A Teoria Econômica da Mudança Tecnológica[1]

MARCOS CINTRA CAVALCANTI DE ALBUQUERQUE

Resumo

Neste trabalho tenta-se examinar as implicações teóricas da mudança tecnológica viesada dentro de uma estrutura geral, e em seguida, à luz do caso particular fator-aumentativo. A análise é desenvolvida para funções de produção a dois fatores e depois para o caso de *"n"* fatores. Procura-se, assim, apontar que, para o estudo do progresso tecnológico há necessidade de separar mudança tecnológica de *per si* de substituição de fatores.

Abstract

This article is an attempt to analyse the theoretical implications of biased technological change within a general framework, an then in the specialized factor-augmenting case. Two factor production functions are used in the analysis, but the main results are generalized to the *n* – factor case. The results obtained point out to the necessity of separating technological change *per se* from factor substitution, in the analysis of technological change.

O autor é Professor Titular da Escola de Administração de Empresas de São Paulo da FGV.

Traduzido por Laura Teixeira Motta, do original em inglês: "The Economic Theory of Technological Change".

(1) Este artigo é uma versão ligeiramente modificada do capítulo 2 de ALBUQUERQUE (1985).

Introdução

Este artigo é uma tentativa de analisar as implicações teóricas da mudança tecnológica dentro de uma estrutura geral e, em seguida, à luz do particular caso fator-aumentativo[(*)]. Funções de produção a dois fatores são utilizadas na análise, mas os resultados principais são generalizados para o caso de *'n'* fatores. Procura-se ainda apresentar as dificuldades em se analisar a mudança tecnológica devido à necessidade de separar mudança tecnológica *de per si* de substituição de fatores.

(*) "factor-augmenting case", no original. N. do T.

A análise é feita em uma estrutura que leva em consideração a mudança tecnológica viesada, e as três definições principais, segundo Hicks, Harrod e Solow, são explicitamente derivadas e relacionadas umas às outras.

Suponhamos ser possível definir uma relação macroeconômica entre produto e um conjunto de insumos — a função de produção agregada(2). Tal função de produção, definida em estreita analogia com a função de produção microeconômica, pode ser caracterizada por quatro parâmetros que descrevem sua "tecnologia abstrata", isto é, o parâmetro de eficiência, o parâmetro de escala, o parâmetro de intensidade e o parâmetro de substituição(3).

Uma mudança na "tecnologia abstrata" pode ser associada a uma série de fatores, tais como maior possibilidade de substituição entre fatores de produção, economias ou deseconomias de escala, melhorias em educação e treinamento, deslocamentos intersetoriais de recursos, alterações organizacionais etc. Embora algumas dessas razões possam estar diretamente associadas a mudanças no estoque de conhecimento, geralmente resultantes de pesquisa e desenvolvimento, outras não o podem. Tal é o caso, por exemplo, do processso de treinamento que não aumenta realmente o estoque de conhecimento, mas pode acelerar sua difusão e, conseqüentemente, conduzir a um deslocamento da função de produção(4).

A função de produção agregada não deve ser interpretada como uma relação que descreve as técnicas de produção mais eficientes, mas como a representação do nível médio das possibilidades de produção disponíveis para os produtores em qualquer dado momento no tempo. Interpretada dessa forma, a função de produção agregada não é um elemento totalmente exógeno em teoria econômica, dependente exclusivamente de um estoque de conhecimento tecnologicamente determinado, mas uma variável endógena, determinada conjuntamente por considerações econômicas e não econômicas. A função de produção, interpretada como um conceito totalmente determinado tecnologicamente, restringe suas características mais abrangentes, especialmente em um contexto dinâmico. Já uma visão mais ampla do conceito de função de produção é compatível, por exemplo, com a teoria da inovação induzida, segundo a qual a adoção de mudanças tecnológicas depende dos preços relativos dos fatores, muito embora, fisicamente, novas técnicas de produção possam ser conhecidas de antemão(5).

---

(2) Definindo a função como $F(\underline{X})$ onde $\underline{X}$ é o vetor de insumos, F é uma função de produção neoclássica se possuir as seguintes características:

a) F é uma função contínua do conjunto de todas as combinações não-negativas de insumos ao conjunto de níveis não-negativos de produto.

b) F possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas com relação a todos os argumentos.

c) $F_i(\underline{X}) \geqslant 0$.

d) $F(\lambda \underline{X}) = \lambda F(\underline{X})$ para todos $\lambda = 0$ e todos $\underline{X} \geqslant 0$.

e) Quase-concavidade estrita: para qualquer $\underline{X} \geqslant 0, \underline{X}' \geqslant 0, 0 < \lambda < 1$ e para qualquer $C > 0$, se $F(\underline{X}) \geqslant CF(\underline{X}') \geqslant C$ então $F(\lambda \underline{X} + (1 - \lambda \underline{X}') \geqslant C$, com igualdade se $\underline{X} = \underline{X}'$. Ver BURMEISTER *et al* (1970).

(3) BROWN (1966), capítulos 2,4. Como exemplo, tomemos a função de produção CES (Elasticidade de Substituição Constante) a dois fatores onde Y é produto, K é capital e L é trabalho, $Y = \gamma[\alpha K^{-\rho} + (1 - \alpha) L^{-\rho}]^{-\frac{\lambda}{\rho}}$; γ é o parâmetro de eficiência, α é o parâmetro de intensidade, λ é o parâmetro de escala ou parâmetro de grau de homogeneidade e ρ é o parâmetro de substituição.

(4) Para uma discussão acerca da maneira pela qual esses fatores influenciam a mudança tecnológica, ver KENNEDY *et al* (1972), HEERTJE (1973).

(5) Uma visão mais ampla dos efeitos dos fatores econômicos sobre a mudança tecnológica pode ser encontrada em SCHMOOKLER (1962).

1. Problemas na Análise da Mudança Tecnológica

Hicks (1932) fez uma das mais incitantes observações na história da ciência econômica quando escreveu que

> *"uma mudança nos preços relativos dos fatores de produção é, ela própria, um incentivo à invenção, e invenção de um tipo específico — voltado à economia do uso do fator que se tornou relativamente caro".*

Essa observação introduziu uma nova perspectiva no estudo da mudança tecnológica, visto que, até então, os economistas haviam considerado a evolução técnica como fora do domínio da economia. Foi a partir daquele momento que economistas começaram a questionar se variáveis econômicas poderiam afetar a natureza da mudança tecnológica, tornando-a uma variável endógena, e não exógena, nos modelos econômicos.

Nos anos 50 e 60, a experiência americana mostrou que, a despeito da acelerada elevação da relação capital-trabalho, as participações de ambos os fatores no produto haviam permanecido constantes, o que, aos economistas, parecia ser uma contradição. O paradoxo é facilmente explicado supondo-se, quer uma elasticidade de substituição unitária constante, implícita em uma função Coob-Douglas, quer uma função de produção com elasticidade de substituição menor que a unitária juntamente com um viés poupador de trabalho grande o suficiente para compensar o aumento da participação do trabalho resultante da crescente relação capital-trabalho.

Tais afirmações requerem uma clara compreensão da teoria econômica por trás do conceito de mudança tecnológica. Eventuais alterações observadas na proporção de uso dos fatores e em suas participações relativas no valor da produção devem ser decompostas em um componente resultante de substituição ordinária de fatores ao longo de uma isoquanta, e em um segundo componente derivado de deslocamentos não-neutros, ou viesados, da isoquanta. Adicionalmente, como mostrado em Albuquerque (1985a), é necessário isolar o efeito de não homotetia dos deslocamentos da isoquanta, isto é, aqueles deslocamentos que se devem a efeitos de escala de produção.

