

**Fundação Getúlio Vargas  
Escola de Matemática Aplicada**

**Kizzy Fernanda Terra Ferreira dos Reis**

**Reconstrução de Curvas Isócronas e sua  
Aplicação na Identificação de Preferências de  
Usuários de Modais do Transporte Urbano**

Rio de Janeiro  
2017



**Kizzy Fernanda Terra Ferreira dos Reis**

**Reconstrução de Curvas Isócronas e sua  
Aplicação na Identificação de Preferências de  
Usuários de Modais do Transporte Urbano**

Dissertação submetida à Escola de Matemática Aplicada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática da Informação.

Área de Concentração: Modelagem e Análise de Informação

Orientador: Renato Rocha Souza

Rio de Janeiro  
2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mario Henrique Simonsen/FGV

Reis, Kizzy Fernanda Terra Ferreira dos  
Reconstrução de curvas isócronas e sua aplicação na identificação de preferências de usuários de modais do transporte urbano / Kizzy Fernanda Terra Ferreira dos Reis. – 2017.  
64 f.

Dissertação (mestrado) – Fundação Getulio Vargas, Escola de Matemática Aplicada.

Orientador: Renato Rocha Souza.

Inclui bibliografia.

1. Mineração de dados (Computação). 2. Modelagem de dados. 3. Curvas modulares. 4. Transporte urbano – Planejamento. 4. Escolha do transporte. I. Souza, Renato Rocha. II. Fundação Getulio Vargas. Escola de Matemática Aplicada. III. Título.

CDD – 006.312



**KIZZY FERNANDA TERRA FERREIRA DOS REIS**

**RECONSTRUÇÃO DE CURVAS ISÓCRONAS E SUA APLICAÇÃO NA IDENTIFICAÇÃO DE  
PREFERÊNCIAS DE USUÁRIOS DE MODAIS DO TRANSPORTE URBANO.**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Modelagem Matemática da  
Informação da Escola de Matemática Aplicada da Fundação Getúlio Vargas para  
obtenção do grau de Mestra em Modelagem Matemática da Informação.

Data da defesa: 10/07/2017

**ASSINATURA DOS MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA**

A handwritten signature in blue ink, appearing to be 'Renato Rocha Souza', is written above a horizontal line.

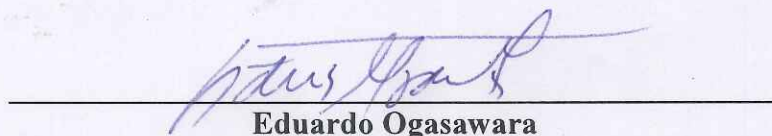
**Renato Rocha Souza**  
Orientador (a)

A handwritten signature in blue ink, appearing to be 'Eduardo Fonseca Mendes', is written above a horizontal line.

**Eduardo Fonseca Mendes**

A handwritten signature in blue ink, appearing to be 'Flávio Codeço Coelho', is written above a horizontal line.

**Flávio Codeço Coelho**

A handwritten signature in blue ink, appearing to be 'Eduardo Ogasawara', is written above a horizontal line.

**Eduardo Ogasawara**



*Este trabalho é dedicado a todos aqueles que estiveram incansavelmente ao meu lado e que seguiram acreditando mesmo nos dias em que nem eu acreditava. Em especial, aos meus pais e amigos.*



## AGRADECIMENTOS

À minha família, base de tudo, capaz de me impulsionar na direção dos meus objetivos mesmo a quilômetros de distância. Vocês são a minha raiz. De onde vim e para onde sempre desejarei voltar.

Aos meus amigos e companheiros de caminhada que estiveram comigo ao longo desta jornada.

Ao meu parceiro para todas as horas que me fortaleceu na transposição de cada obstáculo que se interpôs no meu caminho e me ajudou a alcançar este grande objetivo.

Ao meu orientador, Renato Rocha Souza, com o qual tive a oportunidade de conviver nestes dois anos. Um exemplo de profissional e pessoa de quem sempre me lembrarei com carinho.

Aos demais professores da EMAP, agradeço por terem oferecido seus conhecimentos para que eu pudesse adquirir as ferramentas necessárias para a conclusão de mais esta etapa da minha vida.

Aos funcionários, agradeço a disposição e a solicitude.

Finalmente, a Deus, agradeço por mais esta benção.



*"In theory, theory and practice are the same. In practice, they are not."*  
*Albert Einstein*





## RESUMO

Este trabalho constitui um estudo sobre o problema da reconstrução de mapas isócronos bem como sua aplicação na identificação das preferências dos usuários de modais de transportes. Propõe-se uma modelagem computacional das curvas isócronas baseada na teoria das funções implícitas a fim de permitir que se possa desenhar a curva sobre um mapa e computar propriedades geométricas de interesse. Ademais, discute-se nesse contexto a teoria do consumidor aplicada ao transporte urbano, sugerindo a adaptação da função de utilidade de McFadden e Domenich (DOMENCICH; MCFADDEN, 1975), que modela a escolha de modais, através da incorporação de propriedades de curvas isócronas. Implementa-se uma demonstração de conceito constituída em um aplicativo de utilidade pública para dispositivos móveis que dá suporte às tomadas de decisões dos usuários através da comparação de modais com o intuito de aumentar sua qualidade de vida e facilitar seu cotidiano.



## **ABSTRACT**

This study comprises the problem of isochrone maps reconstruction as well as their application in the identification of user mode choice preferences. We propose a computational modeling of isochrones based on the theory of implicit functions in order to draw the curve on a map and evaluate geometrical properties of interest. Besides, we discuss the theory of consumer choice applied to urban transportation, suggesting modifications in the utility function of McFadden e Domenich (DOMENCICH; MCFADDEN, 1975) which models urban travel demand to embody isochrone curves properties. At long last, we implement a concept demonstration that constitutes a public utility application for mobile devices that supports the decision making of users through the transport mode suggestion in order to increase their quality of life and facilitate their daily life.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
1.1	Definição do Problema . . . . .	12
1.2	Importância do Problema . . . . .	12
1.3	Motivação . . . . .	13
1.4	Contribuições . . . . .	14
1.5	Estrutura do Trabalho . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Referencial Teórico</b>	<b>16</b>
2.1	Mapas Isócronos . . . . .	16
2.2	Reconstrução de Curvas de Nível . . . . .	22
2.3	Fórmula de Haversine . . . . .	23
2.4	Escolha de Modais . . . . .	25
2.5	Teoria do Consumidor . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>31</b>
3.1	Aquisição dos Dados . . . . .	31
3.2	Persistência e Armazenamento dos Dados . . . . .	32
3.3	Reconstrução de Isócronas . . . . .	33
3.3.1	Cálculo da Malha . . . . .	35
3.3.2	Amostragem da Função para os Pontos da Malha . . . .	37
3.3.3	Identificação de Pontos da Curva e Representação Final	38
3.4	Adaptação da Função de Utilidade de McFadden e Domenich .	39
3.5	Demonstração de Conceito . . . . .	41
3.5.1	Detalhamento do Protótipo . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Discussão e Resultados</b>	<b>45</b>
4.1	Protótipo . . . . .	45
4.2	Reconstrução de Isócronas . . . . .	48
4.3	Função de Comparação de Isócronas . . . . .	53



<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>57</b>
5.1	Considerações Finais . . . . .	57
5.2	Trabalhos Futuros . . . . .	57





## Lista de Figuras

1	Isochronic Passage Chart de Galton (GALTON, 1881) . . . . .	17
2	Atlas da Geografia Histórica dos Estados Unidos (LAB, 2014) . . . . .	18
3	Isócrona de Manchester para Viagens Curtas em 1914 . . . . .	19
4	Isócrona de Melbourne para tempos de viagem ferroviária em 1910-1922 . . . . .	20
5	Iso4App Website . . . . .	21
6	Configurações possíveis para malha de retângulos . . . . .	23
7	Passo a Passo - Reconstrução de Isócrona com <i>Marching Squares</i> . . . . .	34
8	Processo de Reconstrução de Isócrona com <i>Marching Squares</i> . . . . .	34
9	(a) grade cartesiana uniforme. (b) grade estruturada. (c) grade não-estruturada. . . . .	35
10	(a) Exemplo de grade otimizada (b) Exemplo de grade com- pleta sem limites determinados . . . . .	37
11	(a) Classificação dos Vértices (b) Pontos de cruzamento nas arestas . . . . .	38
12	Ponto de Corte na Aresta . . . . .	38
13	Ponto de Corte na Aresta . . . . .	39
14	Diagrama de Estados Principais da Aplicação . . . . .	44
15	Abas . . . . .	46
16	Isócrona a pé de 5 min reconstruída . . . . .	47
17	Auto completar para lugares e endereços . . . . .	48
18	Curvas Isócronas Reconstruídas . . . . .	49
19	Curvas Isócronas Reconstruídas . . . . .	50
20	Isócrona de 5 min, A pé, R.Barão de Mesquita, 459 - Tijuca, RJ . . . . .	51
21	Isócrona de 5 min, Carro, R.Barão de Mesquita, 459 - Tijuca, RJ . . . . .	52
22	Descontinuidades . . . . .	53
23	Rota de carro entre a Fundação Getulio Vargas e o Instituto Militar de Engenharia . . . . .	55



## **Lista de Tabelas**

1	Função objetivo para comparação de isócronas . . . . .	55
---	--	----



# 1 Introdução

## 1.1 Definição do Problema

Este trabalho aborda o problema de reconstrução de isócronas e sua potencial aplicação na identificação das preferências dos usuários de transportes. Objetiva-se discutir um método de representação de curvas isócronas, utilizando um algoritmo de reconstrução de curvas definidas por uma função implícita; bem como adaptar a função de utilidade de McFadden e Domencich (DOMENCICH; MCFADDEN, 1975) que modela a escolha de modais do transporte urbano de modo que ela contemple propriedades de curvas isócronas, a fim de testar um modelo de sugestão de modais.

## 1.2 Importância do Problema

O planejamento dos sistemas de transporte como um caminho para o desenvolvimento da mobilidade urbana sustentável é um tema discutido em todo o mundo. Muitas regiões metropolitanas enfrentam problemas similares provocados pela aglomeração não planejada de pessoas nos grandes centros urbanos. Segundo estimativas da ONU em 2030 aproximadamente 60% da população mundial estará vivendo em áreas urbanas (AUDENHOVE et al., 2014).

No Brasil, o crescimento da população economicamente ativa incentivou uma migração para os grandes centros urbanos, promovida pela ampliação do número de polos de emprego, serviços, cultura e lazer. Tudo isso ocorreu de forma desordenada quanto ao uso e ocupação do solo, o que gerou uma demanda por deslocamentos sem a elaboração de estudos de planejamento de transportes. Esses fatos levaram o Brasil a uma crise em sua mobilidade urbana, visto que a maior parte dos grandes centros urbanos do país encontram dificuldades em desenvolver meios para reduzir os congestionamentos e amenizar seus impactos (VIANA et al., 2016).

O aumento dos congestionamentos nas cidades resulta em frustração de

motoristas, tempos muito maiores de viagem, diminuição da produtividade da população, aumento no número de acidentes e nas taxas de seguros para automóveis, maior consumo de combustível, maiores taxas de fretes e entregas e deterioração da qualidade do ar.

Em face destes problemas, é natural que a população exija maiores investimentos em políticas públicas que facilitem os deslocamentos dos cidadãos e estimulem a utilização de modais alternativos. Atualmente, entre as principais demandas da população estão a regularização dos serviços de transporte por aplicativo e a extensão de ciclovias que possibilitem a condução de bicicletas de maneira mais segura. No entanto, frente a incapacidade de respostas ágeis do Estado Brasileiro e uma aparente sensação de que os problemas não serão resolvidos no curto e médio prazos, os cidadãos acabam por buscar e criar voluntariamente outros caminhos para mitigar as adversidades que enfrentam diariamente.

Um instrumento que tem se destacado como forma de contornar essas adversidades é a produção de soluções tecnológicas, especialmente aplicativos para dispositivos móveis. Em 2016, a *Google* classificou o Brasil como "um fenômeno no mercado de aplicativos" destacando a grande capacidade dos desenvolvedores do país em produzir, monetizar e gerar novos produtos. A demonstração de conceito implementada neste trabalho enseja esforços nesta mesma direção na medida em que é uma produção tecnológica com o intuito de mitigar problemas do cotidiano.

### 1.3 Motivação

A habilidade de locomover-se é uma das bases da nossa civilização. O desenvolvimento dos mecanismos de deslocamento acompanhou a evolução da espécie humana, possibilitando um acesso cada vez mais democrático aos diversos meios de locomoção, aumentando a importância dos estudos a respeito de mobilidade urbana.

Por essa razão, em todo o mundo grandes volumes de recursos financeiros são investidos na manutenção e na melhoria da infraestrutura dos sistemas

de transportes locais, bem como em tecnologias facilitadoras que propiciem aos cidadãos transitar entre variadas localidades, proporcionando, assim, um melhor aproveitamento das riquezas oferecidas em toda a extensão de suas cidades. Portanto, pesquisas nesta área são essenciais para o desenvolvimento sustentável das cidades e abrangem uma série de fatores complexos que devem ser levados em consideração e podem ser observados com diferentes vieses.

