FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

MODELOS DE DETERMINAÇÃO DE PREÇOS DE ATIVOS E A MEDIDA DE MARTINGAL EQUIVALENTE

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À CONGREGAÇÃO DA
ESCOLA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA (EPGE)
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE

MESTRE EM ECONOMIA

POR

FLÁVIO AULER

199106 653
T/EPGE A924m
1000056548

RIO DE JANEIRO, RJ

Maio, 1991

T/EPGE
A924m

BIBLIOTECA
FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
65391
02.06.91

BB-00045419-0

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

TESE DE MESTRADO
APRESENTADA À EPGE

POR: Flávio Auler

EM: 17/05/91
Defesa: 03/06/91

Prof. Rio Sec de Oliveira

FUNDAÇÃO
GETÚLIO VARGAS
CAIXA POSTAL 9.052 - CEP 22253
RIO DE JANEIRO - RJ - BRASIL

C I R C U L A R Nº 41

Assunto: Defesa Pública de Dissertação de Mestrado em Economia

Comunicamos formalmente à Congregação da Escola que está marcada para p dia 03 de junho de 1991 (2a. feira), às 10:00h, no auditório da EPGE (10º andar), a apresentação e defesa pública da Dissertação de Mestrado em Economia, intitulada "MODELOS DE DETERMINAÇÃO DE PREÇOS DE ATIVOS E A MEDIDA DE MARTINGAL EQUIVALENTE", por Flávio Auler.

A Banca Examinadora "ad hoc" designada pela Escola será composta pelos doutores: Carlos Ivan Simonsen Leal, Luiz Guilherme Schymura de Oliveira e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang (Presidente).

Com esta convocação oficial, além da Congregação de Professores da Escola, estão convidados a participar deste ato acadêmico os alunos da EPGE, interessados da FGV e de outras instituições.

Rio de Janeiro, 17 de maio de 1991.

Mario Henrique Simonsen
Diretor da EPGE

ESCOLA PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA
EPGE/FGV

ESCOLA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA
DA FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
PRAIA DE BOTAFOGO, 190/10.º ANDAR
RIO DE JANEIRO - BRASIL - CEP 22.250

LAUDO SOBRE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Como integrante da Banca Examinadora, designada pela EPGE para julgar a Dissertação de Mestrado, intitulada **"MODELOS DE DETERMINAÇÃO DE PREÇOS DE ATIVOS E A MEDIDA DE MARTINGAL EQUIVALENTE"** , do candidato ao título, Sr. **Flávio Auler**, apresento as seguintes ponderações que justificam meu parecer e voto:

1) O trabalho empreendido pelo candidato mostra que tem bom conhecimento do instrumental necessário para o estudo de determinação de preço de ativos;
2) O candidato discute a existência e a unicidade da medida de Martingal equivalente de forma bastante geral.

Assim e nessas condições, sou de parecer que a referida Dissertação seja aprovada e outorgado o título pretendido pelo candidato e autor deste trabalho.

Rio de Janeiro, 03 de junho de 1991

ESCOLA PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA
EPGE/FGV

Luiz Guilherme Schymura de Oliveira,
Professor da EPGE.

A-4 Formato Internacional
210x297mm

ESCOLA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA
DA FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
PRAIA DE BOTAFOGO, 190/10.º ANDAR
RIO DE JANEIRO - BRASIL - CEP 22.250

LAUDO SOBRE TESE DE MESTRADO

Como integrante da Banca Examinadora, designado pela EPGE para julgar a tese, intitulada "MODELOS DE DETERMINAÇÃO DE PREÇOS DE ATIVOS E A MEDIDA DE MARTINGAL EQUIVALENTE", do candidato ao título, Sr. Flávio Auler, apresento as seguintes ponderações que justificam meu parecer e voto:

1) O aluno já demonstra ter alcançado excelente nível de conhecimento nas disciplinas de economia.

2) A dissertação em questão trata de forma muito interessante e elucidativa o problema da determinação de preços de ativos.

3) Ela formula questões não muito abordadas em nosso literatura.

Assim e nessas condições, sou de parecer que a referida Tese seja aprovada e outorgado o título pretendido pelo candidato e autor deste trabalho.

Rio de Janeiro, 3 de junho de 1991.

Carlos I. S. Leal

Carlos Ivan Simonsen Leal,
Professor da EPGE.

ESCOLA PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA
EPGE/FGV

A-4 Formato Internacional
210x297mm

ESCOLA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA
DA FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
PRAIA DE BOTAFOGO, 190/10.º ANDAR
RIO DE JANEIRO - BRASIL - CEP 22.250

LAUDO SOBRE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Como integrante da Banca Examinadora, designado pela EPGE para julgar a Dissertação de Mestrado, intitulada "MODELOS DE DETERMINAÇÃO DE PREÇOS DE ATIVOS E A MEDIDA DE MARTINGAL EQUIVALENTE", do candidato ao título Sr. Flavio Auler, apresento as seguintes ponderações que justificam meu parecer e voto:

1) A dissertação apresentada é uma excelente resenha da teoria de equilíbrio em mercados financeiros;

2) Desde a introdução até o Capítulo 4, onde trata do caso contínuo, o aluno Flavio Auler leva o leitor por intrincados métodos de teoria das decisões financeiras de maneira quase que imperceptível;

3) A resenha apresentada pode ser utilizada como texto para parte de um curso avançado em teoria econômica, ou em teoria das decisões financeiras.

Assim e nessas condições, sou de parecer que a referida Dissertação seja aprovada e outorgado o título pretendido pelo candidato e autor deste trabalho.

Rio de Janeiro, 03 de junho de 1991.

Sergio Ribeiro da Costa Werlang
Sergio Ribeiro da Costa Werlang,
Professor da EPGE e
Presidente da Banca Examinadora.

ESCOLA PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA
EPGE/FGV

A-4 Formato Internacional
210x297mm

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Sérgio Werlang pelo incentivo, ajuda e paciência não só durante a elaboração desta tese como em todo o curso de mestrado.

Agradeço também ao professor Aloísio Araújo pelo apoio e incentivo dado nos últimos meses.

Agradeço, acima de tudo, aos meus pais e irmãs, e a Rosaly, pelo apoio e carinho dado nos últimos anos, a quem dedico este trabalho.

ÍNDICE

Capítulo I: Introdução 1

Capítulo II: O Modelo Uniperiódico..... 5

Capítulo III: O Modelo Multiperiódico..... 34

Capítulo IV: O Modelo Multiperiódico com
Tempo Contínuo..... 63

Bibliografia:..... 104

CAPÍTULO I

Introdução

Em uma economia, o risco pode ser introduzido através da descrição de diversos estados da natureza, que são a realização de eventos exógenos que afetam os retornos dos ativos da economia. Os agentes negociam os diversos títulos disponíveis de modo a reduzir o risco inerente à existência dos diversos estados, determinando assim os preços dos ativos.

Uma forma de modelar uma economia com mercados financeiros é supor a existência de indivíduos com certa renda e que devem decidir como reparti-la em consumo presente e diversos ativos, de modo que no futuro os ativos possam ser realizados para se obter renda suficiente para o consumo futuro. A incerteza, caracterizada por uma coleção Ω com elementos ω_s determina os rendimentos dos ativos e, desta forma, afeta o consumo futuro (e possivelmente o consumo presente). Ou seja, o agente tenta transferir renda para o futuro montando uma carteira com os diversos ativos disponíveis, cujo retorno está associado à realização de um estado da natureza.

Suponha agora uma economia com dois períodos, e

com o risco representado por um número finito de estados da natureza (S estados) que são verificados apenas no período final. Neste caso, a decisão do indivíduo descrita anteriormente é o resultado da maximização de uma função de utilidade durante o período 0, determinando-se assim o consumo no período inicial e a demanda pelos N ativos disponíveis (o que, conseqüentemente, determina o consumo no período final).

Seja c_o o consumo no período 0, c_{1s} o consumo no período 1, no estado s, v_j o preço do ativo j no período 0, n_j a quantidade do ativo j comprada, $\bar{n}_j$ a quantidade do ativo possuida pelo indivíduo inicialmente (ou seja, os títulos são "exógenos"), y_{js} a realização do ativo j no estado s (que pode ser considerado como um "dividendo" pago ao acionista de uma certa empresa) e o patrimônio inicial determinado pela posse de uma renda w_o adicionada à carteira $\sum_{j=1}^{N} \bar{n}_j.v_j$. Conclui-se que a decisão do agente pode ser representada por:

$$\max \sum_{s=1}^{S} \Pi_s.u(c_o,c_{1s})$$

$$\text{sujeito a} \quad c_o + \sum_{j=1}^{N} n_j.v_j \leq w_o + \sum_{j=1}^{N} \bar{n}_j.v_j$$

$$c_{1s} \leq \sum_{j=1}^{N} n_j.y_{js} \qquad \text{(S equações)}$$

Com as hipóteses usuais sobre a função utilidade

as restrições se verificam com o sinal de igualdade.

O resultado da maximização acima é descrito pelas N equações:

$$v_j = \sum_{s=1}^{S} \frac{\Pi_s \cdot \frac{\partial u}{\partial c_{1s}}}{\sum_{s=1}^{S} \Pi_s \cdot \frac{\partial u}{\partial c_0}} \cdot y_{js} \qquad j=1,2,\ldots,N$$

Suponha agora que o primeiro título seja um ativo sem risco, ou seja, que o seu retorno $\frac{y_{1s}}{v_1}$ independa do estado da natureza e que $y_{1s} > 0$. Então:

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{\Pi_s \cdot \frac{\partial u}{\partial c_{1s}}}{\sum_{s=1}^{S} \Pi_s \cdot \frac{\partial u}{\partial c_0}} \cdot \frac{y_{1s}}{v_1} = 1 \qquad j=1,2,\ldots,N$$

Podemos definir Π_s^* para s = 1, 2, ... ,S como:

$$\Pi_s^* = \frac{\Pi_s \cdot \frac{\partial u}{\partial c_{1s}}}{\sum_{s=1}^{S} \Pi_s \cdot \frac{\partial u}{\partial c_0}} \cdot \frac{y_{1s}}{v_1} > 0$$

Com as hipóteses usuais sobre as funções de utilidade dos indivíduos temos então que $\Pi_s^* > 0$ e $\sum_{s=1}^{S} \Pi_s^* = 1$, ou seja, Π_s^* é uma probabilidade em Ω.

Para o título j, sendo j = 2, 3, ..., N, temos:

$$v_j = \left(\sum_{s=1}^{S} \frac{\Pi_s \cdot \frac{\partial u}{\partial c_{1s}}}{\sum_{s=1}^{S} \Pi_s \cdot \frac{\partial u}{\partial c_0}} \cdot \frac{y_{1s}}{v_1} \cdot y_{js} \right) \cdot \frac{1}{\frac{y_{1s}}{v_1}}$$

Defina a taxa de retorno sobre o título sem risco como:

$$1 + r = \frac{y_{1s}}{v_1}$$

Então temos:

$$v_j = \frac{1}{1 + r} \cdot \sum_{s=1}^{S} \Pi_s^* \cdot y_{js}$$

Logo o preço do título j é igual ao valor esperado relativamente à probabilidade Π_s^* do seu pagamento no período final descontado pela taxa de juros r. A esta probabilidade Π_s^* damos o nome de medida de martingal equivalente.

O presente trabalho visa analisar a existência e a unicidade da medida de martingal equivalente em um contexto mais geral, onde não é necessária a hipótese de existência de um título sem risco, além de estender os resultados para o caso de tempo contínuo.

CAPÍTULO II

O Modelo Uniperiódico

2.1- Descrição do modelo

Os elementos do modelo são:

a) Uma data inicial 0 e uma data terminal T, sendo que na data 0 os individuos podem negociar títulos e consumir e na data T apenas consumir.

b) Os estados da natureza são descritos por um espaço amostral Ω com S elementos, ou seja:

$$\Omega = \{ \omega_1 , \omega_2 , \dots , \omega_S \}$$

A cada estado da natureza associamos um elemento ω_s. Os S conjuntos $\{\omega_s\}_{s=1}^{S}$ formam então uma partição f_T de Ω, e definimos como $\mathcal{F}_T$ a álgebra gerada pela partição f_T de Ω.

A informação na data 0 é dada pela álgebra $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset , \Omega \}$ ao passo que na data T é dada pela álgebra $\mathcal{F}_T$. Ao conjunto $\{ \mathcal{F}_0 , \mathcal{F}_T \}$ damos o nome de estrutura de informação.

A probabilidade de ocorrência de cada estado ω_s é

$P(\omega_s)$, definindo assim o espaço de probabilidade $(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$.

Como veremos adiante a determinação dos preços dos ativos não dependerá da probabilidade de ocorrência dos estados ω_s. Os preços dos ativos dependerão das diversas probabilidades subjetivas dos indivíduos, que podem diferir da verdadeira distribuição de probabilidade associada aos eventos. Além disto, a medida de martingal equivalente não precisa ser igual à verdadeira distribuição de probabilidade, e em geral não é.

c) Existe um único bem de consumo perecível, não sendo possível estocá-lo para consumo no período seguinte. Desta forma, o único modo de se transferir renda de um período para outro é através da compra e venda de títulos.

d) Existem N títulos disponíveis para negociação. No modelo descrito na introdução supôs-se que havia uma oferta exógena de títulos, e que esses títulos seriam liqüidados na data final. Aqui adotaremos uma forma alternativa: suporemos que a oferta total de títulos é nula, de tal forma que para cada contrato comprado devem existir contratos vendidos, de modo a ter oferta total nula. Ou seja temos "títulos endógenos". Além disto, supõe-se que os títulos sejam infinitamente divisíveis e que não existam custos de transação.

Assim como na introdução, os títulos são caracterizados pelo seu pagamento na data T, que dependerá do estado da natureza a ser verificado. Logo para $1 \leq n \leq N$, o pagamento do título n é definido pela variável aleatória

$d_n(T)$ definida em $(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$. Podemos então definir a matriz de pagamentos $D(T)$ como:

$$D(T) = \begin{bmatrix} d_1(T,\omega_1) & d_2(T,\omega_1) & \dots & d_N(T,\omega_1) \\ d_1(T,\omega_2) & d_2(T,\omega_2) & \dots & d_N(T,\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1(T,\omega_S) & d_2(T,\omega_S) & \dots & d_N(T,\omega_S) \end{bmatrix}$$

Na matriz $D(T)$ cada linha representa um estado da natureza, e cada coluna um título. Portanto $D(T)$ é uma matriz $S \times N$.

e) Existem I individuos. Na data 0 os individuos sabem apenas qual é o conjunto de possiveis estados da natureza Ω, mas não sabem qual será o estado na data T. Os consumidores agem competitivamente, tomando os preços como dados.

f) Cada consumidor recebe uma dotação $e^i(0)$ do bem de consumo na data 0. Como os títulos são endógenos, não ocorre mais a liqüidação dos títulos, com o pagamento correspondente como no modelo descrito na introdução. Agora a soma dos contratos de todos os individuos é nula, logo também é nulo o total de pagamentos. Supõe-se então que o consumidor receba uma dotação $e^i(T,\omega_s)$ na data T, verificado o estado ω_s. Logo $e^i(T)$ é uma variável aleatória definida em $(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$. O par $e^i = \{ e^i(0),e^i(T) \}$ é chamado de processo de dotação do individuo i.

g) Os indivíduos consomem na data 0 e na data T. Como a dotação e os retornos dos ativos são incertos, o consumo passa a depender do estado da natureza a ser verificado. Logo o consumo é também uma variável aleatória c(T) definida no espaço de probabilidade $(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$. O par $c^i = \{ c^i(0), c^i(T) \}$ é chamado processo de consumo do indivíduo i.

Tomando as variáveis aleatórias definidas em $(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$ como vetores em $\mathbb{R}^S$ concluímos que o processo de consumo e de dotação podem ser considerados como vetores pertencentes ao espaço de consumo $X = \mathbb{R}^{S+1}_+$.

h) Os consumidores têm preferências descritas por funções de utilidade estritamente crescentes, estritamente côncavas e diferenciáveis. Mais adiante esta hipótese será relaxada.

Temos então a definição:

<u>Definição 2.1.1</u>: Uma economia $\mathcal{E} = \{ u^i , e^i , D \}$ é composta por I indivíduos, cada um com preferências descritas pela função utilidade u^i e com dotações e^i, e por N títulos caracterizados pela matriz de pagamentos D(T).

Com as hipóteses acima podemos definir a restrição orçamentária do indivíduo i como:

$$c(0) = e^i(0) - \sum_{n=1}^{N} \theta^i_n . p_n$$

$$c(T) = e^i(T) + \sum_{n=1}^{N} \theta^i_n . d_n(T)$$

Onde: $\theta_n \in \mathbb{R}^N$ é o porta-fólio do indivíduo i

$p_n \in \mathbb{R}^N$ são os preços dos N ativos

Note que enquanto os elementos da primeira equação são números reais, na segunda são funções $\mathcal{F}_T$ mensuráveis (temos S equações).

A restrição orçamentária do indivíduo i é $B(e^i,p)$, definida pelas equações acima. Temos então $c \in B(e^i,p)$ se e somente se $c-e^i \in B(0,p)$. Note que $B(0,p)$ é um subespaço vetorial de X, pois:

$$y \in B(0,p) \Rightarrow y(0) = - \sum_{n=1}^{N} \theta^y_n . p_n$$

$$y(T) = \sum_{n=1}^{N} \theta^y_n . d_n(T)$$

Portanto se $y \in B(0,p)$ e $x \in B(0,p)$ temos que $\alpha.x + \beta.y \in B(0,p)$.

O problema de cada indivíduo é então:

$$\max \quad E\,[\, u^i(c(0),c(T)) \,]$$

$$\text{suj. a } c \in B(e^i,p)$$

Onde a esperança é tomada relativamente à

distribuição de probabilidade subjetiva do individuo i, que pode perfeitamente diferir da verdadeira distribuição de probabilidade.

O equilibrio é alcançado quando a demanda agregada por cada ativo for nula, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{I} \theta^i = 0 \quad , \quad \theta^i \in \mathbb{R}^N$$

Temos então a definição formal de equilibrio:

Definição 2.1.2: O equilíbrio na data 0 consiste de um vetor de preços $p_n \in \mathbb{R}^N$, porta-fólios $\theta^i \in \mathbb{R}^N$, $1 \leq i \leq I$ tais que para todo individuo o processo de consumo gerado pelo processo de dotações e pelo porta-fólio θ^i maximize a sua utilidade no conjunto $B(e^i,p)$ e o mercado esteja em equilibrio, isto é,

$$\sum_{i=1}^{I} \theta^i = 0.$$

O equilibrio assim definido determina o processo de consumo $c^i = \langle c^i(0), c^i(T) \rangle$, $1 \leq i \leq I$.