Fellner (1971), Resek (1963) e Kendrick e Sato (1963), entre outros, sugeriram e testaram importantes hipóteses sobre a mudança tecnológica sem realmente precisarem estimar os valores dos parâmetros tecnológicos. Baseados em observações e estimativas de relações capital-trabalho, produtividade do trabalho, preços, participações e produtividade total dos fatores, elasticidades de substituição e taxas marginais de substituição técnica, eles obtiveram êxito em, sob certas suposições, testar hipóteses acerca do rumo do progresso tecnológico.

Esses estudos geralmente implicavam raciocínio tortuoso e deduções causais pouco intuitivas, apesar das suposições simplificadoras comumente feitas, tais como uma função de produção a dois fatores e homogeneidade linear ou, como em Kendrick e Sato (1963), assumindo ser neutra a mudança tecnológica. Supondo, como sugerido por Hicks (1932), que a mudança tecnológica seja endógena, surge a questão de como variáveis econômicas afetam as mudanças nos métodos de produção.

O interesse inicial em mudança tecnológica viesada e em modelos de inovação induzida surgiu a partir de questões de distribuição de renda; basicamente, tenta-se prever os efeitos do inerente viés poupador de trabalho das sociedades industrializadas.

Binswanger (1978) mostrou que a literatura sobre inovação induzida contém dois modelos básicos: o de Ahmad

(1966), que postula e existência de uma curva de possibilidade de inovação, a qual tem, até agora, desafiado o tratamento matemático e, portanto, apresenta limitadas aplicações econométricas; e o de Kennedy (1964), que incorpora mudanças tecnológicas fator-aumentativas e supõe uma fronteira de possibilidade de inovação — uma fronteira de *trade-off* entre taxas de incremento de capital e taxas de incremento de trabalho. Essa abordagem conduziu a uma rica literatura teórica e, empiricamente, requer a mensuração econométrica das taxas de incremento de fatores(*).

Este trabalho é, portanto, uma tentativa de obter uma compreensão da teoria da mudança tecnológica, e procura mostrar a impossibilidade de determinar, simultaneamente, os vieses e as elasticidades de substituição de fatores, sem o auxílio de modelos econométricos.

Adicionalmente, a hipótese de dois fatores, em ambas as formas, geral e fator-aumentativas, é generalizada para o caso de *'n'* fatores.

A não ser que se usem modelos econométricos, tornam-se necessárias suposições altamente simplificadoras para formular afirmações a respeito da mudança tecnológica; e a tarefa torna-se quase impossível se houver mais dois fatores de produção, como mostrado no apêndice 1. Isso explica a costumeira utilização de formas funcionais altamente restritivas, tais como a de Cobb-Douglas ou a Elasticidade de Substituição Constante (CES), e ressalta a necessidade de se derivarem formas funcionais menos restritivas e mais poderosas.

2. A Teoria da Mudança Tecnológica

A mudança tecnológica, ao nível agregado, pode ser representada por um índice que especifica os deslocamentos da função de produção, gerando toda uma família dessas funções. O índice é, ele próprio, uma função de todos os fatores que provocam mudança tecnológica, tais como fatores econômicos, tecnológicos, culturais, climáticos e outros. Como uma simplificação, associaremos este índice, ao qual denominaremos *"t"*, ao tempo. Essa interpretação do parâmetro *"t"* supõe que os deslocamentos da função de produção agregada ocorrem de maneira uniforme e contínua, embora devamos estar alertas para o fato de que, ao nível microeconômico, a mudança tecnológica ocorre irregularmente, por vezes progredindo e por outras regredindo.

As primeiras discussões sobre o progresso tecnológico procuraram avaliar o efeito da mecanização sobre o nível de emprego e, conseqüentemente, sobre a participação do trabalho na renda gerada por um sistema econômico. Era natural que tais discussões se concentrassem em classificar tipos de mudança tecnológica segundo seu efeito sobre as parcelas da renda atribuídas aos fatores(6).

São três os tipos de classificação mais comuns e amplamente utilizados: os de Hicks (1932), Harrod (1948) e Solow (1962). Cada definição diz que, para uma função de produção a dois insumos (*K e L*), a mudança tecnológica é neutra se deixar inalteradas as participações dos fatores ao longo de caminhos onde a relação capital-trabalho, a taxa de retorno do capital e a taxa de salários, respectivamen-

(*) "factor-augmenting rates" no original. N. do T.

(6) Em geral, classificações do progresso tecnológico procuram medir seu impacto sobre alguma variável predeterminada, isto é, a relação capital-produto, a taxa marginal de substituição, participações dos fatores, produtividade média do trabalho etc. Entretanto, essas variáveis não dependem apenas da tecnologia, mas também de ofertas proporcionais de fatores. Assim, é necessário isolar o efeito tecnológico, especificando um caminho particular ao longo do qual é medido o efeito "puro" da mudança tecnológica.

te, são constantes. Reciprocamente, a mudança tecnológica é definida como utilizadora de capital (o mesmo que poupadora de trabalho) ou utilizadora de trabalho (o mesmo que poupadora de capital) conforme cada definição se, respectivamente, a participação do capital ou do trabalho aumenta.

A neutralidade de Hicks, que requer a constância das participações relativas ao longo de um caminho onde a relação capital-trabalho é constante, visa a analisar uma situação de curto prazo quando as disponibilidades de capital e trabalho são fixas.

A definição de Harrod leva em consideração ajustamentos a longo prazo na disponibilidade de fatores, mas impõe a restrição de uma taxa constante de retorno sobre o capital. Essa hipótese está no espírito da visão "neo-keynesiana", segundo a qual os capitalistas, em economias maduras, determinam sua taxa média de lucro, que, portanto, deixa de ser uma variável determinada exogenamente.

Finalmente, a definição de Solow é consistente com uma economia subdesenvolvida onde a taxa de salário, supostamente ao nível de subsistência, não pode ser diminuída e não se permite seu aumento pelos conhecidos mecanismos descritos pelos modelos de oferta ilimitada de trabalho(7).

Originalmente, as três classificações de mudança tecnológica não foram explicitamente definidas em termos de participações de fatores. A neutralidade segundo Hicks demandava uma taxa marginal de substituição constante a uma dada relação capital-trabalho de pleno emprego. Harrod requeria uma relação capital-produto constante a uma dada taxa de juros; Solow estipulava uma relação trabalho-produto constante, dada uma taxa de salário fixa.

Como Beckman e Sato (1968) demonstraram em sua tentativa de definir novos tipos de progresso técnico, quando participações de fatores são introduzidas como variáveis a serem consideradas invariantes com referência a relações capital-trabalho, capital-produto e trabalho-produto, tais definições provaram ser coincidentes com as fornecidas, respectivamente, por Hicks, Harrod e Solow. De fato, isso pode ser visto de maneira bastante direta.

