tempo, tanto em participação de mercado como em distância ao ponto ideal, não se mostram promissores. São fracas as relações entre distâncias ao ponto ideal e ganhos ou perdas de participação de mercado, assim como as relações entre participação de mercado e aproximações ou distanciamentos do ponto ideal.

Um dos fatores que interfere na intensidade dessas relações é a natureza da variável participação de mercado, já que a soma constante igual a 1 faz com que uma marca, ao ganhar participação de um período para o outro, force necessariamente que alguma outra marca perca participação, estabelecendo uma forte dependência entre as variações de participação de mercado das marcas.

Este fato fica um pouco mais evidente ao avaliarmos as relações entre distâncias ao ponto ideal e volume de vendas, e não participação de mercado. A tabela abaixo mostra as correlações entre distâncias ao ponto anti-ideal no momento 1 (2004 para serviço de comunicação e nov2004 para produto de consumo) e variações na participação de mercado e volume de vendas entre os momentos 1 e 2:

TABELA 25
Distâncias ao ponto anti-ideal e volumes de vendas

	Serviço de comunicação	Produto de consumo
Varição na participação	-0,42198	0,3984
Varição no volume	0,2955	0,8049

Fonte: Elaboração própria.

Apesar dos índices de correlação considerando variação no volume não serem muito altos, eles se comportam um pouco mais como o esperado: a correlação entre distância ao ponto anti-ideal e variação no volume para o mercado de serviço de comunicação deixa de ter o sentido oposto ao intuitivo, e a mesma correlação para o mercado de produto de consumo sobe para níveis considerados razoáveis.

9.1 Implicações

As análises realizadas através deste estudo exploratório devem ser consideradas de natureza qualitativa, servindo mais como geradores do que verificadores de hipóteses. Ainda assim, eles abrem caminho para a utilização futura das distâncias

ao ponto ideal em mapas perceptuais como uma medida de auxílio aos praticantes de marketing no gerenciamento de marcas.

Caso estudos posteriores, mais robustos e abrangentes em termos de número de marcas e períodos analisados, confirmem a hipótese de distância ao ponto ideal como indicador de participação de mercado no longo prazo, ela permitirá ao praticante de marketing, após interpretação cuidadosa das dimensões do mapa perceptual, entender quais atributos do mercado tem maior poder de aproximar a marca do ponto ideal e, portanto, construir um cenário mais favorável para a sua marca no futuro.

Adicionalmente, se verificada a hipótese de tendência de equilíbrio entre os postos considerando distâncias ao ponto ideal e participação de mercado, a detecção de pontos de desequilíbrio pode revelar aos praticantes de marketing um potencial de ganhos de participação da marca. Nesse caso, uma análise das razões de *sub-performance* deveria ser feita, e o potencial não realizado de participação ser concretizado, por exemplo, através de níveis mais adequados de investimento em preço e/ou promoção da marca.

9.2 Limitações

Alguns aspectos que agem como limitadores das conclusões obtidas neste estudo devem ser observados.

O principal deles é decorrente do fato de que os mercados analisados neste estudo conterem um limitado número de marcas operantes em cada um. Apesar dessa ser uma grande tendência dos mercados em geral, esse número reduzido tem impacto

sobre a construção do mapa perceptual, aumentando o risco de super-ajuste (*overfitting*): com poucos dados de similaridade entre marcas, existe a possibilidade da solução do mapa ser muito particular àqueles dados, e não um representante mais estável da situação competitiva do mercado. O mesmo problema tem similar efeito sobre a localização de pontos ideais: um maior número de marcas no mercado traria maior confiança quanto à localização dos pontos ideais nos mapas.

Esse reduzido número de marcas também impediu, neste estudo, a realização de regressões entre distâncias ao ponto ideal e participações de mercado, o que poderia se constituir num relevante instrumento de predição de participação de mercado futura. Em mercados como estes, onde o número de marcas é bastante reduzido, esta tarefa somente se tornaria possível através da agregação de dados de vários períodos, e não somente dois como estavam disponíveis.

Uma outra limitação a ser observada foi a ausência de dados de similaridade diretas entre marcas. Para contornar o problema, foram criadas medidas de similaridade derivadas. Ainda que selecionadas criteriosamente, elas podem ter influenciado parcialmente os resultados obtidos.