Do ponto de vista econômico, por exemplo, os administradores das cidades procuram por soluções que proporcionem a redução dos custos dos serviços e aumentem sua eficiência. Já do ponto de vista social, o objetivo é que os sistemas de transportes possam ser utilizados pela totalidade dos cidadãos. Finalmente, do ponto de vista ambiental incentivam-se os habitantes a optar pelo transporte público ao invés do privado, com o intuito de economizar mais energia e reduzir a emissão de gases na atmosfera (MARCHI, 2015).

## 1.4 Contribuições

Este trabalho propõe uma discussão a respeito da reconstrução de curvas isócronas a partir de sua modelagem como curvas definidas implicitamente. Além disso, sugere-se uma adaptação da função de utilidade de McFadden e Domenich (DOMENCICH; MCFADDEN, 1975) que modela a escolha de modais do transporte urbano através da incorporação de propriedades de curvas Isócrona. Como demonstração de conceito, implementou-se um aplicativo de utilidade pública para dispositivos móveis com sistema operacional Android utilizando esse modelo adaptado para dar suporte às tomadas de decisões dos usuários através da sugestão de modais com o intuito de aumentar sua qualidade de vida e facilitar seu cotidiano.

Ademais, a prova de conceito implementada, se melhor aprofundada e estendida, pode ser uma ferramenta facilitadora no cotidiano dos cidadãos. Eventualmente, pode ser também utilizada para aprimorar a qualidade das decisões dos agentes planejadores do transporte através da análise de estatísticas geradas a partir do uso em larga escala da ferramenta. Finalmente,

cabe ressaltar que desenvolveu-se o protótipo na forma de código aberto com o propósito de permitir o uso e a modificação por qualquer desenvolvedor conforme a sua vontade. Esta decisão pretende estimular o aprimoramento do aplicativo em prol do interesse público, ou ainda, o desenvolvimento de novas ferramentas que contribuam para a solução de problemas do transporte urbano.

## **1.5 Estrutura do Trabalho**

A presente dissertação está dividida em cinco capítulos. No primeiro, são introduzidos e contextualizados os objetivos do trabalho. No segundo, expõe-se o referencial teórico sobre o qual baseiam-se os próximos capítulos tratando dos seguintes temas: mapas isócronos, reconstrução de curvas de nível, fórmula de *Haversine* e a teoria do consumidor aplicada ao transporte urbano. Já no terceiro detalha-se a metodologia utilizada, desde a implementação do método de reconstrução de Isócronas até o desenvolvimento do protótipo. No quarto discute-se os resultados do trabalho e, por fim, no capítulo seguinte apresenta-se a conclusão.



## 2 Referencial Teórico

Neste trabalho, a mobilidade será vista de diferentes pontos abarcando desde representações visuais de dados de transporte até modelos de escolhas de modais a fim de construir uma ferramenta útil aos usuários de diferentes modos de transportes de diferentes regiões das cidades.

Sendo assim, nas seções a seguir discorrer-se-á sobre produções acadêmicas relacionadas aos dois temas centrais desta produção: escolha de modais e curvas isócronas, bem como sobre os principais conceitos matemáticos estudados.

### 2.1 Mapas Isócronos

Mapas isócronos (grego: iso = igual, chronos = tempo) – também chamados de Isócronas, apenas - são representações visuais utilizadas nas áreas de planejamento urbano e planejamento de transportes.(GORTANA et al., 2014) Originalmente se referem às curvas que unem, sobre um mapa, os pontos onde as diferenças de tempo de chegada das ondas sísmicas originadas no mesmo ponto são iguais mas diferentemente refletidas ou refratadas. No escopo de mobilidade urbana, designam as curvas que unem os pontos onde se pode chegar a partir de um determinado local no mesmo intervalo de tempo. Em mapas isócronos, usualmente, são utilizadas linhas de contorno e cores para apresentar os pontos cujo tempo de percurso a partir do ponto inicial é o mesmo (ZENG et al., 2014).

As Isócronas podem ser utilizadas na visualização de dados a respeito de um modo de transporte ou vários deles. Neste trabalho, por exemplo, estas representações são utilizadas para ampliar a compreensão a respeito da escolha entre alternativas de modais disponíveis na cidade do Rio de Janeiro.

Este tipo de curva tem sido utilizada na ciência e em planejamento de transportes para entender a relação entre movimento e tempo por mais de 130 anos (DOVEY et al., 2015). Nos últimos anos, têm-se investido na produção de mapas isócronos interativos que permitem aos usuários selecionar áreas de

interesse ou explorar padrões de mobilidade temporal para diferentes modos de transporte (GORTANA et al., 2014).

Um dos primeiros exemplos de mapa isócrono criado foi o mapa de Galton (figura 1), intitulado *Isochronic Passage Chart* o qual mostrava tempos de viagens a partir de Londres para várias partes do mundo em 1881, considerando o uso de transportes marítimos e terrestres e assumindo condições climáticas favoráveis bem como livre trânsito entre os países (GALTON, 1881).

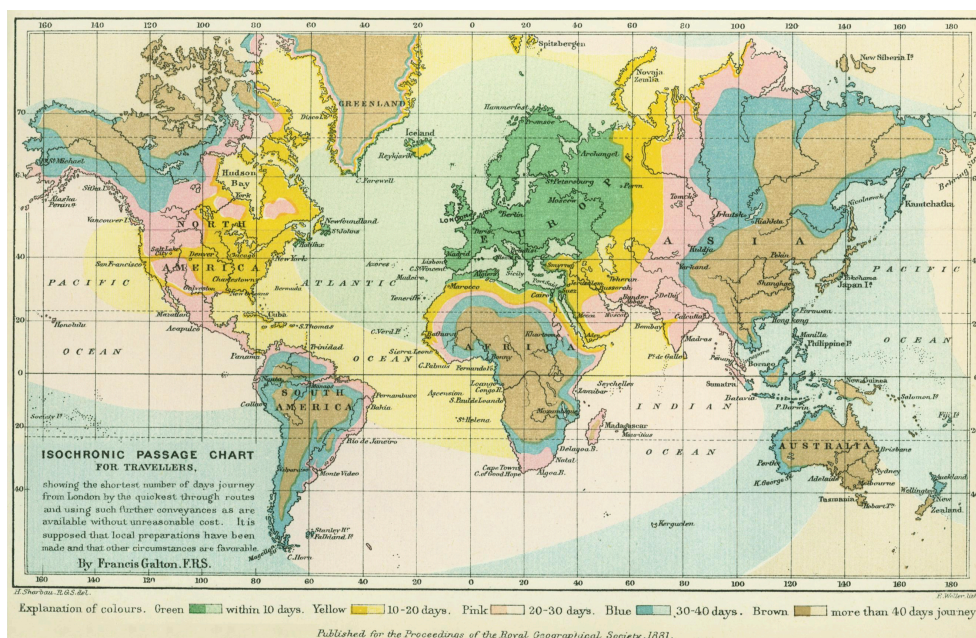


Figura 1: Isochronic Passage Chart de Galton (GALTON, 1881)

O Atlas da Geografia Histórica dos Estados Unidos (figura 2) continha uma série de mapas mostrando isócronas de viagem em expansão entre 1800 e 1930. Os autores mostraram como os tempos de viagens a partir de Nova York se modificaram entre 1800 e 1930 com a construção de novas estradas, extensas redes ferroviárias e com o surgimento da aviação comercial (PAUL-LIN; WRIGHT, 1932).

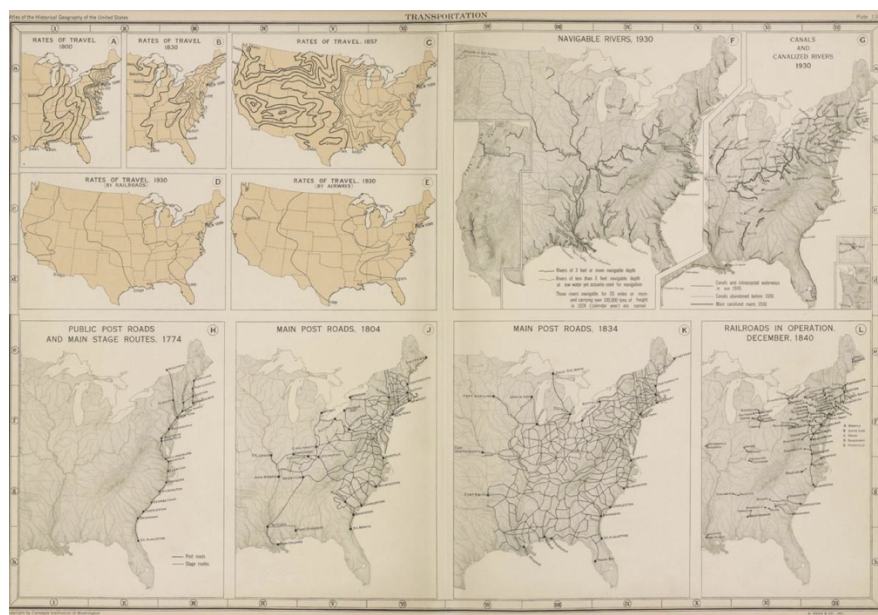


Figura 2: Atlas da Geografia Histórica dos Estados Unidos (LAB, 2014)

Em 1912, Penck produziu mapas isócronos na Alemanha focados em tempos de viagem ferroviárias regionais medidos em horas, ao invés de dias, construindo, portanto, mapas para regiões menores, mais locais. Isócronas de redes de transporte público metropolitano surgiram no mesmo período em Manchester (figura 3) – perto do ano 1914 - e podem ter sido os precursores para o conhecido mapa de Melbourne (figura 4) (DOVEY et al., 2015).

Embora muitos trabalhos tenham se concentrado na acessibilidade dos transportes públicos, também foram utilizadas isócronas para analisar viagens com carros particulares e trajetos realizados a pé. Em 1961, Jacobs foi um dos pioneiros na construção de isócronas para tempos de trajetos percorridos a pé, introduzindo o conceito de *pools of use* ou “pools de uso” que correspondia a zona de curta distância de uma localidade urbana medida em tempo ou distância (DOVEY et al., 2015). Já em 1972, Armstrong investigou quatro locais potenciais para um novo aeroporto em South Hampshire analisando a acessibilidade para carros nestas localidades (ARMSTRONG,



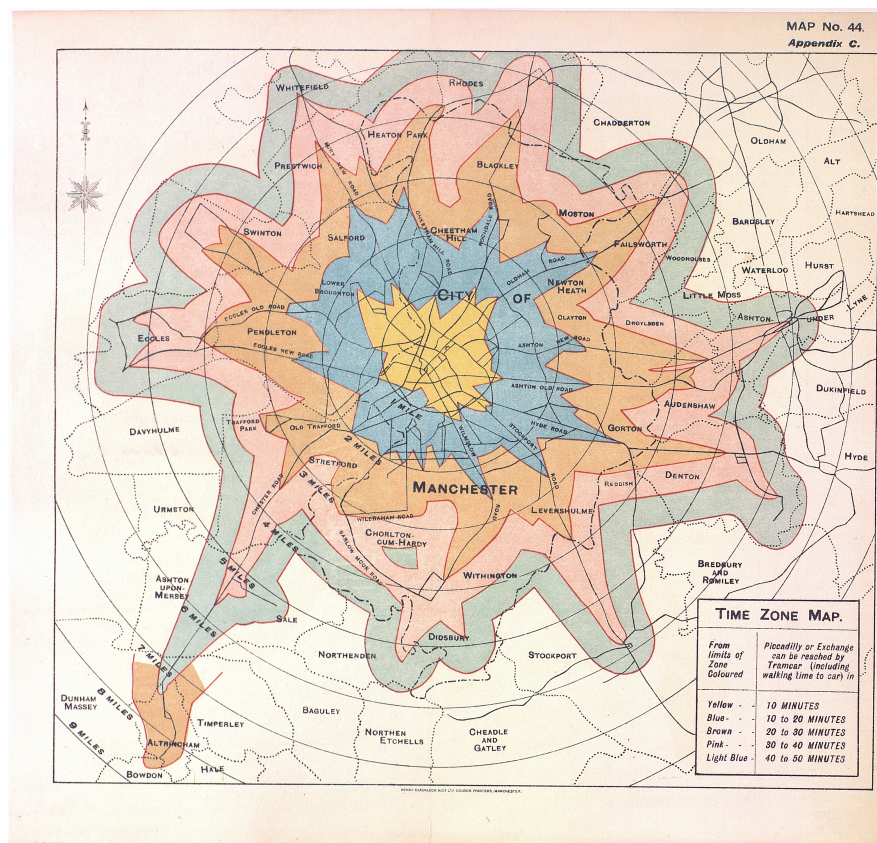


Figura 3: Isócrona de Manchester para Viagens Curtas em 1914

1972).