Definindo $F(.)$ como a função de produção neoclássica, π_K como a participação do capital e pontos como diferenciação total com relação ao tempo,

$$\pi_K = \frac{F_K K}{Y} = \frac{rK}{Y} \qquad (1)$$

deve implicar que se o progresso tecnológico é neutro na definição de Harrod, então $\dot{\pi}_K = 0 = \dot{\pi}_L$, uma vez que $\dot{\pi}_K$, r e K/Y não são todas independentes. (O caso da neutralidade segundo Solow pode ser facilmente mostrado usando-se a expressão $\pi_L = \frac{F_L L}{Y} = \frac{wL}{Y}$). Para o progresso tecnológico neutro segundo Hicks, a equivalência de sua definição original àquela em termos de participações de fatores pode ser mostrada como a seguir: define-se $p = \frac{r}{w}$ e, já que a minimização de custo iguala p à taxa marginal de substituição,

$$\frac{\pi_K}{\pi_L} = \frac{rK}{WL} = pk \qquad (2)$$

o que deve implicar que $\dot{\pi}_K = 0 = \dot{\pi}_L$, já que π_K, π_L, p e k não são todas independentes. Expor a neutralidade de Hicks em termos de participações de fatores é conveniente, no sentido de que ela estabelece o viés da mudança tecnológica no caso de 'n' fatores através de uma única medida, ao passo que a definição original, formulada em termos de taxas marginais de subs-

(7) FEI & RANIS (1965) usaram a definição de Solow em sua análise de mudança tecnológica em economias subdesenvolvidas.

tituição, conduziria a *n-1* medidas do viés para cada fator[8].

O Caso Geral

Utilizando resultados obtidos por Ferguson (1971) e por Diamond, Mcfadden e Rodriguez em Fuss *et al* (1978), é possível derivar relações que clarificam o papel do progresso tecnológico no crescimento. Começando com a função de produção usual

$$Y = F(K, L, t) \tag{3}$$

define-se a taxa de progresso tecnológico como[9]

$$T = \frac{F_t}{F} = \frac{KF_{Kt} + LF_{Lt}}{F} \tag{4}$$

e

$$T = \frac{F_t}{F} = \frac{KF_{Kt} + LF_{Lt}}{KF_K + LF_L} \tag{5}$$

Seguindo a definição original de Hicks, faça-se B representar o viés do progresso tecnológico.

$$B = \frac{\partial lnM}{\partial t} = \frac{\partial\left(\frac{F_K}{F_L}\right)}{\partial t}\frac{F_L}{F_K} = \frac{F_{Kt}}{F_K} - \frac{F_{Lt}}{F_L} \tag{6}$$

onde M denota a taxa marginal de substituição técnica entre capital e trabalho[10]. O progresso tecnológico segundo Hicks é utilizador de capital (poupador de trabalho), neutro ou utilizador de trabalho (poupador de capital) dependendo de ser $B \lesseqgtr 0$.

Usando as expressões (5) e (6), é possível expressar a taxa total de mudança dos produtos marginais dos fatores em termos da taxa das mudanças tecnológicas, do viés do progresso tecnológico e das participações dos fatores[11].

$$\hat{F} = T + \pi_K\hat{K} + \pi_L\hat{L} = T + \pi_K\hat{k} + \hat{L} \tag{7}$$

$$\hat{r} = T + \pi_L\left(B - \frac{\hat{k}}{\sigma}\right) \tag{8}$$

$$\hat{w} = T - \pi_K\left(B - \frac{\hat{k}}{\sigma}\right) \tag{9}$$

$$\hat{S} = \left(\frac{\hat{\pi}_K}{\pi_L}\right) = B + \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)\hat{k} \tag{10}$$

onde π_i é a participação do fator i na renda total, σ é a elasticidade de substituição, o acento circunflexo denota diferenciação logarítmica, r é o retorno do capital, w é a taxa de salário e S é a participação relativa dos fatores.

---

(8) O mesmo raciocínio aplica-se às definições de mudança tecnológica de Harrod e Solow.

(9) Um subscrito denota diferenciação parcial, pontos denotam derivação total com relação ao tempo e acentos circunflexos denotam diferenciações logarítmicas com respeito ao tempo.

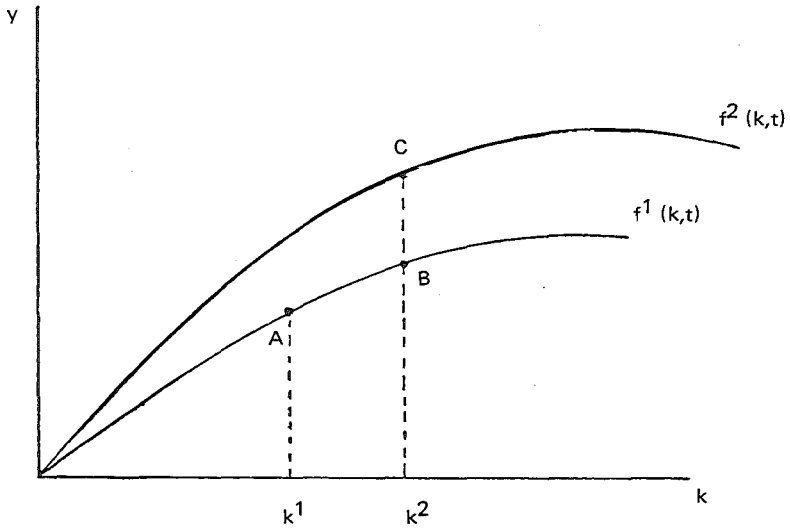
(10) Alternativamente, usando a função de produção na forma intensiva,

$$B = \frac{\partial ln M}{\partial t} = \frac{\partial ln}{\partial t}\left(\frac{fk}{f - k f_k}\right) = \frac{f_{kt}f - f_k f_t}{f_k(f - k f_k)}$$

(11) Para um tratamento detalhado deste assunto, veja o apêndice. Para chegarmos às expressões (7) a (10), supusemos homogeneidade linear e comportamento maximizador de lucros em um mercado competitivo. A suposição de homogeneidade linear foi feita com propósitos heurísticos, já que com isso podemos derivar σ, a elasticidade de substituição de fatores. Se $F(.)$ não fosse homogênea, σ teria que ser substituída por alguma expressão, também uma função das mesmas variáveis que determinam σ, a qual também refletiria "substituição de fatores", embora não na forma convencional expressa pela elasticidade de substituição.

FIGURA 1

OS COMPONENTES TECNOLÓGICO E FATORIAL DO CRESCIMENTO DO PRODUTO



Algumas conclusões importantes podem ser extraídas das relações acima derivadas, as quais evidenciam a importância da mudança tecnológica na determinação dos valores de algumas variáveis-chave em um sistema econômico.

A taxa de crescimento do produto pode ser decomposta em duas partes distintas: a) o crescimento do produto atribuível somente ao progresso tecnológico e que resulta exclusivamente de deslocamentos da função de produção, e b) crescimento do produto atribuível a aumento na oferta de fatores de produção e que resulta exclusivamente de movimentos ao longo da função de produção estática. Na figura 1, o primeiro dos efeitos de crescimento é representado por um movimento de *B* para *C*, enquanto o segundo é mostrado pelo movimento de *A* para *B*.

Como resultado da existência desses dois componentes, equações de crescimento de preços de fatores e a equação de crescimento da participação relativa dos fatores são também dependentes de componentes tecnológicos e fatoriais. De fato, as equações (8) e (9), de crescimento dos preços dos fatores, são dependentes de quatro variáveis diferentes, a saber: da taxa de progresso tecnológico *(T)*, do viés do progresso tecnológico *(B)*, da taxa de crescimento dos fatores de produção $(\hat{k})$ e da elasticidade de substituição (σ). As variáveis T, B e σ são componentes tecnológicos, enquanto $\hat{k}$ é o componente fatorial.

A partir das equações (8) e (9) pode-se ver que a taxa de progresso tecnológico T tem um efeito positivo sobre os preços de ambos os fatores, visto que ela aumenta seus produtos marginais. Por outro lado, os demais componentes do crescimento afetam os preços dos fatores em diferentes direções.