Também foi um limitante deste estudo a condição de confidencialidade dos mercados estudados. Em virtude dela, não foi possível apresentar as interpretações dos mapas perceptuais, sob risco de explicitar os mercados em questão. Ainda que o entendimento destes mercados não fosse o principal objetivo deste estudo, essas interpretações poderiam ter enriquecido as análises do comportamento das distâncias ao ponto ideal, e suas movimentações através do tempo.

Um último comentário se faz necessário quanto à manutenção da qualidade do levantamento de dados entre as ondas de estudo de imagem de marca. Em particular no mercado de produtos de consumo, foi verificado que na segunda onda, realizada somente 3 meses após a primeira, a matriz de associação se encontrava muito mais esparsa do que na primeira (matriz continha um número muito maior de zeros). Ainda que grande parte das ações de marketing se concentre nesse período, é pouco provável que a imagem das marcas tenha se alterado tão drasticamente nesse pequeno intervalo, o que sugere a interferência parcial dos procedimentos de campo nos dados levantados.

9.3 Sugestões de pesquisas futuras

A sugestão imediata para pesquisas futuras é o desenvolver um instrumento preditor de participação de mercado em função das distâncias ao ponto ideal. Como comentado, isto pode ser facilmente implementado através do acúmulo de dados de vários períodos, utilizando-se uma simples regressão linear, assim que o número de pontos de dado for suficientemente grande.

Outro ponto de investigação interessante, que necessitaria um intervalo de tempo maior, seria acompanhar a evolução destes dois mercados, a fim de verificar se, de fato, o equilíbrio entre postos, considerando distâncias ao ponto ideal e participações de mercado, se estabelecerá no futuro.

Uma pesquisa interessante, também ligada à questão de discordância de postos, seria entender quais fatores seriam potenciais causadores do desequilíbrio. Por exemplo, dados de preço, investimento publicitário, ou número de lançamentos de novos produtos, poderiam ser utilizados para tentar explicar porque a marca não

está conseguindo realizar todo o potencial de participação de mercado que o seu nível de preferência junto aos consumidores sugeriria.

10 REFERÊNCIAS

AACKER, David A. **Managing brand equity**: capitalizing on the value of a brand name. New York: The Free Press, 1991.

AACKER, David A.; KUMAR, V.; DAY, George. **Pesquisa de Marketing**. 2ed. São Paulo: Atlas, 2001.

ARABIE, Phipps; CARROLL, J. D.; DESARBO, Wayne S. **Three-way scaling and clustering**. Newbury Park: Sage, 1987. (Sage university paper series on quantitative applications in the social sciences n. 07-065).

BAHT, Subodh; REDDY, Srinivas K. Symbolic and functional positioning of brands. **Journal of Consumer Marketing**, West Yorkshire, vol. 15, n. 1, p. 32-43, Feb. 1998.

BIJMOLT, Tammo H. A.; WEDEL, Michel. A comparison of multidimensional scaling methods for perceptual mapping. **Journal of Marketing Research**, Chicago, vol. 36, n. 2, p. 277-285, May 1999.

BORG, Ingwer; GROENEN, Patrick. **Modern multidimensional scaling**: theory and applications. New York: Springer-Verlag, 1997.

BORG, Ingwer; LEUTNER, Detlev. Measuring the similarity of EMD configurations. **Multivariate Behavioral Research**, Mahwah, vol. 20, n. 3, p. 325-334, July 1985.

BUSSAB, Wilton O.; MORETTIN, Pedro A. **Estatística básica**. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2002.

CARROLL, J. Douglas. Individual differences and multidimensional scaling. In: SHEPARD, R. N.; ROMNEY, A. K.; NERLOVE, S. B. (Eds.) **Multidimensional Scaling**: theory and applications in the behavioral sciences. New York: Seminar Press, 1972. (Volume 1: Theory).

CARROLL, J. Douglas; DeSARBO, Wayne S. Two-way spatial methods for modeling individual differences in preference. **Advances in Consumer Research**, Duluth, vol. 12, n. 1, p. 571-576, Jan. 1985.