Nos últimos anos, mapas interativos têm sido criados para explorar transportes urbanos. Em diversos países do mundo, websites foram implementados usando tecnologias de mapeamento e dados abertos para permitir aos usuários que analisem suas regiões, entre os quais destacam-se PedCatch (WHITE; KIMM, 2016), instaGIS (INC, 2013-2017), plataforma TravelTime (LTD, 2017), Mapumental (MYSOCIETY, 2017), Mapnificent (Mapnificent, 2017) e Iso4App(figura 5) (SRL, 2017). Estes sites permitem que os usuários selecionem um ponto no mapa, um período de tempo e outros parâmetros

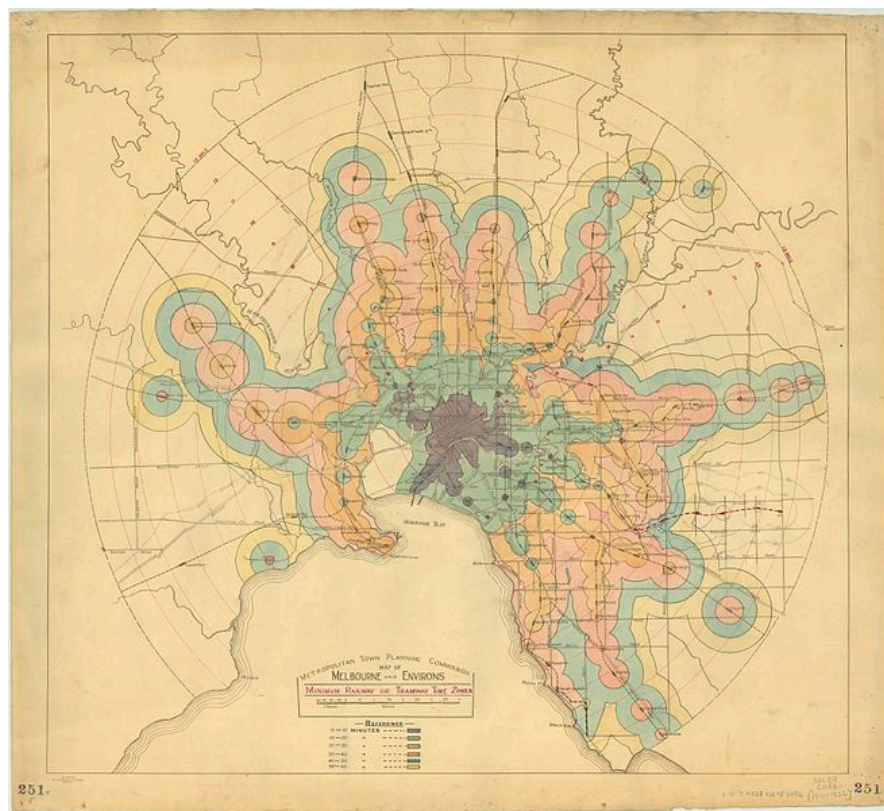


Figura 4: Isócrona de Melbourne para tempos de viagem ferroviária em 1910-1922

variáveis a fim de determinar uma isócrona. No entanto, nem todos esses sites oferecem os serviços gratuitamente e alguns só permitem que os usuários escolham pontos que estejam em cidades de determinados países.

Ainda tratando de produções mais recentes, dois trabalhos se destacam o Isoscope (GORTANA et al., 2014) e o *Space/Time Mapping of Urban Transit: Isochrones, Car-dependency and Mode-choice in Melbourne* (DOVEY et al., 2015). Isoscope é um aplicativo baseado na web escrito em JavaScript cujas isócronas são renderizadas em SVG usando a estrutura de visualização de dados d3. Seu principal diferencial encontra-se em permitir que os usuários

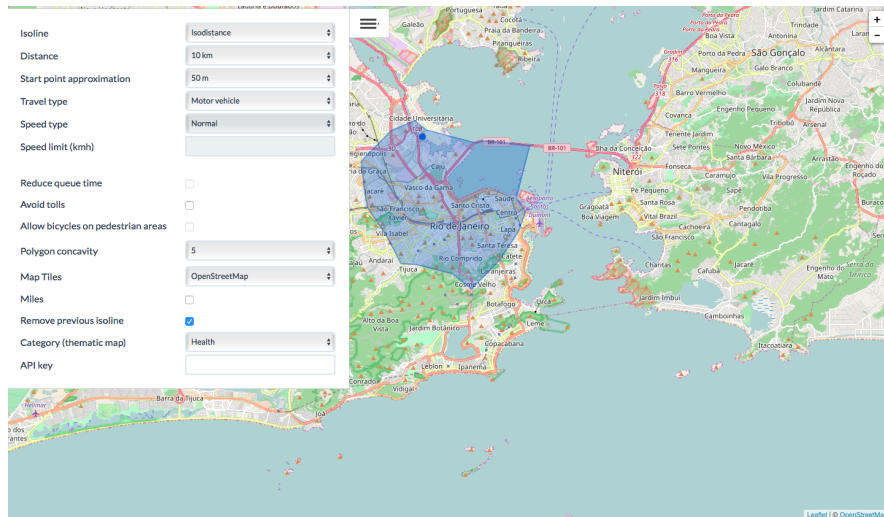


Figura 5: Iso4App Website

possam explorar os mapas isócronos para diferentes horários do dia e dias da semana e consequentemente, permite a identificação de variações nas áreas acessíveis devido a mudanças nas condições de tráfego.

O *Space/Time Mapping of Urban Transit* de Dovey analisa isócronas justapostas para diferentes modos de transporte para mostrar territórios e tempos acessíveis e explorar a base sobre a qual os cidadãos fazem escolhas entre os modos. Seu objetivo final é entender quais formas de transformação urbana são necessárias para desenvolver uma cidade melhor orientada para o trânsito. Dovey sugere que uma maneira de compreender a dependência por carro é observar a diferença entre as isócronas para o transporte com o carro e para o transporte público em um dado momento em uma dada localidade da cidade.

Muitos sistemas têm sido desenvolvidos e utilizados para visualizar dados de mobilidade com intuito de revelar padrões de variação temporais. Entretanto, em sua maioria estas ferramentas são visualmente complexas para planejadores urbanos e de transportes, ou ainda que sejam mais simples, representam apenas um modal. A aplicação implementada neste trabalho

como prova de conceito explora comparações entre isócronas de diferentes modais, ranqueando-as de acordo com a teoria de preferências do usuário.

## 2.2 Reconstrução de Curvas de Nível

Após conhecer o conceito de curvas isócronas, precisamos de um modelo que nos permita representar esta curva computacionalmente, de modo que possamos utilizá-lo para desenhar a curva sobre um mapa e computar propriedades geométricas que possam ser de nosso interesse, tais como área ou perímetro. Sendo a isócrona, por definição, uma isocurva, isto é, uma curva cujos pontos possuem o mesmo valor segundo uma determinada função, é razoável adotar uma formulação baseada na teoria das funções implícitas.

Os conjuntos de nível de um campo escalar  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  dada uma constante  $\sigma \in \mathbb{R}$  são definidos por  $\{x : \phi(x) = \sigma\}$  (GOMES; VOICULESCU, 2009). Sendo  $\sigma$  um valor da função  $\phi$ , temos que o conjunto de nível  $\sigma$  de  $\phi$  é dado por  $\phi^{-1}(\sigma)$ ; quando  $d = 2$  e  $\sigma$  é um valor regular de  $\phi$ , podemos chamar este conjunto  $\phi^{-1}(\sigma)$  de curva de nível. Se a função  $\phi$  for contínua, e  $\sigma$  for um valor regular, temos que  $\phi^{-1}(\sigma)$  divide o espaço  $\mathbb{R}^2$  em três classes de pontos: aqueles que têm valor  $\sigma$  e, conseqüentemente, estão sobre a curva; aqueles que têm valor superior a  $\sigma$  e estão do lado exterior da curva e aqueles que têm valor inferior a  $\sigma$  e estão do lado interior da curva.

Para computar pontos da curva e desenhá-la sobre o mapa, utilizaremos um método da literatura de reconstrução de funções implícitas. Vários destes métodos baseiam-se nessa classificação dos pontos do espaço para formular uma abordagem de subdivisão sistemática desse espaço em células, compondo uma grade ou malha. Com esta estrutura, é possível amostrar os valores da função implícita nos vértices de cada célula e procurar por aquelas arestas em que um dos vértices possui valor superior ao nível da curva que desejamos reconstruir enquanto o outro vértice possui valor inferior.

O algoritmo *Marching Cubes* (LORENSEN; CLINE, 1987) é uma solução clássica para o problema de reconstrução de superfícies implícitas, que possui diversas variações amplamente utilizadas na área e opera segundo essa

estrutura de grade de amostragem no espaço. Nossa proposta é implementar o algoritmo conhecido como *Marching Squares*, uma adaptação do *Marching Cubes* para o caso bidimensional, em que a estrutura topológica da aproximação de uma curva implícita é determinada explorando o limite das possíveis formas de classificação dos vértices de uma célula. Em uma malha cujas células sejam retângulos, a priori teríamos 16 configurações possíveis para a topologia local da curva em cada célula, pois um retângulo tem 4 vértices. Todavia, levando-se em consideração as simetrias e rotações das células, é possível reduzir essa quantidade para apenas 4 (figura 6).

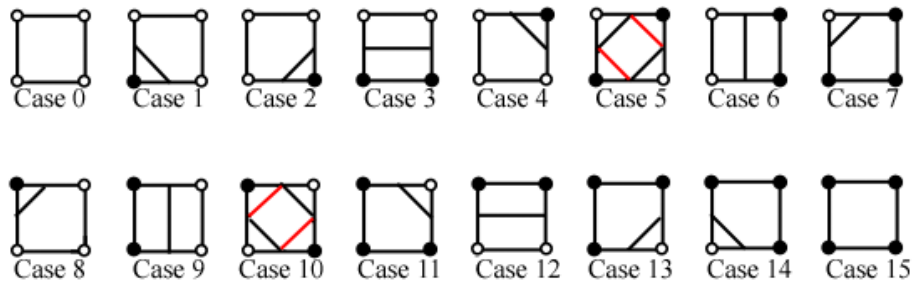


Figura 6: Configurações possíveis para malha de retângulos

Esta estratégia é uma forma bastante intuitiva de se obter uma estimativa grosseira da localização da curva implícita. A partir daí determina-se a estrutura topológica e geométrica da curva reconstruindo-a por partes, analisando os dados extrínsecos obtidos para cada célula e considerando-se algumas hipóteses sobre o comportamento local da curva.

### 2.3 Fórmula de Haversine

O problema de reconstrução de Isócronas exige o cálculo e a estimativa de distâncias entre coordenadas geográficas. Essas distâncias são calculadas



através da fórmula de Haversine a qual expressa a distância entre pontos de uma esfera que é uma aproximação para o formato geométrico da Terra. (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964)

A fórmula de Haversine é uma equação importante em navegação, pois através dela obtém-se o grande círculo<sup>1</sup> entre dois pontos de uma esfera a partir de suas longitudes e latitudes. Esta fórmula é um caso especial de uma fórmula mais geral da trigonometria esférica, a lei de Haversine, que relaciona os lados e ângulos de um triângulo esférico. O nome Haversine faz referência ao fato de que usualmente estas fórmulas são escritas em termos da função Haversine dada por:

$$\text{haversin}(\theta) = \text{hav}(\theta) = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\theta)}{2}$$

onde:

- $\theta$  é um ângulo em radianos

**Fórmula de Haversine.** Dados dois pontos em uma esfera, o valor da função haversine para o ângulo central definido por estes pontos é dada por:

$$\text{haversin}\left(\frac{d}{r}\right) = \text{hav}(\phi_1 - \phi_2) + \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \text{hav}(\lambda_1 - \lambda_2)$$

onde:

- $d$  é distância entre os dois pontos (ao longo do grande círculo da esfera)
- $r$  é o raio da esfera.
- $\phi_i$  : latitude do ponto i, em radianos
- $\lambda_i$  : longitude i, em radianos

Solucionado esta equação para  $d$ , onde  $h$  é  $\text{hav}\left(\frac{d}{r}\right)$ , obtém-se:

$$d = r \text{hav}^{-1}(h) = 2r \arcsin(\sqrt{h})$$

---

<sup>1</sup>O grande círculo é o círculo traçado sobre a superfície de uma esfera com o mesmo perímetro de sua circunferência, dividindo-a em dois hemisférios iguais.

$$\begin{aligned}
d &= 2r \arcsin(\sqrt{\text{hav}(\phi_1 - \phi_2) + \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \text{hav}(\lambda_1 - \lambda_2)}) \\
&= 2r \arcsin(\sqrt{\sin^2(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}) + \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \sin^2(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2})})
\end{aligned}$$

## 2.4 Escolha de Modais

O conceito essencial que deve ser entendido quando tratamos de modelos de escolha de modais é a relação entre a escolha dos viajantes e seus fatores influenciadores, tais como o nível socioeconômico e o nível de serviço dos modais disponíveis (DING; ZHANG, 2016).

Os fatores que influenciam o comportamento na escolha de modais, de maneira geral, podem ser divididos em duas categorias: os fatores macroscópicos e os fatores microscópicos. Os macroscópicos são normalmente determinados por características da sociedade, tais como nível econômico e uso da terra urbana. À medida que os microscópicos são relacionados às características individuais do viajante e aos atributos da viagem, dentre os quais a idade, a renda, o tempo de percurso e o custo da viagem (DING; ZHANG, 2016).

Para compreender a conexão entre as escolhas de modais e seus aspectos diversos estudos têm sido realizados desde meados da década de 70, tanto de maneira qualitativa – através da realização de questionários – quanto de maneira quantitativa utilizando a teoria da maximização da utilidade, a teoria do comportamento de escolha e os modelos discretos de escolhas.

Kattiyapornpong and Miller (KATTIYAPORNPONG; MILLER, 2009) estudaram os efeitos de restrições sócio demográficas nas escolhas de viagens, entrevistando 49105 australianos e concluíram que idade, renda e fase da vida tem significativos e diferentes efeitos nas escolhas dos modos de viagem.