O viés de Hicks *(B)* aumentará o crescimento da taxa de retorno do capital se o

progresso tecnológico for utilizador de capital ($B > 0$). Inversamente, ele tenderá a reduzi-la se o progresso tecnológico for utilizador de trabalho ($B < 0$). *Mutatis mutandis*, B afetará o crescimeto da taxa de salário. Naturalmente, B não tem efeito sobre os preços dos fatores se o progresso tecnológico é neutro "a la" Hicks ($B = 0$).

A expressão $\frac{\hat{k}}{\sigma}$ nas equações (8) e (9) mostra o efeito de mudanças na intensidade dos fatores "corrigidas" pela possibilidade de substituição dos fatores na produção. A elasticidade de substituição tanto pode amortecer como realçar o efeito de mudanças dos fatores sobre o crescimento de seus preços, dependendo de ser $\sigma \gtreqless 1$. Se $\sigma > 1$, o efeito (positivo ou negativo) de mudanças na intensidade dos fatores sobre seus preços será amortecido, já que a facilidade de subtituição entre os fatores implícita na elasticidade de substituição maior que a unidade compensará parcialmente a influência das mudanças nas ofertas dos fatores sobre os preços dos mesmos(12). Se $\sigma < 1$, o resultado das fracas possibilidades de substituição aumentará o efeito de mudanças na oferta dos fatores sobre seus preços. Naturalmente, se $\sigma = 1$, mudanças nas ofertas dos fatores afetam seus preços sem qualquer interferência das possibilidades de substituição entre os fatores. Está claro, portanto, que não se podem extrair conclusões não-ambíguas acerca dos efeitos da mudança tecnológica sobre a remuneração dos fatores sem levar em consideração as ofertas e a substituição entre os mesmos.

É possível, por exemplo, que uma mudança tecnológica utilizadora de capital ($B > 0$) esteja associada a uma queda na taxa de retorno do capital se $\pi_L \frac{\hat{k}}{\sigma} > T + \pi_L B$; similarmente, uma mudança tecnológica utilizadora de trabalho ($B < 0$) pode estar associada a uma elevação da taxa de retorno do capital se $T > |\pi_L (B - \hat{K}/_\sigma)|$ (13).

Podemos apenas afirmar que, supondo $\hat{k} = 0$ (i.e., as ofertas de fatores não aumentam, ou então crescem em igual proporção), uma mudança tecnológica utilizadora de capital sempre elevará a taxa de retorno do capital e diminuirá a taxa de salários, e que uma mudança tecnológica utilizadora de trabalho terá efeito oposto.

Aqui, novamente, é importante salientar a diferença entre as abordagens macro e micro. Enquanto no curto prazo, ao nível macro, é concebível ser $\hat{k} = 0$, a intensidade do fator k nunca é uma constante ao nível da firma individual sob suposições competitivas; a firma individual, na tentativa de minimizar seus custos, sempre alterará sua relação capital-trabalho como resultado de mudanças nos preços dos fatores causadas por progresso tecnológico viesado.

Finalmente, a equação (10) indica que a participação do capital aumentará relativamente à do trabalho, supondo $\hat{k} = 0$, se o viés tecnológico for utilizador de capital, e vice-versa se utilizador de trabalho.

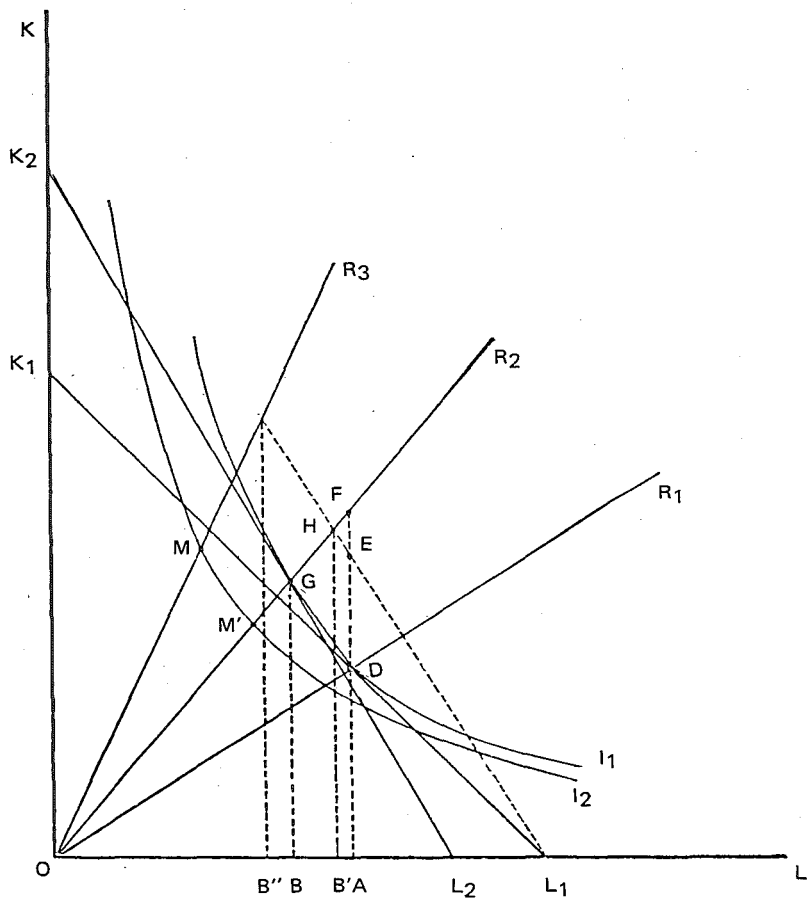
Se as intensidades dos fatores (k) se alteram, seu efeito "corrigido" $(1 - \frac{1}{\sigma})\hat{k}$ impede-nos de extrair quaisquer conclusões *a priori* acerca dos efeitos da mudança tecnológica sobre as participações dos fatores sem levar em consideração valores específicos para todas as variáveis. Dependendo do valor de σ, a elasticidade de substituição, até mesmo uma mudança tecnológica utilizadora de capital pode estar associada a uma queda na participação relativa do capital. Seria esse o caso se, por exemplo, a intensidade de capital aumentasse ($\hat{k} > 0$) e a substituição do fator fosse difícil ($\sigma < 1$); como resultado, a taxa de retorno do capital diminuiria (quanto menor a elasticidade de substitui-

(12) O efeito-substituição na teoria da produtividade é sempre negativo.

(13) Supomos que T é não-negativo; em outras palavras, não há retrocesso tecnológico.

FIGURA 2

PROGRESSO TÉCNICO VIESADO E NÃO-VIESADO



ção, maior a intensidade da diminuição), e se o viés utilizador de capital do progresso tecnológico não fosse forte o suficiente para compensar a diminuição $(B < | (1 - \frac{1}{\sigma}) \hat{k} |)$, a participação relativa do capital cairia com relação à do trabalho.

Essas relações podem ser mostradas graficamente como a seguir. Inicialmente, o equilíbrio é obtido no ponto D, na figura 2, com a relação capital-trabalho maximizadora de lucros dada por k_1 e preços relativos dados pela inclinação da linha K_1L_1. Participações relativas dos fatores $(\frac{\pi K}{\pi L})$, medidas em termos de unidades de trabalho, igualam-se a AL_1/OA. Suponhamos, agora, que dado um acréscimo macroeconômico na relação agregada capital-trabalho, os preços relativos dos fatores se alterem, igualando a inclinação da linha K_2L_2. O novo equilíbrio deslocar-se-ia para o ponto G, onde as participações relativas igualariam BL_2/OB (estamos supondo que não há progresso tecnológico, isto é, a isoquanta I_1 não se desloca).