2.2- Condição de Equilibrio

Seja a distribuição de probabilidade subjetiva de

cada individuo i dada por valores $\pi_s^i > 0$ associados a cada evento ω_s. Então o problema de maximização de cada individuo i é:

$$\max \sum_{s=1}^{S} \pi_s^i . u(c(0),c(T,\omega_s))$$

$$\text{suj. a} \qquad c(0) = e^i(0) - \theta.p$$

$$c(T) = e^i(T) + \theta^i.d(T)$$

Onde d(T) é uma variável aleatória $d(T) : \Omega \to \mathbb{R}^N$ e $\theta \in \mathbb{R}^N$

As condiçoes de equilíbrio são:

$$\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i . \frac{\partial u^i}{\partial c(0)} = \lambda_o$$

$$\pi_s^i . \frac{\partial u^i}{\partial c(T)} = \lambda_s$$

$$\lambda_o . p = \sum_{s=1}^{S} \lambda_s . d(T,\omega_s)$$

Sendo $\lambda = \{ \lambda_o, \lambda' \} = \{ \lambda_o, \lambda_1, \ldots , \lambda_S \}$ os multiplicadores de Lagrange.

A última equaçao pode ser reescrita como:

$$\lambda_o . p = \lambda' . D(T)'$$

Eliminando λ obtemos:

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{\pi_s^i \dfrac{\partial u}{\partial c(T,\omega_s)}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i \dfrac{\partial u}{\partial c(0)}} . d_n(T,\omega_s) = p_n$$

para n = 1, 2, ... , N.

E obtemos assim a condição de equilíbrio:

$$D(T)'. \begin{bmatrix} \dfrac{\pi_1^i \dfrac{\partial u}{\partial c(T,\omega_1)}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i \dfrac{\partial u}{\partial c(0)}} \\ \dfrac{\pi_2^i \dfrac{\partial u}{\partial c(T,\omega_2)}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i \dfrac{\partial u}{\partial c(0)}} \\ \vdots \\ \dfrac{\pi_S^i \dfrac{\partial u}{\partial c(T,\omega_S)}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i \dfrac{\partial u}{\partial c(0)}} \end{bmatrix} = p$$

Logo, dado um equilíbrio para a economia, existirá um vetor $\Psi^* \in \mathbb{R}^S$ tal que ele é solução do sistema $D(T)'.\Psi = p$. O vetor Ψ^* é chamado de vetor determinador de preços.

Dado um titulo n, $1 \leq n \leq N$, seu pagamento é representado por $d_n(T)$, e temos que seu preço é dado por:

$$p_n = d_n(T) \cdot \Psi^*$$

Estamos supondo indivíduos representados por utilidades estritamente crescentes, estritamente convexas e diferenciáveis. Podemos obter resultados semelhantes com hipóteses bem mais fracas.

2.3- Eficiência de Pareto

Suponha agora que os indivíduos possuam preferências completas, contínuas, crescentes e convexas, e que cada preferência seja descrita por uma função de utilidade u^i contínua, crescente e quase-côncava.

Seja $c^i = \{ c^i(0), c^i(T) \}$ a solução da maximização do indivíduo i, para $1 \leq i \leq I$. Temos então as definições:

Definição 2.3.1: Uma alocação $\{c^i\}$, onde $c^i = \{ c^i(0), c^i(T) \}$ é factível se e somente se $c^i \in B(e^i, p)$ e:

$$\sum_{i=1}^{I} c^i(0) = \sum_{i=1}^{I} e^i(0) \qquad \text{e}$$

$$\sum_{i=1}^{I} c^i(T) = \sum_{i=1}^{I} e^i(T)$$

Definição 2.3.2: Uma alocação factível $\{c^i\}$ é eficiente no sentido de Pareto se e somente se não existe outra alocação $\{b^i\}$ tal que todo indivíduo i prefira estritamente b^i a c^i.

Dada uma economia $\mathcal{E}$ com S estados e N títulos, não se pode garantir a priori que toda alocação seja alcançável. É conveniente definir o que vem a ser alocação alcançável de modo que a definição não dependa de c(0):

Definição 2.3.3: Um processo de consumo $c^i = \{ c^i(0), c^i(T) \}$ é alcançável a preços $p \in \mathbb{R}^N$ em uma economia $\mathcal{E}$ se e somente se existir um processo de dotações $e = \{ e(0), e(T) \}$ tal que $e(T) = 0$ e $c \in B(e,p)$. O conjunto de processos alcançáveis é designado por $\mathcal{M}$.

Logo $c^i = \{ c^i(0), c^i(T) \}$ é alcançável se existir $\theta \in \mathbb{R}^N$ tal que:

$$c(0) - e(0) = \theta.p$$

$$c(T) = D(T).\theta$$

Podemos então enunciar um teorema relacionando processos de consumo alcançáveis a alocações eficientes no sentido de Pareto, mas antes precisamos de uma definição e de um teorema:

Definição 2.3.4: Uma arbitragem é um porta-fólio que dá a um individuo com dotação nula um processo de consumo não negativo e não nulo. Podemos ter dois tipos de arbitagem:

(i) Arbitragem do primeiro tipo:

é um porta-fólio $\theta \in \mathbb{R}^N$ tal que:

$\theta.p \leq 0$

$D(T).\theta \geq 0$, sendo que $d(T,\omega).\theta > 0$

para algum $\omega \in \Omega$

(ii) Arbitragem do segundo tipo:

é um porta-fólio $\theta \in \mathbb{R}^N$ tal que:

$\theta.p < 0$

$D(T).\theta \geq 0$

Teorema 2.3.1: Uma economia ξ com indivíduos com preferências completas, contínuas, crescentes e convexas está em equilíbrio se e somente se não existe porta-fólio de arbitragem do primeiro ou do segundo tipo.

dem.:

Suponha que exista equilíbrio, e seja θ^i o porta-fólio do individuo i e suponha que exista um porta-fólio de arbitragem do primeiro ou do segundo tipo θ^*. Então $\theta^i + \theta^*$ é um porta-fólio que gera uma alocação de consumo que nunca é inferior à alocação de equilíbrio original e que ou é superior a esta alocação na data 0 (se θ^* for do segundo tipo) ou é superior em algum estado na data T (se θ for do primeiro tipo). Esta alocação está em B(e,p) e como a preferência é crescente, o individuo a

prefere estritamente à alocação de consumo original, contradizendo a hipótese de que haja equilíbrio.■

Finalmente podemos enunciar o teorema:

Teorema 2.3.2: Se todo processo de consumo é alcançável para qualquer sistema de preços p, então toda alocação de equilíbrio é eficiente no sentido de Pareto.

dem.:

Suponha que $\{c^i\}$ seja uma alocação de equilíbrio e que $\{c^i\}$ nao seja eficiente no sentido de Pareto. Então existe uma alocação factível $\{b^i\}$ tal que todo indivíduo prefere b^i a c^i. Logo o processo de consumo $a^i = b^i - e^i$ é alcançável e então existem estratégias θ^i e números reais α^i tais que para todo indivíduo i:

$$a^i(0) = \alpha^i - \theta^i.p \qquad (1)$$

$$a^i(T) = \theta^i.d(T) \qquad (2)$$

Como $\{b^i\}$ é factível temos:

$$\sum_{i=1}^{I} a^i(T) = 0$$

Somando sobre i na equação (1):

$$\sum_{i=1}^{I} a^i(T) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{n=1}^{N} \theta^i_n.d_n(T) = \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{I} \theta^i_n \right).d_n(T)$$

Isto implica em:

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{I} \theta_n^i \right) . p_n = 0 \qquad (3)$$

porque senão teremos uma oportunidade de arbitragem, o que contraria a hipótese de $\{b^i\}$ ser alocação de equilíbrio.

Concluímos, então, que o processo de consumo $\{b^i(0)-\alpha^i, b^i(T)\} \in B(e^i,p)$.

Se $\alpha^i \leq 0$ então o indivíduo prefere $\{b^i(0)-\alpha^i, b^i(T)\}$ a b^i, e portanto o prefere a c^i, contrariando a optimalidade de c^i. Logo $\alpha^i > 0$, $\forall$ i. Mas somando as equações (1) em i e usando a equação (3) obtemos:

$$\sum_{i=1}^{I} b^i(0) = \sum_{i=1}^{I} e^i(0) + \sum_{i=1}^{I} \alpha^i$$

e isto contradiz o fato de $\{b^i\}$ ser factível.■

O teorema acima impõe condições nos porta-fólios dos indivíduos, que são elementos endógenos no modelo. É possível impor condições sobre os elementos exógenos do modelo de modo a garantir eficiência de Pareto. Ou seja:

<u>Teorema 2.3.3</u>: Se posto(D(T)) = S, então todo processo de consumo é alcançável para todo sistema de preços p e conseqüentemente toda alocação de consumo é eficiente no

sentido de Pareto.

dem.:

Um processo de consumo é alcançável se e somente se

$$D(T).\theta = c(T)$$

tem uma solução θ^*. Mas se D(T) tem posto S esta solução existirá.■

Quando o posto(D(T)) = S temos que todo processo de consumo é alcançável. Seja então $\mathcal{S}$ um conjunto de S ativos tais que seus pagamentos $d_n(T)$ formem um conjunto linearmente independente. Então dado certo ativo caracterizado por seu pagamento $d^*(T)$, basta considerar $d^*(T)$ como sendo um processo de consumo tal que:

$$-p^* = c(0)$$
$$d^*(T) = c(T)$$

Como c = { c(0),c(T) } é alcançável temos que este título pode ser duplicado através de um porta-fólio composto por títulos em $\mathcal{S}$. Ou seja, sendo este porta-fólio θ^*, teremos:

$$p^* = \theta^*.p$$
$$d^*(T) = D(T).\theta^*$$

Caso as equações acima não se verifiquem, é fácil ver que existirá uma oportunidade de arbitragem.

Esta situação merece uma definição:

Definição 2.3.5: Um mercado é completo se e somente se todo processo de consumo é alcançável.

Podemos então enunciar os teoremas anteriores de outra forma:

Teorema 2.3.4: Se o mercado é completo, então toda alocação de equilíbrio é eficiente no sentido de Pareto.

Teorema 2.3.5: O mercado é completo se e somente se posto(D(T)) = S .

2.4 Medida de Martingal Equivalente em Mercados Completos

Vamos agora analisar a existência e a unicidade da medida de martingal equivalente no caso de termos um mercado completo. Suponha que exista um título sem risco. Sem perda de generalidade, suponha que o título sem risco seja o título j = 1. Defina a taxa de juros como:

$$1 + r = \frac{d_1}{p_1}$$

Então, como visto anteriormente, se as utilidades forem estritamente crescentes, estritamente convexas e diferenciaveis, teremos a condição de equilíbrio:

$$D(T) \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\pi_1^i \dfrac{\partial u}{\partial c(T,\omega_1)}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i \dfrac{\partial u}{\partial c(0)}} \\ \\ \dfrac{\pi_2^i \dfrac{\partial u}{\partial c(T,\omega_2)}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i \dfrac{\partial u}{\partial c(0)}} \\ \\ \vdots \\ \\ \dfrac{\pi_S^i \dfrac{\partial u}{\partial c(T,\omega_S)}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i \dfrac{\partial u}{\partial c(0)}} \end{bmatrix} = p$$

Pelo mesmo procedimento adotado na introdução, temos:

$$D(T)'. \begin{bmatrix} \dfrac{\pi_1^i \dfrac{\partial u}{\partial c(T,\omega_1)}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i \dfrac{\partial u}{\partial c(0)}} \dfrac{d_1}{p_1} \\ \\ \dfrac{\pi_2^i \dfrac{\partial u}{\partial c(T,\omega_2)}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i \dfrac{\partial u}{\partial c(0)}} \dfrac{d_1}{p_1} \\ \\ \vdots \\ \\ \dfrac{\pi_S^i \dfrac{\partial u}{\partial c(T,\omega_S)}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i \dfrac{\partial u}{\partial c(0)}} \dfrac{d_1}{p_1} \end{bmatrix} = (1+r).p$$

E assim definimos a medida de martingal equivalente como:

$$\pi^*(\omega_s) = \frac{\pi_s^i \dfrac{\partial u}{\partial c(T,\omega_s)}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i \dfrac{\partial u}{\partial c(0)}} \frac{d_1}{p_1}$$

Logo $\pi^*(\omega_s) > 0$ e da primeira linha do sistema acima:

$$\sum_{s=1}^{S} \pi^*(\omega_s) = 1$$

Sendo o mercado completo, temos posto(D(T)) = S, de modo que a solução do sistema acima é única. Portanto dado qualquer probabilidade subjetiva π^i e alocação de consumo c^i de certo indivíduo i, teremos sempre o mesmo vetor determinador de preços. Isto implica em igualdade entre as taxas marginais de substituição dos indivíduos, uma condição para eficiência no sentido de Pareto (supondo indivíduos com funções de utilidade diferenciáveis).

Suponha agora que tenhamos os indivíduos representados por preferências completas, contínuas, crescentes e convexas. Então dado o sistema de preços de equilíbrio p temos o sistema:

$$D(T)' \cdot Q = p$$

Como o mercado é completo, temos posto(D(T)) = S e dado p o sistema sempre terá solução e esta solução será única. Temos então a definição:

<u>Definição 2.4.1</u>: Se para um sistema de preços p o sistema de equações:

$$D(T)' \cdot Q = (1 + r).p$$

tem uma solução positiva $Q(\omega_1) > 0$, $Q(\omega_2) > 0$, ... , $Q(\omega_S) > 0$, então esta solução é chamada de uma medida de martingal equivalente.

Como o ativo 1 é o titulo sem risco, temos que a primeira equação equivale a $\sum_{s=1}^{S} Q(\omega_s) = 1$. Se $Q(\omega) > 0$, $\forall\ \omega$, então Q é uma medida de probabilidade em Ω. Falta mostrar em que circunstâncias isto ocorrerá. Seja então o teorema:

<u>Teorema 2.4.1</u>: Uma medida de martingal equivalente Q existe se e somente se o sistema de preços p não admite oportunidades de arbitragem do primeiro ou do segundo tipo.

dem.:

($\Rightarrow$) Suponha que o sistema

$$D(T)' \,.\, Q = (1 + r).p$$

possua uma solução positiva Q. Multiplicando a equação acima por θ temos:

$$\theta'.D(T)' \,.\, Q = (1 + r).\theta'.p$$

Então para qualquer estratégia θ tal que os elementos de $\theta'.D(T)'$ sejam não negativos, o custo inicial $\theta'.p$ é também não negativo pois por hipótese a medida de martingal equivalente existe. Portanto não existe oportunidade de arbitragem do segundo tipo. Adicionalmente, se algum elemento de $\theta'.D(T)'$ é positivo, então $\theta'.p$ é também positivo, logo não existe oportunidade de arbitragem do

primeiro tipo. Conclui-se então que não existem oportunidades de arbitragem do primeiro ou do segundo tipo.

($\Leftarrow$) Suponha que o sistema de preços p não permita oportunidade de arbitragem do primeiro ou do segundo tipo. Considere então o subespaço vetorial $B(0,p)$ de $\mathbf{X}$, e seja $\mathbf{H}$ o conjunto dos vetores $x \in \mathbf{X}$ alcançáveis ou não, tais que :

(i) O processo de consumo c é não negativo, isto é, $c(0) \geq 0$ e $c(T) \geq 0$

(ii) O processo de consumo c satisfaz

$$c(0) + \sum_{s=1}^{S} c(T,\omega_s) \geq 1$$

Temos que $B(0,p)$ é um subespaço vetorial de $\mathbf{X}$, e que $\mathbf{H}$ é um subespaço vetorial de $\mathbf{X}$ não vazio, convexo e fechado. Além disso, $B(0,p) \cap \mathbf{H} = \{ \emptyset \}$, senão haveria oportunidade de arbitragem (do primeiro tipo caso $c(0) > 0$ e do segundo tipo caso para algum s, $1 \leq s \leq S$ ocorra $c(T,\omega_s) > 0$). Logo, existe um funcional linear $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$, $\forall\, c \in B(0,p)$ e $f(c) > 0$, $\forall\, c \in \mathbf{H}$.

Seja $u_o, u_1, \ldots, u_S$ a base ortonormal de $\mathbf{X}$. Então qualquer processo de consumo $c = \{ c(0), c(T) \}$ tem a representação:

$$c = c(0).u_o + \sum_{s=1}^{S} c(T,\omega_s).u_s$$

como f é um funcional linear:

$$f(c) = c(0).f(u_0) + \sum_{s=1}^{S} c(T,\omega_s).f(u_s)$$

como $u_s \in H$, $\forall$ s, temos $f(u_s) > 0$. Também temos que para todo n, o processo $\{ -p_n, d_n(T) \} \in B(0,p)$ e então:

$$f(\{ -p_n, d_n(T) \}) = -p_n.f(u_0) + \sum_{s=1}^{S} d_n(T,\omega_s).f(u_s) = 0$$

Definindo

$$Q(\{\omega_s\}) = (1 + r).\frac{f(u_s)}{f(u_0)} \qquad s = 1, \ldots, S$$

Obtemos:

$$D(T)' \,.\, Q = (1 + r).p$$

o que completa a demonstração.∎

Logo concluímos que no caso de termos mercados completos com um titulo sem risco o equilibrio é eficiente no sentido de Pareto, toda alocação de consumo é alcançável e a medida de martingal equivalente existe e é única.

Um título pode ter seu preço determinado sem ambigüidade em um mercado completo se e somente se o titulo é redundante neste mercado, ou seja, se seu pagamento pode ser reproduzido por uma carteira composta pelos titulos disponíveis para negociação. Todas as fórmulas de

determinação de preços de ativos que independem das preferências e dotações dos agentes assumem que o ativo a ter seu preço determinado é alcançável, logo redundante neste mercado.

Dado qualquer ativo, caracterizado por seu pagamento d(T), temos que o seu preço será determinado por:

$$p = \frac{1}{(1 + r)}.d(T).Q$$

dependendo assim da utilidade dos agentes.

Contudo, suponha que o mercado seja completo e que existam mais títulos do que estados da natureza, ou seja, N > S. Fixe um conjunto $\mathcal{S}$ de S títulos linearmente independentes. Então para qualquer ativo que não pertença a $\mathcal{S}$, seja ele o ativo caracterizado pelo pagamento $d_{S+1}(T)$, teremos:

$$d_{S+1}(T) = \sum_{s=1}^{S} \alpha_s . d_s(T)$$

Logo o seu preço será dado por

$$p_{S+1} = \sum_{s=1}^{S} \alpha_s . p_s$$

e dependerá apenas dos preços dos ativos em $\mathcal{S}$, tomados como dados.

As conclusões acima independem da existência de um

título sem risco. Isto porque dado um conjunto qualquer $\mathcal{E}$ de S ativos linearmente independentes, podemos sempre obter o título sem risco. Seja $d_n(T)$, $1 \leq n \leq S$ o pagamento do título n em $\mathcal{E}$. Então o título sem risco tem como pagamento $d(T,\omega) = A > 0$, $\forall\ \omega \in \Omega$, e assim podemos achar β_s, $s = 1, 2, \ldots, S$ tal que:

$$A.(1, 1, \ldots, 1)' = d(T) = \sum_{s=1}^{S} \beta_s . d_s(T)$$

Logo um porta-fólio com β_s unidades de cada título n corresponderá ao título sem risco.