Beirão e Cabral (BEIRÃO; CABRAL, 2007) desenvolveram um estudo qualitativo acerca de usuários de transportes públicos e de automóveis, afim de obter uma compreensão mais profunda das atitudes dos viajantes em relação aos transportes e explorar as percepções sobre a qualidade do serviço de transporte público.

Suas principais conclusões indicam que, afim de aumentar a utilização

dos transportes públicos, o serviço deve ser concebido de forma a acomodar os níveis de serviço exigidos pelos clientes e, ao fazê-lo, atrair potenciais utilizadores.

Além disso, a escolha do transporte é influenciada por vários fatores, tais como as características individuais e estilo de vida, o tipo de viagem, o desempenho do serviço percebido de cada modo de transporte e variáveis situacionais. Isso sugere a necessidade de segmentação levando em conta as atitudes e comportamentos de viagem. As políticas que visam influenciar o uso do carro devem ser direcionadas aos segmentos de mercado que estão mais motivados para mudar e dispostos a reduzir a frequência de uso do carro.

Ding e Zhang (DING; ZHANG, 2016) estimaram comportamentos de viagem dividindo dados de 524 viajantes chineses em três clusters com base em suas características pessoais, para só utilizar um modelo de escolha discreta para estimar as escolhas de modais. Com esta abordagem - de agrupamento individual -, foi obtida uma taxa de acurácia da estimativa de escolha do modo de transporte notavelmente maior do que sem agrupamento, indicando que o agrupamento individual melhorou a estimativa de comportamento de viagem.

Li e Wang (LI et al., 2014) examinaram o comportamento de escolha de modal para viagens interurbanas profissionais e de lazer, utilizando uma regressão para analisar dados de preferências fornecidos pelos viajantes ao longo do corredor multimodal Yong-Tai-Wen em Zhejiang, China.

Domenich e McFadden (DOMENCICH; MCFADDEN, 1975) discutem escolhas de modais fundamentando-se pela teoria econômica clássica do consumidor, mais especificamente os conceitos de preferências do consumidor e de utilidade. Em seu livro *Urban Travel Demand* os autores modelam o fenômeno de escolha de modais adaptando os modelos econômicos clássicos de escolhas discretas levando em consideração as particularidades da tomada de decisão quando se tratam de escolhas de transportes as quais são influenciadas por uma série de fatores já mencionados: tipo de modal, frequência

de uso, tempo de viagem, destino e propósito da viagem.

Os modelos de Escolha Discreta descrevem as escolhas dos tomadores de decisão entre alternativas. Os tomadores de decisão podem ser pessoas, famílias, firmas, ou qualquer outra unidade, e as alternativas devem representar produtos que competem entre si, alternativas de ação, ou qualquer outra opção ou itens sobre os quais escolhas possam ser feitas, por sua vez McFadden e Domencich, afirmam que os modelos de escolha discreta estabelecem relação causal, comportamental, entre os atributos do sistema de transporte e as decisões do indivíduo (LOUREIRO; SOUZA, 2014).

## 2.5 Teoria do Consumidor

Sempre que se tenta explicar o comportamento dos seres humanos, necessita-se de uma estrutura na qual se possa basear esta análise. Em economia, utiliza-se com frequência uma estrutura baseada nos dois princípios que seguem: princípio da otimização (os consumidores são considerados racionais e, portanto, maximizadores da satisfação que o consumo dos bens e serviços pode proporcionar) e princípio de equilíbrio (os preços ajustam-se até que o total que as pessoas demandam seja igual ao ofertado) . (VARIAN, 2006)

A teoria econômica do consumidor norteia-se pelo princípio da otimização e permite realizar estudos detalhados de modelos de comportamento e tomadas de decisão dos consumidores. Neste contexto, os objetos de escolha do consumidor são denominados cestas de consumo as quais constituem uma relação completa dos bens ou serviços envolvidos no problema que se está investigando. Dessa forma, as melhores escolhas de um consumidor são representadas pela melhor cesta de consumo.

Para classificar diferentes cestas de consumo de acordo com o grau de desejabilidade do consumidor, de modo que o consumidor possa avaliar para duas quaisquer cestas de consumo se uma é bem melhor do que a outra ou se é indiferente a ambas, define-se uma relação de preferência denotada por  $\succsim$ .

Segundo Mas-Collel (MAS-COLELL; WHINSTON; GREEN, 1995), neste

tipo de abordagem baseado em preferências, os objetivos do consumidor são representados por uma relação de preferência denotada por  $\succeq$ . Tecnicamente,  $\succeq$  é uma relação binária sobre o conjunto de alternativas  $X$ , a qual permite a comparação entre pares de alternativas  $x, y$  em  $X$ . Lê-se  $x \succeq y$  como “ $x$  é tão bom quanto  $y$ ”. Desta definição decorrem outras duas:

(i) *Preferência estrita*, definida por

$$x \succ y \Leftrightarrow x \succeq y, \text{ e não é o caso que } y \succeq x$$

(ii) *Indiferença*  $\sim$ , definida por

$$x \sim y \Leftrightarrow x \succeq y \text{ e } y \succeq x$$

A consideração sobre a racionalidade dos consumidores pressupõe duas características das preferências definidas formalmente por Mas-Collel como segue:

**Definição.** Diz-se que um consumidor apresenta preferências racionais caso:

1. As preferências sejam completas, isto é, para quaisquer  $x, y \in X$ ,  $x \succeq y$  e/ou  $y \succeq x$
2. As preferências sejam transitivas, ou seja, para quaisquer  $x, y, z \in X$  se  $x \succeq y$  e  $y \succeq z$ , então  $x \succeq z$ .

As preferências do consumidor são a descrição fundamental para analisar as escolhas, mas é o conceito de função de utilidade que permite descrevê-las. A função de utilidade é um modo de atribuir um número a cada possível cesta de consumo. A grandeza da função de utilidade tem bastante importância na medida em que ela hierarquiza as diferentes cestas de consumo. A definição formal apresentada por Mas-Collel para uma função de utilidade é dada por:

**Definição.** Uma função  $U : X \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de função de utilidade caso, para quaisquer  $x, y$  do conjunto de alternativas  $X$ ,

$$x \succeq y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y)$$

As funções de utilidade podem ser entendidas como um meio de descrever comportamentos de escolha: se uma cesta de bens X for escolhida quando também estiver disponível uma cesta de bens Y, então X deve ter uma utilidade maior do que Y. A observação das escolhas que os consumidores fazem permite a estimação de uma função de utilidade capaz de descrever seu comportamento.

Segundo Varian, essa teoria tem ampla aplicação na área de economia do transporte para estudar comportamentos dos usuários dos meios de transporte urbano. Nas grandes cidades, os cidadãos podem escolher entre diversas alternativas de locomoção. Cada uma dessas alternativas pode ser associada a uma cesta com diferentes características: tempo de viagem, tempo de espera, custos em dinheiro, conforto, conveniência, e assim por diante.

McFadden e Domenich (DOMENCICH; MCFADDEN, 1975) propuseram, ainda em 1975, um estudo sobre a demanda de transporte urbano, analisando o comportamento de escolha de modais de indivíduos americanos no horário de pico, considerando viagens com dois tipos de propósitos diferentes: trabalho e lazer. As análises foram realizadas considerando apenas dois modais: carro e transporte público.

Foram observados diversos consumidores semelhantes e suas escolhas entre os dois modais, a fim de encontrar os valores dos coeficientes que melhor se ajustassem à função de utilidade estimada, através de modelos probabilísticos lineares associados a estimadores por regressão de mínimos quadrados e modelos *logit* com estimadores de maximização verossimilhança. A função de utilidade encontrada possui a forma:

$$U(TP, TT, C, A/C) = -4.76 + 0.147TP - 0.041TT - 2.24C$$

TP = tempo de percurso a pé

TT = tempo total de viagem em minutos

C = custo total da viagem

Esta função é fundamental para a aplicação desenvolvida a fim de empre-

gar as curvas Isócronas na sugestão de modais. A hipótese levantada baseia-se na possibilidade de utilizar a área da região delimitada pela curva isócrona reconstruída como uma variável da função de utilidade; considerando que esta região é composta pelo conjunto de pontos que se pode atingir em um determinado tempo a partir de um determinado ponto inicial.





## 3 Metodologia

A metodologia deste trabalho foi construída em torno de quatro etapas principais as quais são detalhadas a seguir: aquisição e armazenamento de dados, reconstrução de curvas isócronas, adaptação da função de utilidade para construir uma função objetivo de sugestão de modal e implementação de uma prova de conceito.

### 3.1 Aquisição dos Dados

A aquisição dos dados utilizados se dá através de requisições à *Google Maps Directions API* (GOOGLE, 2017b) em tempo de execução. Esta API é um serviço que calcula rotas entre locais, fornecendo especificidades do trajeto tais como: extensão da rota, tempo de percurso, modo de transporte, custo (quando houver), instruções de direção. A API suporta requisições de rotas para os diferentes modos de transporte disponíveis nas cidades.

A *Google Maps Directions API* possui dois modos de uso: padrão e pago. O modo padrão é gratuito e permite que sejam feitas até 2.500 consultas por dia, sendo no máximo 100 consultas por segundo; ao passo que o modo pago o qual pode ser adquirido através do canal de vendas do *Google* inclui uma cota 100.000 consultas diárias e até 1.000 requisições por segundo.

As requisições dos dados de rotas entre locais se dão por meio de uma interface HTTP, sendo, portanto, necessária a construção de uma *URL* formatada com os parâmetros desejados para cada consulta seguindo as diretrizes especificadas na documentação da API. Existem parâmetros obrigatórios (formato da resposta, origem, destino e chave de acesso) e parâmetros facultativos (modo de transporte, idioma, sistema de unidades, horário de chegada, horário de partida, modelo de trânsito, tipo de transporte público) os quais receberão um valor padrão caso não sejam especificados.

As respostas da *Google Maps Directions API* contêm os dados da rota requisitada dividida em pequenos trechos associados a cada instrução de direção retornada pelo servidor do Google, além de informações gerais sobre a rota,

como por exemplo o tempo total de percurso e o custo total do percurso (se aplicável).

Quando a *Google Maps Directions API* retorna os resultados referentes a um trajeto requisitado, ela os insere em uma matriz denominada *routes* (no formato JSON<sup>2</sup> ou XML<sup>3</sup> dependendo da especificação feita previamente na consulta). Cada elemento da matriz *routes* contém um único resultado, portanto uma única rota, para a origem e o destino especificados.

## 3.2 Persistência e Armazenamento dos Dados

Em ciência da computação, o termo persistência é utilizado para referir-se ao estado de um sistema que sobrevive independentemente do processo que o criou. A implementação desta característica de um sistema é realizada através do armazenamento de dados relativos aos seus diferentes estados em memória não-volátil.

Cabe salientar, no entanto, que a persistência dos sistemas é alcançada de diferentes maneiras, podendo ser implementada nas diferentes camadas de um *software* - ou camadas de persistência como passam a ser denominadas-, conforme a natureza particular de cada aplicação.

Editores de imagens ou processadores de texto, por exemplo, costumam garantir a persistência de seus estados salvando seus documentos para arquivos, ao passo que outros tipos de softwares o fazem utilizando sistemas de bancos de dados. Neste trabalho, a persistência foi implementada em duas camadas distintas de armazenamento: interno (em arquivos do sistema) e externo (em um banco de dados). A camada interna foi utilizada para gravar temporariamente estados da aplicação a fim de manter a experiência de uso mais agradável e intuitiva; ao passo que a camada externa, para gravar informações acerca de requisições realizadas pelo usuário na aplicação.

---

<sup>2</sup> JSON (*JavaScript Object Notation* - Notação de Objetos *JavaScript*) é uma formatação leve de troca de dados. Para seres humanos, é fácil de ler e escrever. Para máquinas, é fácil de interpretar e gerar. (ASSOCIATION, 2013)

<sup>3</sup>XML (*eXtensible Markup Language*) é uma recomendação da W3C para gerar linguagens de marcação para necessidades especiais (W3C, 2008)

O armazenamento externo foi implementado utilizando o *Firebase* que é um serviço do tipo *Database as a Service - DaaS* para aplicações móveis. Também pode ser visto como um *framework* para diversos serviços entre os quais o de bancos de dados em tempo real hospedados na nuvem para aplicativos móveis e web. Os dados são armazenados de modo não-relacional no formato JSON e sincronizados continuamente para cada usuário da aplicação.

Ademais, considerando os limites da *Google Directions API* mencionados na seção anterior, optou-se por também armazenar no *Firebase* os resultados das consultas feitas à *Google Directions API* de modo a evitar sucessivas consultas repetidas aos servidores do Google.

### 3.3 Reconstrução de Isócronas

No escopo de mobilidade urbana, uma Isócrona designa uma curva que delimita uma região onde é possível transitar a partir de um local no mesmo intervalo de tempo. Sendo assim, o problema de representação desta curva pode ser definido como o problema de reconstruir uma curva que é a fronteira de uma região onde é possível transitar a partir do ponto origem em até  $X$  minutos. Em particular, todos os pontos sobre esta curva são aqueles em que leva-se exatamente  $X$  minutos para se alcançar e por isso ela é chamada de isócrona de  $X$  min.