A alteração percentual na relação capital-trabalho pode ser identificada como $\hat{k} = \left(\frac{FA}{OA} - \frac{DA}{OA}\right) \div \frac{DA}{OA} = \frac{FD}{DA}$. Adicionalmente, traçando-se a linha auxiliar HL_1, paralela a K_2L_2, pode-se identificar a alteração percentual na razão dos preços dos fatores

como sendo

$$\hat{p} = \left(\frac{EA - DA}{AL_1 \; AL_1}\right) \div \frac{DA}{AL_1} = \frac{ED}{DA}$$

sendo a elasticidade de substituição igual a $\hat{k}/p$, $\sigma = \frac{FD}{ED}$.

Neste caso particular podemos ver que, sendo $\sigma > 1$ e $\hat{k} > 0$, a alteração percentual nas participações relativas foi positiva. Utilizando as propriedades dos triângulos semelhantes OGL_2 e OHL_1, pode-se observar que, de fato, as participações relativas aumentaram de $\frac{AL_1}{OA}$ para $\frac{B'L_1}{OB'} = \frac{BL_2}{OB}$.

Obviamente, ocorreria o oposto se a elasticidade de substituição fosse menor que a unidade.

Pode-se observar, também, que se a elasticidade de substituição tivesse sido igual à unidade (situação em que a relação capital-trabalho k_2 teria passado para o ponto E, o qual teria coincidido com o ponto F), as participações relativas não se teriam alterado, uma vez que o ponto B' teria coincidido com o ponto A. Os mesmos resultados seriam verdadeiros se a isoquanta I_1 houvesse se deslocado paralelamente, ou seja, se o progresso técnico tivesse sido o neutro, segundo Hicks. Isso pode ser visto facilmente já que, por definição, a neutralidade implica que, ao longo de qualquer relação capital-trabalho, os preços relativos de fatores devem ser constantes, caso contrário as participações dos fatores não terão sido constantes e as condições de neutralidade segundo Hicks não terão sido satisfeitas.

Isso é simplesmente a representação gráfica do fenômeno expresso na equação (10), pelo fato de o valor do viés (B) segundo Hicks, ser igual a zero tanto no caso de progresso técnico inexistente como no caso de progresso técnico neutro.

Suponhamos agora que o progresso técnico tivesse sido utilizador de capital, isto é, $B > 0$ na equação (10). Supondo que os preços relativos de fatores determinados macroeconomicamente se deslocassem do indicado pela inclinação de K_1L_1 para o dado pela inclinação de K_2L_2, e que o valor da elasticidade de substituição permanecesse o mesmo, isto é, igual a $\frac{FD}{ED}$, então o efeito final sobre as participações relativas seria composto de duas partes. A primeira é o deslocamento, dado $\sigma = \frac{FD}{ED}$, da relação inicial de $\frac{AL_1}{OA}$ para $\frac{BL_2}{OB} = \frac{B'L_1}{OB'}$, devido inteiramente à mudança nos preços relativos dos fatores. A segunda parte é formada pelo deslocamento viesado da isoquanta I_1 para I_2, representado por um movimento do ponto G para o ponto M, onde a isoquanta I_2 é tangente a uma linha (não traçada) paralela a K_2L_2.

O movimento de G para M pode ser adicionalmente decomposto em duas partes. De G para M' o movimento é devido ao efeito da mudança técnica viesada *antes que substituições de fatores se verifiquem.* Em equilíbrio, a eficiência na produção requereria, em M', que o preço do capital aumentasse com relação às taxas de salários *se a relação capital-trabalho k_2 tivesse que ser mantida.* Como vimos, entretanto, ao nível microeconômico, é a relação capital-trabalho que se ajustará, e não os preços relativos dos fatores. Assim, a relação capital-trabalho é adicionalmente aumentada para k_3, para que os preços relativos de fatores se mantenham compatíveis com a eficiência na produção no ponto M. O segundo movimento, portanto, é um efeito-substituição de fator, de M' para M, podendo-se mostrar que este, a dados preços de fatores, aumenta ainda mais a participação do capital com relação à do trabalho.

Em resumo, a participação relativa dos fatores mostrou o seguinte movimento: no ponto D ela era igual a $\frac{AL_1}{OA}$; no ponto G aumentou para $\frac{B'L_1}{OB}$ e, finalmente no ponto M tornou-se $\frac{B''L_1}{OB''}$

As expressões (7) a (10) derivadas an-

teriormente podem também ajudar a elucidar o relacionamento entre a definição de neutralidade segundo Hicks e outras.

A definição de neutralidade segundo Harrod requer que $\hat{r} = 0$ e $\hat{v} = 0$, onde v é a relação capital-produto. Usando a equação (7) e o fato de que $(\hat{v}^{-1}) = T - \pi_L \hat{k}$(14), ambos igualados a zero, dá-se a condição para a mudança tecnológica utilizadora de capital, neutra e utilizadora de trabalho segundo Harrod, como a seguir:

$$B + \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)\hat{k} \gtreqless 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{utilizadora de capital} \\ \text{neutra} \\ \text{utilizadora de trabalho} \end{array} \right. \quad (11)$$

Como pode ser visto, se a mudança tecnológica é a neutra segundo Hicks $(B = 0)$, ela será também a neutra segundo Harrod somente se $\sigma = 1$. Esse é o conhecido resultado consoante o qual, para a função de produção Cobb—Douglas, as neutralidades segundo Hicks e Harrod coincidem.

Um índice similar pode ser encontrado para a definição de mudança tecnológica de Solow. A neutralidade requer $\hat{w} = 0$ e $\hat{y} = 0$, onde y é a relação produto-trabalho. Usando a equação (9) e já que $\hat{y} = T + \pi_K \hat{k}$, obtemos as seguintes condições para o progresso tecnológico segundo Solow:

$$B + \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)\hat{k} \lesseqgtr 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{utilizador de capital} \\ \text{neutro} \\ \text{utilizador de trabalho,} \end{array} \right. \quad (12)$$

as quais são análogas às condições de Harrod em (11)(15).

(14) Ver apêndice.

(15) Com as funções de produção definidas de forma geral como em (3), os conceitos de tipos de mudança tecnológica de Solow e Harrod coincidem. De fato, eles são a mesma coisa ao substituirmos L por K e w por r. São conceitos estritamente análogos.

A Hipótese Fator-Aumentativa

Até agora, temos trabalhado com uma forma geral de função de produção. Para trabalho empírico é necessário uma suposição mais específica sobre o progresso tecnológico. Uma forma importante de progresso tecnológico é a hipótese fator-aumentativa(16).

Sob essa suposição, a função de produção neoclássica geral(3) pode ser escrita como: $Y = F(K,L,t) = G(a(t)\,K, b(t)\,L)$ (13)

Essa especificação da função de produção é uma especialização de forma geral e, como tal, implica algumas restrições bastante fortes. Burmeister *et al* (1969) apresentam um claro enunciado das condições necessárias e suficientes que devem estar presentes para a mudança tecnológica fator-aumentativa, e discutem o significado das restrições implícitas de maneira bastante esclarecedora(17).