CARROLL, J. Douglas; GREEN, Paul E. Psychometric methods in marketing research: part II, multidimensional scaling. **Journal of Marketing Research**, Chicago, vol. 34, n. 2, p. 193-204, May 1997.

CHOI, S. C.; DESARBO, Wayne S.; HARKER, Patrick T. Product positioning under price competition. **Management Science**, Hanover, vol. 36, n. 2, p. 175-199, Feb. 1990.

COOMBS, Clyde H. **A theory of data**. New York: John Wiley & Sons, 1964.

COOPER, Lee G.; NAKANISHI, Masao. **Market share analysis: evaluating competitive marketing effectiveness**. Norwell: Kluwer Academic Publishers, 1988.

COX, Trevor F.; COX, Michael A. A. **Multidimensional Scaling**. 2. ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001.

GILLETTE, William; EVANS, Richard H. Service analysis: a bank marketing example using perceptual mapping. **Advances in Consumer Research**, Duluth, vol. 2, n. 1, p. 525-533, Jan. 1975.

GOWER, John C.; DIJKSTERHUIS, Garnt B. **Procrustes problems**. New York: Oxford University Press, 2004.

GREEN, Paul E. **Mathematical tools for applied multivariate analysis**. New York: Academic Press, 1978.

GREEN, Paul E.; CARMONE, Frank J. Multidimensional scaling: an introduction and comparison of nonmetric unfolding techniques. **Journal of Marketing Research**, Chicago, vol. 6, n. 3, p. 330-341, Aug. 1969.

GREEN, Paul E.; RAO, Vithala R. Multidimensional scaling and individual differences. *Journal of Marketing Research*, Chicago, vol. 8, n. 1, p. 71-77, Feb. 1971.

GREEN, Paul E.; KRIEGER, Abba M.; CARROLL, J. D. Conjoint analysis and multidimensional scaling: a complementary approach. **Journal of Advertising Research**, Cambridge, vol. 27, n. 5, p. 21-27, Oct./Nov. 1987.

HAIR, Joseph F., Jr. et al. **Multivariate data analysis**. 5.ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1998.

HAUSER, John R. Competitive price and positioning strategies. **Marketing Science**, Hanover, vol. 7, n. 1, p. 76-91, Jan. 1988.

HAUSER, John R.; SIMMIE, Patricia. Profit maximizing perceptual positions: an integrated theory for the selection of product features and price. **Management Science**, Hanover, vol. 27, n. 1, p. 33-56, Jan. 1981.

HENRY, Walter A.; STUMPF, Robert V. Time and accuracy measures for alternative multidimensional scaling data collections methods. **Journal of Marketing Research**, Chicago, vol. 12, n. 2, p. 165-170, May 1975.

JOHNSON, Richard M. Market segmentation: a strategic management tool. **Journal of Marketing Research**, Chicago, vol. 8, n. 1, p. 13-18, Feb. 1971

KOTLER, Philip; ARMSTRONG, Gary. **Princípios de marketing**. 9.ed. São Paulo: Prentice Hall, 2003.

KRUSKAL, Joseph B.; WISH, Myron. **Multidimensional Scaling**. Beverly Hills: Sage, 1978. (Sage university paper series on quantitative applications in the social sciences n. 07-011).

LEHMANN, Donald R. Judged similarity and brand-switching data as similarity measures. **Journal of Marketing Research**, Chicago, vol. 9, n. 3, p. 331-334, Aug. 1972.

LILIEN, Gary L.; RANGASWAMY, Arvind. **Marketing engineering: computer assisted marketing analysis and planning**. 2.ed. Victoria: Trafford, 2004.

MALZYNER, Monique S. L. **Escalonamento Multidimensional**. 1981. 256p. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo.

MATTAR, Fauze N. **Pesquisa de Marketing: metodologia, planejamento, execução, análise**. vol. 1. São Paulo: Atlas, 1993.

MEAD, A. Review of the development of multidimensional scaling methods. **Journal of the Royal Statistical Society Series D (The Statistician)**, Oxford, vol. 41, n. 1, p. 27-39, Apr. 1992.

MOINPOUR, Reza; McCULLOUGH, James M.; MacLACHLAN, Douglas L. Time changes in perception: a longitudinal application of multidimensional scaling. **Journal of Marketing Research**, Chicago, vol. 13, n. 3, p. 245-253, Aug. 1976.