Formalmente, pode-se descrever essa curva como a seguinte função implícita: dada a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , um campo escalar que para cada coordenada  $(lat, long)$  retorna o tempo de traslado em relação à uma dada coordenada origem, temos que a isócrona que estamos procurando é a curva dada pelo conjunto de pontos  $f^{-1}(X)$ , se  $X$  é um valor regular da função  $f$ . Ou seja, a isócrona de tempo  $X$  é a curva de nível  $X$  da função  $f$ .

Sendo  $X$  um valor regular de  $f$ , então, pelo teorema da função implícita,  $f^{-1}(X)$  é uma curva simples e fechada e, pelo teorema da curva de Jordan segmenta o plano em duas regiões: uma interior, limitada pela isócrona, que contém todos os pontos alcançáveis em até  $X$  minutos, inclusive; e uma exterior, com os demais pontos que não são alcançáveis neste tempo. Esta

descrição torna possível utilizar algoritmos de reconstrução de curvas a partir de funções implícitas para reconstruir Isócronas. Particularmente, neste trabalho utiliza-se o *Marching Squares* o qual foi desenvolvido como uma adaptação do algoritmo *Marching Cubes* (LORENSEN; CLINE, 1987) para o caso bidimensional.

Este método de reconstrução de funções implícitas consiste em subdividir sistematicamente o espaço que contem a curva em células, amostrar valores da função implícita nos vértices de cada célula e, então, procurar por arestas em que um dos vértices possua valor superior ao nível da superfície e o outro, inferior.

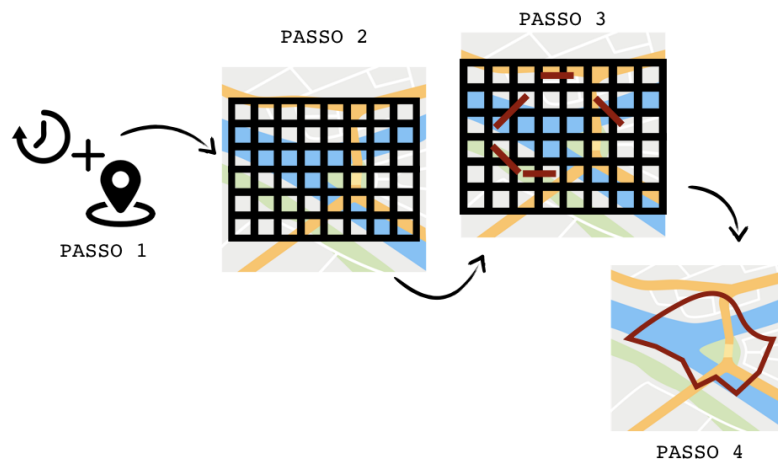


Figura 7: Passo a Passo - Reconstrução de Isócrona com *Marching Squares*

Nas seções a seguir detalha-se cada etapa do algoritmo implementado para a reconstrução de curvas Isócronas.

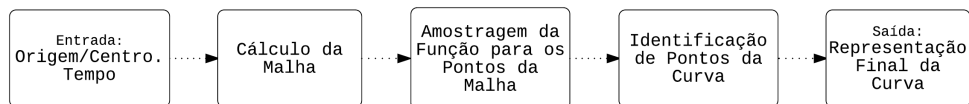


Figura 8: Processo de Reconstrução de Isócrona com *Marching Squares*

### 3.3.1 Cálculo da Malha

A primeira etapa da implementação da reconstrução das curvas de nível constitui-se de calcular uma grade estruturada de pontos dadas uma localização (coordenadas geográficas ou um endereço) e uma constante  $t = \sigma$ . Trata-se portanto de calcular uma grade - sobre um mapa - de tamanho previamente determinado e centrada em uma localidade.

As grades são geralmente categorizadas em estruturadas e não-estruturadas, as quais apresentam estrutura topológica uniforme e não uniforme, respectivamente. Nas grades estruturadas os índices dos vizinhos de um vértice podem ser obtidos por uma simples soma. Ao passo que nas grades não-estruturadas, por sua vez, os vizinhos são obtidos por meio de consultas em estruturas de dados mais elaboradas. Um tipo particularmente simples de grade estruturada é a grade cartesiana regular, onde os elementos são quadriláteros ou hexaedros idênticos.(LACASSA, 2012)

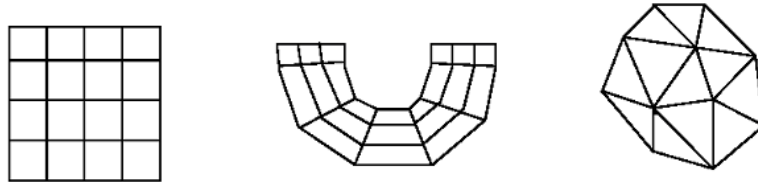


Figura 9: (a) grade cartesiana uniforme. (b) grade estruturada. (c) grade não-estruturada.

Entretanto, quando se está lidando com mapas e coordenadas geográficas torna-se mais conveniente implementar uma grade em um sistema de coordenadas polares (circulares) ao invés de um sistema cartesiano, ainda que este seja mais comumente utilizado.

O processo de cálculo de uma grade circular em sistemas de coordenadas polares é simplificado uma vez que são necessários apenas um ponto de referência, um raio e um ângulo para que possa obter um ponto no sistema. Mais especificamente, para a determinação de uma grade de coordenadas

geográficas, esta estimativa é feita aplicando a fórmula de *Haversine* que permite computar distâncias entre pontos de uma esfera possibilitando uma melhor aproximação das distâncias reais na Terra.

O cálculo da grade propriamente dito depende das características da curva que se deseja reconstruir: a constante  $t = \sigma$  e o modal. Embora o número de subdivisões da grade tenha sido experimentalmente fixado em 30 ângulos e 5 círculos, o raio da grade varia conforme as especificidades mencionadas. Para otimizar o uso dos recursos computacionais, definiu-se limites inferior (raio menor) e superior (raio maior) para o raio da grade de amostragem. Dessa forma, o número total de vértices na grade pode ser limitado ao mesmo tempo em que considera-se uma região onde a Isócrona está certamente contida. A figura 10 facilita a compreensão, é possível observar que para o exemplo apresentado utilizar os vértices internos da grade tornam os cálculos menos eficientes.

Uma vez que são dados o centro da região delimitada pela Isócrona e a constante de tempo  $t = \sigma$ , é possível obter uma grade circular regular fazendo uma estimativa de seu *raio maior* baseado no modal para o qual a curva será reconstruída. Por exemplo: caso se queira reconstruir a isócrona centrada no ponto  $(lat_1, long_1)$  de 5 min ( $t = \sigma = 5$ ) para carros, então dado que a velocidade média de um carro é 80 km/h (1,33 km/min), pode-se estimar que a região delimitada pela curva desejada é inscrita<sup>4</sup> ao círculo de raio 6,65 km = 1,33 km/min \* 5 min (desprezando-se as variações provocadas por congestionamentos).

---

<sup>4</sup>Pode-se afirmar que a Isócrona está inscrita ao círculo pois o cálculo é na verdade, uma superestimação do *raio maior* da grade, uma vez que considera-se a distância em linha reta entre o centro da região e um suposto ponto da curva. Caso se considerassem as distâncias reais o *raio maior* seria menor do que o obtido

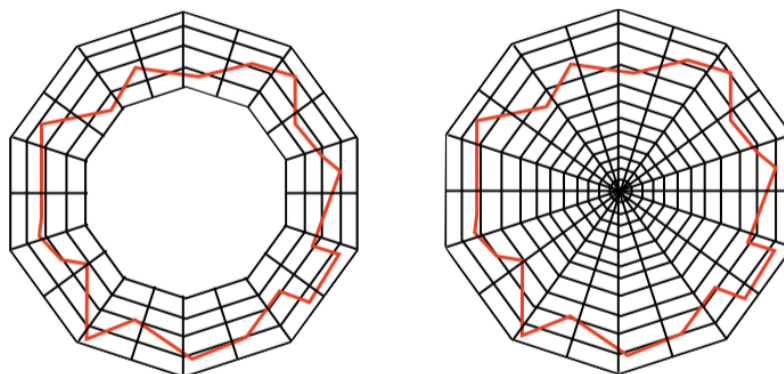


Figura 10: (a) Exemplo de grade otimizada (b) Exemplo de grade completa sem limites determinados

### 3.3.2 Amostragem da Função para os Pontos da Malha

Depois de calcular a grade, a próxima etapa é a amostragem da função para os pontos obtidos. Neste contexto, isto significa requisitar à *Google Directions* API o tempo total dos percursos a partir do ponto de referência (centro da grade) até cada um dos pontos da malha. As informações obtidas são armazenadas em um dicionário para garantir a persistência durante a sessão de uso da aplicação.

Cabe salientar que nesta etapa os pontos que porventura são estimados fora da via na etapa de cálculo da grade podem ser corrigidos através do georreferenciamento da própria API, uma vez que ao retornar o resultado requisitado são retornado também os pontos de início e fim da rota corretamente localizados. Explica-se: alguns pontos da grade calculada podem ser pontos não transitáveis situados em encostas ou oceanos, por exemplo; quando isso ocorre, a própria API do *Google* corrige a localização do ponto retornando o ponto transitável mais próximo ao ponto informado à API na requisição.

### 3.3.3 Identificação de Pontos da Curva e Representação Final

A identificação dos pontos pertencentes à curva foi implementada segundo o algoritmo *Marching Squares* exposto no capítulo 2. Os pontos amostrados são classificados de modo a identificar os pontos interiores e exteriores à curva. Na figura 11 esta classificação está explicitada pela cor dos vértices. Os vértices verdes são interiores ao passo que os azuis são exteriores.

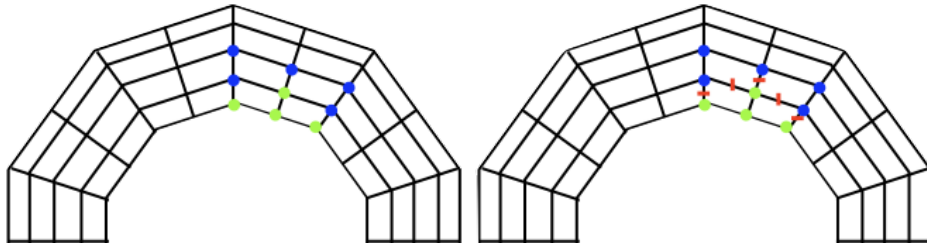


Figura 11: (a) Classificação dos Vértices (b) Pontos de cruzamento nas arestas

Uma vez classificados os pontos passa-se então ao cálculo dos pontos de corte sobre as arestas. O corte é feito de maneira proporcional a distância entre os vértices estimada pelos valores amostrados.

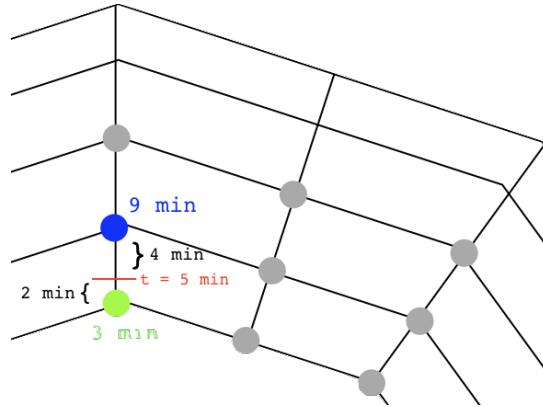


Figura 12: Ponto de Corte na Aresta



A representação final da curva é obtida conectando-se os pontos (figura 12) identificados segundo processo descrito.

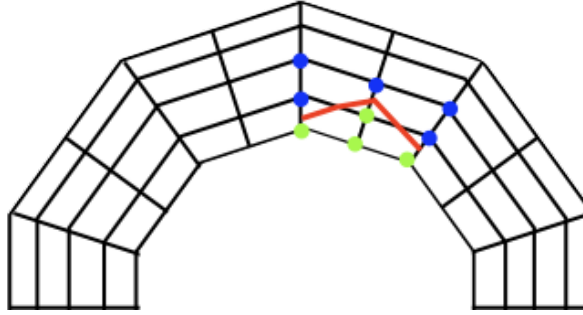


Figura 13: Ponto de Corte na Aresta

### 3.4 Adaptação da Função de Utilidade de McFadden e Domenich

A partir da teoria do consumidor aplicada ao transporte urbano é possível modelar as escolhas de modais dos indivíduos. Utilizando esta abordagem McFadden e Domenich obtiveram uma função de utilidade que permite a comparação entre as escolhas de modais em um determinado cenário. Os economistas analisaram o comportamento de habitantes de uma cidade do Estados Unidos em viagens de carro e de transporte público com dois objetivos distintos: ir trabalhar e fazer compras. A função obtida pelos autores, após testar diversos modelos estatísticos, descreveu corretamente a escolha entre o transporte de carro ou de ônibus de 93% das famílias que constituíam a amostra. A função possui a forma:

$$U(TP, TT, C) = -4.76 + 0.147TP - 0.041TT - 2.24C$$

TP = tempo de percurso a pé, de ônibus ou carro;

TT = tempo total de viagem, em minutos;

C = custo total da viagem.