A partir do lema que determina tais condições necessárias e suficientes eles derivam três teoremas que afirmam:

a) A mudança tecnológica é a neutra segundo Harrod se, e somente se, existem funções $a(t)$ e $b(t)$ tais que F pode ser representada na forma fator-aumentativa com $b(t) \equiv 1$.
b) A mudança tecnológica é a neutra segundo Hicks se, e somente se, F pode ser representada na forma fator-aumentativa com $b(t) \equiv a(t)$.
c) A mudança tecnológica é a neutra se-

(16) Entre outros, BURMEISTER *et al* (1969, 1970), UZAWA (1961) e BECKMAN *et al* (1968) derivam condições para a função de produção $Y = F(K,L,t)$ admitir representação na forma fator-aumentativa.

(17) Em seu trabalho de 1970, eles também apresentam um bom resumo sobre a importância e as implicações do progresso tecnológico fator-aumentativo em modernas teorias de crescimento. Ver também SATO (1970).

gundo Solow se, e somente se, F pode ser representada na forma fator-aumentativa com $a(t) \equiv 1$.

Supondo ser G homogênea linear, a função pode ser representada, na forma intensiva, por:

$$Y = G\,(a\,(t)\,K, b\,(t)\,L) =$$

$$= b\,(t)\,L\,G\left(\frac{a\,(t)\,K}{b\,(t)\,L}, 1\right) =$$

$$= b\,(t)\,L\,g\,(x) \qquad (14)$$

onde $x = \frac{a(t)K}{b(t)L}$ é a relação de fatores expressa na forma fator-aumentativa. Em outras palavras, a relação capital-trabalho é agora a razão entre capital e trabalho medidas, em ambas as magnitudes, em unidades de eficiência, em oposição às unidades naturais como feito previamente. O progresso tecnológico na forma fator-aumentativa é representado *como se* os fatores de produção tivessem seus serviços "aumentados" pelas funções $a(t)$ e $b(t)$, embora seus serviços, medidos em unidades naturais (digamos, homem/horas), tenham permanecido inalterados(18). Usando as expressões

$$\sigma = \frac{F_K F_L}{F F_{LK}} = \frac{G_1 G_2}{G\,G_{12}} = -\frac{g'\,(g - xg')}{xgg''} \qquad (15)$$

$$\pi_K = \frac{xg'}{g} \qquad (16)$$

e as seguintes propriedades de funções homogêneas lineares

$$G \equiv G_1\,a\,(t)\,K + G_2\,b\,(t)\,L, \qquad (17)$$

$$O \equiv G_{11}\,a\,(t)\,K + G_{21}\,b\,(t)\,L \quad \text{e} \qquad (18)$$

(18) O aumento nas unidades de eficiência dos fatores de produção resultante de mudança tecnológica fator-aumentativa não deve ser interpretado como significando melhoras no capital ou trabalho tais como educação, novos modelos de equipamentos, resultados incorporados de P&D e etc. O progresso tecnológico fator-aumentativo é um tipo de progresso tecnológico **desincorporado.**

$$O \equiv G_{12}\,a\,(t)\,K + G_{22}\,b\,(t)\,L, \qquad (19)$$

é possível diferenciar (14) e derivar a taxa de progresso técnico e o viés segundo Hicks sob a hipótese fator-aumentativa:

$$T = \pi_K\,\hat{a} + \pi_L\,\hat{b} \qquad (4a)$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)(\hat{a} - \hat{b}) \qquad (6a)$$

A expressão (6a) define uma mudança tecnológica neutra segundo Hicks se $(\hat{a}-\hat{b}) = 0$, uma mudança tecnológica utilizadora de capital se $(\hat{a} - \hat{b}) > 0$ e $\sigma > 1$ ou se $\sigma < 1$ e $(\hat{a} - \hat{b}) < 0$ e uma mudança tecnológica utizadora de trabalho se $\sigma > 1$ e $(\hat{a} - \hat{b}) < 0$ ou $\sigma < 1$ e $(\hat{a} - \hat{b}) > 0$(19).

Utilizando os resultados obtidos até agora e assumindo mudanças tecnológicas fator-aumentativas, as expressões (7), (8), (9) e (10) reduzem-se a:

$$\hat{G} = (\pi_K \hat{K} + \pi_L \hat{L}) + (\pi_K \hat{a} + \pi_L \hat{b}) \qquad (7a)$$

$$\hat{r} = \hat{a} - \pi_L \frac{\hat{x}}{\sigma} = \hat{a} - \frac{\pi_L}{\sigma}\,[(\hat{a} - \hat{b}) + \hat{k}] \qquad (8a)$$

$$\hat{w} = \hat{b} + \pi_K \frac{\hat{x}}{\sigma} = \hat{b} + \frac{\pi}{\sigma} K\,[(\hat{a} - \hat{b}) + \hat{k}] \qquad (9a)$$

$$\hat{S} = \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)\hat{x} = \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)(\hat{a} - \hat{b} + \hat{k}) \qquad (10a)$$

A expressão (7a) mostra que a taxa de crescimento do produto pode ser decomposta em duas partes: uma, devida a aumentos nas quantidades de serviços de fator medidas em unidades naturais, e outra devida a aumentos na "eficiência" de tais serviços. Como anteriormente, a distinção é feita entre um movimento ao longo de uma função de produção e um deslocamento desta, isto é, progresso tecnológico propriamente dito.

(19) Naturalmente, no caso Cobb-Douglas, $\sigma = 1$, e a mudança tecnológica é sempre neutra, segundo as definições de Hicks, Harrod ou Solow.

O crescimento das remunerações dos fatores (equações (8a) e (9a)) depende dos índices incrementadores de fator *(a(t) e b(t))*, do aumento dos serviços de fatores medido em unidades naturais e da elasticidade de substituição dos fatores. Aqui são possíveis diferentes combinações de valores para essas variáveis, tornando difícil determinar regras gerais relacionando progresso tecnológico e crescimento das remunerações dos fatores. Como exemplo, suponhamos que o progresso tecnológico é o neutro segundo Hicks, isto é, $\hat{a} - \hat{b} = 0$, e suponhamos que no curto prazo as ofertas dos fatores são fixas, isto é, $\hat{k} = 0$. Então $\hat{r} = \hat{w}$ e $\hat{s} = 0$, como esperaríamos da definição de neutralidade de Hicks. Suponhamos agora que $\hat{a} > \hat{b} > 0$. Neste caso, se $\sigma < 1$, a mudança tecnológica é a utilizadora de trabalho segundo Hicks, já que $B < 0$. Como esperado, a taxa de salário aumentaria e a taxa de participação relativa dos fatores diminuiria, conduzindo a uma distribuição de renda mais favorável para o trabalho. A taxa de retorno do capital, por outro lado, poderia aumentar, permanecer a mesma ou diminuir, dependendo de ser $\frac{\hat{a}}{a-b} \lesseqqgtr \frac{\pi L}{\sigma}$.

Em qualquer dos casos, todavia, a participação do trabalho na renda aumentaria com relação à do capital. Levando em conta mudanças em k, todos esses resultados poderiam ser revertidos, mostrando que apenas a consideração de valores específicos para todas as variáveis permitiria conclusões sobre os efeitos da mudança tecnológica em uma economia dinâmica e em crescimento.

Finalmente, é possível derivar índices para os vieses de Harrod e Solow a partir das expressões deduzidas até agora.