2.5- Medida de Martingal Equivalente em Mercados Incompletos

Vamos agora analisar a existência e a unicidade de uma medida de martingal equivalente em um mercado incompleto. Neste caso, já não é conveniente supor a existência de um ativo sem risco, posto que o mesmo pode não ser alcançável. Ao invés disso, suponha que exista um título k tal que $d_k(T,\omega) > 0$, $\forall\ \omega \in \Omega$.

Supondo utilidades estritamente crescentes, estritamente côncavas e diferenciáveis, temos a condição de equilíbrio:

$$D(T)'. \begin{bmatrix} \dfrac{\pi_1^i \dfrac{\partial u}{\partial c(T,\omega_1)}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i \dfrac{\partial u}{\partial c(0)}} \\ \\ \dfrac{\pi_2^i \dfrac{\partial u}{\partial c(T,\omega_2)}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i \dfrac{\partial u}{\partial c(0)}} \\ \\ \vdots \\ \\ \dfrac{\pi_S^i \dfrac{\partial u}{\partial c(T,\omega_S)}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i \dfrac{\partial u}{\partial c(0)}} \end{bmatrix} = p$$

Para simplificar faça uma permutação de índices de modo que o título k seja o primeiro, e para cada s = 1, 2, ..., S divida todos os pagamento dos demais títulos pelo pagamento do primeiro título, obtendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{d_2(T,\omega_1)}{d_1(T,\omega_1)} & \frac{d_2(T,\omega_2)}{d_1(T,\omega_2)} \cdots & \frac{d_2(T,\omega_S)}{d_1(T,\omega_S)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{d_N(T,\omega_1)}{d_1(T,\omega_1)} & \frac{d_N(T,\omega_2)}{d_1(T,\omega_2)} \cdots & \frac{d_N(T,\omega_S)}{d_1(T,\omega_S)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\pi_1^i \frac{\partial u}{\partial c(T,\omega_1)}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i \frac{\partial u}{\partial c(0)}} \cdot \frac{d_1(T,\omega_1)}{p_1} \\ \vdots \\ \frac{\pi_s^i \frac{\partial u}{\partial c(T,\omega_1)}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i \frac{\partial u}{\partial c(0)}} \cdot \frac{d_1(T,\omega_S)}{p_1} \end{bmatrix} = \frac{p}{p_1}$$

Concluimos então que o equilíbrio na economia com N títulos com pagamentos $d_n(T,\omega_s)$ e preços p_n , n = 1, 2, ... , N é o mesmo da economia com um título sem risco com $p_1 = d_1(T,\omega_s) = 1$, $\forall$ s e demais N-1 títulos com pagamentos $\frac{d_n(T,\omega_s)}{d_1(T,\omega_s)}$ e preços $\frac{p_n}{p_1}$.

Defina a medida de martingal equivalente como:

$$\Pi^*(\omega_s) = \frac{\pi_s^i \frac{\partial u}{\partial c(T,\omega_s)}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i \frac{\partial u}{\partial c(0)}} \cdot \frac{d_1(T,\omega_s)}{p_1}$$

Temos então $\Pi^*(\omega_s) > 0$ e $\sum_{s=1}^{S} \Pi^*(\omega_s) = 1$.

Note que caso não exista um ativo tal que $d_n(T,\omega) > 0$, $\forall\ \omega \in \Omega$ não existirá medida de martingal equivalente.

Suponha agora que tenhamos apenas indivíduos representados por preferências completas, contínuas, crescentes e convexas. Seja $\overline{D(T)}$ a matriz:

$$\overline{D(T)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \dfrac{d_2(T,\omega_1)}{d_1(T,\omega_1)} & \dfrac{d_2(T,\omega_2)}{d_1(T,\omega_2)} & \cdots & \dfrac{d_2(T,\omega_S)}{d_1(T,\omega_S)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{d_N(T,\omega_1)}{d_1(T,\omega_1)} & \dfrac{d_N(T,\omega_2)}{d_1(T,\omega_2)} & \cdots & \dfrac{d_N(T,\omega_S)}{d_1(T,\omega_S)} \end{bmatrix}$$

E o vetor de preços dado por:

$$\overline{p}' = [\ 1 \quad p_2/p_1 \quad \cdots \quad p_N/p_1\ ]$$

obtemos o sistema:

$$\overline{D(T)}'.Q = \overline{p}$$

Como o mercado é incompleto, temos posto(D(T)) < S o que implica em posto($\overline{D(T)}$) < S. Logo dado o vetor de preços de equilíbrio $\overline{p}$, o sistema acima sempre terá solução, mas a solução não será única. Como definido anteriormente, se a solução Q for tal que $Q(\omega_1) > 0$, ... , $Q(\omega_S) > 0$, então a solução é a medida de martingal equivalente.

Como temos (pela primeira linha) $\sum_{s=1}^{S} Q(\omega_s) = 1$, então Q é uma medida de probabilidade em Ω. Pelo teorema enunciado anteriormente temos que esta medida existirá se e somente se o sistema de preços $\overline{p}$ não permitir oportunidades de arbitragem. Pela definição de $\overline{p}$ temos que a medida de

martingal equivalente existirá se e somente se o sistema de preços p não admitir oportunidades de arbitragem.

Como temos posto($\overline{D(T)}$) < S, a solução Q^* não será única. Logo dado um indivíduo com probabilidade subjetiva π^i e alocação de consumo ótima c^i, seu vetor determinador de preços associado está bem definido, e teremos um vetor determinador de preços para cada indivíduo. Contudo, dado o pagamento d(T) de certo titulo alcançável seu preço determinado por cada vetor determinador de preços será o mesmo.

Porém, para a determinação de preços no caso de mercados incompletos, nem todo processo de consumo é alcançável. Para provar isto, precisamos do seguinte teorema:

<u>Teorema 2.5.1</u>: Para qualquer operador linear $A : \mathbb{R}^u \to \mathbb{R}^v$ existe um operador linear $B : \mathbb{R}^v \to \mathbb{R}^{v-posto(A)}$ tal que:

$$\text{imagem}(A) = \text{núcleo}(B).$$

dem.:

Seja k = posto(A) < v.

Sejam $\{ v_1, v_2, \ldots, v_k \}$ vetores pertencentes a $\mathbb{R}^u$ tais que $\{ Av_1, Av_2, \ldots, Av_K \}$ formam uma base da imagem(A) = $\mathscr{A}$. Temos então que $\mathbb{R}^v = \mathscr{A} + \mathscr{A}^\perp$. Seja $\{ u_1, u_2, \ldots, u_{v-k} \}$ uma base de $\mathscr{A}^\perp$. Crie o operador linear B com domínio em $\mathbb{R}^v$ representado pela matriz (V-K)xV cuja j-ésima linha é composta pelo vetor u_j. Logo, pela definição de $\mathscr{A}^\perp$ temos:

$$x \in \mathscr{A} \text{ e } u_j \in \mathscr{A}^\perp \iff x'.u_j = 0, \qquad 1 \le j \le u-k$$

Ou seja:

$$x \in \mathcal{A} \iff B.x = 0$$

E assim temos imagem(A) = núcleo(B).∎

Podemos então aplicar o teorema à matriz D(T), que é um operador linear $D(T) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^S$. Se uma alocação é tal que $c \in B(e^i,p)$, então:

$$\begin{bmatrix} c(T,\omega_1) - e(T,\omega_1) \\ \vdots \\ c(T,\omega_S) - e(T,\omega_S) \end{bmatrix} = D(T).\theta$$

Logo existe um operador $F : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^{S-posto(D(T))}$ tal que:

$$F(\ c(T)-e(T)\ ) = 0$$

Ou seja, temos S - posto(D(T)) restrições lineares em $B(e^i,p)$. Logo o espaço das alocações alcançáveis é o subespaço $\mathcal{M}$ de $\mathbf{X}$ definido por:

$$\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \text{núcleo}(F)$$

Como determinar o preço de um título em um mercadoincompleto? Suponha que existam N títulos e S estados, e que se queira determinar o preço de um certo título representado pelo pagamento $d_{n+1}(T)$. Então temos duas

hipóteses:

(i) O ativo é redundante, ou seja, é uma combinação linear dos pagamentos dos demais N títulos. Este caso é semelhante ao de mercados completos, e temos:

$$d_{N+1}(T) = \sum_{n=1}^{s} \alpha_n \cdot d_n(T)$$

E o seu preço será dado por

$$p_{N+1} = \sum_{n=1}^{s} \alpha_n \cdot p_n$$

(ii) O ativo não é redundante, e neste caso não pode ser expresso como combinação linear dos demais N títulos. Neste caso o subespaço $\mathcal{M}$ de $\mathbf{X}$ será expandido em uma dimensão, e provavelmente haverá uma alteração no processo de consumo dos indivíduos, alterando assim a medida de martingal equivalente, e com isso todos os demais preços. O resultado é que a determinação do preço dependerá das utilidades e dotações dos indivíduos, conforme a fórmula deduzida anteriormente.

CAPÍTULO III

O Modelo Multiperiódico

A extensão natural do modelo com um período visto anteriormente é o modelo multiperiódico, com um número finito de estados e títulos. A diferença principal entre os dois modelos é a possibilidade de serem realizadas transações envolvendo os títulos, com os agentes alterando seus porta-fólios a cada período. Esta modificação permite, como veremos, que os agentes possam ampliar o conjunto de processos de consumo alcançáveis com o mesmo número de títulos, reduzindo assim a quantidade necessária de títulos para se ter um mercado completo.

3.1 Descrição do modelo

Os elementos do modelo são:

(a) Uma data inicial 0, uma data terminal T, datas intermediárias $t = 1, 2, \ldots, T-1$, com possibilidade de negociação com títulos em $t = 0, 1, 2, \ldots, T-1$.

(b) Os estados da natureza são descritos por um espaço amostral Ω com S elementos, ou seja:

$$\Omega = \{ \omega_1 , \omega_2 , \dots , \omega_S \}$$

A cada estado da natureza associamos um elemento ω_s. Os S conjuntos $\{\omega_s\}_{s=1}^{S}$ formam então uma partição f_T de Ω, e definimos como $\mathcal{F}_T$ a álgebra gerada pela partição f_T de Ω.

A informação na data 0 é então dada pela álgebra $\mathcal{F}_0 = \{ \emptyset, \Omega \}$ ao passo que na data T é dada pela álgebra $\mathcal{F}_T$. Nas datas intermediárias, ou seja, em t = 1, 2, ..., T-1 a informação é dada da seguinte forma: toma-se a partição imediatamente anterior e a amplia, tornando-a "mais fina". Ou seja, temos a definição:

<u>Definição 3.1.1</u>: A partição $g = \{ g_1, g_2, \dots, g_v \}$ é mais fina do que a partição $f = \{ f_1, f_2, \dots, f_u \}$ se e somente se todo conjunto de g é subconjunto de algum conjunto de f.

Ou seja, para cada data t, tomamos a partição f_{t-1} e a tornamos mais fina, criando assim a partição f_t. Com a partição f_t geramos a álgebra $\mathcal{F}_t$. Deste modo obtemos uma seqüência de álgebras $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_T$. Então podemos finalmente definir qual é a informação disponível aos indivíduos a cada dada t:

<u>Definição 3.1.2</u>: Uma estrutura de informação F_T é uma seqüência de álgebras $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_T$ tal que:

1. $\mathcal{F}_0 = \{ \emptyset, \Omega \}$
2. $\mathcal{F}_t$ é a álgebra gerada por f_t.

3. Para cada $0 \leq t \leq T-1$ a partição f_{t+1} é mais fina do que a partição f_t, e $\mathcal{F}_t$ é a álgebra gerada por f_t.

A cada estado $\omega_s \in \Omega$ associamos a probabilidade $P(\omega_s) > 0$, obtendo assim o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$.

(c) Existe apenas um bem perecível.

(d) Existem N títulos endógenos disponíveis para negociação. Os títulos são supostos infinitamente divisíveis e não existem custos de transação. Os títulos pagam dividendos a cada data t, $1 \leq t \leq T$. O equilíbrio é um equilíbrio de expectativas racionais, no sentido de que os indivíduos sabem quais serão os preços que prevalecerão no futuro, contingentes à ocorrência de cada estado da natureza.

(e) Existem I indivíduos. Na data 0 os indivíduos conhecem o espaço amostral Ω, mas não sabem qual será o estado na data T. Na data T os indivíduos verificam qual estado ocorreu. Nas datas $t = 1, 2, \ldots, T-1$ a informação dos indivíduos se situa entre estes dois extremos, e é descrita pela álgebra $\mathcal{F}_t$ (cada elemento de $\mathcal{F}_t$ é um evento).

(f) Cada indivíduo recebe uma dotação do bem de consumo a cada data $t = 0, 1, \ldots, T$. O processo de dotação do indivíduo i é a seqüência de variáveis aleatórias $e^i = \{ e^i(0), e^i(1), \ldots, e^i(T) \}$, ou seja, cada $e^i(t)$ é uma função $\mathcal{F}_t$-mensurável, definida em Ω. O fato de o processo de dotação ser $\mathcal{F}_t$-mensurável vem da necessidade de que ele não deve acrescentar informação aos indivíduos. Ou seja, o

processo está adaptado à estrutura de informação F_T.

(g) Cada título paga um dividendo a cada data $t = 1, 2, \ldots, T$. O processo de dividendos do título n é a seqüência de variáveis aleatórias $d_n = \{ d_n(1), d_n(2), \ldots, d_n(T) \}$. Como no item anterior, o processo de dividendos não deve acrescentar informação aos indivíduos.

(h) Cada indivíduo consome nas datas $t = 0, 1, 2, \ldots, T$. O processo de consumo do indivíduo i é a seqüência de variáveis aleatórias $c^i = \{ c^i(0), c^i(1), \ldots, c^i(T) \}$.

(i) Os indivíduos têm preferências descritas por funções de utilidade estritamente crescentes, estritamente côncavas e diferenciáveis. Mais adiante estas hipóteses serão relaxadas.

Temos então a seguinte definição.

<u>Definição 3.1.3</u>: Uma economia $\mathcal{E} = \{ u^i, e^i, d_n \}$ é composta por I indivíduos, cada um com preferências descritas pela função de utilidade u^i e com processo de dotação e^i, e por N títulos com dividendos d_n.

O processo de consumo e de dotação são, pela definição, seqüências de funções $\mathcal{F}_t$-mensuráveis definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}_+$, sendo cada álgebra $\mathcal{F}_t$ gerada pela partição f_t. Chamando de $\#(\mathcal{F}_t)$ o número de elementos da partição f_t que gerou $\mathcal{F}_t$, e considerando os processos de consumo e dotação como vetores, temos que o espaço de consumo sobre o qual os indivíduos maximizam suas utilidades

é:

$$X = \prod_{t=0}^{T} \mathbb{R}^{\#(\mathcal{F}_t)}$$

Para evitar a constante repetição de condições de mensurabilidade que garantem a consistência informacional, precisamos definir o que vem a ser um processo previsível:

Definição 3.1.4: A seqüência de variáveis aleatórias $x = \{ x(1), x(2),..., x(T) \}$ é previsível relativamente à álgebra $\mathcal{F}_t$ se e somente se cada $x(t)$ é $\mathcal{F}_{t-1}$-mensurável. Uma sequência de variáveis aleatórias previsíveis é chamada de um processo previsível.

Ou seja, x é previsível se e somente se para cada $t = 1, 2, \ldots, T-1$ a seqüência $y(t) = x(t+1)$, é variável aleatória definida em $(\Omega,\mathcal{F}_t)$.

Com as hipóteses e definições acima podemos definir a restrição orçamentária do indivíduo i como:

Definição 3.1.5: Dado o processo de dotação e^i e de preços dos títulos dados pela seqüência de variáveis aleatórias $p = \{ p_n(0), p_n(1),..., p_n(T-1) \}$, temos que a restrição orçamentária $B(e^i,p)$ é o subconjunto do conjunto de consumo X tal que $c^i \in B(e^i,p)$ se e somente se existe uma seqüência de variáveis aleatórias previsíveis $\theta^i_n(t)$, $1 \leq t \leq T$, tal

que para $t = 0$:

$$c^i(0) + \sum_{n=1}^{N} \theta_n^i(1).p_n(0) = e^i(0)$$

e para qualquer t, $1 \leq t \leq T-1$:

$$c^i(t) = e^i(t) + \sum_{n=1}^{N} [\theta_n^i(t)-\theta_n^i(t+1)].p_n(t) + \sum_{n=1}^{N} \theta_n^i(t).d_n(t)$$

e para $t = T$:

$$c^i(T) = e^i(T) + \sum_{n=1}^{N} \theta_n^i(T).p_n(T) + \sum_{n=1}^{N} \theta_n^i(T).d_n(T)$$

Note que como os títulos são endógenos, $\theta_n^i(0) = 0$. Como o modelo tem apenas T períodos, $\theta_n^i(T+1) = 0$ e $p_n(T) = d_n(T)$.

A seqüência de variáveis aleatórias $\theta_n^i = \{ \theta_n^i(1), \theta_n^i(2),..., \theta_n^i(T) \}$ é chamada de estratégia de negociação.

Como no modelo uniperiódico, temos $c \in B(e^i,p)$ se e somente se $c-e^i \in B(0,p)$, e $B(0,p)$ é um subespaço vetorial de X.

O problema de maximização do indivíduo i é então:

$$\max \quad E^i[\, u(\, c(0),c(1),...,c(T)\,)\,]$$

$$\text{sujeito a } c \in B(e^i,p)$$

Aqui a esperança é tomada relativamente à

distribuição de probabilidade subjetiva do indivíduo i, que pode diferir da verdadeira distribuição de probabilidade.

O equilíbrio, então, é alcançado quando a demanda agregada de cada ativo é nula, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{I} \theta^i(t) = 0 \qquad \theta^i(t) \in \mathbb{R}^N \qquad 1 \leq t \leq T$$

Temos então a definição formal de equilíbrio:

<u>Definição 3.1.6</u>: O equilíbrio na data 0 consiste de uma seqüência de variáveis aleatórias $p = \{ p_n(0), p_n(1), \ldots, p_n(T-1) \}$, para $1 \leq n \leq N$, chamada de processo de preços, uma seqüência de variáveis aleatórias $\theta^i_n = \{ \theta^i_n(1), \theta^i_n(2), \ldots, \theta^i_n(T) \}$ para $1 \leq i \leq I$ e $1 \leq n \leq N$, chamada de estratégia de negociação, tais que para todo indivíduo o processo de consumo gerado pelo processo de dotações e pelas estratégias de negociação θ^i_n maximizem sua utilidade no conjunto $B(e^i,p)$ e o mercado esteja em equilíbrio, isto é:

$$\sum_{i=1}^{I} \theta^i(t) = 0 \qquad \theta^i(t) \in \mathbb{R}^N \qquad 1 \leq t \leq T$$

O equilíbrio assim definido determina o processo de consumo $c^i = \{ c^i(0), c^i(1), \ldots, c^i(T) \}$, para $1 \leq i \leq I$.