Sabe-se que na economia aplicada uma função de utilidade mede a satisfação do consumidor na aquisição de bens, sendo amplamente utilizada na teoria das escolhas para analisar o comportamento humano. Mais especificamente, a função aqui apresentada permite medir quão preferível é a jornada com um modal ou outro, os coeficientes das variáveis dessa função descrevem os pesos que uma família atribui às várias características de seus deslocamentos pela cidade. Nesta função de utilidade o fator mais significativo para explicar a escolha do meio de transporte é tempo gasto para fazer a viagem.

Sugere-se, aqui, adaptar essa função de utilidade para obter uma função objetivo, criando um modo alternativo de ranquear opções de modais conforme a preferências dos usuários utilizando os mapas isócronos reconstruídos como uma variável dessa nova função. Esta função objetivo será aplicada na implementação de uma ferramenta de comparação de modais como demonstração de conceito.

Propõe-se, então, modificar a dimensão Tempo de Percurso - TP substituindo-a pela área delimitada pela curva Isócrona a ser analisada. A função objetivo aqui proposta é, portanto:

$$F(AI, TT, C) = -4.76 + 0.147AI - 0.041TT - 2.24C$$

AI = área calculada da Isócrona

TT = tempo total (nesse caso dada pela constante de tempo que caracteriza a isócrona);

C = custo total da viagem

A área da região delimitada pela isócrona reconstruída (variável AI) é calculada com auxílio da biblioteca Google Maps para Android, mais especificamente da função *computeArea* da classe *Spherical Util* (GOOGLE, 2014). O custo total da viagem é estimado de acordo com parâmetros da curva isócrona (a obtenção destas medidas será discutida com mais detalhes no capítulo 4).

## 3.5 Demonstração de Conceito

O protótipo implementado é uma demonstração dos principais conceitos discutidos no trabalho: reconstrução de curvas de nível e teoria do consumidor aplicada ao transporte urbano.

O aplicativo é uma ferramenta de visualização de dados de transportes na medida em que permite que os usuários visualizem as Isócronas correspondentes aos dados de entrada inseridos, além de estabelecer um ranqueamento entre curvas de diferentes modais comparáveis, isto é curvas que possuem as mesmas especificidades (o centro e a constante  $t$ ) exceto pelo tipo de modal.

Na construção de toda ferramenta de software, é bastante importante que o tipo de usuário final esteja determinado desde o início do projeto, uma vez que este fator influencia na decisão das funcionalidades a serem desenvolvidas.

Em sua maioria, as ferramentas cujo propósito é visualizar dados de transportes estão direcionadas para dois principais tipos de usuários finais: usuários comuns - passageiros - ou pesquisadores das áreas de mobilidade urbana e planejamento de transportes. Para os cidadãos, o objetivo geral das visualizações é aumentar a usabilidade dos sistemas de transportes disponíveis; ao passo que para pesquisadores, o foco está em ajudá-los a compreender o uso dos sistemas a fim de aprimorar seu planejamento.

O protótipo apresentado nesta seção foi construído com intuito de auxiliar passageiros, ainda que as estatísticas geradas a partir do uso em grande escala deste tenham potencial de gerar informações relevantes para os planejadores de transporte. Isto posto, nas próximas seções são apresentados o detalhamento do aplicativo e a arquitetura de informação.

### 3.5.1 Detalhamento do Protótipo

O componente principal do aplicativo é um mapa com o qual o usuário pode interagir para escolher os parâmetros da isócrona a ser reconstruída. Os dados são obtidos através de consultas aos servidores do *Google*. O usuário pode valer-se de um campo de texto com sugestão de preenchimento de endereços, obtendo mais facilmente a localização desejada. Outrossim, existe

um componente de menu para determinar os parâmetros das Isócronas e finalmente, o componente em que usuário visualiza as curvas de diferentes modais ranqueadas.

A seguir, explica-se cada uma das funcionalidades do protótipo; na seção “Arquitetura da Informação” apresenta-se maiores detalhes quanto às alterações de estado do aplicativo.

1. *Seleção de uma aba (“By Location”, “By Time” ou “Rank”)*: Ao abrir o aplicativo, o usuário é apresentado a uma interface de abas. A aba central fica selecionada por padrão. Assim que o aplicativo é aberto, caso deseje mudar de aba, basta que o usuário selecione por toque na parte superior da tela.
2. *Seleção de ponto de referência com sugestões de auto completar*: Esta funcionalidade permite que o usuário insira um endereço de referência com auxílio da sugestão de uma biblioteca de lugares e endereços do *Google*.
3. *Seleção de parâmetro modal da isócrona*: O usuário deve selecionar para qual modal deseja gerar uma isócrona.
4. *Seleção de parâmetro duração da isócrona*: Quando optar por utilizar a aba “By Time” para gerar uma isócrona, o usuário deverá indicar qual a duração, escolhendo os tempos sugeridos ou inserindo manualmente o tempo desejado.
5. *Requisição da curva isócrona*: Pode-se gerar uma isócrona a partir de todas as abas, variando, no entanto, em cada uma delas a maneira com que a requisição é feita. Fundamentalmente, a variação dá-se nos parâmetros que necessitam ser selecionados.
6. *Visualização de isócrona requisitada*: Uma vez requisitada a isócrona, o aplicativo faz as requisições ao banco de dados ou à API do *Google* e após realizar o processamento adequado, apresenta na tela a curva de interesse.

7. *Carregamento de curva isócrona gerada para comparação:* Caso deseje, o usuário pode carregar a curva gerada para comparação com outra a ser requisitada. Quando selecionada esta opção, o usuário é direcionado para a aba "Rank".
8. *Requisição de nova isócrona para comparação:* Na aba "Rank", o usuário pode optar por adicionar uma nova curva para comparação em lista.
9. *Visualizar lista ordenada de isócronas:* Uma vez que o usuário tenha optado por comparar curvas, ele poderá visualizá-las em uma lista de *cards* ordenada por preferência segundo a função apresentada na seção anterior. Os *cards* conterão os parâmetros de cada curva e sua a utilidade estimada.
10. *Visualizar curva a partir de lista ordenada:* Se o usuário clicar em um *card* da lista, ele será direcionada para um mapa onde poderá ver a curva correspondente.

A figura a seguir apresenta um diagrama que ilustra a transição de estados e conteúdos principais exibidos no aplicativo conforme a descrição apresentada (estados secundários tais como telas de carregamento foram omitidos). As setas indicam os sentidos permitidos de transição entre as telas.

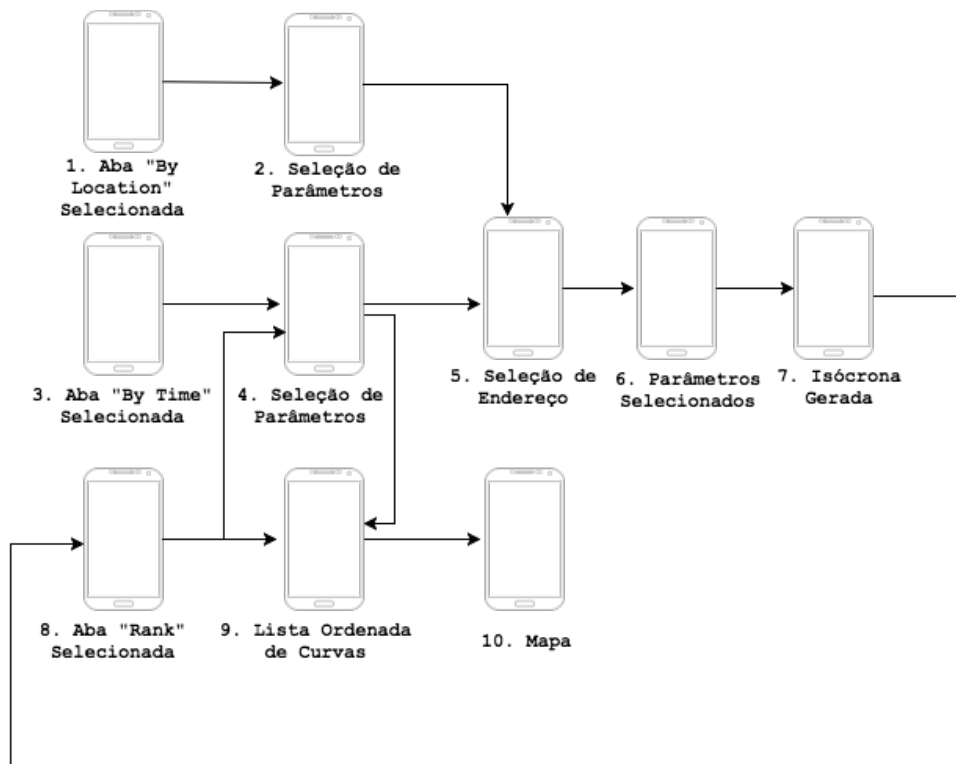


Figura 14: Diagrama de Estados Principais da Aplicação

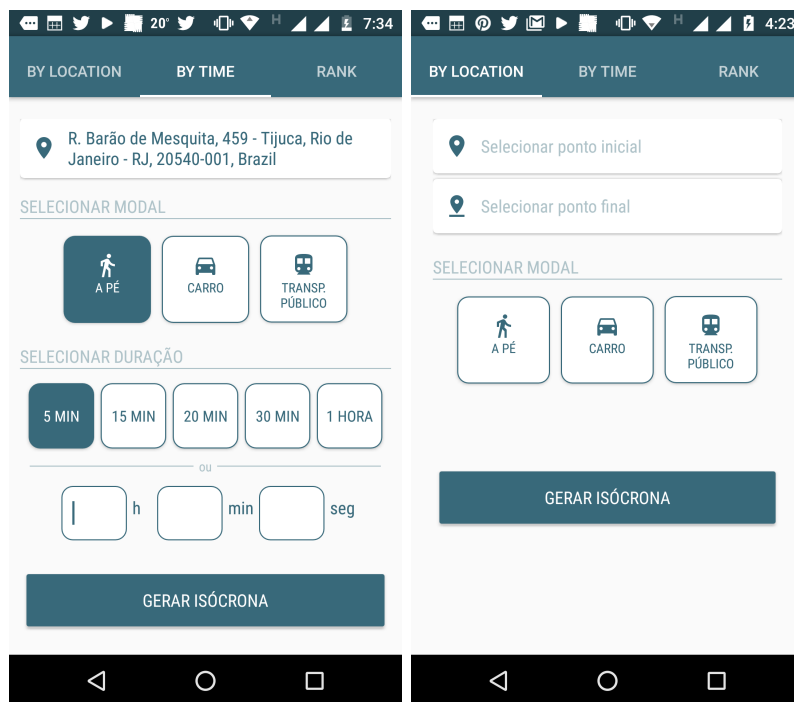
## 4 Discussão e Resultados

Nesta seção pretende-se discutir os resultados obtidos após a implementação das etapas descritas na metodologia (capítulo 3). O intuito substancial deste capítulo é abordar aspectos e nuances interessantes que emergiram no decorrer do desenvolvimento e, posteriormente, dos testes realizados para a concretização do trabalho proposto.

### 4.1 Protótipo

O protótipo a seguir apresentado foi desenvolvido em linguagem nativa para aplicativos Android - linguagem Java. Utilizou-se o ambiente de desenvolvimento *Android Studio 2.3* que oferece as ferramentas mais rápidas para a criação de aplicativos em todos os tipos de dispositivos Android. Recursos como edição de código de nível global, depuração, ferramentas de desempenho, sistema flexível de compilação e criação/implantação instantâneas permitem que você se concentre na criação de aplicativos exclusivos de alta qualidade (GOOGLE, 2017a). O aplicativo foi implementado com o Kit de Desenvolvimento de Software (SDK) versão 24, sendo compatível com todas as versões 21 ou posterior.

As especificações da interface foram idealizadas priorizando o melhor aproveitamento da plataforma e suas particularidades, entre as quais a diversidade de modelos que abrange. Além disso, priorizou-se garantir a melhor experiência de uso da aplicação, respeitando-se as diretrizes para interação e design visual de aplicativos Android (TEAM, 2017). A seguir apresentam-se imagens das estruturas da interface.