PERREAULT Jr., William D; McCARTHY, E. Jerome. **Essentials of Marketing: a global-managerial approach**. 8ed. New York: McGraw Hill, 2000.

PORTAL Brasil. Curiosidades. **Aviação Comercial**. Disponível em: <http://www.portalbrasil.net/aviacao_curiosidades.htm>. Acesso em: 30 mar. 2006.

RAMSEY, J. O. Maximum likelihood estimation in multidimensional scaling. **Psychometrika**, Durham, vol. 42, n. 2, p. 241-266, June 1977.

RIES, Al; TROUT, Jack. **Posicionamento: a batalha pela sua mente**. 6.ed. São Paulo: Pioneira, 1996.

ROCCI, R.; BOVE, G. Rotation techniques in asymmetric multidimensional scaling. **Journal of Computational and Graphical Statistics**, Alexandria, vol. 11, n. 2, p. 405-419, June 2002.

SCHERVISH, Mark J. A review of multivariate analysis. **Statistical Science**, Philadelphia, vol. 2, n. 4, p. 396-413, Nov. 1987.

SCHIFFMAN, Susan S.; REYNOLDS, M. L.; YOUNG, Forrest W. **Introduction to multidimensional scaling: theory, methods and applications**. Orlando: Academic Press, 1981.

SIBSON, Robin. Studies in the robustness of multidimensional scaling: perturbational analysis of classical scaling. **Journal of the Royal Statistical Society Series B (Statistical Methodology)**, Oxford, vol. 41, n. 2, p. 217-229, June 1979.

SINHA, Indrajit; DeSARBO, Wayne S. An integrated approach toward the spatial modeling of perceived customer value. **Journal of Marketing Research**, Chicago, vol. 35, n. 2, p. 236-249, May 1998.

SOLOMON, Michael R. **Consumer behavior: buying, having and being**. 6.ed. Upper Saddle River: Pearson Education, 2004.

SOUZA, Ricardo F. **Escalonamento multidimensional e posicionamento de mercado**. 1994. 141p. Dissertação (Mestrado em Administração de Empresas) – Escola de Administração de Empresas de São Paulo, Fundação Getúlio Vargas, São Paulo.

STEENKAMP, Jan-Benedict E. M.; VAN TRUP, Hans C. M.; TEN BERGE, Jos, M. F. Perceptual mapping based on the idiosyncratic sets of attributes. **Journal of Marketing Research**, Chicago, vol. 31, n. 1, p. 15-27, Feb. 1994.

TALARICO, Renata F. **Um modelo conceitual para a construção e o reposicionamento de marcas**. 1998. 84p. Dissertação (Mestrado em Administração de Empresas) – Escola de Administração de Empresas de São Paulo, Fundação Getúlio Vargas, São Paulo.

TORGERSON, Warren S. **Multidimensional scaling: volume I: theory and method**. *Psychometrika*, Durham, vol. 17, n. 4, p. 401-419, Dec. 1952.

URBAN, Glen L. Perceptor: a model for product positioning. **Management Science**, Hanover, vol. 21, n. 8, p. 858-871, April 1975.

VAVRA, Terry G. Factor analysis of perceptual change. **Journal of Marketing Research**, Chicago, vol. 9, n. 2, p. 193-199, May 1972.

YOUNG, Forrest W.; HAMER, Robert M (Ed.). **Multidimensional scaling: history, theory, and applications**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1987.

YOUNG, Gale W.; HOUSEHOLDER, A. S. Discussion of a set of points in terms of their mutual distances. *Psychometrika*, Durham, vol. 3, n. 1, p. 19-22, Mar. 1938.

11 APÊNDICES

APÊNDICE A – Decomposição em valores singulares

A decomposição de uma matriz em valores singulares diz respeito à decomposição de uma matriz em um produto de matrizes de estrutura mais simples desde o ponto de vista geométrico (GREEN, 1978).

Uma das formas mais simples de uma matriz é a matriz diagonal, onde todos os elementos da matriz, exceto a diagonal, são nulos. O problema da decomposição em valores singulares consiste então em escrever a matriz \mathbf{A} na forma $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$, onde $\mathbf{\Lambda}$ é uma matriz diagonal.