3.2 Condição de Equilíbrio

Suponha que as utilidades dos indivíduos sejam separáveis. Então o problema de maximização do indivíduo i é:

$$\max \quad u_0^i(\, c^i(0)\,) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{\#(\mathcal{F}_t)} \Pi^i(\, f_t^j\,).u_t^i(\, c^i(t,f_t^j)\,)$$

$$\text{suj. a} \qquad c^i(0) + \theta^i(1).p(0) = e^i(0)$$

$$c^i(t) + \theta^i(t+1).p(t) = e^i(t) + \theta^i(t).[\; d(t) + p(t)\;] \qquad 1 \le t \le T-1$$

$$c^i(T) = e^i(T) + \theta^i(T).d(T)$$

Onde para cada t a partição f_t é composta pelos conjuntos f_t^1, f_t^2, ... , $f_t^{\#(\mathcal{F}_t)}$ e as equações são compostas por funções $\mathcal{F}_t$-mensuráveis com domínio em Ω.

As condições de equilíbrio são:

$$\frac{\partial u_0^i(\, c(0)\,)}{\partial c(0)} = \lambda(0)$$

$$\Pi^i(f_t^j).\ \frac{\partial u_t^i(\, c(t,f_t^j)\,)}{\partial c_t} = \lambda(t,f_t^j) \qquad 1 \le t \le T-1$$

$$\Pi^i(f_t^j).\ \frac{\partial u_T^i(\, c(T,f_t^j)\,)}{\partial c_T} = \lambda(T,f_t^j)$$

$$\lambda(t-1,f^j_{t-1}).p(t-1,f^j_{t-1}) = \sum_{f^k_t \subseteq f^j_{t-1}} \lambda(t,f^k_t).[d(t,f^j_t)+p(t,f^j_t)]$$

Onde o multiplicador $\lambda(t)$ é uma função $\mathcal{F}_t$-mensurável com domínio em Ω.

Eliminando λ nas equações acima:

$$\Pi^i(f^j_{t-1}).\frac{\partial u^i_{t-1}}{\partial c}(\ c(t-1,f^j_{t-1})\ ).p(t-1,f^j_{t-1}) =$$

$$\sum_{f^k_t \subseteq f^j_{t-1}} \Pi^i(f^k_t).\frac{\partial u^i_t}{\partial c}(\ c(t,f^k_t)\ ).[d(t,f^k_t)+p(t,f^k_t)]$$

Logo $p(t-1,f^j_{t-1})$ é dado pela equação:

$$\sum_{f^k_t \subseteq f^j_{t-1}} \Pi^i(f^k_t|f^j_{t-1}) \cdot \frac{\frac{\partial u^i_t}{\partial c}(c(t,f^k_t))}{\frac{\partial u^i_{t-1}}{\partial c}(c(f^j_{t-1}))} \cdot [\ d(t,f^k_t) + p(t,f^k_t)\ ]$$

Sendo $\Pi^i(f^k_t|f^j_{t-1}) = \dfrac{\Pi^i(f^k_t)}{\Pi^i(f^j_{t-1})}$ e $f^k_t \subseteq f^j_{t-1}$

Dado um conjunto $f^j_{t-1} \in \mathbf{f}_{t-1}$ defina como $\nu(t-1,f^j_{t-1})$ o número máxdmo de subconjuntos $f^k_t \in \mathbf{f}_t$ contidos no conjunto f^j_{t-1}. Defina agora a matriz $P(t,f^j_{t-1})$ de dimensão S x N como:

$$P(t,f^j_{t-1})' = \begin{bmatrix} p_1(t,f^1_t) & p_1(t,f^2_t) & \dots & p_1(t,f_t^{\nu(t,f_{t-1}(f^i_t))}) \\ p_2(t,f^1_t) & p_2(t,f^2_t) & \dots & p_2(t,f_t^{\nu(t,f_{t-1}(f^i_t))}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_N(t,f^1_t) & p_N(t,f^2_t) & \dots & p_N(t,f_t^{\nu(t,f_{t-1}(f^i_t))}) \end{bmatrix}$$

Analogamente, defina $D(t,f_{t-1})$:

$$D(t,f^j_{t-1})' = \begin{bmatrix} d_1(t,f^1_t) & d_1(t,f^2_t) & \dots & d_1(t,f_t^{\nu(t,f_{t-1}(f^i_t))}) \\ d_2(t,f^1_t) & d_2(t,f^2_t) & \dots & d_2(t,f_t^{\nu(t,f_{t-1}(f^i_t))}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_N(t,f^1_t) & d_N(t,f^2_t) & \dots & d_N(t,f_t^{\nu(t,f_{t-1}(f^i_t))}) \end{bmatrix}$$

Temos então que $p(t-1,f^j_{t-1})$ é dado pela equação:

$$[\ D(t,f^j_{t-1})'+P(t,f^j_{t-1})'\ ] \quad \begin{bmatrix} \Pi^i(f^1_t|f^j_{t-1}) \cdot \dfrac{\frac{\partial u^i_t}{\partial c}(c(t,f^1_t))}{\frac{\partial u^i_{t-1}}{\partial c}(c(f^j_{t-1}))} \\ \Pi^i(f^2_t|f^j_{t-1}) \cdot \dfrac{\frac{\partial u^i_t}{\partial c}(c(t,f^2_t))}{\frac{\partial u^i_{t-1}}{\partial c}(c(f^j_{t-1}))} \\ \\ \Pi^i(f^\nu_t|f^j_{t-1}) \cdot \dfrac{\frac{\partial u^i_t}{\partial c}(c(t,f^\nu_t))}{\frac{\partial u^i_{t-1}}{\partial c}(c(f^j_{t-1}))} \end{bmatrix}$$

Logo basta analisar o modelo multiperiódico como uma seqüência de modelos uniperiódicos. Para cada data t-1 e evento f^j_{t-1} sendo $1 \leq t \leq T$ e $1 \leq k \leq \#(\mathcal{F}_{t-1})$ existirá um vetor $\Psi(f^j_{t-1}) \in \mathbb{R}^{\nu(t,f_{t-1}(f^i_t))}$ tal que ele é a solução do sistema

$$[\ D(t,f^j_{t-1})'+P(t,f^j_{t-1})'\ ]\ .\ \Psi(f^j_{t-1}) = p(t-1,f^j_{t-1})$$

Como no modelo uniperiódico, este vetor é chamado de vetor determinador de preços. Dado um título n, sendo $1 \leq n \leq N$, seu dividendo na data t é representado pela função $\mathcal{F}_t$-mensurável $d_n(t)$, e seu preço na data t-1, no evento f^j_{t-1} é dado pela equação:

$$[\ d_n(t,f^j_{t-1})+p_n(t,f^j_{t-1})\ ]\ .\ \Psi(f^j_{t-1}) = p_n(t-1,f^j_{t-1})$$

Sendo que para a data T, no evento f^l_{T-1}, $1 \leq l \leq \#(\mathcal{F}_T)$:

$$d_n(T,f^l_{T-1})\ .\ \Psi(f^l_{T-1}) = p(T-1,f^l_{T-1})$$

3.3 Eficiência de Pareto

A análise de eficiência de Pareto no modelo

multiperiódico é parecida com a análise no modelo uniperiódico. Uma diferença entre os dois modelos reside no fato de que agora para cada t, $0 \leq t \leq T-1$, o pagamento de cada título no período seguinte depende dos preços de equilíbrio dos títulos, que são variáveis endógenas no modelo. Outra diferença é que no modelo com apenas um período, bastava ter o posto da matriz de pagamentos igual ao número de estados da natureza para se garantir eficiência de Pareto. No modelo multiperiódico existe uma condição mais fraca, que permite se obter um equilíbrio eficiente no sentido de Pareto com um número bem menor de títulos.

Como no modelo uniperiódico, temos as definições de factibilidade, de eficiência de Pareto e de processo de consumo alcançável.

<u>Definição 3.3.1</u>: Uma alocação de consumo $c^i = \{ c^i(t) \} = \{ c^i(0), c^i(1), \ldots, c^i(T) \}$ é factível se e somente se para cada processo de consumo $c^i \in X$ e para todo $0 \leq t \leq T$:

$$\sum_{i=1}^{I} c^i(t) = \sum_{i=1}^{I} e^i(t)$$

<u>Definição 3.3.2</u>: Uma alocação factível $c^i = \{ c^i(t) \} = \{ c^i(0), c^i(1), \ldots, c^i(T) \}$ é eficiente no sentido de Pareto se e somente se não existe alocação $b = \{ b^i \}$ tal que todo indivíduo i prefere estritamente b^i a c^i.

Definição 3.3.3: Um processo de consumo $c = \{ c(t) \} = \{ c(0), c(1),..., c(T) \}$ é alcançável a preços p se e somente se existe um processo de dotação e tal que $e(1) = e(2) = ... = e(T) = 0$ e $c \in B(e,p)$. O conjunto de processos que são alcançáveis a preços p é chamado de $\mathcal{M}(p)$.

Note que a definição de processo de consumo alcançável não depende de c(0), mas depende do sistema de preços p.

Através de uma prova idêntica à prova dada no caso multiperiódico, temos o teorema:

Teorema 3.3.1: Se todo processo de consumo é alcançável, então toda alocação de equilíbrio é eficiente no sentido de Pareto.

A definição de mercado completo no modelo multiperiódico é análoga à definição no modelo uniperiódico. Contudo, como os pagamentos intermediários de cada título dependem dos preços dos títulos, a definição de mercado completo irá depender dos preços.

Então temos:

Definição 3.3.4: Um sistema de preços p em um modelo multiperiódico é completo se e somente se, a estes preços, todo processo de consumo é alcançável, isto é, $\mathcal{M}(p) = X$.

Podemos então enunciar o teorema 3.3.1 de uma forma equivalente:

Teorema 3.3.2: Se um sistema de preços de equilíbrio é completo, então a alocação de consumo associada é eficiente no sentido de Pareto.

Para garantir que o mercado é completo no modelo uniperiódico temos a condição:

$$\text{posto}(D(T)) = S$$

No caso multiperiódico, temos uma condição semelhante. Inicialmente, precisamos da seguinte definição:

Definição 3.3.5: O índice de divisão ν de uma estrutura de informação é dada por:

$$\nu = \max \{ \nu(t,f_t^j) \mid 0 \leq t \leq T-1 \text{ e } 1 \leq j \leq \#(\mathcal{F}_t) \}$$

Dado um modelo multiperiódico, para cada data t, para todo conjunto f_t^j da partição f_t, temos que toda alocação de consumo $c(t+1,f_{t+1}^k)$, $f_{t+1}^k \leq f_t^k$ é alcançável se e somente se a matriz $D(t+1,f_t^j)+P(t+1,f_t^j)$ tem o seu posto igual a $\nu(t,f_t^j)$. Isto é conseqüência do teorema demonstrado para o modelo uniperiódico. Logo é de se supor que se para todo t e todo ω as matrizes $D(t+1,f_t^j)+P(t+1,f_t^j)$ têm posto

igual a $\nu(t,f_t^j)$, então toda alocação de consumo é alcançável, e conseqüentemente é eficiente no sentido de Pareto. De fato, temos:

<u>Teorema 3.3.3:</u> Um sistema de preços p é completo se e somente se para cada $1 \le t \le T$ e $1 \le j \le \#(\mathcal{F}_t)$:

$$\text{posto}[\ D(t,f_{t-1}^j)+P(t,f_{t-1}^j)\ ] = \nu(t-1,f_{t-1}^j)$$

dem.:

Basta achar a estratégia de negociação $\theta^{(t,\omega)}(\tau,\xi)$ que alcança os processos de consumo elementares $1[t,f_t^j]$, $1 \le t \le T$, onde:

$$1[t,f_t^j](\tau,\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \tau = t \text{ e } \xi \in f_t^j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ou seja, basta achar as estratégias de negociação que satisfazem:

$$\sum_{n=1}^{N} [\ \theta^{(t,\omega)}(\tau,\xi) - \theta^{(t,\omega)}(\tau+1,\xi)\ ].p_n(\tau,\xi) = 1[t,f_t^j](\tau,\xi)$$

$$\text{para } 1 \le \tau \le T\ ,\ \text{ e } \xi \in \Omega.$$

e conclui-se que $\text{posto}[\ D(t,f_{t-1}^j)+P(t,f_{t-1}^j)\ ] = \nu(t-1,f_{t-1}^j)$ para todo $1 \le t \le T$ e $f_{t-1}^j \in \mathcal{F}_{t-1}$ uma condição necessária e suficiente para a existência de solução.■

Uma conseqüência óbvia do teorema acima é:

Corolario 3.3.4: Uma condição necessária para que um sistema de preços p seja completo é que o número de títulos seja igual ou superior ao índice de divisão da estrutura de informação, ou seja, $N \geq \nu$.

3.4 Medida de Martingal Equivalente em Mercados Completos

Do mesmo modo que no modelo uniperiódico, vamos agora analisar a existência e a unicidade da medida de martingal equivalente em um mercado completo, para o caso de um modelo multiperiódico. Neste caso basta considerar o modelo multiperiódico como uma seqüência de modelos uniperiódicos cujos pagamentos dos títulos são elementos endógenos ao modelo e todos os resultados anteriores, com algumas modificações, se aplicam ao novo caso.

Suponha existir um título sem risco, ou seja, um título cujo dividendo a cada data t, $1 \leq t \leq T$, independa do evento que venha a ocorrer, ou seja:

$$d(t,f^k_{t-1}) = d(t), \qquad \forall\, f^k_{t-1} \in f_{t-1}$$

Neste caso é fácil ver que:

$$p(t,f^k_{t-1}) = p(t)$$

E podemos assim definir a taxa de juros de cada período como:

$$1 + r_t = \frac{d(t) + p(t)}{p(t-1)}$$

Suponha que o título sem risco é o título j = 1, e que as utilidades sejam estritamente crescentes, estritamente convexas e diferenciáveis. Então $p(t-1,f_{t-1}(\omega))$ é determinado pela fórmula:

$$[D(t,f^j_{t-1})'+P(t,f^j_{t-1})'].\begin{bmatrix} \Pi^i(f^1_t|f^j_{t-1}) \cdot \dfrac{\dfrac{\partial u^i_t(c(t,f^1_t))}{\partial c}}{\dfrac{\partial u^i_{t-1}(c(f^j_{t-1}))}{\partial c}} \\ \Pi^i(f^2_t|f^j_{t-1}) \cdot \dfrac{\dfrac{\partial u^i_t(c(t,f^2_t))}{\partial c}}{\dfrac{\partial u^i_{t-1}(c(f^j_{t-1}))}{\partial c}} \\ \\ \Pi^i(f^\nu_t|f^j_{t-1}) \cdot \dfrac{\dfrac{\partial u^i_t(c(t,f^\nu_t))}{\partial c}}{\dfrac{\partial u^i_{t-1}(c(f^j_{t-1}))}{\partial c}} \end{bmatrix}$$

Sendo $f^j_{t-1} = \sum_{j=1}^{\nu(t,f^j_{t-1})} f^j_t$

Podemos então proceder como no modelo uniperiódico e obter $(1+r_t).p(t-1,f^j_{t-1})$ como o produto da matriz:

$$[\ D(t,f^j_{t-1})'+P(t,f^j_{t-1})'\ ]$$

Pelo vetor:

$$\begin{bmatrix} \Pi^i(f^1_t|f^j_{t-1}) \cdot \dfrac{\frac{\partial u^i_t(c(t,f^1_t))}{\partial c}}{\frac{\partial u^i_{t-1}(c(f^j_{t-1}))}{\partial c}} \cdot \dfrac{p_1(t-1,f^j_{t-1})}{p_1(t,f^1_t)+d_1(t,f^1_t)} \\ \Pi^i(f^2_t|f^j_{t-1}) \cdot \dfrac{\frac{\partial u^i_t(c(t,f^2_t))}{\partial c}}{\frac{\partial u^i_{t-1}(c(f^j_{t-1}))}{\partial c}} \cdot \dfrac{p_1(t-1,f^j_{t-1})}{p_1(t,f^2_t)+d_1(t,f^2_t)} \\ \\ \Pi^i(f^\nu_t|f^j_{t-1}) \cdot \dfrac{\frac{\partial u^i_t(c(t,f^\nu_t))}{\partial c}}{\frac{\partial u^i_{t-1}(c(f^j_{t-1}))}{\partial c}} \cdot \dfrac{p_1(t-1,f^j_{t-1})}{p_1(t,f^\nu_t)+d_1(t,f^\nu_t)} \end{bmatrix}$$

E assim podemos obter uma medida de probabilidade para cada data t, $1 \le t \le T$, para cada evento f^j_{t-1}:

$$\Pi^*(f^k_t|f^j_{t-1}) = \Pi^i(f^k_t|f^j_{t-1}) \cdot \frac{\frac{\partial u^i_t(c(t,f^k_t))}{\partial c}}{\frac{\partial u^i_{t-1}(c(f^j_{t-1}))}{\partial c}} \cdot \frac{p_1(t)}{p_1(t)+d_1(t)}$$

Temos então $\Pi^*(f^k_t|f^j_{t-1}) > 0$ e da primeira linha do sistema acima:

$$\sum_{k=1}^{s} \Pi^*(f^k_t|f^j_{t-1}) = 1$$

Suponha agora que os indivíduos sejam representados por preferências completas, contínuas, crescentes e convexas. Então dado o preço de equilíbrio p, temos os sistemas:

$$[\ D(t,f^j_{t-1})'+P(t,f^j_{t-1})'\ ]\ .\ \Psi(t,f^j_{t-1}) = p(t-1,f^j_{t-1})$$

para $1 \leq t \leq T$, e $1 \leq j \leq \nu(t-1,f^j_{t-1})$

sendo $\Psi(t,f^j_{t-1}) \in \mathbb{R}^{\nu(t,f)}$

Podemos finalmente definir uma medida de martingal equivalente para o modelo mutiperiódico:

<u>Definição 3.4.1:</u> Se para um sistema de preços p e para todo $1 \leq t \leq T$ o sistema de equações lineares:

$$[\ D(t,f^j_{t-1})'+P(t,f^j_{t-1})'\ ]\ .\ Q(t,f^j_{t-1}) = (1 + r_t).p(t-1,f^j_{t-1})$$

tem soluções positivas, $Q(t,f^j_{t-1})(\omega) > 0$, para todo $\omega \in \Omega$, então:

$$Q^*(\omega) = \prod_{t=1}^{T} Q(t,f^j_{t-1})(\omega)$$

é chamada de medida de martingal equivalente para o sistema de preços p.

Como para todo $1 \leq t \leq T$ e todo $\omega \in \Omega$ temos

$Q(t,f_t^j) > 0$, logo $Q^*(\omega) > 0$, e como $\sum_{j=1}^{\nu} Q(t,f_{t-1}^j)(\omega) = 1$, conclui-se que $\sum_{\omega\in\Omega} Q^*(\omega) = 1$. Logo a medida de martingal equivalente é uma medida de probabilidade.

Os teoremas demonstrados para o caso uniperiódico valem também para o caso multiperiódico. Como cada vértice da árvore de informação pode ser visto como um modelo uniperiódico, torna-se trivial extender os resultados.