(a) *Aba By Time*

(b) *Aba By Location*



(c) *Aba rank*

Figura 15: Abas



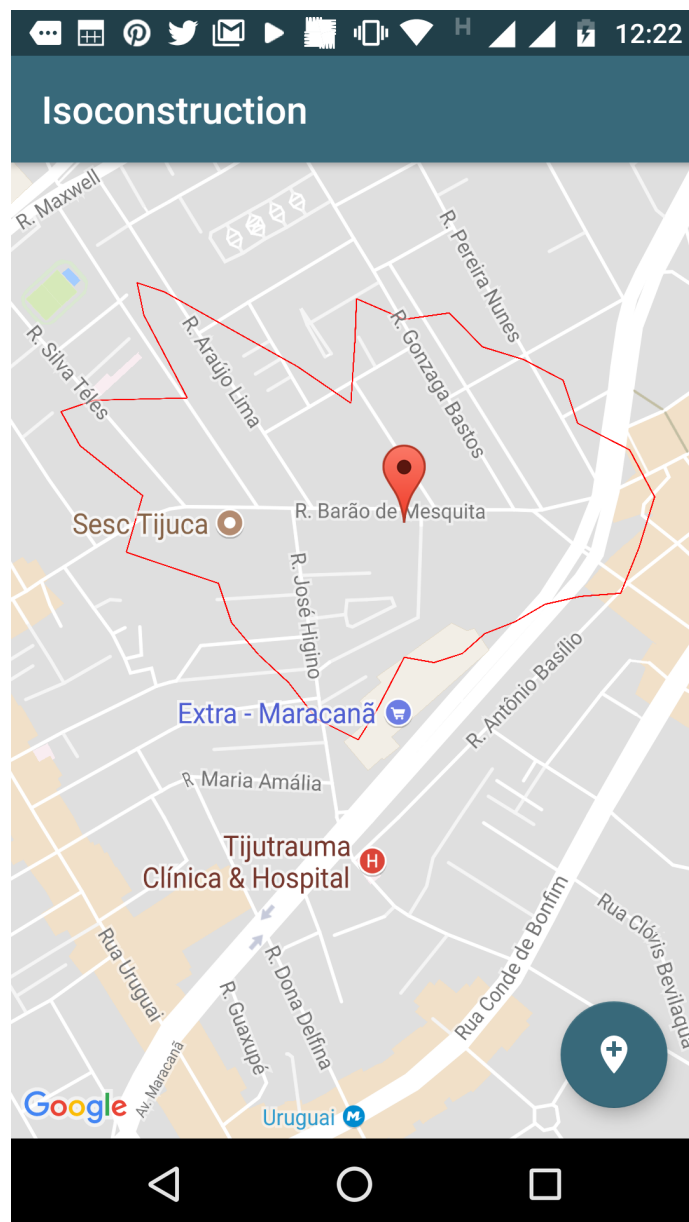


Figura 16: Isócrona a pé de 5 min reconstruída

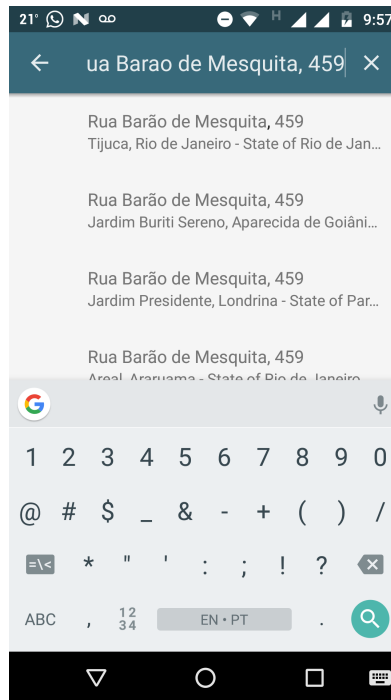
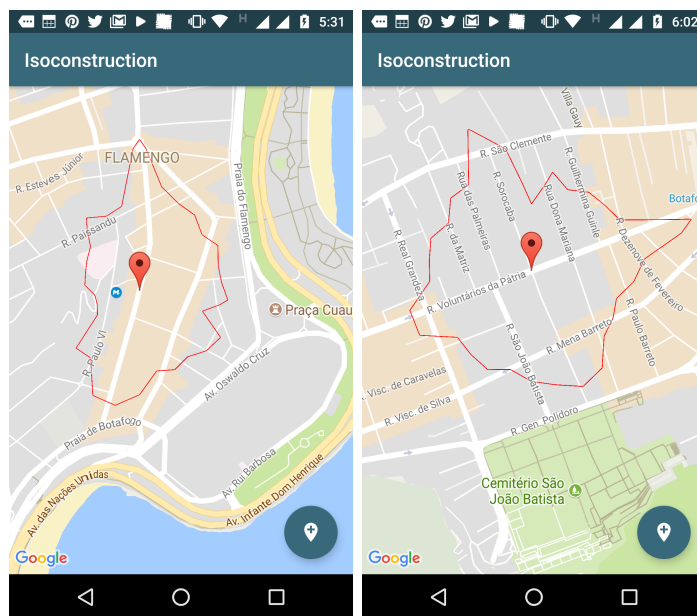


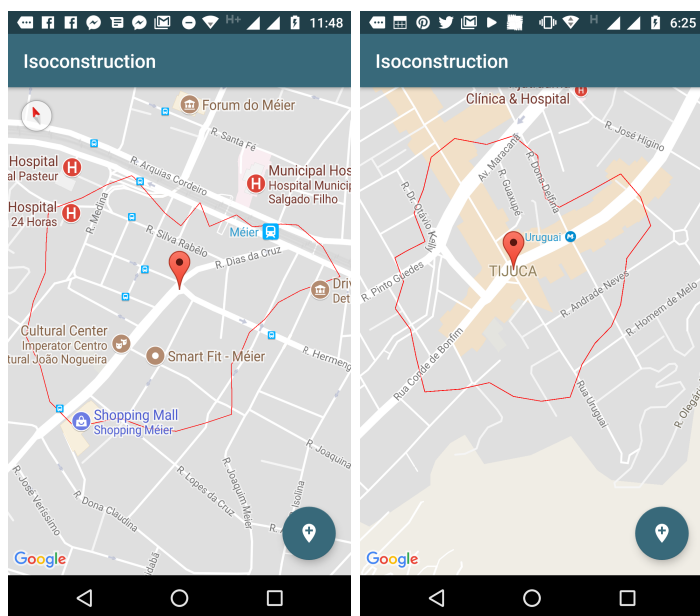
Figura 17: Auto completar para lugares e endereços

## 4.2 Reconstrução de Isócronas

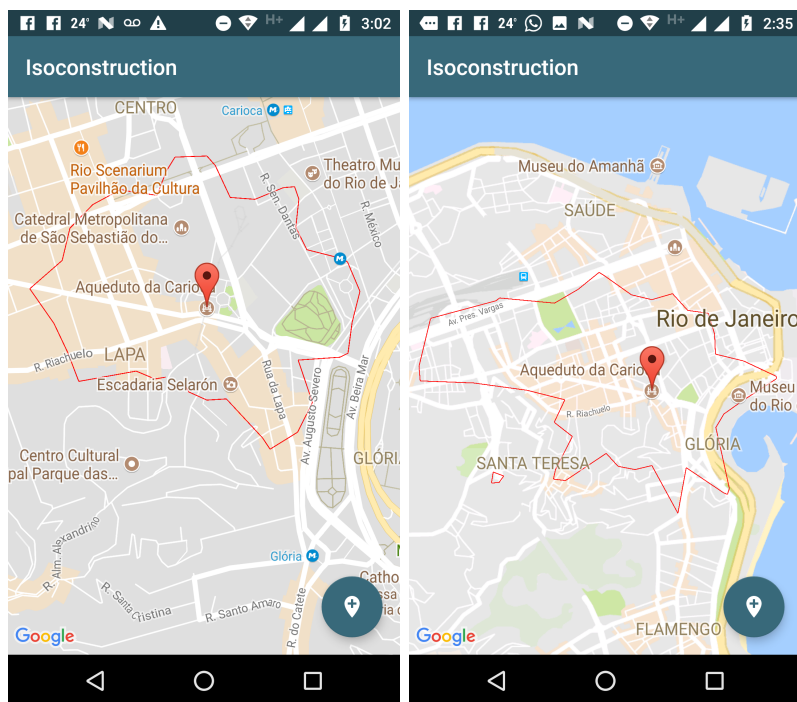
Nesta seção faz-se considerações acerca de particularidades da aplicação do método de reconstrução de curvas de nível adotado para o caso concreto dos mapas isócronos. A solução aqui analisada para o problema de reconstrução de uma curva Isócrona baseou-se no algoritmo *Marching Squares*. Como discutido no capítulo 2, para se empregar este algoritmo utilizou-se a premissa de que é possível modelar uma Isócrona como uma curva de nível que pode ser representada por uma função implícita contínua. Nas figuras a seguir, expõe-se exemplos de curvas isócronas que possuem uma função implícita que as representa.



(a) Isócrona de 5 min. A pé. (b) Isócrona de 5 min. A pé.  
Flamengo Botafogo



(c) Isócrona de 5 min. A pé. (d) Isócrona de 5 min. A pé.  
Méier Tijuca



(a) Isócrona de 8 min. A pé. Arcos da Lapa (b) Isócrona de 8 min. Carro. Arcos da Lapa

Figura 19: Curvas Isócronas Reconstruídas

A continuidade é o fator que garante que a curva de nível a ser reconstruída existe e é fechada. Entretanto, quando tratamos de curvas isócronas a função implícita que a representa pode possuir descontinuidades ou não existir em alguns pontos do sistema de coordenadas, esta propriedade é determinada pelos parâmetros que definem a curva. As curvas isócronas para o modo de transporte a pé, por exemplo, são em geral contínuas uma vez que a maior parte das vias pode ser acessada andando. No entanto, quando consideramos modos de transporte automotivos esta condição varia bastante de acordo com o sentido das vias e a suas dimensões.

Nas figuras que seguem esta discussão fica patente. No primeiro caso, apresenta-se uma isócrona requisitada para o transporte a pé em até 5 mi-

nutos. A curva obtida é fechada visto que todos os pontos do sistema de coordenadas na vizinhança do ponto de referência podem ser acessados. No segundo caso, no entanto, para uma curva com os mesmos parâmetros, exceto o modo de transporte - ao invés de ser a pé, foi requisitada uma curva para um automóvel - não se obteve uma curva fechada. No caso apresentado, isso se deve ao sentido da via que impede que os pontos a direita do ponto de referência sejam atingidos no curto espaço de tempo requisitado (5 minutos).

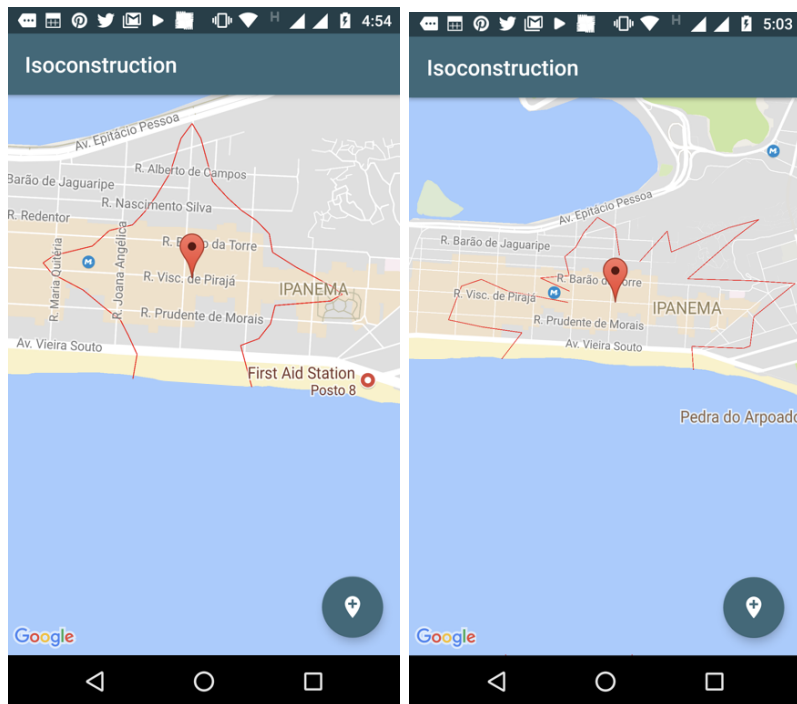
Esta situação pode ocorrer para a totalidade dos modais, caso existam acidentes naturais obstruindo a vizinhança para qual a curva foi requisitada. Nas figuras 22(a) e 22(b), apresenta-se o caso de teste realizado selecionando um ponto de referência próximo à Praia de Ipanema; para este exemplo mesmo uma curva a pé possui descontinuidades.



Figura 20: Isócrona de 5 min, A pé, R.Barão de Mesquita, 459 - Tijuca, RJ



Figura 21: Isócrona de 5 min, Carro, R.Barão de Mesquita, 459 - Tijuca, RJ



(a) Isócrona de 5 min, A pé, Rua Visconde de Pirajá, 245 - Ipanema, RJ  
(b) Isócrona de 5 min, Carro, Rua Visconde de Pirajá, 245 - Ipanema, RJ

Figura 22: Descontinuidades

### 4.3 Função de Comparação de Isócronas

A comparação de curvas isócronas implementada baseia-se na função de utilidade de McFadden adaptada para considerar a área dessas curvas. A utilidade para uma curva calculada a partir da função objetivo proposta depende de três medidas: área da curva, constante de tempo que caracteriza a curva e custo de viagem.

A área da curva é estimada através da função *computeArea* da classe *Spherical Util*. Esta função retorna a área, em metros quadrados, delimitada

por um caminho<sup>5</sup> dado como entrada. Cabe ressaltar, que esta função infere um caminho fechado mesmo para os casos em que as curvas possuem descon-  
tinuidades. Esta inferência ocorre ligando vértices consecutivos considerando a menor distâncias entre eles.

A constante de tempo é determinada a partir da escolha do usuário. Por exemplo, caso se deseje comparar duas curvas de modais diferentes de 5 *min* a variável de tempo será igual para ambas, conseqüentemente, as outras duas variáveis serão determinantes na comparação.

O custo total da viagem é obtido para o caso particular em que as curvas são geradas a partir de dois pontos de referências (na aba *By Location* do protótipo), uma vez que neste cenário requisita-se informações para a API do Google sobre a rota específica entre os dois pontos de referência. Entre as informações obtidas estão: a distância entre os pontos, o tempo total do percurso e o custo da viagem propriamente (este último apenas quando o modal escolhido é transporte público). Neste caso também é possível estimar o custo de deslocamentos de carro, a partir da distância do percurso obtida e do preço médio de gasolina por quilômetro rodado no Rio de Janeiro (desconsiderando os custos de manutenção, revisão e impostos).