A mudança tecnológica neutra segundo Harrod requer uma relação capital-produto constante $(\hat{v} = 0)$ e uma constante taxa de retorno do capital $(\hat{r} = 0)$. Vimos como essas duas condições implicam $\hat{S} = 0$, uma vez que elas não são todas independentes. Quaisquer das duas condições acima implicam que a terceira é igualmente satisfeita. Então $\hat{r} = 0$ implica que $\hat{x} = \frac{\hat{a}\,\sigma}{\pi_L}$; substituindo na expressão (10a) temos:

$$(\sigma - 1)\ \frac{\hat{a}}{\pi_L} \lesseqqgtr 0 \begin{cases} \text{utilizadora de capital} \\ \text{neutra} \\ \text{utilizadora de trabalho} \end{cases} \quad (11a)$$

Analogamente, um índice para o viés de Solow é dado por:

$$(1 - \sigma)\ \frac{\hat{b}}{\pi_K} \lesseqqgtr 0 \begin{cases} \text{utilizador de capital} \\ \text{neutro} \\ \text{utilizador de trabalho} \end{cases}$$

Em ambos os casos, a mudança tecnológica é neutra se $\sigma = 1$. Se $\sigma \neq 1$, o viés utilizador de fator dependerá de ser $\sigma \gtreqless 1$. Por exemplo, se $\sigma < 1$, uma mudança tecnológica neutra segundo Hicks $\hat{a} = \hat{b} > 0$ resulta em progresso utilizador de trabalho segundo Harrod e utilizador de capital segundo Solow; se $\sigma > 1$, resulta em vieses utilizador de capital segundo Harrod e utilizador de trabalho segundo Solow.

No apêndice 1 são apresentadas as expressões correspondentes para o caso de *'n'* fatores, às equações (7) a (10) e (7a) a (10a).

Conclusões

Este artigo procurou apontar a complexidade de testar hipóteses sobre mudança tecnológica sem empiricamente estimar as funções de produção e/ou custo. A principal dificuldade é distinguir mudança tecnológica de substituição de fatores. A equação para *'n'* fatores, dada no apêndice 1, análoga à equação (10a), mostra que, embora participações e intensidades de fatores possam ser observadas empiricamente, não é possível, a partir delas, determinar simultaneamente as diferenças nas taxas de aumento de fatores e as elasticidades de substituição. Essa impossibilidade estende-se às formulações mais

gerais do modelo tecnológico viesado desenvolvidas neste trabalho. Obviamente, supor valores específicos para as elasticidades de substituição de fator permitiria inferências sobre vieses da mudança tecnológica. Mas uma determinação completa de todos os parâmetros envolvidos no estudo da mudança tecnológica viesada requereria o uso de poderosas formas funcionais que não utilizam as excessivamente restritivas funções de produção Cobb-Douglas ou Elasticidade de Substituição Constante.

Apêndice 1

TABELA DAS EXPRESSÕES PARA $\hat{F}$, $\hat{r}$, $\hat{W}$ e $\hat{S}$, SOB OS CASOS GERAL E FATOR-AUMENTATIVO, PARA 2 E PARA 'N' FATORES(*)

	Caso Geral		Caso Fator-Aumentativo	
	$Y = F(K, L, t)$	$Y = F(X_1, X_2, \ldots, X_n, t)$	$Y = F(b(t)L, a(t)K, t)$	$Y = F(a_1(t)X_1, a_2(t)X_2, \ldots, a_n(t)X_n, t)$
$\hat{F} =$	$T + \pi_K \hat{K} + \pi_L \hat{L}$	$T + \sum_i \pi_i \hat{X}_i$	$(\pi_K \hat{a} + \pi_L \hat{b}) + (\pi_K \hat{K} + \pi_L \hat{L})$	$\sum_i \pi_i (\hat{X}_i + \hat{a}_i)$
$\hat{r}$	$T + \pi_L \left(B - \frac{\hat{K}}{\sigma}\right)$	$\hat{r}_m = \left\{ \frac{T}{\pi_m + \pi_j} + \left(\frac{\pi_j}{\pi_m + \pi_j}\right) B_{mj} - \sum_{\substack{i=j \\ m \neq i}} \left(\frac{\pi_i}{\pi_m + \pi_j}\right) \frac{F_{it}}{F_i} + \sum_{i \neq j} \frac{\pi_j}{\sigma_{mi}} \hat{K}_{ij} \right.$	$\hat{a} - \frac{\pi_L}{\sigma} [(\hat{a} - \hat{b}) + \hat{K}]$	$\hat{r}_m = \hat{a}_m + \sum_{i \neq j} \frac{\pi_i}{\sigma_{mi}} [(\hat{a}_i - \hat{a}_j) + \hat{K}_{ij}]$
$\hat{W}$	$T + \pi_K B - \frac{\hat{K}}{\sigma}$		$\hat{b} + \frac{\pi_K}{\sigma} (\hat{a} - \hat{b}) + \hat{K}$	
$\hat{S}$	$B + 1 - \frac{1}{\sigma} \hat{K}$	$B_{mj} + \hat{K}_{mj} \left(1 + \frac{\pi_m}{\sigma_{mm}} + \frac{\pi_j}{\sigma_{jj}}\right) + \sum_{\substack{i \neq j \\ i \neq m}} \left(\frac{\pi_i}{\sigma_{mi}}\right) \hat{K}_{ij} - \sum_{\substack{i \neq j \\ i \neq m}} \left(\frac{\pi_i}{\sigma_{ji}}\right) \hat{K}_{im}$	$(1 - \frac{1}{\sigma}) [(\hat{a} - \hat{b}) + \hat{K}]$	$\hat{S}_{mj} = \left\{ [(\hat{a}_m - \hat{a}_j) + \hat{K}_{mj}] \left(1 + \frac{\pi_m}{\sigma_{mm}} + \frac{\pi_j}{\sigma_{jj}}\right) + \sum_{\substack{i \neq j \\ i \neq m}} \frac{\pi_i}{\sigma_{mi}} [(\hat{a}_i - \hat{a}_j) + \hat{K}_{ij}] - \sum_{\substack{i \neq j \\ i \neq m}} \frac{\pi_i}{\sigma_{ji}} [(\hat{a}_i - \hat{a}_m) + \hat{K}_{im}] \right.$

Nota: (*) Devido ao fato de que derivar tais expressões envolve demonstrações bastante longas e tediosas, elas foram omitidas do texto, mas estão disponíveis mediante solicitação ao autor.

Apêndice 2

Para determinar as equações (7), (8), (9) e (10) para o caso geral de dois fatores, divide-se a equação (4) por F_L, multiplica-se a equação (6) por $\frac{1}{Y} = \frac{L}{F}$. Somando as duas equações obtém-se

$$\frac{T}{FL} + \frac{LB}{F} = \frac{KF_K F_{Kt} + LF_L F_{Kt}}{FF_L F_K} \qquad (20)$$

de onde segue-se que

$$\frac{F_{Kt}}{F_K} = T + \pi_L B \qquad (21)$$

$$\frac{F_{Lt}}{F_L} = T - \pi_K B \qquad (22)$$

onde π_i é a parcela na renda total recebida pelo fator i.