Na definição 3.4.1 a medida de martingal equivalente existe no modelo multiperiódico se e somente se existe em cada um dos mercados uniperiódicos formados ao se considerar cada vértice isoladamente. Então temos:

Teorema 3.4.1: Uma medida de martingal equivalente existe se e somente se o sistema de preços p não admite possibilidades de arbitragem.

<u>Teorema 3.4.2:</u> Se uma medida de martingal equivalente existe, então ela é única se e somente se o sistema de preços p é completo.

Dado qualquer ativo, caracterizado por seu processo de dividendos $d_n = \{ d_n(1), d_n(2),..., d_n(T) \}$ temos que seu preço na data t é determinado pela equação:

$$[d_n(t,f_{t-1}^j)+p_n(t,f_{t-1}^j)] \cdot Q(t,f_{t-1}^j) = (1 + r_t).p_n(t-1,f_{t-1}^j)$$

Defina os dividendos e preços descontados:

$$d_n^*(t) = \frac{d_t(t)}{\prod_{s=1}^{t}(1+r_s)}$$

$$p_n^*(t) = \frac{p_t(t)}{\prod_{s=1}^{t}(1+r_s)}$$

Obtemos então:

$$[\ d_n^*(t,f_{t-1}^j)+p_n^*(t,f_{t-1}^j)\ ]\ .\ Q(t,f_{t-1}^j) = p_n^*(t-1,f_{t-1}^j)$$

E desta equação temos o teorema abaixo:

<u>Teorema 3.4.3</u>: Se Q é uma medida de martingal equivalente, então para cada $1 \le n \le N$ e $0 \le t \le k \le T$ temos:

$$p_n^*(t) + \sum_{s=0}^{t} d_n^*(s) = E_Q\ [\ p_n^*(k) + \sum_{s=0}^{k} d_n^*(s)\ |\ \mathcal{F}_t\ ]$$

$$= E_Q\ [\ \sum_{s=0}^{T} d_n^*(s)\ |\ \mathcal{F}_t\ ]$$

dem.:

A equação

$$[\ d_n^*(t+1,f_t^j)+p_n^*(t+1,f_t^j)\ ]\ .\ Q(t+1,f_t^j) = p_n^*(t,f_t^j)$$

para $0 \le t \le T-1$

equivale a:

$$p_n^*(t) = E_Q [d_n^*(t+1) + p_n^*(t+1) \mid \mathcal{F}_t]$$

Logo:

$$p_n^*(t+1) = E_Q [d_n^*(t+2) + p_n^*(t+2) \mid \mathcal{F}_{t+1}]$$

Substituindo a segunda equação na primeira obtemos:

$$p_n^*(t) = E_Q [d_n^*(t+1) + E_Q [d_n^*(t+2) + p_n^*(t+2) \mid \mathcal{F}_{t+1}] \mid \mathcal{F}_t]$$

$$= E_Q [d_n^*(t+1) + d_n^*(t+2) + p_n^*(t+2) \mid \mathcal{F}_t]$$

Por indução obtemos:

$$p_n^*(t) = E_Q [p_n^*(k) + \sum_{s=t+1}^{k} d_n^*(s) \mid \mathcal{F}_t]$$

Somando $\sum_{s=0}^{t} d_n^*(s)$ obtemos:

$$p_n^*(t) + \sum_{s=0}^{t} d_n^*(s) = E_Q [p_n^*(k) + \sum_{s=0}^{k} d_n^*(s) \mid \mathcal{F}_t] \blacksquare$$

A demonstração acima sugere uma caracterização adicional do sistema de preços de equilíbrio em termos da

medida de martingal equivalente Q. Seja a definição:

<u>Definição 3.4.2:</u> Uma sequência de variáveis aleatórias $x(t)$, sendo $0 \leq t \leq T$ é um martingal na estrutura de informação F_T e na medida de probabilidade P se e somente se para todo $0 \leq s \leq t \leq T$:

$$E_P [x(t) \mid \mathcal{F}_s] = x(s)$$

Então podemos enunciar o teorema anterior como:

<u>Teorema 3.4.4:</u> Para cada título n, $1 \leq n \leq N$, a sequência de seus preços descontados somados aos seus dividendos descontados é um martingal na medida Q, isto é, para todo $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ temos:

$$p_n^*(t_1) + \sum_{s=0}^{t_1} d_n^*(s) = E_Q [p_n^*(t_2) + \sum_{s=0}^{t_2} d_n^*(s) \mid \mathcal{F}_{t_1}]$$

Dado um ativo caracterizado por seu dividendo $d = \{ d(1), d(2),..., d(T) \}$, temos que seu preço descontado será determinado na data $0 \leq t \leq T-1$ por:

$$p^*(t) + \sum_{s=0}^{t} d^*(s) = E_Q [\sum_{s=0}^{T} d^*(s) \mid \mathcal{F}_T]$$

Ou seja:

$$p^*(t) = E_Q \left[\sum_{s=t+1}^{T} d^*(s) \mid \mathcal{F}_T \right]$$

dependendo assim da utilidade e dotações dos agentes.

Contudo, como no caso uniperiódico, basta termos apenas um conjunto $\mathcal{S}$ de ν títulos com pagamentos linearmente independentes em cada vértice da árvore de informação para que qualquer título não pertencente a $\mathcal{S}$ (um título redundante) tenha seu preço poderá ser determinado facilmente por arbitragem.

Todas as conclusões obtidas acima supõem a existência de um título sem risco. Como no modelo uniperiódico, o título sem risco pode ser reproduzido a partir de um conjunto $\mathcal{E}$ de ν títulos com pagamentos linearmente independentes em cada vértice da árvore de informação.

3.5 Medida de Martingal Equivalente em Mercados Incompletos

Como no modelo uniperiódico, vamos agora analisar a existência e a unicidade da medida de martingal equivalente no caso de termos um mercado incompleto. Não sendo conveniente supor a existência de um título sem risco vamos adotar uma hipótese mais fraca, a de que exista um título k tal que $d_k(t,\omega) > 0$, para todo $1 \leq t \leq T$ e $\omega \in \Omega$.

Supondo utilidades estritamente crescentes,

estritamente convexas e diferenciáveis, obtemos para cada 1 $\leq t \leq T$:

$$[D(t,f^j_{t-1})'+P(t,f^j_{t-1})'].\begin{bmatrix} \Pi^i(f^1_t|f^j_{t-1}) \cdot \dfrac{\frac{\partial u^i_t}{\partial c}(c(t,f^1_t))}{\frac{\partial u^i_{t-1}}{\partial c}(c(f^j_{t-1}))} \\ \Pi^i(f^2_t|f^j_{t-1}) \cdot \dfrac{\frac{\partial u^i_t}{\partial c}(c(t,f^2_t))}{\frac{\partial u^i_{t-1}}{\partial c}(c(f^j_{t-1}))} \\ \vdots \\ \Pi^i(f^\nu_t|f^j_{t-1}) \cdot \dfrac{\frac{\partial u^i_t}{\partial c}(c(t,f^\nu_t))}{\frac{\partial u^i_{t-1}}{\partial c}(c(f^j_{t-1}))} \end{bmatrix}$$

Para simplificar, faça uma permutação nos índices de modo que o título k seja o primeiro e para cada s = 1, 2, ... ,S divida os pagamentos dos demais títulos pelo pagamento do primeiro título. Então obtemos um sistema composto pela matriz de dimensão NxS:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \dfrac{d_2(t,f^1_t)+p_2(t,f^1_t)}{d_1(t,f^1_t)+p_1(t,f^1_t)} & \dfrac{d_2(t,f^2_t)+p_2(t,f^2_t)}{d_1(t,f^2_t)+p_1(t,f^2_t)} & \cdots & \dfrac{d_2(t,f^\nu_t)+p_2(t,f^\nu_t)}{d_1(t,f^\nu_t)+p_1(t,f^\nu_t)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{d_N(t,f^1_t)+p_N(t,f^1_t)}{d_1(t,f^1_t)+p_1(t,f^1_t)} & \dfrac{d_N(t,f^2_t)+p_N(t,f^2_t)}{d_1(t,f^2_t)+p_1(t,f^2_t)} & \cdots & \dfrac{d_N(t,f^\nu_t)+p_N(t,f^\nu_t)}{d_1(t,f^\nu_t)+p_1(t,f^\nu_t)} \end{bmatrix}$$

Multiplicada pelo vetor:

$$\begin{bmatrix} \Pi^i(f_t^1|f_{t-1}^j) \cdot \dfrac{\dfrac{\partial u_t^i(c(t,f_t^1))}{\partial c}}{\dfrac{\partial u_{t-1}^i(c(f_{t-1}^j))}{\partial c}} \cdot \dfrac{p_1(t-1,f_{t-1}^j)}{p_1(t,f_t^1) + d_1(t,f_t^1)} \\ \\ \Pi^i(f_t^2|f_{t-1}^j) \cdot \dfrac{\dfrac{\partial u_t^i(c(t,f_t^2))}{\partial c}}{\dfrac{\partial u_{t-1}^i(c(f_{t-1}^j))}{\partial c}} \cdot \dfrac{p_1(t-1,f_{t-1}^j)}{p_1(t,f_t^2) + d_1(t,f_t^2)} \\ \\ \\ \Pi^i(f_t^\nu|f_{t-1}^j) \cdot \dfrac{\dfrac{\partial u_t^i(c(t,f_t^\nu))}{\partial c}}{\dfrac{\partial u_{t-1}^i(c(f_{t-1}^j))}{\partial c}} \cdot \dfrac{p_1(t-1,f_{t-1}^j)}{p_1(t,f_t^\nu) + d_1(t,f_t^\nu)} \end{bmatrix}$$

Ou seja, para cada vértice da árvore de informação vale o mesmo raciocínio feito para o caso uniperiódico, e podemos então definir uma medida de probabilidade em cada vértice como:

$$Q(t,f_t^s) = \Pi^i(f_t^s|f_{t-1}^j) \cdot \frac{\dfrac{\partial u_t^i(c(t,f_t^s))}{\partial c}}{\dfrac{\partial u_{t-1}^i(c(f_{t-1}^j))}{\partial c}} \cdot \frac{p_1(t-1,f_{t-1}^j)}{p_1(t,f_t^s) + d_1(t,f_t^s)}$$

Para $1 \leq s \leq \nu(t-1,f_{t-1}^j)$

Temos $Q(t,f_t^s) > 0$ e $\sum_{s=1}^{\nu} Q(t,f_t^s) = 1$.

Defina agora a medida de martingal equivalente para a economia ξ e sistema de preços p como:

$$Q^*(\omega_s) = \prod_{t=1}^{T} Q(t,f_t^s)(\omega_s)$$

É fácil ver que $Q^*(\omega_s) > 0$ e que $\sum_{s=1}^{S} Q^*(\omega_s) = 1$.

Suponha agora indivíduos representados por preferências contínuas, crescentes e convexas e definindo a matriz $\overline{D+P}(t,f_t^j(\omega))$ como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \dfrac{d_2(t,f_t^1)+p_2(t,f_t^1)}{d_1(t,f_t^1)+p_1(t,f_t^1)} & \dfrac{d_2(t,f_t^2)+p_2(t,f_t^2)}{d_1(t,f_t^2)+p_1(t,f_t^2)} & \cdots & \dfrac{d_2(t,f_t^\nu)+p_2(t,f_t^\nu)}{d_1(t,f_t^\nu)+p_1(t,f_t^\nu)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{d_N(t,f_t^1)+p_N(t,f_t^1)}{d_1(t,f_t^1)+p_1(t,f_t^1)} & \dfrac{d_N(t,f_t^2)+p_N(t,f_t^2)}{d_1(t,f_t^2)+p_1(t,f_t^2)} & \cdots & \dfrac{d_N(t,f_t^\nu)+p_N(t,f_t^\nu)}{d_1(t,f_t^\nu)+p_1(t,f_t^\nu)} \end{bmatrix}$$

e o vetor:

$$p' = [\ 1 \quad \frac{p_2(t-1,f_{t-1})}{p_1(t-1,f_{t-1})} \quad \cdots \quad \frac{p_N(t-1,f_{t-1})}{p_1(t-1,f_{t-1})}\ ]$$

Obtemos o sistema:

$$\overline{D+P}(t,f_t^j)' \cdot Q = \overline{p}$$

Como o mercado é incompleto, existe pelo menos um vértice tal que posto[$\overline{D+P}(t,f_t^j)$] < $\nu(t-1,f_t^j)$. Logo o sistema terá sempre solução, mas a solução não será única.

Conseqüentemente a medida de martingal equivalente existirá mas não será única.

Do mesmo modo que no modelo uniperiódico, no modelo multiperiódico nem toda alocação de consumo é atingível no caso de termos mercados incompletos. Considere Θ como o espaço vetorial das estratégias de negociação. Seja H o operador linear $H : \Theta \to X$ tal que:

$$H(\theta) = \begin{bmatrix} c(0)-e(0) \\ c(1,f_1^1)-e(1,f_1^1) \\ \vdots \\ c(1,f_1^{\nu(1)})-e(1,f_1^{\nu(1)}) \\ \vdots \\ c(1,f_T^1)-e(1,f_T^1) \\ \vdots \\ c(1,f_T^{\nu(T)})-e(1,f_T^{\nu(T)}) \end{bmatrix}$$

Onde se usou o fato de que $c \in B(e,p) \Leftrightarrow c-e \in B(0,p)$

Logo pelo teorema 2.5.1 existe um operador linear G tal que:

$$G : X \to \mathbb{R}^{\dim(X)-\text{posto}(H)}$$

Para o qual núcleo(G) = imagem(H).

Daí o conjunto de alocações alcançáveis é caracterizado por dim(X) - posto(H) restrições lineares. Ou

seja:

$$\mathcal{M}(p) = \mathbb{R} \times \text{núcleo}(G)$$

Com relação à determinação do preço de um ativo representado por seus dividendos d no caso de mercado incompleto, suponha, como no caso uniperiódico, existir um conjunto $\mathcal{C}$ de $N < \nu$ títulos. Então temos dois casos:

(i) O ativo é redundante, logo seu preço será uma combinação dos preços dos ativos em $\mathcal{C}$.

(ii) O ativo não é redundante, e neste caso o subespaço $\mathcal{M}(p)$ de X será expandido, gerando uma alteração no processo de consumo dos indivíduos e conseqüentemente modificando a medida de martingal equivalente. Logo o preço do título dependerá das utilidades e dotações dos indivíduos, conforme a fórmula deduzida anteriormente.

CAPÍTULO IV

O Modelo Multiperiódico com Tempo Contínuo

A extensão do modelo multiperiódico visto no último capítulo, onde existiam T períodos intermediários com negociações com os títulos a cada data $t = 0, 1, \ldots, T-1$ é o modelo multiperiódico com tempo contínuo, onde se supõe negociações a cada data $t \in [0,T]$.

4.1. Descrição do modelo

Os elementos do modelo são:

(a) Uma data inicial 0, uma data terminal T, e datas intermediárias $t \in T$, onde T é um conjunto ordenado de números positivos. No modelo uniperiódico tínhamos $T = \{0, T\}$, no multiperiódico visto anteriormente $T = \{0, 1, \ldots, T\}$. Agora, para modelar tempo contínuo adotaremos $T = [0,T]$.

(b) Os estados da natureza que podem ocorrer na data terminal T são descritos por um espaço amostral Ω. Define-se então o espaço de probabilidade $(\Omega,\mathcal{F},P)$, onde $\mathcal{F}$ é a σ-álgebra de subconjuntos mensuráveis de Ω, ou eventos, para os quais cada agente i pode atribuir probabilidades baseados

na medida de probabilidade $P^i : \mathcal{F} \to [0,1]$. A medida de probabilidade P^i pode ser interpretada como uma representação das probabilidades subjetivas atribuídas pelo indivíduo i a realização dos eventos. Suponha, adicionalmente, apenas para simplificar a exposição, que estas probabilidades subjetivas dos indivíduos sejam iguais, digamos, a P, uma hipótese que será relaxada oportunamente.

A informação é revelada no tempo de acordo com uma filtração F que determina a estrutura de informação do modelo. Temos então a definição:

<u>Definição 4.1.1</u>: Uma filtração $F = \{ \mathcal{F}_t \mid t \in T \}$ é uma família de σ-álgebras em Ω tal que $\forall\ 0 \leq s \leq t \leq T$, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.

Vamos supor aqui que a filtração F satisfaz o que se convencionou chamar de "condições usuais":

(i) F é contínua à direita, ou seja, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{t<u} \mathcal{F}_u$,

para $0 \leq t \leq u$.

(ii) $\mathcal{F}_0$ contém todos os eventos de medida nula relativamente à medida P.

Esta definição de uma filtração satisfazendo as condições usuais significa supor que os agentes têm boa memória (jamais esquecem qualquer evento), que os eventos impossíveis são conhecidos na data inicial e que a informação na data t chega na data t e não um instante após t.

Podemos então definir em uma notação bem compacta o

que vem a ser o modelo estocástico (note que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$).

Definição 4.1.2: Um espaço de probabilidade com filtração é a quádrupla $(\Omega,\mathcal{F},F,P)$, onde $(\Omega,\mathcal{F},P)$ é um espaço de probabilidade e F é uma filtração em $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

(c) Existe apenas um bem perecível

(d) Existem N títulos endógenos disponíveis para negociação, supostos infinitamente divisíveis, não existindo custos de transação e nem limites à vendas a descoberto. No modelo anterior os títulos pagavam dividendos a cada data t = 1, 2, ..., T. Aqui vamos supor que os títulos pagam um único dividendo na data terminal T (o modelo pode ser extendido para o caso de termos um fluxo de dividendos).

Precisamos agora das seguintes definições:

Definição 4.1.3: Um processo estocástico no espaço de probabilidade $(\Omega,\mathcal{F},P)$ é uma função $x : T\times\Omega \to \mathbb{R}$ tal que para qualquer $t \in T$, $x(t) : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória em $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Para cada $\omega \in \Omega$, a função $x(\omega) : T \to \mathbb{R}$ é chamada realização do processo.

Como a definição acima de processo estocástico não leva em consideração como a incerteza é revelada ao longo do tempo, acrescentamos:

Definição 4.1.4: Um processo estocástico x no espaço de

probabilidade $(\Omega,\mathcal{F},P)$ é adaptado à filtração $F = \{ \mathcal{F}_t \mid t \in T \}$ se para cada $t \in T$ $x(t)$ for $\mathcal{F}_t$-mensurável.

Em outras palavras, x é adaptado se $\forall\ t \in T$, $x(t)$ é uma variável aleatória em $(\Omega,\mathcal{F}_t)$. A imposição de que x seja adaptado a F é uma maneira de condicionar as ações dos agentes à forma pela qual a informação é revelada no tempo (modelada pela filtração F). Logo se x é um processo estocástico que descreve certas ações tomadas ao longo do tempo, uma forma de restringir estas ações à estrutura de informação do modelo é impor que x seja adaptado a F. Do mesmo modo, se a filtração é F e um processo estocástico é adaptado a F, então o resultado $x(t,\omega)$ pode ser considerado como a informação disponível pelo agente na data t.