De posse dos valores das três medidas, calcula-se a utilidade conforme a equação apresentada anteriormente e ordena-se as curvas para apresentá-las para o usuário. Na tabela abaixo, apresentam-se resultados encontrados para estimativas da utilidade para casos de teste executados, discriminando as variáveis que compõem o valor agregado calculado:

Os casos de testes apresentados exploram diferentes comparações possíveis a partir da aplicação da função objetivo. Nos quatro primeiros casos fixou-se o ponto de referência e variou-se o modal e a constante de tempo que caracteriza a isócrona, ao passo que nos casos 5 e 6 variou-se apenas o modal. Esta análise permite avaliar a coerência dos valores estimados entre si, bem como sua ordem de grandeza com o intuito de verificar se esta é compatível

---

<sup>5</sup>Conjunto de coordenadas geográficas que definem uma curva.



	Ponto de Referência	Modal	AI( $km^2$ )	TT(min)	C(R\$)	$F(AI, TT, C)$
1	FGV	A pé	0,82	10	0	-5,05
2	FGV	A pé	1,46	15	0	-5,16
3	FGV	Carro	16,35	5	0,665	-4,05
4	FGV	Carro	31,10	8	0,90	-2,49
5	Arcos da Lapa	A pé	1,15	8	0	-4,91
6	Arcos da Lapa	Carro	7,91	8	0,38	-4,78
7	UERJ	A pé	4,93	20	0	-3,11
8	UERJ	Carro	15,39	9	0,90	-4,88

Tabela 1: Função objetivo para comparação de isócronas

com as distâncias reais.

Analisando o caso 4, a título de exemplo, pode-se concluir que a área estimada em  $31,10 \text{ km}^2$  está de acordo com as dimensões reais a partir da seguinte verificação:

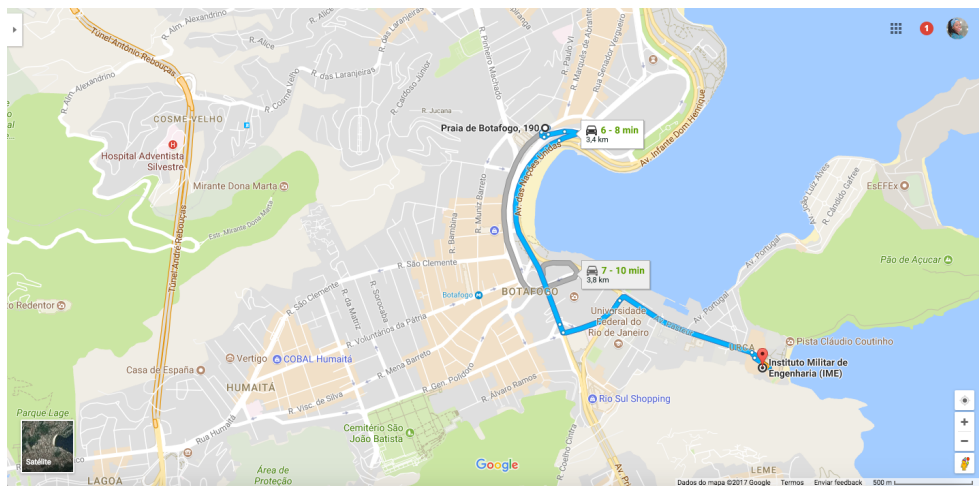


Figura 23: Rota de carro entre a Fundação Getúlio Vargas e o Instituto Militar de Engenharia

1. Considere a rota realizada em 8 min de carro entre a FGV e o Instituto Militar de Engenharia como referência.

2. Segunda a definição de curva isócrona, o Instituto Militar de Engenharia deve estar na fronteira da curva referente ao caso 4, uma vez que esta curva compreende o conjunto de pontos que podem ser atingidos em 8 minutos a partir do ponto de referência em questão, a Fundação Getulio Vargas.

3. Caso essa curva fosse uma circunferência perfeita, então a distância entre a FGV e o IME (aproximadamente 3,5 km) seria o raio desta circunferência. Um vez que esta seria exatamente a distância entre o centro e um ponto da circunferência.

4. Sendo assim, a área desta circunferência seria dada por  $\pi.r^2 = \pi.(3,5)^2 = 3.(3,5)^2 = 36,75 \text{ km}^2$ . Portanto, a área estimada em  $31,10 \text{ km}^2$  está na correta ordem de grandeza e pode ser considerada uma estimativa razoável.

## 5 Conclusão

### 5.1 Considerações Finais

O presente trabalho propõe a reconstrução de isócronas utilizando-se um algoritmo de reconstrução de curvas de nível representadas por uma função implícita, bem como sua aplicação na identificação de preferências de usuários de transporte urbano, através da adaptação de uma função de utilidade e o desenvolvimento de uma prova de conceito.

Do ponto de vista prático, os resultados apresentados na seção anterior apontam para a possibilidade de se aprimorar a demonstração de conceito implementada de modo a transformá-la em uma aplicação profissional capaz atender as necessidades cotidianas dos cidadãos, auxiliando-os em sua tomada de decisão. A qualidade das curvas isócronas geradas, ainda que consideremos os casos em que as curvas possuem descontinuidades, confirma a hipótese levantada de que é possível modelar uma curva isócrona como uma curva implicitamente definida por uma função.

Por fim, ainda que o aplicativo tenha sido desenvolvido como uma prova de conceito é possível aprimorá-lo de modo a tornar viável o recebimento de requisições de uma grande quantidade de usuários concorrentemente. Cabe destacar, no entanto, que na concepção do protótipo foram utilizadas técnicas de projeto de aplicativos comerciais, a exemplo, da elaboração da interface de usuário que levou em conta boas práticas e diretrizes recomendadas para aplicativos Android nativos profissionais.

### 5.2 Trabalhos Futuros

O problema de reconstrução de isócrona foi estruturado e modelado de modo a possibilitar a aplicação do algoritmo *Marching Squares* como forma de solução. As curvas obtidas com este método, apresentadas anteriormente, podem ser consideradas razoáveis, entretanto um próximo passo adequado seria estudar critérios objetivos que possibilitem medir a acurácia de métodos

de reconstrução de isócronas a fim de facilitar a análise dos resultados obtidos. Ainda em relação ao método de reconstrução de isócronas, pode-se aprimorar os resultados, propondo-se maneiras de tratar as discontinuidades discutidas a fim de produzir curvas corrigidas e portanto, visualizações melhores para o usuário.

Outra possibilidade de continuidade para este trabalho está em considerar a utilização de outros modelos de escolha de modais que possam ser aplicados na construção de uma função objetivo que permita comparar propriedades de curvas isócronas. Pode-se ponderar a utilização de modelos que incorporem também características demográficas dos usuários tais como número de automóveis per capita da família, etnia e ocupação.

Uma proposta adicional de trabalho futuro está em ensejar esforços no aperfeiçoamento do aplicativo desenvolvido. O aplicativo pode ser estendido a fim de considerar diferentes situações de tráfego, bem como diferenciar dias da semana e horários do dia de modo a possibilitar comparações mais detalhadas entre isócronas. Além disso, pode-se aprimorar a aplicação de forma a tornar seu uso viável por uma grande quantidade de usuários, reduzir o tempo de resposta das requisições e implementar outra camada de persistência de dados, tal como um mecanismo de memória cache.

## Referências

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 1964. (Applied mathematics series). ISBN 9780486612720. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=MtU8uP7XMvoC>.
- ARMSTRONG, H. W. A Network Analysis of Airport Accessibility in South Hampshire. p. 294–307, 1972.
- ASSOCIATION, E. C. M. ECMA-404 The JSON Data Interchange Standard. 2013.
- AUDENHOVE, F.-J. V. et al. The Future of Urban Mobility 2.0: Imperatives to Shape Extended Mobility Ecosystems of Tomorrow. *Arthur D. Little; International Association of Public Transport (UITP)*, n. January, p. 1–72, 2014.
- BEIRÃO, G.; CABRAL, J. A. S. Understanding attitudes towards public transport and private car: A qualitative study. *Transport Policy*, v. 14, n. 6, p. 478–489, 2007. ISSN 0967070X.
- DING, L.; ZHANG, N. A Travel Mode Choice Model Using Individual Grouping Based on Cluster Analysis. *Procedia Engineering*, Elsevier B.V., v. 137, p. 786–795, 2016. ISSN 18777058.
- DOMENCICH, T. A.; MCFADDEN, D. *URBAN TRAVEL DEMAND - A BEHAVIORAL ANALYSIS*. [S.l.]: North-Holland Publishing Company Limited, 1975.
- DOVEY, K. et al. Space/Time Mapping of Urban Transit: Isochrones, Car-dependency and Mode-choice in Melbourne. *State of Australian Cities Conference 2015*, v. 1, p. 1–12, 2015.
- GALTON, F. On the Construction of Isochronic Passage-Charts. p. 657–658, 1881.
- GOMES, A.; VOICULESCU, I. *Atlas of the historical Geography of the United States*. [S.l.]: Springer-Verlag London, 2009.

- GOOGLE. *Google Class Spherical Util*. 2014. Acessado em maio de 2017. Disponível em: <https://github.com/googlemaps/android-maps-utils/blob/master/library/src/com/google/maps/android/SphericalUtil.java>.
- GOOGLE. *Android Studio*. 2017. Acessado em junho de 2017. Disponível em: <https://developer.android.com/studio/index.html?hl=pt-br>.
- GOOGLE. *Google Directions API*. 2017. Acessado em junho de 2017. Disponível em: <https://developers.google.com/maps/documentation/directions/?hl=pt-br>.
- GORTANA, F. et al. Isoscope - Visualizing temporal mobility variance with isochrone maps. *IEEE Information Visualization*, p. 1–2, 2014.
- INC, I. *InstaGIS. Instant access to GIS value*. 2013–2017. Acessado em março de 2017. Disponível em: <https://www.instagis.com/en/>.
- KATTIYAPORNPOONG, U.; MILLER, K. E. *International Journal of Culture, Tourism and Hospitality Research*, v. 3, n. 1, p. 81–94, 2009. ISSN 1750-6182.
- LAB, D. S. *Digital Edition of Atlas of the Historical Geography of the United States. Digital Scholarship Lab. University of Richmond*. 2014. Acessado em março de 2017. Disponível em: <http://dsl.richmond.edu/historicalatlas/138/b/?view=plate>.
- LACASSA, A. de. Geração e Melhoramento de Malhas Adaptativas. 2012.
- LI, Z. et al. Modeling traveler mode choice behavior of a new high-speed rail corridor in China. *Transportation Planning and Technology*, v. 37, n. 5, p. 466–483, 2014. ISSN 0308-1060.
- LORENSEN, W. E.; CLINE, H. E. Marching cubes: A high resolution 3d surface construction algorithm. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, ACM, New York, NY, USA, v. 21, n. 4, p. 163–169, ago. 1987. ISSN 0097-8930. Disponível em: <http://doi.acm.org/10.1145/37402.37422>.
- LOUREIRO, C. F. G.; SOUZA, H. H. H. de. Modelos comportamentais na compreensão da problemática do sistema de transporte interurbano de passageiros do ceará. *XXVIII Congresso ANPET*, 2014.

LTD iGeolise. *TravelTime: search, analyse and sort data using minutes not miles*. 2017. Acessado em março de 2017. Disponível em: <http://www.traveltimeplatform.com/>.

Mapnificent. 2017. Acessado em março de 2017. Disponível em: <http://www.mapnificent.net>.

MARCHI, M. D. Visualizing Public Transport Systems: State-of-the-Art and Future Challenges. *University of Illinois at Chicago course CS524 report*, n. March, 2015.

MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M.; GREEN, J. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, 1995. (Oxford student edition). ISBN 9780195073409. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=KGtegVXqD8wC>.

MYSOCIETY. *Mapumental*. 2017. Acessado em março de 2017. Disponível em: <https://mapumental.com/services/travel-time>.

PAULLIN, C.; WRIGHT, J. *Atlas of the historical Geography of the United States*. [S.l.]: Carnegie Institute of Washington and the American Geographical Society of New York, 1932.

SRL, K. *Iso4App*. 2017. Acessado em março de 2017. Disponível em: <http://www.iso4app.net>.

TEAM, A. U. *User Interface Guidelines*. 2017. Acessado em junho de 2017. Disponível em: <https://developer.android.com/studio/index.html?hl=pt-br>.

VARIAN, H. *Microeconomia - Principios Basicos*. CAMPUS, 2006. ISBN 9788535216707. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=sJiouux8r-AC>.

VIANA, R. L. et al. Segurança nas Interseções Urbanas- VLT x Veículos. *Congresso Rio de Transportes 2016*, v. 15, p. 45–58, 2016.

W3C. *Extensible Markup Language (XML) 1.0 (Fifth Edition)*. 2008. Acessado em maio de 2017. Disponível em: <https://www.w3.org/TR/REC-xml/>.

WHITE, M.; KIMM, G. *Pedcatch. The University of Melbourne*. 2016.  
Acessado em março de 2017. Disponível em: <http://www.pedcatch.com>.

ZENG, W. et al. Visualizing mobility of public transportation system.  
*IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, v. 20, n. 12,  
p. 1833–1842, 2014. ISSN 10772626.