Os elementos λ_i da diagonal da matriz $\mathbf{\Lambda}$ são chamados de autovalores, e a cada autovalor existe um vetor \mathbf{v}_i associado, de forma que $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T$.

Por exemplo, se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 14,19 & 10,69 \\ 10,69 & 8,91 \end{bmatrix}$, os autovalores de \mathbf{A} são $\lambda_1 = 22,56$ e $\lambda_2 = 0,54$,

e seus respectivos autovetores são $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0,787 \\ 0,617 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -0,617 \\ 0,787 \end{bmatrix}$. Sendo assim,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,787 & -0,617 \\ 0,617 & 0,787 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22,56 & 0 \\ 0 & 0,54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,787 & 0,617 \\ -0,617 & 0,787 \end{bmatrix}, \quad \text{ou} \quad \text{equivalentemente,}$$

$$\mathbf{A} = 22,56 \begin{bmatrix} 0,787 \\ 0,617 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,787 & 0,617 \end{bmatrix}^T + 0,54 \begin{bmatrix} -0,617 \\ 0,787 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,617 & 0,787 \end{bmatrix}^T.$$

Os autovalores de uma matriz podem ser encontrados através da solução da equação $|\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}| = 0$, onde $|\mathbf{A}|$ denota o determinante da matriz \mathbf{A} , e os respectivos

autovetores são encontrados através das soluções de $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, para cada autovalor λ_i encontrado.

APÊNDICE B – Solução do escalonamento métrico

O princípio da solução do escalonamento métrico de Torgerson está ligado à relação de existente entre produtos escalares de vetores e distâncias euclidianas.

O produto escalar entre dois vetores em P dimensões é definido como a soma dos

produtos de suas coordenadas: $\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{k=1}^P x_k y_k$ (BORG; GROENEN, 1997). É

fácil perceber que $d_{ij}^2 = \sum_{k=1}^P (x_{ik} - x_{jk})^2 = (x_i - x_j)^T (x_i - x_j)$, ou seja, a distância ao

quadrado entre dois pontos é o produto escalar da diferença entre eles.

Representemos então cada um dos n objetos através de coordenadas no espaço

P -dimensional da forma $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iP})$, a matriz de coordenadas dos pontos

por \mathbf{X} , e por $\mathbf{D}^2 = (d_{ij}^2)$ a matriz de distâncias ao quadrado entre todos os pontos de

\mathbf{X} .

Cada entrada d_{ij}^2 da matriz \mathbf{D}^2 pode ser escrita como

$d_{ij}^2 = \sum_{k=1}^P (x_{ik} - x_{jk})^2 = \sum_{k=1}^P (x_{ik}^2 + x_{jk}^2 - 2x_{ik}x_{jk})$. Utilizando notação de matrizes, obtemos:

$$\mathbf{D}^2 = \mathbf{c}\mathbf{1}^T + \mathbf{1}\mathbf{c}^T - 2\mathbf{X}\mathbf{X}^T \quad (1)$$

onde \mathbf{c} é um vetor cujos elementos são a soma dos quadrados das coordenadas de

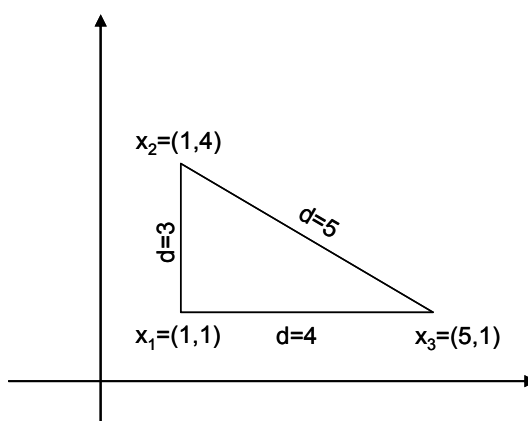
cada ponto $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iP})$. Ou seja, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^P x_{1k}^2 \\ \sum_{k=1}^P x_{2k}^2 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^P x_{nk}^2 \end{bmatrix}$.