Com as definições acima, podemos definir os preços dos títulos como processo estocásticos $p_n : T\times\Omega \to \mathbb{R}_+$, $1 \leq n \leq N$, onde para todo n o processo p_n é adaptado a F.

(e) Existem I indivíduos. A informação disponível aos indivíduos é dada pela filtração F. Logo a cada data $t \in T$ a informação é descrita pela σ-álgebra $\mathcal{F}_t$. Note que se supõe que o modelo é de informação simétrica.

(f) Cada indivíduo recebe uma dotação do bem de consumo nas datas 0 e T. Logo o processo de dotação do indivíduo i é dado pelo par $\{ e^i(0), e^i(T) \}$, sendo que $e^i(0) \in \mathbb{R}_+$ e $e^i(T)$ é uma variável aleatória definida em $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

(g) O dividendo $d_n(T)$ de cada título n, $1 \leq n \leq N$, na data T é uma variável aleatória definida em $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

(h) Cada indivíduo consome apenas na data inicial e na final. Logo o processo de consumo do indivíduo i é dado pelo par $(c^i(0), c^i(T))$, sendo que $c^i(0) \in \mathbb{R}_+$ e $c^i(T)$ é variável aleatória definida em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (como no caso dos dividendos, o modelo pode ser extendido para o caso de termos um fluxo de dividendos).

(i) Os indivíduos são representados por preferências completas, contínuas, convexas e monótonas sobre os pares $(c^i(0), c^i(T))$. Defina **A** como a classe das preferências que satisfazem estas condições.

Neste trabalho consideraremos, de uma forma um tanto arbitrária, como é usual em modelos de finanças, o espaço de consumo dos indivíduos como sendo:

$$\mathbf{X} = \mathbb{R} \times L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

onde $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é o espaço de classes de equivalência das variáveis aleatórias definidas em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com variância finita. Ou seja, é o espaço vetorial normado das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-mensuráveis tais que $\int_\Omega |f|^2 dP < \infty$, com norma dada por:

$$\| f \|_2 = (\int_\Omega |f|^2 dP)^{1/2} = (E_P[|f|^2])^{1/2}$$

Note que pela desigualdade de Hölder a média também será finita:

$$0 \leq \int_{\Omega} |f| dP = \| f \|_1 \leq \| f \|_2 < \infty$$

Temos que se f=g quase certamente (ou seja, f=g em A $\in \mathcal{F}$ tal que $P(\Omega - A) = 0$) então $f \sim g$, definindo assim as classes de equivalência em $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Adota-se para o espaço de consumo **X** a topologia dada pela norma euclideana e pela norma do $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ definida acima.

Temos então a definição de economia:

Definição 4.1.5: Uma economia $\xi = (\succ^i, e^i, d_n)$ é composta por I indivíduos, cada um com preferências $\succ^i \in$ **A** e com processos de dotação $e^i \in$ **X**, e por N títulos com dividendos $d_n \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$.

4.2. A Integral Estocástica

No modelo multiperiódico do último capítulo, onde **T** = { 0, 1, ..., T } tínhamos definido a restrição orçamentária do indivíduo i para t = 0 como:

$$c^i(0) + \sum_{n=1}^{N} p_n(0).\theta^i_n(1) = e^i(0)$$

e para $1 \leq t \leq T-1$ como:

$$c^i(t) = e^i(t) + \sum_{n=1}^{N} p_n(t).[\theta^i_n(t)-\theta^i_n(t+1)] + \sum_{n=1}^{N} d_n(t).\theta^i_n(t)$$

logo somando sobre t temos:

$$\sum_{s=0}^{t} c^i(s)= \sum_{s=0}^{t} e^i(s)+ \sum_{s=1}^{t} \sum_{n=1}^{N} \theta^i_n(s).[p_n(s)-p_n(s-1)]+ \sum_{s=1}^{t} \sum_{n=1}^{N} d_n(s).\theta^i_n(s)$$

Não consideraremos o último termo referente aos dividendos pagos antes da data terminal T (posto que não estamos considerando dividendos intermediários no modelo multiperiódico com tempo contínuo). Logo o consumo acumulado será igual à dotação acumulada mais o ganho financeiro com o porta-fólio, dado por:

$$G_t(\theta) = \sum_{s=1}^{t} \sum_{n=1}^{N} \theta^i_n(s).[p_n(s)-p_n(s-1)]$$

onde $\theta = \langle \theta^i(1), \ldots ,\theta^i(T) \rangle$

Suponha válida a hipótese feita na seção 3.5: o título 1 é tal que $d_1(t,\omega) > 0$, para todo $1 \leq t \leq T$ e $\omega \in \Omega$. Não considerando os dividendos intermediários defina:

$$p^*_n(t,f^k_t) = \frac{p_n(t,f^k_t)}{p_1(t,f^k_t)} \qquad 2 \leq n \leq N,\ 1 \leq k \leq \nu$$

Defina o ganho normalizado como:

$$G^*_t(\theta) = \sum_{s=1}^{t} \sum_{n=1}^{N} \theta^i_n(s).[p^*_n(s)-p^*_n(s-1)]$$

Sendo $G_o(\theta) = G_o^*(\theta) = 0$. Note que na definição acima θ é um processo previsível (conforme a definição dada anteriormente para o caso discreto). A hipótese de θ^i ser previsível tem uma razão forte. Se devemos modelar um mercado, θ deve ser previsível. Se um investidor não estivesse restrito a estratégias de negociação previsíveis e pudesse escolher uma estratégia $\mathcal{F}_t$-mensurável arbitrária $\theta^i(t)$, então ele a escolheria com base em toda a informação disponível na data t, incluindo p(t)-p(t-1). Se p(t)-p(t-1)≠0, o ganho $\sum_{n=1}^{N} \theta_n^i(t).[p_n^*(t)-p_n^*(t-1)]$ poderia ser arbitrariamente grande, o que não faz sentido. Defina para todo $t \in T$ a integral estocástica (para o modelo com T períodos) como:

$$\left[\int \alpha.dX \right]_t = \int_o^t \alpha.\, dX = \int_o^t \alpha(s).\, dX(s) = \sum_{s=1}^{t} \alpha(s).[X(s)-X(s-1)]$$

sendo para t=0:

$$\left[\int \alpha.dX \right]_o = \int_o^o \alpha.\, dX = \int_o^o \alpha(s).\, dX(s) = 0$$

Logo o ganho em valores normalizados com o porta-fólio θ é dado por:

$$G_t^*(\theta) = \int_o^t \theta(s)'.\, dp^*(s)$$

sendo $\theta(s) \in \mathbb{R}^N$ e $p^*(s) \in \mathbb{R}^N$.

Pelo teorema 3.3.4, sabemos que para cada $1 \leq n \leq N$ o processo de preços p^* é um martingal relativamente a medida Q. Em geral, se o processo de preços p é um martingal, é conveniente que $\int \theta dp$ também seja um martingal. Isto porque seria estranho uma teoria sobre preços de ativos onde negociar títulos cujos preços são martingais resultar em um ganho esperado não nulo. No caso discreto, podemos provar que isto realmente acontece. Temos então uma definição e um teorema:

<u>Definição 4.2.1</u>: Um processo $\theta = \{ \theta(1), \theta(2), ..., \theta(T) \}$ é limitado se existe um $K \in \mathbb{R}$ tal que $|\theta(t,\omega)| \leq K$, $\forall$ $(t,\omega) \in T \times \Omega$.

<u>Teorema 4.2.1</u>: Suponha que p seja um martingal e que θ seja um processo previsível limitado. Então $\int \theta dp$ é um martingal.

dem.:

$$E[\int_0^t \theta dp \mid \mathcal{F}_{t-1}] = E[\sum_{s=1}^{t} \theta(s).[p(s)-p(s-1)] \mid \mathcal{F}_{t-1}] =$$

$$= \sum_{s=1}^{t-1} \theta(k).[p(k)-p(k-1)] + E[\theta(t).[p(t)-p(t-1)] \mid \mathcal{F}_{t-1}] =$$

$$= \int_0^{t-1} \theta . dp$$

posto que $\theta(t)$ é previsível e $p(t)$ é um martingal. Do mesmo modo:

$$E[\int_0^t \theta dp \mid \mathcal{F}_{t-2}] = E[E[\int_0^t \theta dp \mid \mathcal{F}_{t-1}] \mid \mathcal{F}_{t-2}] =$$

$$= E[\int_0^{t-1} \theta dp \mid \mathcal{F}_{t-2}] = \int_0^{t-2} \theta dp$$

e portanto:

$$E[\int_0^t \theta dp \mid \mathcal{F}_u] = \int_0^u \theta dp \blacksquare$$

Gostaríamos então de transferir esses bons resultados do caso discreto para o caso contínuo.

Suponha agora $T = [0,T]$ (os resultados podem ser estendidos para $T = [0,\infty)$). Seja $(\Omega,\mathcal{F},P)$ um espaço de probabilidade e $F = \{ \mathcal{F}_t \mid t \in T \}$ uma filtração de σ-álgebras satisfazendo as condições usuais, e $(\Omega,\mathcal{F},F,P)$ o espaço de probabilidade com filtração.

No caso discreto a definição de integral estocástica é trivial, e $\int \theta dp$ tem boas propriedades. A generalização deste conceito para o caso contínuo não é simples, e merece maiores cuidados. O problema principal ao se passar para o caso $T = [0,T]$ é o fato de que não podemos permitir qualquer tipo de estratégia de negociação na definição de $\int \theta dp$. Caso não sejam eliminadas certas estratégias de negociação existirão possibilidades de arbitragem, fato indesejável em modelos de equilíbrio. Porém,

para definir o que vem a ser uma oportunidade de arbitragem no caso $T = [0,T]$ precisamos do conceito de estratégia auto-financiável, que por sua vez depende da definição de integral estocástica. Seguiremos então o seguinte caminho: definiremos o que vem a ser uma estratégia simples, uma estratégia de negociação simples auto-financiável, uma oportunidade de arbitragem para uma estratégia simples, uma estratégia quase-simples e finalmente estaremos aptos a analisar porque precisamos restringir a classe de estratégias de negociação admissíveis. Então temos:

<u>Definição 4.2.2:</u> Uma estratégia de negociação simples em T, denotada $\theta \in \Lambda$, é uma partição $\{ 0 = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = T \}$ de T e variáveis aleatórias limitadas $\{ h_0, h_1, \dots, h_{n-1} \}$ sendo h_i $\mathcal{F}_{t_i}$-mensurável, satisfazendo:

$$\theta(t) = h_i \ , \ \forall \ t \in (t_i, t_{i+1}]$$

<u>Definição 4.2.3:</u> Uma estratégia de negociação simples auto-financiável é $\theta \in \Lambda$ tal que para $0 \leq t \leq T-1$ temos:

$$\theta(t).p(t) = \theta(t+1).p(t)$$

<u>Definição 4.2.4:</u> Uma oportunidade de arbitragem para uma estratégia de negociação simples auto-financiável é definida por :

(i) arbitragem do primeiro tipo:

é um porta-fólio $\theta \in \Lambda$ tal que:

$$\theta(0).p(0) \leq 0$$

$$P\{\ \theta(T).p(T) \geq 0\ \} = 1$$

$$P\{\ \theta(T).p(T) > 0\ \} > 0$$

(i) arbitragem do segundo tipo:

é um porta-fólio $\theta \in \Lambda$ tal que:

$$\theta(0).p(0) < 0$$

$$P\{\ \theta(T).p(T) \geq 0\ \} = 1$$

<u>Definição 4.2.5:</u> Uma estratégia de negociação quase-simples em T, denotada $\theta \in \Lambda'$ é uma seqüência $0 = t_0 < t_1 < \ldots < T$ e variáveis aleatórias $\{\ h_0,\ h_1,\ \ldots\ \}$ onde h_i é $\mathcal{F}_{t_i}$-mensurável, satisfazendo:

$$\theta(t) = h_i \qquad \forall\ t \in (t_i, t_{i+1}]$$

A dificuldade em estender a definição de $\int \theta dp$ para o caso contínuo é que se estratégias quase-simples forem permitidas, então teremos uma oportunidade de arbitragem do primeiro tipo, ou seja, teremos uma estratégia $\theta \in \Lambda'$ tal que $\theta(0).p(0) = 0$ e $P\{\ \theta(T).p(T) > 0\ \} = 1$. A estratégia $\theta \in \Lambda'$ que torna isto possível não é complicada. É equivalente às estratégias "suicida" e "dobrar sempre" no jogo de roleta, onde um jogador pode perder sempre ou ganhar sempre, respectivamente. A estratégia "suicida" jamais seria adotada

por um indivíduo racional. Quanto à estratégia "dobrar sempre", basta o jogador apostar sempre no vermelho, dobrando a aposta sempre que perder, até que o vermelho saia. Para realizar esta estratégia basta o jogador ser capaz de apostar um número contável de vezes, sendo que para cada estado da natureza é necessário apenas jogar um número finito de vezes. Como aplicar esta idéia ao modelo ? Divida o intervalo [0,T] através da seqüência $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < T$, sendo $t_n = T - T/2^n$. Neste caso:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (t_n - t_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} T.2^{-n} = T$$

e basta "dobrar a aposta" a cada intervalo $(t_n, t_{n-1}]$. Será necessário um patrimônio finito para cada $\omega \in \Omega$, mas o patrimônio na data 0 não poderá ser limitado em ω. Nos modelos usuais de finanças, onde se supõe mercados sem fricções, os fundos necessários podem ser obtidos pela venda a descoberto dos demais títulos.

Como resolver o problema ? Em primeiro lugar, é preciso proibir que $\theta \in \Lambda'$. Observe então que se $\theta \in \Lambda$, então teremos sempre uma partição de T com um número finito de intervalos e neste caso não existirá esse tipo de arbitragem. A solução então é definir o que vem a ser integral estocástica para o caso contínuo inicialmente para a classe das estratégia de negociação $\theta \in \Lambda$, e posteriormente tentar estender o conceito para uma classe de estratégias de

negociação mais ampla. Antes disso são necessárias mais algumas definições:

Definição 4.2.6: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função real no intervalo fechado $[a,b]$ e $\Pi = \{ \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \}$ uma partição de $[a,b]$. Defina

$$\int_a^b |df| = \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{m} | f(\lambda_j) - f(\lambda_{j-1}) |$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições finitas Π do intervalo $[a,b]$. Este supremo, $\int_a^b |df|$, é chamado de variação de f em $[a,b]$. Se $\int_a^b |df| < \infty$, então f é de variação limitada em $[a,b]$. Caso contrário f é de variação ilimitada em $[a,b]$.

Para uma função crescente é fácil ver que:

$$\int_a^b |df| = | f(b) - f(a) |$$

Um fato importante é o seguinte: uma função de variação limitada é da forma $f = g-h$, onde g e h são funções crescentes.

Podemos finalmente iniciar a construção de uma integral estocástica. Começaremos pela definição da integral de Stieltjes (determinística).

Definição 4.2.7: Seja $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua à direita de variação limitada e $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ contínua. Seja a partição $\Pi = \{ t_1, t_2, \dots , t_n \}$ onde $t_i = \frac{i.t}{2^n}$,para $0 \leq i \leq 2^n$. Logo a integral de Stieltjes de g com respeito a F em $[0,T]$ é dada por:

$$\int_0^t g(s)dF(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} g(t_{i+1}).[F(t_{i+1}) - F(t_i)]$$

Podemos agora definir a integral de Stieltjes estocástica. Dado um processo estocástico p contínuo à direita e de variação limitada, e dado um processo estocástico adaptado θ contínuo (as negociações $x(\omega)$ são funções contínuas quase certamente), podemos definir para cada data t e para cada estado da natureza ω a integral de Stieltjes estocástica como:

$$\left[\int_0^t \alpha.dp \right](\omega) = \int_0^t \alpha(\omega,s).dp(\omega,s)$$

Esta integral é o limite da integral de Stieltjes definida anteriormente para o caso determinístico. Logo podemos definir esta integral estocástica "ω por ω" desde que os processos θ e p satisfaçam as condições acima.

Aqui surge um problema. A classe de processos estocásticos (θ,p) onde θ é contínuo e p é contínuo à direita e de variação limitada não é suficientemente ampla para boa parte das aplicações. Contudo, para ampliá-la devemos

sacrificar a definição "ω por ω" acima. Precisamos então de mais algumas definições:

Definição 4.2.8: Um tempo de parada em um espaço de probabilidade com filtração $(\Omega,\mathcal{F},F,P)$ dado T é uma variável aleatória $\tau : \Omega \to T$ tal que o evento $\{ \omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \leq t \} \in \mathcal{F}_t \ \forall\ t \in T$. Se x é um processo estocástico adaptado e τ é um tempo de parada, então x_τ significa o processo x "parado" na data τ. Isto é,

$$x_\tau = x(t) \qquad \forall\ t \leq \tau$$
$$x_\tau = x(\tau) \qquad \forall\ t > \tau$$

Definição 4.2.9: Um processo estocástico adaptado x é um martingal local se existe uma seqüência $\{ \tau_1, \tau_2, \ldots \}$ de tempos de parada tal que $\tau_n \leq \tau_{n+1}$ quase certamente para todo n e tal que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ quase certamente e para o qual x_{τ_n} é um martingal para cada n. Evidentemente que um martingal é um martingal local.

Definição 4.2.10: Um semimartingal é um processo estocástico x da forma $x = m + y$ onde m é um martingal local e y é um processo de variação finita.

A hipótese mais geral para se representar preços em mercados financeiros é a de que os preços sejam

semimartingais. Poderíamos perfeitamente, ao custo de mais algumas páginas, definir a integral estocática $\int \theta dp$ para o caso de p ser um semimartingal. Como tínhamos suposto inicialmente que $p \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ (e para evitar este custo adicional) não o faremos. Continuando:

Definição 4.2.11: Dados dois processos estocásticos adaptados x e y, se $P(\{x_t=y_t\}) = 1$, $\forall\ t \in T$ então diz-se que x é uma versão de y ou que y é uma versão de x.

Definição 4.2.12: Um processo estocástico $x : T\times\Omega \to \mathbb{R}$ é contínuo à direita (à esquerda) quando para cada $\omega \in \Omega$ a função $x(\omega) : T \to \mathbb{R}$ for contínua à direita (à esquerda), ou seja, $\forall\ t$, $\lim_{s\to t+} x(s,\omega) = x(t,\omega)$. Do mesmo modo, um processo estocástico é um processo com limite à esquerda (à direita) se $x(\omega) : T \to \mathbb{R}$ tem limite à esquerda (à direita) $\forall\ t \in T$, ou seja, $\lim_{s\to t-} x(s,\omega)$ existe. Um processo que é tanto contínuo à direita como com limite a esquerda é chamado de um processo RCLL.

Então todo processo estocástico que tiver realizações $x(\omega) : T \to \mathbb{R}$ com um número contável de descontinuidades para todo $\omega \in \Omega$ tem uma versão RCLL.