A seguir, diferenciando totalmente $F_K = F_K(K, L, t)$, temos

$$\dot{F}_K = F_{Kt} + F_{KK}\dot{K} + F_{KL}\dot{L} \qquad (23)$$

e observando que, para funções homogêneas lineares, a elasticidade de substituição, $\sigma = \frac{F_K F_L}{F F_{KL}}$ e que $-LF_{LL} \equiv KF_{LK}$ e, finalmente, que $-KF_{KK} \equiv LF_{KL}$ segue-se que

$$\hat{F}_K = \frac{\dot{F}_K}{F_K} = \frac{F_{Kt}}{F_K} - \frac{\pi_L}{\sigma} \hat{K} \qquad (24)$$

Substituindo (21) em (24)

$$\hat{F}_K = \frac{\dot{F}_K}{F_K} = T + \pi_L \left(B - \frac{\hat{K}}{\sigma}\right) \qquad (25)$$

e, por procedimento similar,

$$\hat{F}_L = \frac{\dot{F}_L}{F_L} = T - \pi_K \left(B \frac{\hat{k}}{\sigma}\right) \qquad (26)$$

Supondo mercados competitivos e comportamento maximizador de lucros, as equações (25) e (26) representam a taxa proporcional de mudança da taxa de retorno do capital *(r)* e da taxa de salários *(w)*, respectivamente. Adicionalmente, definindo *v* como a relação capital-produto e *M* como a taxa marginal de substituição técnica, segue-se que

$$(\hat{v}^{-1}) = T - \pi_L \hat{k}, \qquad e \qquad (27)$$

$$\hat{M} = \frac{1}{\sigma}\hat{k} - B \qquad (28)$$

o que nos permite escrever as equações (25) e (26) da forma

$$\hat{r} = T - \pi_L \hat{M} = (\hat{v}^{-1}) - \pi_L \ (\hat{s}^{-1}) \qquad (29)$$

$$\hat{w} = T + \pi_K \hat{M} = \hat{y} + \pi_K \ (\hat{s}^{-1}) \qquad (30)$$

onde y é a função de produção (3) expressa na forma intensiva, $y = f(k,t)$ e $\hat{y} = T + \pi_K \hat{k}$, e *S* é a razão de renda relativa.

A diferenciação total de (3) produz

$$\dot{F} = F_t + F_K \dot{K} + F_L \dot{L} \qquad (31)$$

Substituindo a equação (4) e as definições de π_K e *k*, obtém-se

$$\frac{\dot{F}}{F} = \hat{F} = T + \pi_K \hat{k} + \hat{L} = T + \pi_K \hat{K} + \pi_L \hat{L} \qquad (32)$$

Finalmente, a diferenciação logarítmica total de π_K produz

$$\pi_K = \hat{F}_K + \hat{K} - \hat{F} \qquad (33)$$

Substituindo as equações (25) e (32) em (33), temos

$$\hat{\pi}_K = \pi_L \left[B + \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \hat{k}\right] \qquad (34)$$

Analogamente,

$$\hat{\pi}_L = -\pi_k \left[B + \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \hat{k}\right] \qquad (35)$$

e utilizando as expressões (2), (28), (29) e (30)

$$\hat{S} = \hat{p} + \hat{k} = \hat{r} - \hat{w} + \hat{k} = B + \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \hat{k} \qquad (36)$$

A tabela do apêndice 1 mostra as expressões equivalentes para os casos de 2 e *'n'* fatores, nos casos geral e fator-aumentativo.

Referências Bibliográficas

ALBUQUERQUE, M. C. C. de. *A translog analysis of technological change and scale effects in brazilian agriculture — a case of inefficient modernization.* Ph.D. thesis, Harvard University, University Microfilm International, Ann Arbor. MI. 1985.

——— *Measures of technological change and the use of the translog function.* EAESP/FVG, 1985a, (mimeo)

ALTMANN, F., KYN, O. & WAGENER, H. J. (eds). *On the measurement of factor productivities: theoretical and empirical results.* Papers and Proceedings of the 2nd Reisensburg Symposium, june, 1974. Vandenhoeck & Ruprech, Gottingen, 1976.

ARROW, K. Economic welfare and the allocation of resources for invention, *In: The rate and direction of inventive activity.* Princeton, Princeton University Press, 1962 (reprinted in ROSEMBERG, 1971).

BECKMANN, M. J. & SATO, R. Neutral

inventions and production functions. *Review of Economic Studies,* January, 1968.

BINSWANGER, H. P. & RUTTAN, V. (edis). *Induced innovation — technology, institutions and development,* Baltimore, Johns Hopkins University Press, 1978.

BLAUG, M. A survey of the theory of process-innovations. *Economica,* February, 1963.

BROWN, M. *Theory and measurement of technological change.* Cambridge, Cambridge University Press, 1966.

BURMEISTER, E. & DOBELL, A. R. Disembodied technological change with several factors. *Journal of Economic Theory,* June, 1969.

——— *Mathematical theories of Economic growth.* New York, MacMillan Co.,1970.

CORRY, B. A. The role of technological innovation in theories of income distribution. Papers and Proceedings. *American Economic Review,* May, 1966.

FEI, J. & RANIS, G. Innovational intensity and factor Bias in the theory of growth. *International Economic Review* 6, 1965.

FELLNER, E. Two propositions in the theory of induced innovation. *Economic Journal,* June, 1961.

——— Profit maximization, utility maximization and the rate and direction of innovation. Papers and Proceedings. *American Economic Review,* May, 1966.

——— Empirical support for the theory of induced innovations. *Quarterly Journal of Economics,* November, 1971.

FERGUSSON, C. E. *The neo-classical theory of production and distribution.* Cambridge, Cambridge Univerty Press, 1971.

FUSS, M. & McFADDEN, D. (eds). *Production economics: A dual approach to theory and applications.* Contributions to economic analysis. New York, North Holland, 1978, v. 1.

HAMBERG, D. Production functions, innovations and economic growth. *Journal of Political Economy.* June, 1959.

HARROD, R. F. *Toward a dynamic economics.* London, MacMillan. 1948.

HEERTJE, A. *Economics and technical change.* London, Weindenfeld and Nicolson, 1973.

HICKS, J. R. *Theory of wages.* London, MacMillan, 1932.

JONES, H. G. *An introduction to modern theories of economic growth.* New York, McGraw Hill, 1976.

JORGENSON, D. W. The embodiment hypothesis. *Journal of Political Economy,* V. LXXIV, (1), February, 1966.

KENDRICK, J. W. & SATO, R. Factor prices, productivity and economic growth. *American Economic Review,* December, 1963.

KENNEDY, C. Induced Bias in innovation and the theory of distribution. *Economic Journal,* LXXIV, 1964.

KENNEDY, C. & THIRLWALL, A. P. A surveys in applied economics: technical progress. *Economic Journal,* March, 1972.

NADIRI, M. I. Some approaches to the theory and measurement of total factor productivity: a survey. *Journal of Economic Literature,* 1970.

NEHER, P. A. *Economic growth and development: A mathematical introduction.* New York, John Wiley & Sons Inc., 1971.

RESEK, R. Neutrality of technical progress. *Review of Economics and Statistics,* February, 1963.

ROSEMBERG, N. (ed). *The economics of technological change.* Baltimore, Penguin Modern Economics Readings, 1971.

——— *Perspectives on technology.* Cambridge, Cambridge University Press, 1976.

RUTTAN, V. Usher and Schumpeter on invention, innovation and technological change. *Quarterly Journal of Economics,* November, 1959.

SALTER, W. E. G. Productivity and technical change. Cambridge University Press, 1960.

SAMUELSON, P. A. A theory of induced innovations along Kennedy-Weizsacker lines. *Review of Economics and Statistics,* XLVII, 1965.

SATO, R. The estimation of Biased technical progress and the production function. *International Economic Review, 11*(2), June, 1970.

SCHMOOKLER, J. Economic sources of inventive activity. *Journal of Economic History,* March, 1962.

SHELL, K. Toward a theory of inventive activity and capital accumulation papers and proceedings. *American Economic* Review, May, 1966.

SOLOW, R. Technical change and the aggregate production function. *Review of Economics and Statistics,* August, 1957.

———. Technical progress, capital formation and economic growth. Papers and proceedings. *American Economic Review,* May, 1962.

UZAWA, H. Neutral inventions and the stability of growth equilibrium. *Review of Economic Studies,* 28, 1961.