A matriz $\mathbf{B} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$ é chamada de matriz de produtos escalares.

Dessa forma, partindo da matriz de coordenadas \mathbf{X} , para construir a matriz de distâncias entre cada par de pontos da matriz basta calcular $\mathbf{B} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$, construir o vetor \mathbf{c} e calcular a soma (1).

Exemplo: Seja o triângulo retângulo com lados de comprimento 3, 4 e 5, fincado no ponto de coordenada $x_1 = (1,1)$:

FIGURA 15
Triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5



Fonte: Elaboração própria

$$\text{Então } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 5 & 17 & 9 \\ 6 & 9 & 26 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1^2 + 1^2 = 2 \\ 1^2 + 4^2 = 17 \\ 5^2 + 1^2 = 26 \end{bmatrix}. \quad \text{Portanto,}$$

$$\mathbf{D}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 17 & 17 & 17 \\ 26 & 26 & 26 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 17 & 26 \\ 2 & 17 & 26 \\ 2 & 17 & 26 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 5 & 17 & 9 \\ 6 & 9 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 16 \\ 9 & 0 & 25 \\ 16 & 25 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

O problema de escalonamento multidimensional começa a ser solucionado à medida que conseguimos realizar o reverso desse processo: conseguir uma matriz de pontos \mathbf{X} a partir da matriz de produtos escalares $\mathbf{B} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$, oriunda da matriz \mathbf{D} .

Não há perda de generalidade em se exigir que a matriz de pontos \mathbf{X} resultante tenha centróide na origem, ou seja, $\sum_{k=1}^n x_{ki} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, P$)¹⁵.

Partindo de (1), temos que $\mathbf{XX}^T = -\frac{1}{2}(\mathbf{D}^2 - \mathbf{c}\mathbf{1}^T - \mathbf{1}\mathbf{c}^T)$ e usando o fato de que

$\sum_{k=1}^n x_{ki} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, P$), esta equação equivale a $\mathbf{XX}^T = \mathbf{H} - \frac{1}{2}\mathbf{D}^2\mathbf{H}$, onde

$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$, \mathbf{I} é a matriz identidade e $\mathbf{1}$ é um vetor de uns. Esta operação sobre

\mathbf{D}^2 recebe o nome de “dupla centralização”.

Dessa forma, a solução para o problema é obtida através de três passos consecutivos:

- Definir a matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ onde $a_{ij} = -\frac{d_{ij}^2}{2}$
- Centralizar duplamente a matriz \mathbf{A} para obter a matriz de produtos escalares $\mathbf{B} = \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{H}$;
- Decompor a matriz \mathbf{B} em seus valores singulares¹⁶ $\mathbf{B} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$, onde $\mathbf{\Lambda}$ é a matriz diagonal de autovalores de \mathbf{B} e \mathbf{V} é a matriz de autovetores associada a $\mathbf{\Lambda}$.

A configuração de pontos \mathbf{X} cuja matriz de distâncias entre eles coincide com a matriz \mathbf{D} é $\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$, como se pode comprovar a seguir:

$$\mathbf{XX}^T = \left(\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \right) \left(\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \right)^T = \left(\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \right) \left(\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{V}^T \right) = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T = \mathbf{B}$$

¹⁵ Isto equivale a dizer que a soma das colunas de \mathbf{X} é sempre igual a zero.

¹⁶ Ver Apêndice A

APÊNDICE C – Regressão Monotônica

A regressão monotônica por mínimos quadrados é um método de cálculo usado como rotina de base em várias técnicas de análise de dados (MALZYNER, 1981). O objetivo da técnica é encontrar a função isotônica particular que minimiza os quadrados das diferenças entre ela e todas as possíveis funções isotônicas existentes em relação ao conjunto de dados.

Seja dado um conjunto de pontos $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ onde existe uma ordem simples $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Uma função $f(x)$ sobre o conjunto de pontos dado é chamada de isotônica se, $\forall x, y \in X, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Seja $w(x)$ uma função positiva em X . A função $g^*(x)$ é uma regressão monotônica com pesos w se minimiza a soma $\sum_{x \in X} [g(x) - f(x)]^2 w(x)$, considerando a classe de funções isotônicas $f(x)$ do conjunto de pontos.