Definição 4.2.13: Um martingal com variância finita no espaço de probabilidade com filtração $(\Omega,\mathcal{F},F,P)$ em T é um martingal

com limite à direita x tal que:

$$\sup_{o \le t \le T} E_P[\, x_t^2 \,] < \infty$$

Definição 4.2.14: $\mathcal{M}_P^2$ é o espaço dos martingais com variância finita em $(\Omega,\mathcal{F},F,P)$ em T cujo valores na data t = 0 é 0.

Definição 4.2.15: Um processo estocástico em $(\Omega,\mathcal{F},F,P)$ é dito ser previsivel se for mensurável com respeito à σ-álgebra $\mathcal{P}$ em $T\times\Omega$ gerada pelos processos estocásticos adaptados à filtração F.

Intuitivamente, θ é um processo estocástico previsível se o valor de $\theta(t)$ pode ser determinado pela informação disponível na, mas não incluindo, data t, para qualquer $t \in [0,T]$.

Definição 4.2.16: A covariação quadrática de dois semimartingais X e Y definidos em $(\Omega,\mathcal{F},F,P)$ dado T é o processo, denotado por $[X,Y]_t$, tal que para todo $t \in T$:

$$[X,Y]_t = X(0).Y(0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} [X(t_i^n)-X(t_{i-1}^n)].[Y(t_i^n)-Y(t_{i-1}^n)]$$

onde $t_i^n = i.t/2^n$ para $0 \le i \le 2^n$, sendo o limite tomado na norma do espaço $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$. (não consideraremos aqui o problema de existência).

Definição 4.2.17: A variação quadrática de um semimartingal X definido em $(\Omega,\mathcal{F},F,P)$ dado T é o único (quase certamente) processo crescente, denotado por $[X]_t$, tal que para todo $t \in T$:

$$[X]_t = X(0)^2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} [\, X(t_i^n) - X(t_{i-1}^n)\,]^2$$

onde $t_i^n = i.t/2^n$ para $0 \le i \le 2^n$, sendo o limite tomado na norma do espaço $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$. (novamente, não consideraremos aqui o problema de existência).

Temos então que $\mathcal{M}_P^2$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por:

$$\langle x,y\rangle = \left[\, E_P\{\, [x,y]_T \}\,\right]^{1/2}$$

Podemos então definir o espaço $L_P^2[p]$:

Definição 4.2.18: Dado o martingal $p \in \mathcal{M}_P^2$ definido em $(\Omega,\mathcal{F},F,P)$ no intervalo T, temos que $L_P^2[p]$ é definido como o conjunto das estratégias de negociação θ em $(\Omega,\mathcal{F},F,P)$ tais que:

(i) θ é previsível

(ii) $\sup_{0\le t\le T} E_P[\, \int_0^t \theta(s)^2 d[p]_s \,] < \infty$

Note que a integral $\int_0^t \theta_s^2 d[p]_s$ é uma integral de Stieltjes estocática, e que está bem definida, pois $[p]_t$ é uma função crescente de p, logo de variação limitada e $\theta(t)^2$ é positivo. Além disso, temos que $L_p^2[p]$ é um espaço vetorial, com a semi-norma:

$$\| \theta \|_{L_p^2[p]} = \left(E_p[\int_0^T \theta_t^2 d[p]_t] \right)^{1/2}$$

Precisamos de um última definição:

<u>Definição 4.2.19:</u> $L_p^2[p]_{\mathcal{E}}$ é o conjunto formado pelos processos estocásticos em $(\Omega,\mathcal{F},F,P)$ em $T = [0,T]$ tais que:

(i) $\theta \in \Lambda$

(ii) $\theta \in L_p^2[p]$

Seja agora uma partição de $T = [0,T]$, $\pi = \{ 0 = t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n = T \}$ e um processo estocástico simples $\theta \in L_p^2[p]_{\mathcal{E}}$ tal que:

$$\theta(t) = h_i, \qquad \forall\, t \in (t_i, t_{i+1}]$$

Então a integral de Stieltjes de θ relativamente a p é:

$$\int_0^{t_i} \theta(s)dp(s) = \sum_{j=1}^{i} \theta(t_{j-1})[p(t_j)-p(t_{j-1})]$$

Esta integral está bem definida, posto que não depende de limites, apenas da partição π (finita). A integral acima é a soma dos ganhos e perdas nos intervalos da partição π.

Temos então o seguinte lema, que não demonstraremos:

<u>Lema 4.2.2</u>: Se $p \in \mathcal{M}_P^2$ e $\theta \in L_P^2[p]_{\mathcal{E}}$, então $\int \theta dp \in \mathcal{M}_P^2$

É conveniente neste ponto rever alguns resultados básicos. Tínhamos que:

(i) $\mathcal{M}_P^2$ é um espaço de Hilbert com produto interno:

$$\langle x,y \rangle_{\mathcal{M}_P^2} = \left(E_P\{ [x,y]_T \} \right)^{1/2}$$

(ii) Se $p \in \mathcal{M}_P^2$, então $L_P^2[p]$ é um espaço vetorial com semi-norma:

$$\| \theta \|_{L_P^2[p]} = \left(E_P[\int_0^T \theta(s)^2 d[p]_s] \right)^{1/2}$$

Finalmente podemos definir a integral estocástica:

<u>Teorema 4.2.3</u>: Para qualquer processo estocástico p definido em $(\Omega,\mathcal{F},F,P)$ tal que $p \in \mathcal{M}_P^2$ e para toda estratégia de negociação $\theta \in L_P^2[p]$ existe uma sequência $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ de

estratégias de negociação simples tais que $\theta_n \in L^2_P[p]_{\mathcal{E}}$, $\forall$ n, convergindo para θ em $L^2_P[p]$, ou seja:

$$\| \theta_n - \theta \|_{L^2_P[p]} \to 0$$

Para qualquer seqüência $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfazendo as condições acima, o correspondente processo de ganho $\{ \int \theta_n dp \}_{n=1}^{\infty}$ converge para $\int \theta dp$ em $\mathcal{M}^2_P$, ou seja:

$$\| \int \theta_n dp - \int \theta dp \|_{\mathcal{M}^2_P} \to 0$$

Além disso, o martingal $\int \theta dp$ é único.

Define-se então a integral estocástica de θ relativamente a p como $\int \theta dp$. O teorema não será demonstrado, mas sua prova consiste em mostrar que:

$$\| \theta \|_{L^2_P[p]} = \| \int \theta dp \|_{\mathcal{M}^2_P}$$

Logo concluímos que $L^2_P[p]_{\mathcal{E}}$ é denso em em $L^2_P[p]$, e além disso a aplicação $\psi : L^2_P[p] \to \mathcal{M}^2_P$ definida por $\psi(\theta) = \int \theta dp$ é uma isometria de $L^2_P[p]$ em $\mathcal{M}^2_P$.

A interpretação deste resultado é que dado qualquer estratégia admissível $\theta \in L^2_P[p]$ existe uma seqüência de estratégias simples convergindo para θ (quando os agentes

passam a realizar transações cada vez mais frequentes), com os processos de ganho correspondentes convergindo para o processo de ganho gerado por θ.

Temos também uma extensão do lema 4.4.3. Se $p \in \mathcal{M}_P^2$ e $\theta \in L_P^2[p]$ então $\int \theta dp \in \mathcal{M}_P^2$, ou seja, é um martingal relativamente a P, implicando em não existir ganho financeiro esperado com as negociações com os títulos, um resultado com forte apelo econômico. Note também que este resultado elimina o problema levantado inicialmente, referente a existência de estratégias do tipo "dobre sempre", já que qualquer estratégia $\theta \in L_P^2[p]$ só gera martingais relativamente à medida P. Outro fato agradável é o de que o espaço $L_P^2[p]$ é um espaço completo, implicando em não existência de uma seqüência com elementos $\theta_n \in L_P^2[p]$ convergindo para uma estratégia do tipo "dobre sempre".

Os resultados podem ser estendidos facilmente de T = [0,T] para T = [0,∞). Para qualquer martingal $p \in \mathcal{M}_Q^2$ e $\theta \in L_P^2[p]$ defina $\int \theta dp$ até T > 0 como no teorema restringindo θ e p a $[0,T]\times\Omega$. Como isto se aplica para todo T > 0, então temos $\int \theta dp$ definindo em $[0,\infty)\times\Omega$.

Dado o processo estocástico G definido pela integral estocástica $G_t = G_0 + \int_0^t \theta(s)dp(s)$ existe uma notação mais simples para representa-lo, a forma diferencial:

$$dG_t = \theta_t . dp_t$$

Finalmente podemos definir quais são as estratégias

de negociação admissíveis:

Definição 4.2.20: O conjunto das estratégias de negociação admissíveis Θ é o conjunto dos processos estocásticos $\theta_n \in L^2_p[p_n]$ para $1 \leq n \leq N$ tais que:

(i) θ_n é previsível

(ii) $E_p[\int_0^T (\theta_n(s))^2 d[p_n]_s] < \infty$

4.3. A Condição de Equilíbrio

O equilíbrio é definido no caso de tempo contínuo de modo semelhante ao caso discreto. Inicialmente temos a definição de restrição orçamentária:

Definição 4.3.1: Dada a dotação e^i do indivíduo i e os preços dos títulos dados pelos processos estocásticos p_n, $1 \leq n \leq N$, temos que a restrição orçamentária $B(e^i,p)$ é o subconjunto do espaço de consumo $\mathcal{X}$ tal que $c \in B(e^i,p)$ se e somente se existem processos estocásticos previsiveis θ^i_n, $1 \leq n \leq N$ tais que:

(i) $\theta^i \in L^2_p[p]$

(ii) $c^i(0) + \theta(0)p(0) = e^i(0)$

(iii) $\theta(t)p(t) = \theta(0)p(0) + \int_0^t \theta(s)dp(s)$

para $1 \leq t \leq T$

(iv) $c^i(T) = e^i(T) + \theta(T)d(T)$

O problema de maximização do indivíduo i é então:

$$\max E_P^i[\, u(c(0),c(T))\,] = \int_\Omega u(c(0),c(T,\omega)).P(d\omega)$$

$$\text{sujeito a} \quad c \in B(e^i,p)$$

e o equilíbrio é definido do mesmo modo que no capítulo 3, ou seja, quando:

$$\sum_{i=1}^{I} \theta^i(t) = 0 \qquad \theta^i(t) \in \mathbb{R}^N \qquad 1 \le t \le T$$

4.4. Medida de Martingal Equivalente

No modelo multiperiódico com tempo discreto determinamos os processos de preços dos títulos como resultado da maximização das utilidades dos indivíduos, dadas suas restrições orçamentárias e os processos de dividendos dos títulos. Agora, para o modelo multiperiódico com tempo contínuo, vamos adotar um procedimento diferente: vamos supor dados os processos estocásticos dos títulos e provar a existência de uma economia cujos preços de equilíbrio são esses processos.

Precisamos inicialmente das seguintes definições:

Definição 4.4.1: Uma estratégia de negociação admissível $\theta \in \Theta$ é dita ser auto-financiável se e somente se:

$$\theta(t)p(t) = \theta(0)p(0) + \int_0^t \theta(s)dp(s) \qquad \forall\ t \in [0,T]$$

<u>Definição 4.4.2</u>: Uma oportunidade de arbitragem para uma estratégia de negociação auto-financiável é definida por:

(i) arbitragem do primeiro tipo:

é um porta-fólio $\theta \in \Theta$ tal que:

$$\theta(0)p(0) \leq 0$$

$$P(\ \theta(T)p(T) \geq 0\ ) = 1$$

$$P(\ \theta(T)p(T) > 0\ ) > 0$$

(i) arbitragem do segundo tipo:

é um porta-fólio $\theta \in \Theta$ tal que:

$$\theta(0)p(0) < 0$$

$$P(\ \theta(T)p(T) \geq 0\ ) = 1$$

Suponha agora que exista um título (seja ele o título 1) tal que ele seja contínuo com variação limitada (localmente sem risco). Então podemos construir um novo sistema de preços normalizados no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega,\mathcal{F},P)$, datas de negociação T, estrutura de informação F:

$$p_n^*(t,\omega) = \frac{p_n(t,\omega)}{p_1(t,\omega)}$$

Temos então o lema:

<u>Lema 4.4.1</u>: Seja $\theta \in \Theta$. Então θ é uma estratégia de negociação auto-financiável para o modelo com preços não normalizados se e somente se o é para o sistema com preços normalizados.

dem.:

Seja $V_t(\theta) = \theta(t)p(t)$ e $V_t^*(\theta) = \theta(t)p^*(t)$

Então $V_t(\theta) = V_o(\theta) + G_t(\theta)$, ou em notação diferencial: $dV_t(\theta) = \theta(t)dp(t)$

mas $p^*(t) = p(t)/p_1(t) = \beta(t)p(t)$ sendo β contínuo de variação limitada. Logo $[\beta,x]_t = 0$, $\forall$ x semimartingal, um resultado que não será demonstrado. Pela fórmula de Itô (ver Dothan, capítulo 11) temos:

$$d(\beta x) = \beta dx + xd\beta + d[\beta,x] = \beta dx + xd\beta$$

logo para provar a ida:

suponha válido $V_t(\theta) = V_o(\theta) + G_t(\theta)$, então:

$$d(V_t^*(\theta)) = d(\beta(t)V_t(\theta)) = \beta(t)dV_t(\theta) + V_t(\theta)d\beta(t) =$$

$$= \beta(t)\theta(t)dp(t) + \theta(t)p(t)d\beta(t) =$$

$$= \theta(t).[\ \beta(t)dp(t) + p(t)d\beta(t)\ ] =$$

$$= \theta(t)d(\beta(t)p(t)) = \theta(t)d(p^*(t))$$

concluímos que $dV_t^*(\theta) = \theta(t)dp^*(t)$, ou seja:

$$V_t^*(\theta) = V_o^*(\theta) + G_t^*(\theta)$$

para provar a volta:

suponha válido $V_t^*(\theta) = V_o^*(\theta) + G_t^*(\theta)$, então:

$$d(V_t(\theta)) = d(p_1(t)V_t^*(\theta)) = p_1(t)dV_t^*(\theta) + V_t^*(\theta)\ dp_1(t) =$$

$= \theta(t)dp(t)$ pelo mesmo procedimento, logo

$$V_t(\theta) = V_o(\theta) + G_t(\theta)\blacksquare$$

Podemos então definir o que é variável aleatória alcançável:

Definição 4.4.3: Uma variável aleatória $x \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ é alcançável dados os processos estocásticos de preços p se e somente se existe uma dotação $e \in X$ tal que $e(T) = 0$ e $c \in B(e,p)$. Ou seja, denotando o conjunto dos processos de consumo alcançáveis por $\mathcal{M}$ temos:

$$\mathcal{M} = \{ x \mid x = \theta(0)p^*(0) + \int_0^T \theta(s)dp^*(s), \quad \theta \in \Theta \}$$

Sejam agora as definições:

Definição 4.4.4: Um modelo é consistente se e somente se não existe oportunidade de arbitragem

Definição 4.4.5: Seja $\mathcal{M}$ subespaço do espaço vetorial $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$, $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ um funcional em $\mathcal{M}$. Então f é chamado um funcional positivo se e somente se $\forall\ c \in \mathcal{M}$, $c \geq 0$, $f(c) \geq 0$ e $\forall\ c \geq 0$, $c \neq 0$, $f(c) > 0$.

Dado um modelo consistente, podemos definir um funcional positivo Π sobre $\mathcal{M}$, chamado preço implícito, que a cada $x \in \mathcal{M}$ associa o valor $\theta(0)p^*(0) = e(0)$. Como a integral estocástica é linear, Π é linear. Temos então:

Definição 4.4.6: Um sistema de preços $(\mathcal{M},\Pi)$ é um subespaço $\mathcal{M}$

de $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ e um funcional linear $\Pi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$.

Definição 4.4.7: Um sistema de preços $(\mathcal{M},\Pi)$ é viável como modelo de equilíbrio se existir algum indivíduo i com preferências na classe **A** capaz de encontrar uma estratégia $\theta \in \Theta$ ótima para $\succ^i$, ou seja, para alguma dotação $e(0)$:

$$\theta(0)p^*(0) \leq e(0) \text{ e}$$

$$\text{não existe } \delta \in \Theta \text{ tal que } V_T^*(\delta) > V_T^*(\theta) \text{ se } \delta(0)p^*(0) \leq e(0)$$

Então temos o teorema:

Teorema 4.4.2: Um sistema de preços $(\mathcal{M},\Pi)$ é viável se e somente se existe uma extensão linear contínua e positiva Ψ de Π tal que $\Psi|\mathcal{M} = \Pi$.

dem.:

($\Rightarrow$) Suponha $(\mathcal{M},\Pi)$ viável. Seja $\succ \in$ **A**, e $(r^*,m^*) \in$ **X** tal que (r^*,m^*) é ótimo. Defina os conjuntos:

$$G = \{ (r,x) \in \mathbf{X} \mid (r,x) \succ (r^*,m^*) \}$$

$$H = \{ (r,x) \in \mathbf{X} \mid r + \Pi(x) \leq 0 \}$$

Os conjuntos G e H são convexos (preferências são convexas), são disjuntos (caso contrário existe oportunidade de arbitragem) e G é aberto (pois as preferências são contínuas). Logo existe um operador linear contínuo não trivial $\mu : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ tal que $\mu(r,x) \geq 0$ para $(r,x) \in G$ e $\mu(r,x)$

≤ 0 para $(r,x) \in H$.

Temos $\mu(r^*+1,m^*) > 0$. Isto porque como μ é não trivial existe (r',m') tal que $\mu(r',m') > 0$. Como $\succ \in A$, $(r^*+1,m^*) \succ (r^*,m^*)$. Pela continuidade de $\succ$, existe $\lambda > 0$ tal que $(r^*+1-\lambda r',m^*-\lambda m') \succ (r^*,m^*)$. Logo:

$$\mu(r^*+1-\lambda r',m^*-\lambda m') = \mu(r^*+1,m^*) - \lambda.\mu(r',m') \geq \mu(r^*,m^*)$$
$$\Rightarrow \mu(1,0) \geq \lambda.\mu(r',m') > 0$$

Normalize μ de modo que $\mu(1,0) = 1$, e seja $\mu(r,x) = r + \Psi(x)$ onde Ψ é um funcional linear contínuo em $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. Ψ é estritamente positivo. Se $P(x\geq 0) \geq 0$ e $P(x>0) > 0$, temos $(r^*,m^*+x) \succ (r^*,m^*)$. Pela continuidade de $\succ^i$, existe um $\lambda > 0$ tal que $(r^*-\lambda,m^*+x) \succ (r^*,m^*)$. Isto implica em $\Psi(m^*+x) - \Psi(m^*) - \lambda \geq 0$ ou seja $\Psi(x) \geq \lambda > 0$.

Temos $\Psi|\mathcal{M} = \Pi$, pois se $m \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ então $(-\Pi(m),m)$ e $(\Pi(m),-m)$ estão em H, logo $0 = \mu(\Pi(m),-m) = \Pi(m) - \Psi(m)$ ou seja $\Pi(m) = \Psi(m)$.

($\Leftarrow$) Seja agora $(\mathcal{M},\Pi)$ tal que exista Ψ satisfazendo $\Psi|\mathcal{M} = \Pi$. Então defina $\succ$ em $\mathbf{X}$ por:

$$(r,x) \succsim (r',x') \quad \text{se} \quad r + \Psi(x) \geq r' + \Psi(x')$$

então temos que $\succ$ está em $\mathbf{A}$ e que existe (r^*,m^*) ótimo. Logo $(\mathcal{M},\Pi)$ é viável.■

Suponha dado um sistema de preços $(\mathcal{M},\Pi)$. Se $x \notin \mathcal{M}$ e

o preço de x é p, então os agentes devem ser capazes de comprar qualquer título $m + \lambda.x \in$ espaço gerado por $(\mathcal{M} \cup x) = \mathcal{M}_x$ ao preço $\Pi(m) + \lambda.p$. Seja Π_x o funcional em $\mathcal{M}_x$, tal que $\Pi_x(m+\lambda x) = \Pi(m) + \lambda.p$. Então o preço p para x é consistente com o sistema de preços $(\mathcal{M},\Pi)$ se $(\mathcal{M}_x,\Pi_x)$ é viável. Quando existe um único preço para o título x consistente com $(\mathcal{M},\Pi)$ dizemos que o preço de x foi determinado por arbitragem de $(\mathcal{M},\Pi)$ e este valor único é chamado de valor de arbitragem de x. Como conseqüência do teorema anterior:

Corolário 4.4.3: Se um sistema de preços $(\mathcal{M},\Pi)$ é viável, então o preço de $x \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ é determinado por arbitragem se e somente se existe uma única extensão Ψ de Π, tal que $\Psi|\mathcal{M} = \Pi$. Neste caso, este valor único é o valor de arbitragem de x.

Precisamos de mais alguns resultados antes de provar a existência de uma medida de martingal equivalente Q para o modelo contínuo.

Definição 4.4.8: Uma medida de probabilidade Q é P-contínua (notação $P \gg Q$) quando para todo $A \in \mathcal{F}$ tal que $P(A) = 0$ vale $Q(A) = 0$.

Teorema 4.4.4: Teorema de Radon-Nikodyn - Sejam P e Q duas medidas de probabilidade. Então $P \gg Q$ é uma condição necessária e suficiente para que exista uma variável

aleatória $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ com $E_P[\ \rho\ ] = 1$ tal que:

$$Q(A) = \int_A \rho(\omega)P(d\omega) \qquad \forall\ A \in \mathcal{F}$$

A função ρ é única quase certamente relativamente a P, e $\rho \geq 0$ quase certamente relativamente a P.

Como conseqüência deste teorema, temos a fórmula de mudança de medida na integral de Lebesgue:

$$E_Q[\ x\ ] = \int_\Omega x(\omega)Q(d\omega) = \int_\Omega x(\omega)\rho(\omega)P(d\omega) = E_P[\ \rho.x\ ]$$

<u>Definição 4.4.9</u>: Duas medidas P e Q são absolutamente contínuas quando P>>Q e Q>>P, denotado $P \sim Q$.

Para simplificar, vamos supor que no modelo $P \sim Q$. Vale notar que isto é uma condição necessária e suficiente para que qualquer variável aleatória que tenha variância finita em relação a P o tenha em relação a Q e vice-versa, ou seja:

$$Q \sim P \quad \Leftrightarrow \quad \{\ x \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P) \Leftrightarrow x \in L^2(\Omega,\mathcal{F},Q)\ \}$$

Neste caso existe $k > 0$ tal que:

$$1/k < \frac{dQ}{dP} < k \qquad \text{quase certamente}$$

Condições suficientes para isto podem ser representadas por funções de utilidade de Von Newmann-Morgenstern, em termos de limites na utilidade marginal do consumo na data T.

Podemos agora definir o que é uma medida de martingal equivalente no modelo contínuo e mostrar sua relação com a extensão Ψ do funcional Π:

Definição 4.4.10: Uma medida de martingal equivalente é uma medida de probabilidade Q em $(\Omega,\mathcal{F})$ com as seguintes características:

(i) P e Q são absolutamente contínuas, ou seja:

$$P(B) = 0 \Leftrightarrow Q(B) = 0 \ , \ \forall \ B \in \mathcal{F}$$

(ii) $\rho = \dfrac{dQ}{dP} \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$

(iii) p^* é um martingal relativamente a Q, ou seja:

$$E_Q[\ p_n^*(s) \ | \ \mathcal{F}_t \ ] = p_n^*(t) \qquad \text{se } s \geq t$$

Precisamos de um último resultado:

Teorema 4.4.5 : Teorema de representação de Riesz - Um funcional linear $\Psi : L^p(\Omega,\mathcal{F},P) \to \mathbb{R}$ é contínuo se e somente se $\Psi(x) = \int_\Omega \rho(\omega)x(\omega)P(d\omega)$ para alguma variável aleatória $\rho \in L^q(\Omega,\mathcal{F},P)$, sendo $1/p + 1/q = 1$.

Ou seja, existe uma correspondência 1 : 1 entre funcionais lineares contínuos definidos em $L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$ e

variáveis aleatórias em $L^q(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Então podemos enunciar os teoremas:

Teorema 4.4.6: Suponha que o sistema de preços $(\mathcal{M},\Pi)$ seja consistente. Então existe uma correspondência bijetiva entre medidas de martingal equivalentes Q e funcionais lineares contínuos e estritamente positivos Ψ em $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ tais que $\Psi|\mathcal{M} = \Pi$. Esta correspondência é dada por:

$$Q(B) = \Psi(1B) \quad e \quad \Psi(x) = E_Q[\ x\ ]$$

dem.:

($\Rightarrow$) Pelo teorema de representação de Riesz, temos que Ψ é um funcional linear em $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ se e somente se

$$\Psi(x) = E_P[\ \rho.x\ ]\ , \qquad \rho \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$$

Seja Q uma medida de martingal equivalente. Fixe $\rho = dQ/dP$ e defina Ψ como $\Psi(x) = E_Q[\ x\ ]$ (utilizando a fórmula de mudança de medida). Como $\rho \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ temos que Ψ é contínua (uma conseqüência da desigualdade de Hölder). Como P e Q são equivalentes, temos $\rho > 0$. Logo Ψ é estritamente positivo. Além disso, $E_P[\ \rho\ ] = 1$ (pois $p_1^*(t) = 1\Omega$, $\forall\ t \in T$).

Falta mostrar que $\Psi|\mathcal{M} = \Pi$. Seja $\theta \in \Theta$ uma estratégia auto-financiável que gera $m \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. Então

$$m = \theta(0)p^*(0) + \int_0^T \theta(s)dp^*(s)$$

logo $E_Q[\ m \mid \mathcal{F}_t\ ] = \theta(0)p^*(0) + \int_0^t \theta(s)dp^*(s)$ pois p^* é um Q-martingal. Então $E_Q[\ m\ ] = \theta(0)p^*(0)$.

Como $m = \theta(0)p^*(0) + \int_0^T \theta(s)dp^*(s)$ e $\Pi(m) = \theta(0)p^*(0)$ temos que $E_Q[\ m\ ] = \Psi(m) = \Pi(m)$.

($\Leftarrow$) Para demonstrar a reciproca, seja Ψ um funcional linear contínuo e estritamente positivo tal que $\Psi|\mathcal{M} = \Pi$. Defina Q de Ψ por $Q(B) = \Psi(1B)$, $B \in \mathcal{F}$. Então se $P(B) = 0$ temos $Q(B) = 0$ e se $P(B) > 0$ temos $Q(B) = \Psi(1B) > 0$, logo $Q \sim P$. Como Ψ é contínuo $\Psi(x) = E_P[\ \rho.x\ ]$ para certo $\rho \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. Logo $Q(B) = E_P[\ \rho.1B\ ]$. Q é σ-aditiva e $\rho = dQ/dP \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. Como $1\Omega \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ e $\Psi(1\Omega) = 1$ segue-se que $Q(\Omega) = 1$ e logo Q é medida de probabilidade.

Falta mostrar que $p_n^*(t)$, $t \in T$, $2 \le n \le N$ é um Q-martingale. Fixe $n > 0, t \in T$ e $n \in T$ tais que $t \le n$ e um conjunto $B \in \mathcal{F}_t$. Adote a seguinte estratégia: compre uma unidade do título n na data t e no evento $B \in \mathcal{F}_t$ e o venda na data u, financiando a compra e aplicando o resultado no título 1. Então:

$$\theta_n(s,\omega) = 1 \qquad \text{se } s \in [t,u) \text{ e } \omega \in B$$

$$\theta_n(s,\omega) = 0 \qquad \text{de outra forma}$$

$$\theta_1(s,\omega) = -p_n^*(t,\omega) \qquad \text{se } s \in [t,u) \text{ e } \omega \in B$$

$$\theta_1(s,\omega) = p_n^*(u,\omega)-p_n^*(t,\omega) \qquad \text{se } s \in [u,t] \text{ e } \omega \in B$$

$$\theta_1(s,\omega) = 0 \qquad \text{de outra forma}$$

$$\theta_j(s,\omega) = 0 \qquad \forall\ j \neq 1,\ k$$

Logo, na data T, $\theta(T)p^*(T) = (p_n^*(u)-p_n^*(t)).1B$

De $\Psi|\mathcal{M} = \Pi$ temos $\Psi((p_n^*(u)-p_n^*(t)).1B) = 0$, e portanto:

$$E_Q[\ p_n^*(u).1B\ ] = E_Q[\ p_n^*(t).1B\ ]$$

mas isto é válido para todo $B \in \mathcal{F}_t$, logo $p_n^*(t)$ é uma versão de $E_Q[\ p_n^*(u)\ |\ \mathcal{F}_t\ ]$■

Corolário 4.4.7: O sistema de preços $(\mathcal{M},\Pi)$ é viável para a classe de agentes A se e somente se existe pelo menos uma medida de martingal equivalente Q

dem.:

Pelo corolário 4.4.3 e pelo teorema 4.4.6, basta mostrar que se existe uma medida de martingal equivalente então não existe oportunidade de arbitragem.

Suponha que θ é uma estratégia auto-financiável tal que $P(\ \theta(T)p^*(T) \geq 0\ ) = 1$ e $P(\ \theta(T)p^*(T) > 0\ ) > 0$. Como $P \underset{\sim}{\ } Q$, $Q(\ \theta(T)p^*(T) \geq 0\ ) = 1$ e $Q(\ \theta(T)p^*(T) > 0\ ) > 0$. Isto implica em $E_Q[\ \theta(T)p^*(T)\ ] > 0$, e não existe oportunidade de arbitragem do primeiro tipo. Do mesmo modo se $P(\ \theta(T)p^*(T) \geq 0\ ) = 1$ temos $Q(\ \theta(T)p^*(T) \geq 0\ ) = 1$ e então $E_Q[\ \theta(T)p^*(T)\ ] \geq 0$, logo não existe oportunidade de arbitragem do segundo tipo.■

Note que sendo $P \underset{\sim}{\ } Q$ a filtração F em $(\Omega,\mathcal{F},F,Q)$ também satisfaz as "condições usuais".

Neste ponto é possível generalizar o modelo. Suponha que cada indivíduo i tenha sua medida de probabilidade subjetiva P^i, e que todos os indivíduos

concordem quanto aos eventos impossíveis, isto é, $P^i \underset{\sim}{} Q$, $\forall$ i. Neste caso, temos $x \in L^2(\Omega,\mathcal{F},Q) \Leftrightarrow x \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P^i)$, e também:

$$\Psi(x) = E_Q[\ x\ ] = E_{P^i}[\ \rho^i.x\ ]$$

$$\text{sendo } dQ/dP^i = \rho^i$$

E o modelo não depende da hipótese de existência de uma probabilidade subjetiva comum a todos os indivíduos.

As demonstrações acima usam o sistema de preços normalizado p^*. Contudo, podemos verificar que um modelo é viável se e somente se o outro modelo é, e o preço de um título é determinado por arbitragem em um modelo se e somente é no outro, logo as conclusões valem para ambos.

Podemos então enunciar o teorema 4.2.3 de uma forma um pouco diferente, relaxando suas hipóteses, mostrando a relação entre as medidas P e Q:

<u>Teorema 4.4.8</u>: Para qualquer processo estocástico p definido em $(\Omega,\mathcal{F},F,P)$ tal que $p \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ e para toda estratégia de negociação $\theta \in L^2_P[p]$ existe uma sequência $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ de estratégias de negociação simples tais que $\theta_n \in L^2_P[p]_{\mathcal{E}}$, $\forall$ n, convergindo para θ em $L^2_P[p]$, ou seja:

$$\| \theta_n - \theta \|_{L^2_P[p]} \to 0$$

Para qualquer seqüência $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfazendo as condições

acima, o correspondente processo de ganho $\{ \int \theta_n dp \}_{n=1}^{\infty}$ converge para $\int \theta dp$ em $\mathcal{M}_Q^2$, ou seja:

$$\| \int \theta_n dp - \int \theta dp \|_{\mathcal{M}_Q^2} \to 0$$

Note que como se supõe existir $k > 0$ tal que $1/k < \frac{dQ}{dP} < k$, as semi-normas $\|\cdot\|_{L_P^2[p]}$ e $\|\cdot\|_{L_Q^2[p]}$ são equivalentes.

Podemos então definir mercado completo como no modelo multiperiódico com tempo discreto:

<u>Definição 4.4.11:</u> Um modelo é completo se e somente se toda variável aleatória $x \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ for alcançável.

Pela definição acima, um mercado é incompleto quando não existir estratégia auto-financiável que permita obter um certo consumo final $c(T) \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Dado o sistema de preços normalizados p^*, seja o conjunto $\mathcal{M}(p^*)$ definido por:

$$\mathcal{M}(p^*) = \{ m \in \mathcal{M}_Q^2 \mid \text{existe } h \in L_P^2[p] \text{ tal que } m(t) = m(0) + \int_0^t h(s)dp^*(s) \}$$

Então temos o teorema:

<u>Teorema 4.4.9</u>: O modelo é completo se e somente se $\mathcal{M} = \mathcal{M}(p^*)$.

BIBLIOTECA
FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

Seja a definição:

Definição 4.4.12: Seja $\mathbf{P}$ o conjunto das medidas de martingal equivalente em $(\Omega,\mathcal{F})$. Uma medida $Q \in \mathbf{P}$ é dita ser extremal em $\mathbf{P}$ se e somente se não existem P_1 e $P_2 \in \mathbf{P}$ diferentes e $\alpha \in (0,1)$ tais que $Q = \alpha P_1 + (1-\alpha)P_2$.

Um teorema geral de representação diz que $\mathbf{P}$ tem uma medida extremal se e somente se $\mathcal{M} = \mathcal{M}(p^*)$. Isto implica no seguinte teorema:

Teorema 4.4.10: Se $\mathbf{P}$ tem apenas um elemento então o mercado é completo.

Vamos agora mostrar que dado o sistema de preços p tal que o modelo é viável e consistente, existirá uma economia para a qual este sistema de preços é um sistema de preços de equilíbrio:

Teorema 4.4.11: Dado o sistema de preços p^*, existe uma economia com agentes com preferências $\succ \in \mathbf{A}$ tal que os preços p^* são preços de equilíbrio.

dem.:

Dado $(r,c) \in \mathbf{X}$ defina a preferência $\succ$ pela relação:

$$(r_1,c_1) \succ (r_2,c_2) \quad \Leftrightarrow \quad r_1 + \Psi(c_1) \geq r_2 + \Psi(c_2)$$

é fácil ver que $\succ \in A$, pelas propriedades de Ψ. A alocação $(r^*,c^*) = e^i$ é uma alocação de equilíbrio porque cada indivíduo prefere (r^*,c^*) a qualquer outro (r',c') atingível contido na sua restrição orçamentária, isto é, tal que $r' + \Psi(c') \leq r^* + \Psi(c^*)$. Logo não existe troca neste equilíbrio.■

As definições de factibilidade e eficiência de Pareto são idênticas às do capítulo 3. Do mesmo modo são válidos os teoremas 3.3.1 e 3.3.2.

No modelo multiperiódico com tempo contínuo temos um conceito parecido com o de índice de divisão ν no modelo multiperiódico com tempo discreto. Este conceito é a multiplicidade do espaço $\mathcal{M}_Q^2$. Do mesmo modo que com o índice de divisão, pode-se provar que um modelo é completo se existirem certos títulos disponíveis para negociação. Seja a definição e o teorema::

<u>Definição 4.4.13</u>: Dados $x \in \mathcal{M}_P^2$ e $y \in \mathcal{M}_P^2$, temos que x e y são ortogonais se $x.y \in \mathcal{M}_P^2$.

<u>Teorema 4.4.12</u>: Dado $\mathcal{M}_Q^2$, existe uma base ortogonal de martingais em $\mathcal{M}_Q^2$, $m = (m_1, m_2, \ldots, m_N)$ com $N \leq \infty$, definida como o menor conjunto de elementos mutuamente ortogonais de $\mathcal{M}_Q^2$ tais que para qualquer $x \in \mathcal{M}_Q^2$ existem $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$, $\theta_n \in L_Q^2[m_n]$ tais que:

$$x(t) = \int_0^t \theta(s)'dm(s)$$

N é chamada de multiplicidade de $\mathcal{M}_Q^2$, denotada $M(\mathcal{M}_Q^2)$.

Como prometido, temos:

<u>Teorema 4.4.13</u>: Suponha que os preços $p^* \in \mathcal{M}_Q^2$, onde Q é a medida de martingal equivalente. Então o número mínimo de títulos que completam o mercado é $M(\mathcal{M}_Q^2) + 1$.

BIBLIOGRAFIA:

Dothan, Michael U. - Prices in Financial Markets - New York - Oxford University Press - 1990.

Duffie, Darrell - Securities Markets, Stochastic Models - San Diego - Academic Press Inc. - 1988.

Duffie, Darrell and Huang, Chi-Fu - Implementing Arrow-Debreu Equilibria by Continuous Trading of Few Long-Lived Securities - Econometrica vol. 53, no 6 - 1985 - pag. 1337-1356.

Gomes Junior, Armando R. - Modelos Estocáticos em Finanças - Rio de Janeiro - IMPA - 1990 - Informes de Matemática série D-039.

Harrison, J. Michael and Kreps, David M. - Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets - Journal of Economic Theory no 20 - 1979 - pág. 381-408.

Huang, Chi-Fu and Litzenberger, Robert H. - Foundations for Financial Economics - New York - North Holland - 1988.

Isnard, C. - Teoria da Integração - Rio de Janeiro - Projeto Euclides - 1991.

Lima, Elon Lages - Curso de Análise, Volume II - Rio de Janeiro - Projeto Euclides - 1985.

Scheinkman, José A. - Market Incompleteness and the Equilibrium Valuation of Assets. - Em S. Bhattacharya and G. Constantinides, Theory of Valuation, Frontiers of Financial Theory, Volume 1 - Totowa, New Jersey - Rowman and Littlefield - pag. 45-51 - 1989.

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
BIBLIOTECA